

Tomáš Ryčl

Zápisky z Matematické Statistiky

(01MAST na FJFI ČVUT)

verze beta (revision 14), 2007-01-05

Úvodník:

Toto jsou moje zápisky z předmětu Matematická Statistika (01MAST) na FJFI ČVUT v zimním semestru 2005/2006 a 2006/2007. Důvod jejich vzniku je prostý – chtěl jsem se předmět naučit a to mi jde nejlépe tak, že napíšu vlastní „skripta“.

Dokument vznikl pro moje vlastní potřeby, protože se mi z něj lépe učí, než z načmáraných poznámek z přednášek. Navíc lze využít i výhody elektronického dokumentu – vyhledávání a křížové odkazy.

Dokument prozatím neprošel žádnou korekturou ani není úplně kompletní – používejte ho pouze na vlastní riziko. Pokud v něm najdete chybu, případně byste chtěli něco doplnit nebo upravit, neváhejte a pište na můj e-mail. Opravy se pokusím zahrnout do další verze.

Licence:

Dokument lze libovolně šířit a upravovat, pokud zachováte nezměněný tento úvodník a tuto licenci. Zdrojový text, vytvořen v programu Microsoft Word 2003 s pluginem MathType, zašlu na požádání.

Tomáš Ryčl, trycl@volny.cz
<http://gv.iq6000.web4u.cz>

1	KLASICKÁ PRAVDĚPODOBNOST	7
1.1	PŘÍKLAD: 2 HODY KOSTKOU	7
1.2	ZÁKLADNÍ KOMBINATORICKÉ VZORCE	7
1.2.1	Uspořádaný výběr (VARIACE s opakováním).....	7
1.2.2	Uspořádaný výběr (VARIACE bez opakování).....	8
1.2.3	Neuspořádaný výběr (KOMBINACE bez opakování).....	8
1.2.4	Neuspořádaný výběr (KOMBINACE s opakováním)	8
1.3	PŘÍKLAD: 6X HOD SYMETRICKOU KOSTKOU.....	8
1.4	PŘÍKLAD: 2N SPORTOVNÍCH DRUŽSTEV ROZDĚLENÉ DO 2 SKUPIN.....	9
1.5	GEOMETRICKÁ PRAVDĚPODOBNOST	9
1.5.1	Příklad: Dva vlaky mají přijet na vykládku zboží.....	10
1.5.2	Příklad: Kořeny kvadratické rovnice	10
2	MATEMATICKÝ MODEL PRAVDĚPODOBNOSTI	11
2.1	NÁHODNÉ JEVI.....	11
2.1.1	Základní operace s jevy.....	12
2.1.2	Věta: Základní pravidla pro počítání s jevy	12
2.2	ARITMETICKÁ DEFINICE PRAVDĚPODOBNOSTI	13
2.2.1	Definice: Pozorovací prostor a Borelovské množiny	13
2.2.2	Věta: Vlastnosti jevů v $\mathcal{A}$	14
2.2.3	Definice: Pravděpodobnost, pravděpodobnostní míra.....	14
2.2.4	Věta: Pravděpodobnost prázdné množiny	14
2.2.5	Věta: Pravděpodobnost konečného množství jevů.....	15
2.2.6	Věta: Pravděpodobnost sjednocení jevů	15
2.2.7	Věta: Porovnávání pravděpodobností pomocí jevů.....	15
2.2.8	Věta: Pravděpodobnost opačného jevu	16
2.2.9	Příklad: 3 hráči s mincí.....	16
3	ZÁVISLÉ A NEZÁVISLÉ JEVI	16
3.1	DEFINICE: PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST	17
3.2	VĚTA: PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST A OBECNÁ PRAVDĚPODOBNOST	17
3.2.1	Příklad: Oči otců a synů.....	17
3.3	POZNÁMKA: PRAVDĚPODOBNOSTNÍ PROSTOR	18
3.4	VĚTA: SOUČINOVÉ PRAVIDLO	18
3.4.1	Příklad: Klobouk s koulemi.....	18
3.5	DEFINICE: ÚPLNÝ SYSTÉM JEVŮ	18
3.6	VĚTA O ÚPLNÉ PRAVDĚPODOBNOSTI	19
3.7	VĚTA: BAYESOVA VĚTA	20
3.7.1	Příklad: Telegrafická zpráva.....	20
3.8	NEZÁVISLÉ JEVI	21
3.8.1	Definice: Nezávislé jevy	21
3.8.2	Příklad: Hody kostkou.....	21
3.8.3	Věta: Nezávislost jevů	21
3.8.4	Věta: Nezávislost opačného jevu	22
3.8.5	Definice: Sdružená nezávislost.....	22
3.8.6	Definice: Párová nezávislost.....	22
3.8.7	Příklad: Jak rozlišit sdruženou a párovou nezávislost	22
4	NÁHODNÁ VELIČINA.....	23
4.1	DEFINICE: NÁHODNÁ VELIČINA	23
4.1.1	Příklad: Hod dvěma kostkami	23
4.2	ZNAČENÍ	24
4.3	VĚTA: VLASTNOSTI NÁHODNÝCH VELIČIN.....	24
4.4	DISTRIBUČNÍ FUNKCE	24
4.4.1	Definice: Distribuční funkce	24
4.4.2	Příklad: 3x házíme mincí.....	24
4.4.3	Příklad: Spojité veličiny – úhel od počátku.....	25
4.4.4	Věta: Vlastnosti distribuční funkce.....	26

4.4.5	Poznámka	29
4.4.6	Poznámka	29
4.4.7	Příklad: 5 tranzistorů, 1 špatný.....	29
4.4.8	Příklad – Pravděpodobnost s distr. funkce.....	29
4.4.9	Poznámka	30
4.5	MNOHOROZMĚRNÁ DISTRIBUČNÍ FUNKCE	30
4.5.1	Definice: Sdružená distribuční funkce.....	30
4.5.2	Věta: Vlastnosti sdružené distribuční funkce.....	30
4.5.3	Definice: Marginální náhodný vektor	31
4.5.4	Definice: Nezávislost náhodných veličin.....	31
4.5.5	Věta: Nezávislost náhodných veličin podle distribuční funkce.....	31
4.5.6	Příklad: Náhodné vektory	32
4.6	DISKRÉTNÍ NÁHODNÉ VELIČINY	33
4.6.1	Definice: Diskrétní rozdělení	33
4.6.2	Definice: Pravděpodobnostní funkce	33
4.6.3	Definice: Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny.....	33
4.6.4	Definice: Alternativní (Bernoulliho) rozdělení.....	34
4.6.5	Definice: Binomické rozdělení	34
4.6.6	Definice: Pascalovo (geometrické) rozdělení.....	35
4.6.7	Definice: Poissonovo rozdělení.....	35
4.7	DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ NÁHODNÉHO VEKTORU	38
4.7.1	Definice: Diskrétní rozdělení vektoru	38
4.7.2	Definice: Multinomické rozdělení	38
4.7.3	Poznámka: Distribuční funkce náhodného vektoru.....	39
4.7.4	Věta: Sdružená a marginální pravděpodobnostní funkce	39
4.7.5	Věta: Nezávislost náhodného vektoru	40
4.7.6	Definice: Podmíněná pravděpodobnostní funkce.....	40
4.8	ABSOLUTNĚ SPOJITÉ NÁHODNÉ VELIČINY	41
4.8.1	Definice: Absolutně spojité rozdělení.....	41
4.8.2	Věta: Vztah f a F	42
4.8.3	Věta: Vztah P a f	42
4.8.4	Poznámka: Vlastnosti hustoty $f_x(x)$	42
4.8.5	Příklad: Přenos signálu	43
4.9	ABSOLUTNĚ SPOJITÉ NÁHODNÉ VEKTORY	44
4.9.1	Definice: Sdružené absolutně spojité rozdělení.....	44
4.9.2	Věta: Marginální hustoty pravděpodobnosti.....	45
4.9.3	Věta: Nezávislost pomocí hustoty pravděpodobnosti	46
4.9.4	Definice: Podmíněná distribuční funkce	47
4.9.5	Věta: Existence podmíněné hustoty náhodné veličiny.....	47
4.9.6	Příklad: Podmíněná hustota náhodné veličiny.....	47
5	FUNKCE NÁHODNÝCH VELIČIN.....	48
5.1	PŘÍKLAD: FUNKCE NÁHODNÝCH VELIČIN – DISKRÉTNÍ VELIČINA.....	48
5.2	PŘÍKLAD: FUNKCE NÁHODNÝCH VELIČIN – SPOJITÁ VELIČINA	49
5.3	VĚTA: FUNKCE NÁHODNÉ VELIČINY	50
5.3.1	Příklad: Funkce náhodné veličiny I.	50
5.3.2	Příklad: Funkce náhodné veličiny II.	51
5.4	FUNKCE VÍCE NÁHODNÝCH VELIČIN	52
5.4.1	Příklad: Rozdělení součtu náhodných veličin	52
5.4.2	Věta: Funkce náhodného vektoru.....	52
5.4.3	Příklad: Funkce náhodného vektoru I.....	53
5.4.4	Příklad: Funkce náhodného vektoru II.....	53
5.4.5	Příklad: Funkce náhodného vektoru III.	53
6	PŘÍKLADY SPOJITÝCH NÁHODNÝCH VELIČIN.....	54
6.1	DEFINICE: ROVNOMĚRNÉ ROZDĚLENÍ	54
6.2	DEFINICE: GAMMA ROZDĚLENÍ.....	54
6.3	DEFINICE: NORMÁLNÍ (GAUSOVO) ROZDĚLENÍ.....	55
6.3.1	Definice: Standardní normální rozdělení.....	56
6.3.2	Věta: Vlastnosti standardního normálního rozdělení.....	56

6.3.3	Věta: Vztah standardní a obecné distr. fce normálního rozdělení	56
6.3.4	Věta: (Ne)linearita normálního rozdělení	57
6.3.5	Příklad: Normální rozdělení I	57
6.3.6	Příklad: Normální rozdělení – pravděpodobnosti různých rozptylů	58
6.4	DEFINICE: LOGARITMICKO-NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ	58
6.5	DEFINICE: EXPONENCIÁLNÍ ROZDĚLENÍ	58
6.5.1	Definice: Piersenovo rozdělení	59
6.6	DEFINICE: STUDENTOVO ROZDĚLENÍ	59
6.7	DEFINICE: FISCHEROVO ROZDĚLENÍ	60
7	CHARAKTERISTIKY NÁHODNÝCH VELIČIN	60
7.1	STŘEDNÍ HODNOTA	60
7.1.1	Definice: Střední hodnota diskrétního rozdělení	60
7.1.2	Definice: Střední hodnota spojitého rozdělení	60
7.1.3	Věta: Střední hodnota funkce náhodné veličiny	60
7.1.4	Poznámka: Střední hodnota funkce náhodného vektoru	61
7.1.5	Věta: Sčítání středních hodnot	61
7.1.6	Věta: Násobení střední hodnoty konstantou	62
7.1.7	Tvrzení: Střední hodnota konstanty	62
7.1.8	Důsledek: Linearita střední hodnoty	62
7.1.9	Věta: Násobení střední hodnoty	62
7.2	MOMENTY NÁHODNÝCH VELIČIN	63
7.2.1	Definice: Obecný a centrální moment	63
7.2.2	Poznámka: Několik triviálních momentů	63
7.2.3	Definice: Rozptyl a směrodatná odchylka	63
7.2.4	Věta: Výpočet rozptylu	64
7.2.5	Věta: (Ne)linearita rozptylu	64
7.2.6	Věta: Součet rozptylů	64
7.2.7	Příklad: Střední hodnota a rozptyl binomického rozdělení	64
7.2.8	Příklad: Střední hodnota a rozptyl normálního rozdělení	65
7.2.9	Definice: Koeficient šikmosti a špičatosti	66
7.3	MOMENTY NÁHODNÝCH VEKTORŮ	66
7.3.1	Definice: Kovariance náhodných veličin	66
7.3.2	Věta: Výpočet kovariance	66
7.3.3	Definice: Koeficient korelace	66
7.3.4	Věta: Vlastnosti koeficientu korelace	67
7.3.5	Definice: Nekorelované náhodné veličiny	68
7.3.6	Věta: Vztah nekorelovaných a nezávislých náhodných veličin	68
7.3.7	Příklad: Nezávislost, nekorelovanost náhodných veličin I	68
7.3.8	Poznámka: Vlastnost koeficientu korelace	69
7.3.9	Definice: Kovarianční matice	69
7.4	KVANTITY NÁHODNÉ VELIČINY	70
7.4.1	Definice α -kvantilu	70
7.4.2	Příklady α -kvantilů	70
7.5	CHARAKTERISTICKÁ A MOMENTOVÁ FUNKCE	70
7.5.1	Definice: Charakteristická funkce	70
7.5.2	Definice: Momentová vytvářející funkce	70
7.5.3	Věta: Výpočet momentů z momentové vytvářející funkce	71
7.5.4	Příklad: Momentová vytvářející funkce s Poissonovým rozdělením	71
7.5.5	Příklad: Momentová vytvářející funkce s normálním rozdělením	71
7.5.6	Příklad: Momentová vytvářející funkce s Gamma rozdělením	72
7.5.7	Poznámka: Vztah momentové vytvářející a distribuční funkce	72
7.5.8	Věta: Linearita momentové vytvářející funkce	72
7.5.9	Věta: Součet MVF	72
8	LIMITNÍ VĚTY	73
8.1	DEFINICE: KONVERGENCE PODLE PRAVDĚPODOBNOSTI	73
8.2	VĚTA: ČEBYŠEVOVA NEROVNOST	73
8.3	VĚTA: ZÁKON VELKÝCH ČÍSEL	74
8.4	PŘÍKLAD: PRAVDĚPODOBNOST MNOHA HODŮ MINCÍ	74

8.5	DEFINICE: KONVERGENCE V DISTRIBUCI	74
8.6	VĚTA: CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA (CLV) (LINDBERG – LEVI)	75
8.7	VĚTA: MOUVRE – LAPLACE 1718	75
8.8	POUŽITÍ CENTRÁLNÍCH LIMITNÍCH VĚT	75
8.8.1	Příklad: Správné množství cestujících na lodi	75
8.8.2	Příklad: 1000 hodů mincí.....	76
9	MATEMATICKÁ STATISTIKA	76
9.1	DEFINICE: NÁHODNÝ VÝBĚR	76
9.2	DEFINICE: STATISTIKA.....	77
9.2.1	Příklady statistik.....	77
9.3	ODHADY PARAMETRŮ.....	77
9.3.1	Definice: Bodový odhad	77
9.3.2	Definice: Nestrannost odhadu.....	77
9.3.3	Definice: Konzistentnost odhadu.....	78
9.3.4	Věta: Podmínka konzistence a nestrannosti	78
9.3.5	Definice: Nejlepší nestranný odhad	78
9.3.6	Poznámka: Rao-Cramerova mez.....	79
9.3.7	Poznámka: Příklady nejlepších nestranných odhadů.....	79
9.4	METODA MOMENTŮ	79
9.4.1	Definice: r-tý výběrový moment	79
9.4.2	Definice: Metoda momentů	79
9.4.3	Příklad: Odhad parametrů na základě momentů I.....	79
9.4.4	Příklad: Odhad parametrů na základě momentů II.....	80
9.5	MAXIMÁLNĚ VĚROHODNÉ ODHADY	81
9.5.1	Příklad: Maximálně věrohodné odhady I – Motivační příklad	81
9.5.2	Definice: Věrohodnostní funkce	81
9.5.3	Definice: Maximálně věrohodný odhad	81
9.5.4	Poznámka: Postup výpočtu maximálně věrohodného odhadu	82
9.5.5	Příklad: Organismy pod mikroskopem.....	82
9.5.6	Příklad: Odhad parametrů normálního rozdělení.....	83
9.6	INTERVALOVÉ ODHADY	83
9.6.1	Definice: Interval spolehlivosti	84
9.6.2	Poznámka: Obvyklé intervaly spolehlivosti.....	84
9.6.3	Poznámka: Jednostranné odhady.....	84
9.6.4	Věta: Určení intervalového odhadu	84
9.6.5	Příklad: Životnost žárovek	85
9.6.6	Příklad: Měření hloubky	85
9.7	TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ	85
9.7.1	Příklad: Přejmutí dodávky	85
9.7.2	Příklad: Zlepšení výrobního procesu	86
9.7.3	Poznámka: Matematický popis testování hypotéz	86
9.7.4	Testy hypotéz versus Intervalové odhady	87
9.7.5	Testy o parametrech normálního rozdělení – střední hodnota.....	88
9.7.6	Testy o parametrech normálního rozdělení – rozptyl.....	90
9.7.7	Testy o parametrech normálního rozdělení – rovnost stř. hodnot.....	90
9.7.8	Testy o parametrech normálního rozdělení – rovnost rozptylů.....	91
9.7.9	χ^2 test dobré shody.....	92

1 Klasická pravděpodobnost

Pokus, hra – konečný počet n vzájemně se vylučujících výsledků. Všechny výsledky jsou stejně možné (symetrická kostka, homogenita). Má-li m z těchto výsledků za následek realizaci jevu A a zbytek $n - m$ tento jev vylučuje.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{počet jevů příznivých}}{\text{počet případů možných}}$$

Nedokonalosti:

- Jak spočítat pravděpodobnost na nesymetrické kostce.
- Co když počet výsledků $\rightarrow \infty$ nebo je rovnou ∞ .
- Logický kruh: říkáme, že všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné a pak definujeme pravděpodobnost

1.1 Příklad: 2 hody kostkou

Jev: A : součet hodů = 9 $P(A) = ?$
 B : součet hodů = 10 $P(B) = ?$

$n = 6 \cdot 6 = 36$ - Počet možností ve dvou hodech šestistrannou kostkou.

Jev A lze hodit těmito kombinacemi: $\{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\}$, celkem $m_A = 4$ případy.

Jev B lze hodit těmito kombinacemi: $\{(5, 5), (4, 6), (6, 4)\}$, celkem $m_B = 3$ případy.

$$\text{Tzn. } P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \doteq 0,111 = 11,1\%, \quad P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \doteq 0,083 = 8,3\%$$

1.2 Základní kombinatorické vzorce

Nechť A je skupina n různých prvků, očíslvány $1 \dots n$.

1.2.1 Uspořádaný výběr (VARIACE s opakováním)

- záleží na pořadí, prvky vracíme
- z množiny A vybíráme k -krát po jednom prvku, vybrané prvky vracíme (vyberu k -krát jeden prvek z n a pak ho tam vrátím)

$$V'(k, n) = n^k$$

1.2.2 Uspořádaný výběr (VARIACE bez opakování)

- záleží na pořadí, prvky nevracíme
- vybíráme k -krát

$$V(k, n) = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = n^{(k)}$$

1.2.3 Neuspořádaný výběr (KOMBINACE bez opakování)

- počet k -prvkových podmnožin, které lze vybrat z A

$$K(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.2.4 Neuspořádaný výběr (KOMBINACE s opakováním)

- počet k -prvkových podmnožin, které lze vybrat z A tak, že každý prvek se může opakovat nejvýše k -krát

$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}$$

1.3 Příklad: 6x hod symetrickou kostkou

Definujeme jevy:

- A : Nepadne ani jednou 6

$$P(A): \quad n(A) = 5^6, \quad m(A) = 5^6, \quad P(A) = \frac{5^6}{6^6} = \frac{15625}{46656} \doteq 0,3349$$

- B : Padne alespoň jedna 6

$$P(B): \quad P(B) = 1 - P(A) \doteq 0,6651$$

- C : Padne právě jedna 6

$$P(C): \quad n(C) = 6 \cdot 5^5, \quad m(C) = 6 \cdot 5^5, \quad P(C) = \frac{6 \cdot 5^5}{6^6} = \frac{3125}{7776} \doteq 0,4019$$

- D : Padne nejvýše jedna 6

$$P(D): \quad P(D) = P(A) + P(C) \doteq 0,7368$$

- E : Padne více než jedna 6

$$P(E): P(E) = 1 - P(D) \doteq 0,2632$$

1.4 Příklad: $2n$ sportovních družstev rozdělené do 2 skupin

Hledáme pravděpodobnost, že 2 nejsilnější družstva jsou

a) V jiné skupině

$$P = \frac{\binom{2}{1} \binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = 2 \frac{\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = \frac{n}{2n-1}$$

b) Ve stejné skupině

$$P = \frac{\binom{2}{2} \binom{2n-2}{n-2} + \binom{2}{0} \binom{2n-2}{n}}{\binom{2n}{n}} = 2 \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = 2 \frac{\frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = \frac{n-1}{2n-1}$$

Postup řešení: máme $2n$ sportovních družstev. Družstva rozdělíme rovnoměrně, tedy v každé skupině bude n družstev. Do jedné skupiny tedy vybíráme n družstev z celkových $2n$ možných. Počet kombinací jak to udělat nám udává číslo $2n$ nad n .

Nyní budu pracovat pouze s jednou skupinou. Druhá přirozeně tvoří doplněk té první.

- Nejsilnější družstva jsou dvě. Pravděpodobnost, že do skupiny vyberu jedno družstvo ze dvou je 2 nad 1. Skupinu pak doplním dalšími družstvy, kterých je celkem $2n-2$, (bez dvou nejsilnějších,) a potřebuji ještě $n-1$ družstev (abych měl v jedné skupině celkem n). To znamená, že mám ještě $n-1$ nad $2n-2$ možností.
- Můžou nastat celkem 2 možnosti, které se doplňují: Buď budou ve skupině obě nejsilnější družstva a nebo tam nebude ani jedno (obě budou ve druhé skupině). Když tam budou obě tak vybírám 2 družstva ze 2, tedy 2 nad 2. Už mám ve skupině 2 družstva, takže ji potřebuji ještě doplnit $n-2$ družstvy z $2n-2$ abych měl celkem n . Vybírám je stejně jako v předchozích případech, takže možností je $n-2$ nad $2n-2$. Jiná situace nastane, když ve skupině nebude ani jedno nejsilnější družstvo (2 nad 0). Potom musím do skupiny vybrat n družstev ze skupiny $2n-2$.

Kombinatorika vyžaduje na vysvětlení mnoho slov. Pokud jste předchozí text moc nepochopili, tak nejste sami. Zkuste si ho přečíst ještě jednou a pak se zkuste převtělít do pozice komise která má rozumě sestavit vyvážené skupiny na světový šampionát, kde ze skupiny postupuje pouze jeden. Řekněme, že se skupiny nelosují, ale zkoušíme je ručně sestavit tak, aby se ve stejné skupině nemohly objevit dva nejsilnější týmy.

1.5 Geometrická pravděpodobnost

- Můžeme připustit mnoho výsledků pokusů

Je-li výsledek pokusu stejně pravděpodobný v každém bodě nějakého geometrického objektu (úsečka, čtverec, krychle) pak pravděpodobnost jevu B definujeme jako podíl velikosti množiny bodů S_B příznivých jevu B a velikosti celého objektu S .

