Zkouškové příklady z KVANtofky

Áňa Mouková

6. února 2019

Obsah

Úvod

Příklady, které se často objevují u zkoušky z 02KVAN a mně letos stačili k tomu, abych písemkou bez problému prošla. Jsou v tom chyby, možná dokonce spousty chyb. Když mi o nich napíšete, asi je i opravím. Nechť vám poznámky dobře slouží.

1 Lineární harmonický oscilátor

Příklad 1 Lineární harmonický oscilátor s frekvencí $\omega = \hbar / M$ je v čase $t = 0$ ve stavu

$$\psi\left(x, 0\right) = C\left(1 + x\right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Jaké hodnoty energie můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností? Určete $\psi\left(x, t\right)$ pro $t > 0$. Jak se mění střední hodnota polohy oscilátoru s časem?

Řešení Nejprve určíme, jaké hodnoty energie můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností.

$$\psi = a\psi_0 + b\psi_1$$

Členy ψ_1 a ψ_2 vyjádříme podle obecného vztahu z taháku $\psi_n\left(x\right) = \left(\frac{M\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{n! 2^n}} H_n\left(x\right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, kde H_n jsou Hermitovy polynomy

$$\psi_0\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\psi_1\left(x\right) = 2x \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dosadíme nové členy do vztahu $\psi = a\psi_0 + b\psi_1$:

$$c\left(1 + x\right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = a \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 2bx \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Tuto rovnici vydělíme $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ a zavedeme novou konstantu $\tilde{c} = c\sqrt[4]{\pi}$ a dostaneme

$$\tilde{c}\left(1 + x\right) = a + \sqrt{2} bx.$$

Z toho dostaneme vztahy pro konstanty

$$a = \tilde{c}$$

$$\tilde{c} = \sqrt{2} b \rightarrow b = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{2}}$$

Z toho plyne, že

$$\psi\left(x\right) = \tilde{c}\psi_0 + \frac{\tilde{c}}{\sqrt{2}}\psi_1.$$

Z podmínky na skalární součin $\left(\psi, \psi\right) = 1$ plyne, že $\tilde{c}^2 + \frac{\tilde{c}^2}{2} = 1$, a tedy $\tilde{c} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Dosazením dostaneme

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_1.$$

Dále spočteme skalární součiny $\left(\psi_0, \psi\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $\left(\psi_1, \psi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

To mám říká, že můžeme naměřit hodnoty energií $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$ s pravděpodobnostmi $P_\psi\left(E_0\right) = \left|\left(\psi_0, \psi\right)\right|^2 = \frac{2}{3}$, $P_\psi\left(E_1\right) = \left|\left(\psi_1, \psi\right)\right|^2 = \frac{1}{3}$.

Nyní se budeme zabývat stavem oscilátoru v čase $t > 0$.

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\omega t}\psi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{3i}{2}\omega t}\psi_1(x).$$

Střední hodnota polohy je dána vztahem $\left\langle \hat{Q} \right\rangle = \left\langle \psi(x,t) | \hat{Q} | \psi(x,t) \right\rangle$, přičemž $\hat{Q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)$.
Z toho dostaneme

$$\left\langle \hat{Q} \right\rangle = \left\langle \psi(x,t) | \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a_+} + \hat{a_-}) | \psi(x,t) \right\rangle =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \psi(x,t) | \hat{a_+} | \psi(x,t) \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \psi(x,t) | \hat{a_-} | \psi(x,t) \rangle$$

Ze vztahu $\hat{a}_\pm |n\rangle = \alpha_n^\pm |n \pm 1\rangle$, $\alpha_n^- = \sqrt{n}, \alpha_n^+ = \sqrt{n+1}$, $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}_+^n$ dostáváme

$$\hat{a_+} |\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\omega t}\psi_1(x)$$

$$\hat{a_-} |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{3i}{2}\omega t}\psi_0(x).$$

Máme tedy

$$\left\langle \hat{Q} \right\rangle_{\psi(t)} = \left(\psi(x,t), \hat{Q}\psi(x,t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}i\omega t - \frac{i}{2}\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\omega t - \frac{3}{2}i\omega t} =$$
$$= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-i\omega t} = \cos(\omega t)$$

Příklad 2 Lineární harmonický oscilátor je v čase $t = 0$ v koherentním stavu $|\alpha\rangle, \alpha \in \mathbb{R}$. Jak se mění střední hodnota kinetické energie oscilátoru s časem?

Řešení Kinetická energie je dána jako $\hat{H}_{kin} = \frac{\hat{P}^2}{2M}$, takže

$$\hat{H}_{kin} = i^2 \frac{M\hbar\omega}{2} \frac{1}{2M} (\hat{a}_+ - \hat{a}_-) = -\frac{\hbar\omega}{4} \left(\hat{a}_+^2 - \hat{a}_+\hat{a}_- - \hat{a}_-\hat{a}_+ + \hat{a}_-^2\right) =$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{4} \left(\hat{a}_+^2 - 2\hat{a}_+\hat{a}_- - \mathbb{I} + \hat{a}_-^2\right).$$

Střední hodnota je pak rovna

$$\left\langle \hat{H}_{kin} \right\rangle_{|\alpha(t)\rangle} = -\frac{\hbar\omega}{4} \left[\left\langle \alpha(t) | \hat{a}_+^2 | \alpha(t) \right\rangle - 2 \left\langle \alpha(t) | \hat{a}_+\hat{a}_- | \alpha(t) \right\rangle - 1 + \left\langle \alpha(t) | \hat{a}_-^2 | \alpha(t) \right\rangle\right].$$

Potom

$$\langle H_{kin} \rangle_{\alpha(t)} = -\frac{\hbar\omega}{4} \left[\overline{\alpha}^2(t) - 2|\alpha(t)|^2 - 1 + \alpha^2(t)\right]$$

Alternativa 1 Existuje i verze s celkovou energií a spočtením střední kvadratické odchylky. Tu ale snadno určíme ze vzorce

$$\Delta_\psi \hat{H} = \sqrt{\left\langle \hat{H}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{H} \right\rangle^2}.$$

Výsledek by měl být $\Delta_\psi \hat{H} = \hbar\omega|\alpha|$.

Alternativa 2 Další verze je nikoli s kinetickou, nýbrž potenciální. Zde však jedinou změnou je, že $\hat{H}_{pot} = \frac{1}{2} M\omega^2 \hat{Q}^2$.

Příklad 3 Uvažujte lineární harmonický oscilátor ve stavu

$$|\psi\rangle = \rho\,|0\rangle + \sqrt{1-\rho^2}e^{i\varphi}\,|1\rangle\,,$$

kde $|n\rangle$ jsou vlastní vektory hamiltoniánu. Určete parametry ρ a φ tak, aby střední hodnota energie byla $\hbar\omega$ a střední hodnota hybnosti byla rovna nule.

Řešení Střední hodnota energie oscilátoru je

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle_\psi = \left\langle \psi|\hat{H}|\psi \right\rangle = \left\langle \psi|\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)|\psi \right\rangle = \hbar\omega\,\langle\psi|\left(\hat{a}_+\hat{a}_-\right)|\psi\rangle + \frac{\hbar\omega}{2}\,\langle\psi|\psi\rangle\,.$$

Spočtěme, čemu je rovno $(\hat{a}_-\,|\psi\rangle)^+$:

$$(\hat{a}_-\,|\psi\rangle)^+ = \left(0 + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{e}^{i\varphi}\,|0\rangle\right)^+ = \langle 0\,|\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{e}^{-i\varphi}.$$

Proto můžeme střední hodnotu energie oscilátoru upravit následovně. Dále za střední hodnotu zvolíme požadovanou hodnotu $\hbar\omega$ k vypočtení parametru ρ

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle_\psi = \hbar\omega\left(1-\rho^2\right)\cdot 1 + \frac{\hbar\omega}{2}\left(\rho^2 + 1 - \rho^2\right) \stackrel{!}{=} \hbar\omega$$
$$1 - \rho^2 + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 1 \quad\to\quad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nyní spočteme střední hodnotu hybnosti. Využijeme faktu, že $\hat{P} = i\sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}}\,(\hat{a}_+ - \hat{a}_-)$. Potom ji dle požadavků ze zadání položíme rovnou nule.

$$\left\langle \hat{P} \right\rangle_\psi = \left\langle \psi|\hat{P}|\psi \right\rangle = i\sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}}\,\langle\psi|\hat{a}_+ - \hat{a}_-|\psi\rangle = i\sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}}\left(\langle\psi|\hat{a}_+|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{a}_-|\psi\rangle\right)$$

