

Geometrické metody fyziky 1

Cvičení

Libor Šnobl

3. května 2021

1. cvičení

Cvičení 1

Ukažte, že $\mathbb{R}^n$ se standardní topologií je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor se spočetnou bazí topologie.

Cvičení 2

Ukažte, že pokud množina M je vybavená konečným systémem podmnožin $\{U_i\}_{i \in I}$, $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ a bijekcí $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) = \varphi_i(U_i)^\circ \subset \mathbb{R}^n$ takovým, že

$$\tau_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

je homeomorfismus kdykoliv je $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, je možné na M zavést přirozeným způsobem topologii takovou, že $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ je atlas třídy C^0 na M . Pokud všechna τ_{ij} jsou třídy C^k , máme atlas třídy C^k .

Cvičení 3

Ukažte, že sféra

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

je diferencovatelnou varietou.

S^2 je topologický prostor s topologií indukovanou z $\mathbb{R}^3$.
Zkonstruujeme atlas tvořený dvěma mapami

$$\begin{aligned} U_N = S^2 - \{(0, 0, -1)\}, \quad \varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2[u, v] : \quad \varphi_N(x, y, z) &= \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \\ U_S = S^2 - \{(0, 0, 1)\}, \quad \varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2[u, v] : \quad \varphi_S(x, y, z) &= \left(\frac{x}{1-z}, \frac{-y}{1-z} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Ukažte, že zobrazení $\varphi_{N,S}$ přiřazují bodům z S^2 průnik přímky spojující daný bod (x, y, z) s jižním, resp. severním, pólem $(0, 0, -1)$ ($(0, 0, 1)$) s rovinou xy , s otočením orientace v případě mapy φ_S . Jedná se o tzv. **stereografické projekce**. Ověřte, že se jedná o homeomorfismy. Nalezněte přechodovou funkci

$$\tau_{SN}(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right) \quad (2)$$

a ukažte že je třídy C^∞ na svém definičním oboru a podobně její inverze

Vzhledem k tomu, že uvedené mapy lze reinterpretovat jako zobrazení do $\mathbb{C}$, $z = u + iv$, $Z = U + iV$ a přechodové funkce mají pak tvar $\tau_{SN}(z) = \frac{1}{z}$, $\tau_{NS}(Z) = \frac{1}{Z}$, tj. jsou holomorfní, jedná se též o komplexní varietu.

Cvičení 4

Ukažte, že **komplexní projektivní prostor**

$$\mathbb{CP}^n = \{\mathbb{C}\text{-span}\{\vec{v}\} \mid \vec{v} \in \mathbb{C}^{n+1}, \vec{v} \neq 0\}$$

je diferencovatelnou varietou dimenze $2n$ a též komplexní varietou dimenze n .

Návod. Systém souřadnicových okolí a map konstruujeme následovně: zavedeme souřadnice na $\mathbb{C}^{n+1}$: $\vec{v} = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ a definujeme okolí

$$U_i = \{\mathbb{C}\text{-span}\{\vec{v}\} \mid \vec{v} \in \mathbb{C}^{n+1}, v_i \neq 0\},$$

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}, \quad \varphi_i(v_0, v_1, \dots, v_n) = \left(\frac{v_0}{v_i}, \frac{v_1}{v_i}, \dots, \frac{v_{i-1}}{v_i}, \frac{v_{i+1}}{v_i}, \dots, \frac{v_n}{v_i} \right).$$

kde $i = 0, \dots, n$. Nalezněte odpovídající přechodové funkce a ověřte jejich hladkost, resp. holomorfnost.

Obdobně lze definovat též **reálný projektivní prostor**

$$\mathbb{RP}^n = \{\mathbb{R}\text{-span}\{\vec{v}\} \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^{n+1}, \vec{v} \neq 0\}$$

jako diferencovatelnou varietu dimenze n .

Cvičení 5

Ukažte, že komplexní projektivní prostor $\mathbb{CP}^1 = \{\mathbb{C}\text{-span}\{\vec{v}\} \mid \vec{v} \in \mathbb{C}^2, \vec{v} \neq 0\}$ je izomorfní sféře S^2 .

Návod. Vhodným způsobem ztotožněte obrazy map v $\mathbb{CP}^1$ a S^2 a ověřte, že je to konzistentní při přechodu k jiným mapám.

2. cvičení

Cvičení 6

Uvažujte dvě variety M_ϵ , $\epsilon = \pm 1$. Každá je popsána dvěma mapami φ_1, φ_2 takovými, že

$$\text{Ran}(\varphi_1) = (0, 2\pi) \times (-1, 1), \quad \text{Ran}(\varphi_2) = (-\pi, \pi) \times (-1, 1).$$

Přechodová funkce τ_{12} má definiční obor $((0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)) \times (-1, 1)$ a je dána předpisem

$$\begin{aligned} \tau_{12}(\theta, \sigma) &= (\theta, \sigma), & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ &= (\theta - 2\pi, \epsilon\sigma) = (\tilde{\theta}, \tilde{\sigma}), & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Určete, o jaké geometrické objekty se jedná.

Výsledek. Plášť válce, resp. Möbiův list.

Cvičení 7

Uvažujte variety a mapy z cvičení 6. Převeďte tečný vektor

$$X = \alpha \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{p_0} + \beta \left. \frac{\partial}{\partial \sigma} \right|_{p_0}$$

vyjádřený v souřadnicích $[\theta, \sigma]$ v mapě φ_1 do souřadnic $[\tilde{\theta}, \tilde{\sigma}]$ v mapě φ_2 .

Cvičení 8

Uvažujte varietu $M = \mathbb{R}^+$ s mapami $\varphi_1 : M \rightarrow \mathbb{R}^+ : \varphi_1(x) = x$ a $\varphi_2 : M \rightarrow \mathbb{R} : y \equiv \varphi_2(x) = \ln(x)$. Tečný vektor $X = \frac{d}{dx}\big|_{p_0} \in T_{x_0}M$ vyjádřete v souřadnicích y .

Výsledek.
$$X = \frac{1}{x_0} \frac{d}{dy}\bigg|_{p_0} = \frac{1}{\exp y_0} \frac{d}{dy}\bigg|_{p_0}.$$

Cvičení 9

Uvažujte sféru S^2 popsanou stereografickými projekcemi a tečné vektory $X_1 = \frac{\partial}{\partial u}\big|_p$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial v}\big|_p$ v bodě $p \in U_N \cap U_S$. Najděte vyjádření těchto vektorů v souřadnicích $[U, V]$ na U_N .

$$\text{Výsledek. } X_1 = (V^2 - U^2) \frac{\partial}{\partial U}\big|_p - 2UV \frac{\partial}{\partial V}\big|_p, \\ X_2 = 2UV \frac{\partial}{\partial U}\big|_p + (V^2 - U^2) \frac{\partial}{\partial V}\big|_p.$$

Cvičení 10

V $\mathbb{R}^3$ uvažujte kartézské souřadnice $[x, y, z]$ a sférické souřadnice $[r, \theta, \phi]$,

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (3)$$

Tečné vektory $X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p$, $X_3 = \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p$ a $X_4 = \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \Big|_p$ převed'te do sférických souřadnic.

