Věta. Buď $\gamma \in C(S^1, S^2)$ Jordanova křivka ($\equiv \gamma$ je prosté).
$S^2 \setminus \langle\gamma\rangle$ má právě dvě souvislé komponenty, obě jsou jednoduše souvislé a za svou hranici mají $\langle\gamma\rangle$.

Doplnění věty o Jordanově křivce.

Buď $\gamma \in C([\alpha,\beta], \mathbb{R}^2)$ Jordanova křivka. Potom $\operatorname{int}(\gamma)$ je jednoduše souvislá množina.

Index bodu vzhledem k uzavřené křivce v $\mathbb{R}^2$

Buďte $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ uzavřená křivka, $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \langle\gamma\rangle$

Položme $\forall t \in [0,2\pi]$, $T_p(t) := \dfrac{\gamma(t)-p}{|\gamma(t)-p|} \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$

($|\cdot|$ = euklid. norma)

zvolme $\phi_p(0) \in \mathbb{R}$ tak, že $T_p(0) = (\cos\phi_p(0), \sin\phi_p(0))$
(jednoznačně až na $2\pi\mathbb{Z}$)

Potom existuje spojitá fce $\phi_p : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ (právě jedna)
tak, že $\forall t \in [0,2\pi]$, $T_p(t) = (\cos\phi_p(t), \sin\phi_p(t))$

Číslo $\frac{1}{2\pi}(\phi_p(2\pi) - \phi_p(0)) \in \mathbb{Z}$ nezávisí na volbě $\phi_p(0)$
$[T_p(2\pi) = T_p(0) \Leftarrow \gamma$ je uzavřená$]$
$=$ index bodu p vzhledem ke $\gamma =: \operatorname{ind}_\gamma(p)$

Tvrzení. (i) Funkce $\mathbb{R}^2 \setminus \langle\gamma\rangle \ni p \longmapsto \operatorname{ind}_\gamma(p) \in \mathbb{Z}$ je spojitá.

Důsledek: Tato fce je konstantní na každé souvislé komponentě množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \langle\gamma\rangle$.

(ii) $\operatorname{ind}_\gamma(p) = 0$ identicky na neomezené komponentě

(iii) Při přechodu hranice mezi komponentami se index mění o ± 1.

(iv) Buďte $p \in \mathbb{R}^2$ pevný bod, γ je uzavřená křivka v $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$.
Při spojité deformaci křivky γ v $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ zůstává index konstantní.

(v) Buď γ konstantní křivka v $\mathbb{R}^2$, $\langle\gamma\rangle = \{c\}$, $c \in \mathbb{R}^2$.
Potom $\forall p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{c\}$, $\operatorname{ind}_\gamma(p) = 0$.

Věta. Buď $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ Jordanova křivka. Potom
$\forall p \in \operatorname{ext}(\gamma)$, $\operatorname{ind}_\gamma(p) = 0$ a $\forall p \in \operatorname{int}(\gamma)$, $\operatorname{ind}_\gamma(p) = \text{konst} = \pm 1$.