Pro závěrečnou úpravu budeme potřebovat vyjádřit, čemu se rovnají $\hat{a}_+\,|\psi\rangle\,, \hat{a}_-\,|\psi\rangle$

$$\hat{a}_+\,|\psi\rangle = \rho\,|1\rangle + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{e}^{i\varphi}\sqrt{2}\,|2\rangle$$
$$\hat{a}_-\,|\psi\rangle = 0\cdot\rho\,|-1\rangle + 1\cdot\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{e}^{i\varphi}\sqrt{2}\,|0\rangle$$

To nyní dosadíme:

$$\left\langle \hat{P} \right\rangle_\psi = \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{e}^{-i\varphi}\rho - \rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{e}^{i\varphi} \stackrel{!}{=} 0 \quad\to\quad \mathrm{e}^{-i\varphi} \stackrel{!}{=} \mathrm{e}^{i\varphi} \quad\to\quad \varphi = m\pi,\ \ m \in \mathbb{Z}$$

Příklad 4 Lineární harmonický oscilátor s hmotností $M = \hbar/\omega$ je v čase $t = 0$ ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\psi\left(x,0\right) = C\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Určete, jaké hodnoty energie můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností. V jakém stavu je oscilátor v čase $t > 0$? Jak se mění střední hodnota hybnosti oscilátoru s časem?

Řešení Nejprve určíme, jaké hodnoty energie můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností.

$$\psi = a\psi_1 + b\psi_2$$

Členy ψ_1 a ψ_2 vyjádříme podle obecného vztahu z taháku $\psi_n\left(x\right) = \left(\frac{M\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{n!2^n}}H_n\left(x\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, kde H_n jsou Hermitovy polynomy

$$\psi_1\left(x\right) = 2x\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\psi_2\left(x\right) = 2\left(2x^2 - 1\right)\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dosadíme nové členy do vztahu $\psi = a\psi_1 + b\psi_2$:

$$c\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = a2x\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + b2\left(2x^2 - 1\right)\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Tuto rovnici vydělíme $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ a zavedeme novou konstantu $\tilde{c} = c\frac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{2}}$ a dostaneme

$$\tilde{c}\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right) = ax + \frac{2bx^2}{2} - \frac{b}{2}.$$

Z toho dostaneme vztahy pro konstanty

$$a = \tilde{c}$$

$$\tilde{c} = b$$

$$-\frac{1}{2}\tilde{c} = -\frac{1}{2}b$$

Z toho plyne, že

$$\psi = \tilde{c}\left(\psi_1 + \psi_2\right).$$

Z podmínky na skalární součin $(\psi,\psi) = 1$ plyne, že $\tilde{c}^2 + \tilde{c}^2 = 1$, a tedy $\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dosazením dostaneme

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2.$$

Dále spočteme skalární součiny $(\psi_1,\psi) = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $(\psi_2,\psi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

To mám říká, že můžeme naměřit hodnoty energií $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}, E_2 = \frac{5\hbar\omega}{2}$ s pravděpodobnostmi $P_\psi\left(E_1\right) = \left|\,(\psi_1,\psi)\,\right|^2 = \frac{1}{2}$, $P_\psi\left(E_2\right) = \left|\,(\psi_2,\psi)\,\right|^2 = \frac{1}{2}$.

Nyní se budeme zabývat stavem oscilátoru v čase $t > 0$.

$$\psi\left(x,t\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\frac{3}{2}h\omega t}\psi_1\left(x\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\frac{5}{2}h\omega t}\psi_2\left(x\right).$$

Střední hodnota hybnosti je dána vztahem $\left\langle \hat{P} \right\rangle = \left(\psi\left(x,t\right), \hat{P}\psi\left(x,t\right)\right)$, přičemž $\hat{P} = i\sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}_+ - \hat{a}_-\right)$.

Ze vztahu $\hat{a}_\pm \left|n\right\rangle = \alpha_n^\pm \left|n \pm 1\right\rangle$, $\alpha_n^- = \sqrt{n}$, $\alpha_n^+ = \sqrt{n+1}$, $\left|n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}_+^n$ dostáváme hodnoty $\alpha_1^+ = \sqrt{2}$, $\alpha_1^- = 1$, $\alpha_2^+ = \sqrt{3}$, $\alpha_2^- = \sqrt{2}$.

Dosadíme do vztahu pro $\hat{P}\psi\left(x,t\right)$ a dostaneme

$$\hat{P}\psi\left(x,t\right) = i\sqrt{\frac{\hbar^2}{2}}\left(\hat{a}_+\psi\left(x,t\right) - \hat{a}_-\psi\left(x,t\right)\right) =$$

$$= i\sqrt{\frac{\hbar^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\frac{3}{2}h\omega t}\sqrt{2}\psi_2 + \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\frac{5}{2}\hbar\omega t}\sqrt{3}\psi_3 - \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\frac{3}{2}\hbar\omega t}\psi_0 - \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\frac{5}{2}\hbar\omega t}\sqrt{2}\psi_1\right],$$

a konečně pak

$$\left\langle \hat{P} \right\rangle_{\psi(t)} = \left(\psi\left(x,t\right), \hat{P}\psi\left(x,t\right)\right) = i\frac{\hbar}{2}\left[-\mathrm{e}^{\frac{3}{2}i\omega t - \frac{5}{2}i\omega t} + \mathrm{e}^{\frac{5}{2}i\omega t - \frac{3}{2}i\omega t}\right] =$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\left[\mathrm{e}^{i\omega t} - \mathrm{e}^{-i\omega t}\right] = -\hbar\sin\left(\omega t\right)$$

Příklad 5 Lineární harmonický oscilátor s hmotností $M = \hbar/\omega$ je v čase $t = 0$ ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\psi\left(x,0\right) = C\left(1+3x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Určete, jaké hodnoty energie můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností. V jakém stavu je oscilátor v čase $t > 0$? Jak se mění střední hodnota hybnosti oscilátoru s časem?

Řešení Nejprve určíme, jaké hodnoty energie můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností.

$$\psi = a\psi_0 + b\psi_2$$

Členy ψ_0 a ψ_2 vyjádříme podle obecného vztahu z taháku $\psi_n\left(x\right) = \left(\frac{M\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{n!2^n}}H_n\left(x\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, kde H_n jsou Hermitovy polynomy

$$\psi_0\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\psi_2\left(x\right) = 2\left(2x^2-1\right)\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dosadíme nové členy do vztahu $\psi = a\psi_0 + b\psi_2$:

$$c\left(1+3x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = a\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 2b\left(2x^2-1\right)\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Tuto rovnici vydělíme $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ a zavedeme novou konstantu $\tilde{c} = c\sqrt[4]{\pi}$ a dostaneme

$$\tilde{c}\left(1+3x^2\right) = a - \frac{1}{\sqrt{2}}b + \sqrt{2}x^2 b.$$

Z toho dostaneme vztahy pro konstanty

$$a - \frac{1}{\sqrt{2}}b = \tilde{c}$$

$$3\tilde{c} = \sqrt{2}b \quad \rightarrow \quad b = \frac{3\tilde{c}}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad a = \frac{5\tilde{c}}{2}$$

Z toho plyne, že

$$\psi\left(x\right) = \frac{5\tilde{c}}{2}\psi_0 + \frac{3\tilde{c}}{\sqrt{2}}\psi_2.$$

Z podmínky na skalární součin $\left(\psi,\psi\right) = 1$ plyne, že $\frac{25\tilde{c}^2}{4} + \frac{9\tilde{c}^2}{2} = 1$, a tedy $\tilde{c} = \frac{2}{\sqrt{43}}$.

Dosazením dostaneme

$$\psi = \frac{5}{\sqrt{43}}\psi_0 + 3\sqrt{\frac{2}{43}}\psi_2.$$

Dále spočteme skalární součiny $\left(\psi_0,\psi\right) = \frac{5}{\sqrt{43}}$; $\left(\psi_2,\psi\right) = 3\sqrt{\frac{2}{43}}$.

To mám říká, že můžeme naměřit hodnoty energií $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, E_2 = \frac{5\hbar\omega}{2}$ s pravděpodobnostmi $P_\psi\left(E_0\right) = \left|\left(\psi_0,\psi\right)\right|^2 = \frac{25}{43}$, $P_\psi\left(E_1\right) = \left|\left(\psi_2,\psi\right)\right|^2 = \frac{18}{43}$.