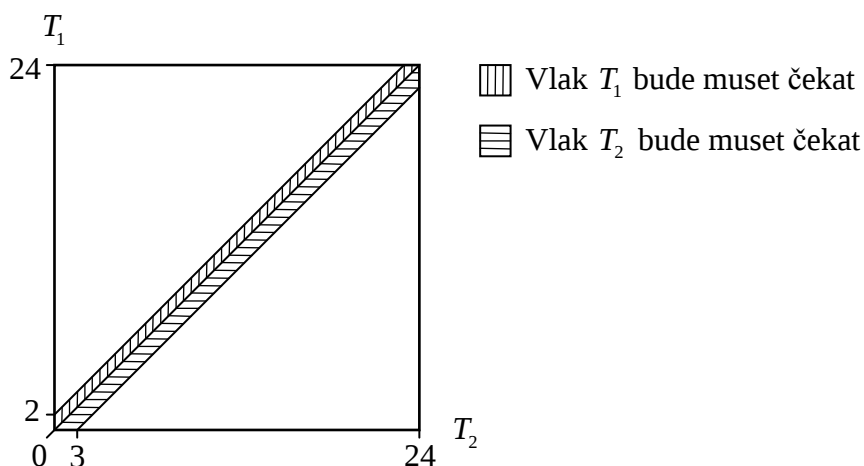
$$P = \frac{S_B}{S}$$

1.5.1 Příklad: Dva vlaky mají přijet na vykládku zboží.

Jedí nezávisle na tom druhém, kdykoli během dne (pravděpodobnost je homogenní). Jaká je pravděpodobnost, že jeden z vlaků bude muset čekat, jestliže vykládka 1. vlaku trvá 2 hodiny a 2. vlaku 3 hodiny.

T_i - Čas příjezdu i -tého vlaku, $i \in \{1; 2\}$,

1. vlak bude čekat, když $T_2 \leq T_1 < T_2 + 3$; 2. vlak bude čekat když $T_1 \leq T_2 < T_1 + 2$



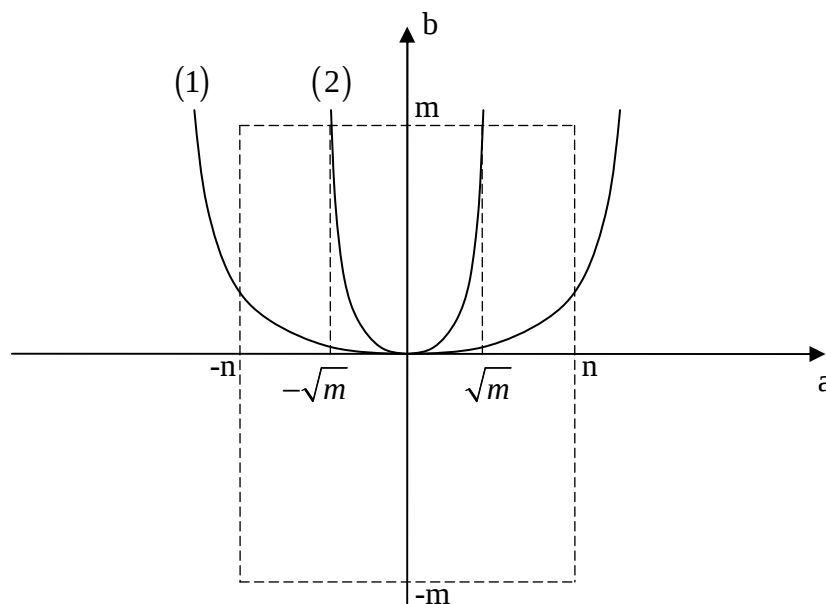
Tzn. Potřebujeme spočítat obsah šrafované oblasti vůči celému obsahu čtverce.

$$P = \frac{24^2 - \frac{(24-2)^2}{2} - \frac{(24-3)^2}{2}}{24^2} = 1 - \frac{1}{24^2} \left(22 \cdot 11 + \frac{21^2}{2} \right) = \underline{\underline{0,197}}$$

1.5.2 Příklad: Kořeny kvadratické rovnice

Určete pravděpodobnost, že kořeny kvadratické rovnice $x^2 + 2ax + b = 0$ jsou reálné, jestliže jsou stejně možné hodnoty koeficientů $|a| \leq n$; $|b| \leq m$.

$$D = 4a^2 - 4b \geq 0$$



Tedy celý obsah čtverce je $4mn$ (čtverec jde od $-n$ do n a od $-m$ do m). Potřebujeme znát plochu pod křivkou až k $-m$. Tzn. Musíme spočítat integrál a přičíst spodní obdélník.

Mohou nastat 2 možnosti:

$$(1) \quad |n| < \sqrt{m}: \quad S_p = \frac{2mn + 2 \int_0^n a^2 da}{4mn} = \frac{2mn + \frac{2}{3}n^3}{mn} = \frac{1}{2} + \frac{n^2}{6m}$$

$$(2) \quad |n| \geq \sqrt{m}: \quad S_p = \frac{2mn + 2m(n - \sqrt{m}) + 2 \int_0^{\sqrt{m}} a^2 da}{4mn} = 1 - \frac{\sqrt{m}}{3n}$$

2 Matematický model pravděpodobnosti

2.1 Náhodné jevy

Označíme Ω množinu všech možných, vzájemně se vylučujících výsledků.

- Ω - Základní pravděpodobnostní prostor.
- Jistý jev (nastane s pravděpodobností 1).

Označíme prvek $\omega \in \Omega$ v jistém smyslu nejjednodušší možný výsledek (padne 1, padne 7, nepadne sudé číslo...).

- ω - Elementární jev.

Příklad: Zákl. pravděpodobnostní prostor a elementární jev

2 hody mincí: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\omega_1 = (H, H)$, $\omega_2 = (H, O)$, $\omega_3 = (O, H)$, $\omega_4 = (O, O)$

Jevem rozumíme sjednocení určitých elementárních jevů A, B, C , platí $A, B, C \subset \Omega$. Jev je množina.

Příklad: Co jsou jevy

Jev A : H padne v 1. hoďu $\Rightarrow A = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Jev B : padne alespoň jedna hlava $\Rightarrow B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

Jev C : padnou alespoň 3 hlavy $\Rightarrow C = \emptyset$

Nastane-li elementární jev $\omega \in \Omega$ a jestliže $\omega \in A$, budeme říkat, že nastal jev A .

Pozn.: Nastane-li A nemusí to znamenat, že nemůže nastat třeba jiný jev. Naopak elementární jevy se vylučují.

Příklad: nastane-li $\omega_1 = (H, H)$ nastane A i B .

2.1.1 Základní operace s jevy

Základní operace s jevy jsou stejné, jako operace s množinami:

- 1) **Komplementární** (opačný) jev: A^C k jevu A . Nastane právě tehdy, když nenastane A .

$$A^C = \Omega - A$$

- 2) **Sjednocení** jevů $A_1 \dots A_n$ rozumíme jev, který nastane $\Leftrightarrow$ nastane alespoň jeden z jevů $A_1 \dots A_n$.

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \text{ nebo } \bigcup_{j=1}^n A_j$$

- 3) **Průnikem** jevů $A_1 \dots A_n$ rozumíme jev, který nastane $\Leftrightarrow$ nastávají všechny jevy $A_1 \dots A_n$.

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \text{ nebo } \bigcap_{j=1}^n A_j$$

Pozn.: někdy zkráceně $A \cap B = AB$

- 4) Pokud $A \cap B = \emptyset$, tedy jevy A a B nemohou nastat současně, nazýváme je **disjunktní** (neslučitelné).

Řekneme, že systém jevů $A_1 \dots A_n$ je disjunktní, pokud $A_i \cap A_j = \emptyset$, pro $\forall i, j \quad i \neq j$.

Pozn.: Pro disjunktní jevy značíme sjednocení $A \cup B$ jako $A + B$ a $\bigcup_{j=1}^n A_j$ jako $\sum_{j=1}^n A_j$.

- 5) Řekneme, že jev A **implikuje** jev B (jev A má za následek jev B) jestliže jev B nastane vždy, když nastane jev A .

$$A \subset B$$

2.1.2 Věta: Základní pravidla pro počítání s jevy

Pro všechny jevy $A, B, C \subset \Omega$ platí:

- 1) $A \subset A$
- 2) $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- 3) $A \cap A = A, A \cup A = A$
- 4) $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
- 5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- 6) $\emptyset \subset A \subset \Omega$
- 7) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$
- 8) $\emptyset \cap A = \emptyset; A \cap \Omega = A; A \cup \emptyset = A; A \cup \Omega = \Omega$
- 9) $(A^c)^c = A$
- 10) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c; (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- 11) $A \cup B = A + B \cap A^c$
- 12) $B = (A \cap B) + (A^c \cap B)$

Pozn.: Funguje i distributivnost.

Důkaz: Rovnost dvou množin – ukázat, že jedna je podmnožina druhé a druhá je podmnožina první.

např. 10b: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$, libovolný $\omega \in (A \cap B)^c$
 $\Rightarrow \omega \notin A \cap B \Rightarrow \omega \notin A \vee \omega \notin B \Rightarrow \omega \in A^c \vee \omega \in B^c \Rightarrow \omega \in A^c \cup B^c$
- $(A \cap B)^c \supset A^c \cup B^c$, libovolný $\omega \in A^c \cup B^c$
 $\Rightarrow \omega \in A^c \rightarrow \omega \notin A \rightarrow \omega \notin A \cap B \rightarrow \omega \in (A \cap B)^c$

2.2 Axiomatická definice pravděpodobnosti

Ω - množina všech možných, vzájemně se vylučujících výsledků
 $\omega \in \Omega$ - elementární jevy

2.2.1 Definice: Pozorovací prostor a Borelovské množiny

Nechť je dána neprázdná množina Ω a systém $\mathcal{A}$ podmnožin množiny Ω , pro který platí:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega - A \in \mathcal{A}$
3. $A_1, A_2, A_3 \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Potom systém $\mathcal{A}$ nazýváme σ -**algebrou** a prvky systému $\mathcal{A}$ nazýváme **jevy (náhodné jevy)**.
Dvojici $(\Omega, \mathcal{A})$ nazýváme **pozorovací prostor**.

Nechť $\Omega = \mathbb{R}$. Potom nejmenší systém množin obsahující všechny intervaly v $\mathbb{R}$ nazýváme systémem (σ -algebrou) **borelovských množin** a značíme $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, zkráceně $\mathcal{B}$.

2.2.2 Věta: Vlastnosti jevů v $\mathcal{A}$

1. Nemožný jev je prvkem $\mathcal{A}$, tj. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Necht' $A_1, \dots, A_n$ je konečná posloupnost jevů z $\mathcal{A}$. Potom platí: $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$
3. Necht' $A_1, A_2, \dots$ je posloupnost jevů z $\mathcal{A}$. Potom $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

Důkaz:

1. $\emptyset^C = \Omega \in \mathcal{A}$, z věty 2.1.2 $\emptyset = (\emptyset^C)^C \in \mathcal{A}$
2. def. $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$, $A_i \in \mathcal{A}$, $\forall i \geq n+1$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, vyplývá z 2.2.1.
3. $A_i^C \in \mathcal{A}$, $\forall i$; $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$

Poznámka: Volba systému $\mathcal{A}$ závisí na konkrétní situaci. Ne vždy je vhodné volit systém všech podmnožin množiny Ω .

2.2.2.1 Příklad: Hod kostkou

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \exp \Omega$ (množina všech podmnožin).

Například, když nás zajímá sudé/liché: stačí volit $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ - platné axiomy. Pravděpodobnosti jsou $p \rightarrow 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

2.2.3 Definice: Pravděpodobnost, pravděpodobnostní míra

Necht' $(\Omega, \mathcal{A})$ je pozorovací prostor. Funkci $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$
3. $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, pro $\forall A_i \in \mathcal{A}$ (disjunktní)

nazýváme **pravděpodobnostní mírou (funkcí, pravděpodobností)** na systému $\mathcal{A}$ a trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nazýváme **pravděpodobnostní prostor**.

2.2.4 Věta: Pravděpodobnost prázdné množiny

$$P(\emptyset) = 0$$

Důkaz: def. $A_1, A_2, \dots = \emptyset$, A_i jsou disjunktní

$$P(\emptyset) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset),$$

Tzn, nějaké reálné číslo se rovná nekonečnému součtu sebe sama. To platí jedině $P(\emptyset) = 0$.

2.2.5 Věta: Pravděpodobnost konečného množství jevů

Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou disjunktní jevy z $\mathcal{A}$. Potom platí:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Důkaz: adaptace bodu 3. def. 2.2.3 na konečný počet prvků. Doplníme konečné množství jevů na nekonečné pomocí prázdných množin (prázdné množiny jsou disjunktní).

2.2.6 Věta: Pravděpodobnost sjednocení jevů

Pro libovolné jevy $A, B \in \mathcal{A}$ platí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Důkaz: vycházíme z definice a ze zákl. věty o počítání s jevy (2.1.2)

$$A \cup B = A + (B \cap A)^c$$

$$A \cup B = A + BA^c$$

$$\underline{P(A \cup B) = P(A + BA^c) = P(A) + P(BA^c)}$$

$$\text{rozklad } B = AB + A^c B$$

$$P(B) = P(AB) + P(BA^c) \Rightarrow \underline{P(BA^c) = P(B) - P(AB)}$$

$$\Rightarrow \underline{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$

Důsledek: Pro libovolné $A, B \in \mathcal{A}$ platí $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

2.2.7 Věta: Porovnávání pravděpodobností pomocí jevů

Jestliže $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{A}$, potom

$$P(A) \leq P(B)$$

Důkaz: vycházíme z definice a ze zákl. věty o počítání s jevy (2.1.2)

$$B = AB + A^c B$$

$$A \cap B = A$$

$$B = A + A^c B$$

$$P(B) = P(A) + P(A^c B) \geq P(A)$$

Důsledek: Pro každý jev $A \in \mathcal{A}$ platí $P(A) \leq 1$.

2.2.8 Věta: Pravděpodobnost opačného jevu

Pro libovolný jev $A \in \mathcal{A}$ platí

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Důkaz: $\Omega = A \cup A^c = A + A^c$, $1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$, $P(A^c) = 1 - P(A)$

2.2.9 Příklad: 3 hráči s mincí

Tři hráči hází postupně mincí. Vyhrává ten, komu padne nejdříve orel. Jaká je pravděpodobnost výhry jednotlivých hráčů?

A_i - jev, že první hráč vyhraje ve svém i -tém tahu.

A - jev, že vyhraje 1. hráč

Stejně platí B_i , B a C_i , C pro 2. a 3. hráče.

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \text{ jevy } A_i \text{ jsou disjunktní.}$$

Pravděpodobnost úspěchu při hodu je $1/2$, stejně tak neúspěchu. Pravděpodobnosti pro jednotlivé hody 1. hráče jsou tedy:

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}, \dots, P(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3i-2}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3i-2} = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3i}} = \underline{\underline{\frac{4}{7}}}$$

Druhý hráč hází až po prvním který musí neuspět s pravděpodobností $1/2$.

$$P(B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, P(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}, \text{ atd...}$$

je vidět, že se jedná o $1/2$ pravděpodobnosti prvního hráče:

$$P(B) = 1/2 \cdot P(A) = \underline{\underline{\frac{2}{7}}}$$

Třetí hráč uzavírá celou množinu, tedy: $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$

3 Závislé a nezávislé jevy

Příklady:

- a) Pravděpodobnost, že student dokončí studium, když dokončil 1. ročník.
- b) Pravděpodobnost, že student dokončí studium, obhájil výzkumný úkol.

3.1 Definice: Podmíněná pravděpodobnost

Nechť $A, B \in \mathcal{A}$. $P(B) > 0$. Potom **podmíněnou pravděpodobností** jevu A za podmínky, že nastal jev B rozumíme číslo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

3.2 Věta: Podmíněná pravděpodobnost a obecná pravděpodobnost

Nechť jsou dány jevy $A, B \in \mathcal{A}$. $P(B) > 0$. Potom $P(A|B)$ je pravděpodobnostní mírou na $\mathcal{A}$.

Důkaz: $P(A|B)$ splňuje definici pravděpodobnostní míry na $\mathcal{A}$:

$$a) \quad P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$b) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$$

$$c) \quad P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \frac{P\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i \cap B\right)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

3.2.1 Příklad: Oči otců a synů

Ze statistik vyplývá že X% otců má syny:

5%	Tmavookých otců (TO)	Tmavookého syna (TS)
7,9%	TO	Světlookého syna (SS)
8,9%	Světlookých otců (SO)	TS
78,2%	SO	SS

Jaká je pravděpodobnost, že TO bude mít TS ?

$$P(TS|TO) = \frac{P(TS \cap TO)}{P(TO)} = \frac{0,05}{0,05 + 0,079} = \frac{5}{129} = \underline{\underline{0,388}}$$

3.3 Poznámka: Pravděpodobnostní prostor

V modelu $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nahradíme míru $P(A)$ mírou $P(A|B)$, která lépe odpovídá našemu experimentu.

3.4 Věta: Součinnové pravidlo

Nechť $A_0, A_1, \dots, A_n$ jsou jevy z $\mathcal{A}$ takové, že $P(A_0 A_1 \dots A_{n-1}) > 0$. Potom platí:

$$P(A_0 A_1 \dots A_n) = P(A_0) \cdot P(A_1 | A_0) \cdot P(A_2 | A_0 \cap A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_0 A_1 \dots A_{n-1})$$

Důkaz: Jevy jsou množiny. Víme tedy, že průnik množin je podmnožina jedné z nich:

$$A_0 \supset A_0 A_1 \supset A_0 A_1 A_2 \supset \dots \supset A_0 A_1 \dots A_n$$

Pokud problém převedeme na pravděpodobnosti podle věty 2.2.7:

$$P(A_0) \geq P(A_0 A_1) \geq P(A_0 A_1 A_2) \geq \dots \geq P(A_0 A_1 \dots A_n)$$

Nyní využijeme definici podmíněné pravděpodobnosti 3.1 a důkaz provedeme matematickou indukcí:

- 1) $n=1$, $P(A_0 A_1) = P(A_0) \cdot P(A_1 | A_0)$
- 2) $(n-1) \rightarrow n$, $P(A_0 A_1 \dots A_n) = P(A_0 A_1 \dots A_{n-1}) \cdot P(A_n | A_0 A_1 \dots A_{n-1})$

3.4.1 Příklad: Koule v klobouku

Máme klobouk, kde je b bílých a c černých koulí. Vytáhneme jednu, zapamatujeme si její barvu, a vrátíme ji. Do klobouku přidáme k dalších koulí stejné barvy. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme ve třech prvních tazích za sebou 3x bílou kouli?

B_i - vytáhneme bílou v i -tém tahu

$$\begin{aligned} P(B_1 B_2 B_3) &= P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) \cdot P(B_3 | B_1 B_2) \\ &= \frac{b}{b+c} \cdot \frac{b+k}{b+c+k} \cdot \frac{b+2k}{b+c+2k} \end{aligned}$$

3.5 Definice: Úplný systém jevů

Nechť $\{B_1, \dots, B_n\}$ je konečná množina jevů z $\mathcal{A}$, pro kterou platí:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ = disjunktní
2. $P(B_i) > 0$, $\forall i$

$$3. \quad P\left(\sum_{i=1}^n B_i\right) = 1$$

Potom množinu $\{B_1, \dots, B_n\}$ nazýváme **úplný systém jevů**.

3.6 Věta o Úplné pravděpodobnosti

Nechť $\{B_1, \dots, B_n\}$ je úplný systém jevů z $\mathcal{A}$ a nechť $A \in \mathcal{A}$. Potom:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Důkaz: Platí $A = AB + AB^C$, takže:

$$A = A\left(\sum_{i=1}^n B_i\right) + A\left(\sum_{i=1}^n B_i\right)^C$$

Jedná se o disjunktí jevy, takže můžeme podle věty o pravděpodobnosti součtu disjunktích jevů 2.2.5 a definice úplného systému jevů 3.5 přejít na pravděpodobnosti takto:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n B_i\right)^C &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^n B_i\right) = 0 \\ P(A) &= P\left(A\sum_{i=1}^n B_i\right) + 0 = P\left(\sum_{i=1}^n AB_i\right) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n \underline{\underline{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}} \end{aligned}$$

3.6.1 Příklad: Další koule v kloboucích

Máme krabici plnou lístečků a dva klobouky plné bílých a černých koulí. V každém klobouku je jiný počet koulí. Na lístečcích v krabici je napsaná buď 1 nebo 2. Vytáhneme lísteček a podle něj budeme losovat kouli buď z 1. nebo z 2. klobouku. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli?

Označíme si koule: V prvním klobouku je b_1 bílých a c_1 černých. V druhém je překvapivě b_2 bílých a c_2 černých. V krabici je n_1 lístečků s jedničkou a n_2 lístečků s dvojkou.

Označíme jevy:

- B_1 - Vytáhnou lísteček s jedničkou.
- B_2 - Vytáhnou lísteček se dvojkou.
- A - Vytáhnou bílou kouli.

Tahání lístečku splňuje podmínky pro úplný systém jevů, takže můžeme použít větu o úplné pravděpodobnosti:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{b_1}{b_1 + c_1} \cdot \frac{n_1}{n_1 + n_2} + \frac{b_2}{b_2 + c_2} \cdot \frac{n_2}{n_1 + n_2}$$

Tento příklad lze samozřejmě řešit i přes počítání všech možností, ale je to mnohem složitější.

3.7 Věta: Bayesova věta

Nechť $\{B_1, \dots, B_n\}$ je úplný systém jevů z $\mathcal{A}$ a nechť $A \in \mathcal{A}$. Potom pro $\forall i \in \hat{n}$ platí:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

(tzn. máme výsledek a potřebujeme zjistit průběh pokusu)

Důkaz: Použijeme znalosti definice podmíněné pravděpodobnosti 3.1 a věty o úplné pravděpodobnosti 3.6:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(A B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

3.7.1 Příklad: Telegrafická zpráva

Přijímáme telegrafickou zprávu „-“. Empiricky bylo zjištěno, že průměrné zkreslení „ $\rightarrow$ -“ je $2/5$. Průměrné zkreslení „- $\rightarrow$ “ je $1/3$. V signálech se tečka a čárka vyskytují v poměru $5/3$. Pokud přijmeme tečku, jaká je pravděpodobnost, že byla tečka opravdu odeslána? Totéž pro čárku.

Označíme si jednotlivé jevy:

A – byla přijata „.“, B – byla přijata „-“, C_1 – byla odeslána „.“, C_2 – byla odeslána „-“.

Co známe? V signálech se tečka a čárka vyskytují v poměru $5/3$, takže:

$$\frac{P(C_1)}{P(C_2)} = \frac{5}{3}, P(C_1) + P(C_2) = 1 \Rightarrow P(C_1) = 5/8, P(C_2) = 3/8$$

Průměrné zkreslení „ $\rightarrow$ -“ je $2/5$, takže: $P(B|C_1) = 2/5$.

Průměrné zkreslení „- $\rightarrow$ “ je $1/3$, takže: $P(A|C_2) = 1/3$.

Nyní dopočteme zbývající pravděpodobnosti (pravděpodobnosti, že signály projdou správně):

$$P(A|C_1) = 1 - P(B|C_1) = 3/5, \quad P(B|C_2) = 1 - P(A|C_2) = 2/3$$

Nyní už stačí pouze dosadit jednotlivé hodnoty do Bayesovy věty:

$$P(C_1|A) = \frac{P(A|C_1) \cdot P(C_1)}{P(A|C_1) \cdot P(C_1) + P(A|C_2) \cdot P(C_2)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{3}{4}$$

Pokud přijmeme tečku, je 75% pravděpodobnost, že byla také odeslána.

$$P(C_2|B) = \frac{P(B|C_2) \cdot P(C_2)}{P(B|C_1) \cdot P(C_1) + P(B|C_2) \cdot P(C_2)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8}} = \frac{1}{2}$$

Pokud přijmeme čárku, je 50% pravděpodobnost, že k nám byla také vyslána.

3.8 Nezávislé jevy

3.8.1 Definice: Nezávislé jevy

Řekneme, že jevy A a B jsou nezávislé, jestliže platí: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3.8.1.1 Poznámka

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$, pokud jevy jsou nezávislé: $P(A|B) = P(A)$

3.8.2 Příklad: Hody kostkou

A - padne sudé číslo, B - padne nejvýše 2, C - padne nejvýše 3

Jsou A , B a A , C nezávislé?

