Zápisky z RMF

Jan Mazáč
WikiSkriptum

verze: 21. září 2020

Obsah

Smíšená úloha: ...

Předmluva

Milý čtenáři,

dostává se ti do rukou wikiskriptum, které vzniklo během zimního semestru akademického roku 2016/2017 a které by svým obsahem mělo pokrývat látku probranou v průběhu přednášek Rovnic matematické fyziky (01RMF) vedených doc. Ing. Václavem Klikou, Ph.D. Skriptum vzniklo přepisem poznámek, a je tedy možné a více než pravděpodobné, že se v něm vyskytnou chyby a překlepy. Za ty se omlouvám a věřím, že budou časem odstraněny.

Jan Mazáč

Kapitola 1

Motivace

Cílem tohoto předmětu je dopracovat se k metodám řešení parciálních diferenciálních rovnic a integrálních rovnic pomocí tzv. zobecněných funkcí. V této kapitole se budeme snažit nastínit, co matematiky vedlo k vytvoření teorie zobecněných funkcí a pokusíme se na příkladu ilustrovat, co je myšleno testováním funkcemi.

1.1 Problém s Diracovou δ-funkcí

V průběhu předešlého studia například teoretické fyziky (TEF2) vyvstal mj. problém s popisem bodových zdrojů záření. Bylo potřeba definovat nějakou „funkci“, která by dokázala popsat chování nějakého bodového zdroje a zároveň by nějakým způsobem popisovala „mohutnost“ tohoto zdroje. Proto se definovala tzv. *Diracova δ-funkce*. Připomeňme její definici:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

a zároveň požadujeme

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) \mathrm{d}x = 1.$$

Vidíme, že minimálně druhý požadavek na naši funkci je v rozporu s našimi dosavadními znalostmi z matematické analýzy. Tam totiž při použití Lebesgueovy integrace dostáváme

$$(\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \mathrm{d}x = 0,$$

protože naše funkce je nulová všude až na množinu nulové míry. Tento rozkol se tedy budeme snažit v průběhu tohoto skripta odstranit.

Zároveň bychom rádi na námi nově zavedené „zobecněné funkce“ pohlíželi alespoň částečně optikou již známé analýzy a zavedli pro ně operace kompatibilní s těmi u klasických funkcí. Cílem je, abychom pro ně nemuseli znovu složitě budovat teorii, která nám umožní s nimi dobře pracovat, tj. hledat a ověřovat nové věty třeba o záměnách pořadí operací a podobně. Budeme se toho snažit docílit tím, že zobecněné funkce sestavíme tak „šikovně“, že předpoklady zmíněných vět budou naplňovat již v důsledku své definice. Jednou z takových chytře zvolených vlastnosti například bude, že každá zobecněná funkce bude mít všechny své derivace.

Abychom se ale k těmto vlastnostem a k celé teorii zobecněných funkcí propracovali, je nutné se nejprve oprostit od zažitého pohledu na funkce. To znamená, že na funkci nebudeme pohlížet „bodově“.

1.2 Koncept testování funkcemi

Funkce a její vlastnosti mohou být zkoumány různými způsoby, obvyklý způsob v klasických partií matematické analýzy je zadání pomocí nějaké rovnice, která představuje bodový předpis pro každý konkrétní bod z definičního oboru. Takové zadaní má své výhody, ale v některých případech není vhodné, ani tak docela přirozené. Pokud bychom například chtěli zjišťovat nějakou danou vlastnost jisté látky při teplotě T, tj. hledat funkci $f(T)$ popisující tuto závislost, pak musíme vzorek látky ohřívat na různé teploty a následně měřit danou vlastnost. Probléme ale je, že v praxi nikdy nekontrolujeme teplotu úplně přesně a namísto v bodě T se pohybujeme na nějakém jeho okolí $[a,b]$. Klasická metoda, tzv. *vyčíslování funkce v daném bodě*, sama o sobě nedokáže totu skutečnost postihnout a není tedy v tomto případě úplně ideální. Nabízí se měřit celkovou hodnotu veličiny a tu dělit délkou onoho intervalu, tj. počítat $\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f(T)\mathrm{d}T$. Pokud bychom pak zmenšovali náš interval $[a,b]$, dostali bychom v limitě hodnotu funkce $f(T)$ v daném bodě T. Tento způsob můžeme nazvat *průměrováním funkce přes interval.* Vidíme, že již poskytuje širší pohled na hledanou funkci, ale stále je poměrně hrubý. Nezahrnuje totiž informaci o tom, jak často (s jakou pravděpodobností) se teplota nachází v daných bodech intervalu. Pokud bychom takové rozdělení znali, nazvěme jej třeba $\varphi(T)$, můžeme náš předešlý postup opakovat jen s tím rozdílem, že vážíme každý bod intervalu touto četností. Matematicky řečeno počítáme $\int_{[a,b]} f(T)\varphi(T)\mathrm{d}T$. Budeme-li mít tuto znalost pro značné množství funkcí $\varphi(T)$, můžeme pak zjistit chování $f(T)$. Tím je ve zkratce nastíněn třetí a nejsilnější koncept vyhodnocování funkcí, tzv. *pomocí testovacích funkcí.*

Poznámka.

$$\int_a^b f(T)\varphi(T)\mathrm{d}T = \langle f,\varphi\rangle$$

Tento integrál je totožný s definicí skalárního součinu na prostoru spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $[a,b]$ (vizte LAA2, resp. LAB2).

1.3 Testovací funkce

1.3.1 Úvod do problematiky

Definice 1.3.1. Nosičem funkce (supportem) φ rozumíme uzávěr množiny všech argumentů funkce s nenulovým obrazem, tj. $\overline{\{x\in\mathbb{R}^n \mid \varphi(x)\neq 0\}}$ a označujeme jej $\operatorname{supp}\varphi$.

Definice 1.3.2. Množinu $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}\varphi \text{ je omezený}\}$ nazvěme **množinou testovacích funkcí**. Tzn. **testovací funkce** jsou funkce třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ s kompaktním nosičem. Buď nyní $G = G^o$ otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Pak definujeme $\mathscr{D}(G) = \{\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}\varphi\subset G\}$

Poznámka. Je zřejmé, že pokud $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, pak $\alpha\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ pro $\alpha\in\mathbb{R}$. Máme-li $\varphi,\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, pak součet $\varphi+\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ a nosič $\operatorname{supp}(\varphi+\psi)$ je zřejmě podmnožinou sjednocení $\operatorname{supp}\varphi\cup\operatorname{supp}\psi$. Buď nyní f hladká funkce. Pak rovněž $f\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Odtud již plyne, že $\mathscr{D}$ s operacemi sčítání a násobení skalárem tvoří lineární vektorový prostor.

Abychom získali jistou intuici a vhled do dané problematiky, předběžně definujme zobecněné funkce $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^1)$. Tuhle definici později zpřesníme a zobecníme.

Definice 1.3.3. Nechť f je reálná, resp. komplexní funkce reálné proměnné. Nechť dále

$$\exists \int_{[a,b]} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x < +\infty,\ \forall\,[a,b]\,,\ \forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^1).$$

Pak tento integrál ve smyslu funkcionálu, tj. zobrazení $\mathscr{D}\longrightarrow\mathbb{C}$, nazýváme **zobecněnou funkcí**. Proměnnými funkcionálu tedy jsou $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^1)$, nikoliv $x\in[a,b]$, a jeho hodnotu při daném φ pak nazýváme **akcí testovací funkce** φ **na** f a značíme

$$(f,\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Zkuste najít množinu funkcí f tak, aby pro ni definice zobecněných funkce (výše) byla rozumná.

Věta 1.3.4 (ilustrativní, jednoduchá)**.** Nechť $f,\ g$ jsou spojité reálné funkce reálné proměnné a nechť dále akce libovolné testovací funkce φ na f a g jsou shodné, tj.

$$\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x. \text{ Pak platí } f = g.$$

Poznámka. Tahle věta nám ukazuje, že má smysl zkoumat pomocí testovacích funkcí přinejmenším spojité funkce, protože z výsledků akce s dostatečným počtem $\varphi(x)$ jsme schopni dvě takové funkce od sebe rozlišit.

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Pro ten předpokládejme, že $\exists x_0$ takové, že $f(x_0) \neq g(x_0)$. Pak víme, že $\int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))\,\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Ze spojitosti funkcí f a g plyne existence okolí U_{x_0} takového, že $\forall x \in U_{x_0}$ je BÚNO $f(x) > g(x)$. Pak předpokládejme, že existuje jistá $\varphi' \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^1)$ taková, že $\operatorname{supp}\varphi' \subset U_{x_0}$. O tom, že tahle testovací funkce existuje se přesvědčíte na cvičeních. Pak můžeme psát $\int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))\,\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\operatorname{supp}\varphi'} (f(x) - g(x))\,\varphi'(x)\mathrm{d}x \geq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\mathrm{d}x > 0$. Toto nám již dává spor s naším předpokladem. Je vhodné zde poznamenat, že nenulovost posledního integrálu plyne z toho, že mohu vždy najít takovou testovací funkci, jejíž integrál bude nenulový. Kdybychom měli např. lichou testovací funkci, tak můžeme jako vhodnou testovací funkci použít její kvadrát, který je rovněž testovací funkcí. Toto plyne z poznámky pod definicí testovací funkce. $\square$

1.4 Konvence a domluvy (L^2 Hilbertův prostor)

Mějme prostor $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, tj. prostor všech komplexních funkcí $f(x)$ reálné proměnné Lebesgueovsky integrabilních s kvadrátem, tj. $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\mathrm{d}x < +\infty$. Pro $f,\ g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ definujme zobrazení $\langle f, g\rangle := \mathcal{L}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$. Je otázkou, je-li toto zobrazení skalárním součinem na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Aby jím bylo, musí být splněny následující podmínky:

1. Zobrazení musí splňovat $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$;
2. Musí být lineární v 1. argumentu;
3. Musí být hermitovské, tj. $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ pro libovolné $f,\ g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$;
4. Musí být positivní, tj. $\langle f, f\rangle \geq 0\ \forall f \in \mathcal{L}^2$ a $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Je zřejmé, že 1., 2. i 3. podmínka jsou triviálně splněny (3. vyplývá z vlastnosti komplexního sdružování integrálů). Ve čtvrté podmínce je její první část triviálně splněna volbou prostoru $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Ve druhé části je ekvivalence směrem zprava doleva triviální, ale problém nastává při implikaci zleva doprava; musí být splněna podmínka $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\mathrm{d}x = 0$. Tuhle podmínku ale splňuje nekonečně mnoho funkcí. Jsou to všechny nulové funkce, které jsou nenulové na množině nulové míry. Proto toto zobrazení není normou na prostoru $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, ale pouze seminormou. Můžeme ale vytvořit prostor, na kterém tohle zobrazení normou bude. Pro tento účel nejprve definujme relaci $\sim$.

1.4.1 Zavedení L^2

Definice 1.4.1. Buďte $f,\ g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Relaci $\sim$ definujeme následovně: $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0$ s. v. (tj. skoro všude, tedy liší se nejvýše na množině nulové míry).

Jedná se o relaci ekvivalence, neboť je symetrická, reflexivní a transitivní (triviálně ověřitelné). Pomocí této ekvivalence potom můžeme faktorizovat množinu $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ do tříd ekvivalence (množin, které jsou tvořeny funkcemi vzájemně ekvivalentními vzhledem k relaci $\sim$), které budou určovat novou strukturu $L^2(\mathbb{R}^n)$, tzn. $L^2(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)|_\sim$. Pro tuhle množinu (jejíž prvky nejsou funkce, ale třídy ekvivalence!) je ale výše uvedené zobrazení skalárním součinem. Provedli jsme totiž obvyklé ztotožnění třídy ekvivalence s jedním jejím zástupcem. Správně bychom měli ještě dokázat, že námi zavedený skalární součin nezávisí na volbě zástupce, ale jelikož integrál nezávisí na množině bodů nulové míry, je toto zřejmé. Pak se již jedná o prostor funkcí a definice našeho skalárního součinu v něm dává dobrý smysl. Připomeňme ještě několik důležitých pojmů o vektorových prostorech:

Definice 1.4.2. Buď V vektorový prostor s normou, posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (V, \ \|\cdot\|)$. Řekneme, že **posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k** $a \in V$, značíme $a_n \to a$, právě tehdy, když $\|a_n - a\| \to 0$ pro $n \to +\infty$.

Vidíme, že jsme definici konvergence na vektorovém prostoru převedli na konvergenci v $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$.

Definice 1.4.3. Buď V vektorový prostor s normou, posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (V, \ \|\cdot\|)$. Řekneme, že **posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská**, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m,\ n > n_0)\,(\|a_m - a_n\| < \varepsilon)\,.$$

Definice 1.4.4. Řekneme, že lineární vektorový prostor V s normou je **Banachův**, právě tehdy, když každá cauchyovská posloupnost konverguje ve V.

Poznámka. Konvergenci cauchyovské posloupnosti lze ekvivalentně vyjádřit jako fakt, že limitní prvek je prvek V, tzn. prostor V je úplný.

Poznámka. Bolzano-Cauchyovo kritérium pro číselné posloupnosti je důkazem úplnosti $\mathbb{R}^n$. Pojmy výše zmíněné je možné zobecnit na prostory s metrikou ϱ.

Definice 1.4.5. Úplný lineární prostor se skalárním součinem nazýváme **Hilbertův**.

Poznámka. Hilbertovy prostory jsou speciálním případem Banachových prostorů, protože si stačí uvědomit, že skalární součin indukuje normu.

Nyní uvedeme několik důležitých vět, jejichž důkaz přesahuje rámec přednášky RMF, ale jsou pro výklad látky podstatné. Detaily a důkazy těchto vět se zabývá přednáška z funkcionální analýzy (FA1). Před jejich vyslovením však ještě shrňme zásadní rozdíl mezi prostory $\mathcal{L}^p$ a L^p:

Definice 1.4.6.

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \ : \ \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)\Big|_\sim ; f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ skoro všude.}$$

Poznámka.

$$L^p = \left\{ \text{třídy ekvivalence na } \mathcal{L}^p \mid \|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

Opět f chápeme jako jednoho zástupce konkrétní třídy ekvivalence. Zároveň by bylo vhodné ještě dokázat, že takto zvolená norma dává pro všechny prvky jedné třídy ekvivalence stejnou hodnotu, což ale intuitivně cítíme při použití Lebesgueova integrálu.

Věta 1.4.7. Prostory L^p jsou Banachovy prostory.

Poznámka. Zásadním důsledkem této věty je fakt, že L^2 je Hilbertův prostor. Tato vlastnost se nám bude později velmi hodit.

Poznámka. Předchozí poznámku můžeme „rozšířit“ na podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Pak se zavádí $L^p(G)$ s normou $\|f\|_{L^p(G)} = \left(\int_{G\subset\mathbb{R}^n} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
Jeden ze zásadních výsledků funkcionální analýzy je ještě třeba zmínit:

Věta 1.4.8. Nechť G je otevřená množina taková, že $\mu(G) < +\infty$. Pak $L^q(G) \subset L^p(G) \Leftrightarrow p < q$.

1.4.2 Lokálně integrovatelné funkce

Vraťme se nyní k otázce, kterou jsme si na začátku této kapitoly položili: Jaké funkce volit, aby byla definice zobecněných funkcí $\mathscr{D}'(G)$ rozumná? Odpovědí jsou tzv. lokálně integrovatelné funkce na G.

Definice 1.4.9. Množinu

$$\mathcal{L}^1_{loc}(G) := \left\{ f \mid \forall x_0 \in G\ \exists U_{x_0} \text{ takové, že } \int_{U_{x_0}} |f| < +\infty \right\}$$

nazýváme **lokálně integrovatelné funkce na** G.
Zavádíme rovněž prostor $L^1_{loc}(G)$ jako faktorprostor $\mathcal{L}^1_{loc}(G)$

Na první pohled nemusí být jasné, že tahle množina skutečně vyhovuje požadavkům na naše zobecněné funkce. O tom, že tomu tak skutečně je, nás přesvědčí následující tvrzení, resp. z něj tato vlastnost okamžitě plyne.

Věta 1.4.10. $f \in L^1_{loc}(G) \Leftrightarrow \forall K \subset G$ kompaktní $\exists \int_K |f| < +\infty$.

Důkaz. Důkaz provedeme z definice kompaktnosti:
Poznámka. Řekneme, že množina K je *pokrytá* systémem množin $\mathcal{S}$, pokud $K \subset \bigcup_{A\in\mathcal{S}} A$. *Podpokrytí* je podmnožina $\mathcal{S}$. Řekneme, že K je *kompaktní*, právě když každé pokrytí K má konečné podpokrytí.

- $\Leftarrow$ Triviální - stačí nalézt K tak, aby $U_{x_0} \subset K$.
- $\Rightarrow$ Beru K libovolnou kompaktní množinu a pokryji ji okolími U_{x_0} pro všechna $x_0 \in K$. Jelikož je ale K kompaktní množina, víme, že existuje konečné podpokrytí $\{U_{x_0^k} | k \in \{1, , \ldots, N\}\}$. Pak můžeme odhadovat

$$\int_K f \le \int_K |f| = \int_{\bigcup_{k=1}^N U^k_{x_0}} |f| \le \sum_{k=1}^N \int_{U^k_{x_0}} |f| < +\infty$$

□

Poznámka. Jestliže $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pak $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \overset{\varphi\in\mathscr{D}}{=} \int_{\operatorname{supp}\varphi} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x < +\infty$. Poslední nerovnost plyne z faktu, že nosič φ je v $\mathbb{R}^n$ kompaktní množina, tudíž $f\varphi$ je integrabilní na této množině.

Věta 1.4.11. $\mathscr{D} \subset L^p$.

Důkaz. Stačí integrovat po kompaktním nosiči, na kterém φ nutně nabývá svého maxima K. Integrál pak lze shora odhadnout

$$\|\varphi\|_p = \sqrt[p]{\int_{\operatorname{supp}\varphi} |\varphi(x)|^p \,\mathrm{d}x} \le |K| \cdot \sqrt[p]{\mu(\operatorname{supp}\varphi)} < +\infty.$$

□

Kapitola 2

Zobecněné funkce

V této kapitole korektně zavedeme zobecněné funkce a uvidíme, že naše předešlá definice je jen velmi speciálním případem zobecněné funkce. Zároveň budeme v definici požadovat, aby náš nově definovaný objekt byl něco rozdílného od klasické funkce, ale zároveň se od ní příliš nelišil. Rádi bychom totiž využívali některá tvrzení a některé věty, které již máme z předchozího studia matematické analýzy dokázány.

2.1 Zavedení zobecněných funkcí

Definice 2.1.1. Nechť f je lineární funkcionál nad $\mathscr{D}(G)$, tj, $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ a f je lineární. Množinu všech lineárních a spojitých, tj. konvergenci zachovávajících, funkcionálů nad $\mathscr{D}(G)$ nazveme **prostorem zobecněných funkcí**, označujme ji $\mathscr{D}'(G)$. Hodnotu funkcionálu f na funkci φ označujme $(f,\ \varphi)$ namísto $f(\varphi)$.

Poznámka. 1. *Rovnost zobecněných funkcí* (tj. $f = g$ v $\mathscr{D}'$) nastává právě tehdy, když $\forall \varphi \in \mathscr{D}$ platí, že $(f, \varphi) = (g, \varphi)$.

2. $\mathscr{D}'$ je lineární vektorový prostor s přirozeně definovanými operacemi sčítání a násobení, tzn, $\forall f, g \in \mathscr{D}'$ definujme sčítání

$$(f + g, \varphi) := (f, \varphi) + (g, \varphi)\ \forall \varphi \in \mathscr{D}$$

a pro $\alpha \in \mathbb{C}$ a pro $f \in \mathscr{D}'$ definujeme násobení

$$(\alpha \cdot f, \varphi) := \alpha(f, \varphi)\ \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$

Vidíme, že prostor zobecněných funkcí závisí na volbě konvergence v $\mathscr{D}$. Tímto pojmem bude $\mathscr{D}'$ značně ovlivněno (kvůli identifikaci lineárních a především spojitých funkcionálů nad $\mathscr{D}$). Z toho důvodu nyní definujeme konvergenci v $\mathscr{D}$. Ještě předtím ale zavedeme pojem multiindex a zavedeme notaci derivací pomocí multiindexu.

Definice 2.1.2. Multiindexem α v n-dimenzionálním prostoru rozumíme uspořádanou n-tici čísel $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ ze $\mathbb{Z}_+^n := (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$.

Označme $|\alpha| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

S pomocí multiindexu pak můžeme psát $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Definujme rovněž operátor $D^\alpha := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$.

Definice 2.1.3. Nechť $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost v $\mathscr{D}(G)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(G)$. Řekneme, že φ_n **konverguje k φ v $\mathscr{D}$**, označme $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$, právě když

1. nosiče φ_n jsou stejně (stejnoměrně) omezené, tj. $(\exists R > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(\operatorname{supp}\varphi_n \subset B_R(0))$[1];
2. $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ platí, že $D^\alpha \varphi_n$ konverguje stejnoměrně na množině G k $D^\alpha \varphi$, tedy $D^\alpha \varphi_n \overset{G}{\rightrightarrows} D^\alpha \varphi$.

Poznámka. Tato definice vyžaduje znalost limitní funkce φ. Je ale možné definovat i „vlastnost konvergence" a to za pomoci Bolzano-Cauchyovy podmínky pro stejnoměrnou konvergenci, která nám umožňuje nepsat ve druhé podmínce $D^\alpha \varphi$. Pak můžeme tvrdit, že posloupnost funkcí $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje v $\mathscr{D}$ a tuto vlastnost zapisovat jako $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}}$.

Věta 2.1.4. Buď $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(G)$ a nechť $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}}$. Pak existuje limitní funkce $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ taková, že $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$.

Důkaz. Důkaz nechť si čtenář provede sám jako cvičení. Při dokazování je vhodné najít kandidáta na funkci φ pomocí nulté derivace. Dále je vhodné si uvědomit, že kandidát musí být třídy $\mathcal{C}^\infty$ a že $\operatorname{supp}\varphi$ má být kompakt. □

2.1.1 Příklad zobecněné funkce

Diracova δ-funkce

S touto funkcí jsme se setkali hned na začátku tohoto textu. Nyní ji korektně zavedeme a dokážeme, že se jedná o zobecněnou funkci.

$$(\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}))\ \text{ definujeme }\ (\delta,\ \varphi) := \varphi(0).$$

Pro δ musíme tedy ověřit, že je to funkcionál nad $\mathscr{D}$, že je lineární a že je spojitý.

Funcionál: $\delta : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$. Jelikož je $\varphi(0) < +\infty$, víme, že se tedy jedná o funkcionál, neboť jeho definice dává dobrý smysl $\forall \varphi \in \mathscr{D}$.

Linearita: Uvažujme $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak

$$(\delta, \underbrace{\varphi + \alpha\psi}_{\eta\in\mathscr{D}}) = \eta(0) = (\varphi + \alpha\psi)\,(0) = \varphi(0) + \alpha\psi(0) = (\delta, \varphi) + \alpha\,(\delta, \psi)$$

Spojitost: Abychom dokázali spojitost námi definovaného funkcionálu, uvažujme konvergentní posloupnost $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$, která konverguje $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$. Chceme ukázat, že odtud plyne, že v $\mathbb{C}$ konverguje číselná posloupnost$(\delta, \varphi_n) \longrightarrow (\delta, \varphi)$. Můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat, že $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ [2]. Pak z toho, že posloupnost konverguje, plyne, že

(a) $(\exists R > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(\operatorname{supp}\varphi_n \subset B_R(0))$;

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ platí, že $D^\alpha \varphi_n \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$.