Výsledek.

$$X_1 = \sin \theta \cos \phi \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_p + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \right|_p,$$

$$X_2 = \sin \theta \sin \phi \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_p + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \right|_p,$$

$$X_3 = \cos \theta \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_p - \frac{\sin \theta}{r} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p,$$

$$X_4 = \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \right|_p.$$

3. cvičení

Cvičení 11

V $\mathbb{R}^2[x, y]$ uvažujte vektorová pole $X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$,
 $X_2 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$. Najděte jejich integrální křivky.

Řešení. Pro X_1 máme rovnice pro integrální křivku

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma^1(t) &\equiv \frac{d}{dt}x(\gamma(t)) = x(\gamma(t)) = \gamma^1(t), \\ \frac{d}{dt}\gamma^2(t) &\equiv \frac{d}{dt}y(\gamma(t)) = y(\gamma(t)) = \gamma^2(t), \\ \gamma^1(0) &= x_0, \quad \gamma^2(0) = y_0.\end{aligned}$$

Tudíž $\ln(\gamma^1(t)) = t + C_1$, $\ln(\gamma^2(t)) = t + C_2$, a dosazením počáteční podmínky máme $\gamma_1(t) = (x_0 \exp t, y_0 \exp t)$.

Analogicky, pro X_2 máme rovnice pro integrální křivku

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma^1(t) &\equiv \frac{d}{dt}x(\gamma(t)) = -y(\gamma(t)) = -\gamma^2(t), \\ \frac{d}{dt}\gamma^2(t) &\equiv \frac{d}{dt}y(\gamma(t)) = x(\gamma(t)) = \gamma^1(t), \\ \gamma^1(0) &= x_0, \quad \gamma^2(0) = y_0.\end{aligned}$$

Tuto soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty řešíme dosazením řešení v předpokládaném tvaru $\gamma(t) = (a, b) \cdot \exp(\lambda t)$. Tím dostáváme soustavu homogenních lineárních rovnic:

$$\lambda \cdot a + b = 0, \quad -a + \lambda \cdot b = 0.$$

Matice soustavy $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ musí být singulární, aby existovalo nenulové řešení, tudíž $\lambda = \pm i$ a obecné řešení naší soustavy diferenciálních rovnic má tvar

$$\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t)) = C_1 \cdot (1, -i) \cdot \exp(it) + C_2 \cdot (1, i) \cdot \exp(-it).$$

Dosazením počáteční podmínky a úpravou výsledku získáváme integrální křivku ve tvaru

$$\gamma_2(t) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t) (\equiv \Psi_{X_2}(x_0, y_0, t)).$$

Cvičení 12

Vektorová pole z cvičení 11 převed'te do polárních souřadnic $[r, \varphi]$, kde

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (4)$$

a najděte jejich integrální křivky v těchto souřadnicích.

Řešení.

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y},$$

což implikuje

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Dosazením dostáváme

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} = r \cos \varphi \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \\ + r \sin \varphi \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = r \frac{\partial}{\partial r},$$

$$X_2 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = r \cos \varphi \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \\ - r \sin \varphi \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Integrační křivky mají proto jednoduchý tvar, $\gamma_1(t) = (r_0 \exp t, \varphi_0)$,
 $\gamma_2(t) = (r_0, \varphi_0 + t)$.

Cvičení 13

Je vektorové pole $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ na $\mathbb{R}[x]$ úplné?

Řešení. Rovnice

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$$

separací proměnných vede na řešení ve tvaru $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} = t + C$, dosazením počáteční podmínky máme integrální křivku ve tvaru $x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$. Jinými slovy, tok vektorové pole X je

$$\psi_X(x, t) = \psi_X^t(x) = \frac{x}{1 - tx}.$$

Není definováno $\psi_X^{\frac{1}{x}}(x)$, tudíž není úplné.

Cvičení 14

Najděte tok vektorového pole

$$X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial z} \in \Gamma(TM), \text{ kde } M = \mathbb{R}^3[x, y, z].$$

Výsledek.

$$\Psi_X^t(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z + (x^2 + y^2)t).$$

Cvičení 15

Na $S^2[U, V]$ uvažujte vektorové pole $X = (V^2 - U^2)\frac{\partial}{\partial U} - 2UV\frac{\partial}{\partial V}$ na U_N . Najděte jeho integrální křivky.

Výsledek. $\gamma(t) = \left(\frac{U_0 + t(U_0^2 + V_0^2)}{1 + 2tU_0 + t^2(U_0^2 + V_0^2)}, \frac{V_0}{1 + 2tU_0 + t^2(U_0^2 + V_0^2)} \right)$

Cvičení 16

Převeďte vektorové pole X z cvičení 15 do souřadnic $[u, v]$ na U_S , ukažte, že vektorové pole X lze definovat jako hladké vektorové pole na celé sféře S^2 , nalezněte jeho tok v souřadnicích $[u, v]$ a výsledek převeďte do souřadnic $[U, V]$.

Návod. Využitím cvičení 9 máme $X = \frac{\partial}{\partial u}$, tj. X lze hladce definovat ve všech bodech pokrytých atlasem, což je celá varieta S^2 , $\Psi_X^t(u, v) = (u + t, v)$ a převedením počáteční podmínky ze souřadnic $[U, V]$ a výsledku do souřadnic $[U, V]$ nacházíme

$$\Psi_X^t(U, V) = \left(\frac{U+t(U^2+V^2)}{1+2tU+t^2(U^2+V^2)}, \frac{V}{1+2tU+t^2(U^2+V^2)} \right).$$

Cvičení 17

Ukažte, že S^3 lze chápat jako fibrovaný prostor nad $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ s vláknem S^1 .

Návod. Jedná se o tzv. **Hopfovou fibraci**. Sféru S^3 uvažujeme jako jednotkovou sféru v $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$,

$$S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}.$$

Projekci $\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ definujeme předpisem $\pi(z_1, z_2) = \mathbb{C}\text{-span}\{(z_0, z_1)\}$. Vlákno nad bodem $V = \mathbb{C}\text{-span}\{(z_0, z_1)\}$ je pak tvořeno všemi vektory z S^3 , které svým lineárním obalem definují stejný jednorozměrný podprostor V , tj. jsou rovny $\alpha \cdot (z_0, z_1)$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Vlákno nad bodem je tudíž izomorfní množině komplexních jednotek

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1\} \simeq S^1.$$

Pro dokončení popisu struktury fibrovaného prostoru $S^3 \rightarrow S^2$ zbývá zkonstruovat lokální trivializace.