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{1, 2, 3\}$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = \{2\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A \cap C) = \frac{1}{6}, \quad P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{jevy jsou nezávislé}$$

$$P(A \cap C) \neq P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{jevy nejsou nezávislé}$$

3.8.3 Věta: Nezávislost jevů

Jevy $A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) > 0$, jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P(A|B) = P(A)$$

Důkaz: Vystačíme si s definicí podmíněné pravděpodobnosti 3.1 a nezávislosti 3.8.1:

$$\Rightarrow: P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Leftarrow: P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

3.8.4 Věta: Nezávislost opačného jevu

Nechť A, B jsou nezávislé jevy. Potom i jevy A, B^C jsou nezávislé.

Důkaz: Platí $A = AB + AB^C$, pokračujeme:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^C) \\ P(A \cap B^C) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] \\ &= \underline{\underline{P(A) \cdot P(B^C)}} \end{aligned}$$

3.8.5 Definice: Sdružená nezávislost

Řekneme, že jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou **sdruženě nezávislé** pokud:

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

pro všechna $k \leq n$ a všechny konečné výběry $\{i_1 \dots i_k\} \in \hat{n}$

3.8.6 Definice: Párová nezávislost

Řekneme, že jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou **párově nezávislé** pokud:

$$\forall i \neq j: P(A_i A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

3.8.7 Příklad: Jak rozlišit sdruženou a párovou nezávislost

Házíme čtyřstěnem.

$$\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \omega_i \text{ jsou stejně pravděpodobné}$$

Máme jevy

$$A = \{\omega_1, \omega_2\}; B = \{\omega_1, \omega_3\}; C = \{\omega_1, \omega_4\}$$

Pravděpodobnosti jsou

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = P(B) = P(C) = 1/2 \\ P(AB) = P(BC) = P(AC) = 1/4 \end{array} \right\} \Rightarrow A, B, C \text{ jsou párově nezávislé}$$

$$P(ABC) = 1/4 \neq 1/8 = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \Rightarrow A, B, C \text{ nejsou sdruženě nezávislé}$$

Vyplývá to i z logiky příkladu. Pokud totiž nastanou jevy A i B zároveň, tak jev C musí nastat také. Tzn. je závislý na jevu, že nastane A i B zároveň.

4 Náhodná veličina

Náhodná veličina – Každému výsledku přiřadíme číslo, aby se s ním dalo pracovat.

Například:

$$\begin{array}{rcl} \text{tramvaj přijela} & = & 1 \\ \text{tramvaj nepřijela} & = & 0 \\ \hline \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

4.1 Definice: Náhodná veličina

Náhodná veličina je zobrazení $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro $\forall x \in \mathbb{R}$ platí:

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

tzn. vzory všech intervalů $(-\infty, x]$ jsou měřitelné ve smyslu P .

4.1.1 Příklad: Hod dvěma kostkami

Házíme dvěma kostkami, jak nejlépe definovat náhodnou veličinu?

$$\Omega : \begin{array}{ccccc} (1;1) & \dots & \dots & (1;6) \\ (2;2) & \dots & & (2;6) \\ & & \dots & \vdots \\ & & & (6;6) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccccc} (1;1) \\ (2;2) \\ \vdots \\ (6;6) \end{array}} \right\} \text{Tohle vše může nastat s různou pravděpodobností.}$$

$\mathcal{A} = \exp \Omega$ - tj. všechny kombinace Ω .

Můžeme zkusit: $X(i, j) = i + j$ - splňuje definici náhodné veličiny.

Pak se můžeme ptát např. jaká je množina $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 1,3\}$? Tzn. pro jaké množiny Ω je $i + j \leq 1,3$? Atd. např.:

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 1,3\} &= \emptyset \\ \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 2,7\} &= \{(1;1)\} \\ \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 4\} &= \{(1;1), (1;2), (1;3), (2;2)\} \\ \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (3;6)\} &= \{(1;3), (1;4), (2;2), (2;3)\}\end{aligned}$$

4.2 Značení

Množiny zapíšeme zkráceně takto:

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} &\triangleq [X \leq x] \subset \Omega \\ \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in S\} &\triangleq [X \in S] \subset \Omega\end{aligned}$$

4.3 Věta: Vlastnosti náhodných veličin

Nechť X a Y jsou náhodné veličiny. Potom:

1. $X + Y$ je také náhodná veličina
2. kX je také náhodná veličina, $\forall k \in \mathbb{R}$
3. $X \cdot Y$ je také náhodná veličina
4. pokud $[Y = 0] = \emptyset$ potom $X - Y$ je náhodná veličina

$[Y = 0] = \emptyset$ - znamená: pravděpodobnost, že nastane $Y = 0$ je prázdná množina

Důkazy: Tvzení vyplývají z definice funkce...

4.4 Distribuční funkce

Slouží pro popis náhodné veličiny.

4.4.1 Definice: Distribuční funkce

Nechť X je náhodná veličina. Funkci $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0;1 \rangle$ definovanou pro $\forall x \in \mathbb{R}$ předpisem:

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

nazýváme **distribuční funkcí** náhodné veličiny X .

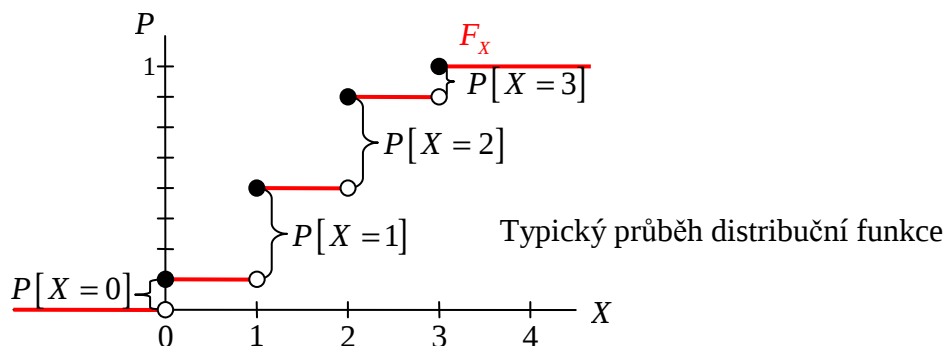
4.4.2 Příklad: 3x házíme mincí

Házíme 3x mincí. Náhodnou veličinu X definujeme jako počet hlav. Celá množina:

$$\Omega = \left(\overbrace{(H, H, H)}^{\omega_1}, (H, H, O), (H, O, O), (O, O, O), (O, H, H), \overbrace{(H, O, H)}^{\omega_3}, (O, H, O), (O, O, H) \right)$$

$$X(\omega_1) = 3, X(\omega_3) = 2, \text{ atd...}$$

$x < 0$	$[X \leq x] = \{\emptyset\}$	$P[X \leq x] = 0$
$0 \leq x < 1$	$[X \leq x] = \{(O, O, O)\}$	$P[X \leq x] = 1/8$
$1 \leq x < 2$	$[X \leq x] = \uparrow \cup \{(O, O, H); (O, H, O); (H, O, O)\}$	$P[X \leq x] = 4/8$
$2 \leq x < 3$	$[X \leq x] = \uparrow \cup \{(H, H, O); (H, O, H); (O, H, H)\}$	$P[X \leq x] = 7/8$
$3 \leq x$	$[X \leq x] = \uparrow \cup \{(H, H, H)\}$	$P[X \leq x] = 1$



4.4.3 Příklad: Spojité veličiny – úhel od počátku

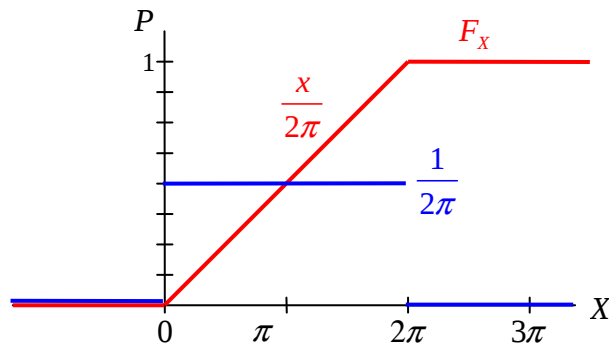
Snažíme se určit, jaká je pravděpodobnost polohy velké hodinové ručičky. Např. že se bude nacházet mezi 2 a 4 hodinou. Samozřejmě předpokládáme, že se ručička pohybuje stále stejně rychle.

$$\Omega = (0, 2\pi), P(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_A(x) dx, \mathcal{A} = \mathcal{B}((0, 2\pi)), A \in \mathcal{A}, \text{ kde } I_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

$$x \leq 0 \quad F_X = P[X \leq x] = 0$$

$$x \in (0, 2\pi) \quad F_X = P[X \leq x] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{(-\infty, x)} dx = \frac{x}{2\pi}$$

$$x > 2\pi \quad F_X = P[X \leq x] = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$



4.4.4 Věta: Vlastnosti distribuční funkce

Nechť X je náhodná veličina a $F_X(x)$ je její distribuční funkce. Potom platí:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
2. pokud $x_1 < x_2$ potom $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$, (F_X je neklesající)
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a+} F_X(x) = F_X(a)$, (F_X je spojitá zprava)
6. funkce F_X má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitostí.

Důkaz:

1. $F_X(x) = P[X \leq x]$ a pravděpodobnost má tyto meze
2. Rozdělíme na 2 disjunktní jevy. Víme, že $x_1 < x_2$ a $F_X(x_2) = P[X \leq x_2]$:

$$\begin{aligned} [X \leq x_2] &= [X \leq x_1] + [x_1 < X \leq x_2] \\ P[X \leq x_2] &= P[X \leq x_1] + P[x_1 < X \leq x_2] \geq P[X \leq x_1] \\ F_X(x_2) &\geq F_X(x_1) \end{aligned}$$

3. Budeme potřebovat definici limity. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ znamená, že:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_\varepsilon > 0) : (\forall x > x_\varepsilon)(F_X(x) > 1 - \varepsilon)$$

Tedy si rozepíšeme Ω na nějaký šikovní součet disjunktních jevů:

$$\begin{aligned} \Omega &= [X \leq 0] + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n-1) < X \leq n] \\ P[\Omega] &= P[X \leq 0] + \sum_{n=1}^{+\infty} P[(n-1) < X \leq n] = 1 \end{aligned}$$

Z toho dále plyne, že suma pravděpodobností konverguje – celý výraz se rovná jedna.

Z této konvergence tedy plyne, že $\exists N_\varepsilon$, tak že pro $\forall n > N_\varepsilon$ platí:

$$P[X \leq 0] + \sum_{i=1}^n P[(i-1) < X \leq i] > 1 - \varepsilon$$

$$P[X \leq n] > 1 - \varepsilon$$

$$F_X(n) > 1 - \varepsilon$$

Zvolíme si $x_\varepsilon > N_\varepsilon + 1$ abychom měli nějaké číslo $> N_\varepsilon$.

Distribuční funkce $F_X(n)$ je neklesající takže pro $x > x_\varepsilon$ platí:

$$\underline{\underline{F_X(x) \geq F_X(x_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon}}$$

No a je to. To jsme potřebovali dokázat. Jak prosté ☺.

4. Vycházíme znovu z definice limity, tentokrát $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_\varepsilon < 0) : (\forall x < x_\varepsilon)(F_X(x) < \varepsilon)$$

Ω si zase rozepíšeme na součet disjunktních jevů:

$$\Omega = [X > 0] + \sum_{n=1}^{+\infty} [-n \leq X < (-n+1)]$$

$$P[\Omega] = P[X > 0] + \sum_{n=1}^{+\infty} P[-n \leq X < (-n+1)] = 1$$

Celý výraz se rovná 1, suma tedy konverguje. Z této konvergence plyne, že $\exists N_\varepsilon$, tak že pro $\forall n > N_\varepsilon$ platí:

$$P[X > 0] + \sum_{i=1}^n P[-i \leq X < (-i+1)] > 1 - \varepsilon$$

$$P[X \geq (-n)] > 1 - \varepsilon$$

$$1 - F_X(-n) > 1 - \varepsilon$$

$$F_X(-n) < \varepsilon$$

Zvolíme si $x_\varepsilon < -N_\varepsilon - 1$ abychom měli nějaké číslo $< -N_\varepsilon$.

Distribuční funkce $F_X(n)$ je neklesající takže pro $x < x_\varepsilon$ platí:

$$\underline{\underline{F_X(x) \leq F_X(x_\varepsilon) \leq \varepsilon}}$$

Jak vidíte postup je skoro stejný jako u bodu 3. To slovo skoro je ale důležité, protože se zápornými výrazy se vždy pracuje intuitivně hůře než s kladnými.

5. Pro důkaz spojitosti zprava ($\lim_{x \rightarrow a+} F_X(x) = F_X(a)$) potřebujeme zase nějakou šikovnou posloupnost jevů.

$$\text{Třeba: } [a < X \leq a+1] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a + \frac{1}{n+1} < X \leq a + \frac{1}{n} \right]$$

Převědeme na pravděpodobnosti a zbavíme se toho otravného nekonečna:

$$P[a < X \leq a+1] = \sum_{n=1}^m P\left[a + \frac{1}{n+1} < X \leq a + \frac{1}{n}\right] + Z(m)$$

$Z(m)$ je funkce která konverguje do nuly a postará se o ten „zbytek“ sčítanců od m do nekonečna.

Nyní pár úprav a dosazení do definice distribuční funkce:

$$\begin{aligned} P[a < X \leq a+1] &= \sum_{n=1}^m P\left[a + \frac{1}{n+1} < X \leq a + \frac{1}{n}\right] + Z(m) \\ P[X \leq a+1] - P[X \leq a] &= P[X \leq a+1] - P\left(X \leq a + \frac{1}{m+1}\right) + Z(m) \\ F_X(a) &= F_X\left(a + \frac{1}{m+1}\right) - Z_m \end{aligned}$$

Nyní provedeme limitní přechod pro $m \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} F_X\left(a + \frac{1}{m+1}\right) = F_X(a) + \lim_{m \rightarrow +\infty} Z(m) = F_X(a)$$

Funkce F_X je monotónní, takže:

$$\underline{\underline{\lim_{x \rightarrow a+} F_X(x) = F_X(a)}}$$

6. Vytáhneme poslední eso z rukávu a budeme sčítat spočetné množiny. Chceme dokázat, že distribuční funkce má maximálně spočetně bodů nespojitosti. Označme tedy S_n množinu všech bodů, kde má F_X skok $\geq \frac{1}{n}$. Takže množina všech skoků je:

$$S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$$

No jo, ale do S_n se vejde maximálně n skoků, protože jinak by byla hodnota F_X vyšší než 1 a to být nemůže (viz. bod 1). To ale znamená, že S_n je spočetná. Pokud ale sčítáme pouze spočetné množiny, můžeme dospět zase jenom ke spočetné množině, takže i S je spočetná.

4.4.5 Poznámka

Pokud reálná funkce splňuje body 1 až 5 předchozí věty 4.4.4, je to distribuční funkce nějaké náhodné veličiny.

4.4.6 Poznámka

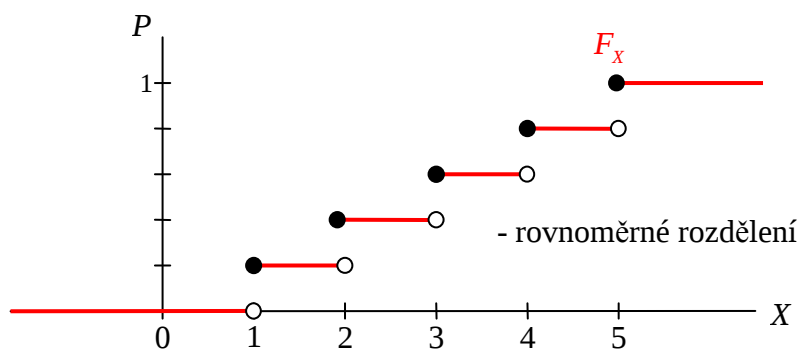
Někdy se definuje distribuční funkce v bodě $x: F_X(x) = P[X < x]$. Potom F_X je spojitá zleva.

4.4.7 Příklad: 5 tranzistorů, 1 špatný

Pět tranzistorový přístroj, jeden tranzistor je porouchaný. Opravář prochází tranzistory a hledá ten špatný. Každý tranzistor si potom odloží.

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, 3, 4, 5\}; & P[X = 1] &= 1/5 \\ & & P[X = 2] &= 4/5 \cdot 1/4 = 1/5 \\ & & P[X = 3] &= 4/5 \cdot 3/4 \cdot 1/3 = 1/5 \\ & & P[X = 4] &= 4/5 \cdot 3/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 = 1/5 \\ & & P[X = 5] &= 4/5 \cdot 3/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) = P[X \leq x] &= 0 & x < 1 \\ &= P[X = 1] = 1/5 & 1 \leq x < 2 \\ &= P[X = 1] + P[X = 2] = 2/5 & 2 \leq x < 3 \\ &= 3/5, \dots \end{aligned}$$



4.4.8 Příklad – Pravděpodobnost s distr. funkce

Náhodná veličina je zadána distribuční funkcí:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 0 & x &\leq 0 \\ &= 1 - e^{-2x} & x &> 0 \end{aligned}$$

Určete pravděpodobnosti:

$$P[1 < X \leq 2] = ? , [1 < X \leq 2] + [X \leq 1] = [X \leq 2] \Rightarrow [1 < X \leq 2] = [X \leq 2] - [X \leq 1]$$

$$P[1 < X \leq 2] = P[X \leq 2] - P[X \leq 1] = F_X(2) - F_X(1) = 1 - e^{-4} - 1 + e^{-2} = \underline{\underline{e^{-2} - e^{-4}}}$$

Takto lze počítat podobné pravděpodobnosti z distribuční funkce:

$$P[-1 < X \leq 2] = F_X(2) - F_X(-1) = 1 - e^{-4} - 0 = \underline{\underline{1 - e^{-4}}}$$

Zkusíme se podívat, jaká je pravděpodobnost v jednom konkrétním bodě:

$$P[X = 1] = ? , [X = 1] + [X < 1] = [X \leq 1] \Rightarrow [X = 1] = [X \leq 1] - [X < 1]$$

$$P[X = 1] = [X \leq 1] - [X < 1] = F_X(1) - \lim_{x \rightarrow 1^-} F_X(x) = F_X(1) - F_X(1) = \underline{\underline{0}}$$

Tzn. pro spojitě rozdělení platí, že pravděpodobnost v každém bodě je rovna nule.

4.4.9 Poznámka

Pravděpodobnost, že X nabývá určité hodnoty x bude nenulová pouze v případě, že distribuční funkce F_X má v bodě x skok (nespojitosť).

4.5 Mnohorozměrná distribuční funkce

Popisujeme informace o několika náhodných veličinách najednou, případně jedné náhodné veličiny závislé na druhé.

Náhodný vektor $\mathbb{Z} = (X_1, \dots, X_n)$.

Odvození provedeme pouze pro 2 náhodné veličiny pro přehlednost. Lze to zobecnit pro n veličin.

4.5.1 Definice: Sdružená distribuční funkce

Nechť X a Y jsou náhodné veličiny. Potom **sdruženou distribuční funkci** $F_{X,Y}$ náhodných veličin X, Y definujeme pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ vztahem:

$$F_{X,Y}(x, y) = P([X \leq x][Y \leq y])$$

pro více náhodných veličin lze zobecnit na:

$$F_{X_1, X_2, \dots}(x_1, x_2, \dots) = P([X_1 \leq x_1][X_2 \leq x_2] \dots [X_n \leq x_n])$$

4.5.2 Věta: Vlastnosti sdružené distribuční funkce

Nechť $F_{X,Y}$ je sdružená distribuční funkce náhodných veličin X, Y . Potom pro každé $x_1 \leq x_2$ a $y_1 \leq y_2$ platí

1. $F_{X,Y}(x_1, y_1) \leq F_{X,Y}(x_2, y_2)$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}, \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y), \forall y \in \mathbb{R}, \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x), \forall x \in \mathbb{R}$

4.5.3 Definice: Marginální náhodný vektor

Nechť $\mathbb{Z} = (X_1, \dots, X_n)$ je náhodný vektor. Potom vektor $\mathbb{Z}' = (X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$, kde $k < n, i_j \in \hat{n}, \forall j \in \hat{k}$ nazýváme **marginální náhodný vektor**.

Speciálně náhodnou veličinu X_i nazveme **marginální náhodnou veličinou** a F_{X_i} nazveme **marginální distribuční funkcí**.

4.5.4 Definice: Nezávislost náhodných veličin

Řekneme, že náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé, jestliže jsou nezávislé jevy:

$$[a < X \leq b] \text{ a } [c < Y \leq d]$$

pro libovolné dvojice $(a, b), (c, d)$, kde $a, b, c, d \in \bar{\mathbb{R}}, a < b, c < d$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

4.5.5 Věta: Nezávislost náhodných veličin podle distribuční funkce

Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé právě tehdy, když:

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Důkaz: Jedná se o ekvivalenci, budeme ji tedy dokazovat pomocí dvou implikací:

$\Rightarrow$:

$$X, Y \text{ jsou nezávislé} \Rightarrow P[[a < X \leq b] \cap [c < Y \leq d]] = P[a < X \leq b] \cdot P[c < Y \leq d]$$

Což platí pro $\forall a, b, c, d \in \bar{\mathbb{R}}$. To znamená, že si můžeme zvolit. Např.: $a = -\infty, c = -\infty, b = x, d = y$. Dosadíme:

$$P[[-\infty < X \leq x] \cap [-\infty < Y \leq y]] = P[-\infty < X \leq x] \cdot P[-\infty < Y \leq y]$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Přesně to odpovídá definicím distribučních funkcí.

⇐:

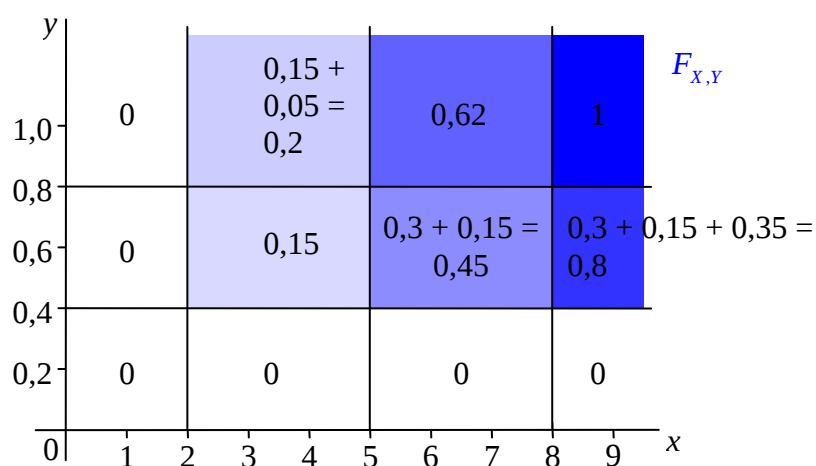
$$\begin{aligned}
 P[a < X \leq b] \cap [c < X \leq d] &= F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(b, c) - F_{X,Y}(a, d) + F_{X,Y}(a, c) = \\
 &= F_X(b) \cdot F_Y(d) - F_X(b) \cdot F_Y(c) - F_X(a) \cdot F_Y(d) + F_X(a) \cdot F_Y(c) = \\
 &= (F_Y(d) - F_Y(c))(F_X(b) - F_X(a)) = P[a < X \leq b] \cdot P[c < X \leq d]
 \end{aligned}$$

4.5.6 Příklad: Náhodné vektory

Náhodný vektor (X, Y) je zadán:

x	2	5	8
y			
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Jaká je distribuční funkce?