Druhá podmínka platí pro všechny multiindexy, tedy speciálně i pro nulový. Pak tedy dostáváme $\varphi_n \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow \varphi_n(x) \overset{\mathbb{R}^n}{\to} 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$. Pokud nyní za x volím 0, dostávám tvrzení, které jsem chtěl dokázat, neboť $\underbrace{\lim_{n\to\infty} (\delta, \varphi_n)}_{\lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) = 0} = (\delta, 0) = 0$, přičemž poslední rovnost plyne z linearity funkcionálu.

Tímto jsme tedy dokázali, že *Diracova δ-funkce* je zobecněnou funkcí. Obdobně se dá ukázat, že i *centrovaná Diracova δ-funkce*[3] je zobecněná. Důkaz je zcela totožný, až na poslední krok, kdy se místo 0 volí x_0.

[1] symbolem $B_R(0)$ značíme otevřenou kouli se středem v bodě 0 a poloměrem R

[2] Pokud by $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$, pak víme, že funkce φ je opět testovací funkcí a můžeme přejít od φ_n k $\varphi_n - \varphi$, která již konverguje k 0. Funkce $\varphi_n - \varphi$ je totiž testovací, neboť její nosič je pouze podmnožinou sjednocení nosičů funkcí φ_n a φ a rozdílem dvou hladkých funkcí je opět funkce hladká.

[3] $(\delta_{x_0},\ \varphi) := \varphi(x_0)$

2.1.2 Souvislost mezi klasickými funkcemi a zobecněnými funkcemi

V následujícím odstavci bychom chtěli ukázat, že každé klasické funkci f můžeme přiřadit jistou zobecněnou funkci $\tilde{f}$. Jako množinu funkcí f, ke které budeme vytvářet množinu zobecněných funkcí, vezměme lokálně integrabilní funkce na $\mathbb{R}^n$. Pro tyhle funkce jsme již ukázali, že integrál $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ konverguje pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Pro tuhle hezkou vlastnost budeme definovat zobecněnou funkci (tj. funkcionál) následovně:

$$\left(\tilde{f}, \varphi\right) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Z konvergence nám okamžitě plyne fakt, že $\tilde{f} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ je funkcionál. Nyní, podobně jako v předešlém případě, dokážeme, že se jedná o zobecněnou funkci.

Linearita: Buďte $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak

$$\left(\tilde{f}, \varphi + \alpha\psi\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\varphi+\alpha\psi)(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x+\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x) = \left(\tilde{f}, \varphi\right)+\alpha\left(\tilde{f}, \psi\right).$$

Spojitost: Chceme ukázat, že $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0 \Rightarrow \left(\tilde{f}, \varphi_n\right) \longrightarrow 0$ pro $n \to +\infty$. Tedy platí, že $\lim_{n\to+\infty} \left(\tilde{f}, \varphi\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0$? Pokud by bylo možné zaměnit limitu a integrál, pak bychom měli $\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n\to+\infty} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x \overset{\varphi_n(x)\to 0}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot 0\mathrm{d}x = 0$. Abychom mohli záměnu provést, je třeba ověřit podmínky věty o záměně, ale prakticky nám stačí nalézt integrabilní majorantu, která nezávisí na n. Tohle bude ukázáno na cvičení.

Definice 2.1.5. O zobecněné funkci $\tilde{f}$ řekneme, že je **regulární zobecněnou funkcí**, ozn. $\tilde{f} \in \mathscr{D}'_{reg}$, pokud existuje klasická funkce $f \in L^1_{loc}$ taková, že $(\tilde{f}, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \ \forall\varphi \in \mathscr{D}$. Klasickou funkci f pak nazýváme **generátorem zobecněné funkce** $\tilde{f}$.

V následující části se budeme věnovat diskusi jednoznačnosti přiřazení klasické funkci regulární zobecněnou funkci, tj. bude nás zajímat, jestli je možné ke každé regulární zobecněné funkci $\tilde{f}$ najít klasickou funkci f. Obráceně to jde, jak je vidno z definice regulární zobecněné funkce. Vyslovíme obecnou větu, kterou nedokážeme v plné obecnosti. Dokážeme její důsledek (ten je ale v podstatě totožný s tvrzením věty) a se zesílenými předpoklady. Zájemci o důkaz věty v plném znění jej naleznou ve [Šťovíček]. Než ale větu vyslovíme a dokážeme, připravíme si dvě lemmata a jeden výsledek z funkcionální analýzy, které pak pro její důkaz využijeme:

Lemma 2.1.6 (spojitost skalárního součinu)**.** Buď $\mathcal{H}$ Hilbertův prostor a nechť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ taková, že $x_n \to x \in \mathcal{H}$. Pak $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ pro $n \to +\infty$ pro všechna $y \in \mathcal{H}$.

Důkaz. Nejprve přepíšeme výraz $\langle x_n, y\rangle = \langle x_n - x + x, y\rangle = \langle x_n - x, y\rangle + \langle x, y\rangle$. Využijeme konvergence posloupnosti, tzn. $x_n \to x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$ v $\mathbb{C}$. Pak na výraz $\langle x_n - x, y\rangle$ aplikujeme Schwarzovu nerovnost, tedy $|\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y\|$. Jelikož je $\|y\| < +\infty$, máme lemma dokázáno, neboť limitním přechodem pro $n \to +\infty$ získáme $\langle x_n, y\rangle \xrightarrow{n\to+\infty} \langle x, y\rangle$. □

Lemma 2.1.7. Nechť $\langle a, b\rangle = 0$ pro všechna $b \in M$, kde $\overline{M} = \mathcal{H}$. Pak $a = 0$ v $\mathcal{H}$.

Důkaz. Důkaz provedeme pro dva případy:

1. $M = \mathcal{H}$, pak $\langle a, h\rangle = 0$ pro libovolné $h \in \mathcal{H}$ a tedy i pro $h = a$. Pak ale $\langle a, a\rangle = 0$ a odtud z positivní definitnosti skalárního součinu plyne, že $a = 0$ v $\mathcal{H}$.

2. $M \subset \mathcal{H}$, $\overline{M} = \mathcal{H}$. Tato vlastnost implikuje, že pro libovolné $h \in \mathcal{H}$ existuje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ taková, že $b_n \to h \in \mathcal{H}$. Pak $\forall n \in \mathbb{N}$ máme pro libovolné $h \in \mathcal{H}$
$$0 = \langle a, b_n \rangle \longrightarrow \langle a, \lim b_n \rangle = \langle a, h \rangle.$$
Zde využíváme předešlého lemmatu a první části důkazu tohoto lemmatu - s jejich máme tvrzení dokázáno.

□

Následující výsledek pochází z funkcionální analýzy a dokazovat jej nebudeme:

Věta 2.1.8. Buď $\mathscr{D}$ prostor testovacích funkcí s normou z L^p. Pak $\mathscr{D}$ je v L^p hustý, tedy $\overline{\mathscr{D}} = L^p$.

Nyní už věta, jejíž důsledek chceme dokázat:

Věta 2.1.9 (o jednoznačnosti)**.** Buďte $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{D}'_{reg}(\mathbb{R}^n)$. Pak $\tilde{f} = \tilde{g} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ skoro všude na $\mathbb{R}^n$.

Věta 2.1.10 (důsledek)**.** Buďte $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a $\tilde{f} \in \mathscr{D}'_{reg}(\mathbb{R}^n)$. Pak $\tilde{f} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Klasicky dokážeme dvě implikace

$\Leftarrow$ Triviální

$\Rightarrow$ Předpokládejme tedy $\tilde{f} = 0$ v $\mathscr{D}' \Leftrightarrow (\tilde{f}, \varphi) = (0, \varphi) = 0$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}$. To ale znamená (dle definice akce) $\forall \varphi \in \mathscr{D}:\ 0 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ [4] Nyní už máme skalární součin (z tohoto důvodu jsme požadovali kvadratickou integrabilitu f), takže využijeme druhého lemmatu a věty 2.1.8. Pak totiž tyhle podmínky zaručují $f = 0$ v $L^2(\mathbb{R}^n)$, tedy $f(x) = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}^n$.

□

Poznámka. Následující poznámky můžeme chápat jako důsledky a drobná pozorování, která z této věty plynou:

1. Tato věta nám dává odpověď na otázku, jaká je souvislost mezi zobecněnými funkcemi a klasickými funkcemi a umožňuje zahrnout klasické funkce do funkcí zobecněných, resp. je takto elegantně propojit. Toto nás tudíž opravňuje vynechávat vlnku ve značení a má smysl si například klást otázku, zda $x^n \in \mathscr{D}'$. Odpověď je ano, protože x^n je spojitá funkce, tedy $x^n \in L^1_{loc}$, a tedy $x^n \in \mathscr{D}'$.
2. Máme $\tilde{f} = \tilde{g}$ v $\mathscr{D}'$ definovanou jako $(f, \varphi) = (g, \varphi) \forall \varphi \in \mathscr{D}$. Nyní jsme k tomuto navíc ukázali, že $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{D}'_{reg}$ platí, že $(\tilde{f}, \varphi) = (\tilde{g}, \varphi) \Rightarrow \tilde{f} = \tilde{g}$ v $\mathscr{D}'$, ale i fakt, že $f = g$ v L^2. Tímto jsme zobecnili pojem „rekonstrukce funkce z testovací funkce“.
3. Velikost množiny $\mathscr{D}$ je zásadní. Zkuste si vzít za prostor $\mathscr{D}$ např. množinu všech konstantních funkcí a provést naši konstrukci znova.

2.1.3 Příklady

Na cvičeních jsme ukázali, že funkce $\varphi_{[-a,a]}(x) := \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{4}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right), & \text{pro } x \in [-a, a], \\ 0, & \text{pro ostatní } x. \end{cases}$ je testovací funkcí. Podívejme se, jak se chová integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi_{[-a,a]}(y)\mathrm{d}y$. Tato nová funkce od x je až do $-a$ nulová a od a konstantní. Zaveďme jistou speciální funkci:

[4]Správně bychom měli psát $\langle f, \overline{\varphi} \rangle$, ale je to jedno.

Definice 2.1.11. **Heavisideova funkce** $\Theta(x)$ je funkce $\Theta : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definovaná následovně:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \geq 0, \\ 0, & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Definujeme-li ještě operaci konvoluce funkcí, můžeme použít pro náš integrál elegantní zápis.

Definice 2.1.12. Buďte f, g klasické funkce integrabilní s kvadrátem. Pak **konvolucí funkcí** f **a** g, kterou označujeme $f * g$, rozumíme $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(y)f(x-y)\mathrm{d}y$.

Poznámka. O konvoluci a jejím korektním zavedení bude řeč později.

Poznámka. Konvoluce funkce a Heavisideovy funkce je vlastně „vyhlazením" Heavisideovy funkce danou funkcí.

Ve smyslu této definice je pak možno náš integrál psát jako $\Theta(x) * \varphi_{[-a,a]}$. Pokud bychom nyní udělali konvoluci funkce $\varphi_{[-a,a]}$ a „obrácené" Heavisideovy funkce, tj. funkce, která přiřazuje jedničku všem $x < 0$ a provedli součin těchto dvou integrálů, získáme opět testovací funkci. Toto tvrzení, zformulované níže, bude dokázáno na cvičeních, ale je zřejmé.

Věta 2.1.13. Nechť $f \in L^1_{loc}$ a buď $\varepsilon > 0$. Pak $f(x) * \varphi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x) \in \mathcal{C}^\infty$.

Příklady zobecněných funkcí

1. Již jsme dokázali, že $\delta_{x_0} \in \mathscr{D}'$.
2. Ukázali jsme, že $\mathscr{D}'_{reg} \subset \mathscr{D}'$.
3. Zobecnění Diracovy δ-funkce do $\mathbb{R}^n$

   Definice 2.1.14. Nechť S je po částech hladká nadplocha v $\mathbb{R}^n$ a $\nu(x)$ je funkce spojitá na S. Definujme

   $$(\nu\delta_S, \varphi) := \int_S \nu(x)\varphi(x)\mathrm{d}S \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$

   Funkcionál $\nu\delta_S$ nazýváme **jednoduchou vrstvou**.

   I tento funkcionál je zobecněnou funkcí, tj. $\nu\delta_S \in \mathscr{D}'$ (cvičení)
4. Vyvstává otázka, zda je libovolné funkci možné přiřadit zobecněnou funkci, tj. funkcionál, který by měl podobné chování? Například bychom chtěli vyřešit problém, který vyvstane, když chceme funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ přiřadit zobecněnou funkci. Narážíme na problém, neboť $\frac{1}{x} \notin L^1_{loc}(R)$, a proto $\frac{1}{x}$ nelze chápat jako zobecněnou funkci. Cítíme ale, že by bylo vhodné, abychom nějakou takovou zobecněnou funkci měli. Proto provedeme tzv. *regularizaci* této funkce, která by náš problém mohla odstanit. Vidíme, že problematickým bodem v definičním oboru (a tedy i při integraci) je 0. Zkusíme tedy definovat funkcionál, který by „suploval" funkci $\frac{1}{x}$ následovně:

   $$\left(P\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x$$

   Tato limita se běžně označuje jako $V_p \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x$ a nazývá se *integrál ve smyslu hlavní hodnoty*. Na cvičeních bude ukázáno, že tímto krokem dojde k odstranění našeho problému, tj. $P\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'$ a že se zachovávají vlastnosti, které platily pro klasické funkce (např. $x^n P\frac{1}{x} = x^{n-1}$ v $\mathscr{D}'$ pro $n \geq 1$).

Zabývejme se nyní otázkou, jestli jsou veškeré zobecněné funkce zobecněnými regulárními funkcemi, ekvivalentně jestli je množina $\mathscr{D}' \setminus \mathscr{D}'_{reg}$ neprázdná. Pokud nějaká taková zobecněná funkce existuje, nazvěme ji *singulární zobecněnou funkcí*.

Věta 2.1.15. Diracova δ-funkce je singulární zobecněnou funkcí, tj. $\delta \in \mathscr{D}' \backslash \mathscr{D}'_{reg}$.

Důkaz. (pro jednoduchost a ilustrativitu tohoto tvrzení předpokládejme $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^1)$)
Sporem: Nechť $\exists f \in L^1_{loc}$ taková, že $\left(\tilde{f}, \varphi\right) = (\delta, \varphi)$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}$. Zároveň z definice Diracovy funkce máme $\varphi(0) = (\delta, \varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}$. Buď nyní $\eta(x) = x^2 \in \mathcal{C}^\infty$. Pak zjevně $\eta\varphi \in \mathscr{D}$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}$. Zároveň víme, že $(\eta\varphi)(0) = 0 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\eta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}$. Odtud ale plyne, že $(f\eta)(x) = 0$ skoro všude a tudíž $f = 0$ skoro všude. Tohle je ale spor, neboť v tuto chvíli by Diracova funkce byla vždy nulová. □

2.2 Zavedení základních operací v $\mathscr{D}'$

Cílem této části bude zavést operace na prosotru $\mathscr{D}'$ tak, aby co nejvíce odpovídaly operacím na prostoru klasických funkcí. Například nás bude zajímat, jestli je možné zaměnit derivaci v $\mathscr{D}$ a v $\mathscr{D}'$.

2.2.1 Derivace v $\mathscr{D}'$

Budeme chtít, aby bylo jedno, jestli funkci f nejdříve zderivuji (jako klasickou funkci) a pak z ní vytvořím zobecněnou funkci $\widetilde{f'}$, nebo jestli nejprve vytvoříme z klasické funkce f funkci zobecněnou $\tilde{f}$ a tu zderivujeme v $\mathscr{D}'$, tj. chceme, aby platilo, že $\widetilde{f'} = \left(\tilde{f}\right)'$.

Zdálo by se přirozené pro $f \in \mathscr{D}'$ zavést tuto derivaci $f' \in \mathscr{D}'$ takto:

$$(f', \varphi) := (f, \varphi') \text{ pro všechny } \varphi \in \mathscr{D}.$$

Tato definice je intutitvní (nikoliv však na první pohled), ale bohužel špatná. Abychom tedy nalezli ekvivalent derivace, je třeba se držet striktně našich požadavků. Proto požadujeme, aby platilo $\widetilde{f'} = \left(\tilde{f}\right)'$, tj. $\left(\left(\tilde{f}\right)', \varphi\right) = \left(\widetilde{f'}, \varphi\right) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \overset{\text{per partes}}{=} [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)'\mathrm{d}x = -\left(\tilde{f}, \varphi'\right)$. Tedy tímto můžeme definovat derivaci v $\mathscr{D}'$, která je kompatibilní s derivací v klasickém smyslu.

Definice 2.2.1. Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Pak derivaci f' v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ definujeme předpisem

$$(f', \varphi) := -(f, \varphi') \text{ pro libovolné } \varphi \in \mathscr{D}.$$

Nyní ověříme, že takto definovaná derivace zobecněné funkci f přiřadí opět zobecněnou funkci f'. Abychom tohle dokázali, je třeba ukázat, že jsou splněny tři podmínky:

Funkcionál: Že se jedná o funkcionál je zřejmé, neboť derivace je definovaná jako $-(f, \varphi')$ a vzhledem k faktu, že $\varphi' \in \mathscr{D}$. Odtud již potom plyne, že $|-(f, \varphi')| < +\infty$, čímž je dokázána dobrá definice funkcionálu.

Linearita: Buďte $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak

$$(f', \varphi + \alpha\psi) = -\left(f, (\varphi + \alpha\psi)'\right) = -(f, \varphi') - \alpha(f, \psi') = (f', \varphi) + \alpha(f', \psi)$$

Při dokazování jsme využili nejprve definici derivace v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ a následně faktu, že f je zobecněná.

Spojitost: Nechť $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$. Pak chceme ukázat, že $(f', \varphi_n) \to (f', 0) = 0$ v $\mathbb{C}$. Proto

$$\lim_{n\to+\infty} (f', \varphi_n) = \lim_{n\to+\infty} [-(f, \varphi_n')] = (f, \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \varphi_n'}_{0}) = 0$$

První úprava je jen přepsání výrazu v limitě dle definice. Ve druhém kroku bychom chtěli využít spojitosti zobecněné funkce f. Proto musíme ověřit, že platí implikace $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0 \Rightarrow$

$\varphi_n' \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$. Toto ale platí, neboť posloupnost funkce φ_n' mají stejnoměrně omezené nosiče. Tato vlastnost plyne z inkluze $\operatorname{supp}\varphi_n' \subset \operatorname{supp}\varphi_n$ pro libovolné n. Druhá podmínka, tj. podmínka na stejnoměrnou konvergenci všech derivací, je splněna triviálně díky konvergenci φ_n v $\mathscr{D}$.

Tedy jsme našli zobrazení na prostoru $\mathscr{D}'(R)$, které libovolné funkci $f \in \mathscr{D}'(R)$ přiřadí $f \longmapsto f' \in \mathscr{D}'(R)$. Tento postup mohu očividně opakovat a vždy získám zobecněnou funkci.

Věta 2.2.2. Každá zobecněná funkce f má všechny derivace.

Důkaz. Vizte poznámku výše. □

Poznámka. Derivaci jsme zavedli pouze pro $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Pokud bychom chtěli provést rozšíření, stačí si uvědomit, že za každý další řád derivace přibude pouze další znaménko „$-$“. Proto můžeme definovat derivaci pro libovolnou $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ následovně:

$$(D^\alpha f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|}\,(f, D^\alpha \varphi)$$

.

Příklad Najděte $|x|'$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Zjevně hledáme zobecněnou funkci f takovou, že $(|x|', \varphi) = (f, \varphi)$ pro všechny $\varphi \in \mathscr{D}$. Nejprve se přesvědčíme, že notace $|x|'$ dává dobrý smysl. Zcela jistě ano, protože $|x| \in \mathscr{D}'$, což plyne z faktu, že $|x|$ je jako klasická funkce lokálně integrabilní na $\mathbb{R}$. Nyní již hledejme funkci f:[5]

$$\left(\widetilde{|x|}', \varphi(x)\right) = -\left(\widetilde{|x|}, \varphi'(x)\right) = -\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{0} \underbrace{|x|}_{-x} \varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{+\infty} \underbrace{|x|}_{x} \varphi'(x)\mathrm{d}x \overset{\text{per partes}}{=}$$

$$= \underbrace{[x\varphi(x)]_{-\infty}^{0}}_{=0} - \int_{-\infty}^{0} 1\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x - \underbrace{[x\varphi(x)]_{0}^{+\infty}}_{=0} + \int_{0}^{+\infty} 1\cdot\varphi\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \left(\widetilde{\operatorname{sgn}(x)}, \varphi(x)\right).$$

Tímto jsme dokázali, že $\widetilde{|x|}' = \widetilde{\operatorname{sgn}(x)}$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

2.2.2 Regulární lineární transformace

Definice 2.2.3. Buď $f \in \mathscr{D}'$, dále $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulární matice a $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor. Pak definujeme **regulární lineární transformaci** $g^f_{\mathbb{A},\mathrm{b}}$ zobecněné funkce f vztahem:

$$\left(g^f_{\mathbb{A},\mathrm{b}}, \varphi\right) := \left(f, \psi^\varphi_{\mathbb{A},\mathrm{b}}\right).$$

Přičemž $\psi^\varphi_{\mathbb{A},\mathrm{b}}(x) := \frac{1}{|\det\mathbb{A}|}\varphi\left(\mathbb{A}^{-1}(x-b)\right)$ pro všechny $\varphi \in \mathscr{D}$.

Poznámka. Tato definice je korektní, neboť $\psi^\varphi_{\mathbb{A},\mathrm{b}}(x) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \varphi \in \mathscr{D}$. Tato transformace funkce φ neovlivní její hladkost a support se jen regulárně transformuje, tj. posune se anebo se přeškáluje.

Poznámka. Obvykle se tato transformace zapisuje ale poněkud odlišně:

$$(f(\mathbb{A}x + \mathrm{b}), \varphi(x)) := \frac{1}{|\det\mathbb{A}|}\left(f(x), \varphi\left(\mathbb{A}^{-1}(x-b)\right)\right).$$

Tato notace je rozumná, jen je třeba si uvědomit, že zobecněná funkce $f \in \mathscr{D}'$ nemá argument x, ale jistou funkci! V následujícím odstavci pochopíme, proč se tato notace používá a že je vlastně

[5] V tomto příkladu budeme pro větší přehlednost používat označení vlnkou pro zobecněnou funkci vytvořenou z lokálně integrabilní funkce.

velmi přirozená. Naším cílem je totiž získat zobecněnou funkci takovou, aby $f\widetilde{(\mathbb{A}x + \mathrm{b})} = \tilde{f}(\mathbb{A}x{+}\mathrm{b})$. Z této podmínky pak totiž dostaneme:

$$\left(\tilde{f}(\mathbb{A}x+\mathrm{b}),\varphi(x)\right) = (f(\mathbb{A}x+\mathrm{b}),\varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbb{A}x+\mathrm{b})\varphi(x)\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} \text{transformace} \\ y = \mathbb{A}x + \mathrm{b} \\ x = \mathbb{A}^{-1}(y-b) \\ |\mathcal{J}| = \frac{1}{|\det \mathbb{A}|} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{|\det \mathbb{A}|}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi\left(\mathbb{A}^{-1}(y-b)\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{|\det \mathbb{A}|}\left(\tilde{f}(x),\varphi\left(\mathbb{A}^{-1}(x-b)\right)\right).$$

Opět ověříme, že regulární transformace je operace, která zobecněnou funkci zobrazuje na zobecněnou funkci.