Nyní se budeme zabývat stavem oscilátoru v čase $t > 0$.

$$\psi\left(x,t\right) = \frac{5}{\sqrt{43}}\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\omega t}\psi_0\left(x\right) + 3\sqrt{\frac{2}{43}}\mathrm{e}^{-\frac{5i}{2}\omega t}\psi_2\left(x\right).$$

Střední hodnota hybnosti je dána vztahem $\left\langle \hat{P}\right\rangle = \left(\psi\left(x,t\right), \hat{P}\psi\left(x,t\right)\right)$, přičemž $\hat{P} = i\sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}_+ - \hat{a}_-\right)$.

Ze vztahu $\hat{a}_\pm\left|n\right\rangle = \alpha_n^\pm\left|n\pm 1\right\rangle, \alpha_n^- = \sqrt{n}, \alpha_n^+ = \sqrt{n+1}$, $\left|n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}_+^n$ dostáváme hodnoty $\alpha_0^+ = 1, \alpha_0^- = 0, \alpha_2^+ = \sqrt{3}, \alpha_2^- = \sqrt{2}$.

Dosadíme do vztahu pro $\hat{P}\psi\left(x,t\right)$ a dostaneme

$$\hat{P}\psi\left(x,t\right) = i\sqrt{\frac{\hbar^2}{2}}\left(\hat{a}_+\psi\left(x,t\right) - \hat{a}_-\psi\left(x,t\right)\right) =$$
$$= i\sqrt{\frac{\hbar^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{43}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\hbar\omega t}5\psi_1 + \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\frac{5}{2}\hbar\omega t}3\sqrt{6}\psi_3 - \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\frac{5}{2}\hbar\omega t}12\psi_1\right],$$

a konečně pak

$$\left\langle \hat{P}\right\rangle_{\psi(t)} = \left(\psi\left(x,t\right), \hat{P}\psi\left(x,t\right)\right) = 0$$

2 Izotropní harmonický oscilátor

Příklad 1 Izotropní oscilátor s vlastní frekvencí $\omega = \hbar/M$ je ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\psi\left(\vec{x}\right) = C\left(\left(2+i\right)x + y\right)\left(\frac{5}{2} - x^2 - y^2 - z^2\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right).$$

Jaká je energie částice? Jakou hodnotu kvadrátu momentu hybnosti můžeme naměřit? Jaké hodnoty projekce orbitálního momentu hybnosti částice do osy z můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností?

Řešení Nejprve si převedeme úlohu do sférických souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi\left(r,\theta,\varphi\right) &= C\cdot\left(\left(2+i\right)r\sin\theta\cos\varphi + r\sin\theta\sin\varphi\right)\left(\frac{5}{2}-r^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} = \\ &= C\cdot\left(\left(2+i\right)\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{i\varphi}+\mathrm{e}^{-i\varphi}}{2} + \sin\theta\frac{\mathrm{e}^{i\varphi}-\mathrm{e}^{-i\varphi}}{2i}\right)\left(\frac{5}{2}-r^2\right)r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} = \\ &= C\cdot\left[\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi}\left(\frac{2+i}{2}+\frac{1}{2i}\right) + \sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi}\left(\frac{2+i}{2}-\frac{1}{2i}\right)\right]\left(\frac{5}{2}-r^2\right)r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} = \\ &= \left\|\frac{2+i}{2}+\frac{1}{2i} = \frac{2i-1+1}{2i} = 1, \quad \frac{2+i}{2}-\frac{1}{2i} = \frac{2i-1-1}{2i} = 1-\frac{2}{2i} = 1+i\right\| = \\ &= C\cdot\left[\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi} + \sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi}\left(1+i\right)\right]\left(\frac{5}{2}-r^2\right)r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \end{aligned}$$

Budeme se zajímat tím, jaké hodnoty projekce orbitálního momentu hybnosti do osy z můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností.

Nejprve ze vztahu $Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right) = C_{lm}P_l^m\left(\cos\theta\right)\mathrm{e}^{im\varphi}$, $|C_{ml}|^2 = \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(m+l)!}$ spočteme kulové funkce

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi},$$

z čehož dostaneme vztahy pro součin goniometrických funkcí s exponenciálou

$$\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{11}, \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{10}, \quad \sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{1-1}.$$

Tyto vztahy dosadíme do rovnice výše, přičemž uvažujeme $r = \text{konst.}$:

$$\Psi\left(\theta,\varphi\right) = \tilde{C}\left[-Y_{11} + \left(1+i\right)Y_{1-1}\right].$$

Dále potřebujeme určit konstantu $\tilde{C}$, což jako obvykle uděláme z rovnosti $(\Psi, \Psi) = 1$, tedy

$$1 = |\tilde{c}|^2 \left[|1|^2 + |1+i|^2\right] = |\tilde{c}^2| \left[1+2\right] = 3|\tilde{c}|^2,$$

takže $\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Máme tedy

$$\Psi\left(\theta, \varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-Y_{11} + \left(1+i\right) Y_{1-1}\right).$$

Můžeme naměřit hodnoty $m = \pm 1$, z čehož dostaneme hodnoty projekce orbitálního momentu hybnosti do osy z $L_z = 0, \pm\hbar$, přičemž pravděpo-dobnosti jednotlivých stavů jsou

$$P_1 = |\left(Y_{11}, \Psi\right)|^2 = \frac{1}{3},$$

$$P_1 = |\left(Y_{1-1}, \Psi\right)|^2 = \frac{2}{3}.$$

Nyní nás bude zajímat hodnota kvadrátu momentu hybnosti $\left\langle \hat{L}^2 \right\rangle$. Neboť máme $l = 1$, dostáváme ze vztahu $\hat{L}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l \left(l+1\right) Y_{lm}$:

$$\hat{L}^2 = 2\hbar^2.$$

Nyní ještě určíme energie částice. To uděláme tak, že do našeho předpisu vrátíme závislost na r, tedy uvažujeme

$$\psi\left(r, \theta, \varphi\right) = \left(\frac{5}{2} - r^2\right) r \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-Y_{11} + \left(1+i\right) Y_{1-1}\right).$$

Rozebereme si nyní část $\left(\frac{5}{2} - r^2\right) r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}$, pomocí níž určíme hodnoty n, l. Neboť $\xi = r\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}$, máme ze zadání $\xi = r$. Neboť se v obecném vztahu pro vlnovou funkci (viz. tahák) vyskytuje ξ^l a ve zkoumané části r^1 máme, že $l = 1$. Nyní ještě potřebujeme vystihnout člen $\left(\frac{5}{2} - r^2\right)$ pomocí Lagguerových polynomů. Neboť je $l = 1$ a zajímá nás $L_n^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right)$, uvažujeme $L_n^{\frac{3}{2}}\left(r^2\right)$. Proto očividně $n = 1$.

Hledaná hodnota energie ve tvaru $E = \hbar\omega\left(2n + l + \frac{3}{2}\right)$ je tedy zřejmě $E = \frac{9}{2}\hbar\omega$.

Příklad 2 Izotropní oscilátor s vlastní frekvencí $\omega = \hbar/M$ je ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\psi(\vec{x}) = C(ix + y + 3iz)\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right).$$

Jaké hodnoty projekce orbitálního momentu hybnosti částice do osy z můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností? Jaká je střední hodnota projekce momentu hybnosti do osy x?

Řešení Nejprve si převedeme úlohu do sférických souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(r,\theta,\varphi) &= C\cdot(ir\sin\theta\cos\varphi + r\sin\theta\sin\varphi + 3ir\cos\theta)\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} = \\ &= C\cdot\left(i\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{i\varphi}+\mathrm{e}^{-i\varphi}}{2} + \sin\theta\frac{\mathrm{e}^{i\varphi}-\mathrm{e}^{-i\varphi}}{2i} + 3i\cos\theta\right) r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} = \\ &= C\cdot\left[\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi}\left(\frac{i}{2}+\frac{1}{2i}\right) + \sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi}\left(\frac{i}{2}-\frac{1}{2i}\right) + 3i\cos\theta\right] r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} = \\ &= C\cdot\left[\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi}\left(\frac{-1+1}{2i}\right) + \sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi}\left(\frac{-1-1}{2i}\right) + 3i\cos\theta\right] r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \end{aligned}$$

Nejprve ze vztahu $Y_{lm}(\theta,\varphi) = C_{lm}P_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{im\varphi}$, $|C_{ml}|^2 = \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(m+l)!}$ spočteme kulové funkce

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi},$$

z čehož dostaneme vztahy pro součin goniometrických funkcí s exponenciálou

$$\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{11}, \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{10}, \qquad \sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{1-1}.$$

