KVAN2: Variační metoda

Odhad na základní hodnotu energie Hamiltoniánu $\hat H$ se zdola omezeným spektrem:

Platí: $E_0 \le \langle \hat H \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | \hat H | \psi \rangle, \forall \psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1$

Minimax: $E_0 = \inf_{\|\psi\|=1} (\psi, \hat H \psi)$

Zvolíme si n-parametrickou množinu normovaných vektorů $|\psi(d_i)\rangle$

a zkoumáme $E(d_i) = \langle \psi(d_i) | \hat H | \psi(d_i) \rangle$.

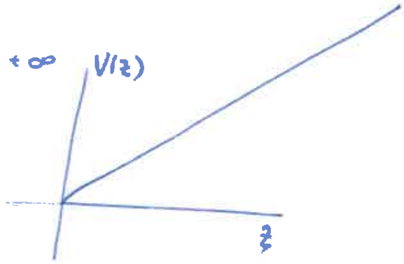
Najdeme infimum $E(d_i)$ vzhledem k $d_1, \dots, d_n$: E_0^{VM}

Pokud je nabýváno, pak: $E_0^{VM} = E(d_i^0)$

Pro vyšší hladiny:

Obecný minimax: $E_n = \inf_{\substack{\mathcal{Y}_n \subset \mathcal{H} \\ \dim \mathcal{Y}_n = n}} \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{Y}_n \\ \|\psi\| = 1}} \frac{(\psi, \hat H \psi)}{1}$

Př 40.



a) Částice na přímce, potenciál $\hat V(z) := \begin{cases} Mgz, & z > 0 \\ +\infty, & z \le 0 \end{cases}$

Nalezněte E_0^{VM} pomocí: $\psi(z, \alpha) = \begin{cases} C e^{-\alpha z} \cdot z, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$

i) Normalizace $\psi(z, \alpha)$

$$\|\psi\|^2 = |C|^2 \int_0^{+\infty} z^2 e^{-2\alpha z} dz = \left| \begin{matrix} 2\alpha z = y \\ 2\alpha dz = dy \end{matrix} \right| = \frac{|C|^2}{(2\alpha)^3} \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy = \frac{|C|^2}{(2\alpha)^3} \Gamma(3) =$$

$$= \frac{|C|^2}{\alpha^3 4} \Rightarrow C = 2\sqrt{\alpha^3}$$

ii) $E(\alpha) = (\psi, \hat H \psi)$, $\hat H \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + Mgz\right) z e^{-\alpha z} \cdot C =$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \dots$$

(14) Uvažujte 3 rozlišitelné částice se spinem $\frac{1}{2}$.
Označme součet prvních dvou jako $S^{(1,2)} := S^{(1)} + S^{(2)}$ a
celkový spin jako $S := S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)} = S^{(1,2)} + S^{(3)}$.

a) Najděte stavy, které jsou společné vlastní vektory $S^{(1,2)^2}$, S^2 a S_3.
Dále uvažujte hamiltonián $H = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}(S^{(1)} + S^{(2)}) \cdot S^{(3)}$

b) Jaké jsou hodnoty energie a degenerace?

Máme $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(\frac{1}{2})}$ (efektivně), tj:

$$\mathcal{H}^{(1)} = \text{span}\{|0,0\rangle\} \oplus \{|1, m_1\rangle \,|\, |m_1| \leq 1\}$$

$$\mathcal{H}^{(\frac{1}{2})} = \text{span}\{|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle, |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle\}$$

Hledáme $|\overset{S^{(1,2)}}{j_{12}}, \overset{S}{j}, \overset{S_3}{m}\rangle$

- $j_{12} = 0$:

oba stavy jsou „maximální" (minimální)

$$|0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = |0,0\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$
$$|0, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = |0,0\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

- $j_{12} = 1$:

„maximální" stav

$$|1, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\rangle = |1,1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \quad (\text{jediná možnost } m_1 + m_2 = \tfrac{3}{2})$$

$$|1, \tfrac{3}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\alpha_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}}\left(J_-^{(1,2)} + J_-^{(3)}\right)|1,1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|1, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\alpha_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}\alpha_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}}\left(J_-^{(1,2)} + J_-^{(3)}\right)^2|1,1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|1, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\rangle = \frac{1}{\alpha_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}\alpha_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}\alpha_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}}\left(J_-^{(1,2)} + J_-^{(3)}\right)^3|1,1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \beta_1 |1,0\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \beta_2 |1,1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \gamma_1 |1,0\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + \gamma_2 |1,-1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

(*): $$\boxed{|j_{12}, j, m\rangle = \sum_{m_1=-1}^{1} \sum_{m_2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |1, m_1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, m_2\rangle}$$

- $\boxed{m_1 + m_2 = m}$ ~

ZDRAVOTNÍ ZPŮSOBILOST UCHAZEČE/KY O STUDIUM NA FF UK

Jméno a příjmení uchazeče/ky: ....

Datum narození: ....

Adresa trvalého bydliště: ....

Program: ....

Druh studia (označte): bakalářské navazující magisterské doktorské

Forma studia (označte): prezenční kombinovaná

---

1. **Prohlašuji, že můj zdravotní stav ani jiné důvody mi nebrání vykonat přijímací zkoušku na zvolený program.**
2. **Současně prohlašuji, že nemám příznaky onemocnění COVID-19 a** *(vyberte jednu odpovídající možnost)*

A. Negativní test

☐ předložil/a jsem **doklad vydaný poskytovatelem zdravotních služeb** o negativním výsledku POC antigenního testu na přítomnost antigenu viru SARS-CoV-2, nebo RT-PCR testu na přítomnost viru SARS-CoV-2, který byl proveden v posledních 7 dnech před konáním přijímací zkoušky, nebo

☐ předložil/a jsem **doklad vydaný vysokou školou** o negativním výsledku preventivního antigenního testu na stanovení antigenu viru SARS-CoV-2 nebo preventivního RT-PCR testu na stanovení přítomnosti viru SARS-CoV-2, který byl proveden v posledních 7 dnech před konáním přijímací zkoušky.

B. Prodělané onemocnění

☐ **doložil/a** jsem, že jsem **prodělal/a laboratorně potvrzené onemocnění COVID-19** a uplynula doba izolace podle platného mimořádného opatření Ministerstva zdravotnictví a od prvního pozitivního POC antigenního testu na přítomnost antigenu viru SARS-CoV-2 nebo RT-PCR testu na přítomnost viru SARS-CoV-2 neuplynulo více než 90 dní, nebo

C. Provedené očkování

☐ doložil/a jsem, že **mám vystavený certifikát Ministerstva zdravotnictví ČR o provedeném očkování** proti onemocnění COVID-19, pokud od aplikace druhé dávky očkovací látky v případě dvoudávkového schématu podle SPC uplynulo nejméně 14 dní, nebo od aplikace první dávky očkovací látky v případě jednodávkového schématu podle SPC uplynulo nejméně 14 dnů.

3. Nesplnění podmínek pro účast na zkoušce

☐ Při kontrole bylo zjištěno, že uchazeč/ka **nesplňuje ani jednu z podmínek A., B. nebo C.**, a proto uchazeči/ce nebyla účast na přijímací zkoušce umožněna.

V Praze dne ____________________ Vlastnoruční podpis uchazeče/ky ____________________

Kontrolu provedl/a ____________________

$$\langle \hat{H} \rangle_{\hat{\rho}_{th}} = \mathrm{Tr}(\hat{H}\hat{\rho}_{th}) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{m=0}^{\infty} E_m |m\rangle\langle m| (1-e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} |n\rangle\langle n|\right) =$$

$$= (1-e^{-\beta\hbar\omega})\,\mathrm{Tr}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2}) e^{-\beta\hbar\omega n} |n\rangle\langle n|\right) =$$

$$= (1-e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2}) e^{-\beta\hbar\omega n} = (1-e^{-\beta\hbar\omega})\left[\sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega n e^{-\beta\hbar\omega n} + \frac{\hbar\omega}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n}\right] =$$

$$= (1-e^{-\beta\hbar\omega})\left[\frac{\hbar\omega}{2(1-e^{-\beta\hbar\omega})} - \frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n}\right] =$$

$$= (1-e^{-\beta\hbar\omega})\left[\frac{\hbar\omega}{2(1-e^{-\beta\hbar\omega})} - \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right] =$$

$$= (1-e^{-\beta\hbar\omega})\left[\frac{\hbar\omega}{2(1-e^{-\beta\hbar\omega})} + \frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{(1-e^{-\beta\hbar\omega})^2}\right] = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} =$$

$$= \boxed{\hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right)}$$

$$P_{E_n} = \langle n|\rho_{th}|n\rangle = (1-e^{-\beta\hbar\omega})e^{-\beta\hbar\omega n} = \boxed{\frac{1}{Z}e^{-\beta E_n}}$$

Příklad 36:

a. LHO, $\omega := \frac{\hbar}{m}$ ve stavu $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$

$$\langle H\rangle_{|\psi\rangle} = \frac{1}{3}\cdot E_0 + \frac{2}{3}E_1 = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{2}{3}\frac{3}{2}\hbar\omega = \frac{7}{6}\hbar\omega$$

$$\langle Q\rangle_{|\psi\rangle} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(a_+ + a_-)\right\rangle_{|\psi\rangle} = \dots = \frac{2}{3}$$

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{2}}{3}|0\rangle\langle 1| + \frac{\sqrt{2}}{3}|1\rangle\langle 0| + \frac{2}{3}|1\rangle\langle 1|$$

stav po měření bez zaznamenání výsledku

$$\hat{\rho}' = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|\hat{\rho}|n\rangle\langle n| = \frac{1}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{2}{3}|1\rangle\langle 1|$$

Změna střední hodnoty energie:

$$\langle H\rangle_{\hat{\rho}'} = \mathrm{Tr}(\hat{H}\hat{\rho}) = \frac{1}{3}E_0 + \frac{2}{3}E_1 = \frac{7}{6}\hbar\omega$$

$$\langle Q\rangle_{\hat{\rho}'} = \mathrm{Tr}(\hat{Q}\hat{\rho}) = \frac{1}{3}\underbrace{\langle 0|\hat{Q}|0\rangle}_{0} + \frac{2}{3}\underbrace{\langle 1|\hat{Q}|1\rangle}_{0} = 0$$

Matice hustoty pro spin $\frac{1}{2}$:

$\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^2$, $\mathcal{H} = \mathrm{span}\{|z+\rangle, |z-\rangle\}$: $|z+\rangle = \binom{1}{0}$, $|z-\rangle = \binom{0}{1}$

$\hat\rho$ matice hustoty: $\hat\rho \in \mathbb{C}^{2,2}$, $\rho = \rho^\dagger \rightarrow$ báze $\mathbb{C}^2$: $\{\mathbb{I}, \sigma_i \,|\, i \in \{1,2,3\}\}$

$\hat\rho(\vec p) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec p \cdot \vec\sigma)$, $\vec p \in \mathbb{R}^3$, $\langle \sigma_i \rangle_\rho = p_i$

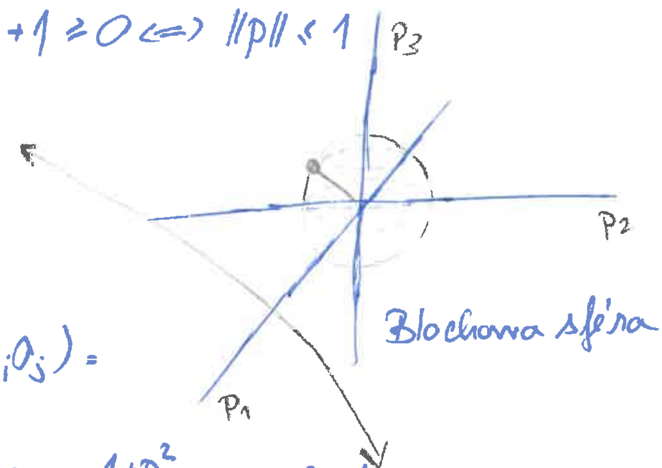
$$\hat\rho(\vec p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+p_3 & p_1 - i p_2 \\ p_1 + i p_2 & 1 - p_3 \end{pmatrix}$$

Chceme $\hat\rho \geq 0$: $\det\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+p_3-\lambda & p_1 - i p_2 \\ p_1 + i p_2 & 1-p_3-\lambda \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\left[(1-\lambda)^2 - p_3^2 - p_2^2 - p_1^2\right] \overset{!}{=} 0$

$\rightarrow 1-\lambda = \pm\|p\| \rightarrow \lambda = \pm\|p\| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \|p\| \leq 1$

i) $\|p\| = 1$ ... čisté stavy

ii) $\|p\| < 1$ ... smíšené stavy



$\hat\rho^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{I} + \vec p \cdot \vec\sigma)(\mathbb{I} + \vec p \cdot \vec\sigma) = \frac{1}{4}(\mathbb{I} + 2 p_i \sigma_i + p_i p_j \sigma_i \sigma_j) =$

$= \frac{1}{4}(\mathbb{I}(1+p^2) + 2 p_i \sigma_i) \rightarrow \mathrm{Tr}\,\hat\rho^2 = \frac{1}{4}(1+p^2)\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1+p^2}{2} = 1 \Leftrightarrow p^2 = 1$

Pro $\vec m$, $\hat S_{\vec m}|m\pm\rangle = \frac{\hbar}{2} m \cdot \vec\sigma |m\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|m\pm\rangle$ platí:

$\vec p = \vec m$: $\vec m \cdot \vec p = m_i \overset{\langle\sigma_i\rangle}{p_i} = m_i \langle m\pm | \sigma_i | m\pm\rangle = \langle m\pm | m_i \sigma_i | m\pm \rangle = \pm 1$

$\rightarrow \boxed{|m\pm\rangle\langle m\pm| = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec m \cdot \vec\sigma)}$