Věta 2.2.4. Buď $f \in \mathscr{D}'$. Pak $f(\mathbb{A}x+\mathrm{b}) \in \mathscr{D}'$.

Důkaz. Opět stačí ověřit tři podmínky.

Funkcionál: zřejmé;

Linearita: opět zřejmá, plyne z linearity f;

Spojitost: Chceme ukázat, že $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0 \Rightarrow (f(\mathbb{A}x+\mathrm{b}),\varphi_n(x)) \to 0$. Tedy

$$\lim_{n\to+\infty}(f(\mathbb{A}x+\mathrm{b}),\varphi_n(x)) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|\det \mathbb{A}|}\left(f(x),\varphi_n\left(\mathbb{A}^{-1}(x-b)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{|\det \mathbb{A}|}\left(f(x), \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\varphi_n\left(\mathbb{A}^{-1}(x-b)\right)}_{=0}\right) = 0.$$

V první rovnosti jsme jen použili definici, ve druhé jsme využili spojitosti zobecněné funkce f a faktu, že pokud $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, tak i $\psi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$,kde $\psi_n = \varphi_n\left(\mathbb{A}^{-1}(x-b)\right)$. V další se pak jen využije stejnoměrné konvergence funkcí φ_n k nule. Odtud již plyne bodová konvergence k nule a poslední rovnost je důsledkem linearity f. □

Tímto jsme získali zajímavý nástroj, pomocí kterého můžeme zkoumat např. posunutí zobecněných funkcí (to se děje volbou jednotkové matice $\mathbb{A}$). Rovněž sudost a lichost zobecněných funkcí lze takto vyšetřovat. Toto si ukážeme na následujícím příkladu, kde určíme, jestli je Diracova funkce sudá.

Příklad Je Diracova funkce sudá, tj. platí, že $\delta(-x) = \delta(x)$ v $\mathscr{D}'$?

Vyjdeme z rovnosti v $\mathscr{D}'$, tj. ověřujeme, zda platí, že $(\delta(x),\varphi(x)) = (\delta(-x),\varphi(x))$. Upravujeme nejprve levou stranu výrazu:

$$(\delta(x),\varphi(x)) \overset{\mathbb{A}=\mathbb{I},\mathrm{b}=0}{=} (\delta,\varphi) = \varphi(0)$$

Nyní upravíme pravou stranu a využijeme toho, že tentokrát je $\mathbb{A} = -\mathbb{I}$ a $\mathrm{b} = 0$.

$$(\delta(-x),\varphi(x)) = \frac{1}{1}(\delta(x),\underbrace{\varphi(-x)}_{\psi(x)}) = (\delta,\psi) = \psi(0) = \varphi(0).$$

Tímto je dokázáno, že Diracova funkce je sudá funkce.

2.2.3 Násobení hladkou funkcí v $\mathscr{D}'$

Opět bychom chtěli vytvořit operaci násobení hladkou funkcí, která by pro $a \in \mathcal{C}^\infty$ a $\tilde{f} \in \mathscr{D}'_{reg}$ splňovala následující: $\tilde{a} \cdot \tilde{f} = \widetilde{a \cdot f}$. Z této podmínky dostáváme:

$$\left(\tilde{a} \cdot \tilde{f}, \varphi\right) = \left(\widetilde{a \cdot f}, \varphi\right) = \int_{\mathbb{R}} a(x) f(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) \underbrace{a(x)\varphi(x)}_{\in \mathscr{D}} \mathrm{d}x = \left(\tilde{f}, a\varphi\right).$$

Z tohoto důvodu jsme při zavedení testovacích funkcí diskutovali možnost jejich násobení hladkou funkcí.

Definice 2.2.5. Buď $a \in \mathcal{C}^\infty$ a $\tilde{a} \in \mathscr{D}'_{reg}$ a nechť $f \in \mathscr{D}'$. Pak definujeme $(\tilde{a} \cdot f, \varphi) := (f, a\varphi)$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}$.

Není možné zeslabit předpoklad na $a \in \mathcal{C}^\infty$, kvůli požadavku, aby $a\varphi \in \mathscr{D}$. Z tohoto důvodu není možné například vynásobit dvě Diracovy funkce.

Věta 2.2.6. Buď $\tilde{a} \in \mathscr{D}'_{reg}$ a $a \in \mathcal{C}^\infty$ a nechť $f \in \mathscr{D}'$. Pak $\tilde{a} \cdot f \in \mathscr{D}'$.

Důkaz. Důkaz je v podstatě identický jako u předchozích operací a čtenář si jej může provést sám jako domácí cvičení. □

2.3 Vlastnosti operací v $\mathscr{D}'$

V této sekci se budeme zabývat vlastnostmi operací nad prostorem zobecněných funkcí. Ukážeme si, že nad prostorem zobecněných funkcí lze formulovat podobné věty jako v matematické analýze (např. věty o záměně) a že se tyto věty dají formulovat oproštěné od veškerých sáhodlouhých předpokladů a rovněž jejich důkazy jsou vyloženě triviální.

2.3.1 Limita v $\mathscr{D}'$

Nejprve ještě definujeme pojem intuitivní, ale dosud korektně neformulovaný:

Definice 2.3.1. Buď $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'$ posloupnost zobecněných funkcí. Řekneme, že **posloupnost zobecněných funkcí f_n konverguje v $\mathscr{D}'$ k zobecněné funkci** $f \in \mathscr{D}'$, ozn. $f_n \to f$, právě tehdy když $\forall \varphi \in \mathscr{D}$ platí, že $(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$ jako číselná posloupnost.

Když známe pojem konvergence, můžeme zavést i pojem limity v $\mathscr{D}'$ (jedná se téměř o totéž)

Definice 2.3.2. Buď $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'$ posloupnost zobecněných funkcí a buď $f \in \mathscr{D}'$. Pak řekneme, že **limita posloupnosti funkcí f_n je rovna** f, ozn. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$, právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to+\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$ pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{D}$.

Věta 2.3.3 (o záměně limity a derivace)**.** Buď $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'$. Pak $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} (f_n)'$ v $\mathscr{D}'$.

Důkaz. Zvolme libovolnou $\varphi \in \mathscr{D}$. Pak

$$\left((\lim_{n\to+\infty} f_n)', \varphi\right) \overset{\text{def. derivace}}{=} -\left(\lim_{n\to+\infty} f_n, \varphi'\right) \overset{\text{def. limity}}{=} -\lim_{n\to+\infty} (f_n, \varphi') \overset{\text{def. derivace}}{=}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (f_n', \varphi) \overset{\text{def. limity}}{=} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n', \varphi\right)$$

□

Na následujícím příkladu si ukážeme užitečnost této věty.

Příklad Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos nx$ v $\mathscr{D}'$. Zjevně má smysl se zabývat touto otázkou, neboť $\cos nx \in L^1_{loc}$. Pokud se pokusíme tuto limitu počítat z definice, brzy narazíme na integrál, který nebudeme schopni spočítat. Proto se nejprve zabývejme následující limitou v $\mathscr{D}'$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sin nx$.

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\frac{1}{n}\sin nx}, \varphi(x)\right) \overset{\text{def. limity}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sin nx, \varphi(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\sin nx\varphi(x)\mathrm{d}x \overset{\text{záměna}}{=} \int_{\mathbb{R}} 0\mathrm{d}x = 0$$

Odtud vidíme, že $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sin nx = 0$. Proto nyní využijeme věty, kterou jsme dokázali, a s její pomocí máme

$$0 = \left(\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\frac{1}{n}\sin nx}\right)' \overset{\text{Věta}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)' = \lim_{n\to+\infty} \cos nx$$

Tímto jsme vypočítali limitu, kterou bychom jinak spočíst nedokázali. Je vhodné si povšimnout, že v poslední úpravě jsme využili naší definice derivace a faktu, že $\sin nx \in L^1_{loc}$.

Věta 2.3.4. Buďte $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'$ a nechť jsou $f, g \in \mathscr{D}'$ takové, že $f_n \to f$ a $g_n \to g$. Pak

1. $f_n + g_n \to f + g$ v $\mathscr{D}'$;
2. $\tilde{a} \cdot f_n \to \tilde{a} \cdot f$ pro libovolnou $a \in \mathscr{D}'_{reg}, a \in \mathcal{C}^\infty$;
3. $f_n' \to f'$;
4. $f_n(\mathbb{A}x + \mathrm{b}) \to f(\mathbb{A}x + \mathrm{b})$.

Důkaz. Důkaz je ponechán čtenáři jako cvičení. Princip důkazu je ale vždy stejný. Jen se dle definice rozepíše levá strana a její působení na funkci φ a následně se upravuje dle definic. □

2.3.2 Identity kalkulu

V této sekci zformulujeme pro zobecněné funkce již známá tvrzení z matematické analýzy.

Věta 2.3.5 (o derivaci složené funkce)**.** Buďte $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ a $0 \neq A, b$ konstanty. Pak

$$[f(Ax+b)]' = A \cdot f'(Ax+b)$$

Důkaz. Upravujme levou stranu výrazu:

$$\left([f(Ax+b)]', \varphi\right) = -\left(f(Ax+b), \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right) = -\frac{1}{|A|}\left(f(y), \left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=A^{-1}(y-b)}\right) = (*)$$

Na pravé straně jsme tentokrát nedostali přesně ten výraz, který bychom rádi, ale drobným trikem si k němu pomůžeme. Potřebujeme totiž výraz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(A^{-1}(y-b)) = \left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=A^{-1}(y-b)} \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(A^{-1}(y-b))}_{\frac{1}{A}}$$

Odtud již nyní ale můžeme snadno dosadit do námi upravovaného výrazu $(*)$:

$$(*) = -\frac{A}{|A|}\left(f(y), \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}\left(A^{-1}(y-b)\right)\right) \overset{\text{derivace}}{=} \frac{A}{|A|}\left(f'(y), \varphi\left(A^{-1}(y-b)\right)\right) = A \cdot \left(f'(Ax+b), \varphi(x)\right).$$

□

Poznámka. Je snadno nahlédnutlné, jak by se vztah změnil, pokud bychom uvažovali $\mathbb{R}^n$ a derivovali dle konkrétní proměnné.

Věta 2.3.6 (Leibnizovo pravidlo)**.** Buďte $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, $\tilde{a} \in \mathscr{D}'_{reg}(\mathbb{R})$ a nechť $a \in \mathcal{C}^\infty$. Pak

$$(\tilde{a} \cdot f)' = \widetilde{a'} \cdot f + \tilde{a} \cdot f' \quad \text{v } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Důkaz. Důkaz začíná neintuitivně (tentokrát neupravujeme levou stranu), ale je triviální[6]:

$$(\tilde{a}f', \varphi) = (f', a\varphi) = -(f, (a\varphi)') = -(f, a'\varphi + a\varphi') = -(f, a'\varphi) - (f, a\varphi') =$$

$$= -(\widetilde{a'}f, \varphi) - (\tilde{a}f, \varphi') = -(\widetilde{a'}f, \varphi) + ((\tilde{a}f)', \varphi) = (((\tilde{a}f)' - \widetilde{a'}f), \varphi)$$

Odtud již plyne dokazované tvrzení. □

Poznámka. Pokud bychom postupovali dále matematickou indukcí, rozšířili bychom tvrzení i pro n-tou derivaci.

Věta 2.3.7 (o záměně parciálních derivací)**.** Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Pak

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} f = \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} f.$$

Důkaz.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} f(x), \varphi(x)\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_l} f(x), \frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(x)\right) = \left(f(x), \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k}\varphi(x)\right) \overset{\varphi \in \mathcal{C}^\infty}{=}$$

$$= \left(f(x), \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\varphi(x)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x), \frac{\partial}{\partial x_l}\varphi(x)\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} f(x), \varphi(x)\right).$$

□

Poznámka. Notací, kterou používáme pro značení smíšených parciálních derivací, myslíme

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} f(x) := \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_l}\right).$$

Věta 2.3.8 (o derivaci po částech spojité funkce)**.** Buď $M \subset \mathbb{R}$, $M = \{x_n\}$ nejvýše spočetná množina bez hromadného bodu. Buď dále $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \backslash M)$ a nechť $\forall x \in M$ existují konečné jednostranné limity klasické funkce f. Nechť dále je $\{f'\} \in L^1_{loc}$, kde $\{f'\}$ označuje klasickou derivaci funkce f všude, kde je možné ji provést. Pak v $\mathscr{D}'$ platí

$$\tilde{f}' = \widetilde{\{f'\}} + \sum_{s \in M} [f]_s \, \delta(x - s),$$

kde symbol $[f]_s := \lim\limits_{x \to s^+} f(x) - \lim\limits_{x \to s^-} f(x)$.

Důkaz. Uvažujme BÚNO množinu $M = \{x_0\}$ jednoprvkovou. Z důkazu vyplyne, že provést zobecnění pro nejvýše spočetnou není problém.

$$(\tilde{f}', \varphi) = -(\tilde{f}, \varphi') = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \overset{\text{per partes}}{=}$$

$$= -\left(\underbrace{[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{x_0}}_{\lim_{x \to x_0^-} f(x)\varphi(x)} - \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right) - \left(\underbrace{[f(x)\varphi(x)]_{x_0}^{+\infty}}_{-\lim_{x \to x_0^+} f(x)\varphi(x)} - \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right) =$$

[6] Z čisté lenosti nebudeme v důkaze psát $a \cdot f$, ale jen stručně af atp.

$$= \int_{\mathbb{R}} \{f'\}\varphi(x)\mathrm{d}x + \underbrace{\lim_{x\to x_0^+} f(x)\varphi(x)}_{\varphi(x_0)\lim_{x\to x_0^+} f(x)} - \underbrace{\lim_{x\to x_0^-} f(x)\varphi(x)}_{\varphi(x_0)\lim_{x\to x_0^-} f(x)} = \int_{\mathbb{R}} \{f'\}\varphi(x)\mathrm{d}x + \varphi(x_0)\left[\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right] =$$

$$= (\widetilde{\{f'\}}, \varphi) + \left(\underbrace{\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)}_{[f]_{x_0}}\right)(\delta_{x_0}, \varphi) = \left(\widetilde{\{f'\}} + [f]_{x_0}\,\delta(x-x_0), \varphi\right).$$

□

Poznámka. V poslední úpravě jsme použili tvrzení $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$, které se bude dokazovat na cvičeních, ale čtenář si jej může dokázat snadno sám, protože se jedná jen o regulární transformaci.

Zkusme nyní tuto větu aplikovat a vypočíst derivaci Heavisideovy funkce $\Theta(x)$. Je zřejmé, že $\{\Theta'(x)\} = 0$. Jediným problematickým bodem je 0, kde má funkce jednotkový skok. Proto $[\Theta]_0 = 1$ [7]. Pak již $\Theta'(x) = 0 + 1\cdot\delta(x-0) = \delta(x)$ v $\mathscr{D}'$. Již dříve jsme ukázali, že $|x|' = \operatorname{sgn} x$. Nyní zkusme vypočítat $|x|'''$:

$$|x|''' = (|x|')'' = (\operatorname{sgn} x)'' = (\operatorname{sgn}' x)' = (0 + 2\delta(x-0))' = 2\delta'(x)$$

V tomto příkladu jsme větu použili ve druhé a čtvrté rovnosti. V poslední ji použít nemůžeme, neboť nejsou splněny předpoklady věty.

Věta 2.3.9. Nechť f je po částech spojitá funkce na $\mathbb{R}$ taková, že $f \in L^1(\mathbb{R})$ a nechť $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$ (toto je pouze normalizační, technická podmínka). Pak pro $f_a(x) = af(ax)$ platí:

$$\widetilde{f_a}(x) \to \delta(x) \text{ v } \mathscr{D}' \text{ pro } a \to +\infty$$

Poznámka. Definice $f_a(x)$ dává smysl. Buď například $a = n$ a položme

$$f(y) = \psi_{[-1,1]}(y) := \begin{cases} 1 & \text{pro } y \in [-1,1] \\ 0 & \text{pro } y \notin [-1,1] \end{cases},$$

tzv. charakteristická funkce intervalu $[-1, 1]$. Pak vidíme, že aby $y = ax = nx \in [-1, 1]$, tak musí $x \in [-1/n, 1/n]$. Pak support n-té takové funkce je $[-1/n, 1/n]$ a hodnota této funkce na supportu je n. V limitě $n \to +\infty$ se nosič mění na jednobodovou množinu a hodnota jde skutečně do nekonečna a integrál přes tuto funkci je pro libovolné n roven 1.

Důkaz. Chceme ukázat, že $\lim_{a\to+\infty} \widetilde{f_a}(x) = \delta(x)$ v $\mathscr{D}'$.

$$\left(\lim_{a\to+\infty} \widetilde{f_a}(x), \varphi(x)\right) \overset{\text{def. limity}}{=} \lim_{a\to+\infty} (f_a(x), \varphi(x)) = \lim_{a\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} af(ax)\varphi(x)\mathrm{d}x = (*)$$

Zde bychom chtěli provést záměnu limity a integrálu. Narážíme ale na problém, že nejsme schopni nalézt majorantu. Proto je třeba upravovat dále:

$$(*) = \left\{ \begin{array}{c} \text{transformace} \\ ax = y \\ a\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \lim_{a\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi\left(\frac{y}{a}\right)\mathrm{d}y$$

Zde již jsme schopni zaměňovat, protože $f \in L^1$ dle předpokladu a φ je omezená konstantou K díky hladkosti a omezenému supportu. Pak již můžeme psát

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) \lim_{a+\infty} \varphi\left(\frac{y}{a}\right)\mathrm{d}y = \varphi(0)\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y}_{=1} = (\delta, \varphi).$$

[7] Zde je třeba si uvědomit, že nás nezajímá jen velikost skoku, ale i jeho „orientace“, tj. je třeba si ohlídat znaménko.

Poznámka. Pokud pro funkci f platí, že $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = c$, pak $\lim\limits_{a\to+\infty} \widetilde{f}_a(x) = c\delta(x)$ v $\mathscr{D}'$.

Věta 2.3.10 (II. o derivaci)**.** Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Pak platí

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

Důkaz. Opět dokazuje rovnost v $\mathscr{D}'$, tedy

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \varphi(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \varphi(x)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(nf\left(x+\frac{1}{n}\right), \varphi(x)\right) - (nf(x), \varphi(x))\right] \overset{\mathbb{A}=\mathbb{I}, \mathrm{b}=\frac{1}{n}}{=} \lim_{n\to+\infty} n\left[\left(f(x), \varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)\right) - (f(x), \varphi(x))\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(f(x), \frac{\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}}\right)$$

V tuto chvíli bychom chtěli „vtáhnout“ limitu do závorek. Ze spojitosti funkce f víme, že zachovává konvergenci. Proto stačí ověřit, že $\psi_n(x) := \frac{\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\mathscr{D}}$. Jako kandidáta na limitní funkci zvolme intuitivně $-\varphi'(x)$. Pak musí být splněno:

1. $\operatorname{supp}\psi_n$ jsou stejně omezené. Toto plyne z faktu, že $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,R)$ a díky předpisu $\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)$ rovněž víme, že se support φ se změní nejvýše o jedna. Pak tedy $\operatorname{supp}\psi_n \subset B(0,R+1)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
2. Nyní musíme dokázat stejnoměrnou konvergenci derivací. Začněme s $\alpha = 0$. Pak je třeba ukázat, že $\psi_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} -\varphi'(x)$. K tomuto nejlépe využijeme supremové kritérium, které říká, že $\psi_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} -\varphi'(x) \Leftrightarrow \sigma_n := \sup_{\mathbb{R}}|\psi_n(x) + \varphi'(x)| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Supremum odhadneme pomocí Taylorova rozvoje členu $\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)$ do řádu 2. derivace:

   $$\sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}} + \varphi'(x)\right| = \sup_{\mathbb{R}} \left|\varphi''(\xi)\frac{1}{n}\right| \to 0.$$

   Závěrečný přechod je množné psát, neboť je funkce φ hladká a je tedy na svém supportu omezená. Tímto jsme ukázali konvergenci pro $\alpha = 0$. Pro $\alpha = n$ použijeme zcela stejnou metodu a odhad jen $n$krát zderivujeme. □

Zabývejme se ještě na závěr této podkapitoly násobením v $\mathscr{D}'$. Předpokládejme, že $f, \tilde{g} \in \mathscr{D}'$ a $\tilde{g} \in \mathscr{D}'_{reg}$. Pokud bychom tyhle dvě zobecněné funkce chtěli pronásobit, tak podle naší předešlé definice dostáváme: $(f \cdot \tilde{g}, \varphi) := (f, g\varphi)$. Aby ale argument $g\varphi$ byl testovací funkcí, musí být nutně $g \in \mathcal{C}^\infty$. Odtud vyplývá, že nejsme schopni v $\mathscr{D}'$ pronásobit např. dvě spojité funkce. Rovněž nejde tímto způsobem zavést δ^2. Existují sice současné výzkumy jdoucí tímto směrem, ale dalece přesahují rámec tohoto předmětu.

2.4 Nosič zobecněné funkce a další poznatky o $\mathscr{D}'$

2.4.1 Nosič zobecněné funkce

Definice 2.4.1. Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $G = G^o \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f **je nulová na** G , píšeme $f = 0$ na G, právě když $(f, \varphi) = 0$ pro všechny $\varphi \in \mathscr{D}(G)$.

Poznámka. Lze ukázat, že pro každou zobecněnou funkci f existuje největší otevřená množina G s touto vlastností. Tuhle množinu nazvěme $\mathcal{N}(f)$. Důkaz tohoto tvrzení najde čtenář ve [Štovíček].

Definice 2.4.2. Množinu $\operatorname{supp} f := \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{N}(f)$ nazveme **nosičem zobecněné funkce** f.

Poznámka. Je zřejmé, že $\operatorname{supp} f$ je uzavřená množina. Rovněž je třeba zdůraznit, že pro zobecněnou funkci f neplatí, že $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{Dom}(f)$, neboť definičním oborem zobecněné funkce jsou testovací funkce a nosičem je číselná množina.

Věta 2.4.3. Buď $\tilde{f} \in \mathscr{D}'_{reg}$ a buď f po částech spojitá funkce jedné proměnné. Pak $\operatorname{supp} \tilde{f} = \operatorname{supp} f$.

Důkaz. Důkaz je přenechán jako domácí cvičení. □

Poznámka. Pro faktorové funkce (tj. funkce z faktorprostoru) není pojem nosiče klasické funkce dobře definovaný.

Ilustrujme nyní pojem nosič zobecněné funkce na konkrétním příkladě. Určeme $\operatorname{supp} \delta_{x_0}$. Předpokládejme, že máme testovací funkci, jejíž support neobsahuje bod x_0. Pak v tomto bodě je funkce nulová. Proto $(\delta_{x_0}, \varphi) = \varphi(x_0) = 0$ pro libovolné φ splňující tuto vlastnost. Je zřejmé, že zobecněná funkce je tedy nenulová pouze pro ty testovací funkce, které ve svém supportu obsahují bod x_0 a tedy platí, že $\operatorname{supp} \delta_{x_0} = \{x_0\}$.