Pro nezávislost musíme spočítat marginální distribuční funkce:

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y) \Rightarrow & x < 2 & = 0 \\
 & & 2 \leq x < 5 & = 0,2 \\
 & & 5 \leq x < 8 & = 0,62 \\
 & & 8 \leq x & = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y) \Rightarrow & y < 0,4 & = 0 \\
 & & 0,4 \leq y < 0,8 & = 0,8 \\
 & & 0,8 \leq y & = 1
 \end{aligned}$$

Jsou X, Y nezávislé?

$F_{X,Y} = F_X \cdot F_Y$ pro všechny hodnoty, což naplatí. Např.: $0,15 \neq 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$.

Takže X, Y nejsou nezávislé.

4.6 Diskrétní náhodné veličiny

4.6.1 Definice: Diskrétní rozdělení

Řekneme, že náhodná veličina X je **diskrétní** nebo má **diskrétní rozdělení** jestliže $\exists$ konečná nebo spočetná množina reálných čísel $H = \{x_1, \dots, x_N, \dots\}$, taková, že platí:

$$\forall x_j \in H : P[X = x_j] > 0 \text{ a } \sum_{x_j \in H} P(X = x_j) = 1$$

pozn.: Obor hodnot náhodné veličiny X je nejvýše spočetná množina.

4.6.2 Definice: Pravděpodobnostní funkce

Funkci $P(x) = P[X = x]$ definovanou v 4.6.1 pro $\forall x \in \mathbb{R}$ nazýváme **pravděpodobnostní funkcí** náhodné veličiny X .

Značení: $P(x_i) = P[X = x_i]$ značíme jako p_i

Poznámka: Diskrétní náhodná veličina se obvykle udává pomocí pravděpodobnostní funkce ve formě tabulky.

4.6.3 Definice: Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny

Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny je definována takto:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{j: x_j \leq x} P[X = x_j] = \sum_{j: x_j \leq x} p_j$$

$F_X(x)$ má skoky v bodech x_j , na $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$ je konstantní. Skok v x_j má velikost

$$P[X = x_j] = p_j.$$

Důsledky:

$$\begin{aligned} P[X = a] &= P(a), \quad P[X < a] = F_X(a) - P(a) \\ P[X \leq a] &= F_X(a), \quad P[X > a] = 1 - P[X \leq a] = 1 - F_X(a) \\ P[X \geq a] &= 1 - F_X(a) + P(a) \end{aligned}$$

Poznámka: Pokud náhodná veličina X nabývá pouze celých nezáporných čísel $\{0, 1, 2, \dots\}$ tak:

$$F_X = \sum_{n=0}^{[x]} P(X = n)$$

4.6.4 Definice: Alternativní (Bernoulliho) rozdělení

Řekneme, že náhodná veličina X má **alternativní rozdělení** s parametrem $p \in (0; 1)$, jestliže:

$$P[X = x] = p^x (1-p)^{1-x}, \text{ pro } x \in \{0; 1\}$$
$$P[X = x] = 0, \text{ pro } x \notin \{0; 1\}$$

Značení: $X \sim Be(p)$

Poznámka: Slouží pro popis situací, kde výsledek pokusu může nabývat 2 hodnot: (ano $\times$ ne, úspěch $\times$ neúspěch) atd... Často se používá značení 0 - neúspěch, 1- úspěch.

4.6.5 Definice: Binomické rozdělení

Řekneme, že náhodná veličina X má **binomické rozdělení** s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0; 1)$, jestliže:

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ pro } k \in \hat{n} \text{ a pro jiná } k \text{ se rovná nule}$$

Značení: $X \sim Bi(n, p)$

Poznámka: Používá se pro výpočet pravděpodobnosti n realizací náhodné veličiny X v nezávislých pokusech. V každém pokusu je pravděpodobnost realizace p . Např. když 3x hodíme kostkou, kolikrát padne 6?

4.6.5.1 Poznámka: Vztah Bi a Be rozdělení

$X_1, \dots, X_n$ jsou rozděleny podle $Be(p)$ a nezávislé. Pak platí

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \sim Bi(n, p)$$

4.6.5.2 Příklad: Bi a Be rozdělení – šachová partie

2 stejně silní protivníci hrají šachovou partii. Rozhodněte, zda je pravděpodobnější:

- a) Vyhrát 3 partie ze 4 nebo 5 partií z 8?
- b) Vyhrát alespoň 3 partie ze 4 nebo 5 partií z 8?

X – Počet výher jednoho z hráčů po 4 hrách. $X \sim Bi(4, 1/2)$

Y – Počet výher jednoho z hráčů po 8 hrách. $Y \sim Bi(8, 1/2)$

$$P[X=3] = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad P[Y=5] = \binom{8}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{28} = \frac{7}{32}$$

Je pravděpodobnější, že hráč vyhraje 3 hry ze 4 než že vyhraje 5 her z 8.

$$P[X=3] + P[X=4] = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125, \quad \sum_{y=5}^8 P[Y=y] = \sum_{y=5}^8 \binom{8}{y} \frac{1}{28} = \frac{96}{256} = 0,375$$

Je pravděpodobnější, že hráč vyhraje alespoň 5 her z 8 než 3 hry ze 4.

4.6.6 Definice: Pascalovo (geometrické) rozdělení

Řekneme, že náhodná veličina X má **Pascalovo rozdělení** s parametrem $p \in (0; 1)$, jestliže

$$P[X=k] = p(1-p)^k, \text{ pro } k=0,1,2,\dots \text{ jinak se rovná } 0$$

Značení:

$$X \sim Pa(p)$$

Poznámka: Popisuje nekonečnou posloupnost nezávislých Bernoulliových pokusů.

Vyjadřuje např. počet pokusů, než nastane příznivý jev A ($P(A)=p$).

Distribuční funkce: $F_X(x) = \sum_{n=0}^{[x]} P[X=n] = \sum_{n=0}^{[x]} p(1-p)^n = p \cdot 1 \cdot \frac{1-(1-p)^{[x]+1}}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^{[x]+1}$

4.6.6.1 Příklad: Člověče nezlob se

Hrajeme Člověče nezlob se. Jaká je pravděpodobnost P_1 , že nasadím ve 4. hoďu a P_2 že nasadím nejpozději ve 4. hoďu?

X - počet hoďů do úspěchu, jedná se o Pascalovo rozdělení s $p=1/6$, tzn.:

$$P_1[X=3] = 1/6 \cdot (1-1/6)^3 = 125/1296 \doteq 0,09645$$

$$P_2[X \leq 3] = F_X(3) = 1 - (1-1/6)^4 = 1 - (5/6)^4 = 671/1296 \doteq 0,5177$$

4.6.7 Definice: Poissonovo rozdělení

Řekneme, že X má **Poissonovo rozdělení** s parametrem $\lambda \in \mathbb{R}^+$, jestliže

$$P[X=k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \text{ pro } k=0,1,2,\dots \text{ jinak se rovná } 0$$

Značení:

$$X \sim Po(\lambda)$$

4.6.7.1 Poznámka: Použití Poissonova rozdělení

- Popis počtu událostí během jednotkového časového intervalu (λ - průměrný počet událostí, které nastávají během daného intervalu).

Příklad: Počet hovorů v telefonní ústředně během jedné hodiny.

- Popis počtu částic, které se nacházejí v jednotkové ploše nebo objemu (λ - průměrný počet částic v jednotkové ploše nebo objemu).

Příklad: Počet částic v zorném poli mikroskopu.

- Aproximace binomického rozdělení.

4.6.7.2 Věta: Aproximace Bi rozdělení pomocí Po rozdělení

Nechť $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost náhodných veličin takových, že $X_n \sim Bi(n, p_n)$. Necht' dále:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0 \text{ a } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot p_n = \lambda \in \mathbb{R}^+$$

potom platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \text{ pro } k = 0, 1, 2, \dots$$

Pozn.:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P[X_n = k] = P[X = k], \quad X \sim Po(\lambda)$$

Důkaz:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{p_n^k}{(1-p_n)^k} (1-p_n)^n$$

Víme, že $n \cdot p_n \rightarrow \lambda \Rightarrow p_n = \frac{\lambda}{n} + Z(n)$, kde $nZ(n) \rightarrow 0$

Řešení se rozpadne na tři limity, nejdříve spočteme limitu posledního výrazu:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-p_n)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda + nZ(n)}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{n}{\lambda + nZ(n)}}\right)^{-\frac{n}{\lambda + nZ(n)}} \right]^{-\lambda - nZ(n)} = e^{-\lambda}$$

Pak prostředek:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{\lambda + nZ(n)}{n}}{1 - \frac{\lambda + nZ(n)}{n}}\right)^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda + nZ(n))^k}{(n - \lambda - nZ(n))^k} \rightarrow \lambda^k$$

Jmenovatel toho, co nám vyšlo přidáme k prvnímu výrazu a $k!$ zatím dáme stranou:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{(n - \lambda - nZ(n))^k} = 1$$

Dáme-li dílčí výsledky dohromady, vyloupne se hledaný vzorec:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

4.6.7.3 Poznámka: Obvyklé hodnoty pro aproximaci Bi rozdělení

Pro malé p a velká n můžeme aproximovat rozdělení $Bi(n, p)$ rozdělením $Po(\lambda)$.

Doporučuje se pro $p < 0,1$ a $n > 30$.

Např.: $X \sim Bi(1000; 0,0015)$

$$P[X = 5] = \binom{1000}{5} \cdot 0,0015^5 \cdot (0,9985)^{995} \text{ - velmi složité na výpočet}$$

$$Y \sim Po(1,5)$$

$$P[Y = 5] = e^{-1,5} \cdot \frac{(1,5)^5}{5!} \doteq P[X = 5] \text{ - mnohem jednodušší}$$

4.6.7.4 Příklad: Závada na vodiči

Pravděpodobnost závady na 1 km vodiče je 0,01. Kabel je složen ze 100 vodičů. Kabel je funkční, pokud je v pořádku alespoň 99 vodičů. Jaká je pravděpodobnost, že 1 km kabelu bude fungovat?

X – počet chybných vodičů

$$X \sim Bi(100; 0,01):$$

$$P[X \leq 1] = P[X = 0] + P[X = 1] = \binom{100}{0} 0,01^0 \cdot 0,99^{100} + \binom{100}{1} 0,01^1 \cdot 0,99^{99} \doteq \underline{\underline{0,736}}$$

Což je poměrně složitý výpočet (hlavně ty vysoké mocniny můžou být na počítači zdrojem chyb). Při použití Po rozdělení ($\lambda = 1$):

$$Y \sim Po(n \cdot p) = Po(1)$$

$$P[Y \leq 1] = P[Y = 0] + P[Y = 1] = e^{-1} \frac{1^0}{0!} + e^{-1} \frac{1^1}{1!} = \frac{2}{e} \doteq \underline{\underline{0,736}}$$

4.6.7.5 Příklad: Radioaktivní látka

Radioaktivní látka vyzáří během 7,5 s průměrně 3,87 α částic. Určete pravděpodobnost, že za 1s vyzáří alespoň 1 α částici.

X - počet α za 1s. Rozdělení je $X \sim Po(\lambda)$.

λ - průměrně za 1s: $\lambda = 3,87/7,5 = 0,516$

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - e^{-0,516} \cdot 0,516^0 / 0! \doteq \underline{\underline{0,403}}$$

4.7 Diskrétní rozdělení náhodného vektoru

4.7.1 Definice: Diskrétní rozdělení vektoru

Řekneme, že náhodný vektor má **diskrétní rozdělení**, jestliže $\exists$ konečná nebo spočetná množina n -tic

$$\{(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}), (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}), \dots\}$$

a to taková, že

$$P(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}) = P[X_i = x_{1i}, X_2 = x_{2i}, \dots, X_n = x_{ni}] > 0 \text{ a } \sum_i P(x_{1i}, \dots, x_{ni}) = 1$$

$P(x_{1i}, \dots, x_{ni})$ - **Sdružená pravděpodobnostní funkce** náhodného vektoru.

4.7.2 Definice: Multinomické rozdělení

Řekneme, že náhodný vektor $\vec{X} = (x_1, \dots, x_k)$ má **multinomické rozdělení** s parametry

$n, p_1, \dots, p_k$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $p_j \in (0; 1)$, $\forall j \in \hat{k}$ a $\sum_{j=1}^k p_j = 1$, jestliže platí:

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k] = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k}$$

$$x_j = 0, 1, \dots, n, \forall j \in \hat{k}, \sum_{j=1}^k x_j = n$$

Poznámka: $(p_1 + p_2 + \dots + p_k)^n$ - **multinomický rozvoj**

Poznámka: Jedná se o zobecnění binomického rozvoje pro n -nezávislých opakování nějakého pokusu, přičemž v každé realizaci může nastat právě jeden z disjunktních jevů $A_1, \dots, A_k$. V každém pokusu je pravděpodobnost, že nastane A_i rovno p_i .

Binomické rozdělení je multinomické pro $k = 2$.

4.7.2.1 Příklad: n výrobků s vlastností Z

Máme n výrobků u kterých měříme vlastnost Z . Výrobek je v pořádku, pokud $T_D \leq Z \leq T_H$.

$$\text{jevy: } \left. \begin{array}{lll} A_1: & Z < T_D & \text{zmetek, } p_1 \\ A_2: & T_D \leq Z \leq T_H & \text{dobrý, } p_2 \\ A_3: & T_H < Z & \text{zmetek, } p_3 \end{array} \right\} \Sigma = 1$$

$$P[X_1 = x_1; X_2 = x_2; X_3 = x_3] = \frac{n!}{x_1! x_2! x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} = \frac{n!}{x_1! x_2! (n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2}$$

Např.: $p_1 = 0,02$; $p_2 = 0,95$; $p_3 = 0,03$

$$P[X_1 = 1; X_2 = 4; X_3 = 1] = \frac{6!}{1! 4! 1!} 0,02 \cdot 0,95^4 \cdot 0,03 = 0,015$$

4.7.3 Poznámka: Distribuční funkce náhodného vektoru

Nechť $\vec{X} = (x_1, x_2)$ má diskrétní rozdělení.

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \sum_{k_1 \leq x_1} \sum_{k_2 \leq x_2} P[X_1 = k_1, X_2 = k_2]$$

4.7.4 Věta: Sdružená a marginální pravděpodobnostní funkce

Je-li $P[X_1 = x_1, X_2 = x_2]$ sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru

$\vec{X} = (x_1, x_2)$ potom:

$$P[X_1 = x_1] = \sum_{x_2} P[X_1 = x_1, X_2 = x_2], \quad P[X_2 = x_2] = \sum_{x_1} P[X_1 = x_1, X_2 = x_2]$$

jsou marginální pravděpodobnostní funkce.

Důkaz:

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x_1) &= \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \sum_{t_1 \leq x_1} \sum_{t_2 \leq x_2} P[X_1 = t_1, X_2 = t_2] = \\ &= \sum_{t_1 \leq x_1} \left(\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \sum_{t_2 \leq x_2} P[X_1 = t_1, X_2 = t_2] \right) = \sum_{t_1 \leq x_1} \left(\sum_{t_2} P[X_1 = t_1, X_2 = t_2] \right) \\ F_{X_1}(x_1) &= \sum_{t_1 \leq x_1} P[X_1 = t_1] \\ P[X_1 = t_1] &= \sum_{x_2} P[X_1 = t_1, X_2 = x_2] \end{aligned}$$

4.7.5 Věta: Nezávislost náhodného vektoru

Diskrétní náhodné veličiny jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2] = P[X_1 = x_1] \cdot P[X_2 = x_2], \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$$

Důkaz: Z věty 4.5.5 víme, že náhodné veličiny jsou nezávislé právě tehdy, když

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$$

Takže stačí od pravděpodobností přejít k distribučním funkcím.

4.7.5.1 Příklad: Nezávislost vektoru

Máme vektor $\vec{X} = (X_1, X_2)$ s pravděpodobnostmi zadanými tabulkou:

X_1	0	1	2
X_2			
0	0,42	0,12	0,06
1	0,28	0,08	0,04

Jsou X_1, X_2 nezávislé?

Výpočet probíhá následovně:

$$P[X_1 = 0] = \sum_{k=0}^2 P[X_1 = 0; X_2 = k] = P[X_1 = 0; X_2 = 0] + P[X_1 = 0; X_2 = 1] + P[X_1 = 0; X_2 = 2] = 0,6$$

tzn. sčítáme řádek, podobně počítáme pro sloupce:

$$P[X_2 = 0] = 0,7, \quad P[X_2 = 1] = 0,2, \quad P[X_2 = 2] = 0,1 \quad \text{a} \quad P[X_1 = 1] = 0,4$$

Nezávislost: musí platit $P[X_1 = x_1; X_2 = x_2] = P[X_1 = x_1] \cdot P[X_2 = x_2]$, což platí pro $\forall x_1, x_2$.

Náhodné veličiny X_1, X_2 jsou nezávislé.

4.7.6 Definice: Podmíněná pravděpodobnostní funkce

Nechť $P[X_1 = x_1, X_2 = x_2]$ je sdružená pravděpodobnostní funkce diskrétního náhodného vektoru. Je-li $P[X_2 = x_2] > 0$ definujeme podmíněnou pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X_1 za podmínky $X_2 = x_2$ výrazem:

$$P[X_1 = x_1 | X_2 = x_2] = \frac{P[X_1 = x_1, X_2 = x_2]}{P[X_2 = x_2]} = \frac{P[X_1 = x_1, X_2 = x_2]}{\sum_{x_1} P[X_1 = x_1, X_2 = x_2]}$$

4.7.6.1 Příklad: 2 kostky

Házíme 2 kostkami, najděte pravděpodobnostní rozdělení maxima z výsledků, pokud víme, že minimum nabylo hodnoty 3.

X – maximum, Y – minimum

Minimum 3 při hození 2 kostek může vypadat takto:

$$\left. \begin{array}{ll} \{3\} & \{3\} \quad \text{– na obou kostkách padlo 3} \\ \{3\} & \{4, 5, 6\} \quad \text{– na jedné padlo 3 na druhé 4, 5, 6} \\ \{4, 5, 6\} & \{3\} \quad \text{– na druhé padlo 3 a na první 4, 5, 6} \end{array} \right\} \text{Celkem 7 možností.}$$

Celkem je při hození 2 kostek $n = 36$ možností.

$$P[Y = 3] = \frac{7}{36}, \quad P[X = 3, Y = 3] = \frac{1}{36}, \quad P[X = j, Y = 3] = \frac{2}{36}, \quad j = 4, 5, 6$$

$$P[X = 3 | Y = 3] = \frac{1/36}{7/36} = \frac{1}{7}, \quad P[X = j | Y = 3] = \frac{2/36}{7/36} = \frac{2}{7}, \quad j = 4, 5, 6$$

4.8 Absolutně spojitě náhodné veličiny

4.8.1 Definice: Absolutně spojitě rozdělení

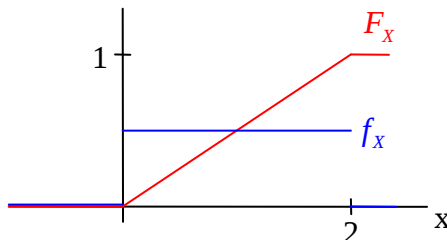
Řekneme, že náhodná veličina X má **absolutně spojitě rozdělení (ASR)** jestliže existuje nezáporná funkce $f_X(x)$ taková, že pro $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Funkce $f_X(x)$ se nazývá **hustota pravděpodobnosti** náhodné veličiny X .

4.8.1.1 Příklad: ASR

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 0 & x \leq 0 \\ &= x/2 & 0 < x \leq 2 \\ &= 1 & 2 \leq x \end{aligned}$$



Musíme najít hustotu f_X . Hustota uvedená v grafu se nazývá rovnoměrná.

4.8.2 Věta: Vztah f a F

Nechť náhodná veličina X má ASR. Potom ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$, kde $\exists F'_x(x)$ platí:

$$f_x(x) = F'_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$$

4.8.3 Věta: Vztah P a f

Nechť náhodná veličina X má ASR. Potom platí:

$$P[X \in A] = \int_A f_x(x) dx, \text{ pro } \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Důkaz: Důkaz je složitější. Pro naše účely postačí dokázat platnost pro nějaký interval.

Např.: $P[a < X \leq b]$

$$P[a < X \leq b] = F_x(b) - F_x(a) = \int_{-\infty}^b f_x(x) dx - \int_{-\infty}^a f_x(x) dx = \int_a^b f_x(x) dx$$

4.8.3.1 Poznámka: Pravděpodobnost v jednom bodě

Náhodná veličina X má ASR:

$$P[X = a] = 0, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow P[X \geq a] = P[X > a] \dots \text{atd.} \dots$$

4.8.4 Poznámka: Vlastnosti hustoty $f_x(x)$

- $f_x(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $f_x(x) = F'_x(x)$, pro $\forall x$, kde $\exists F'_x$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_x(x) = 1$

4.8.4.1 Příklad: Výpočet distribuční funkce

Máme zadanou funkci:

$$f_x(x) = \frac{a}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Jaký musí být parametr a , aby $f_x(x)$ byla hustota pravděpodobnosti? Jaká je distribuční funkce? Jaká je pravděpodobnost $P[-1 < X < 1]$?

Parametr $a > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2} = a [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^a = a \cdot \pi = 1 \Rightarrow a = \underline{\underline{1/\pi}}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} [\operatorname{arctg} t]_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$P[-1 < X < 1] = \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} [\operatorname{arctg} x]_{-1}^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

4.8.5 Příklad: Přenos signálu

Z A do B přenášíme signály -1 a +1. Signál je zašuměn. Příjemce dostává signál + šum. Šum je náhodná veličina s $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x} & x > 0 \\ \frac{1}{2} e^x & x \leq 0 \end{cases}$$

prahování:

$$\begin{aligned} S > d & \dots 1 \\ S \leq d & \dots -1 \end{aligned}$$

Stanovte d tak, abychom se dopustili co nejmenší chyby při přenosu a určete tuto chybu. Vysíláme 60% 1 a 40% -1.

Stanovíme veličiny: Y – signál, X – šum.