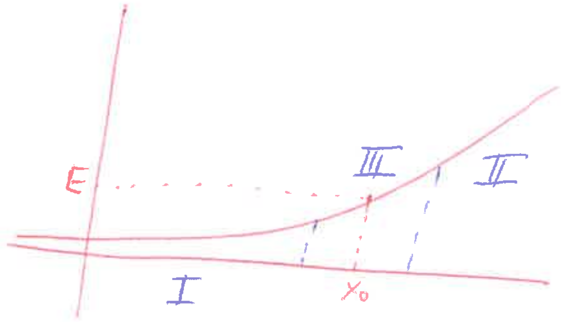
$W_{\hat\rho(\vec p), m\pm} = \mathrm{Tr}(|m\pm\rangle\langle m\pm|\hat\rho(p)) = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}(\mathbb{I} \pm \vec m \cdot \vec\sigma)(\mathbb{I} + \vec p \cdot \vec\sigma)\right) =$

$= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}(\mathbb{I} \pm \vec m \vec\sigma + \vec p \cdot \vec\sigma \pm m_i p_j \sigma_i \sigma_j)\right) = \frac{1}{4}(1 \pm \vec m \cdot \vec p)\cdot 2 = \frac{1 + \vec m \cdot \vec p}{2}$

(15) WKB aproximace

Máme úlohu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$



- I. $E \gg V(x)$:

$$\psi_I(x) = \frac{A}{\sqrt{p(x)}}\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_0} p(y)\,dy + \varphi_0\right);$$

- II. $E \ll V(x)$

$$\psi_{II}(x) = \frac{B}{\sqrt{|p(x)|}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x} |p(y)|\,dy\right),$$

$$p(x) = \sqrt{2m(E-V(x))}$$

- III. $E \sim V(x) \Rightarrow V(x) \approx E + F\cdot(x-x_0)$

$$\psi_{III}(x) \sim Ai(x)$$

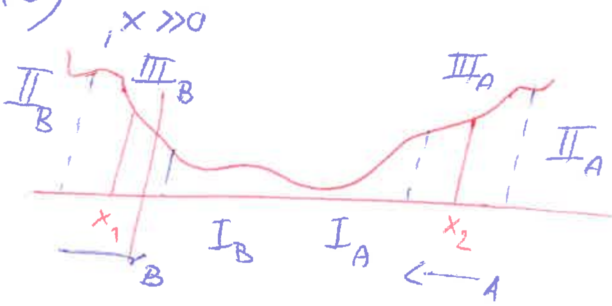
- Napojení ψ_I a ψ_{II} pomocí Airyho funkce $Ai(x)$

$\rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, $A = 2B$

* Druhá Airyho funkce $Bi(x)$

$$Bi(x) \begin{cases} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right), & x \ll 0 \\ \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{\frac{1}{4}}}\exp\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right), & x \gg 0 \end{cases}$$

Kvantovací podmínka:



$$\psi_{I_A}(x) = \psi_{I_B}(x), \forall x \in (x_1, x_2)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} p(y)\,dy = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{N}_0$$

Ekvivalentně: $$\oint 2p(y)\,dy = S_0 = \left(n+\frac{1}{2}\right)h$$

31. Z následujících tvrzení vyberte dvojici, ze které vyplývá, že *„Aristoteles je člověk"*.

1) Všichni lidé jsou smrtelní.
2) Všichni filosofové jsou lidé.
3) Aristoteles je smrtelný.
4) Někteří lidé jsou filosofové.
5) Aristoteles je filosof.

a) 1 a 3
b) 2 a 5
c) 4 a 5

32. Knihu *Eichmann v Jeruzalémě* napsal/a:

a) Karl Jaspers
b) Hannah Arendt
c) Hans Jonas

33. Spis *Druhé pojednání o vládě* napsal:

a) J. Locke
b) T. Hobbes
c) F. Bacon

34. Prezident ČR je volen:

a) na pět roků
b) na čtyři roky
c) na šest roků

35. Hejtmany krajů volí v ČR:

a) občané
b) Rada krajského zastupitelstva
c) Krajské zastupitelstvo

36. Poslancem obecního zastupitelstva může být občan ČR po dosažení věku:

a) 18 let
b) 21 let
c) 30 let

37. Sociální spravedlnost zdůrazňuje zejména:

a) liberalismus
b) socialismus
c) enviromentalismus

38. Obligace přinášejí svému majiteli:

a) dividendu
b) úrok
c) podíl na likvidačním zůstatku

39. Vaše úspory se znehodnotí:

a) když roční úroková míra bude 4 % a roční míra inflace bude 4 %
b) když roční úroková míra bude 5 % a roční míra inflace bude 4 %
c) když roční úroková míra bude 4 % a roční míra inflace bude 5 %

40. Chcete-li srovnat ekonomickou úroveň jednotlivých zemí, budete porovnávat jejich:

a) hrubý domácí produkt
b) hrubý domácí produkt v přepočtu na jednoho obyvatele
c) tempo ekonomického růstu

Předchozí postup platí pro libovolné funkce $V(x)$.

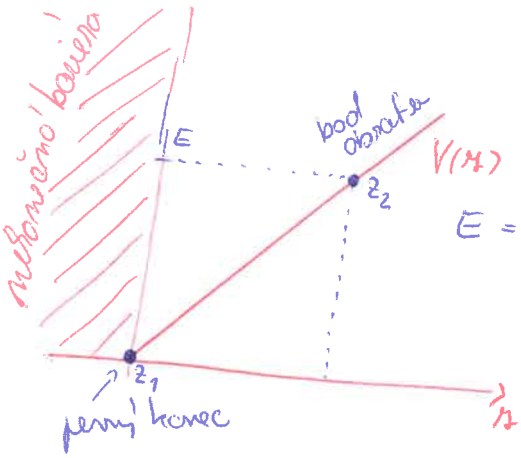
Pokud například $V(x) = +\infty$ pro $x < x_1$, pak $\psi_{II_A} = 0$ (x_1 je pevný konec).

Kvantovací podmínka je pak ve tvaru

$$\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} p(y)\,dy = \left(n+\frac{3}{4}\right)\pi, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Pro oba pevné konce máme:

$$\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} p(y)\,dy = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$



$$E = V(z_2) \Rightarrow z_2 = \frac{E}{mg}$$

__Příklad 40__

$$V(z) = \begin{cases} mgz, & z > 0 \\ +\infty, & z \leq 0 \end{cases}$$

$$p(z) = \sqrt{2m(E - mgz)}$$

kvantovací podmínka: $\frac{1}{\hbar}\int_0^{z_2}\sqrt{2m(E-mgz)}\,dz \overset{!}{=} \left(n+\frac{3}{4}\right)\pi$

$$\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{8E^3}{9mg^2}} = \left(n+\frac{3}{4}\right)\pi \rightarrow \dots \rightarrow E_n^{(WKB)} = \left(\frac{9}{8}mg^2\hbar^2\pi^2\right)^{\frac{1}{3}}\left(n+\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Základní stav $E_0^{(WKB)} = \frac{3}{4}(3\pi^2)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}mg^2\hbar^2\right)^{\frac{1}{3}}$

Přesné řešení: $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + mgz\psi = E\psi$, $\psi(z) = 0$ pro $z \leq 0$

$$y = \left(\frac{\hbar^2}{2m^2g}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{2m}{\hbar^2}(mgz - E), \quad \phi(y) = \psi(z) \rightarrow \text{Airy}: \phi'' - y\phi = 0$$

$$\psi(0) = 0 = A \cdot Ai\left(-E\left(\frac{2}{mg^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$Ai(x)$ je rovna nule pouze pro diskrétní body $x_n \equiv R_n$.

$\vdots$

$$E_n = \left(\frac{1}{2}mg^2\hbar^2\right)^{\frac{1}{3}}(-R_n)$$

21. Muslimové se dělí na tři proudy. Většinový proud, který se hlásí k tradici, se nazývá:

STACK: [Ubytovac poukaz)],

a) šíité
b) sunnité
c) cháridžité

22. Autorem *Kázání na hoře* je:

a) Mojžíš
b) Ježíš
c) Apoštol Pavel

23. Pojem archetyp v hlubinné psychologii označuje

a) souhrn charakteristických rysů osobnosti, které se trvale projevují způsobem reagování, jednání a prožívání
b) postoje a očekávání, která jedinec chová vůči sobě samému, vytváří se po celý život v sociálních interakcích
c) archaickou vrstvu vývoje lidského vnímání, v níž existují společné vzorce chápání skutečnosti

24. Humanisticky orientovanou psychoterapii prosazoval:

a) S. Freud
b) B. F. Skinner
c) C. Rogers

25. Logoterapie Viktora Frankla je specifická důrazem na:

a) touhu člověka po slasti
b) touhu člověka po smyslu
c) touhu člověka po moci

26. V primární skupině dochází:

a) k socializaci
b) k distanci od role
c) ke konfliktu rolí

27. Difuze je:

a) střetávání dvou a více společenských vrstev
b) rozšiřování kulturních jevů z jednoho místa na jiné
c) střetávání dvou a více tříd

28. Kdo uvedl do sociologie termín *anomie*?

a) Durkheim
b) Weber
c) Goffman

29. Platí-li obecný výrok „*Je-li osoba ministrem, pak je ústavním činitelem*", která z následujících úvah je nesprávná?

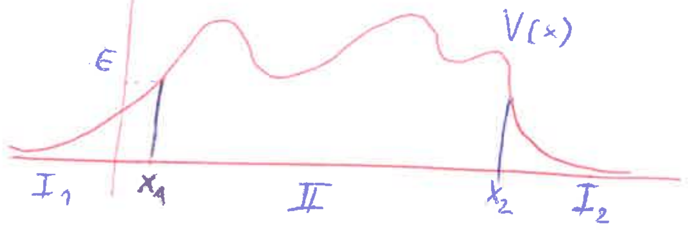
a) Není-li osoba ministrem, pak není ústavním činitelem.
b) Neexistuje osoba, která by byla ministrem a přitom nebyla ústavním činitelem.
c) Není-li osoba ústavním činitelem, pak není ministrem.

30. Autorem *Pojednání o podstatě a původu bohatství národů* je:

a) J. M. Keynes
b) A. Smith
c) W. Petty

Aplikace WKB: Tunelový jev

• Rozptylové stavy WKB metodou:



• $V(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} 0$

Koeficient průchodu bariérou T určí z asymptotického tvaru rozptylových stavů

$$\psi(x) \overset{x\to-\infty}{=} A\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0 x\right) + B\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_0 x\right)$$

$$\psi(x) \overset{x\to+\infty}{=} C\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0 x\right)$$

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2$$

Postup: formálně řešíme Schrödingerovu rovnici pomocí WKB bez ohledu na L^2 integrabilitu

$x \gg x_2$: $\psi_{I_2}(x) = \frac{D}{\sqrt{p(x)}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{x_2}^{x} p(y)\,dy + i\frac{\pi}{4}\right)$

$x\to+\infty$: $V(x)\to 0 \to p(x)\sim p_0 \to \psi_{I_2}(x)\sim \frac{D}{\sqrt{p_0}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0 x + i\varphi_0\right)$

$\to C = \frac{D}{\sqrt{p_0}}e^{i\varphi_0}$

Pomocí goniometrických funkcí dostáváme:

$$\psi_{I_2}(x) = \frac{D}{\sqrt{p(x)}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x_2}^{x}p(y)\,dy + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{iD}{\sqrt{p(x)}}\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x_2}^{x}p(y)\,dy + \frac{\pi}{4}\right)$$

napojíme na ψ_{II} (musíme otočit meze $\int$, protože $V(x)$ klesá)

$$\psi_{II}(x) = \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}}\left(\exp\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2}|p(y)|\,dy\right) + \frac{i}{2}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2}|p(y)|\,dy\right)\right)$$

propojení přes x_1: $\int_x^{x_2}|p(y)|\,dy = \int_{x_1}^{x_2}|p(y)|\,dy - \int_{x_1}^{x}|p(y)|\,dy$, $\Theta := \int_{x_1}^{x_2}|p(y)|\,dy$

$$\psi_{II}(x) = \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}}\left(\Theta\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}|p(y)|\,dy\right) + \frac{i}{2\Theta}\exp\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}|p(y)|\,dy\right)\right)$$

11. K jakému filosofickému směru byste připojili názor, že: *„Když jsme tu my, není tu smrt, a když je tu smrt, nejsme tu my.“*

a) epikureismus
b) tomismus
c) platonismus

12. Kdo řekl: *„Člověk je měrou všech věcí?“*

a) Augustin
b) Voltaire
c) Prótagorás

13. Podle Tomáše Akvinského je člověk

a) obrazem božím
b) obrazem lidským
c) není obrazem

14. *Substance* je:

a) podstata
b) vše, co existuje
c) prazáklad světa

15. K německému idealismu patřil:

a) Ludwig Wittgenstein
b) Martin Heidegger
c) Georg Wilhelm Friedrich Hegel

16. Mezi díla Friedricha Nietzscheho patří:

a) Mimo dobro a zlo, Tak pravil Zarathustra, Radostná věda
b) Ideje k čisté fenomenologii a fenomenologické filosofii, Logická zkoumání, Krize evropských věd
c) Přirozený svět jako filosofický problém, Platón a Evropa, Kacířské úvahy o filosofii dějin