Věta 2.4.4 (o řešení rovnice $x^m f = 0$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$)**.** Buď $m \in \mathbb{N}$. Pak rovnice $x^m f = 0$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ má řešení tvaru právě $f = \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}$, kde $c_j \in \mathbb{C}$.

Důkaz. Důkaz nebude proveden v plné obecnosti. Dokazuje se matematickou indukcí, zájemci jej naleznou ve [Šťovíček]. Zde bude naznačen pouze první indukční krok.

Buď tedy m=1. Dokazujeme tedy, že $xf = 0 \Leftrightarrow f = c\delta$ v $\mathscr{D}'$.

$\Leftarrow$ Nechť tedy $f = c\delta$. Jelikož víme, že $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ [8], tak aplikací toho vztahu na náš předpoklad dostáváme $cx \cdot \delta = 0 \cdot \delta$ v $\mathscr{D}'$.

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\forall \varphi \in \mathscr{D}$ platí, že $(xf, \varphi) = (f, x\varphi) = 0$. Nyní uvažujme dvě možnosti:

(a) Buď nejprve $\varphi \in \mathscr{D}$ takové, že $\varphi(0) = 0$. Pak můžeme $\varphi(x)$ rozepsat následujícím způsobem:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)\mathrm{d}t = \varphi(0) + x \underbrace{\int_0^1 \varphi'(x\tau)\mathrm{d}\tau}_{\psi(x)\in\mathcal{C}^\infty} \overset{\varphi(0)=0}{=} x\psi(x)$$

Pak máme rovnost $\varphi = x\psi$, tj. pro každou $\varphi \in \mathscr{D}$ splňující $\varphi(0) = 0$ existuje $\psi \in \mathscr{D}$, a tedy $x\psi \in \mathscr{D}$, což plyne právě z poslední podmínky $\varphi(0) = 0$.[9] Proto odtud plyne, že $(f, \varphi) = (f, x\psi) = 0$.

(b) Buď nyní $\eta, \varphi \in \mathscr{D}$ a nechť $\eta(0) = 1$ (tuhle podmínku lze pro testovací funkci nenulovou v bodě 0 vždy splnit přeškálováním). Pak funkce $\varphi - \varphi(0)\eta$ splňuje podmínky z předešlé části a lze psát:

$$(f, \varphi - \varphi(0)\eta) \overset{1.\text{ část}}{=} 0 \overset{\text{linearita } f}{=} (f, \varphi) - \varphi(0)(f, \eta)$$

Odtud již ale plyne požadované tvrzení, neboť $(f, \varphi) = \underbrace{\varphi(0)}_{(\delta,\varphi)} \underbrace{(f, \eta)}_{\text{číslo}}$, tedy $f = c\delta$, kde $c = (f, \eta)$.

□

[8] $(a(x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), a(x)\varphi(x)) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta(x)\varphi(x))$

[9] Jinak bychom nedostali omezený nosič.

2.4.2 Uzavřenost $\mathscr{D}'$

Připomeňme definici limity (konvergence) v $\mathscr{D}'$: Buď $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'$ posloupnost zobecněných funkcí a buď $f \in \mathscr{D}'$. Pak řekneme, že limita posloupnosti funkcí f_n je rovna f, ozn. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$, právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n,\varphi) = (f,\varphi)$ pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{D}$.

Poznámka. Následující poznámky slouží ke shrnutí a vyjasnění pojmu uzavřenost v $\mathscr{D}'$:

1. Jedná se o tzv. slabou konvergenci, která zajišťuje ve výsledku platnost uzavřenosti $\mathscr{D}'$. (více ve FA)
2. Zkoumáme, jestli platí, že $\widetilde{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{f}_n$. Tedy

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}(\tilde{f}_n,\varphi) = \left(\lim_{n\to+\infty}\tilde{f}_n,\varphi\right) \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \left(\widetilde{\lim_{n\to+\infty} f_n},\varphi\right) = \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

   Aby tahle záměna proveditelná, musí mít výraz $|f_n(x)\varphi(x)|$ integrabilní majorantu. $\varphi(x)$ je spojitá na kompaktu, tedy je omezitelná konstantou K a tedy je potřeba nalézt $g \in L^1_{loc}$ takovou, aby $|f_n(x)| \leq g(x)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
3. **Uzavřenost v $\mathscr{D}'$**
   Předpoklad $f \in \mathscr{D}'$ lze v definici konvergence vynechat. Přesněji lze formulovat toto tvrzení následovně:

   Věta 2.4.5. Buď $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'(G)$ a nechť $\forall\varphi \in \mathscr{D}$ existuje $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n,\varphi) \in \mathbb{C}$. Pak

$$(f,\varphi) := \lim_{n\to+\infty}(f_n,\varphi)\ \forall\varphi\in\mathscr{D}$$

   definuje zobecněnou funkci $f \in \mathscr{D}'(G)$.

   Je jasné, že se jedná o zobecněnou funkci. Podmínky jsou snadno ověřitelné a plynou přímo z definice f.

Na cvičeních se ukáže využití této vlastnosti pro tzv. *Sochockého distribuce*, což jsou možné regularizace funkce $\frac{1}{x}$, které jsou definovány takto:

$$\left(\frac{1}{x\pm \mathrm{i}0},\varphi(x)\right) := \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{x\pm \mathrm{i}\varepsilon},\varphi(x)\right)\ \forall\varphi\in\mathscr{D}$$

Věta 2.4.6 (Sochockého vzorce)**.**

$$\frac{1}{x\pm \mathrm{i}0} = P\frac{1}{x} \mp \mathrm{i}\pi\delta(x) \text{ v } \mathscr{D}'.$$

Důkaz. Bude dokázáno na cvičeních. □

Poznámka. $x\frac{1}{x\pm \mathrm{i}0} = xP\frac{1}{x} = 1$

2.5 Tensorový součin a konvoluce

2.5.1 Zavedení tensorového součinu

V předešlé části jsme narazili na problém nemožnosti násobit dvě zobecněné funkce. Tento problém se nyní pokusíme vyřešit zavedením nového typu násobení, které se ale bude týkat *nezávislých* proměnných. Budeme-li mít dvě klasické funkce, každá bude funkcí jiné nezávislé proměnné, např. $f(x), g(y)$, pak jejich součin $f(x) \cdot g(y)$ budeme nazývat *tensorový součin* a budeme jej značit $f(x) \otimes g(y)$. Pokud se nám tento koncept podaří zavést na prostoru $\mathscr{D}'$, budeme schopni vytvořit například $\delta^2 := \delta(x) \otimes \delta(y)$. Proto budeme požadovat, aby

$$\widetilde{f(x)} \otimes \widetilde{g(y)} = \widetilde{f(x) \otimes g(y)} = \widetilde{f(x)g(y)}.$$

Proto zkoumejme

$$\left(\widetilde{f(x)} \otimes \widetilde{g(y)}, \varphi(x,y)\right) = \left(\widetilde{f(x)g(y)}, \varphi(x,y)\right) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x)g(y)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} Fubini \\ f,g \in L^1_{loc} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(y)\varphi(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \left(\widetilde{f(x)}, \left(\widetilde{g(y)}, \varphi(x,y)\right)\right). \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \left(\widetilde{g(y)}, \left(\widetilde{f(x)}, \varphi(x,y)\right)\right). \end{cases}$$

Přitom jsme tiše předpokládali, že $f \in \mathscr{D}'_{reg}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'_{reg}(\mathbb{R}^m)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Na základě této úvahy tedy definujme tensorový součin na prostoru zobecněných funkcí.

Definice 2.5.1. Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Pak **tensorovým součinem zobecněných funkcí** $f \otimes g$ rozumíme:

$$(f(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)) := (f(x), (g(y), \varphi(x,y))).$$

Jelikož se jedná o operaci, která je značně netriviální, budeme si pro účely tohoto předmětu definici tensorového součinu zjednodušovat, jak jen to bude možné. [10] Bylo by vhodné ověřit, že naše definice je korektní. Proto je třeba se zabývat otázkou, jestli je $(g(y), \varphi(x,y)) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ a jestli objekt, který operací vznikne, je rovněž zobecněnou funkcí. Dokázat linearitu je vcelku triviální a zřejmé na první pohled. Dokázat spojitost tensorového součinu je ale značně složité a zájemci o tento důkaz jej najdou ve [Šťovíček]. My si zjednodušíme práci a dokážeme spojitost tensorového součinu pro speciální prostor testovacích funkcí, který označíme $\mathscr{D}_{sep}(\mathbb{R}^{n+m})$. Tento prostor bude lineární vektorový prostor s prvky $\varphi_x(x)\varphi_y(y)$, kde $\varphi_x(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ a $\varphi_y(y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

Odteď tedy předpokládejme, že $\varphi(x,y) = \varphi_x(x)\varphi_y(y)$. Z tohoto předpokladu ale plyne, že $\operatorname{supp}\varphi(x,y)$ je vždy obdélník. Ověřme nyní, že $(g(y), \varphi(x,y)) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$(g(y), \varphi(x,y)) = (g(y), \varphi_x(x)\varphi_y(y)) = \varphi_x(x) \underbrace{(g(y), \varphi_y(y))}_{\in\mathbb{C}}$$

Tímto je toto ověřeno.
Ověřme ještě, jak se chová $\frac{\partial}{\partial x_k}(g(y), \varphi(x,y))$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(g(y), \varphi(x,y)) = \left(\frac{\partial \varphi_x(x)}{\partial x_k}\right)(g(y), \varphi_y(y)) = \left(g(y), \varphi_y(y)\frac{\partial \varphi_x(x)}{\partial x_k}\right) = \left(g(y), \frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(x,y)\right)$$

Toto tvrzení je pravda pro zcela obecnou funkci $\varphi \in \mathscr{D}$, nikoliv jen pro $\varphi \in \mathscr{D}_{sep}$. Zájemci najdou důkaz ve [Šťovíček]. Ověřením linearity se zabývat nebudeme, to si každý může provést

[10] Áčkaři prominou a nahlédnou do [Šťovíček].

jako domácí cvičení, ale ověříme spojitost. Předpokládejme tedy, že máme $\varphi_n(x,y) \overset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \varphi_x^n(x)\varphi_y^n(y) \overset{\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})}{\longrightarrow} 0$. Zkoumejme limitu

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f(x)\otimes g(y),\varphi_n(x,y)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(f(x),\left(g(y),\underbrace{\varphi_x^n(x)}_{\in\mathbb{C}}\varphi_y^n(y)\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(f(x),\varphi_x^n(x)\underbrace{\left(g(y),\varphi_y^n(y)\right)}_{\in\mathbb{C}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(g(y),\varphi_y^n(y)\right)\left(f(x),\varphi_x^n(x)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(g(y),\varphi_y^n(y)\right)\lim_{n\to+\infty}\left(f(x),\varphi_x^n(x)\right)=(*)$$

V tuto chvíli potřebujeme vědět, jestli $\varphi_x \overset{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} 0$ a $\varphi_y \overset{\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)}{\longrightarrow} 0$. Tohle ale vyplývá z konvergence $\varphi_x^n(x)\varphi_y^n(y) \overset{\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})}{\longrightarrow} 0$. Proto pak můžeme psát

$$(*)=\left(g(y),\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\varphi_y^n(y)}_{=0}\right)\left(f(x),\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\varphi_x^n(x)}_{=0}\right).$$

Poznámka. Prostor $\mathscr{D}_{sep}(\mathbb{R}^{n+m})$ je hustý v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ vzhledem ke konvergenci v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Toto nás (de facto) má opravňovat k tomu, že vše dokazujeme jen pro prostor separovatelných testovacích funkcí. Ovšem bylo by opět třeba toto (netriviální) tvrzení dokázat.

2.5.2 Vlastnosti tensorového součinu v $\mathscr{D}'$

V následujícím odstavci se budeme snažit ukázat některé důležité vlastnosti tensorového součinu v $\mathscr{D}'$. Budeme vždy využívat v maximální možné míře všech zjednodušení, která jsme již na naši definici uvalili.

Komutativita

Uvažujme $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$(f(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)) = \left(f(x), \left(g(y), \underbrace{\varphi_x(x)}_{\in\mathbb{C}} \varphi_y(y) \right) \right) = \underbrace{(f(x), \varphi_x(x)}_{\in\mathbb{C}} (g(y), \varphi_y(y)) =$$

$$= (g(y), (f(x), \varphi_x(x))\, \varphi_y(y)) = (g(y), (f(x), \varphi_x(x)\varphi_y(y))) = (g(y) \otimes f(x), \varphi(x,y))$$

Toto tvrzení lze opět rozšířit i pro libovolnou (tedy ne nutně separovatelnou) testovací funkci.

Linearita v obou argumentech

Z komutativity nám stačí ověřit linearitu pouze v jednom argumentu. Předpokládejme, že $\otimes : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ a nechť $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Zajímá nás

$$((f+\alpha g)(x) \otimes h(y), \varphi(x,y)) = ((f+\alpha g)(x), (h(y), \varphi(x,y))) =$$

$$= (f(x), (h(y), \varphi(x,y))) + \alpha\, (g(x), (h(y), \varphi(x,y))) = (f(x) \otimes h(y), \varphi(x,y)) + \alpha\, (g(x) \otimes h(y), \varphi(x,y)) =$$

$$= (f(x) \otimes h(y) + \alpha g(x) \otimes h(y), \varphi(x,y))$$

Tahle úprava je platná $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Tímto jsme tedy dokázali linearitu tensorového součinu v obou argumentech, tj. bilinearitu.

Asociativita

Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ a $h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^r)$. Platí, že $(f(x) \otimes g(y)) \otimes h(z) = f(x) \otimes (g(y) \otimes h(z))$ v $\mathscr{D}'$? Upravíme obě strany výrazu a provnáme je:

$$LS = ((f(x) \otimes g(y)) \otimes h(z), \varphi(x,y,z)) = (f(x) \otimes g(y), (h(z), \varphi(x,y,z))) = (f(x), (g(y)(h(z), \varphi(x,y,z))))$$

$$PS = (f(x) \otimes (g(y) \otimes h(z)), \varphi(x,y,z)) = (f(x), (g(y) \otimes h(z), \varphi(x,y,z))) = (f(x), (g(y)(h(z), \varphi(x,y,z))))$$

Vidíme, že levá i pravá strana se rovnají $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m+r})$, tedy jsme dokázali, že tensorový součin je jako operace asociativní.

Spojitost v obou argumentech

Buď $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ a nechť $f_k \to f$ v $\mathscr{D}'$. Buď navíc $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Platí pak, že $f_k(x) \otimes g(y) \to f(x) \otimes g(y)$ v $\mathscr{D}'$? Resp. $\lim\limits_{k\to+\infty} (f_k(x) \otimes g(y)) = (f(x) \otimes g(y))$ v $\mathscr{D}'$?

$$\left((\lim_{k\to+\infty} f_k(x) \otimes g(y)), \varphi(x,y) \right) = \lim_{k\to+\infty} (f_k(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} (f_k(x), (g(y), \varphi(x,y))) = \left(\lim_{k\to+\infty} f_k(x), (g(y), \varphi(x,y)) \right) =$$

$$= (f(x), (g(y), \varphi(x,y))) = (f(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)).$$

Díky komutativitě nám stačí ukázat spojitost v jednom z argumentů.

Záměna derivace a tensorového součinu

Platí $D_x^\alpha (f(x) \otimes g(y)) = (D_x^\alpha f(x)) \otimes g(y)$ v $\mathscr{D}'$?

$$(D_x^\alpha (f(x) \otimes g(y)), \varphi(x,y)) = (-1)^{|\alpha|} (f(x) \otimes g(y), D_x^\alpha \varphi(x,y)) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} (f(x), (g(y), D_x^\alpha \varphi(x,y))) = (-1)^{|\alpha|} (f(x), (D_x^\alpha (g(y), \varphi(x,y)))) =$$

$$= (D_x^\alpha f(x), (g(y), \varphi(x,y))) = (D_x^\alpha f(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)).$$

Při dokazování jsme ve druhém řádku použili vztah pro k-tou derivaci výrazu $(g(y), \varphi(x,y))$ odvozený dříve.

Násobení hladkou funkcí

Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ a nechť $a \in \mathcal{C}^\infty$. Platí pak, že $a(x)(f(x) \otimes g(y)) = (a(x)f(x)) \otimes g(y)$?

$$(a(x)(f(x) \otimes g(y)), \varphi(x,y)) = (f(x) \otimes g(y), a(x)\varphi(x,y)) = (f(x), (g(y), a(x)\varphi(x,y))) =$$

$$= (f(x), a(x)(g(y), \varphi(x,y))) = (a(x)f(x), (g(y), \varphi(x,y))) = ((a(x)f(x)) \otimes g(y), \varphi(x,y)).$$

Posun argumentu

Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ a nechť $b \in \mathbb{R}^n$. Pak platí, že $(f \otimes g)(x+b, y) = f(x+b) \otimes g(y)$?

$$((f \otimes g)(x+b, y), \varphi(x,y)) = ((f \otimes g)(z,y), \varphi(z-b,y)) = (f(z), (g(y), \varphi(z-b,y))) =$$

$$= (f(z), (g, \varphi)(z-b,y)) = (f(x+b), (g(y), \varphi(x,y))) = (f(x+b) \otimes g(y), \varphi(x,y))$$

Definice 2.5.2. Řekmene, že $f(x,y) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ **nezávisí na** y, právě když existuje $h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ taková, že $f(x,y) = h(x) \otimes 1$.

2.5.3 Zavedení konvoluce

V téhle kapitolce se podíváme na pojem konvoluce, který již byl jednou v těchto skriptech „definován“. Začneme s konvolucí klasických funkcí a postupně přejdeme ke konvoluci funkcí zobecněných. Náš přístup bude zcela odlišný od přístupů, které se objevují ve [Šťovíček] nebo [Burdík, Navrátil]. U klasických funkcí se omezíme na případ testovacích funkcí, ale bude vidět, kde je tento předpoklad zbytečný.

Definice 2.5.3. Buďte $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Pak **konvolucí funkcí** $(\varphi * \psi)(x)$ rozumíme

$$(\varphi * \psi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y.$$

Zamysleme se nyní nad (intuitivním) významem konvoluce. Můžeme na ni nahlížet třeba jako na vážený průměr funkce ψ přes veškeré možné posuny vážený funkcí φ. Pro všechny příznivce pravděpodobnosti je možné interpretovat konvoluci jako rozdělení pravděpodobností součtu dvou nezávislých jevů.

Poznámka. Konvoluce je dobře definovanou operací nad prostorem $L^1 \times L^1$. Proto je předpoklad $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ zbytečný.

Důkaz. Musíme ukázat, že pro $f, g \in L^1$ platí $\left| \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\mathrm{d}x \right| < +\infty$.

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}y f(y) g(x-y) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}y |f(y)||g(x-y)| \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x |f(y)||g(x-y)| = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}y |f(y)|}_{=\|f\|_1 < +\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x |g(x-y)|}_{=\|g\|_1 < +\infty} < +\infty$$

$\square$

Vlastnosti konvoluce v $\mathscr{D}$

V následující sekci ukážeme, jaké vlastnosti má konvoluce dvou testovacích funkcí.

Komutativita

Ze substituce okamžitě plyne vztah $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.

Asociativita

Chceme ukázat, že $(\varphi * \psi) * \eta = \varphi * (\psi * \eta)$ Nejprve si upravím obě strany výrazů pomocí komutativity:

$$LS = (\varphi * \psi) * \eta = (\psi * \varphi) * \eta = \eta * (\psi * \varphi)$$

$$PS = \varphi * (\psi * \eta) = (\psi * \eta) * \varphi$$

Pak již upravujeme dle definice

$$\eta * (\psi * \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(y)(\psi * \varphi)(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}z \psi(x-y-z)\varphi(z)\eta(y) \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}z\varphi(z) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\psi(x-y-z)\eta(y)}_{=(\psi*\eta)(x-z)} = (\psi * \eta) * \varphi$$

Chování $*$ vůči posunu v argumentu

Chceme ukázat, že $(\varphi * \psi)(x-a) = \varphi(x-a) * \psi = \varphi * \psi(x-a)$. Druhá rovnost je zřejmá z komutativity konvoluce, první si rozepíšeme:

$$(\varphi * \psi)(x-a) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi((x-a)-y)\psi(y)\mathrm{d}y$$

$$\underbrace{\varphi(x-a)}_{\text{ozn: } \varphi_a(x)} * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_a(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi((x-a)-y)\psi(y)\mathrm{d}y$$

Chování $*$ vůči derivaci

Chtěli bychom ukázat následující: $D^\alpha(\varphi * \psi)(x) = (D^\alpha \varphi(x)) * \psi(x) = \varphi(x) * (D^\alpha \psi(x))$. Pokud bychom to dokázali, zjistíme, že konvoluce má „vyhlazovací“[11] schopnost, neboť bereme-li funkci $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ testovací a funkci φ libovolnou integrovatelnou, dostaneme konvolucí těchto dvou funkcí funkci, která je hladká. Důkaz nebudeme provádět přes libovolnou dimenzi n, ale spokojíme se s $n = 1$.

$$(\varphi * \psi)'(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\varphi(x-y)\psi(y) \right)' = \left\{ \begin{array}{c} \text{Předpoklady věty o záměně:} \\ \text{existuje integrabilní majoranta nezávislá na x} \\ \left| \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x-y)\psi(y) \right| \leq K|\psi(y)| \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\varphi(z)\mathrm{d}y \Big|_{z=x-y} \psi(y) = \varphi'(x) * \psi(x) = (\varphi' * \psi)(x).$$

Poznámka. Stojí za povšimnutí, že komutativitu a asociativitu jsme ověřili i pro L^1 prostory. Čtenáři je necháno na rozmyšlení, jestli je toto možné provést i u zbývajících vlastností a proč tomu tak je.

Věnujme se ještě chvíli „vyhlazovací“ schopnosti konvoluce. Následující tvrzení nám ukáže, jak velké předpoklady navíc klademe, když používáme testovací funkce.

[11] Hanko, promiň!

Věta 2.5.4. Buď $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ taková, že $\operatorname{supp} f \subset B_R(0)$. Buď dále $g \in L^1(\mathbb{R})$. Pak $f * g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Důkaz. Důkaz je stejný jako v předešlém případě - stačí nalézt integrabilní majorantu výrazu $\frac{\partial}{\partial x} f(x-y)g(y)$ nezávislou na x.

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x-y)g(y) \right| \leq K|g(y)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

□

Následující věta bude důležitá, neboť ukáže, že konvoluce dvou testovacích funkcí je opět testovací funkce, formálně:

Věta 2.5.5. Buďte $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$. Pak $\varphi * \psi \in \mathscr{D}$.

Důkaz. Abychom ukázali, že se jedná o testovací funkci, musíme ověřit hladkost a stejnoměrnou omezenost nosičů.

Hladkost: Tato vlastnost je zřejmá a plyne přímo z aplikace předešlé věty, konkrétně volbou $\varphi^{(k)} = f$ a $\psi = g$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Tedy víme, že $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}$ platí, že $\varphi * \psi \in \mathcal{C}^\infty$.