K tomu stačí uvážit atlas na $\mathbb{CP}^1$ z cvičení 4. Máme souřadnicová okolí a mapy

$$U_0 = \{\mathbb{C}\text{-span}\{(1, z)\} | z \in \mathbb{C}\}, \quad \varphi_0(\mathbb{C}\text{-span}\{(1, z)\}) = z,$$

$$U_1 = \{\mathbb{C}\text{-span}\{(z, 1)\} | z \in \mathbb{C}\}, \quad \varphi_1(\mathbb{C}\text{-span}\{(z, 1)\}) = z.$$

Lokální trivializace definujeme předpisem

$$\psi_0(\alpha \cdot (1, z)) = \left(\mathbb{C}\text{-span}\{(1, z)\}, \frac{\alpha}{|\alpha|} \right), \quad \forall \alpha \cdot (1, z) \in S^3,$$

$$\psi_1(\alpha \cdot (z, 1)) = \left(\mathbb{C}\text{-span}\{(z, 1)\}, \frac{\alpha}{|\alpha|} \right), \quad \forall \alpha \cdot (z, 1) \in S^3.$$

Pro přechodovou funkci na vlákne pak nacházíme ($\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$)

$$\begin{aligned}\psi_1(\psi_0^{-1}(\mathbb{C}\text{-span}\{(1, z)\}, \alpha)) &= \psi_1\left(\alpha \cdot \frac{(1, z)}{\sqrt{1 + |z|^2}}\right) \\&= \psi_1\left(\alpha \frac{z}{|z|} \cdot \frac{(1/z, 1)}{\sqrt{1 + |1/z|^2}}\right) = \\&= \left(\mathbb{C}\text{-span}\{(1/z, 1)\}, \alpha \frac{z}{|z|}\right) = (\mathbb{C}\text{-span}\{(1/z, 1)\}, \tau_{01}(\mathbb{C}\text{-span}\{(1, z)\})\alpha),\end{aligned}$$

tudíž přechodová funkce na vlákne má tvar

$$\tau_{01}(\mathbb{C}\text{-span}\{(1, z)\})\alpha = \frac{z}{|z|} \cdot \alpha.$$

4. cvičení

Cvičení 18

Určete komutátory vektorových polí

$$X_1 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \quad (5)$$

na $\mathbb{R}^3[x, y, z]$. Ukažte, že $\mathbb{R}\text{-span}\{X_1, X_2, X_3\}$ tvoří podalgebru v $\mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$.

Výsledek. $[X_1, X_2] = -X_3$, $[X_2, X_3] = -X_1$, $[X_3, X_1] = -X_2$.

Cvičení 19

V $\mathbb{R}[x]$ uvažujte vektorová pole $X_k = x^k \frac{\partial}{\partial x}$, $k = 0, 1, \dots$. Ukažte, že $\mathbb{R}\text{-span}\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ tvoří Lieovu algebru a že jediné její konečněrozměrné podalgebry dimenze větší než 1 generované prvky X_k jsou $\mathbb{R}\text{-span}\{X_1, X_k\}$, kde $k = 0$ nebo $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ a $\mathbb{R}\text{-span}\{X_0, X_1, X_2\}$.

Řešení.

$$\begin{aligned}[X_k, X_l] &= X_k(x^l) \frac{\partial}{\partial x} - X_l(x^k) \frac{\partial}{\partial x} = lx^{k+l-1} \frac{\partial}{\partial x} - kx^{k+l-1} \frac{\partial}{\partial x} = \\ &= (l - k)x^{k+l-1} \frac{\partial}{\partial x} = (l - k)X_{k+l-1}\end{aligned}$$

Cvičení 20

Ukažte, že obecné rychlosti v Lagrangeově mechanice se při změně obecných souřadnic transformují jako tečné vektory ke konfigurační varietě, zatímco obecné hybnosti $p_j = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^j}$ se transformují jinak a určete jak.

Návod. Obecné rychlosti získáváme derivací trajektorie v daném bodě, tj. jsou tečnými vektory definovanými pomocí trajektorie - křivky. Při změně souřadnic $\tilde{q}^j = \tilde{q}^j(q^k)$ transformují

$$\dot{\tilde{q}}^j = \frac{d}{dt} \tilde{q}^j(t) = \frac{d}{dt} \tilde{q}^j(q(t)) = \left. \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^k} \right|_{q(t)} \frac{d}{dt} q^k(t) = \left. \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^k} \right|_{q(t)} \dot{q}^k. \quad (6)$$

Obecné hybnosti se při změně souřadnic $\tilde{q}^j = \tilde{q}^j(q^k)$ transformují podle předpisu

$$\begin{aligned}\tilde{p}_i &= \frac{\partial \tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} = \frac{\partial L(q(\tilde{q}), \dot{q}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}))}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^j} \bigg|_{q=q(\tilde{q}), \dot{q}=\dot{q}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})} \frac{\partial \dot{q}^j(q, \dot{q})}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} \\ &= p_j \frac{\partial \dot{q}^j(q, \dot{q})}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} = p_j \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i},\end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti jsme využili transformaci (6) po záměně q a $\tilde{q}$. Pro zjednodušení zápisu jsme potlačili indexy v argumentech vyznačujících funkční závislosti.

Cvičení 21

Na varietě $M = \mathbb{R}^2[p, q]$ uvažujte tzv. Hamiltonovská vektorová pole

$$X_H = -\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q},$$

kde $H = H(p, q) \in C^\infty(M)$. Hledejte integrální křivky vektorového pole X_H pro následující volby funkce H :

- 1 $H = \frac{1}{2}p^2,$
- 2 $H = \frac{1}{2}p^2 + \kappa q,$
- 3 $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2,$

a porovnejte je s řešením Hamiltonových pohybových rovnic pro volnou částici, konstantní silové pole a harmonický oscilátor v jednom prostorovém rozměru.