17. *Útěchu z filosofie* nenapsal:

a) Boethius
b) E. Rádl
c) T. G. Masaryk

18. Mluvčím *Charty 77* byl:

a) Jan Sokol
b) Václav Bělohradský
c) Jan Patočka

19. Kterého z uvedených českých filosofů můžeme přiřadit k postmoderním myslitelům?

a) Karel Kosík
b) Jan Patočka
c) Václav Bělohradský

20. Co je to *Bar Micva*?

a) obřad obřezání židovského chlapce
b) židovská modlitba
c) židovský rituál spjatý s přechodem do náboženské dospělosti

$$\psi_{I_1}(x) = \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}}\left(2\theta \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_1} p(y)\,dy + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{i}{2\theta}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_1} p(y)\,dy + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$x \to -\infty : V(x) \to 0 \to p(x) \sim p_0 \to \psi_{I_1}(x) \sim \frac{D}{\sqrt{p_0}}\left(2\theta \sin\Big(\underbrace{-\frac{p_0 x}{\hbar} + \alpha_0}_{\theta}\Big) + \frac{i}{2\theta}\cos\Big(\underbrace{-\frac{p_0 x}{\hbar} + \alpha_0}_{\theta}\Big)\right)$$

$$\to \psi_{I_1}(x) \sim \frac{D}{\sqrt{p_0}}\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} 2\theta + \frac{i}{2\theta}\,\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) =$$

$$= \frac{D}{\sqrt{p_0}}\left[e^{i\theta}\left(-\theta i + \frac{i}{4\theta}\right) + e^{-i\theta}\left(i\theta + \frac{i}{4\theta}\right)\right] =$$

$$= \frac{iD}{\sqrt{p_0}}\left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0 x\right)\overset{e^{-i\alpha_0}}{}\left(+\theta + \frac{1}{4\theta}\right) + \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_0 x\right)\overset{e^{+i\alpha_0}}{}\left(-\theta + \frac{1}{4\theta}\right)\right] =$$

$$\overset{!}{=} A \exp\left(\frac{i}{\hbar}p_0 x\right) + B \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_0 x\right)$$

$$\to \boxed{A = \frac{iDe^{-i\alpha_0}}{\sqrt{p_0}}\,\frac{1+4\theta^2}{4\theta}}$$ Amplituda dopadajúcej vlny

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{16\theta^2}{(1+4\theta^2)^2};$$

Speciální případ:

Široká + vysoká bariéra: $\theta \gg 1$: $T \sim \theta^{-2} = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} |p(y)|\,dy\right)$

a) pouze občané ČR
b) občané ČR a občané členských zemí Evropské unie přihlášení v den voleb alespoň 45 dní k trvalému či přechodnému pobytu v ČR
c) občané ČR a cizinci minimálně 45 dní s trvalým či přechodným pobytem na území ČR

23. Vyslovit nedůvěru vládě ČR může
a) Prezident republiky
b) Senát Parlamentu ČR
c) Poslanecká sněmovna Parlamentu ČR

24. Socialismus klade tradičně důraz na hodnotu
a) tradice
b) rovnost příležitostí
c) sociální spravedlnosti a solidarity

25. James Frazer se ve svém rozsáhlém díle *Zlatá ratolest* soustředil na dokazování toho,
a) jak patrilineární společnosti přecházejí k matrilineárnímu uspořádání
b) jak se myšlení vyvíjelo od magického přes náboženské až k vědeckému
c) jak genderové vztahy ovlivňovaly vývoj primitivních společností

26. Kulturní determinismus předpokládá, že
a) lidské vzory chování jsou určeny primárně dědičností
b) lidské chování je výrazně determinováno časem
c) lidské chování je výsledkem enkulturace a výchovy

27. Jaká biskupství byla v Čechách zřízena v 17. století jako součást rekatolizační politiky?
a) České Budějovice, Hradec Králové
b) Litomyšl, Litoměřice
c) Litoměřice, Hradec Králové

28. Jaký byl na počátku 20. století podíl německého obyvatelstva v českých zemích?
a) přibližně 10 procent
b) přibližně 20 procent
c) přibližně 30 procent

29. Nejstarším pramenem římského práva je
a) justiniánská kodifikace
b) obyčejové právo
c) Zákony XII. desek

30. Hmotněprávní normy stanoví
a) jaká práva a povinnosti mají jejich adresáti
b) procedurální pravidla
c) způsoby uplatnění práv

- Tunelový jev na pravoúhlé bariéře:

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

$$T = \left(1 - \frac{V_0^2 \sinh^2(2k'a)}{(E-V_0)^2}\right)^{-1}, \quad |k'|^2 = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} = \frac{|p_0|^2}{\hbar^2}$$

Pro $V_0 \gg E$, $|k'a| \gg 1$: $\underbrace{T \sim \exp\left(\frac{4a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}\right)}_{\text{stejný vztah jako bychom získali z WKB}}$

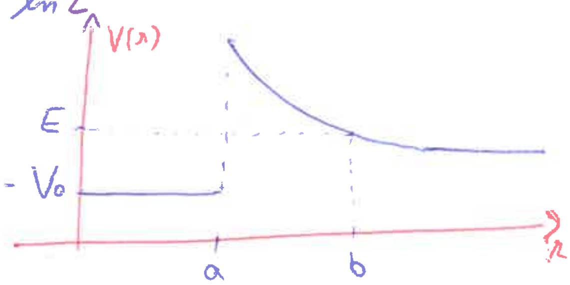
- Radioaktivní α-rozpad

Empirický vztah: Geiger-Nuttal

$$\ln \tau = C_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} + C_2, \quad \tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$$

Tunelování bariérou $V(x)$:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \le r \le a \\ \frac{2Zq}{r}, & r \ge a \end{cases}$$



$a \sim 1{,}6\, A^{1/3}$ fm

$q = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$

$b: V(b) = E \to b = \frac{2Zq}{E}$

Gamowův koeficient T

$$T = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2m(V(r)-E)}\,dr\right)$$

$$\int_a^b \sqrt{2m(V(r)-E)}\,dr = \dots = \underbrace{2Zq\sqrt{\frac{2m}{E}}}_{\mathcal{H}} \int_{\frac{a}{b}}^1 \sqrt{\frac{1}{t} - 1}\,dt = \dots = 2\mathcal{H}\int_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^1 \sqrt{1-u^2}\,du =$$

$$= 2\mathcal{H}\,\frac{1}{2}\left[\arcsin u + u\sqrt{1-u^2}\right]_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^1 = \mathcal{H}\left(\arccos\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{b}\right)}\right)$$

Rozpadový zákon:

$$N(t) = N_0 e^{-\gamma t}, \quad \tau = \frac{1}{\gamma} \to T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\gamma} = \tau \ln 2$$

$\gamma = T \cdot f$ – počet nárazů za 1s

šířka jádra: $2a \to f = \frac{v}{2a} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{E}{m}} \to T_{\frac{1}{2}} = \frac{2a \ln 2}{T}\sqrt{\frac{m}{2E}}$

a) spočívá v něčem
b) spočívá samo v sobě
c) překračuje něco

12. Mezi autory tzv. filosofie života patří
a) Buber
b) Bergson
c) Camus

13. Rozdíl mezi humanitními a přírodními vědami spočívá
a) v odlišných kurikulárních přístupech
b) v odlišných metodologických přístupech
c) v tom, že humanitní vědy se zabývají člověkem

14. K velkému schizmatu mezi pravoslavnými a katolickými křesťany došlo
a) r. 1212
b) r. 313
c) r. 1054

15. Predestinace je součástí učení
a) judaismu
b) křesťanství
c) buddhismu

16. Která z následujících charakteristik není typická pro agrární společnost?
a) V rámci hodnotového systému společnosti hraje významnou roli náboženství.
b) Existence trhu práce jako základního organizačního mechanismu v dělbě práce.
c) Typickým politickým zřízením je dědičná monarchie.

17. Která z následujících tezí o systému platí v rámci funkcionalistického paradigmatu?
a) Části systému mohou mít odlišné zájmy, a proto mezi nimi existují konflikty.
b) Systém vykazuje tendenci ke změně a zániku.
c) Části systému jsou na sobě vzájemně závislé.

18. Který z následujících výroků o sociálním konfliktu není pravdivý?
a) Sociální konflikt vytváří spojenectví a koalice.
b) Sociální konflikt vždy obsahuje prvek nepřátelství.
c) Příčiny sociálního konfliktu leží ve struktuře společnosti.

19. Státní rozpočet na rok 2015 byl navržen v ČR jako
a) vyrovnaný
b) schodkový
c) přebytkový

20. Deflace se projevuje
a) růstem cenové hladiny
b) poklesem cenové hladiny
c) poklesem kupní síly peněžní jednotky

21. Který z uvedených úvěrů je možno čerpat opakovaně a není nutné o něj žádat znovu
a) hypoteční úvěr
b) spotřebitelský
c) kontokorent

22. Do Evropského parlamentu mohou v ČR volit

(16) Obrazy časového vývoje v QM

i) Schrödingerův obraz (doteď)

S časem se dynamicky mění stavy $|\psi(t)\rangle$: $\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t}$, $|\psi(t_0)\rangle = |\psi\rangle$

Pozorovatelné typicky na čase nezávisí, max. parametricky.

Časový vývoj reprezentuje unitární evoluční operátor $\hat{U}(t,t_0)$

- $\hat{U}^{\dagger}(t,t_0) = \hat{U}^{-1}(t,t_0)$
- $\hat{U}(t_3,t_1) = \hat{U}(t_3,t_2)\hat{U}(t_2,t_1)$, $t_1 \leq t_2 \leq t_3$
- $\hat{H}\hat{U}(t,t_0) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,t_0)$, $\hat{U}(t_0,t_0) = \mathbb{I}$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \hat{U}(t,t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\cdot(t-t_0)\right)$$

ii) Heisenbergův obraz

Časovou závislost přeneseme ze stavů na pozorovatelné

$$|\psi^H(t,t_1)\rangle = \hat{U}^{\dagger}(t,t_1)|\psi(t)\rangle = |\psi(t_1)\rangle$$

t_1 - čas kdy se Heisenbergův a Schrödingerův obraz shodují

Pozorovatelné pak vypadají jako: $\hat{A}^H(t,t_1) = \hat{U}^{\dagger}(t,t_1)\hat{A}(t)\hat{U}(t,t_1)$

Q: Jakou rovnicí se pozorovatelné řídí?

$$\hbar\frac{d\hat{A}^H}{dt} = i\hbar\frac{d\hat{U}^*}{dt}\hat{A}\hat{U} + i\hbar\hat{U}^*\frac{d\hat{A}}{dt}\hat{U} + i\hbar\hat{U}^*\hat{A}\frac{d\hat{U}}{dt}$$

$$\rightarrow i\hbar\frac{d\hat{A}^H}{dt} = (\hat{U}^*\hat{A}\hat{H}\hat{U} - \hat{U}^*\hat{H}\hat{A}\hat{U}) + i\hbar\hat{U}^*\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{U} =$$

$$= \hat{U}^*[\hat{A},\hat{H}]\hat{U} + i\hbar\hat{U}^*\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{U}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\hat{A}^H}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\hat{U}(t,t_1)[\hat{A}(t),\hat{H}]\hat{U}(t,t_1) + \hat{U}^{\dagger}(t,t_1)\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}U(t,t_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\hat{A}^H}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{A}^H(t),\hat{H}^H] + \hat{U}^*(t,t_1)\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}U(t,t_1)$$

9. Termíny zveřejňování bodových výsledků jednotlivých částí přijímacích zkoušek jsou uvedeny v Opatření děkana č. 12/2021 Harmonogram organizace přijímacího řízení pro rok 2021/2022, které je zveřejněno na www.pedf.cuni.cz v sekci Fakulta – Úřední deska. **Výsledky v žádném případě nebudou sdělovány uchazeči ani jiným osobám telefonicky.**

10. a) Období pro ověřování splnění podmínek přijetí ke studiu, včetně ověřování podmínky dosažení požadovaného vzdělání podle § 48 zákona o vysokých školách, se stanoví pro všechny typy studijních programů do 30. září 2021. Má-li uchazeč na Pedagogickou fakultu Univerzity Karlovy podáno více přihlášek, dokládá úředně ověřenou kopii dokladu o dosažení požadovaného vzdělání ke každé podané přihlášce.

10. b) Pro uchazeče, kteří vykonali maturitní zkoušku v podzimním termínu, jakož i pro uchazeče, o jejichž podané žádosti o uznání zahraničního vzdělání nebylo do 30. září 2021 rozhodnuto, se stanoví období pro ověřování splnění podmínek přijetí (tj. včetně podmínek ověřovaných na základě dokladů, např. maturitní vysvědčení) do 22. října 2021. Stejné období pro ověřování splnění podmínek přijetí se stanoví i pro uchazeče magisterských studijních programů, které navazují na bakalářský studijní program absolvovaný v době od 1. do 30. září 2021.

11. Přijetí či nepřijetí ke studiu bude zveřejněno nejpozději 7 dní po ukončení všech přijímacích zkoušek na adrese https://is.cuni.cz/studium/prijimacky/index.php. Případné odvolání se zasílá **až po obdržení rozhodnutí o nepřijetí.**

12. Zápis do 1. ročníku studia se bude konat ve dnech 19. 7. – 22. 7. 2021 podle rozpisu, který bude zveřejněn na www.pedf.cuni.cz v sekci Studenti – Pro 1. ročníky. Upozorňujeme, že výuka v průběhu studia může probíhat ve všech budovách fakulty, tedy i v Brandýse nad Labem, dopravu fakulta nezajišťuje. Rozhodne-li se uchazeč, že se do 1. ročníku nezapíše, oznámí tento fakt fakultě co nejdříve, aby mohli být přijati další zájemci.

Při zkouškách Vám přejeme mnoho úspěchů.

V Praze dne 21. května 2021

prof. PaedDr. Michal Nedělka, Dr.
děkan

iii) Diracův obraz (interakční obraz)

Předpokládáme hamiltonián ve tvaru $\hat{H} = \hat{H}_0 + V$ · H_0 nezávisí na čase
· Známe evoluční op. $U_0(t,t_0)$

Stavy v Diracově obraze:

$|\psi^D(t,t_1)\rangle := \hat{U}_0^{+}(t,t_1)|\psi(t)\rangle$ $\boxed{\hat{H}_0\hat{U}_0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_0}$

Pozorovatelné:

$\hat{A}^D(t,t_1) = U_0^{+}(t,t_1)\hat{A}\,U_0(t,t_1)$

· $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi^D(t,t_1)\rangle = \hat{V}^D(t,t_1)|\psi^D(t,t_1)\rangle$

· $\frac{d\hat{A}^D}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{A}^D(t,t_1), H_0] + \hat{U}_0^{+}(t,t_1)\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{U}_0(t,t_1)$

Evoluční operátor v Diracově obraze

$\hat{U}^D(t,t_0,t_1) \equiv \hat{S}(t,t_0,t_1)$

$|\psi^D(t,t_1)\rangle = \hat{S}(t,t_0,t_1)|\psi^D(t_0,t_1)\rangle$

$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{S}(t,t_0,t_1) = \hat{V}^D\hat{S}(t,t_0,t_1)$, $\hat{S}(t_0,t_0,t_1) = \mathbb{I}$

Pomocí celkového evolučního operátoru $\hat{U}$ $\hat{H}\hat{U} = i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}$ lze psát:

$\hat{S}(t,t_0,t_1) = \hat{U}_0^{+}(t,t_1)\hat{U}(t,t_0)\hat{U}_0(t_0,t_1)$

· Časový vývoj a konečný čas $t_0 \to t$: $\Delta t = t - t_0 < \infty \to$ zvolím $t_1 = t_0$

Potom $\hat{S}(t,t_0) = U_0^{+}(t,t_0)U(t,t_0)$

· $t_0 \to -\infty \wedge t \to +\infty \to t_1 = 0$ (V rozptylu)

Potom $\lim_{\substack{t\to+\infty \\ t_0\to-\infty}} \hat{S}(t,t_0) =: \hat{S}$ (S-matice)

PEDAGOGICKÁ
FAKULTA
Univerzita Karlova

Příloha k pozvánce na přijímací zkoušku pro akademický rok 2021/2022

Vážená uchazečko, vážený uchazeči,

na základě Vámi podané přihlášky ke studiu si Vás dovolujeme pozvat **k přijímací zkoušce na Vámi zvolený studijní program.**

1. Pečlivě si zkontrolujte místo konání přijímací zkoušky uvedené v elektronické pozvánce zveřejněné ve Studijním informačním systému.