Nosič: Připomeňme nejprve definici konvoluce $(\varphi * \psi)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y$. Nyní budeme hledat veškerá x taková, že $(\varphi * \psi)(x) = 0 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y$. Toto ale nastane tehdy, když $\varphi(x-y)\psi(y) = 0$ pro všechna y. Z předpokladu $\varphi \in \mathscr{D}$ vyplývá, že $\exists B_R(0) \supset \operatorname{supp} \varphi$. Pokud nyní uvažujme x pevné a $\varphi(x-y)$ budeme považovat pouze za funkci od y, máme $\operatorname{supp} \varphi(x-y) \subset B_R(x)$. Jelikož i $\psi \in \mathscr{D}$, tak víme, že existuje $B_{R'}(0) \supset \operatorname{supp} \psi$. Pak ale odtud plyne, že pokud $B_R(x) \cap B_{R'}(0) = \emptyset$, pak $\varphi(x-y)\psi(y) = 0$ pro všechna y. Tímto je ukázáno, že máme omezený nosič, neboť první podmínku lze vždy splnit vhodnou volbou x.

Proto je tedy funkce $\varphi * \psi$ testovací funkcí. □

Zde se časem objeví krásný a názorný obrázek. Snad...

Věta 2.5.6 (Souvislost konvoluce a skalárního součinu v $\mathscr{D}$ pro reálné funkce)**.** Označme $\varphi^-(x) := \varphi(-x)$. Pak pro reálné funkce $\varphi, \psi, \tau \in \mathscr{D}$ platí:

1. $\langle \varphi, \psi \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x = (\varphi * \psi^-)(0)$,
2. $\langle \varphi * \tau, \psi \rangle = \langle \varphi, \tau^- * \psi \rangle$.

Důkaz. 1. Zřejmé z definice.

2.
$$\langle \varphi * \tau, \psi \rangle \overset{\text{dle 1}}{=} \left((\varphi * \tau) * \psi^- \right)(0) \overset{\text{asociativita}}{=} \left(\varphi * (\tau * \psi^-) \right)(0) =$$
$$= \left(\varphi * (\tau^- * \psi)^- \right)(0) = \left\langle \varphi, \tau^- * \psi \right\rangle$$

□

2.5.4 Konvoluce testovacích a zobecněných funkcí

Následující odstavec bude důležitým mezikrokem při budování konvoluce zobecněných funkcí. Zde totiž zavedeme konvoluci zobecněné a testovací funkce, pomocí které pak definujeme konvoluci zobecněných funkcí. Principiálně se jedná o totéž, jako byla definice tensorového součinu na prostoru zobecněných funkcí.

Definice 2.5.7. Buď $f \in \mathscr{D}', \varphi \in \mathscr{D}$. Pak **konvolucí zobecněné funkce f a testovací funkce** φ rozumíme $(f * \varphi)(x) := (f(y), \varphi(x-y))$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$. Výsledkem je klasická funkce.

Poznámka. 1. Naše definice je rozumná, neboť pro $\tilde{f} \in \mathscr{D}'_{reg}$ dostáváme totéž, co předtím:

$$(\tilde{f} * \varphi)(x) = (\tilde{f}(y), \varphi(x-y)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)\mathrm{d}y = (f * \varphi)(x)$$

2. Ve smyslu předešlé věty můžeme pro $f \in \mathscr{D}'$ a $\varphi \in \mathscr{D}$ psát $(f, \varphi) = (f * \varphi^-)(0)$

Následující věty jsou spíše technického rázu a jejich důkazy se na první pohled zdají pracné, ale není na nich nic složitého.

Věta 2.5.8. Buď $f \in \mathscr{D}', \varphi \in \mathscr{D}$. Pak $f * \varphi \in \mathcal{C}^\infty$. Má-li navíc zobecněná funkce f kompaktní nosič, pak $f * \varphi$ má kompaktní nosič, a tudíž $f * \varphi \in \mathscr{D}$.

Důkaz. Pro dokázání prvního tvrzení využijeme dvojice lemmat:

Lemma 2.5.9. $f * \varphi$ je spojitá funkce.

Důkaz. Důkaz provedeme pomocí Heineovy věty. Berme posloupnost $x_n \to x$ a označme $\varphi_n^x(y) := \varphi(x_n - y)$, $\varphi^x(y) = \varphi(x-y)$. Je vidět, že $\varphi_n^x(y) \to \varphi^x(y)$ bodově. Nejprve ukážeme, že $\varphi_n^x \xrightarrow{\mathscr{D}}$, tj. že má stejnoměrně omezené nosiče a že veškeré derivace stejnoměrně konvergují:

i) nosiče Víme, že $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R(0)$. Pak ale $\operatorname{supp}\varphi^x \subset B_R(x)$. Z konvergence $x_n \to x$ plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0$ platí, že $|x_n - x| < 1$. Tudíž $\operatorname{supp}\varphi_n^x \subset B_{R+1}(x)$. Stejná omezenost nosičů už nyní plyne z faktu, že jsme nekonečně mnoho nosičů omezili koulí $B_{R+1}(x)$ a ze zbylých n_0, kterých je konečný počet, můžeme vzít největší kouli.

ii) derivace Ukažme nejprve případ $n = 0$, tj. chceme $\varphi_n^x \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \varphi^x$. Využijme supremové kritérium:

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\varphi_n^x(y) - \varphi^x(y)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\varphi(x_n - y) - \varphi(x-y)| \overset{\text{Taylor}}{\leq} \sup_{y\in\mathbb{R}} |(x_n - x)\varphi'(\xi)| \leq K|x_n - x| \to 0,$$

přičemž $\xi \in (x_n - y, x - y)$. Stejný odhad lze provést pro libovolnou derivaci.

Tímto jsme ukázali, že $\varphi_n^x \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi^x$. Nyní již můžeme ukázat snadno spojitost:

$$\lim_{n\to+\infty} (f*\varphi)(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(f(y), \underbrace{\varphi(x_n - y)}_{\varphi_n^x(y)} \right) = \left(f(y), \lim_{n\to+\infty} \varphi_n^x(y) \right) = (f(y), \varphi^x(y)) = (f*\varphi)(x).$$

Tedy konvoluce je spojitá. □

Lemma 2.5.10. Jestliže $f \in \mathscr{D}', \varphi \in \mathscr{D}$, pak $(f * \varphi)' = f' * \varphi = f * \varphi'$.

Důkaz. Z prvního lemmatu plyne, že $f * \varphi \in L^1_{loc}$. Tedy se jedná o generátor regulární zobecněné funkce. Proto můžeme psát $f * \varphi \in \mathscr{D}'$. Pak ale dle věty 2.3.10 platí:

$$(f*\varphi)'(y) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(f * \varphi)\left(y + \frac{1}{n}\right) - (f * \varphi)(y)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(f(x), \varphi\left(y + \frac{1}{n} - x\right)\right) - (f(x), \varphi(y - x))}{\frac{1}{n}} =$$

Nyní využijeme větu o regulární transformaci, tentokrát ji použijeme obráceně. Vidíme, že $\mathbb{A}^{-1} = -\mathbb{I} = \mathbb{A}$ a $\mathrm{b} = y + \frac{1}{n}$. Pak můžeme pokračovat v úpravě:

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(f\left(-x+y+\frac{1}{n}\right), \varphi(x)\right) - (f(-x+y), \varphi(x))}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f\left(-x+y+\frac{1}{n}\right) - f(-x+y)}{\frac{1}{n}}, \varphi(x) \right) =$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(-x+y+\frac{1}{n}\right) - f(-x+y)}{\frac{1}{n}}, \varphi(x) \right) = (f'(y-x), \varphi(x)) = (f'(x), \varphi(y-x) = (f'*\varphi)(y)$$

Druhá rovnost se snadno ověří úpravami z definice f'. $\square$

Z těchto lemmat tedy plyne, že $f * \varphi \in \mathcal{C}^\infty$.

Lemma 2.5.11. Buď $f \in \mathscr{D}'$ taková, že $\operatorname{supp} f$ je kompakt. Pak $\operatorname{supp}(f*\varphi)$ je omezená množina.

Důkaz. Víme, že $(f*\varphi)(x) = (f(y), \varphi(x-y))$. Jelikož je $\varphi \in \mathscr{D}$, má $\varphi(x-y)$ nosič omezený nějakou koulí $B_R(x)$. Volbou x tak, že $\operatorname{supp} f \cap B_R(x) = \emptyset$ dostáváme, fakt, že $\operatorname{supp}(f*\varphi)$ je omezený. $\square$

Ze všech tří lemmat již nyní přímo plyne, že $f * \varphi \in \mathscr{D}$. $\square$

Věta 2.5.12. Buď $f \in \mathscr{D}'$, $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$. Pak $(f*\varphi)*\psi = f*(\varphi*\psi)$.

Důkaz. V důkaze se (opět) omezíme pouze na $\mathbb{R}$. Nejprve si všimneme, že na pravé straně je výraz $(\varphi*\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y$. Ale v levé straně výrazu se integrál vůbec nevyskytuje. Je důležité si uvědomit, že tento integrál existuje a je konečný. Abychom tento integrál nějak dostali na druhou stranu, využijeme riemannovské integrální součty:

$$r_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x - \frac{m}{n}\right) \psi\left(\frac{m}{n}\right)$$

O nich víme, že bodově konvergují přímo k $(\varphi*\psi)(x)$. Zároveň jsme si mohli dovolit volit ekvidistantní rozdělení těchto bodů, neboť víme, že integrál existuje a z vlastností testovacích funkcí φ a ψ zase můžeme tvrdit, že se jedná pouze o končené sumy (neboť testovací funkce jsou nenulové na omezené množině a proto hodnoty m, pro které je funkce nulová, lze ze sumy vyjmout). Nyní ukážeme, resp. zdůvodníme, že r_n konverguje v $\mathscr{D}$. To ukážeme tak, že nalezneme stejnoměrně omezené nosiče r_n a využijeme věty o spojité funkci na kompaktním intervalu.

Fakt, že nosiče r_n jsou stejně omezené plyne z faktu, že φ a ψ mají stejně omezené nosiče a z faktu, že řada je konečná. Pak totiž od jistého n_0 výše platí, že $\operatorname{supp} \varphi\left(x - \frac{m}{n}\right) \subset B_{R+1}(x)$ a tudíž $\operatorname{supp} \varphi\left(x - \frac{m}{n}\right)\psi\left(\frac{m}{n}\right) \subset B_{R+1}(x)$.

Stejnoměrná konvergence je snadno dokázatelná. Vidíme, že $r_n(x)$ bodově konverguje. Přitom funkce $r_n(x)$ je spojitá na kompaktu, tedy je stejnoměrně spojitá a tedy stejnoměrně konverguje, dokonce na celém $\mathbb{R}$ díky nulovosti funkcí mimo support. Ostatní derivace se ukážou zcela stejně, jen nevyužíváme stejnoměrné spojitosti funkcí φ a ψ, ale jejich derivací.

Nyní už můžeme přistoupit k úpravě výrazu:

$$(f*(\varphi*\psi))(x) = (f(y), (\varphi*\psi)(x-y)) \overset{1.\text{ krok}}{=} \left(f(y), \lim_{n\to+\infty} r_n(x-y)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (f(y), r_n(x-y)) = \lim_{n\to+\infty} \left(f(y), \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x-y-\frac{m}{n}\right)\psi\left(\frac{m}{n}\right)\right) \overset{\text{řada je konečná}}{=}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(f(y), \varphi\left(x-y-\frac{m}{n}\right)\psi\left(\frac{m}{n}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}} (f(y), \varphi(x-y-z)\psi(z))\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(f(y), \varphi(x-y-z))}_{(f*\varphi)(x-z)} \psi(z)\mathrm{d}z = ((f*\varphi)*\psi)(x).$$

□

Následující poznámka je přímým důsledkem právě vyřčené věty.

Poznámka. Buďte $f \in \mathscr{D}'$, $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$. Pak $(f * \varphi, \psi) = (f, \varphi^{-} * \psi)$.

Důkaz.

$$(\underbrace{f*\varphi}_{\text{klas. funkce}}, \psi) = \left((f*\varphi)*\psi^{-}\right)(0) \overset{\text{Věta 2.5.12}}{=} \left(f*(\varphi*\psi^{-})\right)(0) =$$

$$= \left(f*(\varphi^{-}*\psi)^{-}\right)(0) = (f, \varphi^{-}*\psi)$$

Je vhodné poznamenat, že při první úpravě se využila definice konvoluce zobecněné a testovací funkce. □

Věta 2.5.13. Nechť $f \in \mathscr{D}'$ taková, že $\operatorname{supp} f$ je kompakt. Pak pro libovolnou posloupnost $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathscr{D}$ takovou, že $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi \in \mathscr{D}$, platí, že $f * \varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} f * \varphi$.

Důkaz. Aby vůbec mělo smysl se tvrzením věty zabývat, je třeba ukázat, že $f * \varphi_n, f * \varphi \in \mathscr{D}$. Tento fakt ale plyne přímo z věty 2.5.8. Proto má smysl ověřovat stejnou omezenost nosičů $f*\varphi_n$ a stejnoměrnou konvergenci derivací těchto funkcí. Stejnoměrná omezenost $\operatorname{supp} f*\varphi_n$ ale vyplývá přímo ze stejné omezenosti $\operatorname{supp} \varphi_n$ a z lemmatu 2.5.11.

Pro ověření druhé podmínky konvergence v $\mathscr{D}$ musíme ukázat, že $f * \varphi_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f * \varphi$ a stejně tak pro libovolné další derivace φ_n. My toto dokážeme pomocí drobného triku. Uvažujme funkci $F\left(x, s = \frac{1}{n}\right) := (f * \varphi_n)(x)$ a $F(x, 0) := (f * \varphi)(x)$. Pokud dokážeme, že je tato funkce spojitá na kompaktu a odtud již bude plynou její stejnoměrná spojitost, pomocí které dokážeme stejnoměrnou konvergenci $f*\varphi_n$. Je vidět, že funkce F je spojitá dle definice všude, jen v bodě $s = 0$ je problém. Abychom ukázali spojitost i v bodě $s = 0$, využijeme následujícího lemmatu:

Lemma 2.5.14. Buď $\{\varphi_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ posloupnost taková, že $\varphi_{k_n} \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi \in \mathscr{D}$ a buď dále $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ číselná posloupnost v $\mathbb{R}$ taková, že $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\varphi_{k_n}(x_n - y) \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi(x-y) \text{ jakožto funkce proměnné } y.$$

Důkaz. Pro dokázání stejnoměrné konvergence derivací zkoumejme rozdíl k_n-tého členu a limitní funkce. Pro nultou derivaci dostaneme:

$$|\varphi_{k_n}(x_n-y) - \varphi(x-y)| \leq |\varphi_{k_n}(x_n-y) - \varphi(x_n-y)| + |\varphi(x_n-y) - \varphi(x-y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

První člen jsme odhadli díky konvergenci φ_{k_n} v $\mathscr{D}$. Konkrétně jsme využili stejnoměrnou konvergenci nulté derivace. Druhý člen je odhadnutelný díky stejnoměrné spojitosti testovací funkce φ. Tato vlastnost vyplývá z hladkosti φ a z faktu, že její support je kompaktní množina. Tento postup je možné analogicky provést pro všechny ostatní derivace.

Je rovněž zřejmné, že nosiče funkcí jsou stejně omezené díky konvergenci φ_{k_n} v $\mathscr{D}$. □

Když máme k dispozici toto lemma, není těžké ověřit spojitost funkce F v bodě $(x, s = 0)$. Využijeme k tomu opět Heineovy věty. Berme $x_n \to x$ a $k_n \to +\infty$ [12] libovolné posloupnosti. Pak

$$F\left(x_n, \frac{1}{k_n}\right) = (f * \varphi_{k_n})(x_n) = (f(y), \varphi_{k_n}(x_n - y)) \to (f(y), \varphi(x-y)) = (f*\varphi)(x) = F(x, 0)$$

Přičemž jsme využili toho, že funkce $f(y) \in \mathscr{D}'$, a tedy je spojitá, a o posloupnosti $\varphi_{k_n}(x_n - y)$ víme, že konverguje v $\mathscr{D}$ dle lemmatu. Proto jsme mohli limitu takto vypočíst. Tedy o F víme,

[12] Protože pak $\frac{1}{k_n} \to 0$ a to chceme.

že je spojitá, je spojitá na kompaktu, tudíž je na něm stejnoměrně spojitá a tedy i speciálně pro $\big(F(x, s = \frac{1}{n}\big) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} F(x, 0)$, což ale dle naší definice F neříká nic jiného, než $(f * \varphi_n)(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} (f * \varphi)(x)$. To jsme ale chtěli dokázat. V důkazu jsme nikde nevyužívali faktu, že pracujeme s 0. derivací funkce φ_n. Proto můžeme celý postup opakovat pro libovolné derivace testovacích funkcí φ_n. $\square$

Věta 2.5.15 (přibližné identity)**.** Buď $\varphi \in \mathscr{D}$ a nechť $\varphi(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ a navíc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$. Označme $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$, tzv. *přibližnou identitu.* Pak pro libovolnou $\psi \in \mathscr{D}$ platí, že $\varphi_n * \psi \xrightarrow{\mathscr{D}} \psi$.

Důkaz. Je třeba opět ověřit podmínky konvergence v $\mathscr{D}$. Víme, že konvolucí testovacích funkcí vzniká testovací funkce. Proto stačí ukázat, že posloupnost $\varphi_n(x)$ má stejně omezené nosiče. Nechť $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ zřejmě platí, že $\operatorname{supp}\varphi_n(x) \subset \left[-\frac{R}{n}, \frac{R}{n}\right] \subset [-R, R]$. Tímto máme zajištěnu stejnou omezenost nosičů. V důkazu stejnoměrné konvergence derivací si podstatnou část práce ulehčíme konstatováním, že $(\varphi_n * \psi)^{(k)} = \varphi_n * \psi^{(k)}$. Proto opět stačí uvažovat pouze nultou derivaci, neboť vyšší derivace by se ukázaly zcela stejným způsobem. Zkoumáme tedy rozdíl:

$$|(\varphi_n * \psi)(x) - \psi(x)| = \left| \int_{-\frac{R}{n}}^{\frac{R}{n}} \varphi_n(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y - \underbrace{\int_{-\frac{R}{n}}^{\frac{R}{n}} \varphi_n(y)\mathrm{d}y}_{=1}\, \psi(x) \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\frac{R}{n}}^{\frac{R}{n}} \varphi_n(y) \left| \underbrace{\psi(x-y) - \psi(x)}_{<\varepsilon} \right| \mathrm{d}y \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$$

Fakt, že výraz v posledním integrandu je menší než ε plyne ze stejnoměrné spojitosti testovací funkce ψ. Odtud již pak také plyne stejnoměrná konvergence celého výrazu k nule, neboť integrál z funkce $\varphi_n(x)$ je dle předpokladu roven jedné a tedy formálně jsme pro libovolné ε nalezli takové n_0, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí, že $|(\varphi_n * \psi)(x) - \psi(x)| < \varepsilon$. $\square$

Tento výsledek by pro nás neměl být zas až tak překvapivý, neboť jsme již dříve ukázali, že $\varphi_n \to \delta$ v $\mathscr{D}'$.

Věta 2.5.16 (o aproximovatelnosti zobecněných funkcí)**.** Každá zobecněná funkce f je limitou jisté posloupnosti funkcí $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty$ [13] ve smyslu konvergence v $\mathscr{D}'$. Má-li navíc zobecněná funkce f kompaktní nosič, pak $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ a φ_n lze volit tak, že $\forall\psi \in \mathscr{D}$ je $\varphi_n * \psi \xrightarrow{\mathscr{D}} f * \psi$.

Důkaz. Nechť η_n jsou přibližné identity z předešlé věty. Pak označme $\varphi_n = f * \eta_n^- \in \mathcal{C}^\infty$. Toto plyne z věty 2.5.8. Pak $\forall\psi \in \mathscr{D}$

$$(\varphi_n, \psi) = (f * \eta_n^-, \psi) = (f, \eta_n * \psi) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (f, \psi)$$

To ale znamená, že $\varphi_n \to f$ v $\mathscr{D}'$. Poznamenejme, že při úpravě jsme ve druhém kroku využili poznámky za větou 2.5.12, následně jsme využili spojitosti zobecněné funkce f a limitu jsme mohli vypočíst díky větě o přibližných identitách.

Pokud nyní navíc budeme předpokládat, že $\operatorname{supp} f$ je kompakt, máme $\varphi_n = f * \eta_n^- \in \mathscr{D}$ dle věty 2.5.8 a tudíž platí

$$\varphi_n * \psi = (f * \eta_n^-) * \psi \overset{\text{Věta 2.5.12}}{=} f * (\eta_n^- * \psi) \xrightarrow{\mathscr{D}} f * \psi.$$

V přechodu ke konvergenci jsme využili věty 2.5.8 a konvergence plyne z věty 2.5.13. $\square$

Touto větou jsme vytvořili aparát potřebný pro zavedení konvoluce zobecněných funkcí, kterou zavedeme v následující sekci.

[13] Zde chápejme tuhle notaci jako označení regulárních zobecněných funkcí, jejichž generátory jsou funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$

2.5.5 Konvoluce zobecněných funkcí

Než přistoupíme k samotné definici, je třeba vyslovit jistý požadavek. V naší definici budeme potřebovat, aby jedna z „konvoluovaných“ zobecněných funkcí měla kompaktní nosič. Tato podmínka totiž dle dříve dokázané věty zajišťuje to, že $f * \varphi \in \mathscr{D}$, což potřebujeme.

Definice 2.5.17. Buďte $f, g \in \mathscr{D}'$ a nechť $\operatorname{supp} f$ je kompakt. Pak **konvolucí zobecněných funkcí f a g** rozumíme

$$(g * f, \varphi) = (g, f^- * \varphi) = (g(y), (f(x), \varphi(x+y))),$$

kde $f^-(x) = f(-x)$.

Poznámka. Následující poznámky jsou jisté drobné postřehy o takto definovaném zobrazení:

1. Konvoluce je operace nad zobecněnými funkcemi a tedy jejím výsledkem je opět zobecněná funkce. Linearita plyne z linearity funkcí f a g, spojitost ukážeme snadno. Uvažujme $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$. Pak $(g * f, \varphi_n) = (g, f^- * \varphi_n) \overset{\text{věta 2.5.13}}{\longrightarrow} (g, f^- * \varphi) = (g * f, \varphi)$.
2. Že je naše definice konzistentní a dobře pasuje do námi budované teorie dokazuje fakt, že beru-li $f \in \mathscr{D}$ (nikoliv z $\mathscr{D}'$!), tak dostávám pro $g \in \mathscr{D}'$ a $\varphi \in \mathscr{D}$ dle poznámky pod větou 2.5.12 toto: $(g * f, \varphi) = (g, f^- * \varphi)$ což je ve shodě s naší definicí.
3. Konvoluce námi takto definovaná není symetrická! Existují obecnější definice konvoluce, např. v [Šťovíček] nebo [Krbálek], které mají vlastnost symetrie, ale je to na úkor jiných vlastností.
4. Konvoluce má vlastnost levé spojitosti. Tzn. buď $g \in \mathscr{D}'$, $\operatorname{supp} g$ je kompakt. Buď dále $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'$, $f \in \mathscr{D}'$ a nechť $f_n \to f$ v $\mathscr{D}'$. Pak $f_n * g \to f * g$ v $\mathscr{D}'$.

   Důkaz.

   $$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n * g, \varphi\right) = \lim_{n\to+\infty}(f_n * g, \varphi) = \lim_{n\to+\infty}(f_n, g^- * \varphi) = (\lim_{n\to+\infty} f_n, g^- * \varphi) = (f, g^- * \varphi) = (f * g, \varphi)$$

   □

Poznámka. Budeme uvažovat konvoluci v $\mathscr{D}'$ funkcí s omezeným nosičem (tj. s kompaktem).