Vysílaný signál:	1	-1	
Y – přijatý signál:	$1+X$	$-1+X$	
	$f_1(y) = \frac{1}{2} e^{-(y-1)}$	$f_{-1}(y) = \frac{1}{2} e^{-(y+1)}$	$y > -1$
	$= \frac{1}{2} e^{y-1}$	$= \frac{1}{2} e^{y+1}$	$y < -1$

$p_1(d)$ = pravděpodobnost, že poslali 1 a já se dopustím chyby

$$p_1(d) = P[Y_1 \leq d] = \int_{-\infty}^d f_1(y) dy = \int_{-\infty}^d \frac{1}{2} e^{y-1} dy = \frac{1}{2} e^{d-1} \quad d \leq 1$$

$$p_1(d) = P[Y_1 \leq d] = \int_{-\infty}^d f_1(y) dy = \int_{-\infty}^1 \frac{1}{2} e^{y-1} dy + \int_1^d \frac{1}{2} e^{-(y-1)} dy = \underline{\underline{1 - \frac{1}{2} e^{-(d-1)}}} \quad d > 1$$

$p_{-1}(d)$ = pravděpodobnost, že poslali -1 a já přijal 1

$$p_{-1}(d) = P[Y_{-1} > d] = \int_d^{+\infty} f_{-1}(y) dy = \int_d^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-(y+1)} dy = \frac{1}{2} e^{-(d+1)} \quad d > -1$$

$$p_{-1}(d) = P[Y_{-1} > d] = \int_d^{+\infty} f_{-1}(y) dy = \int_d^{-1} \frac{1}{2} e^{y+1} dy + \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-(y+1)} dy = \underline{\underline{1 - \frac{1}{2} e^{d+1}}} \quad d \leq -1$$

$P(d)$ = hledaná pravděpodobnost chyby

$$\begin{aligned} P(d) &= \frac{1}{2} e^{d-1} \cdot 0,6 + 0,4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} e^{d+1}\right) & d \leq -1 \\ &= \frac{1}{2} e^{d-1} \cdot 0,6 + 0,4 \cdot \frac{1}{2} e^{-(d+1)} & -1 < d \leq 1 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-(d-1)}\right) \cdot 0,6 + 0,4 \cdot \frac{1}{2} e^{-(d+1)} & 1 < d \end{aligned}$$

Nyní budeme hledat minimum $P(d)$ pro jednotlivé intervaly:

$\min P(d) = ?$

$d \leq -1$: $P'(d) = 0,3e^{d-1} - 0,2e^{d+1} = e^{d-1}(0,3 - 0,2e^2) < 0$ - klesající, bez extrému

$d > 1$: $P'(d) = 0,3e^{-(d-1)} - 0,2e^{-(d+1)} = e^{-(d+1)}(0,3e^2 - 0,2) > 0$ - rostoucí, -||-

$-1 \leq d < 1$: $P'(d) = 0,3e^{d-1} - 0,2e^{-(d+1)} = 0$

$$0,3e^{2d} - 0,2 = 0$$

$$3e^{2d} = 2$$

$$d = \frac{1}{2} \ln(2/3) \doteq \underline{\underline{-0,203}}$$

$$\min P(d) = P(-0,203) = 0,3e^{-1,203} + 0,2e^{-0,797} \doteq \underline{\underline{0,18}}$$

4.9 Absolutně spojitě náhodné vektory

4.9.1 Definice: Sdružené absolutně spojitě rozdělení

Řekneme, že náhodný vektor $\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$ má **sdružené absolutně spojitě rozdělení (SASR)**, jestliže $\exists$ nezáporná funkce $f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n)$ taková, že:

$$F_{x_1, \dots, x_n} = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdot \dots \cdot dt_n$$

Funkci $f_{\vec{X}}$ nazýváme **sdružená hustota pravděpodobnosti** náhodného vektoru $\vec{X}$.

4.9.1.1 Poznámka: Podobnost SASR a ASR

a) podobně jako u ASR:

$$f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}, \text{ tam kde existuje}$$

$$\text{b) } P[a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2, \dots, a_n < X_n \leq b_n] = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$$

4.9.2 Věta: Marginální hustoty pravděpodobnosti

Mají-li náhodné veličiny X_1, X_2, X_3 SASR, tak platí:

$$f_{X_1, X_3}(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) dx_2$$

Důkaz: Potřebuje znalost Fubiniovy věty a umět trochu integrovat

$$\begin{aligned} F_{X_1 X_3}(x_1, x_3) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{X_1 X_2 X_3}(x_1, x_2, x_3) = \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_3} f_{X_1 X_2 X_3}(t_1, t_2, t_3) dt_3 dt_2 dt_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \left(\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1 X_2 X_3}(t_1, t_2, t_3) dt_2 \right) dt_3 dt_1 = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1 X_2 X_3}(t_1, t_2, t_3) dt_2}_{f_{X_1 X_3}(x_1, x_3)} dt_3 dt_1 \end{aligned}$$

4.9.2.1 Příklad: Výpočet marginální se sdružené pravděpodobnosti

Máme zadanou hustotu pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} f_{X,Y} &= e^{-(x+y)} & \min\{x, y\} \geq 0 \\ &= 0 & \text{jinak} \end{aligned}$$

Určete: $f_Y(y) = ?$, $P[X > 2Y] = ?$.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dx = \left[-e^{-(x+y)} \right]_0^{+\infty} = e^{-y} \quad y \geq 0 \\ &= 0 & \text{jinak} \end{aligned}$$

$$P[X > 2Y] = \iint_{X > 2Y} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_{2y}^{+\infty} e^{-(t+s)} dt \right) ds = \int_0^{+\infty} \left[-e^{-(t+s)} \right]_{2y}^{+\infty} dy = \int_0^{+\infty} e^{-2y} dy = \frac{1}{2}$$

4.9.2.2 Příklad: Další výpočet marginální se sdružené pravděpodobnosti

Hustota pravděpodobnosti je zadána:

$$\begin{aligned} f_{X,Y} &= \frac{2}{a^2}, \quad 0 \leq x \leq y < a \\ &= 0, & \text{jinde} \end{aligned}$$

Vypočtěte marginální hustoty pravděpodobnosti.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_x^a \frac{2}{a^2} dy = \underline{\underline{\frac{2}{a^2}(a-x)}} \quad x \in (0,a)$$

$$= 0 \quad \text{jinde}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^y \frac{2}{a^2} dx = \underline{\underline{\frac{2y}{a^2}}} \quad y \in (0,a)$$

$$= 0 \quad \text{jinde}$$

4.9.3 Věta: Nezávislost pomocí hustoty pravděpodobnosti

Nechť náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ mají SASR. Potom $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé $\Leftrightarrow$

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i), \text{ pro } \forall \vec{X} \in \mathbb{R}^n$$

Důkaz: dokážeme pro 2 náhodné veličiny, dále je to analogické

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s,t) ds dt = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_X(s) \cdot f_Y(t) ds dt =$$

$$\Rightarrow:$$

$$= \left(\int_{-\infty}^x f_X(s) ds \right) \left(\int_{-\infty}^y f_Y(t) dt \right) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$$\Leftarrow:$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds \cdot \int_{-\infty}^y f_Y(t) dt = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \underbrace{f_X(s) \cdot f_Y(t)}_{f_{X,Y}(s,t)} ds dt$$

4.9.3.1 Příklad: Nezávislost vektoru náhodných veličin

Určete nezávislost náhodných veličin X_1, X_2, X_3 jejichž hustota pravděpodobnosti je:

$$f_{X_1, X_2, X_3} = 2x_1(x_2 + x_3) \quad 0 < X_j < 1 \quad j \in \hat{3}$$

$$= 0 \quad \text{jinak}$$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 = \int_0^1 \int_0^1 2x_1(x_2 + x_3) dx_2 dx_3 = 2x_1 \int_0^1 \left[\frac{x_2^2}{2} + x_3 x_2 \right]_0^1 dx_3 =$$

$$= 2x_1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) dx_3 = 2x_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{2x_1}} \quad 0 < x_1 < 1$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_3 = \int_0^1 \int_0^1 2x_1(x_2 + x_3) dx_1 dx_3 = \int_0^1 2x_1 dx_1 \int_0^1 (x_2 + x_3) dx_3 =$$

$$= \underline{\underline{x_2 + \frac{1}{2}}} \quad 0 < x_2 < 1$$

$$f_{x_3}(x_3) = \underline{x_3 + \frac{1}{2}} \quad 0 < x_3 < 1 \quad - \text{symetrické s } f_{x_2}(x_2)$$

$$f_{x_1, x_2, x_3}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1(x_2 + x_3) \neq 2x_1\left(x_3 + \frac{1}{2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{2}\right) = f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2) \cdot f_{x_3}(x_3)$$

Tzn. náhodné veličiny X_1, X_2, X_3 nejdou nezávislé.

4.9.4 Definice: Podmíněná distribuční funkce

Nechť X, Y jsou náhodné veličiny. Potom **podmíněnou distribuční funkci** náhodné veličiny X při daném $Y = y$ definujeme jako:

$$F_{X|Y}(x|y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P[X \leq x | y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon]$$

pokud limita existuje. Pokud dále $\exists$ nezáporná funkce $f_{X|Y}(x|y)$ tak, že:

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(t|y) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

nazýváme ji **podmíněná hustota** náhodné veličiny X při daném $Y = y$.

Pozn.:

$$P[X \leq x | Y = y] = \frac{P[X \leq x, Y = y]}{P[Y = y]}$$

Je neurčitý výraz, protože v čitateli i jmenovateli jsou nuly.

4.9.5 Věta: Existence podmíněné hustoty náhodné veličiny

Nechť náhodná veličina X, Y mají SASR. Potom v každém bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kde platí

1. $f_{X,Y}(x, y)$ je spojitá
2. $f_Y(y) > 0$ a je spojitá

existuje podmíněná hustota náhodné veličiny X při daném $Y = y$ a

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

4.9.6 Příklad: Podmíněná hustota náhodné veličiny

Máme zadanou funkci vektoru (X, Y) :

$$f_{X,Y}(x,y) = c(1+x+y)^{-a} \quad x > 0, y > 0, a > 2$$

$$= 0 \quad \text{jinak}$$

Určete konstantu c aby $f_{X,Y}(x,y)$ byla hustota pravděpodobnosti. Určete $f_X(x)$ a $f_{X|Y}(x|y)$.

Konstantu c určíme z normovací podmínky:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} c(1+x+y)^{-a} dx dy = c \int_0^{+\infty} \left[\frac{(1+x+y)^{-a+1}}{-a+1} \right]_0^{+\infty} dy =$$

$$= c \int_0^{+\infty} \frac{(1-y)^{-a+1}}{a-1} dy = \frac{c}{a-1} \left[\frac{(1+y)^{-a+2}}{-a+2} \right]_0^{+\infty} = \frac{c}{(a-1)(a-2)}$$

$$\Rightarrow c = \underline{\underline{(a-1)(a-2)}}$$

Nyní můžeme určit $f_X(x)$ dle definice:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^{+\infty} (a-1)(a-2)(1+x+y)^{-a} dy = (a-1)(a-2) \left[(1+x+y)^{-a+1} \right]_0^{+\infty} =$$

$$= \underline{\underline{(a-2)(x+1)^{-a+1}}} \quad x > 0$$

A nakonec i podmíněnou pravděpodobnost:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{(a-1)(a-2)(1+x+y)^{-a}}{(a-2)(1+x)^{-a+1}} = \underline{\underline{(a-1)(1+x)^{a-1}(1+x+y)^{-a}}}$$

5 Funkce (transformace) náhodných veličin

$Y = h(X)$ - jaké má rozdělení, když známe rozdělení X ?

Pozn.: Při transformaci se může výrazně změnit rozdělení.

- Ze spojitého můžeme vyrobit diskrétní.
- Z diskrétního spojitě nevyrobíme.
- Pro diskrétní rozdělení se transformace určuje přímým výpočtem. Viz. 5.1. Proto se při výkladu omezíme na spojitá rozdělení.

5.1 Příklad: Funkce náhodných veličin – Diskrétní veličina

X je diskrétní náhodná veličina zadaná tabulkou:

x_i	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
p_i	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

Jaké je rozdělení Y , když $Y = \sin X$?

x_i	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$y_i = \sin x_i$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0
p_i	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

Z tabulky:

$$P[Y = 0] = P[X = 0 \cup X = \pi] = 0,1 + 0,3 = 0,4$$

$$P[Y = \sqrt{2}/2] = P[X = \pi/4 \cup X = 3\pi/4] = 0,3 + 0,1 = 0,4$$

$$P[Y = 1] = P[X = \pi/2] = 0,2$$

Takže výsledek je:

y_i	0	$\sqrt{2}/2$	1
p_i	0,4	0,4	0,2

5.2 Příklad: Funkce náhodných veličin – Spojitá veličina

Pro spojitou pravděpodobnost je to složitější než pro diskrétní.

- 1) Výpočet distribuční funkce transformované náhodné veličiny X .
- 2) Výpočet transformované náhodné veličiny X .

Distribuční funkce: $X, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, Y = h(X)$

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[h(X) \leq y] = P[X \in \{t \in \mathbb{R} \mid h(t) \leq y\}] = P[X \leq h^{-1}(y)] = F_X(h^{-1}(y))$$

$$P[X \in A] = \int_A f_X dx$$

$$\begin{aligned} \text{Např.:} \quad f_X(x) &= 1/5 \quad x \in \langle -2; 3 \rangle \\ &= 0 \quad \text{jinak} \end{aligned}$$

Najděte rozdělení $Y = X^2$.

Hledáme ho pro $y > 0$, pro ostatní y je to nula.

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X^2 \leq y] = P[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}] = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$

Nyní budeme počítat distribuční funkci $F_Y(y)$. Podle definice a dosazení je to:

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} \frac{1}{5} dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} \frac{1}{5} dx = \int_{-2}^{\sqrt{y}} \frac{1}{5} dx - \int_{-2}^{-\sqrt{y}} \frac{1}{5} dx$$

Výsledky budou různé pro různé y . Zde je tabulka i s upravenými integrály:

$F_Y(y) = 0$	$y \leq 0$	$f_Y(y) = 0$
$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{5} dx = \frac{2}{5} \sqrt{y}$	$y \in (0; 4)$	$f_Y(y) = \frac{1}{5\sqrt{y}}$
$= \int_{-2}^{\sqrt{y}} \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5}(\sqrt{y} - 2)$	$y \in \langle 4; 9 \rangle$	$f_Y(y) = \frac{1}{10\sqrt{y}}$
$= \int_{-2}^3 \frac{1}{5} dx = 1$	$y > 9$	$f_Y(y) = 0$

5.3 Věta: Funkce náhodné veličiny

Nechť X je spojitá náhodná veličina. Nechť $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je ryze monotonní a spojitá na množině $X(\Omega)$ a inverzní funkce h^{-1} je diferencovatelná. Potom pro náhodnou veličinu $Y = h(X)$ platí:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Důkaz:

a) h je rostoucí

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[h(X) \leq y] = P[X \leq h^{-1}(y)] = F_X(h^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(h^{-1}(y)) \cdot \frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

b) h je klesající

$$F_Y(y) = P[h(x) \leq y] = 1 - P[h(x) \geq y] = 1 - P[X \leq h^{-1}(y)] = 1 - F_X(h^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = -f_X(h^{-1}(y)) \frac{dh^{-1}(y)}{dy} = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

5.3.1 Příklad: Funkce náhodné veličiny I.

Máme obecně zadanou hustotu pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} f_X(x) &\geq 0 & x > 0 \\ &= 0 & x \leq 0 \end{aligned}$$

Konkrétně např.: $Y = a \ln x$, $a \neq 0 \Rightarrow y = a \ln x$, $h^{-1}(y) = e^{y/a}$

$$f_Y(y) = f_X(e^{y/a}) \cdot e^{y/a} \cdot 1/|a|$$

Konkrétně např.: $f_X(x) = 1/c$, $x \in (0; c)$, $c > 0$, $Y = -\ln X$

$$f_Y(y) = \frac{1}{c} e^{-y} \left| \frac{1}{-1} \right| = \frac{1}{c} e^{-y}, \quad y > -\ln c$$

5.3.2 Příklad: Funkce náhodné veličiny II.

$$f_X(x) = 1/\pi, \quad x \in (-\pi/2; \pi/2)$$

$$Y = \operatorname{tg} x, \quad h^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}$$

5.3.3 Příklad: Funkce náhodné veličiny III.

Máme plyn a jeho částice se pohybují náhodně rychlostí v . Rozdělení rychlosti těchto částic je:

$$f_V(v) = a \cdot v^2 \cdot \exp(-b \cdot v)$$

Určete konstantu a a rozdělení kinetické energie.

Pro určení konstanty a využijeme toho, že integrál hustoty pravděpodobnosti je normovaný:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(v) dv = \int_0^{+\infty} a \cdot v^2 \cdot \exp(-b \cdot v) dv = \left| \begin{array}{ll} u = av^2 & u' = 2av \\ v' = \exp(-bv) & v = -b^{-1} \exp(-bv) \end{array} \right| = \\ &= \left[-av^2 \frac{\exp(-bv)}{b} \right]_0^{\infty} + \frac{2a}{b} \int_0^{\infty} v \cdot \exp(-bv) dv = 0 + \frac{2a}{b} \frac{1}{b} \left[\frac{\exp(-bv)}{-b} \right]_0^{\infty} = \frac{2a}{b^3} \\ 1 &= \frac{2a}{b^3} \\ a &= \frac{b^3}{2} \end{aligned}$$

Kinetická energie má vztah:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = h^{-1}(E)$$

A nyní podle vzorce:

$$f_e(E) = f_v(h^{-1}(E)) \cdot \left| \frac{dh^{-1}(E)}{dE} \right| = \frac{b^3}{2} \frac{2E}{m} \exp\left(-b\sqrt{\frac{2E}{m}}\right) \cdot \frac{2/m}{2\sqrt{2E/m}} =$$

$$= \frac{b^3}{2m} \sqrt{\frac{2E}{m}} \exp\left(-b\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)$$

5.4 Funkce více náhodných veličin

5.4.1 Příklad: Rozdělení součtu náhodných veličin

Najděte rozdělení náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$, X_1, X_2 nezávislé.

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X_1 + X_2 \leq y] = \iint_{X_1 + X_2 \leq y} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_2 \right) dx_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(y - x_1) dx_1$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) F_{X_2}(y - x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) \left(\frac{d}{dy} F_{X_2}(y - x_1) \right) dx_1 =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y - x_1) dx_1}_{\text{což je Konvoluce}}$$

5.4.2 Věta: Funkce náhodného vektoru

Nechť náhodný vektor $\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$ má SASR a nechť $Y = (y_1, \dots, y_n) = h(x_1, \dots, x_n)$, kde $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě a bijektivně zobrazení na otevřené množině G takové, že:

$$\int_G \dots \int_G f_{X_1, \dots, X_n} dx_1 \dots dx_n = 1$$

Nechť inverzní zobrazení $\vec{X} = h^{-1}(y_1, \dots, y_n)$ je spojitě, diferencovatelné a splňuje podmínku:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ na } h(G)$$

potom i $(Y_1, \dots, Y_n)$ má SASR a platí $f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = f_{X_1, \dots, X_n}(h_1^{-1}(y_1 \dots y_n) \dots h_n^{-1}(y_1 \dots y_n)) \cdot |J|$

5.4.3 Příklad: Funkce náhodného vektoru I.

Sdružená hustota pravděpodobnosti je zadána:

$$f_{X_1, X_2} = \begin{cases} 4x_1x_2 & 0 < x_{1,2} < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$(Y_1, Y_2) = (X_1^2, X_2^2)$$

$$\left. \begin{matrix} Y_1 = h_1(X_1, X_2) = X_1^2, & Y_2 = h_2(X_1, X_2) = X_2^2 \\ x_1 = h_1^{-1}(y_1, y_2) = \sqrt{y_1}, & x_2 = h_2^{-1}(y_1, y_2) = \sqrt{y_2} \end{matrix} \right\} J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{y_2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{y_1y_2}} \neq 0$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 4\sqrt{y_1}\sqrt{y_2} \frac{1}{4\sqrt{y_1y_2}} = 1, \quad 0 < y_{1,2} < 1$$

5.4.4 Příklad: Funkce náhodného vektoru II.

X_1, X_2 nezávislé a platí $f_{X_2}(x_2) = 0, \forall x_2 \leq 0$. Jaká je hustota pravděpodobnosti, když platí:

$$Y = X_1/X_2$$

Abychom splnili podmínky do věty, musíme nějak jednoduše vytvořit Y_2 . Označíme:

$$Y_1 = X_1/X_2, Y_2 = X_2, J = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y_2$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(y_1y_2, y_2) \cdot y_2 = f_{X_1}(y_1y_2) \cdot f_{X_2}(y_2) \cdot y_2 \Rightarrow$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2}(y_1y_2, y_2) \cdot y_2 dy_2 = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(y_1y_2) \cdot f_{X_2}(y_2) \cdot y_2 dy_2 \quad y_1 \in \mathbb{R}$$

5.4.5 Příklad: Funkce náhodného vektoru III.

Sdružená hustota pravděpodobnosti je:

$$f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) = e^{-(x_1 + x_2 + x_3)} \quad x_{1,2,3} > 0$$

Jaká je hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny:

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

označíme:

$$\left. \begin{array}{l} Y_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \quad Y_2 = X_2 \quad Y_3 = X_3 \\ X_1 = 3Y_1 - Y_2 - Y_3 \quad X_2 = Y_2 \quad X_3 = Y_3 \end{array} \right\} J = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$f_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) = e^{-(3y_1 - y_2 - y_3 + y_2 + y_3)} \cdot 3 = 3e^{-3y_1}; \quad 3y_1 - y_2 - y_3 > 0; \quad y_{2,3} > 0$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) dy_3 = \int_0^{3y_1 - y_2} 3e^{-3y_1} dy_3 = 3(3y_1 - y_2)e^{-3y_1}; \quad 3y_1 - y_2 > 0; \quad y_2 > 0$$

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) dy_2 = \int_0^{3y_1} 3(3y_1 - y_2)e^{-3y_1} dy_2 = 3e^{-3y_1} \left[3y_1 y_2 - \frac{y_2^2}{2} \right]_0^{3y_1} = \\ &= \underline{\underline{27 \cdot \frac{1}{2} \cdot y_1^2 e^{-3y_1}}} \quad y_1 > 0 \end{aligned}$$

6 Příklady spojitých náhodných veličin

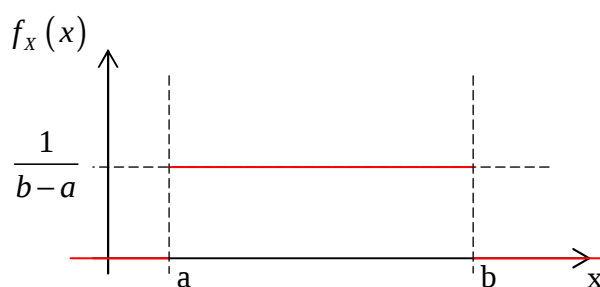
6.1 Definice: Rovnoměrné rozdělení

Rovnoměrné rozdělení s parametry $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ definujeme takto:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad X \in (a, b)$$

Značení:

$$X \sim U(a, b)$$



Obr.: Rovnoměrné rozdělení

6.2 Definice: Gamma rozdělení

Gamma rozdělení s parametry $\alpha, \beta > 0$ definujeme takto:

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{1}{\beta^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0$$

přičemž pro Γ funkce platí:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad \text{- konverguje pro } \forall p > 0$$

$$\Gamma(p+1) = \Gamma(p) \cdot p \quad ; \quad \Gamma(p+1) = p! \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Značení:

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

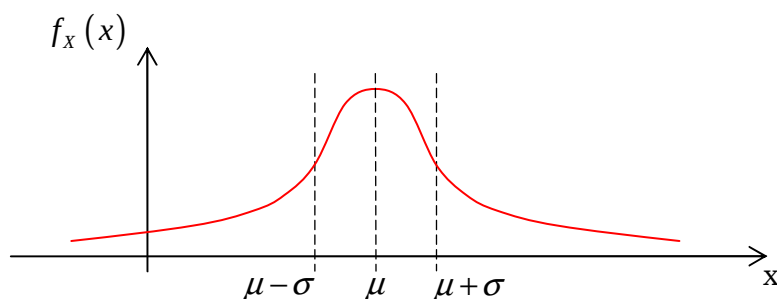
6.3 Definice: Normální (Gaussovo) rozdělení

Normální rozdělení s parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ definujeme takto:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Značení:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



Obr.: Normální rozdělení

Poznámka: Význam μ, σ^2 : μ je parametr polohy gaussovy křivky, σ^2 je parametr měřítka – jak bude křivka úzka nebo protáhlá

Poznámka: Je hustota norm. rozdělení normována na 1?