2. Ke zkoušce se dostavte **v hodinu uvedenou na pozvánce.** Délka trvání testu uvedená v sekci Uchazeči – Otevírané programy v roce 2021/2022 je délka čistého času na vypracování písemného testu. Čas pro písemnou zkoušku (s prezencí a závěrečným odevzdáváním testů) může být až 3 hodiny. Pokud jste mimopražští, naplánujte si prosím dopravu tak, abyste přijímací zkoušku mohli vykonat.

3. Ke zkoušce si přineste:
Běžné psací potřeby (modré nebo černé **nepřepisovatelné** pero), vytištěnou pozvánku, platný občanský průkaz nebo jiný doklad s fotografií prokazující totožnost uchazeče **a vyplněný a podepsaný formulář Prezenční přijímací zkouška a COVID-19 (ke stažení zde) spolu s příslušným dokladem. Bez prokázání totožnosti nebo předložení vyplněného formuláře uchazeč nebude moci přijímací zkoušku vykonat.**
Podrobné požadavky a další náležitosti potřebné ke konání přijímací zkoušky si důkladně prostudujte na www.pedf.cuni.cz v sekci Uchazeči – Otevírané programy 2021/2022 (pro podrobnosti rozklikněte daný program).

4. **Stanovený termín přijímací zkoušky nelze měnit.** Zkoušku v náhradním termínu (nejdříve 5 dnů po řádném termínu, plánované dny 28. 6. a 29. 6. 2021) může povolit děkan uchazeči, který o to písemně požádá do 3 dnů ode dne konání zkoušky v řádném termínu, a to v případě, že se uchazeč nemohl zúčastnit zkoušky v řádném termínu ze závažných a doložených důvodů, zejména zdravotních. Termín maturitní zkoušky den před nebo den po termínu přijímací zkoušky je důvodem k povolení náhradního termínu. Další náhradní termín se nepřipouští.

5. V případě, že uchazeč podal žádost o prominutí přijímací zkoušky, dostaví se pouze na tu část přijímací zkoušky, která mu nebyla prominuta.

6. Během přijímacích zkoušek je uchazeč povinen dodržovat pravidla uvedená v Opatření děkana, které bude zveřejněno na http://www.pedf.cuni.cz v sekci Fakulta – Úřední deska. Během přijímacích zkoušek není dále možné pořizovat obrazové a zvukové záznamy (Občanský zákoník § 12).

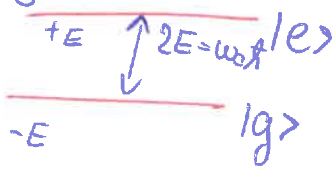
7. Pro uchazeče jsou závazné Podmínky přijímacího řízení pro akademický rok 2021/2022 včetně kritérií hodnocení přijímací zkoušky v jednotlivých programech a Opatření děkana č. 12/2021 Harmonogram organizace přijímacího řízení. Dokumenty jsou zveřejněny na www.pedf.cuni.cz v sekci Fakulta – Úřední deska a v sekci Uchazeči.

8. **Uchazeči se speciálními potřebami,** kteří písemně požádali o specifické podmínky pro konání přijímací zkoušky, obdrží sdělení o její modifikaci. V případě požadavku na doplnění nebo jiné zajištění modifikace přijímací zkoušky se tito uchazeči co nejdříve ohlásí své studijní referentce na studijním oddělení (písemně nebo e-mailem).

Příklad 46

Dvouhladinový atom: dva bazické stavy $|g\rangle, |e\rangle$. $|g\rangle := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|e\rangle := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\hat H_0|g\rangle = -E|g\rangle$$
$$\hat H_0|e\rangle = E|e\rangle \to \hat H_0 = E\begin{pmatrix}-1 & \\ & +1\end{pmatrix} = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_3$$
$$\omega_0 := \frac{2E}{\hbar}$$



Uvažujeme interakci s EM polem $\vec E(t) := \tilde E_0 e^{-i\omega t} + \tilde E_0^* e^{i\omega t}$

V dipólové aproximaci máme $\hat V(t) := -\vec D \cdot \vec E(t)$

Operátor dipólového momentu

$$\vec D := \tilde d\,|e\rangle\langle g| + \tilde d^*|g\rangle\langle e| = \tilde d\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + \tilde d^*\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

Chceme najít interakční člen v Diracově obraze $\hat V^D(t)$, $t_1 = t_0 = 0$

$$\hat V^D(t) = \hat U_0^*(t)\hat V(t)\hat U_0(t)$$

- $\hat V(t) = ?$:

$$\hat V(t) = -\vec D\cdot\vec E(t) = -\left(\tilde d\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + \tilde d^*\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\left(\tilde E_0 e^{-i\omega t} + \tilde E_0^* e^{i\omega t}\right) =$$

$$= -\begin{pmatrix}0 & \tilde d^*\tilde E_0 e^{-i\omega t} + \tilde d^*\tilde E_0^* e^{i\omega t}\\ \tilde d\cdot\tilde E_0 e^{-i\omega t} + \tilde d\cdot\tilde E_0^* e^{i\omega t} & 0\end{pmatrix} = \left|\begin{matrix}\hbar\alpha := \tilde d\tilde E_0\\ \hbar\tilde\alpha := \tilde d^*\tilde E_0^*\end{matrix}\right| =$$

$$= -\hbar\begin{pmatrix}0 & \tilde\alpha^* e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}\\ \alpha e^{-i\omega t} + \tilde\alpha e^{i\omega t} & 0\end{pmatrix}$$

$$\hat H = \hat H_0 + \hat V(t)$$

$$\hat U_0(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat H t\right) = \begin{pmatrix}e^{\frac{i}{2}\omega_0 t} & 0\\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t}\end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t}\begin{pmatrix}e^{i\omega_0 t} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$U_0^*(t) = e^{\frac{i}{2}\omega_0 t}\begin{pmatrix}e^{-i\omega_0 t} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

PART FOUR	Culture	3 min.

01734063

Now, we are going to talk together using pictures 4A–4F. I am your English-speaking friend and we would like to go on a weekend arts or crafts course together. We should agree on a course and then discuss the details. I am going to play the role of your friend and will start the conversation.
Are you ready?

4A: Drum/African drumming course
4B: Street art/Graffiti course
4C: Painting course
4D: Acting/Drama course
4E: Photography course
4F: Other

- Which course to choose
- When to attend the course
- How much to pay/spend
- What equipment to take/buy
- What clothes to wear
- Other

- **So, which course do you prefer?**
- *I think acting/street art/painting is boring.*
- *I don´t have an ear for music. / I don´t have a camera.*
- *Ok, let's take up… . What do you think?*
- *I´m busy this weekend. How about next weekend?*
- *As for the money, how much are these courses? I can´t spend more than 1,000 crowns.*
- *I suppose we'll need equipment like brushes/paints/costumes. Where shall we get them?*
- *Let's check the offers at the local leisure centre.*
- **So what have we agreed on?**

4A

Drums (African drumming)
10am–3pm; 500 CZK;
No need to bring anything.

4B

Street art/Graffiti
10am–3pm; 700 CZK; No need to bring anything but you may get dirty.

4C

Painting
9am–3pm; 950 CZK; No need to bring anything but you may get dirty.

4D

Acting/Drama
10am–5pm; 1100 CZK;
Bring comfortable clothes and shoes.

4E

Photography
10am–4pm; 1100 CZK;
Bring your own camera.

4F

Other

Thank you very much. That is the end of the examination.

$$\hat V^D(t) = \hat U_0^* \hat V(t) \hat U_0 = -\hbar \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tilde\alpha^* e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t} \\ \alpha e^{-i\omega t} + \tilde\alpha e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{+i\omega_0 t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\hbar \begin{pmatrix} 0 & \tilde\alpha^* e^{i(\omega+\omega_0)t} + \alpha^* e^{i(\omega-\omega_0)t} \\ \alpha e^{-i(\omega-\omega_0)t} + \tilde\alpha e^{i(\omega+\omega_0)t} & 0 \end{pmatrix}$$

Schwinger-Tomonagova rovnice

$i\hbar \frac{\partial \psi^D}{\partial t}(t) = V^D(t)\psi^D(t)$, nelze řešit analyticky

Pokud $\omega \approx \omega_0$ - blízko rezonance: $\Delta := \omega - \omega_0 \approx 0$

$\Delta \ll \omega + \omega_0$

→ Rotating wave aproximation (RWA)

Zanedbáme členy $e^{\pm i(\omega+\omega_0)t}$

$$\rightarrow \hat V^D_{RWA}(t) = -\hbar \begin{pmatrix} 0 & \alpha^* e^{i\Delta t} \\ \alpha e^{-i\Delta t} & 0 \end{pmatrix}$$

Pak lze řešit analyticky

37/40 :)

Katedra občanské výchovy a filosofie **OBAO**

Test k přijímacím zkouškám do bakalářského studia 2017

1. Která území tvořila od vlády Karla IV. tzv. Země koruny české?
   a) Čechy, Morava, Horní Lužice, Dolní Lužice, Braniborsko
   b) Čechy, Morava, Slezsko, Horní Lužice, Rakousy
   c) Čechy, Morava, Slezsko, Horní Lužice, Dolní Lužice

2. Války o dědictví rakouské, při kterých české země ztratily většinu Slezska, se odehrály za vlády
   a) Karla VI.
   b) Marie Terezie
   c) Josefa II.

3. Důsledkem přijetí Prosincové ústavy 1867 bylo
   a) rovnost občanů před zákonem, nedotknutelnost majetku a volnost pohybu
   b) zavedení všeobecného rovného hlasovacího práva
   c) zrušení poddanství a s tím i panství jako nejnižšího článku státní správy

4. V jaké části zemí Koruny české představovali Němci většinu?
   a) v Čechách
   b) na Moravě
   c) ve Slezsku

5. Která z níže uvedených osob nikdy nebyla prezidentem Československé (České) republiky
   a) Antonín Novotný
   b) Alexander Dubček
   c) Ludvík Svoboda

6. Formou dialogů vyjadřoval své myšlenky:
   a) Immanuel Kant
   b) Jean-Jacques Rousseau
   c) Platón

7. *Akulturace* je:
   a) proces osvojování si vlastní kultury umožňující začlenění do ní
   b) proces kulturních změn vyplývajících z kontaktu různých skupin
   c) proces odmítání vlastní kultury

8. Nauka o bytí se nazývá:
   a) gnoseologie
   b) ontologie
   c) noetika

9. Který z následujících výrazů vyjadřuje představu ideální a neuskutečnitelné společnosti?
   a) utopie
   b) entropie
   c) topologie

10. *Kauzalita* je:
    a) příčinnost
    b) podmíněnost
    c) účelnost

hello
Hana Nichola

(17) Nestacionární poruchová teorie

Zajímá nás přibližné řešení časové Schrödingerovy rovnice

$\hat{H} = \hat{H}_0 + \varepsilon \hat{V}$

$\hat{H}_0$ - volný hamiltonián (známe $\hat{U}(t)$)

$\hat{V}$ - interakce

Q: Pravděpodobnost přechodu ze stavu $|\psi_i\rangle$ v t_0 do $|\psi_f\rangle$ v t_f (finálním) v důsledku časového vývoje

$W_{i\to f} = |\langle\psi_f|\psi_i(t_f)\rangle|^2 = |\langle\psi_f|\hat{U}(t_f,t_0)|\psi_i\rangle|^2$

$|\psi_i(t_f)\rangle = \hat{U}(t_f,t_0)|\psi_i\rangle$

evoluční operátor pro celý hamiltonián

Postup:

i) Přechod do Diracova obrazu $(t_0 = t_1)$

$W_{i\to f} = |\langle\psi_f^D|\psi_i^D(t_f)\rangle|^2 = |\langle\psi_f|\hat{S}(t_f,t_0)|\psi_i\rangle|^2$

with $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{S}(t_f,t_0) = \varepsilon\hat{V}^D(t)$, $\hat{S}(t_0,t_0) = \hat{I}$ (*)

Řešení: Dysonova řada

$\hat{S}(t_f,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\hat{S}^{(n)}(t_f,t_0)$ (#)

ii) Dosadíme (#) do (*):

$n=0: i\hbar\frac{d}{dt}\hat{S}^{(0)} = 0 \to \hat{S}^{(0)} = \hat{I}$

$n=1: i\hbar\frac{d}{dt}\hat{S}^{(1)} = \hat{V}^D\hat{S}^{(0)} \to \hat{S}^{(1)}(t_f,t_0) = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_f}d\tau_1\,\hat{V}^D(\tau_1)$

$n=2: i\hbar\frac{d}{dt}\hat{S}^{(2)} = \hat{V}^D\hat{S}^{(1)} \to \hat{S}^{(2)}(t_f,t_0) = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_f}d\tau_2\,\hat{V}^D(\tau_2) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t_f}d\tau_2\int_{t_0}^{\tau_2}d\tau_1\,\hat{V}^D(\tau_2)\hat{V}^D(\tau_1)$

$\vdots$

$\to \hat{S}^{(n)} = (t_f,t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n\int_{t_0}^{t_f}dt_n\int_{t_0}^{t_n}dt_{n-1}\dots\int_{t_0}^{t_2}dt_1\,\hat{V}^D(t_n)\hat{V}^D(t_{n-1})\dots\hat{V}^D(t_1)$

PROHLÁŠENÍ

poplatníka daně z příjmů fyzických osob ze závislé činnosti pro zdaňovací období (pro část zdaňovacího období)[1] 05-12/2021

Prohlášení k dani činím / dodatečně činím [1a] **podle § 38k zákona č. 586/1992 Sb., o daních z příjmů, ve znění pozdějších předpisů (dále jen „zákon") pro plátce daně (zaměstnavatele)**

Název plátce daně Learn Online Languages s.r.o.