Věta 2.5.18 (Vlastnosti konvoluce v $\mathscr{D}'$)**.** Buďte $f, g, h \in \mathscr{D}'$ zobecněné funkce s omezeným nosičem. Pak

1. $f * g = g * f$;
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$;
3. $(f * g)' = f' * g = f * g'$;
4. $(f * g)(x - a) = (f(x - a)) * g(x) = f(x) * g(x - a)$.

Poznámka. Z předešlé poznámky a prvního bodu této věty plyne spojitost konvoluce v obou argumentech.

Důkaz. Dokážeme první tvrzení, zbytek je ponechán čtenáři jako cvičení. Dle věty 2.5.16 víme, že pro $f \in \mathscr{D}'$ s omezeným nosičem existuje $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}$ taková, že $\varphi_n \to f$ v $\mathscr{D}'$ a $\varphi_n * \psi \xrightarrow{\mathscr{D}} f * \psi$ pro libovolné $\psi \in \mathscr{D}$. Rovněž pro $g \in \mathscr{D}'$ s omezeným nosičem existuje $\{\eta_n\} \subset \mathscr{D}$ taková, že $\eta_n \to g$ v $\mathscr{D}'$ a $\eta_n * \psi \xrightarrow{\mathscr{D}} g * \psi$ pro libovolné $\psi \in \mathscr{D}$.

Pro φ_n a η_m platí, že $\varphi_n * \eta_m \xrightarrow{\mathscr{D}} f * \eta_m$. Zároveň z komutativity testovacích funkcí plyne, že $\eta_m * \varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \eta_m * f$, protože pro $h \in \mathscr{D}'$ platí $(h * \varphi_n, \psi) = (h, \varphi_n^- * \psi) \to (h, f^- * \psi)$ a volbou $h = \eta_m$. Tedy máme $f * \eta_m = \eta_m * f$. Pak již postup/limitu stačí provést v m a tvrzení platí. □

Věnujme se nyní souvislosti konvoluce a tensorového součinu. Bylo by možné totiž provést následující úvahu: $(f * g, \varphi) = (f, g^- * \varphi) = (f(x), (g^- * \varphi)(x)) = (f(x), (g^-(y), \varphi(x-y))) = (f(x) \otimes g(-y), \varphi(x-y)) = (f(x) \otimes g(y), \varphi(x+y))$. Zde ale docházíme k problému, neboť funkce $\varphi(x+y) \notin \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Při této úvaze totiž omezenost výsledného supportu zajišťuje omezenost supportů funkcí f a g.

Příklad

Určete $\delta * f$ pro $f \in \mathscr{D}'$ s kompaktním nosičem.

$$(\delta * f, \varphi) = (f * \delta, \varphi) = (f, (\delta^- * \varphi)) = (f, \varphi),$$

přičemž $(\delta^- * \varphi) = (\delta(-y), \varphi(x-y)) = (\delta(y), \varphi(x+y)) = \varphi(x)$.

Odtud tedy plyne, že δ funguje jako jednotka při konvoluci.

2.6 Užití konvoluce pro řešení diferenciálních rovnic v $\mathscr{D}'$

Mějme L lineární diferenciální operátor (např. pro ODR $\mathrm{L} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}$). Řešíme nyní rovnici $\mathrm{L}u = f$. Označíme-li fundamentální řešení ε rovnice $\mathrm{L}\varepsilon = \delta$. Pak $\mathrm{L}u = f$ má řešení $u = \varepsilon * f$. Je tomu skutečně tak, protože

$$\mathrm{L}u = \mathrm{L}(\varepsilon * f) = (\mathrm{L}\varepsilon) * f = \delta * f = f$$

Tímto jsme dostali odpověď na otázku, k čemu jsou ty zobecněné funkce vlastně vůbec dobré.

Kapitola 3

Integrální transformace

Vybudovali jsme prostor zobecněných funkcí a pomalu směřujeme k řešení parciálních diferenciálních rovnic. Jak jsme viděli na konci minulé kapitoly, jsme na dobré cestě. V této kapitole se tedy budeme věnovat integrálním transformacím, konkrétně Laplaceově a Fourierově, které, jak uvidíme, jsou velmi mocným a užitečným nástrojem. Abychom s nimi mohli začít pracovat, je potřeba ještě vybudovat jistý speciální prostor a na něm zadefinovat speciální třídu zobecněných funkcí.

3.1 Motivace

Na následujících několika řádcích a příkladech se pokusíme objasnit, proč je třeba revidovat naši definici zobecněných funkcí a proč je třeba vytvoření nějakého nového prostoru. Naší snahou a naším cílem je vytvoření takové struktury, která by byla uzavřená právě vůči integrálním transformacím, jako je například Fourierova transformace $\mathfrak{F}$. Proto ji nyní poněkud neformálně zavedeme. Tato definice není zatím definitivní a je pouze pro účely této motivační sekce.

Definice 3.1.1. Pod pojmem *Fourierova transformace* $\mathfrak{F}$ rozumíme zobrazení z prostoru $L^1(\mathbb{R}^n)$ takové, že pro $f \in L^1$ definujeme

$$\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Poznámka. V následujících poznámkách se budeme snažit ukázat některé vlastnosti $\mathfrak{F}$, ze kterých vyplyne, že je skutečně nutné vytvářet nový prostor testovacích funkcí. [1]

1. *Je-li $f \in L^1$, pak $\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi)$ je omezená funkce na $\mathbb{R}^n$*

   Důkaz. Pro dokázání tohoto tvrzení stačí vyjít z definice:

   $$\left|\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left|e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\right|}_{=1} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x < +\infty$$

   Poslední nerovnost plyne z faktu, že $f \in L^1$. □

2. Je-li $f \in L^1$, pak odtud neplyne, že $\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

   Důkaz.

   $$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi)\,\mathrm{d}\xi\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x e^{\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x\, \underbrace{\left|e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\right|}_{=1} \underbrace{\left|f(x)\right|}_{<+\infty} = +\infty.$$

   □

[1] Ale není třeba se lekat. To, co jsme dosud vybudovali, nezahodíme, ale velmi účelně využijeme.

Toto je možné samozřejmě ilustrovat konkrétním příkladem, ale nebudeme to dělat. Je to v podstatě zbytečné. Je důležité, že jsme objevili první nepříjemnou vlastnost námi definovaného zobrazení $\mathfrak{F}$. Totiž nevíme, kam zobrazuje, resp. co je jeho oborem hodnot. Tento problém bude muset náš nový prostor nějak elegantně vyřešit.

3. *Je-li $f \in L^1$ s kompaktním nosičem, pak odtud neplyne, že* $\operatorname{supp} \mathfrak{F}[f(x)](\xi)$ *je kompakt.*
Tuto vlastnost ukážeme na konkrétním příkladě. Za funkci $f(x)$ volme charakteristickou funkci intervalu $[0,1]$, tzn. $\chi_{[0,1]}(x)$. Pak

$$\mathfrak{F}\left[\chi_{[0,1]}\right](\xi) = \int_0^1 e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos x\xi \mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_0^1 \sin x\xi \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{1}{\xi}\sin x\xi\right]_0^1 - \mathrm{i}\left[\frac{1}{\xi}\cos x\xi\right]_0^1 = \frac{1}{\xi}\sin\xi - \frac{\mathrm{i}}{\xi}(\cos\xi - 1)$$

Tato funkce zcela určitě nemá omezený nosič.

Vidíme tedy, že máme sice nějakou transformaci, ale nemůžeme ji použít na prostoru $\mathscr{D}'$, což bychom chtěli. Můžete namítat, že by možná bylo snazší najít jinou transformaci, ale vězte, že tato nám dává mocný nástroj pro výpočet fundamentálních řešení parciálních diferenciálních rovnic a navíc velmi zjednodušuje jejich řešení a usnadňuje výpočty konvolucí, neboť

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right](\xi) = C\xi\mathfrak{F}[f(x)](\xi)$$

$$\mathfrak{F}[f*g](\xi) = \mathfrak{F}[f(x)](\xi)\cdot\mathfrak{F}[g(x)](\xi)$$

Tedy zde vidíme sílu Fourierovy transformace. Ta převádí diferenciální problém na problém algebraický, nesrovnatelně jednodušeji řešitelný a konvoluci převádí na prosté násobení. K těmto vlastnostem časem dojdeme a budou odvozeny.

Nyní už jen pár vět k zamyšlení. Zkuste si zamyslet, proč obraz derivace při $\mathfrak{F}$ vypadá tak, jak vypadá. Pokud budeme uvažovat nějaký lineární operátor $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ na nějakém vektorovém prostoru (třeba zde na prostoru funkcí), tak jeho vlastní funkce (vektory) splňují rovnici

$$Lf = \lambda f$$

a tedy $f(x) = ce^{\lambda x}$ pro libovolné $\lambda \in \mathcal{C}$. Pak bychom mohli tyto funkce považovat za jistou „bázi“ tohoto prostoru a zkoumat Fourierovy koeficienty v této bázi. Dostali bychom

$$\left\langle f, e^{\lambda x}\right\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x$$

Zde už je vidět jistá silná podobnost s předpisem pro Fourierovu transformaci, a proto o ní můžeme tvrdit, že Fourierova transformace nezkoumá přímo chování prvku, ale chování jeho souřadnic v nějaké bázi.

3.2 Schwartzův prostor a prostor temperovaných zobecněných funkcí

V minulé sekci jsme narazili na problém, že fourierovský obraz nějaké funkce nemusí být integrabilní. Proto zavedeme jeden pojem, který již, jak se později ukáže, tuto vlastnost zajistí.

Definice 3.2.1. Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reálná funkce. Pak tuto funkci nazveme

1. **rychle klesající**, právě když $\forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ platí, že $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |x^\alpha f(x)| < +\infty$;
2. **pomalu rostoucí**, právě když $\exists\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ takové, že $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \left|\frac{f(x)}{x^\alpha}\right| < +\infty$.

Definice 3.2.2. O funkci f řekneme, že je prvkem **Schwartzova prostoru** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, právě když jsou splněny tyto podmínky

1. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \ \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < +\infty$, tj. funkce a všechny její derivace jsou rychle klesající.

Poznámka. $\mathscr{S}$ je někdy též nazýván prostorem testovacích funkcí s otevřeným nosičem.

Poznámka. Právě o Schwartzově prostoru ukážeme, že $\mathfrak{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$.

Poznámka. V následují poznámce ukážeme dvě důležité inkluze týkající se Schwartzova prostoru.

1. $\mathscr{S} \subset L^1$

   Abychom toto ukázali, využijeme faktu, že $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ konverguje pro všechna $\alpha > 1$. Uvažujme nyní $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ [2]. Pak z vlastností funkcí z $\mathscr{S}$ plyne, že (volbou $\beta = 0$) $|x^\alpha \varphi(x)| < K_\alpha$ pro všechna x větší než nějaké hraniční $x_0(\alpha)$. Nyní speciálně volbou $\alpha = 2$ máme odhad $|\varphi(x)| \leq \frac{K}{x^2} \in L^1(x_0, +\infty)$. Využijeme při odhadování naší funkce:

   $$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} |\varphi(x)| + \int_{-\infty}^{-R} |\varphi(x)| \mathrm{d}x + \int_{R}^{+\infty} |\varphi(x)| \mathrm{d}x < +\infty$$

   Nyní první člen můžeme snadno odhadnout, neboť $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ a integrujeme na kompaktu, tedy na množině, kde spojitá funkce nabývá svého maxima, a pro zbylé dva použijeme odhad výše. Tímto jsme ukázali, že tento integrál je konečný a tedy každá funkce ze Schwartzova prostoru $\mathscr{S}$ je integrabilní.
2. $\mathscr{S} \supset \mathscr{D}$

   Toto tvrzení je zřejmé.

Jak jsme již zjistili, nejsme schopni zavést zobecněnou $\mathfrak{F}$ na $\mathscr{D}'$, protože nemáme $\mathfrak{F} : \mathscr{D} \to \mathscr{D}$. Ovšem pokud bychom měli znalost, že $\mathfrak{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$, pak bychom byli schopni zavést $\mathfrak{F}$ na duálním prostoru $\mathscr{S}^\sharp$, což jsou veškeré lineární funkcionály nad $\mathscr{S}$. Platí, že $\mathscr{S}^\sharp \subset \mathscr{D}^\sharp$, protože funkcionál definovaný nad $\mathscr{D}$ nemusíme být schopni vůbec rozšířit na $\mathscr{S}$. Jinak řečeno, zvětšením prostoru $\mathscr{S}$ „zmenšíme“ definiční obor $\mathscr{S}^\sharp$. Toto je onen klíčový krok, který nám umožní zavést $\mathfrak{F}$ pro zobecněné funkce. Ovšem ne pro všechny. Bohužel. Ale pro veškeré zobecněné funkce z $\mathscr{S}'$ ano.

Definice 3.2.3. Prostor lineárních spojitých funkcionálů nad $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ nazveme **prostorem temperovaných zobecněných funkcí (distribucí)** $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Abychom mohli na tomto prostoru ověřovat spojitost daného funkcionálu, je potřeba mít zadefinovaný pojem konvergence v $\mathscr{S}$.

Definice 3.2.4. Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$ **konverguje k** $\varphi \in \mathscr{S}$ **v** $\mathscr{S}$, označujeme $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi$, právě když

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \ x^\alpha D^\beta \varphi_n \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} x^\alpha D^\beta \varphi.$$

Lemma 3.2.5. Buďte $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$, $\varphi \in \mathscr{D}$ a nechť $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$. Pak $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi$.

Důkaz. Jelikož platí, že $\mathscr{S} \supset \mathscr{D}$, jsou $\varphi_k, \varphi \in \mathscr{S}$. Připomeňme, co znamená konvergence v $\mathscr{D}$. $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$, právě když $\exists R > 0$ takové, že $\forall k \in \mathbb{N}$ platí, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subset B_R(0)$ a zároveň $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ platí, že $D^\alpha \varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} D^\alpha \varphi$.

Chceme ukázat, že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \ x^\alpha D^\beta \varphi_n \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} x^\alpha D^\beta \varphi$. Odhadneme výraz nalevo, tj. $|x^\alpha D^\beta \varphi_n| \leq |R^n D^\beta \varphi_n|$, což je funkce, která stejnoměrně konverguje dle předpokladu. Tento odhad jsme mohli udělat, protože funkce φ_n mají support omezený koulí $B_R(0)$ a tedy je možné x^α omezit R^α. To, že výsledná funkce je funkcí, kterou si přejeme získat, plyne z bodové konvergence. $\square$

[2] Obdobně opět pro libovolnou dimenzi.

Pomocí tohoto lemmatu nyní dokážeme, že prostor $\mathscr{S}'$ je obsažen v $\mathscr{D}'$. Zároveň při tom využijeme toho, že $\mathscr{S} \supset \mathscr{D}$ a $\mathscr{S}^\sharp \subset \mathscr{D}^\sharp$.

Lemma 3.2.6. $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$. To znamená, že $f \in \mathscr{S}' \Rightarrow f \in \mathscr{D}'$.

Důkaz. Buď $f \in \mathscr{S}'$. Chceme ukázat, že $f \in \mathscr{D}'$, to ale znamená ověřit linearitu a spojitost. Linearita je zjevná. Pro ověření spojitosti volme posloupnost $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$. Platí pak, že $(f, \varphi_k) \to (f, \varphi)$ jako číselná posloupnost? Dle předešlého lemmatu platí, že $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi$. Ze spojitosti funkcionálu $f \in \mathscr{S}'$ pak ale plyne, že konverguje číselná posloupnost $(f, \varphi_k) \to (f, \varphi)$, což bylo dokázat. □

Co nám tento důsledek říká? Už víme, že každá temperovaná zobecněná funkce je zobecněná funkce ve smyslu dříve definovaném. Neříká nám ale nic o tom, jestli jsou tyto zobecněné funkce regulární. Toto nemusí být pravda. Regulární zobecněná funkce nemusí být temperovanou zobecněnou funkcí. Abychom toto demonstrovali, uvažujme zobecněnou regulární funkci $\widetilde{e^{x^2}}$. Kdyby byla $\widetilde{e^{x^2}} \in \mathscr{S}'$, dávala by pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{S}$ konečné číslo. Nyní berme $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathscr{S}$. Pak

$$\left(\widetilde{e^{x^2}}, \varphi(x)\right) = \left(\widetilde{e^{x^2}}, e^{-x^2}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2} e^{-x^2} \mathrm{d}x = +\infty.$$

Díky inkluzi $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$ máme k dispozici veškeré operace zavedené na $\mathscr{D}'$. Jedná se o derivaci, násobení hladkou funkcí, regulární transforamci, limitu, konvoluci a tensorový součin. Je ale potřeba ukázat, že $\mathscr{S}'$ je vůči těmto operacím uzavřený. Tato vlastnost nám pak zaručí uzavřenost (později definované) $\mathfrak{F}$ nad $\mathscr{S}'$.

Věta 3.2.7. Prostor $\mathscr{S}'$ je uzavřen vůči výše jmenovaným operacím s výjimkou násobení hladkou funkcí. Vlastnosti těchto operací se zachovávají.

Důkaz. Vizte [Šťovíček]. Jako cvičení je možné si samostatně ukázat např. uzavřenost vůči derivaci. Dokazování uzavřenosti konvoluce a tensorového součinu je náročné. □

Násobení v $\mathscr{S}'$

Operace násobení hladkou funkcí tak, jak je definována na $\mathscr{D}'$, není v $\mathscr{S}'$ dobře použitelná. Připomeňme její definici. Uvažujme $a \in \mathcal{C}^\infty$, $f \in \mathscr{D}'$ pak $a \cdot f$ jsme definovali: $(a(x) \cdot f(x), \varphi(x)) := (f(x), a(x)\varphi(x))$. Využívali jsme toho, že $a(x)\varphi(x) \in \mathscr{D}$. Toto ale pro $\mathscr{S}$ nefunguje. Uvažujme například (opět) $a(x) = e^{x^2} \in \mathcal{C}^\infty$ a $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathscr{S}$. Pak $a(x)\varphi(x) = 1 \notin \mathscr{S}$. Proto na funkci a potřebujeme uvalit další podmínku. Jeví se jako nejpřirozenější požadovat, aby byla pomalu rostoucí se všemi svými derivacemi.

Věta 3.2.8. Buď $a \in \mathcal{C}^\infty$ a nechť je dále a pomalu rostoucí se všemi svými derivacemi. Pak $af \in \mathscr{S}'$ pro libovolné $f \in \mathscr{S}'$.

Důkaz. Je třeba opět ověřit linearitu a spojitost. Linearita je očividná. Zbývá tedy ukázat, že pro $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$ platí, že $(af, \varphi_k) \to 0$. To, že posloupnost konverguje, říká jen to, že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ $x^\alpha D^\beta \varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$. My musíme vyzkoumat konvergenci výrazu $a\varphi_k$. Pokud ukážeme, že $a\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, pak dostaneme ze spojitosti f informaci, že $(f, a\varphi_k) \to 0$, což dokáže toto tvrzení. Musíme tedy ukázat, že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ $x^\alpha D^\beta a\varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$. Zde ale jen stačí vhodně použít Leibnizovo pravidlo a máme hotovo. Využíváme pak jenom toho, že díky hladkosti můžeme a odhadnout na libovolném kompaktu konstantou a v $\pm\infty$ je a díky tomu, že je pomalu rostoucí, odhadnutelná polynomem. □

Definice 3.2.9. O zobecněné funkci f řekneme, že patří do **prostoru** $\mathscr{S}'_{reg}$, právě když je f jako zobecněná funkce regulární, tj. $f \in \mathscr{D}'_{reg}$ a pokud je její generátor, tj. klasická funkce f, pomalu rostoucí.

Poznámka. Zřejmě $\mathscr{S}'_{reg} \subset \mathscr{S}' \cap \mathscr{D}'_{reg}$.

Měli bychom ověřit, že naše definice dává dobrý smysl. Mějme tedy $f \in L^1_{loc}$ (a tedy f jako zobecněná funkce náleží do $\mathscr{D}'_{reg}$). Buď navíc f pomalu rostoucí, tj. $\exists \alpha^* \in \mathbb{Z}^n_+$ tak, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left|\frac{f(x)}{x^{\alpha^*}}\right| < +\infty$. Nyní buď $\varphi \in \mathscr{S}$, pak máme

$$(f,\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} f(x)\varphi(x) + \int_{-\infty}^{-R} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{R}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

První člen je opět integrál přes kompaktní množinu, tzn. funkce φ na ní nabývá svého maxima, kterým ji můžeme odhadnout. Funkce f je navíc lokálně integrabilní, takže první člen máme odhadnutý. Zbývá provést odhad na zbylé dva členy. Vzhledem k jejich symetrii odhadneme pouze jeden z nich. Využijeme přitom toho, že f je pomalu rostoucí. Z této vlastnosti totiž plyne, že existuje takové C, že $\forall x > R$ $|f(x)| \leq Cx^{\alpha^*}$. Pak ale máme odhad

$$\int_{R}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \leq \int_{R}^{+\infty} |f(x)\varphi(x)|\mathrm{d}x \leq \int_{R}^{+\infty} C|x^{\alpha^*}\varphi(x)|\mathrm{d}x < +\infty$$

Na závěr jsme využili faktu, že $x^{\alpha^*}\varphi(x) \in \mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R})$. Tímto jsme ukázali, že naše definice dává dobrý smysl, neboť výsledek působení funkce $f \in \mathscr{S}'_{reg}$ na libovolnou $\varphi \in \mathscr{S}$ je konečný. Linearita a spojitost jsou jasné.

3.3 Fourierova transformace na $\mathscr{S}$

Definice 3.3.1. Buď $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Pak Fourierovou transformací $\mathfrak{F}$ rozumíme zobrazení

$$\mathfrak{F} : \varphi(x) \mapsto \mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Někdy budeme pro zjednodušení zápisu psát místo $\mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi)$ jen $\widehat{\varphi}(\xi)$. [3]

Poznámka. Jelikož je $\mathscr{S} \subset L^1$, víme již o $\mathfrak{F}$ následující:

1. $\mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi)$ je omezená, tzn. integrál konverguje absolutně;
2. Můžeme snadno zaměňovat limitu a integrál, neboť ten je snadno majorizovatelný. Odtud ale plyne, že funkce $\mathfrak{F}[\varphi](\xi)$ je spojitá.

Nyní si dokážeme dvě elementární tvrzení, která jsou ale zcela klíčová pro použití Fourierovy transformace

Věta 3.3.2 (Chování vůči derivaci)**.** Buď $\varphi \in \mathscr{S}$. Pak platí

1. $$\frac{\partial}{\partial\xi}\mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi) = \mathfrak{F}[(\mathrm{i}x)\varphi(x)](\xi)\,;$$

2. $$\mathfrak{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\right](\xi) = (-\mathrm{i}\xi)\mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi)\,.$$

Důkaz. Dokážeme obě tvrzení pro jednoduchost pouze pro $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{i}x)e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x = \mathfrak{F}[(\mathrm{i}x)\varphi(x)](\xi)$$

Přitom jsme využili faktu, že $\left|(\mathrm{i}x)e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\right| \leq |\mathrm{i}x\varphi(x)| \in \mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R})$. Jelikož jsme dokázali odhadnout derivaci, mohli jsme použít větu o záměně derivace a integrálu.

