Tvrzení. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Je-li M omezená, pak $\mathbb{R}^n \setminus M$ má právě jednu neomezenou souvislou komponentu.

Důkaz. CVIČENÍ

Tvrzení. Souvislé podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou právě všechny intervaly (včetně $[\alpha,\alpha] = \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Důkaz. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, pak (α,β) je spojitým obrazem $\mathbb{R}$

$(\alpha, +\infty)$ ——— " ———

(samostatně)

(α,β) je souvislá mn. $\Rightarrow [\alpha,\beta), (\alpha,\beta], [\alpha,\beta]$ je souvislé mn.

$(\alpha,+\infty)$ souvislá $\Rightarrow [\alpha,+\infty)$ souvislá

podobně $(-\infty,\alpha)$, $(-\infty,\alpha]$

Závěr: stačí ukázat, že $\mathbb{R}$ je souvislý top. prostor

Mějme $A, B \subset \mathbb{R}$ otevřené, $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{R} = A \cup B$

Máme ukázat: $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$

Pro určitost $0 \in A$, potom $\exists \varepsilon > 0$, $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset A$

Položme $M := \{x > 0;\ [0,x) \subset A\}$, $\overset{\Downarrow}{M \neq \emptyset}$

$u := \sup M$

Platí $u \notin A$: kdyby $u \in A \Rightarrow \exists \varepsilon' > 0$, $(u-\varepsilon', u+\varepsilon') \subset A$

$\exists x \in M \cap (u-\varepsilon', u)$

$$\Rightarrow \underbrace{[0,x)}_{\subset A} \cup (u-\varepsilon', u+\varepsilon') = [0, u+\varepsilon') \subset A \Rightarrow u+\varepsilon' \in M$$

$u+\varepsilon' > u = \sup M$, spor

Platí $u \notin B$: kdyby $u \in B \Rightarrow \exists \varepsilon'' > 0$, $(u-\varepsilon'', u+\varepsilon'') \subset B$

$\Rightarrow (u-\varepsilon'', u) \cap A = \emptyset$

Současně $\exists x \in (u-\varepsilon'', u) \cap M$

$$\Rightarrow \emptyset \neq \underbrace{[0,x)}_{\subset A} \cap (u-\varepsilon'', u), \text{ tedy } \underbrace{A \cap (u-\varepsilon'', u) \neq \emptyset}_{\text{spor}}$$

Společně $\underset{(u>0)}{u \notin A \cup B = \mathbb{R}} \Rightarrow u = \sup M = +\infty$

$\Rightarrow \forall z > 0\ \exists x > z,\ x \in M \Rightarrow [0,x) \subset A \Rightarrow [0,z) \subset A$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \bigcup_{z>0} [0,z) = [0,+\infty) \subset A; \\ \text{obdobně } (-\infty, 0] \subset A \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R} = A \Rightarrow B = \emptyset$$