Tyto vztahy dosadíme do rovnice výše, přičemž uvažujeme $r =$ konst.:

$$\Psi(\theta,\varphi) = \tilde{C}\left[i\cdot Y_{1-1} + \frac{3i}{\sqrt{2}}Y_{10}\right].$$

Dále potřebujeme určit konstantu $\tilde{C}$, což jako obvykle uděláme z rovnosti $(\Psi,\Psi) = 1$, tedy

$$1 = |\tilde{c}|^2\left[|i|^2 + \left|\frac{3i}{\sqrt{2}}\right|^2\right] = |\tilde{c}^2|\left[1+\frac{9}{2}\right] = \frac{11}{2}|\tilde{c}|^2,$$

takže $\tilde{c} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

Máme tedy

$$\Psi\left(\theta, \varphi\right) = \sqrt{\frac{2}{11}} i \cdot Y_{1-1} + \frac{3i}{\sqrt{11}} Y_{10}.$$

Můžeme naměřit hodnoty $m = 0, \pm 1$, z čehož dostaneme hodnoty projekce orbitálního momentu hybnosti do osy z $L_z = 0, \pm\hbar$, přičemž pravděpo-dobnosti jednotlivých stavů jsou

$$P\left(0\right) = \left|\left(Y_{10}, \Psi\right)\right|^2 = \frac{2}{11},$$

$$P\left(-\hbar\right) = \left|\left(Y_{1-1}, \Psi\right)\right|^2 = \frac{9}{11}.$$

Střední hodnotu projekce orbitálního momentu hybnosti do osy x $\left\langle \hat{L_1} \right\rangle_\Psi$ určíme za pomoci vztahů $\hat{L_+} = \hat{L_1} + i\hat{L_2}, \hat{L_-} = \hat{L_1} - i\hat{L_2}$, z čehož nám plyne $\hat{L_1} = \frac{1}{2}\left(\hat{L_+} + \hat{L_-}\right)$. Proto

$$\left\langle \hat{L_1} \right\rangle_\Psi = \left(\Psi, \hat{L_1}\Psi\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\Psi, \hat{L_+}\Psi\right) + \left(\Psi, \hat{L_-}\Psi\right)\right]$$

Jelikož platí $m = 0, -1$ a $\alpha^{\pm}_{lm} = \hbar\sqrt{l\left(l+1\right) - m\left(m \pm 1\right)}$, dostaneme (nenulové) hodnoty

$$\alpha^{+}_{1-1} = \sqrt{2}\hbar, \quad \alpha^{+}_{10} = \sqrt{2}\hbar, \quad \alpha^{-}_{10} = \sqrt{2}\hbar$$

A podle $\hat{L}_{\pm} \left|l, m\right\rangle = \alpha^{\pm}_{lm} \left|l, m \pm 1\right\rangle$ dostaneme

$$\hat{L}_+\Psi = \frac{2}{\sqrt{11}}\hbar Y_{10} + 3i\hbar\sqrt{\frac{2}{11}} Y_{11}$$

$$\hat{L}_-\Psi = 0 + 3i\hbar\sqrt{\frac{2}{11}} Y_{1-1}$$

Požadované skalární součiny jsou tedy

$$\left(\Psi, \hat{L}_+\Psi\right) = \frac{6i}{11}\hbar$$

$$\left(\Psi, \hat{L}_-\Psi\right) = -3\frac{2}{11}\hbar$$

Z toho tedy dostáváme, že střední hodnota projekce orbitálního momentu hybnosti do osy x je

$$\left\langle \hat{L}_1 \right\rangle_\psi = 0.$$

Příklad 3 Elektron v atomu vodíku je ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\psi\left(\vec{x}\right) = C\left(x + 2y + z\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{2a}\right).$$

Jaké hodnoty projekce orbitálního momentu hybnosti elektronu do osy z můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností? Jaká je střední hodnota projekce orbitálního momentu hybnosti do osy x?

Řešení Nejprve si převedeme úlohu do sférických souřadnic.

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\psi\left(r,\theta,\varphi\right) &= C\cdot\left(r\sin\theta\cos\varphi + 2r\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\right)\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2a}} = \\ &= C\cdot\left(\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2} + 2\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{i\varphi} - \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2i} + \cos\theta\right)r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2a}} = \\ &= C\cdot\left[\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{i}\right) + \sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{i}\right) + \cos\theta\right]r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2a}}\end{aligned}$$

Nejprve ze vztahu $Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right) = C_{lm}P_l^m\left(\cos\theta\right)\mathrm{e}^{im\varphi}, |C_{ml}|^2 = \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(m+l)!}$ spočteme kulové funkce

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi},$$

z čehož dostaneme vztahy pro součin goniometrických funkcí s exponenciálou

$$\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{11},\quad \cos\theta = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{10},\quad \sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{1-1}.$$

Tyto vztahy dosadíme do rovnice výše, přičemž uvažujeme $r =$ konst.:

$$\Psi\left(\theta,\varphi\right) = \tilde{C}\left[-Y_{11}\left(\frac{i+2}{2i}\right) + Y_{1-1}\left(\frac{i-2}{2i}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_{10}\right].$$

Dále potřebujeme určit konstantu $\tilde{C}$, což jako obvykle uděláme z rovnosti $(\Psi,\Psi) = 1$, tedy

$$1 = |\tilde{c}|^2\left[\left|\frac{-1+2i}{2}\right|^2 + \left|\frac{1+2i}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\right] = |\tilde{c}^2|\left[\frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\right] = |\tilde{c}|^2\frac{12}{4},$$

takže $\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Máme tedy

$$\Psi\left(\theta,\varphi\right) = -\left(\frac{-1+2i}{2\sqrt{3}}\right)Y_{11} + \left(\frac{-1-2i}{2\sqrt{3}}\right)Y_{1-1} + \frac{1}{\sqrt{6}}Y_{10}.$$

Můžeme naměřit hodnoty $m = 0, \pm 1$, z čehož dostaneme hodnoty projekce orbitálního momentu hybnosti do osy z $L_z = 0, \pm\hbar$, přičemž pravděpo-dobnosti jednotlivých stavů jsou

$$P_1 = |\left(Y_{11}, \Psi\right)|^2 = \frac{5}{12},$$

$$P_2 = |\left(Y_{10}, \Psi\right)|^2 = \frac{1}{6},$$

$$P_1 = |\left(Y_{1-1}, \Psi\right)|^2 = \frac{5}{12}.$$

Střední hodnotu projekce orbitálního momentu hybnosti do osy x $\left\langle \hat{L_1} \right\rangle_\Psi$ určíme za pomoci vztahů $\hat{L_+} = \hat{L_1} + i\hat{L_2}, \hat{L_-} = \hat{L_1} - i\hat{L_2}$, z čehož nám plyne $\hat{L_1} = \frac{1}{2}\left(\hat{L_+} + \hat{L_-}\right)$. Proto

$$\left\langle \hat{L_1} \right\rangle_\Psi = \left(\Psi, \hat{L_1}\Psi\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\Psi, \hat{L_+}\Psi\right) + \left(\Psi, \hat{L_-}\Psi\right)\right]$$

Jelikož platí $|m| \leq l$ a $\alpha_{lm}^{\pm} = \hbar\sqrt{l\left(l+1\right) - m\left(m \pm 1\right)}$, dostaneme (nenulové) hodnoty

$$\alpha_{1-1}^{+} = \sqrt{2}\hbar, \quad \alpha_{11}^{-} = \sqrt{2}\hbar, \alpha_{10}^{+} = \sqrt{2}\hbar, \alpha_{10}^{-} = \sqrt{2}\hbar$$

A podle $\hat{L}_\pm \left|l,m\right\rangle = \alpha_{lm}^{\pm}\left|l, m \pm 1\right\rangle$ dostaneme

$$\hat{L}_+\Psi = 0 - \frac{1+2i}{2\sqrt{3}}\sqrt{2}\hbar Y_{10} + \hbar\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}Y_{11}$$

$$\hat{L}_-\Psi = -\frac{-1+2i}{2\sqrt{3}}\sqrt{2}\hbar Y_{10} + \frac{\hbar}{\sqrt{3}}Y_{1-1}$$

Požadované skalární součiny jsou tedy

$$\left(\Psi, \hat{L}_+\Psi\right) = \frac{\hbar}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1+2i}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{-1-2i}{2\sqrt{3}}\frac{\hbar}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\left(\Psi, \hat{L}_-\Psi\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{2}\hbar}{2\sqrt{3}}\left(-1+2i\right) + \frac{-1+2i}{2\sqrt{3}}\frac{\hbar}{\sqrt{3}} = 0$$

Z toho tedy dostáváme, že střední hodnota projekce orbitálního momentu hybnosti do osy x je

$$\left\langle \hat{L} \right\rangle_\psi = 0.$$

Příklad 4 Elektron v atomu vodíku je ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\psi(\vec{x}) = C(2x + 3y + z)\exp\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2a}\right).$$

Jaké hodnoty projekce orbitálního momentu hybnosti elektronu do osy z můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností? Jaká je střední hodnota projekce orbitálního momentu hybnosti do osy y?