Adresa Roháčova 145/14, Žižkov, 130 00 Praha 3

Identifikace poplatníka

Příjmení ______ Jméno(-a) ______ Rodné číslo ______

Adresa bydliště (místo trvalého pobytu) ______

Daňový nerezident ČR dále vyplní: Datum narození ______

Číslo a typ dokladu prokazující totožnost poplatníka ______ Stát, který tento doklad vydal ______

Identifikace pro daňové účely ve státu daňové rezidence ______ Stát, jehož jste daňovým rezidentem ______

[1] *použijte např. při dalším nástupu ke stejnému plátci daně v průběhu uvedeného zdaňovacího období (např „od září RRRR")*
[1a] *označte „XD", pokud činíte prohlášení k dani dodatečně podle § 38k odst. 7 zákona v rámci žádosti o roční zúčtování záloh a daňového zvýhodnění*

Podle § 35ba odst. 1 zákona uplatňuji[2]

X	**Základní slevu na poplatníka** (písm. a)
	Základní slevu na invaliditu (písm. c) a prohlašuji, že mi byl přiznán invalidní důchod pro invaliditu I. nebo II. stupně z důchodového pojištění podle zákona o důchodovém pojištění nebo že mi zanikl nárok na invalidní důchod pro invaliditu I. nebo II. stupně z důvodu souběhu nároku na výplatu tohoto invalidního důchodu a starobního důchodu
	Rozšířenou slevu na invaliditu (písm. d) a prohlašuji, že mi byl přiznán invalidní důchod pro invaliditu III. stupně nebo jiný důchod z důchodového pojištění podle zákona o důchodovém pojištění, u něhož jednou z podmínek přiznání je, že jsem invalidní ve III. stupni, zanikl mi nárok na invalidní důchod pro invaliditu III. stupně z důvodu souběhu nároku na výplatu invalidního důchodu pro invaliditu III. stupně a starobního důchodu nebo že jsem podle zvláštních předpisů invalidní ve III. stupni, avšak žádost o invalidní důchod pro invaliditu III. stupně mi byla zamítnuta z jiných důvodů než proto, že nejsem invalidní ve III. stupni
	Slevu na držitele průkazu ZTP/P (písm. e) a prohlašuji, že mi byl přiznán nárok na průkaz ZTP/P
	Slevu na studenta (písm. f) a prohlašuji, že se soustavně připravuji na budoucí povolání studiem nebo předepsaným výcvikem (do 26 let) nebo po dobu prezenční formy studia v doktorském studijním programu, který poskytuje vysokoškolské vzdělání (do 28 let)

[2] *označte „X" slevu na dani, kterou uplatňujete. Uplatňujete-li slevu na dani až dodatečně, tj. v rámci ročního zúčtování záloh a daňového zvýhodnění, označte předmětnou slevu na dani „XD"a do stejného políčka uveďte i kalendářní měsíce, za které příslušnou slevu na dani dodatečně uplatňujete (např. „XD 9–12")*

Podle § 35c a § 35d zákona uplatňuji / ☐ dodatečně uplatňuji[5] daňové zvýhodnění[3]

na mnou vyživované dítě/děti podle § 35c odst. 6 zákona a podle § 38k odst. 4 písm. c) zákona uvádím v níže uvedené tabulce, **jaký je počet těchto vyživovaných dětí** žijících v mé společně hospodařící domácnosti na území členského státu EU nebo EHP a současně uvádím, **na které děti uplatňuji/ neuplatňuji** daňové zvýhodnění ve výši náležející podle § 35c odst. 1 zákona

Jméno(-a)	Příjmení	Rodné číslo	Uplatňuji/neuplatňuji nárok ve výši na[3]	ZTP/P[4]	Zletilé dítě[4]	Dodatečně za kalendářní měsíce[5]

[3] *tabulku vyplňte pouze v případě, že uplatňujete daňové zvýhodnění. Do tabulky vyplňte všechny Vámi vyživované děti žijící ve Vaší společně hospodařící domácnosti, a to bez ohledu na jejich další uplatnění. Dále děti, na které uplatňujete daňové zvýhodnění označte podle výše nároku: na jedno dítě označte „1.", na druhé dítě označte „2.", na třetí a každé další vyživované dítě označte „3.", a děti, na které daňové zvýhodnění neuplatňujete, označte „N"*
[4] *dále u jednotlivých uplatňovaných dětí označte „X" splněnou podmínku – tzn. u sloupce ZTP/P vyznačte, kterému z dětí byl přiznán nárok na průkaz ZTP/P a u sloupce „Zletilé dítě" označte „X", které z dětí je zletilé (do 26 let) a není mu přiznán invalidní důchod pro invaliditu III. stupně a splňuje další podmínky uvedené v § 35c odst. 6 písm. b) bod 1. až 3. zákona*
[5] *pokud uplatňujete daňové zvýhodnění až dodatečně v rámci žádosti o roční zúčtování záloh a daňového zvýhodnění, pak v nadpisu této části označte „XD", a zároveň vyplňte v posledním sloupci tabulky kalendářní měsíce, za které dodatečně uplatňujete daňové zvýhodnění (např. 9–12)*

Časově uspořádaný součin operátorů:

$$T[\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)] = \begin{cases} \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2), & t_1 \geq t_2 \\ \hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1), & t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

* pro $t_1 = t_2$ operátory komutují

* natáhneme všechny meze $\int$ do t_f, pro to ale musíme výsledek podělit $n!$

$$\hat{S}^{(n)}(t_f, t_1) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t_f} dt_n \dots \int_{t_0}^{t_f} dt_1 \, T[\hat{V}^D(t_n) \dots \hat{V}^D(t_1)]$$

$$\rightarrow \hat{S}(t_f, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\right)^n \int_{t_0}^{t_f} dt_n \dots \int_{t_0}^{t_f} dt_1 \, T[\hat{V}^D(t_n) \dots \hat{V}^D(t_1)] =:$$

$$=: T\left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon \int_{t_0}^{t_f} \hat{V}^D(t)\,dt\right)\right]$$

iii) Dále předpokládáme $H_0|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle \wedge \sigma(H_0) = \sigma_p(H_0)$
$H_0|\psi_f\rangle = E_f|\psi_f\rangle$

Obecně $H_0|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$, $\langle\psi_m|\psi_n\rangle = \delta_{mn}$ $\wedge$ $\sum_{n}^{\infty} |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = \mathbb{I}$

- $\hat{S}^{(n)}(t_f, t_0) \rightarrow \langle\psi_f|\hat{S}^{(n)}(t_f, t_0)|\psi_i\rangle =: S_{fi}^{(n)}(t_f, t_0)$
- $W_{i\to f} = |S_{fi}^{(0)}(t_f,t_0) + \varepsilon S_{fi}^{(1)}(t_f,t_0) + \dots + \varepsilon^n S_{fi}^{(n)}(t_f,t_0) + \dots|^2$

0. řád: $S_{fi}^{(0)}(t_f,t_0) = \delta_{fi}$

1. řád: $S_{fi}^{(1)}(t_f,t_0) = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_f} dt_1 \langle\psi_f|\hat{V}^D(t_f,t_0)|\psi_i\rangle = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_f} \langle\psi_f|e^{\frac{i}{\hbar}E_f t_1}\hat{V}(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t_1}|\psi_i\rangle dt_1 =$

$$= -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_f} e^{i\underbrace{\frac{E_f - E_i}{\hbar}}_{\omega_{fi}} t_1} \underbrace{\langle\psi_f|\hat{V}(t)|\psi_i\rangle}_{V_{fi}} dt_1 = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_f} dt_1 \, e^{i\omega_{fi}t} V_{fi}(t)$$

2. řád: $\hat{S}_{fi}^{(2)}(t_f,t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t_f} dt_2 \int_{t_1}^{t_2} dt_1 \langle\psi_f|\hat{V}^D(t_2)\hat{V}^D(t_1)|\psi_i\rangle =$

$\sum_{m}^{\infty} |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$

$$= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t_f} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \sum_m^{\infty} \hat{V}_{fm}(t_2) e^{i\omega_{fm} t_2} \hat{V}_{mi}(t_1) e^{i\omega_{mi} t_1}$$

n-tý řád: $$S_{fi}^{(n)}(t_f, t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t_f} dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_1} dt_1 \sum_{m_1}^{\infty} \dots \sum_{m_{n-1}}^{\infty} V_{fm_{n-1}}(t_n) e^{i\omega_{fm_{n-1}} t_n} \dots V_{m_1 i}(t_1) e^{i\omega_{m_1 i} t_1}$$

iv) Nadále pouze:

- Přechody v 1. řádu
- $t_0 = 0$
- $t_f = T$
- $\varepsilon = 1$

Pokud $|\psi_i\rangle = |\psi_f\rangle$, pak $W_{i\to f}^{(1)}(T) = |\delta_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)}(T)|^2 > 0$

Proto uvažujeme pouze $\langle\psi_f|\psi_i\rangle = 0$

$$W_{i\to f}^{(1)}(T) = |S_{fi}^{(1)}(T)|^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^T dt\, e^{\omega_{fi} t} V_{fi}(t)\right|^2$$

1) Porucha (interakce) je konstantní v čase

$$W_{i\to f}^{(1)}(T) = \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2}\left|\frac{1}{i\omega_{fi}}\left(e^{i\omega_{fi}T} - 1\right)\right|^2 = \boxed{\frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2}\frac{4}{\omega_{fi}^2}\sin^2\left(\frac{\omega_{fi}T}{2}\right) = W_{i\to f}^{(1)}(T)}$$

To má smysl, pokud $|V_{fi}|^2 \ll (E_f - E_i)^2$

2) Harmonická porucha

$\hat{V}(t) := \hat{r} e^{-i\omega t} + \hat{r}^* e^{i\omega t}$, $\omega > 0$, $\hat{r} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$V_{fi}(t) = r_{fi} e^{-i\omega t} + \overline{r_{if}} e^{i\omega t}$

$$W^{(1)}_{i\to f}(T) = \left| S^{(1)}_{fi}(T) \right|^2$$

$$S^{(1)}_{fi}(T) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\, e^{i\omega_{fi} t}\left(r_{fi} e^{-i\omega t} + \overline{r_{if}} e^{i\omega t}\right) = \left| \omega_\pm := \omega_{fi} \pm \omega \right|$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt \left(r_{fi} e^{i\omega_- t} + \overline{r_{if}} e^{i\omega_+ t}\right) = \dots =$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\left(r_{fi} e^{\frac{i\omega_- T}{2}} A_T(\omega_-) + \overline{r_{if}} e^{\frac{i\omega_+ T}{2}} A_T(\omega_+)\right)$$

$$W^{(1)}_{i\to f}(T) = \left| S^{(1)}_{fi}(T) \right|^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left| r_{fi} e^{\frac{i\omega_- T}{2}} A_T(\omega_-) + \overline{r_{if}} e^{\frac{i\omega_+ T}{2}} A_T(\omega_+) \right|^2$$

Pro dostatečně velká T interference přestává hrát roli.

$A_T(\omega)$ má hlavní pík $\sim \omega = 0$, šířka $\frac{\pi}{T}$

(18) Stimulovaná emise a absorpce

Připomenutí: $H = H_0 + V(t)$: $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$

$$\omega_{mn} := \frac{E_m - E_n}{\hbar}$$

Amplituda přechodu $|\psi_i\rangle \to |\psi_f\rangle$ v 1. řádu poruchového rozvoje

je $S^{(1)}_{fi}(T,0) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\, e^{i\omega_{fi}t}\, V_{fi}(t)$

- Konstantní porucha: $\frac{\partial V_{fi}}{\partial t} = 0$

$$W^{(1)}_{i\to f}(T) = \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2} I_T(\omega_{fi}), \quad I_T(\omega_{fi}) = \frac{4}{\omega_{fi}^2}\sin^2\left(\frac{\omega_{fi}T}{2}\right)$$

T malé → roste jako T^2

T velké → roste jako T

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{I_T(\omega)}{T} = 2\pi\delta(\omega)$$

Rychlost přechodu za jednotku času:

$$\Gamma_{i\to f} = \frac{W^{(1)}_{i\to f}(T)}{T} \to \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar}\delta(E_f - E_i)$$

- Harmonická porucha: $\hat V(t) = \hat v e^{-i\omega t} + \hat v^{\dagger} e^{i\omega t}$

$$V_{fi}(t) = v_{fi}e^{-i\omega t} + \overline{v_{if}}\, e^{i\omega t}$$

$$S^{(1)}_{fi}(T,0) = -\frac{i}{\hbar}\left(\underbrace{v_{fi}\, e^{\frac{i\omega_- T}{2}} A_T(\omega_-)}_{a_-(T)} + \underbrace{\overline{v_{if}}\, e^{\frac{i\omega_+ T}{2}} A_T(\omega_+)}_{a_+(T)}\right)$$

$$\omega_\pm := \omega_{fi} \pm \omega$$

$$A_T(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \sqrt{I_T(\omega)}$$

→ Vede na 2 dominantní procesy po velké T: < Stimulovaná emise / Stimulovaná absorpce

$$W^{EM}_{i\to f}(T) = |a_+(T)|^2 = \frac{|v_{if}|^2}{\hbar^2} I_T(\omega_+)$$

$$W^{ABS}_{i\to f}(T) = |a_-(T)|^2 = \frac{|v_{fi}|^2}{\hbar^2} I_T(\omega_-)$$

T velké: rychlost přechodu

$$\Gamma^{EM}_{i\to f} = \frac{W^{EM}_{i\to f}(T)}{T} \longrightarrow \frac{|N_{if}|^2}{\hbar^2}\delta(E_f - E_i + \hbar\omega)$$

$$\Gamma^{ABS}_{i\to f} = \frac{W^{ABS}_{i\to f}(T)}{T} \longrightarrow \frac{|N_{fi}|^2}{\hbar^2}\delta(E_f - E_i - \hbar\omega)$$

