M_α je souvislá $\Rightarrow$ $B \cap M_\alpha = \emptyset$ (α libovolné)

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in a} M_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in a} \underbrace{(B \cap M_\alpha)}_{=\emptyset} = \emptyset$$

(X, τ) – topologický prostor

Důsledek. Každá neprázdná souvislá podmn. X je obsažená v nějaké (právě jedné) maximální (vzhledem k $\subset$) souvislé podmn. v X.

Speciálně každý bod v X je obsažen v nějaké (právě jedné) maximální souvislé podmn.

Důkaz. $\emptyset \neq N \subset X$, souvislá

$\mathcal{M} := \{ M \subset X ; N \subset M, M$ je souvislá $\}$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$, neboť $N \in \mathcal{M}$

$\tilde{N} := \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$, tvrzení $\Rightarrow$ $\tilde{N}$ je souvislá $\left(\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M \supset N \neq \emptyset \right)$

$\tilde{N}$ je maximální souvislá podmn. (samostatně)

Pozn. Ekvivalence na X: $x, y \in X$, $x \sim y \overset{DEF}{\Longleftrightarrow} \exists M \subset X$ souvislá, $x, y \in M$

Potom třídy ekvivalence jsou právě maximální souvislé podmn.

Definice. Maximální souvislé podmn. X nazveme souvislé komponenty X.

(souvislé komponenty jsou navzájem disjunktní)

Tvrzení. Buďte $M \subset X$ souvislá podmn., $x \in \overline{M}$. Potom $M \cup \{x\}$ je souvislá podmn.

Důkaz. Mějme $A, B \in \tau$, $A \cap B \cap (M \cup \{x\}) = \emptyset$, $M \cup \{x\} \subset A \cup B$

Máme ukázat: $A \cap (M \cup \{x\}) = \emptyset$ nebo $B \cap (M \cup \{x\}) = \emptyset$

Pro určitost $x \in A \Rightarrow A$ je otevř. okolí bodu x, $x \in \overline{M}$

$\Rightarrow A \cap M \neq \emptyset$, přitom M souvislá $\Rightarrow B \cap M = \emptyset$

(určitě $M \subset A \cup B$, $A \cap B \cap M = \emptyset$)

současně $x \notin B$, odtud $B \cap (M \cup \{x\}) = \emptyset$

Důsledek. $M \subset X$ souvislá $\Rightarrow \overline{M}$ je souvislá.

Důkaz. $M = \emptyset$ zřejmé; nechť $M \neq \emptyset$

$\overline{M} = \bigcup_{x \in \overline{M}} (M \cup \{x\})$, $\forall x \in \overline{M}$, $M \cup \{x\}$ je souvislá, $\bigcap_{x \in \overline{M}} (M \cup \{x\}) \neq \emptyset$

tvrzení $\Rightarrow \overline{M}$ je souvislá