Cvičení 22

V $\mathbb{R}^3$ uvažujte kartézské souřadnice (x, y, z) a sférické souřadnice (r, θ, φ) (viz (3)). Následující diferenciální formy převed'te z jedné souřadnic do druhé

$$dx, dy, dz, xdx + ydy + zdz, ydx - xdy, dx \wedge dy \wedge dz, \\ dr, d\theta, d\varphi, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi.$$

Výsledek.

$$dx = \sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi,$$

$$dy = \sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi,$$

$$dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta,$$

$$x dx + y dy + z dz = r dr,$$

$$y dx - x dy = -r^2 \sin^2 \theta d\varphi,$$

$$dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi,$$

$$dr = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x dx + y dy + z dz),$$

$$d\theta = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \left(\frac{xz dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{yz dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} dz \right),$$

$$d\varphi = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y dx + x dy),$$

$$dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)}} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Cvičení 23

Na sféře S^2 uvažujte stereografické souřadnice (u, v) , (U, V) a sférické souřadnice (θ, φ) :

$$(u, v) = \left(\frac{\sin \theta \cos \varphi}{1 - \cos \theta}, \frac{-\sin \theta \sin \varphi}{1 - \cos \theta} \right).$$

Převeďte 1-formy dU, dV do souřadnic (u, v) a 2-formu $\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$ do souřadnic $(u, v), (U, V)$.

Výsledek.

$$dU = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} ((v^2 - u^2)du - 2uvdv),$$

$$dV = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} (2uvdu + (v^2 - u^2)dv),$$

$$\omega = \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2} du \wedge dv = \frac{4}{(1 + U^2 + V^2)^2} dU \wedge dV.$$

Cvičení 24

Na varietě M dimenze n uvažujte dva souřadné systémy $(x^1, \dots, x^n)$ a $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$. Ukažte, že pro

$$\omega = \omega_{12\dots n} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \tilde{\omega}_{12\dots n} d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n \in \Omega^n(M)$$

platí

$$\tilde{\omega}_{12\dots n} = \omega_{12\dots n} \det \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)}$$

Návod. Zapište vzorec pro transformaci formy maximálního stupně pomocí determinantu odpovídající Jacobiho matice $\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)}$.
Máme

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^j}, \\
 & dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n} \right) = \\
 & = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \tilde{x}^1} \dots \frac{\partial x^{j_n}}{\partial \tilde{x}^n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_n}} \right) \\
 & = \sum_{\pi \in S_n} \frac{\partial x^{\pi(1)}}{\partial \tilde{x}^1} \dots \frac{\partial x^{\pi(n)}}{\partial \tilde{x}^n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left(\frac{\partial}{\partial x^{\pi(1)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\pi(n)}} \right) \\
 & = \sum_{\pi \in S_n} \frac{\partial x^{\pi(1)}}{\partial \tilde{x}^1} \dots \frac{\partial x^{\pi(n)}}{\partial \tilde{x}^n} \operatorname{sgn} \pi = \det \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)}
 \end{aligned}$$

6. cvičení

Cvičení 25

V $\mathbb{R}^3$ popsaném v kartézských souřadnicích definujme následující přiřazení

$$A = A^x \frac{\partial}{\partial x} + A^y \frac{\partial}{\partial y} + A^z \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \leftrightarrow A^{(1)} = A^x dx + A^y dy + A^z dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3) \\ \leftrightarrow A^{(2)} = A^x dy \wedge dz + A^y dz \wedge dx + A^z dx \wedge dy$$

Ukažte explicitním výpočtem, že pak platí

$$\begin{aligned} df &= (\text{grad} f)^{(1)}, \\ dA^{(1)} &= (\text{rot} A)^{(2)}, \\ dA^{(2)} &= (\text{div} A) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Dále ukažte, že $d^2 = 0$ je ekvivalentní identitám $\text{rot} \circ \text{grad} = 0$ a $\text{div} \circ \text{rot} = 0$.

Tento příklad naznačuje, že při využívání křivočarých souřadnic, ve kterých není zřejmé, jak zapsat Maxwellovy rovnice, je pro popis intenzity elektrického pole vhodné využívat 1-formu, pro popis vektoru magnetické indukce 2-formu. Později uvidíme, že tomu tak skutečně je a budeme schopni Maxwellovy rovnice psát přirozeným způsobem v libovolném souřadném systému.

Uvedené ztotožnění je závislé na výběru souřadnic, pokud ho chceme definovat obecně, potřebujeme pojmy metrika a Hodgeův duál.

Cvičení 26

V $\mathbb{R}^2$ uvažujte kartézské a polární souřadnice. Podobně jako v předchozím příkladě definujeme

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2).$$

Nalezněte vyjádření vektorového pole $\operatorname{grad} f$ v polárních souřadnicích a porovnejte jej s výrazem pro vnější derivaci funkce $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Výsledek.

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathrm{d}\varphi.$$

Cvičení 27

Magnetický monopol je hypotetická konfigurace magnetického pole formálně stejného tvaru jako elektrické pole bodového náboje.

Uvažujte vektor magnetické indukce odpovídající magnetickému monopolu lokalizovanému v počátku kartézských souřadnic v $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{g}{r^3} \vec{x} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}).$$

Přiřadte mu příslušnou 2-formu magnetické indukce $B = (\vec{B})^{(2)}$.

Ukažte, že B je uzavřená, tj. $\vec{B}$ vyhovuje Maxwellově rovnici $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. Ve sférických souřadnicích naleznete formy A_N, A_S na $U_N = \mathbb{R}^3 \setminus \{(\vec{0}, 0, z) | z \leq 0\}$, $U_S = \mathbb{R}^3 \setminus \{(\vec{0}, 0, z) | z \geq 0\}$ takové, že $B|_{U_N} = dA_N$, $B|_{U_S} = dA_S$.

Výsledek.

$$B = \frac{gx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} dy \wedge dz + \frac{gy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} dz \wedge dx + \frac{gz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} dx \wedge dy,$$

$$B = g \sin \theta d\theta \wedge d\varphi,$$

$$A_N = g(1 - \cos \theta) d\varphi = g \frac{z - r}{r(x^2 + y^2)} (y dx - x dy),$$

$$A_S = -g(1 + \cos \theta) d\varphi = g \frac{z + r}{r(x^2 + y^2)} (y dx - x dy),$$

a ověřte, že A_N , A_S je limitou možné hladce dodefinovat na celém U_N , resp. U_S .