Příklad 1

Atom s 1 elektronem ve vnějším EM poli (klasická monochromatická rovinná vlna)

$$\tilde{\vec{A}}(x,t) = \tilde{A}_0(x)\, e^{-i\omega t} + \tilde{A}_0^* e^{i\omega t} = A_0 \tilde{\mathcal{E}}\left(e^{i(k\cdot x - \omega t)} + e^{-i(k\cdot x + \omega t)}\right)$$

$$\Gamma^{EM}_{i\to f},\ \Gamma^{ABS}_{i\to f} = ?$$

i) volný Hamiltonián e^- v atomu: $\hat{H}_0 = \frac{P^2}{2m_e} + V_0(x) \to$ určuje $|\Psi_n\rangle$

$$H_0|\Psi_i\rangle = E_i|\Psi_i\rangle$$
$$H_0|\Psi_f\rangle = E_f|\Psi_f\rangle$$

ii) Vliv pole: $H = \frac{1}{2m_e}(P + eA)^2 + V_0 = \frac{P^2}{2m_e} + V_0 + (2A\cdot P - i\hbar\, \cancel{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div} A)\frac{e}{2m_e} + \underbrace{\frac{e^2}{2m_e}A^2}_{\text{zanedbáme}}$

- Coulombova kalibrace: $\mathrm{div}\, A = 0$

$\to H = H_0 + V(t)$; $V(t) = \frac{e}{m_e} A\cdot P$

- Vyjádříme A_0 pomocí středního počtu fotonů n a hustoty energie na jeden foton $\frac{\hbar\omega}{V}$ (systém je v krabici o objemu V)

hustota energie EM pole u je

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0|\tilde{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\tilde{B}|^2\right)$$

$$\tilde{\vec{E}} = -\frac{\partial \tilde{\vec{A}}}{\partial t} = i\omega A_0 \tilde{\mathcal{E}}\left(e^{i(k\cdot x - \omega t)} - e^{-i(k\cdot x - \omega t)}\right) = 2\omega A_0 \tilde{\mathcal{E}} \sin(k\cdot x - \omega t)$$

$$\tilde{\vec{B}} = \mathrm{rot}\,\tilde{\vec{A}} = \dots = \frac{1}{c}\frac{\vec{k}}{|k|}\times\tilde{\vec{E}}$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 4\omega^2 A_0^2 \sin^2(k\cdot x - \omega t) + \underbrace{\varepsilon_0 c^2}_{\frac{1}{\mu_0}} \frac{1}{c^2} 4\omega^2 A_0^2 \sin^2(k\cdot x - \omega t)\right) =$$

$$= 4\varepsilon_0 A_0^2 \omega^2 \sin^2(k\cdot x - \omega t)$$

• střední hodnota hustoty za dostatečně dlouhý čas: $\sin^2(\ldots) \sim \frac{1}{2}$

$$\langle u \rangle = 2\varepsilon_0 A_0^2 \omega^2 = n\frac{\hbar\omega}{V} \rightarrow A_0 = \sqrt{\frac{\hbar n}{2V\varepsilon_0\omega}}$$

$$\bullet\ V(t) = \frac{e}{m_e}\tilde{A}(t)\cdot\tilde{p} = \frac{e}{m_e}\sqrt{\frac{\hbar n}{2V\varepsilon_0\omega}}\left(e^{i(k\cdot x - \omega t)} + e^{-i(k\cdot x - \omega t)}\right)\tilde{\varepsilon}\cdot\vec{p} =$$

$$= \hat{r}e^{-i\omega t} + \hat{r}^* e^{i\omega t}$$, harmonická porucha

$$\hat{r} := \frac{e}{m_e}\sqrt{\frac{\hbar n}{2V\varepsilon_0\omega}}\, e^{ik\cdot x}\,\tilde{\varepsilon}\cdot\tilde{p}$$

→ může dojít ke stimulované emisi a absorpci

$$\Gamma^{EM}_{i\to f} = \frac{|V_{if}|^2}{h}\delta(E_f - E_i + \hbar\omega) = \frac{e^2}{m_e^2 V\varepsilon_0 4\pi} n|\langle\psi_f|e^{-ik\cdot x}\tilde{\varepsilon}\cdot\tilde{p}|\psi_i\rangle|^2\delta(E_f - E_i + \hbar\omega) =$$

$$\Gamma^{ABS}_{i\to f} = \frac{e^2}{m_e^2 V\varepsilon_0 4\pi} n|\langle\psi_f|e^{ik\cdot x}\tilde{\varepsilon}\cdot\tilde{p}|\psi_i\rangle|^2\delta(E_f - E_i - \hbar\omega)$$

$A_0 = 0 \rightarrow H = H_0$ a k žádnému přechodu nemůže dojít

V realitě: dochází ke spontánní emisi.

Semi-klasická teorie interakce hmoty a EM pole

(EM pole je popsáno klasicky)

Musíme EM pole popsat kvantově → existuje základní (nulový) stav pole

→ spontánní emise

PART TWO **Food and drinks**

2A

The following ideas may help you:

- Place
- Time of the day
- People
- Food and drinks
- Atmosphere/Event
- Other

2B

Přechody do kontinua

$\hat{H}_0$ má i spojité spektrum

E_f buď leží ve spojitém spektru nebo v jeho okolí leží velké množství hladin, které neumíme rozlišit

Pak se ptáme na př. přechodu do intervalu $\underbrace{\left(E_f - \frac{\Delta E}{2}, E_f + \frac{\Delta E}{2}\right)}_{\mathcal{J}}$; $\frac{\Delta E}{E_f} \ll 1$

$\hat{H}_0 |\alpha\rangle = E(\alpha) |\alpha\rangle$ – (zobecněné) vlastní vektory

α - všechna spojitá i diskrétní kvantová čísla popisující stav

stav částice v čase T ~ $|\Psi(T)\rangle = \hat{U}(T,0)|\Psi_i\rangle$

$$W_{i \to f} = \int_{\mathcal{J}} d\alpha \, |\langle \alpha | \Psi_i(T)\rangle|^2 = \int_{\mathcal{J}(E_f)} \rho(E) \, dE \int_{\mathcal{J}(\beta_f)} d\beta \, |\langle \beta, E | \Psi(T)\rangle|^2$$

$\alpha \sim E, \beta$

energie; zbývající q. čísla stavu

PART FOUR (3 min.) **Housing and living**

In Part Four of the exam, you and the examiner are going to **talk together**. Imagine the following situation:
You have just come to **Great Britain** and you are looking for some **accommodation**. You have seen an **advertisement** offering a **flat to rent**. You have decided to visit **the owner of the flat (the examiner)** and **ask** him/her some **questions about the flat and conditions for renting it.** In the end, **decide** if you want to rent it or not. The **examiner** will **start the dialogue**.

The following ideas may help you:

- Size of the flat
- Cost of the rent
- Available to move in
- Furniture/Internet access/etc.
- Deposit
- Other

19) Přesné řešení pohybové rovnice v Diracově obraze

- $t_0 = t_1 = 0$: $\hat{S}(t,0)$: $|\psi_i\rangle \to |\psi_f\rangle$

Máme $H = H_0 + V$, $\sigma(H_0) = \sigma_p(H_0)$

$S_{km}(t_0) = \langle \psi_k | S(t,0) | \psi_m \rangle$. $H|\psi_i\rangle = E_i |\psi_i\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = V^D S \to i\hbar \frac{\partial S_{km}}{\partial t} = \sum_j V^D_{kj} S_{jm} = \sum_j e^{i\omega_{kj}t} V_{kj} S_{jm}$$

Pro Schrödingerův obraz máme:

$$H|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t}, \quad |\psi(0)\rangle = |\psi\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j d_j(t) e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t} |\psi_j\rangle$$

$$\to i\hbar \sum_j \dot{d}_j(t) e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t} |\psi_j\rangle = \sum_j d_j(t) e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t} V(t) |\psi_j\rangle \quad / \langle \psi_k | e^{\frac{i}{\hbar}E_k t}$$

$$\boxed{i\hbar \dot{d}_k = \sum_j e^{i\omega_{kj}t} V_{kj} d_j} \quad d_k(0) = \delta_{ik}$$

$S_{fi}(t,0) = d_f(t)$

Nadále: dvouhladinový systém: $\mathcal{H} := \mathbb{C}^2$

$H_0 |\psi_m\rangle = E_m |\psi_m\rangle$, $m = 1,2$

$E_1 \leq E_2$

$$\omega_{21} = -\omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} =: \omega \geq 0$$

Matice interakčního členu V^D jsou:

$$V^D(t) = \begin{pmatrix} V_{11}(t) & V_{12}(t)e^{-\omega t} \\ \overline{V_{12}}(t)e^{i\omega t} & V_{22}(t) \end{pmatrix}$$

PART ONE (2,5 min.)	Everyday life

The examiner is going to ask you some **questions**. Please **answer** the questions in as much detail as possible. If you don't understand a question, please ask the examiner to repeat it.

PART TWO (4 min.)	Food and drinks

Part Two consists of **three** tasks. Take the separate handout with pictures **2A** and **2B**. The pictures show two different groups eating.

Task One 1,5 min.

Look at pictures **2A** and **2B**. **Choose one** of the pictures and **describe** it.
The following ideas may help you:

- Place
- Time of the day
- People
- Food and drinks
- Atmosphere/Event
- Other

Task Two 1 min.

Look at both pictures once more and **compare** them (what is similar/the same/different?).
The following ideas may help you:

- Place
- Time of the day
- People
- Food and drinks
- Atmosphere/Event
- Other

Task Three 1.5 min.

Talk about **your favourite cuisine**.

Potom máme $i\hbar \dot{d} = V^D d$, $d(t) := \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix}$

i) Konstantní porucha, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$V^D = \begin{pmatrix} V_{11} & \overline{V_{21}} e^{-i\omega t} \\ V_{21} e^{i\omega t} & V_{22} \end{pmatrix}$$

* Podobné spinu v rotujícím poli $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$

$\vec{B}_1 = (B_1 \cos\omega t, -B_1 \sin\omega t, 0)$

$$H_S(t) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(t) = -\vec{\mu} \cdot (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) = -\frac{\mu_0 B_0}{\hbar} S_3 - \frac{\mu_0 B_1}{\hbar}(\cos(\omega t) S_1 - \sin(\omega t) S_2) =$$

$$= -\frac{\mu_0}{\hbar} \underset{(\vec{J})}{\vec{S}} \cdot \vec{B}$$

$\omega_0 := \frac{\mu_0 B_0}{\hbar}$, $\omega_1 := \frac{\mu_0 B_1}{\hbar}$

$$\Rightarrow H(t) = -\omega_0 S_3 - \omega_1 (S_1 \cos(\omega t) - S_2 \sin(\omega t)) = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{i\omega t} \\ \omega_1 e^{-i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

Řešení: $H(t) = R_z(-\omega t) H(0) R_z^*(-\omega t)$

$|\psi'(t)\rangle := R_z^*(-\omega t) |\psi(t)\rangle$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'(t)\rangle = (\underbrace{H(0) + \omega S_3}_{\hat{H}_{ef}}) |\psi'(t)\rangle$$

$$H_{ef} = -\omega_0 S_3 - \omega_1 S_1 + \omega S_3 = (\underbrace{\omega - \omega_0}_{\Delta}) S_3 - \omega_1 S_1 = \Omega \, \vec{m}_\Omega \cdot \vec{S}$$

$$\vec{m}_\Omega = \frac{1}{\Omega}(-\omega_1, 0, \Delta)$$

$\Omega := \sqrt{\omega_1^2 + \Delta^2}$ – Rabiho frekvence

$$\Rightarrow H(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_{ef} t} |\psi'(0)\rangle = R_{\vec{m}_\Omega}(\Omega t) |\psi(0)\rangle$$

In **Part Four** of the exam, **you and the examiner** are going to **talk together using the ideas in pictures 4A–4F.** Imagine the following situation: **You** and **your English-speaking friend** would like to **go on a weekend arts or crafts course together**. You should **agree on a course** and then **discuss the details. The examiner** will play the **role of your friend and will start the conversation.**

The following ideas may help you:

- Which course to choose
- When to attend the course
- How much to pay/spend
- What equipment to take/buy
- What clothes to wear
- Other

4A

Drums (African drumming)
10am–3pm; 500 CZK;
No need to bring anything.

4B

Street art/Graffiti
10am–3pm; 700 CZK; No need to bring anything but you may get dirty.

4C

Painting
9am–3pm; 950 CZK; No need to bring anything but you may get dirty.

4D

Acting/Drama
10am–5pm; 1100 CZK;
Bring comfortable clothes and shoes.

4E

Photography
10am–4pm; 1100 CZK;
Bring your own camera.