Řešení Nejprve si převedeme úlohu do sférických souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(r,\theta,\varphi) &= C\cdot(2r\sin\theta\cos\varphi + 3r\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta)\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2a}} = \\ &= C\cdot\left(2\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{i\varphi}+\mathrm{e}^{-i\varphi}}{2} + 3\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{i\varphi}-\mathrm{e}^{-i\varphi}}{2i} + \cos\theta\right) r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2a}} = \\ &= C\cdot\left[\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi}\left(1+\frac{3}{2i}\right) + \sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi}\left(1-\frac{3}{2i}\right) + \cos\theta\right] r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2a}} \end{aligned}$$

Nejprve ze vztahu $Y_{lm}(\theta,\varphi) = C_{lm}P_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{im\varphi}$, $|C_{ml}|^2 = \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(m+l)!}$ spočteme kulové funkce

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi},$$

z čehož dostaneme vztahy pro součin goniometrických funkcí s exponenciálou

$$\sin\theta\mathrm{e}^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{11}, \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{10}, \quad \sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{1-1}.$$

Tyto vztahy dosadíme do rovnice výše, přičemž uvažujeme $r =$ konst.:

$$\Psi(\theta,\varphi) = \tilde{C}\left[-Y_{11}\left(\frac{2i+3}{2i}\right) + Y_{1-1}\left(\frac{2i-3}{2i}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_{10}\right].$$

Dále potřebujeme určit konstantu $\tilde{C}$, což jako obvykle uděláme z rovnosti $(\Psi,\Psi) = 1$, tedy

$$1 = |\tilde{C}|^2\left[\left|\frac{2i+3}{2i}\right|^2 + \left|\frac{2i-3}{2i}\right|^2 + \frac{1}{2}\right] = |\tilde{c}^2|\left[\frac{13}{4}+\frac{13}{4}+\frac{1}{2}\right] = |\tilde{c}|^2\frac{28}{4},$$

takže $\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Máme tedy

$$\Psi\left(\theta,\varphi\right) = -\left(\frac{2i+3}{2\sqrt{7}i}\right)Y_{11} + \left(\frac{2i-3}{2\sqrt{7}i}\right)Y_{1-1} + \frac{1}{\sqrt{14}}Y_{10}.$$

Můžeme naměřit hodnoty $m = 0, \pm 1$, z čehož dostaneme hodnoty projekce orbitálního momentu hybnosti do osy z $L_z = 0, \pm\hbar$, přičemž pravděpo-dobnosti jednotlivých stavů jsou

$$P_1 = \left|\left(Y_{11},\Psi\right)\right|^2 = \frac{13}{28},$$

$$P_2 = \left|\left(Y_{10},\Psi\right)\right|^2 = \frac{1}{14},$$

$$P_1 = \left|\left(Y_{1-1},\Psi\right)\right|^2 = \frac{13}{28}.$$

Střední hodnotu projekce orbitálního momentu hybnosti do osy y $\left\langle \hat{L_2} \right\rangle_\Psi$ určíme za pomoci vztahů $\hat{L_+} = \hat{L_1} + i\hat{L_2}, \hat{L_-} = \hat{L_1} - i\hat{L_2}$, z čehož nám plyne $\hat{L_2} = \frac{1}{2i}\left(\hat{L_+} - \hat{L_-}\right)$. Proto

$$\left\langle \hat{L_2} \right\rangle_\Psi = \left(\Psi, \hat{L_2}\Psi\right) = \frac{1}{2i}\left[\left(\Psi, \hat{L_+}\Psi\right) - \left(\Psi, \hat{L_-}\Psi\right)\right]$$

Jelikož platí $|m| \leq l$ a $\alpha^{\pm}_{lm} = \hbar\sqrt{l\left(l+1\right) - m\left(m \pm 1\right)}$, dostaneme (nenulové) hodnoty

$$\alpha^{+}_{1-1} = \sqrt{2}\hbar, \quad \alpha^{-}_{11} = \sqrt{2}\hbar, \alpha^{+}_{10} = \sqrt{2}\hbar, \alpha^{-}_{10} = \sqrt{2}\hbar$$

A podle $\hat{L}_\pm \left|l,m\right\rangle = \alpha^{\pm}_{lm}\left|l, m \pm 1\right\rangle$ dostaneme

$$\hat{L}_+\Psi = 0 + \frac{2i-3}{2\sqrt{7}i}\sqrt{2}\hbar Y_{10} + \hbar\frac{1}{\sqrt{7}}Y_{11}$$

$$\hat{L}_-\Psi = -\frac{2i+3}{2\sqrt{7}i}\sqrt{2}\hbar Y_{10} + \frac{\hbar}{\sqrt{7}}Y_{1-1}$$

Požadované skalární součiny jsou tedy

$$\left(\Psi, \hat{L}_+\Psi\right) = \frac{\hbar}{\sqrt{7}}\left(\frac{2i-3}{2\sqrt{7}i}\right) - \frac{2i+3}{2\sqrt{7}i}\frac{\hbar}{\sqrt{7}} = -\frac{6\hbar}{14i}$$

$$\left(\Psi, \hat{L}_-\Psi\right) = -\frac{2i+3}{2\sqrt{7}i}\frac{\hbar}{\sqrt{7}} + \frac{\hbar}{\sqrt{7}}\frac{2i-3}{2\sqrt{7}i} = -\frac{6\hbar}{14i}$$

Z toho tedy dostáváme, že střední hodnota projekce orbitálního momentu hybnosti do osy x je

$$\left\langle \hat{L}_2 \right\rangle_\psi = 0.$$

3 Volná částice

Příklad 1 Volná částice na přímce je ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\psi(x) = C \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{i}{\hbar}p_0 x\right), \qquad x_0, p_0 \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

Určete střední hodnotu hybnosti a energie částice.

Řešení Pro střední hodnotu hybnosti platí $\left\langle \hat{P} \right\rangle_\psi = \left(\psi, \hat{P}\psi\right)$, kde $\hat{P} = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Na základě toho můžeme určit $\hat{P}\psi$:

$$\begin{aligned}
\hat{P}\psi = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[C \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{i}{\hbar}p_0 x\right)\right] &= \\
= -i\hbar\left(-\frac{x-x_0}{2\sigma^2} + \frac{i}{\hbar}p_0\right) C \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{i}{\hbar}p_0 x\right) &= \\
= \left(i\hbar\frac{x-x_0}{2\sigma^2} + p_0\right) C \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{i}{\hbar}p_0 x\right)&
\end{aligned}$$

Skalární součin $\left(\psi, \hat{P}\psi\right)$ je dán jako $\int_{\mathbb{R}} \psi \cdot \overline{\hat{P}\psi}\mathrm{d}x$, takže

$$\left(\psi, \hat{P}\psi\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} C \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{i}{\hbar}p_0 x\right) \cdot \left(i\hbar\frac{x-x_0}{2\sigma^2} + p_0\right) \overline{C} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{i}{\hbar}p_0 x\right) \mathrm{d}x = \\
&= |C|^2 \int_{\mathbb{R}} \left(i\hbar\frac{x-x_0}{2\sigma^2} + p_0\right) \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x = |y = x - x_0 \ \rightarrow \ dy = dx| = \\
&= |C|^2 \int_{\mathbb{R}} \left(i\hbar\frac{y}{2\sigma^2} + p_0\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}y = 0 + |C|^2 p_0 \sqrt{2\pi\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Konstantu C určíme pomocí normalizace, tedy z $(\psi, \psi) = 1$.

$$1 = |C|^2 \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}y = |C|^2 \sqrt{2\pi\sigma^2},$$

z čehož

$$C = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}}.$$

Konečně tedy dostáváme střední hodnotu hybnosti jako

$$\left\langle \hat{P} \right\rangle_\psi = |C|^2 p_0 \sqrt{2\pi\sigma^2} = p_0.$$