[3] Na přednáškách se značilo oběma způsoby, já budu používat jediný.

Druhé tvrzení se dokáže obdobně:

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\right](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\mathrm{d}x \overset{\text{per partes}}{=} \underbrace{\left[e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0\ (\varphi\in\mathscr{S})} -(\mathrm{i}\xi)\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x = -(\mathrm{i}\xi)\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi) \quad \square$$

Poznámka. Je jasné, že obě tvrzené lze rozšířit pro libovolnou derivaci, tj.

$$D_\xi^\alpha \mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi) = \mathfrak{F}\left[(\mathrm{i}x)^\alpha\varphi(x)\right](\xi)\,;$$

$$\mathfrak{F}\left[D_x^\alpha\varphi(x)\right](\xi) = (-\mathrm{i}\xi)^\alpha\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi)\,.$$

Za pomoci těchto dvou tvrzení dokážeme následující důležitou větu. K jejímu důkazu ještě navíc využijeme faktu, že pokud $\varphi \in \mathscr{S}$, pak také $x^p\varphi(x) \in \mathscr{S}$ pro $p \in \mathbb{N}$.

Věta 3.3.3. Prostor $\mathscr{S}$ je invariantní vůči $\mathfrak{F}$, tj. $\mathfrak{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$.

Důkaz. Chceme ukázat, že pokud $\varphi \in \mathscr{S}$, tak pak $\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi) \in \mathscr{S}$. Abychom toto ukázali, musíme ukázat, že $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ $\sup_{\mathbb{R}}\left|\xi^\alpha D^\beta\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi)\right| < +\infty$. Na výraz uvnitř závorek nejdříve použijeme první tvrzení, tj. $\left|\xi^\alpha D^\beta\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi)\right| = \left|\xi^\alpha\mathfrak{F}\left[(\mathrm{i}x)^\beta\varphi(x)\right](\xi)\right|$. Následně využijeme druhého tvrzení, tj. $\left|\xi^\alpha\mathfrak{F}\left[(\mathrm{i}x)^\beta\varphi(x)\right](\xi)\right| = \left|\mathfrak{F}\left[D_x^\alpha(x^\beta\varphi(x))\right](\xi)\right| < +\infty$. To, že je výraz menší než nekonečno plyne z toho, že $D_x^\alpha(x^\beta\varphi(x)) \in \mathscr{S}$ a již víme, že $\mathfrak{F}$ je omezená na tomto prostoru. $\square$

V následující části budou postupně dokazovány různé užitečné vlastnosti Fourierovy transformace.

Věta 3.3.4. Fourierova transformace jako zobrazení $\mathfrak{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ je spojité zobrazení.

Důkaz. Bereme posloupnost $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$. Zajímá nás, jestli odtud plyne, že konverguje rovněž $\mathfrak{F}\left[\varphi_n(x)\right](\xi) \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$. To, že posloupnost φ_n konverguje v $\mathscr{S}$ k 0 znamená, že $\forall\alpha, \beta\ x^\alpha D^\beta\varphi_n \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$. Označme

$$\psi_n^{\alpha,\beta} := D_x^\alpha((\mathrm{i}x)^\beta\varphi_n(x)).$$

Pak tato posloupnost rovněž stejnoměrně konverguje k 0 na $\mathbb{R}^n$. Tento fakt vychází z předpokladu konvergence posloupnosti φ_n a vlastností derivace a násobení. Nyní nám stačí prozkoumat, jestli v $\mathscr{S}$ konverguje k 0 posloupnost $\mathfrak{F}[\psi_n^{\alpha,\beta}]$. Toto pak totiž bude znamenat, že $\forall\alpha, \beta :\ \xi^\alpha D^\beta\mathfrak{F}[\varphi_n(x)](\xi) \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$. Zkoumejme tedy

$$\left|\mathfrak{F}\left[\psi_n^{\alpha,\beta}\right](\xi)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\psi_n^{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_{\mathbb{R}^n}\left|\psi_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\mathrm{d}x$$

Získali jsme tedy odhad nezávislý na ξ. Nyní proto prozkoumáme limitu $\forall\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\psi_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{n\to+\infty}\left|\psi_n^{\alpha,\beta}(x)\right|\mathrm{d}x = 0$$

Poslední rovnost plyne ze stejnoměrné konvergence posloupnosti $\psi_n^{\alpha,\beta}$. Tímto jsme dokázali stejnoměrnou konvergenci Fourierových obrazů a tedy jsme ukázali, že Fourierova transformace převádí konvergentní posloupnost na konvergentní posloupnost, a tedy se jedná o spojité zobrazení. $\square$

Věta 3.3.5 (Posuny v argumentech)**.** Buď $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ a nechť $b \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{C}$. Pak

1. $$\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi + b) = \mathfrak{F}\left[e^{ibx}\varphi(x)\right](\xi)\,;$$

2. $$e^{\mathrm{i}b\xi}\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi) = \mathfrak{F}\left[\varphi(x - b)\right](\xi)\,;$$

3.
$$\mathfrak{F}\left[\varphi(cx)\right](\xi) = \frac{1}{|c|^n}\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right]\left(\frac{\xi}{c}\right).$$

Důkaz. Důkaz je zřejmý. Ve všech případech se využívá jen definice a substituce v integrálu. Ukažme pro ilustraci třeba třetí tvrzení:

$$\mathfrak{F}\left[\varphi(cx)\right](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(cx)\mathrm{d}x = \frac{1}{|c|^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}y\cdot\frac{\xi}{c}}\varphi(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{|c|^n}\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right]\left(\frac{\xi}{c}\right).$$

□

Definice 3.3.6. Částečnou Fourierovou transformaci definujeme pro $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ takto:

$$\mathfrak{F}_x[\varphi(x,y)](\xi,y) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x,y)\mathrm{d}x;$$

$$\mathfrak{F}_y[\varphi(x,y)](x,\xi) := \int_{\mathbb{R}^m} e^{\mathrm{i}y\cdot\xi}\varphi(x,y)\mathrm{d}y.$$

Věta 3.3.7 (o částečné Fourierově transformaci)**.** Platí:

1.
$$\mathfrak{F}_x \circ \mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}_y \circ \mathfrak{F}_x = \mathfrak{F};$$

2.
$$D^\alpha_\xi \mathfrak{F}_x\left[\varphi(x,y)\right](\xi,y) = \mathfrak{F}_x\left[(\mathrm{i}x)^\alpha\varphi(x,y)\right](\xi,y);$$

3.
$$\mathfrak{F}_x\left[D^\alpha_x\varphi(x,y)\right](\xi,y) = (-\mathrm{i}\xi)^\alpha\mathfrak{F}_x[\varphi(x,y)](\xi,y).$$

Důkaz. První tvrzení plyne okamžitě z Fubiniovy věty. Druhé a třetí se dokazují stejně, jako bylo výše uvedeno. □

Poznámka. Obdobná tvrzení platí i pro $\mathfrak{F}_y$.

Věta 3.3.8 (o konvoluci)**.** Buďte $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$. Pak

$$\mathfrak{F}\left[\varphi * \psi\right](\xi) = \mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi)\cdot\mathfrak{F}\left[\psi(x)\right](\xi).$$

Důkaz.

$$\mathfrak{F}\left[\varphi * \psi\right](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}(\varphi * \psi)(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}x\ e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\ \varphi(y)\psi(x-y) =$$

Zde jsme použili definici konvoluce. Nyní můžeme použít Fubiniovu větu ($\varphi, \psi \in \mathscr{S} \subset L^1$) a pomocí substituce $x - y = z$ můžeme přejít od souřadnic x, y k y, z a výraz dále upravit

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(y)\psi(x-y) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z\ e^{\mathrm{i}(y+z)\cdot\xi}\varphi(y)\psi(z) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}y\cdot\xi}\varphi(y)\mathrm{d}y\cdot\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}z\cdot\xi}\psi(z)\mathrm{d}z = \mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi)\cdot\mathfrak{F}\left[\psi(x)\right](\xi)$$

□

Věta 3.3.9. Buďte $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathfrak{F}\left[\psi(y)\right](x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}\left[\varphi(y)\right](x)\,\psi(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathfrak{F}\left[\psi(y)\right](x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\ e^{\mathrm{i}y\cdot x}\psi(y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \psi(x) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\ e^{\mathrm{i}y\cdot x}\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}\left[\varphi(y)\right](x)\,\psi(x)\mathrm{d}x$$

□

Poznámka. Zkuste se zamyslet, jak je v tomto případě možné zeslabit předpoklady na funkce φ, ψ. Předpoklad, aby byly z prosotru $\mathscr{S}$ je totiž docela silný. To, jaké jsou tedy podmínky na tyto funkce, vyplývá přímo z předpokladů Fubiniovy věty, která je v důkazu použita.

Věta 3.3.10. $\mathfrak{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ je bijekce a navíc platí, že $\mathfrak{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n}\bar{\mathfrak{F}}$, kde

$$\bar{\mathfrak{F}}[\varphi(x)](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení provedeme ve chvíli, kdy budeme znát $\mathfrak{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$. □

Poznámka. Fourierovu transformaci lze zavést mnoha způsoby, resp. princip je zcela totožný, jen se mění „rozdistribuování“ konstanty $\frac{1}{(2\pi)^n}$.

Věta 3.3.11 (Riemann-Lebesgueovo lemma)**.** Buď $\varphi \in \mathscr{S}$. Pak $\lim\limits_{\xi\to+\infty} \mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi) = 0.$

Důkaz. Tvrzení věty je okamžitým důsledkem Riemann-Lebesgueova lemmatu z klasické analýzy. □

Příklad
Tento příklad se korektně (pomocí integrace v komplexní rovině) vyřeší na cvičeních, ale je vhodné si jej zde uvést.

$$\mathfrak{F}\left[e^{-x^2}\right](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}x\xi}e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

Zkoumejme nyní výraz $\mathfrak{F}\left[e^{-(cx)^2}\right](\xi) = \frac{1}{c}\mathfrak{F}\left[e^{-x^2}\right]\left(\frac{\xi}{c}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{c}e^{-\frac{\xi^2}{4c^2}}$. Zvolíme-li za $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, máme $\mathfrak{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Toto ale neznamená nic jiného, než že jsme našli vlastní funkci operátoru $\mathfrak{F}$ a jemu příslušné vlastní číslo.

3.4 Fourierova transformace na $\mathscr{S}'$

3.4.1 Motivace

Uvažujme funkci $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pak už víme, že existuje $\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi)$, která je omezená a spojitá. Díky omezenosti je ale funkce $\frac{1}{1+\xi^2}\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi) \in L^1(\mathbb{R})$. Pak ale můžeme tvrdit (dokonce jsme to tímto krokem ukázali), že funkce $\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi)$ je pomalu rostoucí. Tudíž funkce $\mathfrak{F}\widetilde{\left[f(x)\right]}(\xi) \in \mathscr{S}'_{reg}$. Tohoto využijeme.

Buď tedy $\varphi \in \mathscr{S}$ a nechť $\mathfrak{F}\widetilde{\left[f(x)\right]}(\xi) \in \mathscr{S}'_{reg}$. Pak

$$(\mathfrak{F}\widetilde{\left[f(x)\right]}(\xi), \varphi(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{F}\widetilde{\left[f(x)\right]}(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x\ e^{\mathrm{i}x\xi}f(x)\varphi(\xi) \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x\ f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi\ e^{\mathrm{i}x\xi}\varphi(\xi)\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathfrak{F}\left[\varphi(\xi)\right](x)\,\mathrm{d}x = (f(x), \mathfrak{F}\left[\varphi(\xi)\right](x)).$$

Ona poslední rovnost vychází právě z výše ukázaného.

Poznámka. Z Fourierovy transformace klasických funkcí plyne, že $\varphi \in \mathscr{S} \Rightarrow \mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi) \in \mathscr{S}$. Dále pak z její spojitosti plyne fakt, že $\mathfrak{F}$ (ve smyslu transformace zobecněných funkcí) mohu rozšířit na celý prostor $\mathscr{S}'$ a není nutné se omezovat prostorem L^1.

Definice 3.4.1. Buď $f \in \mathscr{S}'$. Pak **Fourierovou transformací temperované distribuce** f rozumíme:

$$(\mathfrak{F}[f], \varphi) := (f, \mathfrak{F}[\varphi]) \ \forall \varphi \in \mathscr{S}$$

Poznámka. Z předešlé poznámky plyne dobrý smysl definice, protože $\mathfrak{F}[\varphi] \in \mathscr{S}$.

Poznámka. Uvažujme $f \in \mathscr{S}'$ a $\varphi \in \mathscr{S}$. Pak podle definice je $(\mathfrak{F}[f], \varphi) := (f, \mathfrak{F}[\varphi])$. Jelikož ale víme, že $\mathfrak{F}$ je na $\mathscr{S}$ spojité zobrazení, znamená to, že převede libovolnou konvergentní posloupnost φ_n na konvergentní posloupnost $\mathfrak{F}[\varphi_n]$. Díky spojitosti f víme, že $(f, \mathfrak{F}[\varphi_n])$ bude konvergentní číselná posloupnost. Tímto jsme ale dokázali, že $\mathfrak{F}[f]$ je spojitý funkcionál na $\mathscr{S}$. Je zjevně rovněž lineární, tedy jsme ukázali, že $\mathfrak{F}[f] \in \mathscr{S}'$. Tedy $\mathfrak{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$.

Fourierovu transformaci jsme již zavedli na L^1, $\mathscr{S}$ a $\mathscr{S}'$. Tyto znalosti nám pomohou řešit příklady, které bychom jinak nedokázali spočítat. Například mějme $\Theta(x)$. Fourierův obraz této funkce bychom nedokázali spočítat, ale jelikož $\Theta(x) \in \mathscr{S}'$ ve smyslu zobecněné funkce, je možné zjistit takto její Fourierův obraz.

Následující příklad ukáže, že nemůžeme obecně nic tvrdit o nosiči Fourierova obrazu. Chceme spočítat $\mathfrak{F}[\delta_{x_0}](\xi)$. Je zřejmé, že $\delta_{x_0} \in \mathscr{S}'$.

$$(\mathfrak{F}[\delta_{x_0}], \varphi(\xi)) = (\delta_{x_0}, \mathfrak{F}[\varphi(\xi)](x)) = \mathfrak{F}[\varphi(\xi)](x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x_0\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\Big|_{x=x_0} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x_0\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = (\widetilde{e^{\mathrm{i}x_0\xi}}, \varphi)$$

V poslední úpravě jsme si všimli toho, že to není nic jiného, než definice akce zobecněné regulární funkce (v našem případě temperované) na funkci φ. Tedy jsme nalezli Fourierův obraz Diracovy delta funkce:

$$\mathfrak{F}[\delta_{x_0}](\xi) = e^{\mathrm{i}x_0\xi}$$

Je odtud taky vidět, že Fourierova transformace převedla jednobodový nosič na celé $\mathbb{R}^n$.

3.4.2 Vlastnosti $\mathfrak{F}$ na $\mathscr{S}'$

Následující část bude věnována vlastnostem Fourierovy transformace na $\mathscr{S}'$. Tvrzení jsou vesměs zcela identická jako v předešlé podkapitole, důkazy jsou opět jednoduché. Jejich základním principem je využití příslušné dané vlastnosti u funkcí z $\mathscr{S}$.

Věta 3.4.2 (o derivaci). Buď $f \in \mathscr{S}'$. Pak

1. $$D_\xi^\alpha \mathfrak{F}[f(x)](\xi) = \mathfrak{F}[(\mathrm{i}x)^\alpha f(x)](\xi)\,;$$

2. $$\mathfrak{F}[D_x^\alpha f(x)](\xi) = (-\mathrm{i}\xi)^\alpha \mathfrak{F}[f(x)](\xi)\,.$$

Důkaz. Buď $\varphi \in \mathscr{S}$ libovolné. Pak

$$(D_\xi^\alpha \mathfrak{F}[f(x)](\xi)\,, \varphi(\xi)) = (-1)^{|\alpha|}(\mathfrak{F}[f(x)](\xi)\,, D_\xi^\alpha \varphi(\xi)) = (-1)^{|\alpha|}(f(x), \mathfrak{F}\left[D_\xi^\alpha \varphi(\xi)\right](x)) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(f(x), (-\mathrm{i}x)^\alpha \mathfrak{F}[\varphi(\xi)](x)) = (f(x)(\mathrm{i}x)^\alpha, \mathfrak{F}[\varphi(\xi)](x)) = (\mathfrak{F}[(\mathrm{i}x)^\alpha f(x)](\xi)\,, \varphi(\xi))$$

Druhé tvrzení se dokáže zcela analogicky. □

Věta 3.4.3. $\mathfrak{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ je spojité zobrazení.

Důkaz. O tom, že $\mathfrak{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ jsme se již přesvědčili. Nyní zbývá ukázat spojitost. Mějme tedy posloupnost $\{f_k\} \subset \mathscr{S}'$, $f \in \mathscr{S}'$ a nechť $f_k \to f$ v $\mathscr{S}'$. Toto znamená, že $\forall \varphi \in \mathscr{S}$ je $\lim\limits_{k\to+\infty} (f_k, \varphi) = (f, \varphi)$. Chceme ukázat, že odtud plyne $\mathfrak{F}[f_k] \to \mathfrak{F}[f]$. Zkoumejme tedy

$$\lim_{k\to+\infty} (\mathfrak{F}\,[f_k](\xi)\,, \varphi(\xi)) = \lim_{k\to+\infty} (f_k(x), \mathfrak{F}\,[\varphi(\xi)](x)) = (f(x), \mathfrak{F}\,[\varphi(\xi)](x)) = (\mathfrak{F}[f], \varphi)$$

V důkazu jsme využili toho, že $\mathfrak{F}\,[\varphi(\xi)](x) \in \mathscr{S}$ a spojitosti f. □

Věta 3.4.4. Buď $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ a nechť $b \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{C}$. Pak

1. $$\mathfrak{F}\,[f(x)](\xi + b) = \mathfrak{F}\left[e^{ibx} f(x)\right](\xi)\,;$$

2. $$e^{ib\xi} \mathfrak{F}\,[f(x)](\xi) = \mathfrak{F}\,[f(x - b)](\xi)\,;$$

3. $$\mathfrak{F}\,[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} \mathfrak{F}\,[f(x)]\left(\frac{\xi}{c}\right).$$

Důkaz. Ukážeme pouze první tvrzení, zbylá dvě se dokazují zcela analogicky. Zajímá nás opět působení na libovolnou funkci $\varphi \in \mathscr{S}$.

$$(\mathfrak{F}\,[f(x)](\xi + b)\,, \varphi(\xi)) = (\mathfrak{F}\,[f(x)](\xi)\,, \varphi(\xi - b)) = (f(x), \mathfrak{F}\,[\varphi(\xi - b)](x) =$$

$$= (f(x), e^{ibx} \mathfrak{F}\,[\varphi(\xi)](x)) = (\mathfrak{F}\left[e^{ibx} f(x)\right](\xi)\,, \varphi(\xi))$$

Opět jsme jen ve třetí rovnosti využili analogie tohoto tvrzení v $\mathscr{S}$. □

Definice 3.4.5. **Částečnou Fourierovu transformaci** definujeme pro $\forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ a $\forall \varphi \in \mathscr{S}(R^{n+m})$ takto:

$$(\mathfrak{F}_x[f(x, y)](\xi, y), \varphi(\xi, y)) := (f(x, y), \mathfrak{F}_x[\varphi(\xi, y)](x, y))$$

Obdobně pro $\mathfrak{F}_y$.

Věta 3.4.6 (o částečné Fourierově transformaci). Platí:

1. $$\mathfrak{F}_x \circ \mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}_y \circ \mathfrak{F}_x = \mathfrak{F};$$

2. $$\mathfrak{F}_x[f(x) \otimes g(y)](\xi, y) = \mathfrak{F}_x[f(x)](\xi) \otimes g(y);$$

3. $$\mathfrak{F}_y[f(x) \otimes g(y)](x, \eta) = f(x) \otimes \mathfrak{F}_y[g(y)](\eta);$$

4. $$\mathfrak{F}\,[f(x) \otimes g(y)](\xi, \eta) = \mathfrak{F}_x[f(x)](\xi) \otimes \mathfrak{F}_y[g(y)](\eta).$$

Důkaz. Důkazy jsou zřejmé, využívá se opět jen vlastností z předešlé sekce a definice tensorového součinu. □

Nyní spočítáme jeden na první pohled zvláštní příklad. Znalost jeho výsledku nám ale pomůže s důkazem další věty. Určíme totiž $\mathfrak{F}\,[1](\xi)$.
Uvědomme si nejprve, že $\mathfrak{F}$ je lineární jak v $\mathscr{S}$, tak i v $\mathscr{S}'$. Proto zcela jistě platí, že

$$0 = \mathfrak{F}\,[0](\xi) = \mathfrak{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1\right](\xi) = (-\mathrm{i}\xi)\mathfrak{F}\,[1](\xi)\,.$$

Nyní se odvoláme na větu 2.4.4 z předešlé kapitoly, která tvrdí, že pokud $0 = xf(x)$ v $\mathscr{D}'$, pak $f(x) = C\delta(x)$. Maje tyto dvě znalosti, můžeme psát, že $\mathrm{i}\mathfrak{F}[1] = C\delta$, což ještě můžeme přeznačit na $\mathfrak{F}[1] = c\delta \in \mathscr{S}'$. Zbývá nám určit konstantu c. Využijeme k tomu jednoho předešlého výsledku.

$$(\mathfrak{F}[1](\xi), e^{-\xi^2}) = (c\delta(\xi), e^{-\xi^2}) = c$$

Zároveň víme, že

$$(\mathfrak{F}[1](\xi), e^{-\xi^2}) = (1, \underbrace{\mathfrak{F}\left[e^{-\xi^2}\right](x)}_{=\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}}) = \sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4}}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\sqrt{4\pi} = 2\pi$$

Odtud tedy máme výsledek

$$\mathfrak{F}\,[1](\xi) = 2\pi\delta(\xi).$$

Nyní dokážeme větu 3.3.10, kterou jsme slíbili ukázat a společně s ní následující větu.

Věta 3.4.7. $\mathfrak{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ je bijekce a navíc platí, že $\mathfrak{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\mathfrak{F}}$.

Poznámka.

$$(\overline{\mathfrak{F}}[f], \varphi) = (f, \overline{\mathfrak{F}}[\varphi])$$

Důkaz. Předpokládejme pro jednoduchost opět, že se pohybujeme v dimensi 1.

i) v $\mathscr{S}$: Musíme ukázat, že $\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F} = (2\pi)^n id_{\mathscr{S}}$. Musíme ukázat obě rovnosti, neboť prostor funkcí, na kterém tento operátor působí, je prostorem nekonečné dimense. Nejprve prozkoumáme výraz $\overline{\mathfrak{F}}[\varphi(\xi)](x)$:

$$\overline{\mathfrak{F}}[\varphi(\xi)](x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}x\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\eta}\varphi(-\eta)\mathrm{d}\eta = \mathfrak{F}\,[\varphi(-\eta)](x)\,.$$

Ve druhé rovnosti jsme jen provedli substituci $\xi = -\eta$, ze které vypadlo jedno mínus před integrál, které se ihned použilo na obrácení mezí.
Nyní zkoumejme $\mathfrak{F}\left[\overline{\mathfrak{F}}[\varphi(\xi)](x)\right](y)$:

$$\mathfrak{F}\,[\mathfrak{F}\,[\varphi(-\eta)](x)](y) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}xy}\mathfrak{F}\,[\varphi(-\eta)](x)\,\mathrm{d}x =$$

Nyní přeznačíme $\varphi(-\eta) = \psi(\eta)$ a upravíme integrand dle věty o posunu v argumentu.