4F

Other

konstantní porucha je spin v rotujícím poli pro $\omega \equiv -\omega$

$$V^D = e^{-\frac{i}{2}\omega t \sigma_3} V^D(0) e^{\frac{i}{2}\omega t \sigma_3} \to V^D_{ef} = V^D(0) - \omega \frac{\hbar}{2}\sigma_3 = \begin{pmatrix} V_{11} - \frac{\hbar\omega}{2} & \overline{V_{21}} \\ V_{21} & V_{22} + \frac{\hbar\omega}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{V_{11}+V_{22}}{2}}_{\text{nehraje roli (globální fáze)}} \mathbb{I} + \mathrm{Re}\, V_{21}\sigma_1 + \mathrm{Im}\, V_{21}\sigma_2 + \frac{V_{11} - V_{22} - \hbar\omega}{2}\sigma_3$$

$$\to V^D_{ef} = \frac{\hbar}{2}\Omega \vec{n}_\Omega \vec{\sigma} : \Delta = \frac{V_{11}-V_{22}}{\hbar} - \omega$$

$$\vec{n}_\Omega = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{2}{\hbar}\mathrm{Re}V_{21}, \frac{2}{\hbar}\mathrm{Im}V_{21}, \Delta\right)$$

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \frac{4}{\hbar^2}|V_{21}|^2}$$

→ Evoluční operátor v Diracově obraze

$$S(t,0)) = e^{-\frac{i}{2}\omega t \sigma_3} e^{-\frac{i}{2}\Omega t \vec{n}_\Omega \vec{\sigma}} = \ldots =$$

ii) Harmonická porucha $V(t) = v e^{-i\omega t} + v^+ e^{+i\omega t}$; $\omega_{21} =: \omega_0$

v Diracově obraze:

$$V^D(t) = \begin{pmatrix} v_{11}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) & v_{12} e^{-i(\omega+\omega_0)t} + \overline{v_{21}} e^{i(\omega-\omega_0)t} \\ * & v_{22}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \end{pmatrix}$$

$\Delta := \omega - \omega_0$.

blízko resonanci $\Delta \approx 0$ $(\Delta \ll \omega, \omega_0)$

zanedbáme rychle oscilující členy (RWA)

$$\to V^D_{RWA}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{v_{21}} e^{i\Delta t} \\ v_{21} e^{-i\Delta t} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to V^D_{ef} = V^D_{RWA}(0) + \frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \Delta & \frac{2}{\hbar}\overline{v_{21}} \\ \frac{2}{\hbar}v_{21} & -\Delta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\Omega \vec{n}_\Omega \cdot \vec{\sigma}$$

$$\vec{n}_\Omega = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{2}{\hbar}\mathrm{Re}\, v_{21}, \frac{2}{\hbar}\mathrm{Im}\, v_{21}, \Delta\right)$$

PART ONE (2,5 min.) **Shopping** 02340111

The examiner is going to ask you some **questions**. Please **answer** the questions in as much detail as possible. If you don't understand a question, please ask the examiner to repeat it.

PART TWO (4 min.) **Clothes and fashion** 01861112

Part Two consists of **three** tasks. Take the separate handout with pictures **2A** and **2B**. The pictures show different types of clothes.

Task One 1,5 min.

Look at pictures **2A** and **2B**. **Choose one** of the pictures and **describe** it.
The following ideas may help you:

- People
- Place
- Time of the year
- Activities
- Clothes
- Other

Task Two 1 min.

Look at both pictures once more and **compare** them (what is similar/the same/different?).
The following ideas may help you:

- People
- Place
- Time of the year
- Activities
- Clothes
- Other

Task Three 1,5 min.

Talk about **what type of clothes and accessories you like wearing in summer**.

Propagátory

Propagátor – Maticové elementy evolučního operátoru v x-reprezentaci

– integrální jádro $K(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0)$: $|\psi(x_0,t_0)\rangle \to |\psi(\vec{x},t)\rangle$

$$\psi(\vec{x},t)=\int_{\mathbb{R}^3} d^3x_0\, K(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0)\psi(\vec{x}_0,t)=\langle x|\psi(t)\rangle=\langle x|U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

$$\to \psi(\vec{x},t)=\int_{\mathbb{R}^3} d^3x_0 \langle x|U(t,t_0)|x_0\rangle \psi(x_0,t_0)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0)=\hat{H}K(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0)\ ,\ K(\vec{x},t_0,\vec{x}_0,t_0)=\delta(x-x_0)$$

$$\|\psi(t_0)\|^2=\|\psi(t)\|^2$$

$$\|\psi(t)\|^2=\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, |\psi(x,t)|^2=\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_0\, K(x,t,x_0,t_0)\psi(x_0,t_0)\int_{\mathbb{R}^3} d^3x_0'\, \overline{K(x,t,x_0',t_0)}\,\overline{\psi(x_0',t_0)} \overset{!}{=}$$

$$\overset{!}{=}\int_{\mathbb{R}^3} dx_0^3\, |\psi(x_0,t)|^2=\|\psi(t_0)\|^2$$

$$\to \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, K(x,t,x_0,t_0)\overline{K(x,t,x_0',t_0)}=\delta(x_0-x_0')$$

Analogicky lze zavádět propagátor v p-reprezentaci (via Fourier transform) vn 4

Anglický jazyk — Pracovní list žáka 4

PART ONE (2,5 min.)	**Family**

The examiner is going to ask you some **questions**. Please **answer** the questions in as much detail as possible. If you don't understand a question, please ask the examiner to repeat it.

PART TWO (4 min.)	**Food and drinks**

Part Two consists of **three** tasks. Take the separate handout with pictures **2A** and **2B**. The pictures show two different groups of people eating.

Task One — 1.5 min.

Look at pictures **2A** and **2B**. **Choose one** of the pictures and **describe** it.
The following ideas may help you:

- Place
- People
- Food and drinks
- Time of the day
- Atmosphere
- Other

Task Two — 1 min.

Look at both pictures once more and **compare** them (what is similar/the same/different?).
The following ideas may help you:

- Place
- People
- Food and drinks
- Time of the day
- Atmosphere
- Other

Task Three — 1,5 min.

Talk about **the last meal you had with your family/friends**.

(20) Propagátor a dráhový integrál

$$K(x_f,t_f,x_0,t_0) = \langle x_f | U(t_f,t_0) | x_0 \rangle$$

$$\tilde{K}(p_f,t_f,p_0,t_0) = \langle p_f | U(t_f,t_0) | p_0 \rangle$$

- $$\Psi(x_f,t_f) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_0 \, K(x_f,t_f,x_0,t_0)\Psi(x_0,t_0)$$

- $$K(x_f,t_0,x_0,t_0) = \delta(x_f - x_0)$$

$$\|\Psi(t)\|^2 = \|\Psi(t_0)\|^2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, K(x_f,t_f,x_0,t_0)\overline{K(x,t_f,x_0',t)} = \delta(x_0 - x_0')$$

- Volná částice:

$$\tilde{K}_0(p_f,t_f,p_0,t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t-t_0)\right)\delta(p_f - p_0)$$

$$K_0(x_f,t_f,x_0,t_0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3p_f \int_{\mathbb{R}^3} d^3p_0 \, e^{\frac{i}{\hbar}p_f \cdot x_f}\tilde{K}_0(p_f,t_f,x_0,t_0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}p_0 \cdot x_0} =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_0)}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{im(x_f - x_0)^2}{2\hbar(t_f - t_0)}\right)$$

Máme vývoj s $t_0 \to t_f \rightarrow t_0 < t_1 < t_f$

$$\Psi(x_f,t_f) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_1 \, K(x_f,t_f,x_1,t_1)K(x_1,t_1,x_0,t_0)\Psi(x_0,t_0)$$

$$\rightarrow K(x_f,t_f,x_0,t_0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_1 \, K(x_f,t_f,x_1,t_1)K(x_1,t_1,x_0,t_0)$$

Rozdělení na N intervalů: $t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = t_f$

$$K(x_f,t_f,x_0,t_0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_N \langle x_f | U(t_{N+1},t_N) | x_N \rangle \dots \langle x_1 | U(t_1,t_0) | x_0 \rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_N \prod_{k=1}^{N+1} \langle x_k | U(t_k,t_{k-1}) | x_{k-1} \rangle$$

- Uvažujme ekvidistantní dělení intervalu $\langle t_0, t_f \rangle$.

N velké $\Rightarrow$ $\Delta t := t_k - t_{k-1}$ malé

$$\to U(t_k,t_{k-1}) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(t_k)\Delta t \,, \quad H(t) = \frac{p^2}{2m} + V(x,t)$$

$$U(t_k,t_{k-1}) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\Delta t \frac{p^2}{2m} - \frac{i}{\hbar}\Delta t\, V(x,t_k) \quad \text{(do 1. řádu v } \Delta t)$$

$$\simeq \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\Delta t\, V(t_k)\right)\left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\Delta t \frac{p^2}{2m}\right)$$

$$\simeq \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta t\, V(t_k)\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta t\, H_0\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta t\, V(t_k)\right) \cancel{\exp}\; U_0(\Delta t)$$

$$\to \langle x_k | U(t_k,t_{k-1}) | x_{k-1}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t V(t_k)} \langle x_k | U_0(\Delta t) | x_{k-1}\rangle =$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t V(t_k)} K_0(x_k,t_k,x_{k-1},t_{k-1}) =$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t V(t_k)} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t_k - t_{k-1})}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{im(x_k - x_{k-1})^2}{2\hbar(t_k - t_{k-1})}\right)$$

$$\cancel{\to K(x_k,t_k,x_{k-1},t_{k-1}) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(}$$

$$K(x_k,t_k,x_{k-1},t_{k-1}) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta t\left(\frac{m}{2}\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{\Delta t^2} - V(x_k,t_k)\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta t\, L(x_k, \dot{x}_k, t_k)\right)$$

$$\to K = (x_f,t_f,x_0,t_0) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_n \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta t\, L\left(x_k, \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}, t_k\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{\frac{3}{2}(n+1)} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_n \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta t \sum_{k=1}^{n+1} L\left(x_k, \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}, t_k\right)\right)$$

• Definujeme „míru" $\mathcal{D}x(t) := \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} d^3x_k \left(\frac{m}{2\pi i\hbar}\frac{n+1}{\Delta t}\right)^{\frac{3}{2}(n+1)}$

$$\to K(x_f,t_f,x_0,t_0) = \int \mathcal{D}x(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \underbrace{\int_0^{t_f} L(x,\dot{x},t)}_{\text{akce } S \text{ podél trajektorie } x(t)}\right)$$

• Pokud Lagrangián $L(x,\dot{x},t)$ je nejvýše kvadratický v $\dot{x}, x$ pak platí, že

klasická dráha — pevné konce

$$S[x(t)] = S[x_{cl}(t)] + S[y(t)]$$

$$K(x_f,t_f,x_0,t_0) = \exp\left(\tfrac{i}{\hbar}S[x_{cl}(t)]\right)\int_{\substack{y(t_0)=y\\ y(t_f)=0}} \mathcal{D}y(t)\, \exp\left(\tfrac{i}{\hbar}S[y(t)]\right)$$

nezávisí na x_0, x_f
$F(t_f,t_0)$

$F(t_f,t_0)$ určíme z podmínek na propagátor
- $\|\Psi(t)\|^2 = \|\Psi(t_0)\|^2 \rightarrow$ určí $|F(t_f,t_0)|$
- Počáteční podmínka $\rightarrow$ fáze $F(t_f,t_0)$
- $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \rightarrow U(t_f, t_0) = U(t_f - t_0)$

Propagátor LHO pomocí dráhového integrálu

$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$K(x_f,t_f,x_0,t_0) = K(x_f,x_0,t_f-t_0) = \exp\left(\tfrac{i}{\hbar}S[x_{cl}(t)]\right)F(t_f-t_0)$$

i) klasická trajektorie

$$x_{cl}(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$$

$$\left.\begin{aligned} x_{cl}(t_0) &= x_0 \\ x_{cl}(t_f) &= x_f \end{aligned}\right\} \rightarrow a = \frac{x_f\cos(\omega t_0) - x_0\cos(\omega t_f)}{\sin(\omega(t_f-t_0))}$$

$$b = \frac{x_f\sin(\omega t_0) - x_0\sin(\omega t_f)}{\sin(\omega(t_f-t_0))}$$

$$\dot{x}_{cl}(t) = \omega(a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t))$$

$$L(\dot{x}_{cl}, x_{cl}, t) = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left((a^2-b^2)\cos(2\omega t) - 2ab\sin(2\omega t)\right)$$

$$S[x_{cl}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} L(x,\dot{x},t)\,dt = \frac{1}{4}m\omega\left((a^2-b^2)(\sin(2\omega t_f)-\sin(\omega t_0)) + 2ab(\cos(2\omega t_f)-\sin(2\omega t_0))\right) =$$

$$= \ldots = \frac{1}{2}m\omega \frac{(x_0^2+x_f^2)\cos(\omega(t_f-t_0)) - 2x_0x_f}{\sin(\omega(t_f-t_0))}$$

ii) $F(x_f - x_0) = ?$

$$\cdot \int_{\mathbb{R}} dx\, K(x_f, x_0, t_f - t_0)\, \overline{K(x, x_0', t_f, -t_0)} = \delta(x_0 - x_0')$$

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}} dx\, |F(t_f - t_0)|^2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}(t)]\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}'(t)]\right) = \delta(x_0 - x_0')$$

$$-S[x_{cl}(t)] + S[x_{cl}'(t)] = \frac{m\omega}{2\sin(\omega(t_f-t_0))}\left((x_0'^2 - x_0^2)\cos(\omega(t_f-t_0)) + 2x_0x_f - 2x_0'x_f\right)$$

$$\rightarrow |F(t_f-t_0)|^2 \cdot \int_{\mathbb{R}} dx\, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega(t_f-t_0))}\left((x_0'^2 - x_0^2)\cos(\omega(t_f-t_0)) + 2x(x_0 - x_0')\right)\right) =$$

$$= |F(t_f-t_0)|^2 \exp\left(\frac{i\alpha}{2}(x_0'^2 - x_0^2)\cos(\omega(t_f-t_0))\right) \int_{\mathbb{R}} dx\, \exp(i\alpha x(x_0 - x_0')) = \delta(x_0 - x_0')$$

$$\rightarrow \ldots |F(t_f - t_0)| = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sin(t_f-t_0)\omega}}$$

$$\boxed{K(x_f, x_0, t_f - t_0) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega((x_0^2+x_f^2)\cos(\omega(t_f-t_0)) - 2x_0x_f)}{2\sin(\omega(t_f-t_0))}\right)\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\sin(\omega(t_f-t_0))}}\, e^{i\gamma}}$$