Nyní spočteme střední hodnotu energie částice. Pro tu platí $\left\langle \hat{H} \right\rangle_\psi = \left(\psi, \hat{H}\psi \right)$, kde $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$. To však můžeme vyjádřit jako $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M}$. Takže máme

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle_\psi = \left(\psi, \frac{\hat{P}^2}{2M}\psi \right) = \frac{1}{2M}\left(\hat{P}\psi, \hat{P}\psi \right) =$$

$$= \frac{1}{2M}\left|C\right|^2 \int_{\mathbb{R}} \left[i\hbar \frac{x-x_0}{2\sigma^2} + p_0 \right] \cdot \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2} \right) \cdot \left[-i\hbar \frac{x-x_0}{2\sigma^2} + p_0 \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2M}\left|C\right|^2 \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2} \right) \cdot \left[\hbar^2 \frac{\left(x-x_0\right)^2}{4\sigma^4} + p_0^2 \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2M}\left|C\right|^2 \left[\hbar^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(x-x_0\right)^2}{4\sigma^4} \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2} \right) \mathrm{d}x + p_0^2 \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2} \right) \mathrm{d}x \right] =$$

$$= \left| y = x - x_0 \ \rightarrow \ dy = dx \right| = \frac{1}{2M}\left|C\right|^2 \left[\frac{\hbar^2}{4\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} \right) \mathrm{d}y + p_0\sqrt{2\pi\sigma^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2M}\left|C\right|^2 \left[\frac{\hbar^2}{4\sigma^2}\frac{1}{2}2\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2} + p_0\sqrt{2\pi\sigma^2} \right] = \left| C = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \right| = \frac{1}{2M}\left[\frac{\hbar^2}{4\sigma^2} + p_0^2 \right]$$

Příklad 2 Částice je ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\psi\left(\vec{x}\right) = C \exp\left(-\frac{\left(\vec{x}-\vec{y}\right)^2}{4\sigma^2} + \frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}\right), \qquad \vec{y},\vec{p}\in\mathbb{R}^3, \sigma > 0.$$

Jaká je střední hodnota první složky momentu hybnosti částice?

Pro jednotlivé složky momentu hybnosti platí $\hat{L}_j = \epsilon_{jkl}\hat{Q}_k\hat{P}_l$, tedy pro první složku máme

$$\hat{L}_1 = \epsilon_{123}\hat{Q}_2\hat{P}_3 + \epsilon_{132}\hat{Q}_3\hat{P}_2 = \hat{Q}_2\hat{P}_3 - \hat{Q}_3\hat{P}_2 = x_2\left(-i\hbar\right)\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\left(-i\hbar\right)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

Pro střední hodnotu složky momentu hybnosti tedy platí

$$\left\langle \hat{L}_1 \right\rangle_\psi = \left(\psi, \hat{L}_1\psi\right) = \left(\psi, \hat{Q}_2\hat{P}_3\psi\right) - \left(\psi, \hat{Q}_3\hat{P}_2\psi\right).$$

První člen v rozdílu nyní upravíme

$$\left(\psi, \hat{Q}_2\hat{P}_3\psi\right) = |C|^2 \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{\left(\vec{x}-\vec{y}\right)^2}{2\sigma^2}\right) x_2\cdot\left(-i\hbar\right)\left[\frac{x_3-y_3}{2\sigma^2} + \frac{i}{\hbar}p_3\right]\mathrm{d}^3x =$$
$$= |C|^2\left[\int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{\left(\vec{x}-\vec{y}\right)^2}{2\sigma^2}\right) p_3 x_2 \mathrm{d}^3x - \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{\left(\vec{x}-\vec{y}\right)^2}{2\sigma^2}\right) i\hbar\frac{x_3-y_3}{2\sigma^2}x_2\mathrm{d}^3x\right],$$

přičemž druhý integrál bude roven 0.

Z normalizace určím konstantu C:

$$1 = |c|^2 \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{\left(\vec{x}-\vec{y}\right)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}^3x = |c|^2\left(2\pi\sigma^2\right)^{3/2},$$

z čehož

$$|C|^2 = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{3/2}}.$$

Dostáváme tedy

$$\left(\psi, \hat{Q}_2\hat{P}_3\psi\right) = |C|^2\cdot\left(2\pi\sigma^2\right)^{3/2} y_2 p_3 = y_2 p_3.$$

Obdobně dostaneme i

$$\left(\psi, \hat{Q}_3\hat{P}_2\psi\right) = |C|^2\cdot\left(2\pi\sigma^2\right)^{3/2} y_3 p_2 = y_3 p_2.$$

Střední hodnota první složky momentu hybnosti je tedy rovna

$$\left\langle \hat{L}_1 \right\rangle_\psi = y_2 p_3 - y_3 p_2.$$

4 Potenciálová jáma

Příklad 1 Uvažujte částici s hmotností M v nekonečné potenciálové jámě šířky $2a$. V čase $t = 0$ je částice ve stavu

$$\psi(x,0) = C\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}(x-a)\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2a}(x-a)\right)\right].$$

Jaké hodnot energie můžeme v tomto stav u naměřit a s jakou pravděpodobností? Nalezněte $\psi(x,t)$ pro $t > 0$. Jak se mění s časem pravděpodobnost nalezení částice v intervalu $(0,a)$?

Může se hodit (pro $m \neq n$):

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{2a}(x-a)\right)\sin\left(\frac{m\pi}{2a}(x-a)\right)dx = \frac{a}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(m-n)\right)}{m-n} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(m+n)\right)}{m+n}\right).$$

Řešení Určeme nejprve hodnoty a pravděpodobnosti energií. Neboť platí $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{2a}(x-a)\right)$, máme

$$\psi(x,0) = C\left[\sqrt{a}\psi_2(x) + 2\sqrt{a}\psi_3(x)\right] = \tilde{C}\left[\psi_2(x) + 2\psi_3(x)\right]$$

Provedeme normalizaci

$$1 = \tilde{C}^2 + 4\tilde{C}^2 = 5\tilde{C}^2.$$

Můžeme naměřit hodnoty energie

$$E_2 = \frac{1}{2M}\left(\frac{\pi\hbar}{a}\right)^2,$$

$$E_3 = \frac{1}{2M}\left(\frac{3}{2}\frac{\pi\hbar}{a}\right)^2.$$

Neboť $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_3$, dostáváme pravděpodobnosti naměření zmíněných energií

$$P(E_2) = |(\psi_2,\psi)|^2 = \frac{1}{5},$$

$$P(E_3) = |(\psi_3,\psi)|^2 = \frac{4}{5}.$$

Průběh pro $t > 0$ tedy je

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}\psi_2(x) + \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_3t}\psi_3(x)\right).$$

Nakonec určíme pravděpodobnost nalezení částice v intervalu $(0,a)$ v čase t, přičemž platí $P_{x\in(0,a)}(t) = \int_0^a |\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x$.

Určeme nejprve

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}\psi_2(x) + \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_3t}\psi_3(x)\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_2t}\psi_2(x) + \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_3t}\psi_3(x)\right) =$$
$$= \frac{1}{5}\left[\psi_2^2(x) + \psi_3^2(x) + \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(E_3-E_2)t}\psi_2\psi_3 + \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_3)t}\psi_3\psi_2\right].$$

Potom integrál z toho je

$$\int_0^a |\psi(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left[\int_0^a \left(\psi_2^2(x) + \psi_3^2(x)\right)\mathrm{d}x + 2\cos\left(\frac{E_3 - E_2}{\hbar}t\right)\int_0^a \psi_2\psi_3 \mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{5}\int_0^a \frac{1}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}(x-a)\right)\sin\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{a}(x-a)\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{a}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} - \frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right)}{5}\right] = \frac{a}{\pi}\left[1 - \frac{1}{5}\right] = \frac{a}{\pi}\frac{4}{5}$$

5 Částice v magnetickém poli, spin

Příklad 1 Částice se spinem $\frac{1}{2}$ je v homogenním magnetickém poli $\vec{B} = (0, 0, B)$. V čase $t = 0$ byla naměřena kladná projekce spinu částice do osy x. Určete vektor polarizace částice

$$\vec{p}(t) = \left(\langle \sigma_1 \rangle_\psi (t) \,, \langle \sigma_2 \rangle_\psi (t) \,, \langle \sigma_3 \rangle_\psi (t) \right)$$

v čase $t > 0$.

Řešení Neboť v čase $t = 0$ byla naměřena kladná projekce spinu částice do osy x. Víme, že $\hat{S}_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$ a hodnoty σ_j jsou uvedeny v taháku. To nám říká, že

$$\hat{S}_x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme vztah

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},$$

takže $a = b \overset{vol.}{=} 1$.

