

# zápočtový příklad Kvantová mechanika

Lukáš Vácha

26. října 2020

## 1 příklad 23

Rotace kvantového tuhého tělesa:

$$E_k = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 = [L = I \dot{\varphi}] = \frac{L^2}{2I}$$
$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2I} = \left[ \hat{L} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{d^2}{d\varphi^2}$$

Schrödingerova rovnice:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$
$$-\frac{\hbar^2}{2I} \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = E\psi$$

$$\left[ \frac{d\psi}{d\varphi} = \psi' \right]$$

$$\psi'' + \frac{2EI}{\hbar^2} \psi = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{2EI}{\hbar^2} = 0$$

$$\lambda = \frac{i}{\hbar} \sqrt{2EI}$$

$$\psi(\varphi) = Ae^{\lambda\varphi} + Be^{-\lambda\varphi} \in L^2([0, 2\pi], d\varphi)$$

Podmínka jednoznačnosti, periodicity ve  $2\pi$ :

$$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$$

$$\psi(\varphi) = Ae^{\lambda\varphi} + Be^{-\lambda\varphi} = Ae^{\lambda(\varphi+2\pi)} + Be^{-\lambda(\varphi+2\pi)} = Ae^{\lambda\varphi} e^{2\pi\lambda} + Be^{-\lambda\varphi} e^{-2\pi\lambda}$$
$$e^{2\pi\lambda} = 1$$

$$2\pi\lambda = 2k\pi i; k \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda = ki = \frac{i}{\hbar} \sqrt{2EI}$$

$$E_k = \frac{k^2 \hbar^2}{2I}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\psi(\varphi) = Ae^{ik\varphi} + Be^{-ik\varphi}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\psi(\varphi) = (A + B)e^{ik\varphi} = Ce^{ik\varphi}; k \in \mathbb{Z}$$

Normalizace:

$$\int_0^{2\pi} |\psi(\varphi)|^2 d\varphi = |C|^2 \int_0^{2\pi} |e^{2ik\varphi}| d\varphi = [C \in \mathbb{R}] = C^2 \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = 2\pi C^2 = 1$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Výsledná vlnová funkce má tvar:

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\varphi}; k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$