Cvičení 28

Na varietě $S^2[u, v]$ uvažujte formu

$$\omega = \frac{1}{(u^2+v^2)^2} (2uvdu + (v^2 - u^2)dv). \text{ Určete } d\omega. \text{ Dále hledejte}$$

$$\alpha \in \Omega^1(S^2) \text{ takové, že } d\alpha = \frac{du \wedge dv}{(1+u^2+v^2)^2}.$$

Výsledek.

$$d\omega = 0,$$

což souvisí s tím, že v souřadnicích (U, V) máme $\omega = dV$. Formu $\alpha \in \Omega^1(S^2)$ se nepodaří nalézt. Později uvidíme důkaz, že to nelze, jakékoliv lokálně dobře definované řešení při pokusu o rozšíření na celou sféru S^2 někde diverguje (tj. zadané $d\alpha$ je příkladem formy uzavřené, ale nikoliv exaktní). Lokálně α existuje, např. v podobě

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{1}{4} (1 + \cos \theta) d\phi = \frac{1}{2(1 + u^2 + v^2)} (u dv - v du) \\ &= \frac{1}{2(1 + U^2 + V^2)(U^2 + V^2)} (V dU - U dV).\end{aligned}$$

7. cvičení

Cvičení 29

Uvažujte sféru $S^2[\theta, \varphi]$ zobrazenou do $\mathbb{R}^3[x, y, z]$ zobrazením ϕ zadaným rovnicemi

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = b \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c \cos \theta,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Určete, zda se jedná o vnoření a případně též o vložení. Spočítejte

$$\begin{aligned} &\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} \right), \quad \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} \right), \quad \phi^*(dx), \quad \phi^*(dy), \quad \phi^*(dz), \\ &\phi^*(dx \wedge dy \wedge dz), \quad \phi^* \left(\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} + \frac{z dz}{c^2} \right). \end{aligned}$$

$$\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} \right) = a \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + b \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p - c \sin \theta_0 \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p,$$

$$\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} \right) = -a \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + b \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p,$$

$$\phi^*(dx) = a \cos \theta \cos \varphi d\theta - a \sin \theta \sin \varphi d\varphi,$$

$$\phi^*(dy) = b \cos \theta \sin \varphi d\theta + b \sin \theta \cos \varphi d\varphi,$$

$$\phi^*(dz) = -c \sin \theta d\theta, \quad \phi^*(dx \wedge dy \wedge dz) = 0, \quad \phi^* \left(\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} + \frac{z dz}{c^2} \right) = 0$$

kde $p = \phi(\theta_0, \varphi_0)$.

$$\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} + \frac{z dz}{c^2} = \frac{1}{2} d \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right),$$

tj. v souřadnicích $\theta, \phi, R = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} - 1$ je $\phi(S^2)$ vyjádřena jako množina bodů splňujících $R = 0$, tj. jedná se o vložení.

Cvičení 30

Nalezněte integrální křivku γ vektorového pole

$$X = z \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3[x, y, z])$$

z bodu $(x, y, z) = (1, 0, 0)$. Výsledné zobrazení

$\gamma : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}^3[x, y, z]$ promítněte do roviny xy , $\phi : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}^2[x, y]$,

$\phi(t) = (\gamma^x(t), \gamma^y(t))$. Určete $\phi_*\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}\right)$, $\phi^*(adx + bdy)$,

$\phi^*(dx \wedge dy)$. Jaké podmínce musí vyhovovat $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}[t])$, aby existovalo $\phi_*(Y)$ definované na obrazu $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$?

Výsledek.

$$\gamma(t) = \left(\cos \frac{t^2}{2}, -\sin \frac{t^2}{2}, t\right), \quad \phi(t) = \left(\cos \frac{t^2}{2}, -\sin \frac{t^2}{2}\right),$$

$$\phi_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) = -t_0 \sin \frac{t_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\phi(t_0)} - t_0 \cos \frac{t_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\phi(t_0)},$$

$$\phi^*(dx) = -t \sin \frac{t^2}{2} dt, \quad \phi^*(dy) = -t \cos \frac{t^2}{2} dt,$$

$$\phi^*(adx + bdy) = -t \left(a \sin \frac{t^2}{2} + b \cos \frac{t^2}{2} \right) dt, \quad \phi^*(dx \wedge dy) = 0,$$

přenesené vektorové pole $\phi_*(Y)$ existuje, pokud pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $Y = Y^t(t) \frac{d}{dt}$, kde $Y^t \left(\sqrt{t^2 + 4\pi} \right) = \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + 4\pi}} Y^t(t)$.

Cvičení 31

Uvažujte zobrazení

$$\psi : \mathbb{R}[t] \rightarrow S^1[\varphi] : \psi(t) = t,$$

tj. při vyjádření kružnice jako množiny bodů v $\mathbb{R}^2[x, y]$ máme

$$\psi(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Jedná se o vnoření, resp. vložení?

Výsledek. Vnoření ano, neboť $\psi_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) = \frac{d}{d\varphi} \Big|_{\psi(t_0)}$, tj. ψ_* má hodnotu 1, o vložení nikoliv, neboť ψ není prosté.

Cvičení 32

Uvažujte varietu M a její kotečný fibrovaný prostor $T^*M \xrightarrow{\pi} M$. Definujme diferenciální 1-formu $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ na kotečném fibrovaném prostoru následovně

$$\lambda(\alpha) = \pi^*(\alpha), \quad \alpha \in T^*M.$$

Na M zvolme souřadnice $(x^i)_{i=1}^n$ a na T^*M souřadnice $(x^i, p_i)_{i=1}^n$, kde

$$x^i(\alpha) = x^i(\pi(\alpha)), \quad p_i \left(\alpha = \alpha_j dx^j|_q \right) = \alpha_i.$$

Nalezněte souřadnicové vyjádření diferenciální 1-formy λ , spočítejte $\omega = d\lambda$ a ukažte, že pro každý nenulový $X \in T_\alpha(T^*M)$ je $i_X\omega \in T_\alpha^*(T^*M)$ nenulové.

Výsledek.

$$\lambda = p_i dx^i, \quad \omega = dp_i \wedge dx^i,$$

$$X = X_x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X_j^p \frac{\partial}{\partial p_j} \neq 0 \iff i_X \omega = X_i^p dx^i - X_x^j dp_j \neq 0.$$

8. cvičení

Cvičení 33

Vyjádřete Lieovu derivaci vektorového pole $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$,
diferenciální 1-formy $\omega = \omega_i dx^i$ a diferenciální 2-formy
 $\tau = \sum_{i < j} \tau_{ij} dx^i \wedge dx^j$ podle vektorového pole $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Výsledek.

$$\mathcal{L}_X Y = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \omega &= \mathcal{L}_X (\omega_i dx^i) = (\mathcal{L}_X \omega_i) dx^i + \omega_i d(\mathcal{L}_X x^i) = \\ &= \left(X^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) dx^i + \omega_i d(X^i) = \left(X^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) dx^i + \omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^j} dx^j = \\ &= \left(X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} + \omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) dx^j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X \tau &= \mathcal{L}_X \left(\sum_{i < j} \tau_{ij} dx^i \wedge dx^j \right) = \\
&= \sum_{i < j} \left((\mathcal{L}_X \tau_{ij}) dx^i \wedge dx^j + \tau_{ij} d(\mathcal{L}_X x^i) \wedge dx^j + \tau_{ij} dx^i \wedge d(\mathcal{L}_X x^j) \right) = \\
&= \sum_{j < k} \left(x^i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x^i} + \tau_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x^j} + \tau_{ji} \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \right) dx^j \wedge dx^k.
\end{aligned}$$

Cvičení 34

Ukažte, že Lieova derivace libovolné uzavřené diferenciální formy je exaktní.