Tudíž máme vlnovou funkci v $t = 0$

$$\psi_{x,+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pro časový vývoj vlnové funkce máme obecný vztah v taháku v sekci Spin, konkrétně máme

$$\begin{aligned} psi_{x,+}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mu_0 \vec{B}\vec{\sigma}t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos(\omega t)\, \mathbb{I} + i \frac{\sin(\omega t)}{B} B\sigma_3 \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & i\sin(\omega t) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t} \\ \mathrm{e}^{-i\omega t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pro jednotlivé složky polarizace platí

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1 \rangle_\psi (t) &= (\psi(t), \sigma_1 \psi(t)) = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{-i\omega t}, \mathrm{e}^{i\omega t} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t} \\ \mathrm{e}^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{-i\omega t}, \mathrm{e}^{i\omega t} \right) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\omega t} \\ \mathrm{e}^{i\omega t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{-2i\omega t} + \mathrm{e}^{2i\omega t} \right) = \cos(2\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_2 \rangle_\psi (t) &= (\psi(t), \sigma_2 \psi(t)) = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{-i\omega t}, \mathrm{e}^{i\omega t} \right) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t} \\ \mathrm{e}^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{-i\omega t}, \mathrm{e}^{i\omega t} \right) \begin{pmatrix} -i\mathrm{e}^{-i\omega t} \\ i\mathrm{e}^{i\omega t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(-i\mathrm{e}^{-2i\omega t} + i\mathrm{e}^{2i\omega t} \right) = -\sin(2\omega t) \end{aligned}$$

$$\langle\sigma_3\rangle_\psi(t) = (\psi(t), \sigma_3\psi(t)) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-i\omega t}, \mathrm{e}^{i\omega t}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i\omega t}\\ \mathrm{e}^{-i\omega t}\end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-i\omega t}, \mathrm{e}^{i\omega t}\right)\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i\omega t}\\ -\mathrm{e}^{-i\omega t}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

Vektor polarizace má tedy tvar

$$\vec{p}(t) = (\cos(2\omega t), -\sin(2\omega t), 0).$$

Příklad 2 Částice se spinem $\frac{1}{2}$ je v homogenním magnetickém poli $\vec{B} = (0, B, 0)$. V čase $t = 0$ byla naměřena kladná projekce spinu částice do osy z. Určete, jak se s časem mění střední hodnota projekce spinu částice do obecného směru $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$?

Řešení Neboť v čase $t = 0$ byla naměřena kladná projekce spinu částice do osy z. Víme, že $\hat{S}_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$ a hodnoty σ_j jsou uvedeny v taháku. To nám říká, že

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme vztah

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix},$$

takže $a = a \overset{vol.}{=} 1$, $b = -b \overset{!}{=} 0$.

Tudíž máme vlnovou funkci v $t = 0$

$$\psi_{z,+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pro časový vývoj vlnové funkce máme obecný vztah v taháku v sekci Spin, konkrétně máme

$$\begin{aligned} psi_{z,+}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mu_0 \vec{B}\vec{\sigma}t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \left[\cos(\omega t)\,\mathbb{I} + i\frac{\sin(\omega t)}{B}B\sigma_2\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = \left[\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin(\omega t) \\ sin(\omega t) & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Střední hodnotu projekce spinu částice do obecného směru $\left\langle \hat{S}_{\vec{n}} \right\rangle_{\psi_{z,+}(t)}$ určíme ze vztahu pro střední hodnotu $\left\langle \hat{S}_{\vec{n}} \right\rangle_{\psi_{z,+}(t)} = \left(\psi_{z,+}(t), \hat{S}_{\vec{n}}\psi^T_{z,+}(t)\right)$, takže nejprve potřebujeme určit S_n.

$$\begin{aligned} S_n = \vec{n}\cdot\vec{s} = \frac{\hbar}{2}n_j\sigma_j = \frac{\hbar}{2}\left(\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \\ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi} \\ \mathrm{e}^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

Ještě potřebujeme určit hodnotu $S_n\psi_{z,+}(t)$.

$$\begin{aligned} S_n\psi_{z,+}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\mathrm{e}^{-i\varphi} \\ \mathrm{e}^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} = \\ = \ldots \end{aligned}$$

Na závěr provedeme skalární součin a konečně dostaneme hledanou střední hodnotu

$$\left\langle \hat{S}_{\vec{n}} \right\rangle_{\psi_{z,+}(t)} = \left(\psi_{z,+}(t), \hat{S}_{\vec{n}}\psi^T_{z,+}(t)\right) = \left(\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix}, \right) = \ldots$$

Příklad 3 Částice se spinem $\frac{1}{2}$ je v homogenním magnetickém poli $\vec{B} = (0, 0, B)$. V čase $t = 0$ byla naměřena kladná projekce spinu částice do osy x. Určete, jak se s časem mění střední hodnota projekce spinu částice do osy x. Jaká je pravděpodobnost naměření kladné projekce spinu částice do osy y v čase t?

Řešení Neboť v čase $t = 0$ byla naměřena kladná projekce spinu částice do osy x. Víme, že $\hat{S}_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$ a hodnoty σ_j jsou uvedeny v taháku. To nám říká, že

$$\hat{S}_x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme vztah

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},$$

takže $a = b \overset{vol.}{=} 1$.

Tudíž máme vlnovou funkci v $t = 0$

$$\psi_{x,+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pro časový vývoj vlnové funkce máme obecný vztah v taháku v sekci Spin, konkrétně máme

$$\begin{aligned} \psi_{x,+}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mu_0 \vec{B}\vec{\sigma}t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos(\omega t)\,\mathbb{I} + i\frac{\sin(\omega t)}{B} B\sigma_3\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & i\sin(\omega t) \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t} \\ \mathrm{e}^{-i\omega t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nyní určíme střední hodnotu projekce spinu do osy x.

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{S}_x \right\rangle_{\psi(t)} &= \left(\psi(t), \hat{S}_x \psi(t)\right) = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{-i\omega t}, \mathrm{e}^{i\omega t}\right) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t} \\ \mathrm{e}^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\hbar}{4} \left(\mathrm{e}^{-i\omega t}, \mathrm{e}^{i\omega t}\right) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\omega t} \\ \mathrm{e}^{i\omega t} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4} \left(\mathrm{e}^{-2i\omega t}, \mathrm{e}^{2i\omega t}\right) = \frac{\hbar}{2} \cos(2\omega t). \end{aligned}$$

Ještě určíme pravděpodobnost naměření kladné projekce spinu částice do osy y. K tomu potřebujeme $\psi_{y,+}$. Mějme

$$S_y \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ib \\ ia \end{pmatrix}$$

Takže máme $b = \frac{i}{\sqrt{2}}, a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, proto

$$\phi_{y,+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Dále spočteme potřebný skalární součin:

$$\left(\psi_{y,+},\psi\left(t\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1,-i\right)\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i\omega t}\\ \mathrm{e}^{-i\omega t}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}-i\mathrm{e}^{-i\omega t}\right)$$

$$P\left(S_y=\frac{\hbar}{2}\right)=P_{\psi(t)\to\psi_{y,+}}=|\left(\psi_{y,+},\psi\left(t\right)\right)|^2=|\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}-i\mathrm{e}^{-i\omega t}\right)|^2=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}-i\mathrm{e}^{-i\omega t}\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{-i\omega t}+i\mathrm{e}^{i\omega t}\right)=$$

Příklad 4 Uvažujte částici se spinem 1. Určete matice operátorů projekce spinu do os x, y, z v bázi vlastních vektorů operátoru $\hat{S}_z$.