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx &= \left| \begin{array}{l} \frac{x-\mu}{\sigma} = t \\ \frac{1}{\sigma} dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \left| \begin{array}{l} \frac{t^2}{2} = s \\ t dt = ds \end{array} \right| = \\
&= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2s}} e^{-s} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1
\end{aligned}$$

6.3.1 Definice: Standardní normální rozdělení

Standardní normální rozdělení má počátek $\mu = 0$ a rozptyl $\sigma^2 = 1$:

$$X \sim N(0,1)$$

Hustota: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, **Distribuční funkce:** $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$

6.3.2 Věta: Vlastnosti standardního normálního rozdělení

Pro funkci $\phi(x)$ platí:

$$\phi(x) = 1 - \phi(-x)$$

Důkaz: Pomocí substituce:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \left| \begin{array}{l} -t = s \\ -dt = ds \end{array} \right| = \dots = 1 - \phi(-x)$$

6.3.3 Věta: Vztah standardní a obecné distr. fce normálního rozdělení

Nechť $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Potom:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Důkaz: Výpočtem přes hustotu:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \left| \begin{array}{l} \frac{t-\mu}{\sigma} = s \\ \frac{1}{\sigma} dt = ds \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

6.3.3.1 Poznámka: Výpočet norm. rozdělení ze standardního

Stačí tabelovat hodnoty $\phi(x)$, $x > 0$:

Příklad: $X \sim N(2, 16)$, $F_X(1) = ?$

$$F_X(1) = \phi\left(\frac{1-2}{4}\right) = \phi\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - \phi\left(\frac{1}{4}\right) \doteq \underline{\underline{0,401}}$$

$\phi(1/4)$ lze najít v tabulkách pro normální rozdělení.

6.3.4 Věta: (Ne)linearita normálního rozdělení

Nechť $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Potom

$$aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Důkaz: Vycházíme z věty 5.3:

$$Y = aX + b = h(X), \quad h^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}, \quad \frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{a}$$

Nyní dosadíme do vzorce z věty 5.3:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2\right) \cdot \frac{1}{|a|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2 \sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2a^2 \sigma^2}(y - (a\mu + b))^2\right) = \underline{\underline{N(a\mu + b, a^2 \sigma^2)}} \end{aligned}$$

6.3.4.1 Důsledek

Nechť $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

6.3.5 Příklad: Normální rozdělení I

Náhodná veličina X má normální rozdělení $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Jaká je pravděpodobnost

$P[|X - \mu| < k\sigma]$, $k > 0$.

$$\begin{aligned} P[|X - \mu| < k\sigma] &= P[-k\sigma < X - \mu < k\sigma] = P\left[-k < \frac{X - \mu}{\sigma} < k\right] = \\ &= P[-k < U < k] = \underline{\underline{\phi(k) - \phi(-k)}} \end{aligned}$$

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

6.3.6 Příklad: Normální rozdělení – pravděpodobnosti různých rozptylů

Příklad navazuje na předchozí příklad 6.3.5. Jaké jsou pravděpodobnosti, že náhodná veličina X padne do rozptylů $(-\sigma, +\sigma)$, $(-2\sigma, 2\sigma)$, $(-3\sigma, 3\sigma)$?

$$P[|X - \mu| < \sigma] = \Phi(1) - \Phi(-1) = \underline{\underline{0,6827}}$$

$$P[|X - \mu| < 2\sigma] = \Phi(2) - \Phi(-2) = \underline{\underline{0,9555}}$$

$$P[|X - \mu| < 3\sigma] = \Phi(3) - \Phi(-3) = \underline{\underline{0,9973}}$$

Odtud platí pravidlo 3σ : Náhodná veličina s normálním rozdělením nabyde s pravděpodobností 99,73% hodnoty z intervalu $\pm 3\sigma$.

6.4 Definice: Logaritmicko-Normální rozdělení

Logaritmicko-Normální rozdělení s parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ definujeme takto:

$$f_x(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ pro } x > 0 \text{ jinak se rovná } 0$$

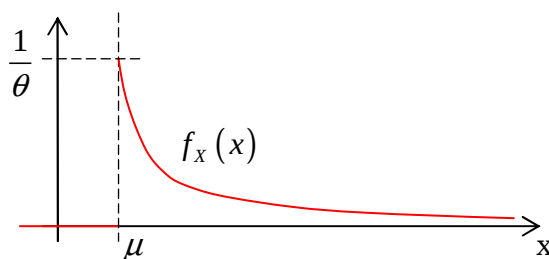
Značení: $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$

6.5 Definice: Exponenciální rozdělení

Exponenciální rozdělení s parametry $\mu \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}^+$ definujeme takto:

$$f_x(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x - \mu}{\theta}\right) \text{ pro } x > \mu \text{ jinak se rovná } 0$$

Značení: $X \sim \text{Exp}(\mu, \theta)$



Obr.: Exponenciální rozdělení

Poznámka: Distribuční funkce:

$$F_X(x) = \int_{\mu}^x \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{t-\mu}{\theta}\right) dt = \left[\frac{t-\mu}{\theta} = s \right] = \int_0^{\frac{x-\mu}{\theta}} e^{-s} ds = \left[-e^{-s} \right]_0^{\frac{x-\mu}{\theta}} = 1 - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\theta}\right)$$

Poznámka: Někdy se nazývá rozdělení bez paměti.

$$X \sim \text{Exp}(0,1) = \text{Exp}(\theta), \quad P[X > a+x | X > a] = P[X > x]$$

Např. zařízení, které už pracovalo a hodin bude pracovat ještě x hodin stejně jako úplně nové.

Použití: teorie spolehlivosti, teorie hromadné obsluhy.

Důkaz této vlastnosti:

$$\begin{aligned} P[X > a+x | X > a] &= \frac{P[(X > a+x) \cap (X > a)]}{P[X > a]} = \frac{P[X > a+x]}{P[X > a]} = \frac{1 - P[X \leq a+x]}{1 - P[X \leq a]} = \\ &= \frac{\text{Exp}\left[-\frac{a+x}{\theta}\right]}{\text{Exp}\left[-\frac{a}{\theta}\right]} = \text{Exp}\left(-\frac{x}{\theta}\right) = 1 - F(x) = P[X > x] \end{aligned}$$

Poznámka: $\text{Exp}(0, \theta) = \text{Exp}(\theta) = \text{Gamma}(1, \theta)$

6.6 Definice: Piersenovo rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, rozdělené $X_i \sim N(0,1)$, $\forall i \in \hat{n}$. Potom říkáme, že náhodná veličina

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

Má **Piersenovo χ^2 rozdělení** s $n \in \mathbb{N}$ stupni volnosti definujeme takto:

Značení: $X \sim \chi^2(n)$

Poznámka: $\chi^2(n) = \text{Gamma}\left(\frac{n}{2}, 2\right)$

Použití: Testování hypotéz, testy dobré shody.

6.7 Definice: Studentovo rozdělení

Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny a platí:

$$X \sim N(0,1) \text{ a } Y \sim \chi^2(n)$$

potom říkáme, že

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

má **studentovo rozdělení** s n stupni volnosti.

Značení: $T \sim t(n)$

6.8 Definice: Fischerovo rozdělení

Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny a platí:

$$X \sim \chi^2(m) \text{ a } Y \sim \chi^2(n)$$

potom říkáme, že

$$Z = \frac{X/m}{Y/n}$$

má **Fischerovo rozdělení** s (m, n) stupni volnosti.

Značení: $Z \sim F(m, n)$

7 Charakteristiky náhodných veličin

7.1 Střední hodnota

7.1.1 Definice: Střední hodnota diskrétního rozdělení

Nechť náhodná veličina X má diskrétní rozdělení. Potom **střední hodnotou** náhodné veličiny X rozumíme číslo:

$$EX = \sum_i x_i P[X = x_i] = \sum_i x_i p_i$$

pokud řada absolutně konverguje.

7.1.2 Definice: Střední hodnota spojitého rozdělení

Nechť náhodná veličina X má ASR. Potom **střední hodnotu** náhodné veličiny X definujeme jako:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

kde $f_X(x)$ je hustota náhodné veličiny X a integrál absolutně konverguje.

7.1.3 Věta: Střední hodnota funkce náhodné veličiny

Nechť $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $Y = h(X)$ je náhodná veličina. Potom:

1. Pokud X má diskrétní rozdělení, platí

$$EY = E(h(X)) = \sum_i h(x_i) \cdot P[X = x_i] = \sum_i h(x_i) \cdot p_i, \text{ pokud } EY \text{ existuje}$$

2. Pokud X má ASR, platí:

$$EY = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cdot f_X(x) dx, \text{ pokud integrál absolutně konverguje}$$

Důkaz:

1. triviální ☺
2. pro h ostře rostoucí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cdot f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \begin{array}{l} x = h^{-1}(y) \\ dx = \frac{dh^{-1}(y)}{dy} dy \end{array} \right| = \int_{h(-\infty)}^{h(+\infty)} y f_X(h^{-1}(y)) \underbrace{\frac{dh^{-1}(y)}{dy}}_{f_Y(y)} dy = \\ &= \int_{h(-\infty)}^{h(+\infty)} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = EY \end{aligned}$$

7.1.4 Poznámka: Střední hodnota funkce náhodného vektoru

Pro náhodné vektory X, Y a $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ platí:

1. Pokud X má diskrétní rozdělení, platí

$$E(h(X, Y)) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) \cdot P[X = x_i, Y = y_j]$$

2. Pokud X má ASR, platí:

$$E(h(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

3. $\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$, $EX = E(X_1, \dots, X_n) = (EX_1, \dots, EX_n)$

7.1.5 Věta: Sčítání středních hodnot

Nechť X, Y mají diskrétní nebo ASR a necht' $\exists EX$ a $\exists EY$. Potom $\exists E(X + Y)$ a platí:

$$E(X + Y) = EX + EY$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_i \sum_j (x_i + x_j) \cdot P[X = x_i, X = x_j] = \\
&= \sum_i \sum_j x_i \cdot P[X = x_i, X = x_j] + \sum_i \sum_j y_j \cdot P[X = x_i, X = x_j] = \\
&= \sum_i x_i \sum_j P[X = x_i, X = x_j] + \sum_j y_j \sum_i P[X = x_i, X = x_j] = \underline{\underline{EX + EY}}
\end{aligned}$$

Pro spojité náhodné veličiny se sumy nahradí integrály:

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y) \cdot f_{X,Y}(x,y) dx dy = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx}_{f_Y(y)} \right) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy}_{f_X(x)} \right) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \underline{\underline{EX + EY}}
\end{aligned}$$

7.1.6 Věta: Násobení střední hodnoty konstantou

Pro libovolnou náhodnou veličinu X pro kterou $\exists EX$ a libovolnou $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$E(cX) = cE(X)$$

Důkaz: $E(cX) = \sum_i cx_i p_i = c \sum_i x_i p_i = c \cdot EX$

7.1.7 Tvzení: Střední hodnota konstanty

Pro všechna $a \in \mathbb{R}$, $Ea = a$.

Důkaz: Pro náhodnou veličinu X platí

$$\begin{aligned}
P[X = a] &= 1 \\
Ea &= a \cdot P[X = a] = a
\end{aligned}$$

7.1.8 Důsledek: Linearita střední hodnoty

Pro náhodnou veličinu X a konstanty $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

7.1.9 Věta: Násobení střední hodnoty

Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny mající diskrétní nebo ASR. Potom

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y), \text{ pokud } \exists EX \text{ a } \exists EY.$$

Důkaz: Využijeme nezávislosti: $f_{X,Y}(x, y) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$:

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f_X(x) f_Y(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy = EX \cdot EY \end{aligned}$$

7.2 Momenty náhodných veličin

7.2.1 Definice: Obecný a centrální moment

Nechť X je náhodná veličina a $k \in \mathbb{N}$. Potom **k -tým obecným momentem** náhodné veličiny X rozumíme číslo

$$\mu'_k = E(X^k) \text{ pokud existuje.}$$

Dále **k -tým centrálním momentem** náhodné veličiny X rozumíme číslo

$$\mu_k = E(X - EX)^k \text{ pokud vše existuje}$$

7.2.2 Poznámka: Několik triviálních momentů

$$\begin{aligned} \mu'_0 &= 1 & \mu_0 &= 1 \\ \mu'_1 &= EX & \mu_1 &= E(X - EX) = EX - E(EX) = 0 \\ \mu'_2 &= EX^2 & \mu_2 &= E(X - EX)^2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 \end{aligned}$$

Platí: Každý centrální moment lze vyjádřit jako funkce obecných momentů.

Poznámka: EX vyjadřuje hodnotu, kolem které kolísají hodnoty náhodné veličiny X a $VarX$ vyjadřuje velikost tohoto kolísání.

7.2.3 Definice: Rozptyl a směrodatná odchylka

Druhý centrální moment náhodné veličiny X nazýváme **rozptyl** náhodné veličiny X a značíme:

$$VarX = E(X - EX)^2$$

Směrodatnou odchylku náhodného vektoru X rozumíme číslo

$$s.d.X = \sqrt{VarX}$$

7.2.4 Věta: Výpočet rozptylu

Nechť X je náhodná veličina a necht' $\exists EX$ a $\exists EX^2$. Potom platí:

$$\text{Var}X = EX^2 - (EX)^2$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}\text{Var}X &= E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2(EX)X + (EX)^2) = \\ &= EX^2 - (2EX)EX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2\end{aligned}$$

7.2.5 Věta: (Ne)linearita rozptylu

Nechť X je náhodná veličina pro kterou $\exists EX$, $\exists EX^2$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Potom:

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}X$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}\text{Var}(aX + b) &= E(aX + b - E(aX + b))^2 = E(aX + b - aEX - b)^2 = \\ &= E(a^2X^2 - 2a^2XEX + a^2(EX)^2) = a^2(EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2) = a^2 \text{Var}X\end{aligned}$$

7.2.6 Věta: Součet rozptylů

Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny a necht' $\exists EX^2$ a $\exists EY^2$. Potom:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}X + \text{Var}Y$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X + Y) &= E(X + Y - E(X + Y))^2 = E(X - EX + Y - EY)^2 = \\ &= E(\underbrace{(X - EX)^2}_{\text{Var}X} + \underbrace{(Y - EY)^2}_{\text{Var}Y} + \underbrace{2E[(X - EX)(Y - EY)]}_{=0}) \\ E[(X - EX)(Y - EY)] &= E(XY - X \cdot EY - Y \cdot EX + EX \cdot EY) = \\ &= E(XY) - EX \cdot EY - EX \cdot EY + EX \cdot EY = 0\end{aligned}$$

7.2.7 Příklad: Střední hodnota a rozptyl binomického rozdělení

Náhodná veličina X má binomické rozdělení $X \sim \text{Bi}(n, p)$; $EX = ?$, $\text{Var}X = ?$.

$$P[X = j] = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^n i \frac{n!}{(n-i)!i!} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^n \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} p^i (1-p)^{n-i} = \\
&= np \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i} = |j=i-1| = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} = \\
&= np (p + (1-p))^{n-1} = \underline{\underline{np}}
\end{aligned}$$

$$EX^2 = \sum_{i=0}^n i^2 \cdot P[X=i] = \sum_{i=0}^n i(i-1)P[X=i] + \sum_{i=0}^n iP[X=i] = n(n-1)p^2 + np$$

$$\text{Var}X = EX^2 - (EX)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = \underline{\underline{np(1-p)}}$$

7.2.8 Příklad: Střední hodnota a rozptyl normálního rozdělení

Náhodná veličina X má normální rozdělení $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $EX = ?$, $\text{Var}X = ?$.

$$\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) f_X(x) dx}_0 + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu f_X(x) dx}_{\mu} = \underline{\underline{\mu}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx &= \left| \frac{x-\mu}{\sigma} = t \right| = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t \exp(-t^2/2) dt}_0 = 0
\end{aligned}$$

antisymetrický
integrál

Nyní výpočet $\text{Var}X$:

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2 + 2\mu x - 2\mu^2 + \mu^2) f_X(x) dx = \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) dx}_{\sigma^2} + \underbrace{2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) f_X(x) dx}_0 + \underbrace{\mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx}_1 = \sigma^2 + \mu^2 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx &= \left| \frac{x-\mu}{\sigma} = t \right| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \left| \frac{t^2}{2} = s \right| = \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{2s} e^{-s} ds = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{s} e^{-s} ds = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2
\end{aligned}$$

$$\text{Var}X = EX^2 - (EX)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \underline{\underline{\sigma^2}}$$

7.2.9 Definice: Koeficient šikmosti a špičatosti

Nechť X je náhodná veličina. Číslo:

$$\alpha_3(x) = \frac{\mu_3(x)}{(\text{Var}X)^{3/2}}$$

definujeme jako **koeficient šikmosti** a číslo

$$\alpha_4(x) = \frac{\mu_4(x)}{(\text{Var}X)^2}$$

definujeme jako **koeficient špičatosti**.

Koeficient šikmosti měří jistým způsobem míru symetrie. Koeficient špičatosti měří jestli je daná hustota „plošší“ nebo „špičatější“ než normální rozdělení.

7.3 Momenty náhodných vektorů

Pro lineárně nezávislé vektory (LN) definujeme vše stejně jako pro jednotlivé náhodné veličiny.

Pokud pracujeme s lineární závislostí – zkoumáme interakci mezi složkami.

7.3.1 Definice: Kovariance náhodných veličin

Kovariance náhodných veličin X a Y definujeme jako

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

pokud EX existuje.

7.3.2 Věta: Výpočet kovariance

Nechť X, Y pro náhodné veličiny. Potom platí

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Důkaz: dosazení z definice.

Důsledek: $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}X$

Poznámka: Pokud jsou X, Y nezávislé, tak kovariance je nula.

7.3.3 Definice: Koeficient korelace

Nechť X, Y jsou náhodné veličiny. Potom číslo:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}X \cdot \text{Var}Y}}$$

nazýváme **koeficient korelace** náhodných veličin X, Y .

Poznámka: Jedná se o kovarianci, kterou normalizujeme pomocí rozptylů.

7.3.4 Věta: Vlastnosti koeficientu korelace

Pro náhodné veličiny X, Y platí, že:

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{Přitom rovnost: } \rho(X, Y) = 1 \text{ nastává} &\Leftrightarrow (\exists \beta > 0)(Y - EY = \beta(X - EX)) \\ \rho(X, Y) = -1 &\Leftrightarrow (\exists \gamma < 0)(Y - EY = \gamma(X - EX)) \end{aligned}$$

Důkaz: potřebujeme lemma 7.3.4.1. Důkaz provedeme potom.

7.3.4.1 Lemma: Schwarzova nerovnost

Pro náhodné veličiny X, Y platí, že:

$$[E(X \cdot Y)]^2 \leq EX^2 \cdot EY^2$$

Důkaz:

$$Z = aX - Y, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq EZ^2 = E(aX - Y)^2 = E(a^2X^2 - 2aXY + Y^2) = a^2EX^2 - 2aE(XY) + E(Y^2)$$

Diskriminant:

$$\begin{aligned} D \leq 0 &\Rightarrow 4[E(XY)]^2 - 4EX^2 \cdot EY^2 \leq 0 \\ [E(XY)]^2 &\leq EX^2 \cdot EY^2 \end{aligned}$$

7.3.4.2 Důkaz věty 7.3.4

Dokážeme pouze jednu implikaci a pouze pro koeficient β .

Máme náhodné veličiny $X - EX$ a $Y - EY$, pro které platí Schwarzova nerovnost 7.3.4.1:

$$\begin{aligned} \{E[(X - EX)(Y - EY)]\}^2 &\leq E(X - EX)^2 E(Y - EY)^2 \\ \text{Cov}^2(X, Y) &\leq E(X - EX)^2 E(Y - EY)^2 \\ \left| \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}X \cdot \text{Var}Y}} \right| &\leq 1 \\ \rho(X, Y) &\leq 1 \end{aligned}$$

Nyní dokážeme implikaci $\Leftarrow$ pro β :

$$\begin{aligned}
Y - EY &= \beta(X - EX) \\
Y &= \beta X - \underbrace{\beta \cdot EX + EY}_{-C} = \beta X + C \\
Cov(X, Y) &= E(X - EX)(\beta X + C - E(\beta X + C)) = E(X - EX)(\beta X - \beta \cdot EX) = \\
&= E(\beta X^2 - 2\beta X \cdot EX + \beta(EX)^2) = \beta E(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2) = \\
&= \beta[EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2] = \beta \cdot VarX \\
VarY &= Var(\beta X + C) = \beta^2 \cdot VarX \\
\rho(X, Y) &= \frac{\beta \cdot VarX}{\sqrt{VarX \cdot VarY}} = \frac{\beta \cdot VarX}{\sqrt{\beta^2 \cdot VarX \cdot VarX}} = \begin{cases} +1, & \beta > 0 \\ -1, & \beta < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Pro γ je to podobné.

7.3.5 Definice: Nekorelované náhodné veličiny

Jestliže pro náhodné veličiny X, Y platí, že $\rho(X, Y) = 0$, nazýváme je **nekorelované**.

7.3.6 Věta: Vztah nekorelovaných a nezávislých náhodných veličin

Nezávislé náhodné veličiny X, Y jsou nekorelované. Neplatí naopak.

Důkaz:

$$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = EX \cdot EY - EX \cdot EY = 0$$

7.3.7 Příklad: Nezávislost, nekorelovanost náhodných veličin I

Náhodný vektor (X, Y) má rovnoměrné rozdělení na kruhu

$$\begin{aligned}
K &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \\
f_{X,Y}(x, y) &= 1/\pi \quad (x, y) \in K \\
&= 0 \quad \text{jinak}
\end{aligned}$$

Určete nezávislost a nekorelovanost.

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1/\pi dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, \quad x \in \langle -1; 1 \rangle \\
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1/\pi dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, \quad y \in \langle -1; 1 \rangle
\end{aligned}$$

Nezávislost:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x, y) - \underline{\text{nejsou nezávislé}}$$

Nyní korelace:

$$EX = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 x \sqrt{1-x^2} dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_{-1}^0 x \sqrt{1-x^2} ds + \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx \right) = \left| \begin{matrix} -x = s \\ -dx = ds \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_1^0 s \sqrt{1-s^2} ds + \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx \right) = 0$$

$$EY = 0$$

$$E(XY) = \iint xy \cdot \frac{1}{\pi} dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy \frac{1}{\pi} dy \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{\pi} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 - \underline{\text{jsou nekorelované}}$$

7.3.8 Poznámka: Vlastnost koeficientu korelace

$\rho(X, Y)$ vyjadřuje míru lineární závislosti.

$|\rho(X, Y)| \rightarrow 1$ - téměř lineární závislost náhodných veličin

$\rho(X, Y) \rightarrow 0$ - X, Y jsou nezávislé
- závislost je jiná než lineární

Pro velké ρ se hodnoty náhodných veličin vyvíjejí podobně. Nemusí mezi nimi být funkční vztah.

7.3.9 Definice: Kovarianční matice

Nechť je dán náhodný vektor $\mathbb{Z} = (X_1, \dots, X_n)$. Potom matici:

$$\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n, \text{ kde } \sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Nazýváme **kovarianční matici** náhodného vektoru $\mathbb{Z}$.

7.3.9.1 Poznámka: Vlastnosti kovarianční matice

- Σ je symetrická
- σ_{ii} je rozptyl i -té složky
- Pokud $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé $\rightarrow \Sigma$ je diagonální

7.4 Kvantily náhodné veličiny

7.4.1 Definice α -kvantilu

Nechť náhodná veličina X má distribuční funkci F_X a necht' $\alpha \in \langle 0; 1 \rangle$. Potom bod $x_\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme **α -kvantilem** náhodné veličiny X právě když platí:

$$x_\alpha = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\}$$

Pokud je F_X spojitá a ostře rostoucí, potom α -kvantil náhodné veličiny X je takový bod $x_\alpha \in \mathbb{R}$, ve kterém platí

$$F_X(x_\alpha) = \alpha, \quad x_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$$

$$F_X(x_\alpha) = \alpha \Rightarrow P[X \leq x_\alpha] - \text{Pravděpodobnost, že } x \text{ nabude hodnotu menší než } x_\alpha \text{ je } \alpha.$$

7.4.2 Příklady α -kvantilů

$x_{0,5}$	- Medián
$x_{0,25}$	- Dolní kvartil
$x_{0,75}$	- Horní kvartil
$x_{0,75} - x_{0,25}$	- Mezikvartilové rozpětí – Pravděpodobnost, že sem padne nějaká hodnota je 50%.