Návod. Využitím $\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d$.

Cvičení 35

Na $\mathbb{R}^3[x, y, z]$ uvažujte vektorová pole $X_1 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ a $X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$. Spočítejte

$$\mathcal{L}_{X_a} dx, \quad \mathcal{L}_{X_a} dy, \quad \mathcal{L}_{X_a} dz, \quad \mathcal{L}_{X_a} (dx \wedge dy \wedge dz), \quad a = 1, 2.$$

Výsledek.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1} dx &= d\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1} x = -dy, & \mathcal{L}_{\mathbf{x}_1} dy &= dx, & \mathcal{L}_{\mathbf{x}_1} dz &= 0, \\ \mathcal{L}_{\mathbf{x}_1} (dx \wedge dy \wedge dz) & & &= 0, \\ \mathcal{L}_{\mathbf{x}_2} dx &= dx, & \mathcal{L}_{\mathbf{x}_2} dy &= dy, & \mathcal{L}_{\mathbf{x}_2} dz &= dz, \\ \mathcal{L}_{\mathbf{x}_2} (dx \wedge dy \wedge dz) &= 3dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Cvičení 36

Je zřejmé, že pokud pro vektorová pole $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ platí $\Psi_X^t \circ \Psi_Y^s(p) = \Psi_Y^s \circ \Psi_X^t(p)$ pro všechna $s, t \in \mathbb{R}$, $p \in M$, pro něž mají výrazy smysl, tak též platí $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = 0$. Ukažte, že naopak $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = 0$ implikuje $\Psi_X^t \circ \Psi_Y^s(p) = \Psi_Y^s \circ \Psi_X^t(p)$, kdykoliv mají výrazy na obou stranách rovnice smysl.

Návod. Zderivujte dokazovanou identitu podle jednoho z parametrů, např. t , a využijte větu o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Viz též důkaz věty dále na přednášce.

Cvičení 37

Nechť ω je 2-forma na T^*M z cvičení 32 a $f, g \in C^\infty(T^*M)$. Definujme vektorové pole $X_f \in \mathcal{X}(T^*M)$ požadavkem

$$i_{X_f}\omega = -df.$$

Ukažte, že $X_f \in \mathcal{X}(T^*M)$ je tím určeno jednoznačně. Dále ukažte, že $\mathcal{L}_{X_f}\omega = 0$ a že $X_f(g) = \mathcal{L}_{X_f}g = 0$ právě tehdy, když $X_g(f) = \mathcal{L}_{X_g}f = 0$. Jednotlivá odvození provádějte abstraktně bez využití souřadnic i v souřadnicích (x^i, p_j) na T^*M zavedených ve cvičení 32.

$$\omega = dp_i \wedge dx^i,$$

$$X = X_x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X_i^p \frac{\partial}{\partial p_i},$$

$$\begin{aligned} i_X \omega (Y_x^k \frac{\partial}{\partial x^k} + Y_k^p \frac{\partial}{\partial p_k}) &= \omega (X_x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X_i^p \frac{\partial}{\partial p_i}, Y_x^k \frac{\partial}{\partial x^k} + Y_k^p \frac{\partial}{\partial p_k}) = \\ &= X_i^p Y_x^i - X_x^i Y_i^p = \\ &= (X_j^p dx^j - X_x^j dp_j) (Y_x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i^p \frac{\partial}{\partial p_i}) \Rightarrow \\ i_X \omega &= X_j^p dx^j - X_x^j dp_j \end{aligned}$$

$$i_{X_f}\omega = X_j^p dx^j - X_x^j dp_j = -df = -\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i - \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i \Rightarrow$$

$$X_j^p = -\frac{\partial f}{\partial x^j}, \quad X_x^j = \frac{\partial f}{\partial p_j},$$

$$X_f = -\frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_f}\omega &= \mathcal{L}_{-\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial x^j}} dp_i \wedge dx^i = \\
&= d\left(-\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i + dp_i \wedge d\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = \\
&= -\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial p_j} dp_j \wedge dx^i + \\
&+ dp_i \wedge \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} dp_j + \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial x^j} dx^j\right) = \\
&= -\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial p_j} dp_j \wedge dx^i + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial p_j} dp_j \wedge dx^i = 0
\end{aligned}$$

$$X_f(g) = -\frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x^j} = -\{f, g\} = \{g, f\} = -X_g(f)$$

Věta 1

Nechť $f, g \in C^\infty(M)$, $\{f, g\} = 0$. Pak $f \circ \Psi_{X_g}^t = f$, $g \circ \Psi_{X_f}^t = g$.

Důkaz. Zřejmý. ■

9. cvičení

Cvičení 38

Na sféře $S^2[u, v]$ uvažujte 2-formu $\omega = \frac{du \wedge dv}{(1+u^2+v^2)^2}$. Ukažte, že ji lze hladce dodefinovat na celé sféře a že ω je symplektická. Nalezněte tvar obecného hamiltonovského vektorového pole na S^2 . Zkonstruujte Darbouxovy souřadnice na vhodném souřadnicovém okolí.

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{du \wedge dv}{(1 + u^2 + v^2)^2} = \frac{dU \wedge dV}{(1 + U^2 + V^2)^2} = \frac{1}{4} \sin \theta d\theta \wedge d\phi \\ &= -\frac{1}{4} d(\cos \theta d\phi),\end{aligned}$$

Možné Darbouxovy souřadnice definované tam, kde lze použít sférické souřadnice, jsou tudíž například $p = -\frac{1}{4} \cos \theta$, $x = \phi$.

$$X = X^u \frac{\partial}{\partial u} + X^v \frac{\partial}{\partial v},$$

$$i_{X_f} \omega = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} (X_f^u dv - X_f^v du)$$

$$= -df = -\frac{\partial f}{\partial u} du - \frac{\partial f}{\partial v} dv \Rightarrow$$

$$X_f^u = -(1 + u^2 + v^2)^2 \frac{\partial f}{\partial v}, \quad X_f^v = (1 + u^2 + v^2)^2 \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$X_f = (1 + u^2 + v^2)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \right).$$

Cvičení 39

Ve značení příkladu 38 explicitně ověřte $\mathcal{L}_{X_f}\omega = 0$.