Řešení Nejprve určíme vlastní vektory operátoru $\hat{S}_z$. Protože spin je 1 a $m = 0, \pm 1$. Protože jsme v $\mathbb{C}^3$, dostáváme vektory

$$|1,1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1,0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1,-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní na tyto vektory necháme zapůsobit operátor $\hat{S}_z$. Víme, že $\hat{S}_z |1,m\rangle = m\hbar |1,m\rangle$. Dostáváme tedy

$$m = 1 : \hat{S}_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m = 0 : \hat{S}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m = -1 : \hat{S}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Z toho dostáváme jednotlivé řádky matice operátoru $\hat{S}_z$ a celkem máme

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \hbar$$

Pro $\hat{S}_x$ platí obdobné vztahy jako pro L, takže $\hat{S}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right)$. Musíme tedy určit $\hat{S}_+$ a $\hat{S}_-$, která se určí stejně jako $\hat{L}_+$ a $\hat{L}_-$. Tyto matice pak necháváme působit na m, takže se nám řádky v matici posouvají příslušným směrem (tj. nahoru či dolů).

$$\hat{S}_+ = \alpha^+_{1,m} |1, m+1\rangle,$$

kde $\alpha^+_{1,n} = \hbar\sqrt{2 - n(n+1)}$, takže

$$\alpha^+_{1,1} = 0, \quad \alpha^+_{1,0} = \sqrt{2}\hbar, \quad \alpha^+_{1,-1} = \sqrt{2}\hbar.$$

Dostáváme tedy

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\hbar \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Stejně pro $\hat{S}_-$:

$$\hat{S}_- = \alpha^-_{1,m} \left|1, m-1\right\rangle,$$

kde $\alpha^+_{1,n} = \hbar\sqrt{2 - n\,(n+1)}$, takže

$$\alpha^+_{1,1} = 0, \quad \alpha^+_{1,0} = \sqrt{2}\hbar, \quad \alpha^+_{1,-1} = \sqrt{2}\hbar.$$

Dostáváme tedy

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \end{pmatrix}$$

Konečně tak ze vztahů $\hat{S}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right)$, $\hat{S}_y = \frac{1}{2i}\left(\hat{S}_+ - \hat{S}_-\right)$ dostáváme kýžené hodnoty:

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2i}\sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6 Kvantové tuhé těleso

Příklad 1 Kvantové tuhé těleso s momentem setrvačnosti I je v čase $t = 0$ ve stavu $\psi(\varphi, 0) = C(1 + \cos\varphi)$. Jaké hodnoty energie a s jakou pravděpodobností je možné naměřit? Jak bude vypadat stav v čase $t > 0$? Jak se s časem mění pravděpodobnost nalezení tělesa ve stavu $\psi(\varphi, 0)$?

Řešení

7 Integrály pohybu

Příklad 1 Uvažujte částici na přímce v homogenním poli s hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + F\hat{Q}.$$

Pro jakou funkci $g(t)$ je pozorovatelná

$$\hat{\Pi}(t) = \hat{P} + g(t)$$

integrálem pohybu?

Řešení Platí, že $\hat{A}$ je integrálem pohybu, právě tehdy když $\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{A}\right] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$.

$$\begin{aligned} \left[\hat{H},\hat{A}\right] &= \left[\frac{\hat{P}^2}{2M}, \hat{P} + g(t)\right] + \left[F\hat{Q}, \hat{P} + g(t)\right] = \\ &= \left[\frac{\hat{P}^2}{2M}, g(t)\right] + \left[F\hat{Q}, \hat{P}\right] + \left[F\hat{Q}, g(t)\right] = \\ &= \frac{1}{2M}\left[\hat{P}\left[\hat{P}, g(t)\right]\right] + \left[\hat{P}, g(t)\,\hat{P}\right] + Fi\hbar = Fi\hbar \end{aligned}$$

Takže

$$\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{A}\right] = -F \overset{!}{=} -\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = -g(t),$$

z čehož plyne

$$g(t) = F \cdot t + C.$$

Příklad 2 Ukažte, že operátor $\hat{\Pi}$ je integrálem pohybu (IP) pro lineární harmonický oscilátor (LHO).

Řešení Je třeba ukázat, že

$$\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{\Pi}\right]+\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial t}=0.$$

Hamiltonián lineárního harmonického oscilátoru má tvar

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{M}{2}\omega^2x^2=\frac{\hat{P}^2}{2M}+\frac{M}{2}\omega^2\hat{Q}^2.$$

Pro úpravy platí následující rovnosti (jedná se o operátory, stříšky jsou z lenosti vynechány)

$$\begin{aligned}
[A,B]&=AB-BA,\\
[AB,C]&=A\,[B,C]+[A,C]\,B,\\
[A+B,C+D]&=[A,C]+[A,D]+[B,C]+[B,D]\,,\\
[A,B]&=-\,[B,A]\,.
\end{aligned}$$

8 Hamiltonián

Příklad 1 Pro $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{\ 3}$ je Hamiltonián dán maticí

$$\hat{H} = \frac{i}{\sqrt{2}}\epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

V čase $t = 0$ je kvantová částice ve stavu $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Jaké hodnoty energie je v tomto stavu možné naměřit a s jakou pravděpodobností? Jak vypadá stav částice pro $t > 0$?

Řešení Nejprve nalezneme vlastní vektory. Tedy nejprve vezmeme matici Hamiltoniánu a nalezneme její spektrum $\sigma\left(\hat{H}\right)$. To pro připomenutí provedeme na základě rovnosti $\det\left(\hat{H} - \lambda\mathbb{I}\right) = 0$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda - \lambda = -\lambda\left(\lambda^2 + 2\right) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = \sqrt{2}i \vee \lambda = -\sqrt{2}i$$

Máme tedy 3 vlastní čísla, všechna o násobnosti 1. Spektrum je tedy

$$\sigma\left(\hat{H}\right) = \left\{0, -\sqrt{2}i \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}\epsilon, \sqrt{2}i \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}\epsilon\right\} = \{0, \epsilon, -\epsilon\}$$

. To nám říká, že můžeme naměřit hodnoty energií $E = 0, \pm\epsilon$.

Nyní přistoupíme k hledání vlastních vektorů. Vlastní vektory jsou vektory z jádra (tj. hledáme takový vektor, který pokud násobíme maticí operátoru zleva, výsledkem bude nulový vektor).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to b = 0 \wedge a - c = 0$$

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní použijeme normalizační podmínku $\langle 0|0\rangle \stackrel{!}{=} 1$:

$$a^2\left(1, 0, 1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a^2\left(1 + 0 + 1\right) = 2a^2 \stackrel{!}{=} 1 \ \to \ a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A dostáváme tedy

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}i & 1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2}i & 1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow -\sqrt{2}ia + b = 0 \wedge -a - \sqrt{2}ib + c = 0 \wedge -b - \sqrt{2}ic = 0$$

$$|-\epsilon\rangle = c \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní použijeme normalizační podmínku $\langle -\epsilon | -\epsilon\rangle \overset{!}{=} 1$:

$$c^2 \left(-1, -\sqrt{2}i, 1\right) \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix} = c^2 \left(1 - 2i^2 + 1\right) = 4c^2 \overset{!}{=} 1 \;\rightarrow\; c = \frac{1}{2}$$

A dostáváme tedy

$$|-\epsilon\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}i & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2}i & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \sqrt{2}ia + b = 0 \wedge -a + \sqrt{2}ib + c = 0 \wedge -b + \sqrt{2}ic = 0$$

$$|\epsilon\rangle = c \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní použijeme normalizační podmínku $\langle \epsilon | \epsilon\rangle \overset{!}{=} 1$:

$$c^2 \left(-1, \sqrt{2}i, 1\right) \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix} = c^2 \left(1 - 2i^2 + 1\right) = 4c^2 \overset{!}{=} 1 \;\rightarrow\; c = \frac{1}{2}$$

A dostáváme tedy

$$|\epsilon\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ortonormální báze $\hat{H}$ má tedy podobu

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pro stav částice v čase $t > 0$ tedy platí

$$|\psi(t)\rangle = a\,|0\rangle + b\,|\epsilon\rangle + c\,|-\epsilon\rangle\,,$$

kde platí

$$a = \langle 0|\psi(0)\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0+0+0) = 0,$$

$$b = \langle \epsilon|\psi(0)\rangle \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}i\\1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(-1,-\sqrt{2}i,1\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(0-\sqrt{2}i+0\right) = -\frac{\sqrt{2}i}{2},$$

$$c = \langle -\epsilon|\psi(0)\rangle \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{2}i\\1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(-1,\sqrt{2}i,1\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(0+\sqrt{2}i+0\right) = \frac{\sqrt{2}i}{2}.$$

Tudíž dostáváme

$$|\psi(t)\rangle = \frac{\sqrt{2}i}{2}\,|-\epsilon\rangle - \frac{\sqrt{2}i}{2}\,|\epsilon\rangle\,,$$

Zbývá nám dopočítat pravděpodobnosti naměření daných energií.

$$P(E=0) = |\langle 0,\psi(t)\rangle|^2 = 0,$$
$$P(E=\epsilon) = |\langle \epsilon,\psi(t)\rangle|^2 = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{1}{2},$$
$$P(E=-\epsilon) = |\langle -\epsilon,\psi(t)\rangle|^2 = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{1}{2}.$$