γ se určí limitou $\omega \to 0$ → volná částice na přímce

$$\boxed{e^{i\gamma} = \frac{1}{\sqrt{i}}}$$

(21) Základy teorie rozptylu

- rozptyl na potenciálu V v $\mathbb{R}^3$:
  i) V - konečný dosah
  ii) V - vymizí v ∞ dostatečně rychle (tj. pro $|x| \to +\infty$)

$|x| \to +\infty \to$ volná částice

$$H = H_0 + V \quad , \quad H_0 = \frac{P^2}{2m}$$

Hledáme rozptylové stavy, které asymptoticky odpovídají zob. vl. stavům H_0

Částice nalétává z nekonečna s $\vec{P}$, $E = \frac{P^2}{2m}$ $(\vec{P} = (0,0,P))$
$\vec{k} = \frac{1}{\hbar}\vec{P} = (0,0,\frac{P}{\hbar}) = (0,0,k)$

Dopadající částice ve stavu $|\vec{p}\rangle$

$$\psi_k(x) = \langle x | k \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{ik\cdot x}$$

Finální stav $|p'\rangle$, $\vec{P} \neq \vec{P}'$

Pružný rozptyl $\to$ zachovává se energie a tedy i velikost hybnosti

Stacionární rozptylové stavy $\Phi_k(x)$:

$$H\Phi_k = E\Phi_k \quad , \quad E = \frac{P^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\Phi_k(x) \simeq \psi_k(x) + \psi_s(x) = \sim e^{ikz} + \underbrace{f(k',k)}_{\text{amplituda rozptylu}} \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$f(k',k) = f_k(\theta,\varphi)$$

$$\underbrace{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_k}_{\text{diferenciální účinný průřez}} = |f_k(\theta,\varphi)|^2$$

tok pravděpodobnosti

$\psi_k \to \tilde{j}_{in}$, $d\sigma = \frac{|j_s|}{|j_{in}|} dS$

$\psi_s \to \tilde{j}_s$ $\quad dS = r^2 d\Omega$

$\psi(x,t) \to j(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}(\psi \nabla \bar{\psi} - \bar{\psi} \nabla \psi)$

$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$

Rovnice kontinuity: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0$

$\phi_k(x) \to \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\psi_k(x) \sim e^{ikz}$:

$j_{in} = \frac{i\hbar}{m} u_z, \; u_z = (0,0,1)$

$\psi_s(r,\theta,\varphi) \sim f_k(\theta,\varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$

$\tilde{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{u}_\varphi$

$\nabla \psi_s = f_k \dots$

js pro velká r je dán jako:

$j_s \sim \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^2} |f_k(\theta,\varphi)|^2 u_r$

$d\sigma = \frac{\frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^2} |f_k(\theta,\varphi)|^2}{\frac{\hbar k}{m}} r^2 d\Omega \Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_k = |f_k(\theta,\varphi)|^2$

$$\phi_k \to H\phi_k = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi_k + V(x)\,\phi_k = E\phi_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\phi_k$$

$$U(x) = \frac{2m}{\hbar^2}V(x)$$

$(\Delta + k^2)\phi_k = U\phi_k \iff$ Integrální Lippman-Schwingerova rovnice

$$\phi_k = \psi_k(x) + \int_{\mathbb{R}^3} G_k(x-x')\,U\phi_k(x')\,d^3x'$$

$$G_k^+ = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$G_k^- = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$f_k(\theta,\varphi) = f(k',k) = \left(-2\pi^2\int_{\mathbb{R}^3}\overline{\psi_{k'}}(x')\,U(x')\,\phi_k(x')\,d^3x'\right) =$$

$$= -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle\psi_{k'}|V|\phi_k\rangle$$

Řešení iterativně $\to$ Bornova řada

23) Nerozlišitelné částice

→ stavy jsou plně (anti)symetrické vůči záměně „očíslování"

bosony fermiony

Rozlišitelné částice → $\mathcal{H}^{(N)} = \mathcal{H}^{\otimes N}$

Nerozlišitelné částice → podprostor (anti)symetrických stavů

$\{|\phi_k\rangle\}$ ON báze $\mathcal{H}$

nerozlišitelné: $|\phi_{k_1}, \phi_{k_2}\rangle := |\phi_{k_1}\rangle \otimes |\phi_{k_2}\rangle$

Operátor transpozice částic: $P_{(1,2)} |\phi_{k_1}, \phi_{k_2}\rangle = |\phi_{k_2}, \phi_{k_1}\rangle$

$P_{(1,2)}$ je hermitovský a unitární

Vlastní podprostory jsou $+1$ ... fermiony, -1 bosony

$S := \frac{1}{2}(\mathbb{I} + P_{(1,2)})$

$A := \frac{1}{2}(\mathbb{I} - P_{(1,2)})$

Projektory

$S + A = \mathbb{I}$ (jen pro 2 částice)

→ pro 2 částice: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_S$

Pozorovatelé musí komutovat s $P_{(1,2)}$

$B|j\rangle = \beta_j |j\rangle \,/ P_{(1,2)} \wedge P_{(1,2)}|j\rangle = \pm |j\rangle \,/ B$

$P_{(1,2)} B |j\rangle = \pm \beta_j |j\rangle \Longleftrightarrow B P_{(1,2)} |j\rangle = \pm \beta_j |j\rangle$

Dvoučásticová pozorovatelná musí být symetrická vůči záměně částic:

$$[B,S]=0,\ [B,A]=0$$

Obecně N nerozlišitelných částic

OP. transpozice m a n:

$P_{(m,n)}$

Hermitovský a unitární

$$P_\pi |\phi_{k_1},\dots,\phi_{k_N}\rangle = |\phi_{k_{\pi(1)}},\dots,\phi_{k_{\pi(N)}}\rangle$$

$$\forall |\psi_S\rangle \in \mathcal{H}_S^{(N)}:\quad P|\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle$$

$$\forall |\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A^{(N)}:\quad P|\psi_A\rangle = -|\psi_A\rangle$$

Projekce na $\mathcal{H}_S$ a $\mathcal{H}_A$

$$S := \frac{1}{N!}\sum_{\pi\in S_N} P_\pi$$

$$A := \frac{1}{N!}\sum_{\pi\in S_N} \operatorname{sgn}\pi\, P_\pi$$

$\alpha,\beta,\gamma \in S_N$: $\quad \beta\cdot\alpha = \gamma \Rightarrow P_\beta \cdot P_\alpha = P_\gamma$

$P_\alpha S = S,\ \forall \alpha\in S_N$

$P_\alpha A = \operatorname{sgn}\alpha\, A$

$S^2 = S,\ A^2 = A$

$AS = 0$, A, S jsou OG projektory

$A + S + \mathbb{I} \Rightarrow \mathcal{H}_S^{(N)} + \mathcal{H}_A^{(N)} + \mathcal{H}^{(N)}$

• Báze v $\mathcal{H}_S^{(N)}, \mathcal{H}_A^{(N)}$ pomocí $\underbrace{\text{jednočásticových stavech}}_{\text{moldy}}$

• N bosonů v módech $|\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_N}\rangle$
$k_1 \leq \dots \leq k_N$

$$|\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_N}, S\rangle = n_S\, S\, |\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_N}\rangle$$

• N fermionů v modech $|\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_N}\rangle$
$k_1 < \dots k_N$

$$|\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_N}, A\rangle = n_A\, A\, |\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_N}\rangle, \quad n_A = \sqrt{N!}$$

$$\rightarrow |\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_N}, A\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_N} \operatorname{sgn} \pi\, |\phi_{k_{\pi(1)}}, \dots, \phi_{k_{\pi(N)}}\rangle$$

$\boxed{\text{bosony: } n_S = ?}$

Obsazovací čísla n_k: - počet částic ve stavu $|\phi_k\rangle$

$$\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_N} \leftrightarrow \{n_k\}, \quad \sum_i n_i = N$$

$$n_S = \sqrt{\frac{N!}{n_1! \dots n_N!}}$$

$$\rightarrow |\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_N}, S\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!\, n_1! \dots n_N!}} \sum_{\pi \in S_N} |\phi_{k_{\pi(1)}}, \dots, \phi_{k_{\pi(N)}}\rangle$$

Obsazovací čísla pro fermiony: $n_k = 0 \vee n_k = 1$

Tyto symetrizované stavy tvoří bázi $\mathcal{H}_S^{(N)}$ a $\mathcal{H}_A^{(N)}$ (Fockovy stavy)

Fockův prostor:

Direktní součet prostorů s N částicemi, $N = 0, 1, 2, \dots$

Bosony: $\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_S^{(0)} \oplus \mathcal{H}_S^{(1)} \oplus \dots = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_S^{(k)}$

Fermiony: $\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_A^{(k)}$

$\mathcal{H}_S^{(0)} = \mathcal{H}_A^{(0)} = \mathbb{C}$

Fockův prostor je Hilbertův

Skalární součin definujeme nulou pro různé podprostory

$\mathcal{H}_{S,A}^{(0)} = \mathbb{C} \equiv \{ \underbrace{|0\rangle}_{\text{vakuový stav}} \}$

Kreační a anihilační operátory

LHO: $H|n\rangle = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega|n\rangle$

$a_- \equiv a$ - anihilační op
$a_+^* \equiv a^*$ - kreační op

$[H, a] = -\hbar\omega a$, $[H, a_+] = \hbar\omega a_+$

$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$a^*|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$\frac{1}{\sqrt{n!}} a^{*n}|0\rangle = |n\rangle$, $H = \hbar\omega(\underbrace{a^*a}_{\text{operátor počtu kvant } \hat{n}} + \frac{1}{2})$, $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$

bosony: každé částici přísluší kreační a anihilační operátor

$\phi_k \to a_k, a_k^*$

a_k, a_k^* mění hodnotu obsazovacího čísla

$$a_k^* |m_1, \dots, m_k, \dots, m_N; S\rangle = \sqrt{m_k+1}\, |m_1, \dots, m_k+1, \dots, m_N; S\rangle$$

$\Rightarrow$ komutační relace $[a_k^*, a_\ell^*] = 0$, $[a_k, a_\ell^*] = \delta_{k\ell}$

$$[a_k, a_\ell] = 0$$

$$a_k |0\rangle = 0$$

$$|m_1, \dots, m_N; S\rangle = \frac{1}{\sqrt{m_1! \dots m_N!}}\, a_1^{*m_1} \dots a_N^{*m_N} |0\rangle$$

Fockův prostor bosonů pak lze psát jako

$$\mathcal{F}_B(\mathcal{H}) = \left[\prod_k \frac{a_k^{*m_k}}{\sqrt{m_k!}} |0\rangle \;\Big|\; \sum_k m_k < \infty\right]_\lambda$$

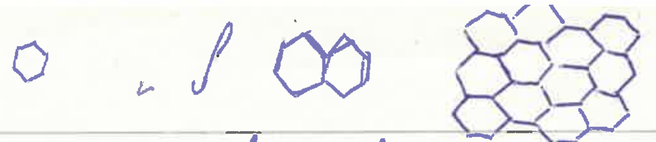
$\hat{N}_k := \hat{a}_k^* \hat{a}_k$ - op. počtu částic v módu k

$$N_k |m_1, \dots, m_k, \dots, m_N; S\rangle = m_k |m_1, \dots, m_k, \dots, m_N; S\rangle$$

$$[N_k, a_\ell] = a_k^*[a_k, a_\ell] + [a_k^*, a_\ell]\, a_k = -\hat{a}_k \delta_{k\ell}$$

$$[N_k, a_\ell^*] = a_\ell^* \delta_{k\ell}$$

Op. celkového počtu částic $N := \sum_{k=1}^{N} N_k$



fermiony – antisymetrické stavy

komutační relace → antikomutační relace

$$|\phi_k\rangle \to b_k, b_k^*$$

$$b_k^* |n_1, \ldots, 0_k, \ldots, n_N, A\rangle := (-1)^{\sum_{j=1}^{k-1} n_j} |n_1, \ldots, 1_k, \ldots, A\rangle$$

$$b_k^* |n_1, \ldots, 1_k, \ldots, A\rangle = 0$$

$$b_k^* |n_1, \ldots, n_k, \ldots, A\rangle = \begin{cases} 0, & n_k = 0 \\ (-1)^{\sum_{j=1}^{k-1} n_j} |n_1, \ldots, n_k - 1, \ldots, A\rangle \end{cases}$$

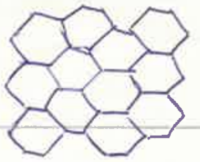
$$\Rightarrow \{b_k^*, b_l^*\} = 0, \quad \{b_k, b_l\} = 0$$

$$\{b_k^*, b_l^*\} = \delta_{kl}$$

$$|n_1, \ldots, A\rangle = \underbrace{b_1^{*n_1} \ldots b_k^{*n_k}}_{\text{záleží na pořadí}} \ldots |0\rangle$$

$n_k = 0 \vee n_k = 1$

$$\mathcal{F}_A(\mathcal{H}) = \left[\prod_k b_k^{*n_k} |0\rangle \;\middle|\; \sum_k n_k < \infty \right]_\lambda$$



Pozorovatelné

T působí na $\mathcal{H}$ (jednočásticový prostor)

$$T = \sum_{k,k'} \langle \phi_k | T | \phi_{k'} \rangle |\phi_k\rangle\langle\phi_{k'}|$$

~~Rozšíření~~

Rozšíření na N částic (identické)

$$T^{(1)} = \sum_{k=1}^{N} I \otimes \dots \otimes I \otimes T \otimes I \otimes \dots \otimes I$$

k-tá pozice

$P = A/S$ (Fermiony, bosony)

$$\hat{T}^{(1)} \hat{P} |\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_N}\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{l_i} \langle \phi_{l_i} | T | \phi_{k_i} \rangle \hat{P} |\phi_{k_1}, \dots, \phi_{l_i}, \dots \phi_{k_N}\rangle$$

Rozšíření na Fockův prostor

Kreační op. $\hat{c}_k^*$, anihilační $\hat{c}_k$

$$\boxed{T^{(1)} = \sum_{k,k'} \langle \phi_k | T | \phi_{k'} \rangle c_k^* c_{k'}}$$