Výsledek.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{(1+u^2+v^2)^2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \right) \frac{du \wedge dv}{(1+u^2+v^2)^2} = \\ &= (1+u^2+v^2)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial(1+u^2+v^2)^{-2}}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial(1+u^2+v^2)^{-2}}{\partial u} \right) du \wedge dv + \\ & \quad \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \left(\frac{\partial - (1+u^2+v^2)^2 \frac{\partial f}{\partial v}}{\partial u} + \frac{\partial (1+u^2+v^2)^2 \frac{\partial f}{\partial u}}{\partial v} \right) du \wedge dv \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{(1+u^2+v^2)^2}{(1+u^2+v^2)^2} \right) du \wedge dv - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(1+u^2+v^2)^2}{(1+u^2+v^2)^2} \right) du \wedge dv = 0. \end{aligned}$$

Cvičení 40

Uvažujme symplektickou varietu (M, ω) a dvoje Darbouxovy souřadnice (p_i, x^i) a (P_i, X^i) na okolí $U = U^\circ$ bodu $q \in M$, $\omega = dp_i \wedge dx^i = dP_i \wedge dX^i$. Vhodnou reinterpretací vztahu mezi (p_i, x^i) a (P_i, X^i) dokažte lokální existenci vytvořující funkce kanonické transformace ϕ definované předpisem

$$(p_i(\phi(m)), x^i(\phi(m))) = (P_i(m), X^i(m)), \quad m \in U.$$

Protože obojí souřadnice jsou Darbouxovy, máme

$$d(p_i dx^i - P_i dX^i) = \omega - \omega = 0,$$

tj. z lokální exaktnosti uzavřených forem plyne existence $F \in C^\infty(U)$ takové, že

$$dF = p_i dx^i - P_i dX^i. \quad (7)$$

(Abychom se vyhnuli komplikovanému značení, tak jsme předpokládali, že F je definována na stejném okolí jako souřadnice (p_i, x^i) a (P_i, X^i) , obecně může být potřeba U zúžit na menší otevřené okolí $\tilde{U} = \tilde{U}^\circ \subset U$.)

Pokud i soubor funkcí (x^i, X^j) definuje souřadnice na U , můžeme psát

$$p_i dx^i - P_i dX^i = dF = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial F}{\partial X^i} dX^i,$$

tj. zjišťujeme, že $p_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}$ a $P_i = -\frac{\partial F}{\partial X^i}$ za předpokladu, že parciální derivace provádíme v souřadnicích (x^i, X^j) .

Pokud nyní definujeme transformaci ϕ předpisem

$$(p_i(\phi(m)), x^i(\phi(m))) = (P_i(m), X^i(m))$$

kdykoliv mají výrazy smysl, tj. $P_i(m) \in \text{Ran}(p_i)$, $X^i(m) \in \text{Ran}(x^i)$, máme transformaci ϕ zadánu pomocí vytvořující funkce F prvního druhu známé z teoretické fyziky. Protože $\phi^*\omega = d(p_i \circ \phi) \wedge d(x^i \circ \phi) = dP_i \wedge dX^i = \omega$, je ϕ kanonická transformace.

Pokud soubor (x^i, P_j) je též souřadnicemi na U , můžeme místo $F \in C^\infty(U)$ uvažovat $\tilde{F} \in C^\infty(U)$ definovanou předpisem $\tilde{F}(m) = F(m) + P_i(m)X^i(m)$, kde $\tilde{F}$ budeme nyní chápat jako funkci na U vyjádřenou v souřadnicích (x^i, P_j) . Výpočtem její vnější derivace

$$d\tilde{F} = dF + dP_i X^i + P_i dX^i = p_i dx^i - P_i dX^i + dP_i X^i + P_i dX^i = p_i dx^i + X^i dP_i$$

využitím (7) získáváme

$$p_i(m) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^i}(m), \quad X^i(m) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_i}(m),$$

tj. při definici $X^i(m) = x^i(\phi(m))$, $P_i(m) = p_i(\phi(m))$ máme vytvořující funkci $\tilde{F}$ druhého druhu pro kanonickou transformaci ϕ .

Cvičení 41

Najděte vytvořující funkci pro identickou transformaci na symplektické varietě s Darbouxovými souřadnicemi (x^i, p_j) .

Výsledek.

$$p_i = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^i} \Big|_{P_i=p_i, X^i=x_i}, \quad x_i = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_i} \Big|_{P_i=p_i, X^i=x_i},$$

tj.

$$\tilde{F} = x^i P_i.$$

Cvičení 42

Uvažujte symplektickou varietu $M = \mathbb{R}^2[x, p]$, kde (x, p) jsou Darbouxovy souřadnice a $H = x \cdot p$. Najděte příslušné hamiltonovské vektorové pole, jeho tok a vytvářející funkci kanonických transformací daných $\Psi_{X_H}^t$.

Výsledek.

$$\begin{aligned}X_H &= x \frac{\partial}{\partial x} - p \frac{\partial}{\partial p}, \quad \Psi_{X_H}^t(x, p) = (e^t x, e^{-t} p), \\p &= e^t P = \frac{\partial \tilde{F}(x, P)}{\partial x} \Big|_{x=e^t x, P=e^{-t} p}, \\X|_{x=e^t x, P=e^{-t} p} &= e^t x = \frac{\partial \tilde{F}(x, P)}{\partial P} \Big|_{x=e^t x, P=e^{-t} p} \Rightarrow \\ \tilde{F}(x, P) &= e^t x \cdot P.\end{aligned}$$

Cvičení 43

Nalezněte všechny funkce $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2[x, p])$ takové, že $\{f, x \cdot p\} = 0$ (kde opět (x, p) jsou Darbouxovy souřadnice).

Výsledek.

$$0 = \{f, x \cdot p\} = x \frac{\partial}{\partial x} f - p \frac{\partial}{\partial p} f$$

$$f(x, p) = g(x \cdot p), \quad g \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Cvičení 44

Uvažujte varietu $M = S^2[u, v]$ se standardní orientací $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = 1$ a 2-formu $\omega = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} du \wedge dv$. Spočítejte $\int_{S^2} \omega$.

Výsledek. $\int_{S^2} \omega = \pi$, výpočet je nejsnazší v polárních souřadnicích na rovině $[u, v]$.

Cvičení 45

Uvažujte symplektickou varietu (M, ω) a kanonické zobrazení ϕ . Uvažujte nějaké $U = U^\circ \subset \mathbb{R}^{2k}$, $2 \leq 2k \leq \dim M$ a hladké prosté zobrazení $\psi : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow M$, $\psi(U) = \tilde{U}$. Ukažte, že platí

$$\int_{\phi(\tilde{U})} \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega}_{k\text{-krát}} = \int_{\tilde{U}} \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega,$$

tj. získáváme známé Poincaréovy–Cartanovy integrální invarianty kanonických transformací.