7.5 Charakteristická a momentová funkce

7.5.1 Definice: Charakteristická funkce

Charakteristickou funkci náhodné veličiny X definujeme:

$$\psi_X(t) = E(e^{itX}), \quad t \in \mathbb{R}$$

Poznámka: $\psi_X(t)$ existuje pro $\forall t \in \mathbb{R}$. $\psi_X(0) = 1$; $|\psi_X(t)| \leq 1$; $|e^{itX}| = |\cos tX + i \sin tX| = 1$.

7.5.2 Definice: Momentová vytvářející funkce

Nechť náhodná veličina X má konečné všechny momenty. Potom definujeme **momentovou vytvářející funkci** (MVT) náhodné veličiny X předpisem:

$$M_X(t) = E(e^{tX}), \quad t \in \mathbb{R}$$

Poznámka: Použití - výpočet momentů náhodné veličiny X .
- určení rozdělení součtu nezávislých náhodných veličin

Poznámka: X - je spojitá, $\psi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{itx} dx$, tedy Fourierova transformace

7.5.3 Věta: Výpočet momentů z momentové vytvářející funkce

Nechť náhodná veličina X má MVT M_X . Potom platí, že:

$$\left. \frac{d^k M_X}{dt^k} \right|_{t=0} = \mu'_k$$

Důkaz: DOPLNIT

7.5.4 Příklad: Momentová vytvářející funkce s Poissonovým rozdělením

Náhodná veličina X má poissonovo rozdělení:

$$X \sim Po(\lambda), P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, \dots$$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Potom lze provádět výpočty např.:

$$EX = \mu'_1 = \left. \frac{dM_X}{dt} \right|_{t=0} = \lambda - \text{střední hodnota}$$

$$EX^2 = \mu'_2 = \left. \frac{d^2 M_X}{dt^2} \right|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$$

$$\text{Var}X = EX^2 - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

atd...

7.5.5 Příklad: Momentová vytvářející funkce s normálním rozdělením

Náhodná veličina X má normální rozdělení $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Určete momentovou vytvářející funkci.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x-\mu}{\sigma} = y \\ \frac{dx}{\sigma} = dy \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(t(\sigma y + \mu) - \frac{y^2}{2}\right) dy = \\ &= \frac{e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-t\sigma)^2} dy = \left| \begin{array}{l} y-t\sigma = z \\ dy = dz \end{array} \right| = \dots = \underline{\underline{e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}}} \end{aligned}$$

7.5.6 Příklad: Momentová vytvářející funkce s Gamma rozdělením

Náhodná veličina X má Gamma rozdělení $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Určete momentovou vytvářející funkci, střední hodnotu a rozptyl.

7.5.7 Poznámka: Vztah momentové vytvářející a distribuční funkce

Nechť X má konečné všechny momenty a MVF M_X . Potom MVF M_X jednoznačně určuje F_X a naopak.

Pokud X, Y mají stejné rozdělení $\Rightarrow X, Y$ mají stejné M_X, M_Y a naopak.

7.5.8 Věta: Linearita momentové vytvářející funkce

Nechť náhodná veličina X má MVF M_X . Potom náhodná veličina $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ má MVF:

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(a \cdot t)$$

Důkaz: DOPLNIT

7.5.9 Věta: Součet MVF

Nechť $(X_1, \dots, X_n)$ jsou nezávislé náhodné veličiny s MVF $M_{X_1}, \dots, M_{X_n}$. Potom náhodná veličina $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ má MVF:

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t)$$

Důkaz: DOPLNIT

7.5.9.1 Příklad: MVF pro součet Po rozdělení

Nezávislé náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ mají Poissonovské rozdělení $X_i \sim \text{Po}(\lambda_i)$. Určete rozdělení $Y = X_1 + \dots + X_n$.

$$M_{X_j}(t) = e^{-\lambda_j(e^t - 1)} \text{ - viz příklad 7.5.4.}$$

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(e^t - 1)} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i(e^t - 1)} \Rightarrow Y \sim \underline{\underline{\text{Po}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)}}$$

7.5.9.2 Příklad: Součet kvadrátů normálního rozdělení – MVF

Nezávislé náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ mají normální rozdělení $X_i \sim N(0, 1)$. Spočítejte hustotu pravděpodobnost rozdělení $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$.

Nejdříve momentová vytvářející funkce náhodných veličin X_i^2 :

$$M_{X_i^2}(t) = E(e^{tx^2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = (1-2t)^{-1/2}$$

Hustotu pravděpodobnosti pro $Y = X^2$ jsme už řešili:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right)$$

$$f_{X_i^2}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \right) \sim \text{Gamma}\left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

DOPLNIT

8 Limitní věty

Budeme se zabývat posloupnostmi náhodných veličin:

$$(X_n)_{n=1}^{\infty}$$

- Z_n - počet výskytů jevu A v n pokusech $p(A) = p$
 $X_n = \frac{Z_n}{n}$ - Relativní četnost A v n pokusech.
- $X_1, \dots, X_n$ - n nezávislých měření. $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

8.1 Definice: Konvergence podle pravděpodobnosti

Nechť $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost náhodných veličin a $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ **konverguje k c podle pravděpodobnosti**, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ platí:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P[|X_n - c| \geq \varepsilon] = 0$$

DOPLNIT – Příklad, graf

8.2 Věta: Čebyševova nerovnost

Nechť X je náhodná veličina se střední hodnotou EX a konečným rozptylem $\text{Var}X$. Potom pro $\forall \varepsilon > 0$ platí

$$P[|X - EX| \geq \varepsilon] \leq \frac{\text{Var}X}{\varepsilon^2}$$

Důkaz: DOPLNIT

8.3 Věta: Zákon velkých čísel

Nechť $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin se společnou střední hodnotou $\mu = EX_i$ a rozptylem $\sigma^2 = E(X_i - \mu)^2$. Potom:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$$

Důkaz: DOPLNIT

Poznámka: DOPLNIT

8.4 Příklad: Pravděpodobnost mnoha hodů mincí

S jakou pravděpodobností můžeme tvrdit, že při 1000 hodech mincí padne orel 400-600x ?

$$X_1, \dots, X_{1000}, X_i \sim Be(1/2)$$

$$EX_i = 1 \cdot 1/2 + 0 \cdot (1 - 1/2) = 1/2, \quad EX_i^2 = 1^2 \cdot 1/2 + 0^2 \cdot (1 - 1/2) = 1/2, \quad \text{Var}X = 1/2 - 1/4 = 1/4$$

$$Y = \sum_{i=1}^{1000} X_i, \quad EY = 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500, \quad \text{Var}Y = 1000 \cdot \frac{1}{4} = 250$$

$$\begin{aligned} P[400 \leq Y \leq 600] &= ? & P[|Y - EY| \geq \varepsilon] &\leq \frac{\text{Var}Y}{\varepsilon^2} \\ & & P[|Y - 500| \geq 100] &\leq \frac{250}{100^2} = 0,025 \\ & & P[|Y - 500| < 100] &\geq 1 - 0,025 = \underline{\underline{0,975}} \end{aligned}$$

8.5 Definice: Konvergence v distribuci

Nechť $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost náhodných veličin s distribučními funkcemi F_{X_n} a necht' X je náhodná veličina s distribuční funkcí F_X . Řekneme, že posloupnost $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ **konverguje k náhodné veličině X v distribuci**, jestliže platí:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \text{ ve všech bodech spojitosti } F_X$$

Poznámka: Značení $X_n \xrightarrow{L} X$.

Pro konkrétní případ: řekneme, že X_n konverguje v distribuci k náhodné veličině s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$ jestliže:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad X_n \xrightarrow{L} N(\mu, \sigma^2)$$

8.6 Věta: Centrální limitní věta (CLV) (Lindeberg – Levi)

Nechť $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin se společnou střední hodnotou μ a konečným rozptylem σ^2 . Potom:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

Poznámka: DOPLNIT

8.7 Věta: Mouvre – Laplace 1718

Nechť $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin. $X_n \sim Be(p)$. Potom platí:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

Poznámka: DOPLNIT

8.8 Použití centrálních limitních vět

8.8.1 Příklad: Správné množství cestujících na lodi

Máme loď s nosností 5000 kg. Váha cestujícího je náhodná veličina 70 kg a směrodatná odchylka 20 kg. Kolik cestujících se smí nalodit, aby pravděpodobnost přetížení byla menší než 0,1%?

Označíme veličiny: X_i - váha i -tého cestujícího, Y - váha všech cestujících.

Střední hodnota a rozptyl Y :

$$EY = E \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n EX_i = n \cdot 70, \quad \text{Var} Y = \text{Var} \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \text{Var} X_i = n \cdot 400$$

Nyní spočteme pravděpodobnost:

$$\begin{aligned} P[Y \geq 5000] &\leq 0,001 & 1 - \Phi\left(\frac{5000 - 70n}{20\sqrt{n}}\right) &\leq 0,001 \\ P\left[\underbrace{\frac{Y - 70n}{20\sqrt{n}}}_{\xrightarrow{L} N(0,1)} \geq \frac{5000 - 70n}{20\sqrt{n}}\right] &\leq 0,001 & \Phi\left(\frac{5000 - 70n}{20\sqrt{n}}\right) &\geq 0,999 \\ & & \frac{5000 - 70n}{20\sqrt{n}} &\geq 3,0902 \\ P\left[U \geq \frac{5000 - 70n}{20\sqrt{n}}\right] &\leq 0,001 & 70n + 61,804\sqrt{n} - 5000 &\leq 0 \\ & & - 75 - & n \leq \underline{\underline{64}} \end{aligned}$$

8.8.2 Příklad: 1000 hodů mincí

Tisíc hodů mincí, P ? orel padne 450x až 550x.

$$Y - \text{opčet orlů}, Y \sim Bi(1000; \frac{1}{2})$$
$$p = \frac{1}{2} \rightarrow EY = np = 500 \rightarrow \text{Var}Y = 250$$

Aproximujeme pomocí centrální limitní věty:

$$P[450 \leq Y \leq 550] = P\left[-\frac{50}{\sqrt{250}} \leq \frac{Y-500}{\sqrt{250}} \leq \frac{50}{\sqrt{250}}\right] \doteq P\left[-\frac{50}{\sqrt{250}} \leq U \sim N(0,1) \leq \frac{50}{\sqrt{250}}\right] =$$
$$= \Phi\left(\frac{50}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(-\frac{50}{\sqrt{250}}\right) = 2\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{250}}\right) - 1 = \underline{\underline{0,9984}}$$

Nebo např. pro jiné hodnoty:

$$P[480 \leq Y \leq 520] = 2\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{250}}\right) - 1 = \underline{\underline{0,7941}}$$

Pokud bychom to spočítali pomocí binomického rozdělení, vyjde: 0,7939.

9 Matematická statistika

Máme reálný problém, chceme ho řešit statistikou.

- Odhad tvaru rozdělení (volba modelu)
 - o Může pomoci histogram
 - o Většinou založeno na intuici a předchozí zkušenosti.
- Odhad parametrů rozdělení
 - o Bodový odhad: data $X_1, \dots, X_n$, $F_X(x, \theta)$, konstruujeme $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ s cílem, aby udávala nejpravděpodobnější hodnotu parametru θ .
 - o Intervalový odhad: Konstruujeme $\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ a $\bar{\theta}(X_1, \dots, X_n)$,
$$P\left[\underline{\theta}(\vec{X}) \leq \theta \leq \bar{\theta}(\vec{X})\right] \geq 1 - \alpha, \alpha \in (0,1).$$
- Ověření modelu
 - o Testování hypotéz: Hledání odpovědi ANO-NE na parametry, například:
 H : parametr θ je 5 ? $P[H_0 \text{ platí}] \geq 1 - \alpha$ - ano H_0 přijmeme – ne H_0 zamítneme
 - o Testy dobré shody: Ověření teoretického rozdělení. Např.: Má počet zákazníků Poissonovo rozdělení?

Ω - Populace, ω - Individuum, element, živel, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je Vlastnost Ω

9.1 Definice: Náhodný výběr

n -tice nezávislých náhodných veličin $X_1, \dots, X_n$ stejně rozdělených s distribuční funkcí F nazýváme **náhodný výběr** z rozdělení F .

Poznámka: Velikost výběru ovlivní přesnost rozhodování. Jak vybrat nezávislé elementy?

Poznámka: Pokud je výběr hotov, máme n -tice naměřených hodnot (pevných čísel). Jedna realizace $(x_1, \dots, x_n)$ z náhodných veličin $(X_1, \dots, X_n)$.

9.2 Definice: Statistika

Statistika je libovolná funkce náhodného výběru $X_1, \dots, X_n$ jejíž funkční předpis nezávisí na parametru příslušného rozdělení.

9.2.1 Příklady statistik

Výběrový průměr: $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $E\bar{X}_n = \mu$ pro $EX_i = \mu$ - odpovídá střední hodnotě

Výběrový rozptyl: $s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ - odpovídá rozptylu

Výběrová směrodatná odchylka: $s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}$

R-tý výběrový moment: $m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$, $r = 1, 2, \dots$

9.3 Odhady parametrů

V celé kapitole předpokládáme napozorovaná data $X_1, \dots, X_n$, známe rozdělení $X \sim F_X(x, \theta)$; $\theta \in \Theta$, úkolem je odhadnout neznámý parametr θ .

Poznámka: Ve statistice stříska $\hat{\theta}$ znamená odhad a dolní index $\hat{\theta}_n$ znamená, že odhad je určován na základě n prmetrů.

9.3.1 Definice: Bodový odhad

Bodový odhad parametru θ je libovolná funkce $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ jejíž funkční předpis nezávisí na θ . $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ je statistika. $X_1, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny $\Rightarrow \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ je náhodná veličina, má rozdělení pravděpodobnosti.

Poznámka: $\hat{\theta}_n$ je statistika a je to také náhodná veličina.

9.3.2 Definice: Nestrannost odhadu

Odhad $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ parametru θ se nazývá **nestranný**, jestliže:

$$E\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) = \theta, \quad \forall \theta \in \Theta$$

DOPLNIT – grafy

Poznámka: Nestrannost znamená, že odhad není zatížen symetrickou chybou.

9.3.3 Definice: Konzistentnost odhadu

Odhad $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ parametru θ se nazývá **konzistentní**, jestliže

$$\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{P} \theta, \quad \forall \theta \in \Theta$$

Poznámka: Konzistence zaručuje, že při vhodné volbě počtu pozorování n dokážeme udělat libovolně malou chybu.

I vychýlený (není nestranný) odhad může být konzistentní.

DOPLNIT – obrázek.

Poznámka: $E\hat{\theta}_n \rightarrow \theta \wedge \text{Var}\hat{\theta}_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ konzistence $\hat{\theta}_n$

9.3.4 Věta: Podmínka konzistence a nestrannosti

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení z distribučních funkcí $F(x, \mu, \sigma^2)$, kde $\mu = EX_1$, $\sigma^2 = \text{Var}X_1$. Potom výběrový průměr $\bar{X}_n$ je nestranný a konzistentní odhad parametru μ a výběrový rozptyl s_n^2 je nestranný a konzistentní odhad parametru σ^2 .

Důkaz: DOPLNIT

Poznámka: Situace se může změnit, pokud budeme znát jeden z parametrů. Například pokud známe $\mu = c \in \mathbb{R}$, tak s_n^2 už není nestranný odhad, ale:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - c)^2, \text{ je nestranný odhad } \sigma^2$$

Poznámka: Obecně existuje více nestranných odhadů. Např. pro $N(\mu, \sigma^2)$ je $\bar{X}_n$ nebo medián nestranný odhad parametru μ . Volíme odhad s co nejmenším rozptylem.

9.3.5 Definice: Nejlepší nestranný odhad

Odhad $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ se nazývá **nejlepší nestranný odhad** parametru θ , pokud je nestranný a pro každý jiný nestranný odhad $\hat{\theta}_n^0(X_1, \dots, X_n)$ platí:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \leq \text{Var}(\hat{\theta}_n^0), \text{ pro } \forall \theta \in \Theta$$

9.3.6 Poznámka: Rao-Cramerova mez

Existuje mez, pod kterou nemůže klesnout rozptyl nestranného odhadu. Pokud rozptyl našeho odhadu je roven této mezi, máme nejlepší nestranný odhad.

9.3.7 Poznámka: Příklady nejlepších nestranných odhadů

Je-li $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení:

$X \sim Bi, Po, Exp, N(\mu, \sigma^2)$ potom $\bar{X}_n$ je nejlepší nestranný odhad EX .

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ potom s_n^2 je nejlepší nestranný odhad σ^2 .

9.4 Metoda momentů

- Výpočetně jednoduchá
- Výsledky nemají obecně dobré teoretické vlastnosti
- Někdy se používá jako první odhad pro složitější metody

9.4.1 Definice: r -tý výběrový moment

Nechť máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení $F(x, \theta_1, \dots, \theta_k)$. Dále náhodný vektor

$$X \sim F(x, \theta_1, \dots, \theta_k).$$

r -tý obecný moment

$$\mu'_r = EX^r$$

r -tý výběrový moment

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$$

Podle Zákona velkých čísel $\Rightarrow m_r \xrightarrow{P} \mu'_r$.

9.4.2 Definice: Metoda momentů

Metoda momentů spočívá v porovnání prvních k -obecných a výběrových momentů.

$$\mu'_i = \mu'_i(\theta_1, \dots, \theta_k), \mu'_1 = m_1, \dots, \mu'_r = m_k \quad (*)$$

Postup v praxi:

1. Spočítáme $\mu'_r = \mu'_r(\theta_1, \dots, \theta_k)$
2. Spočítáme m_r na základě $X_1, \dots, X_n$
3. Ze soustavy (*) vyjádříme $\hat{\theta}_i = \theta_i(m_1, m_2, \dots, m_k)$

9.4.3 Příklad: Odhad parametrů na základě momentů I

Náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$. Hustota pravděpodobnosti $X \sim f(X, \theta_1, \theta_2)$.

$$f(X, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2} & \theta_1 \leq x \leq \theta_1 + \theta_2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Odhadněte parametry θ_1, θ_2 na základě $X_1, \dots, X_n$.

$$m_1 = \mu'_1 = EX = \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \theta_2} \frac{x}{\theta_2} dx = \frac{1}{\theta_2} \left[\frac{(\theta_1 + \theta_2)^2}{2} - \frac{\theta_1^2}{2} \right] = \theta_1 + \frac{\theta_2}{2}$$

$$m_2 = \mu'_2 = EX^2 = \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \theta_2} \frac{x^2}{\theta_2} dx = \frac{1}{\theta_2} \left[\frac{(\theta_1 + \theta_2)^3}{3} - \frac{\theta_1^3}{3} \right] = \theta_1^2 + \theta_1 \theta_2 + \frac{\theta_2^2}{3}$$

Nyní to otočíme a vyjádříme $\hat{\theta}(m_1)$:

$$m_1 = \theta_1 + \frac{\theta_2}{2}$$

$$m_2 = \theta_1^2 + \theta_1 \theta_2 + \frac{\theta_2^2}{3}$$

$$\theta_1 = m_1 - \theta_2/2$$

$$m_2 = (m_1 - \theta_2/2)^2 + (m_1 - \theta_2/2)\theta_2 + \theta_2^2/3 = m_1^2 + \theta_2^2/12$$

$$\theta_2 = \sqrt{12(m_2 - m_1^2)}$$

Dosadíme a vyjádříme:

$$\hat{\theta}_2 = \sqrt{12(m_2 - m_1^2)} = \sqrt{12 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 \right)^{1/2}}$$

$$\hat{\theta}_1 = m_1 - \frac{\hat{\theta}_2}{2} = \bar{X}_n - \sqrt{3 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 \right)^{1/2}}$$

9.4.4 Příklad: Odhad parametrů na základě momentů II

Máme náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n \sim Bi(n, p)$. Jak vypadají odhady parametrů $\hat{n}, \hat{p}$ pomocí metody momentů?

Z příkladu 7.2.7 známe:

$$EX = np, \text{Var}X = np(1-p), EX^2 = n(p-p^2) + n^2 p^2$$

Takže můžeme rovnou určit m_1 a m_2 :

$$m_1 = np$$

$$m_2 = np - np^2 + n^2 p^2$$

A funkce otočit

$$n = \frac{m_1}{p} \Rightarrow m_2 = m_1 - m_1 p + m_1^2 \Rightarrow \hat{p} = \frac{m_1 - m_2 + m_1^2}{m_1} \Rightarrow \hat{n} = \frac{m_1^2}{m_1 - m_2 + m_1^2}$$

9.5 Maximálně věrohodné odhady

9.5.1 Příklad: Maximálně věrohodné odhady I – Motivační příklad

X_1, X_2, X_3, X_4 je náhodný výběr z $Be(p)$. Odhadněte parametr p pokud jsme získali realizaci 0,0,1,0.

Sdružená pravděpodobnost Be rozdělení: $P[X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 0] = p(1-p)^3$

Snažíme se vzít takové p , že maximalizuje $P[\]$.

$$\frac{dP}{dp} = (1-p)^3 - 3p(1-p)^2 = (1-p)^2 [1-p-3p] = (1-p)^2 (1-4p) = 0$$

Výsledky kubické rovnice jsou zřejmé: 1 a $1/4$. Maximum P nabývá v bodě $1/4$.

$$\hat{p} = \frac{1}{4}$$

9.5.2 Definice: Věrohodnostní funkce

Sdruženou hustotu pravděpodobnosti náhodného výběru $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení s hustotou

$f_{X_i}(x_i, \theta)$, $\theta \in \Theta$ chápeme jako funkci parametru θ při daném pozorování

$(X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)$ nazýváme **věrohodnostní funkce**.

$$L(\theta) = \underbrace{\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i, \theta)}_{\text{spojité}}, \quad L(\theta) = \underbrace{\prod_{i=1}^n P_{\theta}[X_i = x_i]}_{\text{diskrétní}}$$

9.5.3 Definice: Maximálně věrohodný odhad

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Statistika $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ parametru θ se nazývá **maximálně věrohodný odhad** (MLE), jestliže platí:

$$L(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)) \geq L(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta$$

9.5.4 Poznámka: Postup výpočtu maximálně věrohodného odhadu

Máme $(X_1, \dots, X_n)$ předp. $f(x, \theta_1, \dots, \theta_k)$.

1. Vytvoříme věrohodnostní funkci $L(\theta_1, \dots, \theta_k)$.
2. Maximalizujeme $L(\theta_1, \dots, \theta_k)$ přes všechny možné hodnoty parametrů.

Často je vhodné maximalizovat $\ln L(\theta_1, \dots, \theta_k)$.

Dostaneme **věrohodnostní rovnici**:

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, \dots, k$$

Poznámky:

- Často výpočetně náročné. Řeší se numericky.
- Odhady nemusí být nestranné.
- Odhady jsou konzistentní.
- **Platí:** Pokud existuje nejlepší nestranný odhad, potom ho lze najít metodou maximální věrohodnosti.
- $g(\hat{\theta}_n)$, kde $\hat{\theta}_n$ je MLE, je odhadem $g(\theta)$. Tzn. je to invariantní vůči funkcím.
- Za obecných podmínek známe asymptotické rozdělení odhadů.