Výsledek.

$$\int_{\phi(\tilde{U})} \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega = \int_{\tilde{U}} \phi^* \omega \wedge \phi^* \omega \wedge \dots \wedge \phi^* \omega = \int_{\tilde{U}} \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega.$$

Cvičení 46

Mějme orientovanou varietu (M, σ) dimenze n , formu $\omega \in \Omega^n(M)$ a vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$. Ukažte, že pro libovolné otevřené okolí $U = U^\circ \subset M$ platí

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{\Psi_X^t(U)} \omega = \int_U \mathcal{L}_X \omega.$$

Návod.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{\Psi_X^t(U)} \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_U (\Psi_X^t)^* \omega = \int_U \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Psi_X^t)^* \omega = \int_U \mathcal{L}_X \omega.$$

Cvičení 47

V $\mathbb{R}^3[x, y, z]$ uvažujte $\omega = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} (x dx + y dy + z dz)$ a zobrazení

$$F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2), t^2), \quad \tilde{U} = F(U).$$

Určete $\int_{(\tilde{U}, F)} \omega$.

Výsledek.

$$F^* \omega = -2 \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}^3} dt, \quad -2 \int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}^3} dt = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}, \quad \int_{(\tilde{U}, F)} \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

Cvičení 48

Stejnou úlohu jako výše řešte pro zobrazení

$$F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \quad \tilde{U} = F(U).$$

Výsledek.

$$F^*\omega = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt, \quad -\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \int_{(\tilde{U}, F)} \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

Cvičení 49

Uvažujte $S^2[\theta, \phi]$ vnořenou do $\mathbb{R}^3[x, y, z]$ předpisem

$$F(\theta, \phi) = \frac{1}{1 + \frac{\theta^2}{\pi^2}} (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

a

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy).$$

Zdůvodněte, že vnoření F je možné jednoznačným hladkým způsobem definovat na celé sféře a určete $\int_{(S^2, F)} \omega$.

Výsledek.

$$F^*\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi, \quad \int_{(S^2, F)} \omega = \int_{S^2} F^*\omega = 4\pi.$$

11. cvičení

Cvičení 50

Graficky nalezněte triangulaci S^2 , $T^2 = S^1 \times S^1$ a $B(0, 1)$. Určete ∂S^2 , $\partial B(0, 1)$.

Návod. Při zakreslení triangulací do rovinných map na S^2 , $T^2 = S^1 \times S^1$ je třeba kontrolovat, aby se žádný ze simplexů neprotnul v limitních bodech na “okrajích” mapy, to je častou chybou.

Cvičení 51

Uvažujte 2–rozměrnou reálnou varietu $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2[x, y]$ a na ní diferenciální 1–formu s hodnotami v komplexních číslech vyjádřenou následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\omega &= f(x, y)dz = (f_{\text{re}}(x, y) + if_{\text{im}}(x, y))(dx + idy) \\ &= (f_{\text{re}}(x, y)dx - f_{\text{im}}(x, y)dy) + i(f_{\text{re}}(x, y)dy + f_{\text{im}}(x, y)dx),\end{aligned}\quad (8)$$

kde $f(x, y) = f_{\text{re}}(x, y) + if_{\text{im}}(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, tj. $f_{\text{re}}(x, y), f_{\text{im}}(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a $z = x + iy$. Ukažte, že ω je uzavřená právě tehdy, když f je holomorfní, tj. splňuje Cauchy–Riemannovy podmínky (uzavřenost formy s hodnotami v komplexních číslech chápeme jako současnou uzavřenost její reálné a imaginární části zapsané v druhém řádku (8)). Interpretujte Cauchyho větu o integrálu z holomorfní funkce podél uzavřené křivky jako speciální případ Stokesovy věty.

$$\begin{aligned}
d\omega &= (\partial_y f_{\text{re}} dy \wedge dx - \partial_x f_{\text{im}} dx \wedge dy) + i(\partial_x f_{\text{re}} dx \wedge dy + \partial_y f_{\text{im}} dy \wedge dx) = \\
&= (-\partial_y f_{\text{re}} - \partial_x f_{\text{im}}) dx \wedge dy + i(\partial_x f_{\text{re}} - \partial_y f_{\text{im}}) dx \wedge dy = 0 \Leftrightarrow \\
&\partial_y f_{\text{re}} = -\partial_x f_{\text{im}}, \quad \partial_x f_{\text{re}} = \partial_y f_{\text{im}}, \\
\Rightarrow \oint_{\gamma} f dz &= \oint_{\gamma} \omega = \int_{\Omega} d\omega = 0, \text{ kde } \gamma = \partial\Omega
\end{aligned}$$

Cvičení 52

Na varietě $M = \mathbb{R}^3[x, y, z] - \{\vec{0}\}$ uvažujte

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) \in \Omega^2(M)$$

a dvě podvariety

$$N_1 = \left\{ (x, y, z) \in M \mid \frac{(x - 99)^2}{100^2} + y^2 + 30z^2 = 1 \right\},$$

$$N_2 = \left\{ (x, y, z) \in M \mid \frac{(x - 101)^2}{100^2} + y^2 + 30z^2 = 1 \right\}.$$

Určete $\int_{N_1} \omega$ a $\int_{N_2} \omega$.

Návod. Využijte skutečnosti, že $d\omega = 0$ na celé varietě M (ověřte). Tudíž pro integrační podvarietu N_2 , která ohraničuje otevřenou oblast v M , dostáváme ze Stokesovy věty přímo $\int_{N_2} \omega = 0$. Pro integrační podvarietu N_1 stejný argument nefunguje, neboť ve “vnitřku” N_1 leží bod $\vec{0}$, v němž ω není definována (proto byl vynechán z variety M). Ale Stokesova věta nám umožňuje integrál převést na integrál přes vhodnější podvarietu obepínající singulární bod $\vec{0}$, např. jednotkovou sféru. Následně převedením do sférických souřadnic (viz cvičení 27) a integrací dostáváme $\int_{N_1} \omega = 4\pi$.

Cvičení 53

Ukažte, že 2-forma $\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi$ definovaná na sféře S^2 ve sférických souřadnicích (θ, ϕ) a hladce dodefinovaná na celé S^2 není na S^2 exaktní.

Návod. Pokud by exaktní byla, $\omega = d\alpha$, tak $\int_{S^2} \omega = \int_{\partial S^2} \alpha = 0$, neboť hranice sféry S^2 je nulová. Přitom víme, že $\int_{S^2} \omega = 4\pi$, což je hledaný spor.