9.5.5 Příklad: Organismy pod mikroskopem

Mikroskopem sledujeme n políček. V každém políčku je k organismů. Počet políček, kde se nachází k organismů označíme n_k .

k	0	1	2	3	4	5	6	7
n_k	5	19	26	26	21	13	5	3
$\frac{n_k}{n}$	0,042	0,161	0,22	0,22	0,178	0,11	0,042	0,025

Odhadněte parametr λ Poissonova rozdělení tak, aby to nejlépe modelovalo danou situaci.

Nejdříve **obecně**:

$$X_1, \dots, X_n \sim Po(\lambda), \quad P[X = x_i] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}, \quad L(\lambda) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \lambda^{x_i} (x_i!)^{-1}$$

$$\ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^n \ln \left(e^{-\lambda} \lambda^{x_i} (x_i!)^{-1} \right) = \sum_{i=1}^n (\ln e^{-\lambda} + \ln \lambda^{x_i} - \ln (x_i!)) = -n\lambda + \ln \lambda \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i!$$

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X}_n$$

Takže nejlepší odhad parametru λ je výběrový průměr. x_i je počet mikroorganismů v i -tém políčku. Konkrétně pro náš příklad je to:

Celkový počet políček: $n = \sum_{i=1}^l n_i = 118$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{118} \sum_{i=1}^{118} x_i = \frac{1}{118} (0 \cdot 5 + 1 \cdot 19 + 2 \cdot 26 + 3 \cdot 26 + 4 \cdot 21 + 5 \cdot 13 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 3) = \frac{349}{118} \doteq \underline{\underline{2,96}}$$

$$P[X = x_i] = e^{-2,96} \frac{(2,96)^{x_i}}{x_i!}$$

Výsledky aproximace:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
P	0,052	0,153	0,227	0,224	0,166	0,098	0,049	0,020

9.5.6 Příklad: Odhad parametrů normálního rozdělení

Vypočtete, jak vypadají nejvěrohodnější odhady parametrů normálního rozdělení.

$$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2), \quad \hat{\mu}, \hat{\sigma}^2 = ?$$

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_j - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2\right)$$

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu) = 0 \Rightarrow -\mu n + \sum_{j=1}^n x_j = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \bar{X}_n}}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial (\sigma^2)} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2 = 0$$

$$= -n + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{X}_n)^2}}$$

9.6 Intervalové odhady

Zajímá nás interval, kde leží θ s určitou pravděpodobností.

Na základě náhodného výběru $X_1, \dots, X_n$ konstruujeme statistiky $\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n)$, $\bar{\theta}(X_1, \dots, X_n)$

tak, aby $P[\theta < \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n)] \leq \alpha/2$ a $P[\theta > \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n)] \leq \alpha/2$ neboli:

$$P[\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n) < \theta < \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n)] \geq 1 - \alpha \quad (0.1)$$

Kde α je nějaké malé kladné číslo, které nám říká s jakou přesností chceme interval stanovit.

9.6.1 Definice: Interval spolehlivosti

Dvojici statistik $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ splňující (0.1) nazýváme $100(1-\alpha)\%$ **interval spolehlivosti** pro parametr θ . Statistiku $\underline{\theta}$ nazýváme **dolní mez** a $\bar{\theta}$ **horní mez** intervalu spolehlivosti. Číslo $1-\alpha$ nazýváme **koeficientem spolehlivosti**.

9.6.2 Poznámka: Obvyklé intervaly spolehlivosti

Nejčastěji:

$\alpha = 0,05$
95% interval spolehlivosti

$\alpha = 0,01$
99% interval spolehlivosti

Interpretace: S pravděpodobností 95% (99%) leží parametr θ uvnitř intervalu $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$.

V praxi máme konkrétní porovnání $x_1, \dots, x_n$.

9.6.3 Poznámka: Jednostranné odhady

Někdy nás zajímají jednostranné odhady, tzn. hledáme $\underline{\theta}$, $\bar{\theta}$ tak aby:

$$\begin{array}{ccc} P[\theta < \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n)] \leq \alpha & P[\theta > \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n)] \leq \alpha & \\ P[\theta \geq \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n)] \geq 1-\alpha & P[\theta \leq \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n)] \geq 1-\alpha & \\ \text{Dolní} & \text{Horní} & \\ & \text{Intervalový odhad} & \end{array}$$

9.6.4 Věta: Určení intervalového odhadu

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ a necht' známe σ^2 .

Potom platí:

$$P\left[\bar{X}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

kde u_β je β -kvantil rozdělení $N(0,1)$.

Poznámka: Interval $\left(\bar{X}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ je $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro parametr μ .

Důkaz: DOPLNIT

9.6.5 Příklad: Životnost žárovek

Při kontrolních zkouškách 16 žárovek byl stanoven výběrový průměr $\bar{X}_{16} = 3000$ h a výběrová směrodatná odchylka $s_{16} = 20$ h jejich životnosti. Za předpokladu, že životnost žárovek je náhodná veličina s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$ určete 90% intervaly spolehlivosti pro μ, σ^2 .

Tzn. Zadání vypadá takto:

$$\bar{X}_n = 3000, s_n = 20, \alpha = 0,1, n = 16$$

Z tabulky, intervalový odhad je:

$$\left(\bar{X}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s_n}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right) = \left(3000 - t_{0,95}(15) \frac{20}{\sqrt{16}}; 3000 + t_{0,95}(15) \frac{20}{\sqrt{16}} \right)$$

Ze statistických tabulek: $t_{0,95}(15) = 1,753$

DOPLNIT

9.6.6 Příklad: Měření hloubky

Přístroj na měření hloubky. Jeho systematická chyba je nulová a náhodné chyby při měření mají směrodatnou odchylku $\sigma = 20$ m. Kolik nezávislých měření se musí udělat, aby změřil hloubku s pravděpodobností 95% s chybou 10m?

$$Y_i - \text{měření}, Y_i = h + X_i, X_i - \text{chyba}, X_i \sim N(0, \sigma^2 = 400)$$

$$\frac{1}{n} \sum_i^n Y_i = \frac{1}{n} \sum_i^n (h + X_i) = h + \frac{1}{n} \sum_i^n X_i = h + \bar{X}_n$$

Jedná se o chybu náhodného rozdělení se známým σ .

$$P \left[\bar{X}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X}_n < u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[|\mu - \bar{X}_n| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$$

DOPLNIT

9.7 Testování hypotéz

9.7.1 Příklad: Přejmutí dodávky

Dodávku přijmeme, pokud % zmetků $p \leq 0,05 \leftarrow$ nějaká mez.

Uděláme náhodný výběr zboží a otestujeme. Na základě výsledků se máme rozhodnout jestli přijmout nebo ne.

Matematický popis:

$$H_0 : p < 0,05 \quad \times \quad H_1 : p \geq 0,05$$

Testujeme hypotézu H_0 proti hypotéze H_1 .

9.7.2 Příklad: Zlepšení výrobního procesu

Změnili jsme výrobní proces a zajímá nás, jestli je lepší než ten starý.

Vyrobíme n_1 vzorků starým procesem a n_2 vzorků novým procesem. Jako náhodnou veličinu vezmeme nějaké měřítko kvality jednotlivých výrobků (např. %koroze, velikost, čistota atd...). Porovnáváme, jestli je střední hodnota kvality μ nových výrobků lepší než starých μ_0 :

$$H_0 : \mu < \mu_0 \quad \times \quad H_1 : \mu \geq \mu_0$$

9.7.3 Poznámka: Matematický popis testování hypotéz

Předpokládáme, že máme náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení z rodiny distribucí F_θ , $\theta \in \Theta$. Dále předpokládáme, že $\exists$ dvě vzájemně si konkurující hypotézy:

Nulová hypotéza: $H_0 : \theta \in \Theta_0, \quad \Theta_0 \subset \Theta$

Alternativní hypotéza: $H_1 : \theta \in \Theta_1, \quad \Theta_1 \subset \Theta - \Theta_0$

Testem nulové hypotézy H_0 proti alternativě H_1 rozumíme rozhodovací proces založený na náhodném výběru $X_1, \dots, X_n$ na jehož základě zamítneme nebo nezamítneme nulovou hypotézu H_0 .

Jsou tyto možnosti:

- a) H_0 platí a naše rozhodnutí je nezamítnout H_0 .
- b) H_0 platí a naše rozhodnutí je zamítnout H_0 .
- c) H_1 platí, H_0 neplatí a naše rozhodnutí je nezamítnout H_0 .
- d) H_1 platí, H_0 neplatí a naše rozhodnutí je zamítnout H_0 .

Pokud nastane případ a) nebo d), tak jsme neudělali žádnou chybu. V případě b) říkáme, že jsme udělali chybu **1. druhu**. V případě c) říkáme, že jsme udělali chybu **2. druhu**.

Z toho celého plyne, že postavení H_0 a H_1 není symetrické. Za H_0 volíme tu hypotézu, jejíž neoprávněné zamítnutí je závažnější.

Platí: Můžeme kontrolovat pouze chybu jednoho druhu (1. nebo 2.).

Zvolíme přiměřenou hodnotu α pro chybu 1. druhu (napevno). Může se stát, že chyba 2. druhu bude velká. Pokud za H_0 zvolíme tu hypotézu, jejíž neoprávněné zamítnutí je závažnější uděláme chybu maximálně α pokud H_0 zamítneme. Pokud H_0 přijmeme, může být chyba velká.

Volíme ze dvou výsledků:

- a) Na základě testu zamítáme H_0 (chyba maximálně α)
- b) Na základě testu nezamítáme H_0 (ale ani nepřijímáme – přijmutím riskujeme velkou chybu. Tzn. nevíme nic, test nám nic neřekl. Proto se snažíme test nastavit tak, abychom hypotézu H_0 zamítlí)

Rozdělili jsme parametrický prostor Θ na Θ_0 a Θ_1 , $(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{X}^n$, kde $\mathfrak{X}^n$ je výběrový prostor.

- Rozpadne se na dvě části, na body $(X_1, \dots, X_n)$, kde hypotézu H_0 zamítnout a kde nezamítnout.

Množinu $W \in \mathfrak{X}^n$ jimž je přiřazeno rozhodnutí zamítnout H_0 , nazýváme **kritický obor** pro test H_0 . W konstruujeme tak, aby pravděpodobnost chyby 1. druhu byla menší nebo rovna než α . Číslo α se nazývá **hladina významnosti testu**.

Výpočet se pak řídí:

Pokud $(X_1, \dots, X_n) \in W$ tak zamítáme H_0 . Kritický obor tedy musí splňovat:

$$P_{\theta}[(X_1, \dots, X_n) \in W] \leq \alpha, \forall \theta \in \Theta_0$$

Zadání příkladu obvykle vypadá:

Testujeme hypotézu H_0 proti alternativě H_1 na hladině významnosti α .

9.7.4 Testy hypotéz versus Intervalové odhady

Náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z $F(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Úkolem je testovat $H_0: \theta = \theta_0$ proti $H_1: \theta \neq \theta_0$. Nechť známe intervalový odhad $(\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n))$ což je $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro θ na základě $X_1, \dots, X_n$.

Můžeme definovat:

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \theta_0 \notin (\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n), \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n)) \right\}$$

je kritický obor pro test H_0 proti H_1 na hladině významnosti α

Pravděpodobnost, že zamítnu hypotézu:

$$P[(x_1, \dots, x_n) \in W] = P[\theta_0 \notin (\underline{\theta}, \bar{\theta})] \leq \alpha \text{ za platnosti } H_0, H_0: \theta = \theta_0$$

Tzn. zamítáme H_0 , pokud $\theta_0 \notin (\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n), \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n))$, tedy pokud testovaná hodnota neleží v intervalu.

9.7.4.1 Příklad: Podíl Fe ve sloučenině

Podle jisté teorie je podíl Fe v určité chemické sloučenině $\mu_0 = 12,1\%$. Pro ověření jsme naměřili 9 vzorků s těmito podíly:

$$X_i = \{11,7; 12,2; 10,9; 11,4; 11,3; 12,0; 11,1; 10,7; 11,6\}$$

Testujte platnost teoretické hypotézy na hladině významnosti 5%. Předpoklad: normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \times \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Nejdříve potřebujeme průměrnou hodnotu a výběrový rozptyl:

$$\begin{aligned}\bar{X}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{9} (11,7 + 12,2 + 10,9 + 11,4 + 11,3 + 12,0 + 11,1 + 10,7 + 11,6) = 11,43 \\ s_n &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{X}_n - X_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{8} [(11,43 - 11,7)^2 + (11,43 - 12,2)^2 + (11,43 - 10,9)^2 + \dots]} = 0,49\end{aligned}$$

Nyní využijeme tabulky pro výpočet intervalového odhadu. Jedná se o oboustranný odhad s neznámým σ :

$$\begin{aligned}\mu_0 &\in \left(\bar{X}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s_n}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right) \\ \mu_0 &\in \left(11,43 - t_{0,975}(8) \frac{0,49}{\sqrt{9}}; 11,43 + t_{0,975}(8) \frac{0,49}{\sqrt{9}} \right) \\ \mu_0 &\in (11,05; 11,81) \quad \text{neplatí}\end{aligned}$$

Na hladině 0,05 zamítáme H_0 , že podíl železa je 12,1%.

9.7.5 Testy o parametrech normálního rozdělení – střední hodnota

Naměřená data s normálním rozdělením $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Testujeme: $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu \neq \mu_0$; $H'_1 : \mu > \mu_0$; $H''_1 : \mu < \mu_0$

$W : (X_1, \dots, X_n) \in W$, zamítáme H_0

$$P[(X_1, \dots, X_n) \in W] \leq \alpha$$

9.7.5.1 Příklad: Pevnost drátu a nový postup

Pevnost vyráběného ocelového drátu je náhodná veličina $N(\mu, \sigma^2)$. Kde hodnota pevnosti je $\mu_0 = 1250$, $\sigma = 150$. Novým postupem bylo vyrobeno 25 vzorků a stanovena jejich průměrná

pevnost $\bar{X}_n = 1312$ se stejným rozptylem. Na hladině $\alpha = 0,05$ ověřte, zda je nový postup lepší.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \times H_1 : \mu > \mu_0$$

Tedy H_0 udává, že nový postup není lepší (drát má stejnou pevnost), kdežto H_1 udává, že nový postup je lepší.

Jedná se o test z tabulky:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu_0) \geq u_{1-\alpha}$$

$$\frac{\sqrt{25}}{150}(1312 - 1250) \geq u_{0,95}$$

$$2,07 \geq 1,64$$

Podmínka je splněna $\Rightarrow$ zamítáme H_0 na hladině významnosti 5%. Drát má vyšší pevnost v tahu.

9.7.5.2 Příklad: Kontrola nastavení měřícího přístroje

Pro kontrolu nastavení měřícího přístroje bylo provedeno $n = 10$ měření zkušebního vzorku se správnou hodnotou $\mu_0 = 15,2$.

Výsledky: 15,21; 15,19; 15,16; 15,26; 15,22; 15,23; 15,26; 15,23; 15,29; 15,23.

Měří přístroj správně? (na hladině $\alpha = 0,05$ při $N(\mu, \sigma^2)$).

$$H_0 : \mu = \mu_0 \times H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Průměrná hodnota a výběrová směrodatná odchylka je:

$$\bar{X}_n = 15,228, s_n = 0,03706$$

Z tabulky, test rovnosti μ při neznámém σ

$$\frac{\sqrt{n}}{s_n}|\bar{X}_n - \mu_0| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

$$\frac{\sqrt{10}}{0,03706}|15,228 - 15,2| \geq t_{0,975}(9)$$

$$2,3893 \geq 2,2622$$

Na hladině α zamítáme hypotézu H_0 . Přístroj vykazuje systematickou chybu. Test byl poměrně těsný – měření může být neprůkazné.

9.7.6 Testy o parametrech normálního rozdělení – rozptyl

Naměřená data s normálním rozdělením $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Testujeme: $H_0: \sigma = \sigma^0$ proti $H_1: \sigma \neq \sigma^0$

9.7.6.1 Příklad: Seřízení automatického obráběcího stroje

Při přesném seřízení automatického obráběcího stroje nepřekračuje rozptyl délky součástky $300 \mu\text{m}$. Bylo změřeno 15 součástek a výběrový rozptyl $s_n^2 = 580 \mu\text{m}$. Je tím na hladině $\alpha = 0,05$ prokázáno špatné seřízení přístroje?

$$H_0: \sigma \leq \sigma_0 = 300 \times H_1: \sigma > \sigma_0 = 300$$

nemáme v tabulce, ale bude to stejné jako

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \times H_1: \sigma > \sigma_0^2 - \text{poslední řešení}$$

$$\frac{(n-1)s_n^2}{\sigma_0^2} = 27,07 \geq 23,7 = \chi_{0,95}^2(14) \Rightarrow$$

Zamítáme H_0 , stroj je třeba seřídit.

9.7.7 Testy o parametrech normálního rozdělení – rovnost stř. hodnot

Máme 2 náhodné výběry. Hledáme vztah mezi středními hodnotami.

$$\left. \begin{array}{l} X_1, \dots, X_{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma^2) \\ Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim N(\mu_2, \sigma^2) \end{array} \right\} \text{stejný rozptyl}$$
$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ proti } H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

9.7.7.1 Příklad: Dvě nádrže s chlorovanou vodou

Dvě nádrže obsahují chlorovanou vodu. Odebráno $n_1 = 25$ vzorků z 1. nádrže a $n_2 = 10$ vzorků z 2. nádrže. Průměrný obsah chlóru byl naměřen

$$\bar{X}_{n_1} = 34,48, s_{n_1}^2 = 1,7482$$

$$\bar{Y}_{n_2} = 35,59, s_{n_2}^2 = 1,7121$$

Předpokládáme normální rozdělení se stejnými rozptyly. Lze na hladině 0,05 tvrdit, že obsah chlóru je v obou nádržích stejný?

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \times H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$(s^*)^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} ((n_1 - 1)s_{n_1}^2 + (n_2 - 1)s_{n_2}^2) = \frac{1}{33} (24 \cdot 1,7182 + 9 \cdot 1,7121) = 1,7384$$

$$s^* = 1,3185$$

$$\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \frac{1}{s^*} |\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}| = \sqrt{\frac{250}{35}} \cdot \frac{1}{1,3185} \cdot |34,48 - 35,59| = 2,25$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0,975}(33) = 2,035$$

$\Rightarrow$ Zamítáme H_0 , že obsah chlóru je v obou nádržích stejný.

9.7.8 Testy o parametrech normálního rozdělení – rovnost rozptylů

Často se používá pro ověření podmínek pro bod 9.7.7.

$$X_1, \dots, X_{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ proti } H_1: \sigma_2^2 \neq \sigma_1^2$$

9.7.8.1 Příklad: Hodnoty tlaku u mužů a žen

U 16 mužů a 13 žen byly měřeny hodnoty d. tlaku:

$$\bar{X}_M = 77,375, s_M^2 = 69,7167$$

$$\bar{Y}_Z = 71,0769, s_Z^2 = 85,0769$$

$\alpha = 0,05$, ověřte hypotézu, že M mají stejný d. tlak jako Ž. (Normální rozdělení).

$$\left. \begin{array}{l} X_1, \dots, X_{16} \sim N(\mu_M, \sigma_M^2) \\ Y_1, \dots, Y_{16} \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2) \end{array} \right\} H_0: \mu_M = \mu_Z \times H_1: \mu_M \neq \mu_Z$$

ale nejdříve musíme otestovat rozptyly

$$H'_0: \sigma_M^2 = \sigma_Z^2 \times H'_1: \sigma_M^2 \neq \sigma_Z^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s_{n_1}^2}{s_{n_2}^2} = \frac{s_M^2}{s_Z^2} = 0,8195 \\ (F_{0,025}(15,12); F_{0,975}(15,12)) = (0,34; 3,17) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} H'_0 \text{ nezamítáme} \rightarrow \\ \text{připouštíme, že rozptyly jsou} \\ \text{shodné} \end{array}$$

Počítáme H_0 a H_1 :

$$(s^*)^2 = \frac{1}{27} (15s_M^2 + 12s_Z^2) = 76,54, s^* = 8,75$$

$$Z_n = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \frac{1}{s^*} |\bar{X}_M - \bar{Y}_M| = \sqrt{\frac{16 \cdot 13}{29}} \frac{1}{8,75} |77,375 - 71,0769| = 1,928$$

$$t_{0,975}(27) = 2,0518$$

Na základě dat nemůžeme tvrdit, že muži mají jiný d. tlak než ženy.
Ještě zkusíme:

$$H_0' : \mu_M = \mu_X \quad \times \quad H_1' : \mu_M > \mu_Z$$

- nemáme v tabulce, ale lze vykukat (jednostrané alternativy používají $1-\alpha$ kvantily)

$$Z_n \geq t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - \alpha)$$

$$1,928 = Z_n \geq t_{0,95}(27) = 1,703 \Rightarrow \text{Můžeme hypotézu zamítnout}$$

To znamená, že proti jiné alternativě se může výsledek změnit.

9.7.9 χ^2 test dobré shody

Hledáme distribuční funkci. $X_1, \dots, X_n \sim F$, F je neznámá distribuční funkce.

Testujeme: $H_0 : F = F_0$ proti $H_1 : F \neq F_0$

Příčemž F_0 je nějaká známá distribuční funkce.

Postup:

Rozdělíme pozorovací prostor na l tříd.

- Diskrétní – sledujeme histogram.
- Spojité – to samé v různě velkých intervalech

n – počet pozorování

n_i – počet pozorování v i -té třídě

p_i – pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnotu z i -té třídy, spočtená vzhledem k teoretické distribuční funkci F_0 .

Podle teoretické distr. funkce by tedy do každé třídy mělo padnout $n \cdot p_i$ pozorování. My ale víme, že tam padlo n_i . Tzn. musíme nějak statisticky sledovat rozdíl $n_i - n \cdot p_i$. K tomu bude sloužit:

Pearsonova χ^2 statistika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

Poznámka: Dá se ukázat, že pro $n \rightarrow \infty$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \xrightarrow{D} \chi^2(l-r-1)$$

kde r je počet parametrů rozdělení, které musíme odhadnout z dat. Například pro neznámé normální rozdělení musíme odhadnout 2 parametry: $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}$. Pro známe parametry rozdělení, tak nemusíme nic odhadovat a $r = 0$.

Test:

Na hladině α zamítáme H_0 pokud

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} > \chi^2_{1-\alpha}(l-r-1)$$

9.7.9.1 Příklad:

9.7.9.2 Příklad: Test generátoru náhodných čísel

Generátor náhodných čísel z rovnoměrného rozdělení $U(0,1)$. Úkolem je ověřit jeho kvalitu. Generujeme 1000 náhodných čísel, interval $(0; 1)$ rozdělíme na 10 podintervalů délky 0,1.

Číslo intervalu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Četnosti n_i	99	91	92	97	99	108	103	102	110	99

$\alpha = 0,05$. Lze prokázat špatnou kvalitu generátoru?

$$X_1, \dots, X_n \sim F, F_0 = U(0,1), H_0: F = F_0, H_1: F \neq F_0$$

Pro rovnoměrné rozdělení platí $p_i = \frac{1}{10}$ pro $\forall i$, $n \cdot p_i = 1000 \cdot \frac{1}{10} = 100$

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{1}{100} \left((100-99)^2 + (100-91)^2 + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{100} (1^2 + 9^2 + 8^2 + 3^2 + 1^2 + 8^2 + 3^2 + 2^2 + 10^2 + 1^2) = 3,33 \end{aligned}$$

DOPLNIT