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}\,[\psi(\eta - y)](x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}\,[\varphi(y - \eta)](x)\,\mathrm{d}x.$$

V tuto chvíli je třeba provést drobný trik, kvůli kterému jsme počítali $\mathfrak{F}[1]$.

$$\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}\,[\varphi(y-\eta)](x)\,\mathrm{d}x = (1, \mathfrak{F}\,[\varphi(y-\eta)](x)) = (\mathfrak{F}\,[1](\eta)\,, \varphi(y-\eta)) = (2\pi\delta(\eta), \varphi(y-\eta)) = 2\pi\varphi(y).$$

Tímto jsme tedy ukázali, že $(\mathfrak{F}\circ\overline{\mathfrak{F}})(\varphi) = 2\pi\varphi$, což jsme měli ukázat. Druhá rovnost se ukáže zcela stejně.

ii) v $\mathscr{S}'$: Zde musíme ukázat, že $\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F} = (2\pi)^n id_{\mathscr{S}'}$. Pro důkaz využijeme předešlého tvrzení.

$$((\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}}[f])(y), \varphi(y)) = (\overline{\mathfrak{F}}[f](x), \mathfrak{F}\left[\varphi(y)\right](x)) = (f(\xi), \overline{\mathfrak{F}}[\mathfrak{F}[\varphi(y)](x)](\xi)) = (f(\xi), (2\pi)^n id_{\mathscr{S}}\varphi(\xi)) = (2\pi)^n (f, \varphi)$$

Obdobně pro druhou rovnost - jako v předešlém případě. A tímto je důkaz hotov.

□

Věta 3.4.8. Buďte $f, g \in \mathscr{S}'$ funkce s kompaktním nosičem. Pak $\mathfrak{F}[f * g] = \mathfrak{F}[f] \cdot \mathfrak{F}[g]$.

Důkaz. Důkaz bude proveden jen z části. Opírá se totiž o dvě netriviální pozorování, která jsou dokázána třeba ve [Šťovíček].

Lemma 3.4.9 (Lemma 1). Buď $g \in \mathscr{S}'$ funkce s kompaktním nosičem. Pak

$$\mathfrak{F}\left[g(y-x)\right](\xi) \in \mathscr{S}'_{reg}.$$

Lemma 3.4.10 (Lemma 2). Buď $g \in \mathscr{S}'$ funkce s kompaktním nosičem. Pak $\mathfrak{F}\left[g(y)\right](\xi)$ je funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$, která je pomalu rostoucí se všemi derivacemi.

Mějme $f * g \in \mathscr{S}'$. Pak

$$(\mathfrak{F}\left[f * g\right](\xi)\,, \varphi(\xi)) = ((f * g)(x), \mathfrak{F}\left[\varphi(\xi)\right](x)) = (f(x), (g(y), \mathfrak{F}\left[\varphi(\xi)\right](x+y))) = \bullet$$

Nyní se zaměříme na výraz $(g(y), \mathfrak{F}\left[\varphi(\xi)\right](x+y))$. Ten upravíme následujícím způsobem

$$(g(y), \mathfrak{F}\left[\varphi(\xi)\right](x+y)) = (g(y-x), \mathfrak{F}\left[\varphi(\xi)\right](y)) = (\mathfrak{F}\left[g(y-x)\right](\xi)\,, \varphi(\xi)) = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}\left[g(y-x)\right](\xi)\,\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi =$$

v této úpravě bylo použito první lemma.

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}x\xi} \mathfrak{F}\left[g(y)\right](\xi)\,\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \mathfrak{F}\left[\mathfrak{F}\left[g(y)\right](\xi)\,\varphi(\xi)\right](x)$$

Nyní můžeme přijít zpět k $\bullet$:

$$\bullet = (f(x), \mathfrak{F}\left[\mathfrak{F}\left[g(y)\right](\xi)\,\varphi(\xi)\right](x)) = (\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi)\,, \mathfrak{F}\left[g(y)\right](\xi)\,\varphi(\xi)) = (\mathfrak{F}[f] \cdot \mathfrak{F}[g], \varphi)$$

V poslední rovnosti bylo použito druhé lemma. □

3.5 Klasická Laplaceova transformace

V této kapitole se budeme věnovat Laplaceově transformaci, což je opět integrální transformace s exponenciálním jádrem. To znamená, že vlastnosti s derivací, kterých jsme si cenili u Fourierovy transformace, budou platit i pro tuto transformaci.

Definice 3.5.1. Klasickou Laplaceovou transformací funkce f rozumíme

$$\mathfrak{L}\left[f(t)\right](p) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t, \text{ pro } p \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(p) > a,$$

Funkce f musí být měřitelná na $\mathbb{R}^+$ (na záporné polopřímce ji lze dodefinovat 0) a požadujeme, aby existovaly $c \geq 0$ a $a \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \leq ce^{at}$ pro skoro všechna t.

Poznámka. Požadavky na funkci f vycházejí z postačující podmínky konvergence integrálu. Zkoumejme tedy pro jaká $p \in \mathbb{C}$ je výraz $\mathfrak{L}\left[f(t)\right](p)$ dobře definovaný:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^+} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\mathrm{Re}(p)t}|f(t)|\mathrm{d}t \leq c\int_{\mathbb{R}^+} e^{-\mathrm{Re}(p)t}e^{at}\mathrm{d}t = c\int_{\mathbb{R}^+} e^{-(\mathrm{Re}(p)-a)t}\mathrm{d}t < +\infty \Leftrightarrow \mathrm{Re}(p) - a > 0$$

Tedy zde vidíme proč, na funkci klademe takovéto nároky a odkud se vzala podmínka na p.

Provedeme ještě jeden odhad, konkrétně pro derivaci.

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} e^{-pt} f(t)\right| \quad = \quad \left|(-t)^n f(t) e^{-pt}\right| \quad \leq \quad c|t^n| e^{at - \mathrm{Re}(p)t} \quad \in \quad L^1(\mathbb{R}^+) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(p) \quad > \quad a$$

Toto ale znamená, že jsme nalezli integrabilní majorantu derivace a tedy můžeme volně zaměňovat limitu a integrál na oboru konvergence Laplaceovy transformace.

Nyní zformulujeme vlastnosti Laplaceovy transformace. Jejich pořadí bude odpovídat řazení u Fourierovy transformace.

Věta 3.5.2 (Vlastnosti Laplaceovy transformace). Buď f funkce s vlastnostmi potřebnými pro Laplaceovu transformaci, pak

1. $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} \mathfrak{L}[f(t)](p) = \mathfrak{L}[(-t)^n f(t)](p)$;
2. $\mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)\right](p) = p\mathfrak{L}[f(t)](p) - f(0^+)$;
3. Neumíme rozhodnout, zda $\mathfrak{L} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ a zda je $\mathfrak{L}$ spojité zobrazení;
4. $\mathfrak{L}[f(t)](p-b) = \mathfrak{L}\left[e^{bt} f(t)\right](p)$;
5. $e^{\alpha p} \mathfrak{L}[f(t)](p) = \mathfrak{L}[f(t+\alpha)](p)$;
6. $\mathfrak{L}[f(ct)](p) = \frac{1}{c} \mathfrak{L}[f(t)]\left(\frac{p}{c}\right)$;
7. Částečná Laplaceova transformace funguje stejně jako částečná Fourierova transformace;
8. $\mathfrak{L}[f(t) * g(t)](p) = \mathfrak{L}[f(t)](p) \cdot \mathfrak{L}[g(t)](p)$;
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \mathfrak{L}[g(\tau)](t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathfrak{L}[f(\tau)](t)\, g(t) \mathrm{d}t$;
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t = \lim_{p \to 0^+} \mathfrak{L}[f(t)](p)$;
11. $\displaystyle\mathfrak{L}\left[\Theta(t) \int_0^t f(\tau) \mathrm{d}\tau\right](p) = \frac{1}{p} \mathfrak{L}[f(t)](p)$;
12. $\displaystyle\mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = \int_p^{+\infty} \mathfrak{L}[f(t)](q)\, \mathrm{d}q$ pro $p \in \mathbb{R}$ a $p > a$.

Důkaz. Důkaz nebudeme provádět pro všechna tvrzení, je totiž zcela analogický jako u Fourierovy transformace. Ukážeme pro ilustraci jen několik tvrzení, která jsou odlišná:

2.
$$\mathfrak{L}\left[\dot{f}(t)\right](p) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-pt} \dot{f}(t) \mathrm{d}t = \left[e^{-pt} f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}^+} (-p) e^{-pt} f(t) \mathrm{d}t = p\mathfrak{L}[f(t)](p) - \underbrace{\lim_{t \to 0^+} e^{-pt} f(t)}_{f(0^+)}$$

11. a 12. Tato tvrzení se dokazují stejně jako tvrzení 2., tj. rozepsáním levé a pravé strany a aplikací integrace per partes, která zajistí, že hraniční členy se vyruší.

□

Poznámka. Druhá vlastnost Laplaceovy transformace umožňuje na rozdíl od Fourierovy transformace zohlednit počáteční podmínky.

Příklad

Řešme pomocí Laplaceovy transformace úlohu:

$$\dot{u} + 4u = 1 \text{ s počáteční podmínkou } u(0) = 1 \tag{3.1}$$

Pro jednoduchost zápisu budeme označovat $\mathfrak{L}[u] = \hat{u}$. Aplikací Laplaceovy transformace na levou a pravou stranu rovnice 3.1 máme:

$$\mathfrak{L}\left[\dot{u} + 4u\right](p) = \mathfrak{L}\left[\dot{u}\right](p) + 4\mathfrak{L}\left[u\right](p) = p\hat{u} - u(0^+) + 4\hat{u} = p\hat{u} + 4\hat{u} - 1$$

$$\mathfrak{L}\left[1\right](p) = \left(\mathfrak{L}\left[\Theta(x)\right](p)\right) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-pt} \cdot 1\mathrm{d}t = \frac{1}{p}$$

Jelikož je funkce 1 odhadnutelná funkcí e^{0t}, je podle předpokladů Laplaceovy transformace obraz 1 definován pro všechna p taková, že $\mathrm{Re}(p) > 0$. Dostali jsme tedy rovnici

$$p\hat{u} + 4\hat{u} + 1 = \frac{1}{p} \Rightarrow \hat{u} = \left(\frac{1}{p} + 1\right)\frac{1}{p+4} = \frac{p+1}{p(p+4)}$$

Jelikož $\mathfrak{L}[u] = \hat{u}$, převedli jsme problém vyřešení rovnice 3.1 na nalezení vzoru Laplaceova obrazu $\hat{u} = \frac{p+1}{p(p+4)}$. Abychom tento vzor nalezli, stačí si uvědomit, jaké jsou vzory funkcí $\frac{1}{p}$ a $\frac{1}{p-\alpha}$. Již víme, že

$$\frac{1}{p} = \mathfrak{L}\left[1\right](p)$$

$$\frac{1}{p-\alpha} = \mathfrak{L}\left[1\right](p-\alpha) = \int_{\mathbb{R}^+} 1 \cdot e^{-(p-\alpha)t}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^+} e^{\alpha t}e^{-pt}\mathrm{d}t = \mathfrak{L}\left[e^{\alpha t}\right](p)$$

Pokud nyní rozložíme výraz $\frac{p+1}{p(p+4)}$ na parciální zlomky, můžeme pak vzor díky linearitě Laplaceovy transformace nalézt snadno.

$$u(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{p(p+4)}\right](t) = \frac{1}{4}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right](t) + \frac{3}{4}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+4}\right](t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4t}$$

Poznámka. Výpočet vzoru funkce při Laplaceově transformaci je obecně obtížný, ale u obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty je možné jej obejít tímto postupem.

V úvodu jsme naznačovali, že Laplaceova a Fourierova transformace spolu souvisejí. Následující věta ukazuje, na čem je tato souvislost založena.

Věta 3.5.3 (o inverzní Laplaceově transformaci). Buď $F(p)$ funkce komplexní proměnné a buď $c \in \mathbb{R}$ bod, který náleží oboru konvergence $F(p)$ a buď dále c větší než reálná část všech singularit funkce $F(p)$. Pak platí

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(p)](t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\mathbb{R}} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p,$$

kde $c-\mathrm{i}\mathbb{R}$ označuje přímku procházející bodem c, která je rovnoběžná s imaginární osou komplexní roviny.

Důkaz. Důkaz uveden například ve [Šťovíček]. □

Poznámka. Je zřejmé, že výpočet integrálu ve větě uvedeném vede na použití residuové věty.

Speciálně, pokud leží veškeré singularity funkce F v levé polorovině komplexní roviny, je možné volit $c = 0$ a provádět integraci pro p ryze imaginární. Tímto však získáváme Fourierovu transformaci.

3.6 Zobecněná Laplaceova transformace

Motivace Uvažujme $f(t)$ funkci takovou, že $\forall t < 0$ je $f(t) = 0$. Pak její Laplaceovu transformaci jsme schopni vyjádřit v následující podobě:

$$\mathfrak{L}\left[f(t)\right](p) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-pt} f(t) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)t} f(t) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}\omega t} \left(f(t) e^{-\sigma t}\right) \mathrm{d}t = \mathfrak{F}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right](-\omega)$$

Pomocí toho budeme definovat zobecněnou Laplaceovu transformaci.

Definice 3.6.1. Pro zobecněnou funkci f takovou, že $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_0^+$, která navíc splňuje, že $\exists a \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall \sigma > a$ platí $e^{-\sigma t} f(t) \in \mathscr{S}'$ definujeme její Laplaceův obraz předpisem

$$\mathfrak{L}\left[f(t)\right](p) := \mathfrak{F}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right](-\omega) \text{ pro } p = \sigma + \mathrm{i}\omega$$

Poznámka. 1. Laplaceova transformace je jednoparametrická množina temperovaných zobecněných funkcí (σ je parametr, ω proměnná).

2. Je možné ukázat, [Šťovíček], že Laplaceův obraz zobecněné funkce, tak jak je definovaný, je vždy regulární zobecněnou funkcí.

3. Naše definice je konzistentní. Uvažujme f měřitelnou funkci na $\mathbb{R}$ takovou, že $f(t) = 0\ \forall t < 0$ a $|f(t)| \leq Ce^{at}\ \forall t \geq 0$. Potom $f \in \mathscr{D}'_{reg}$ a navíc, $\forall \sigma > a$ je $f(t)e^{-\sigma t} \in L^1(\mathbb{R})$ a tedy $f(t)e^{-\sigma t} \in \mathscr{S}'_{reg}$. Naše definice má tedy hezký smysl a je konsistentní. Navíc je možné si ověřit, že (při značení vlnkou, stejně jako u zobecněných regulárních funkcí) platí

$$\mathfrak{L}\left[\tilde{f}(t)\right](p) = \widetilde{\mathfrak{L}[f(t)]}(p).$$

Nyní se pokusíme vypočítat Laplaceův obraz Diracovy δ-funkce. Tato distribuce splňuje oba předpoklady, které definice požaduje, protože $\operatorname{supp} \delta = \{0\} \subset \mathbb{R}_0^+$ a navíc dokonce pro všechna $a \in \mathbb{R}$ [4] platí, že $\forall \sigma > a\ e^{-\sigma t}\delta(t) = \delta(t) \in \mathscr{S}'$.

$$\left(\mathfrak{L}\left[\delta(t)\right](\sigma + \mathrm{i}\omega), \varphi(\omega)\right) = \left(\mathfrak{F}\left[e^{-\sigma t}\delta(t)\right](-\omega), \varphi(\omega)\right) = \left(e^{-\sigma t}\delta(t), \mathfrak{F}\left[\varphi(-\omega)\right](t)\right) =$$

$$= \left(\delta(t), \mathfrak{F}\left[\varphi(\omega)\right](-t)\right) = \mathfrak{F}\left[\varphi(\omega)\right](0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\omega) \mathrm{d}\omega = (1, \varphi(\omega))$$

Tedy jsme určili, že $\mathfrak{L}\left[\delta(t)\right](p) = 1$ v $\mathscr{S}'$.

Věta 3.6.2. Pro Laplaceovu transformaci zobecněných funkcí platí:

1.
$$\mathfrak{L}\left[(-t)^m f(t)\right](p) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}p^m} \mathfrak{L}\left[f(t)\right](p);$$

2.
$$\mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}p^m} f(t)\right](p) = p^m \mathfrak{L}\left[f(t)\right](p);$$

3.
$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \mathfrak{L}\left[e^{\lambda t} f(t)\right](p) = \mathfrak{L}\left[f(t)\right](p - \lambda);$$

přitom musí platit, že $\mathrm{Re}(p) > a + \mathrm{Re}(\lambda)$,

4.
$$\forall k > 0\ \mathfrak{L}\left[f(kt)\right](p) = \frac{1}{k} \mathfrak{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{p}{k}\right);$$

přičemž opět musí platit $\mathrm{Re}(p) > ka$. Volba k vychází z nutnosti zachovat nosič funkce v $\mathbb{R}^+$,

[4] Definice požaduje existenci alespoň jednoho $a \in \mathbb{R}$

5.

$$\mathfrak{L}\,[f(t) * g(t)](p) = \mathfrak{L}\,[f(t)](p)\,\mathfrak{L}\,[g(t)](p)\,;$$

6.

$$\forall \tau \geq 0\ \mathfrak{L}\,[f(t-\tau)](p) = e^{-\tau p}\mathfrak{L}\,[f(t)](p)\,.$$

Důkaz. Zvídavý čtenář nalezne tento důkaz ve [Šťovíček]. □

Kapitola 4

Řešení počátečních úloh ODR a PDR

V této části se budeme věnovat již konečně řešení jednotlivých typů diferenciálních rovnic za použití nástrojů, které jsme dosud vybudovali. Schéma řešení již pro zobecněné lineární diferenciální rovnice známe. Máme-li

$$Lu = f \text{ v } \mathscr{D}',$$

pak pokud naleznu řešení $L\varepsilon = \delta$, tak jsme ukázali, že $u = \varepsilon * f$ řeší rovnici $Lu = f$. Fundamentální řešení ε budeme hledat právě pomocí integrálních transformací.

Dodejme, že v následujících kapitolách nejprve vždy uvedeme konkrétní příklad řešení dané úlohy a následně postup abstrahujeme do věty, která bude popisovat řešení.

4.1 Lineární ODR s konstantními koeficienty

Řešte počáteční úlohu:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y &= 3te^t \\ y(0) &= 2 \\ \dot{y}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Označme $Ly = \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y$ a $f = 3te^t$. Předpokládejme, že $y(t)$ je řešením této rovnice, tj. $y(t) \in \mathcal{C}^\infty$. Zkonstruujme nyní zobecněnou funkci

$$\tilde{y}(t) := \Theta(t)y(t) \in \mathscr{D}'_{reg}.$$

Pomocí této funkce se pokusíme náš problém převést do řeči zobecněných funkcí a řešit jej. Proto si připravme derivace výrazu $\tilde{y}(t)$:

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \Theta(t)\dot{y}(t) + \delta(t)y(t) = \Theta(t)\dot{y}(t) + \delta(t)y(0) = \Theta(t)\dot{y}(t) + 2\delta(t)$$

$$\ddot{\tilde{y}}(t) = \dot{y}(t)\delta(t) + \Theta(t)\ddot{y}(t) + 2\dot{\delta}(t) = \Theta(t)\ddot{y}(t) + \dot{y}(t)\delta(t) + 2\dot{\delta}(t) = \Theta(t)\ddot{y}(t) + \delta(t) + 2\dot{\delta}(t)$$

Stojí za zmínku, že již v tomto kroku jsme využili počátečních podmínek a zahrnuli je tímto do řešení. Nyní již můžeme dosadit do operátoru L:

$$L\tilde{y} = \Theta(t)\ddot{y}(t) + \delta(t) + 2\dot{\delta}(t) + 3(\Theta(t)\dot{y}(t) + 2\delta(t)) + 2\Theta(t)y(t) = \Theta(t)Ly + 7\delta(t) + 2\dot{\delta}(t) = \underbrace{\Theta(t)f(t)}_{=\tilde{f}(t)} + 7\delta(t) + 2\dot{\delta}(t).$$

Klasickou úlohu jsme tedy převedli na problém v $\mathscr{D}'$, který už umíme vyřešit. Tato zobecněná úloha jde vždy zkonstruovat pomocí $\tilde{y}(t) := \Theta(t)y(t)$. Úloha tedy přešla na tvar:

$$L\tilde{y} = \underbrace{\tilde{f}(t) + 7\delta(t) + 2\dot{\delta}(t)}_{F(t)}, \text{kde } \tilde{f}(t) = \Theta(t)f(t).$$

Řešení této úlohy je $\tilde{y} = \varepsilon * F$. Řešení rozdělíme do dvou kroků, nejprve nalezneme fundamentální řešení a následně vyřešíme zobecněnou úlohu.

I. Fundamentální řešení ε Řešíme úlohu $L\varepsilon = \delta$. Ze cvičení (eventuálně [Šťovíček]) víme, že fundamentální řešení je možné hledat ve tvaru $\varepsilon(t) = \Theta(t)Z(t)$, kde funkce $Z(t)$ splňuje $LZ = 0$ a počáteční podmínky $Z(0) = 0$ a $\dot{Z}(0) = 1$. V našem případě tedy řešíme rovnici

$$LZ = \ddot{Z} + 3\dot{Z} + 2Z = 0.$$

Její řešení je $Z(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$. Po započtení počátečních podmínek máme $Z(t) = e^{-t} - e^{-2t}$, a tedy fundamentální řešení našeho operátoru je tvaru

$$\varepsilon(t) = \Theta(t)\left(e^{-t} - e^{-2t}\right).$$

II. Vyřešení zobecněné úlohy Nyní se pokusíme spočíst konvoluci $\varepsilon * F = \tilde{y}$. Nejprve si rozepíšeme z linearity konvoluce veškeré příspěvky a každý z nich poté vyšetříme zvlášť.

$$\tilde{y} = \varepsilon * F = \varepsilon * (\tilde{f} + 7\delta + 2\dot{\delta}) = \underbrace{\varepsilon * \tilde{f}}_{(1)} + \underbrace{7\varepsilon * \delta}_{(2)} + \underbrace{2\varepsilon * \dot{\delta}}_{(3)}$$

Výpočty jednotlivých konvolucí provedeme postupně v následujících odstavcích:

Výpočet (2)

$$7\varepsilon * \delta = 7\varepsilon = \Theta(t)\left(7\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\right)$$

Poznamenejme, že se vždy budeme snažit převést řešení na tvar $\Theta(t)$ krát nějaká funkce. Proč je toto pro nás důležité, vyplývá z konstrukce řešení, neboť jsme volili jako zobecněné řešení funkci tvaru $\tilde{y}(t) = \Theta(t)y(t)$, kde $y(t)$ bylo řešením klasické rovnice.

Výpočet (3)

$$2\varepsilon * \dot{\delta} = 2\dot{\varepsilon} * \delta = 2\dot{\varepsilon} = \Theta(t)\left(2\left(2e^{-2t} - e^{-t}\right)\right)$$

Výpočet (1) Pro tuto část výpočtu bychom potřebovali spočítat konvoluci $f * g$, kde $f, g \in \mathscr{D}'_{reg}$ a $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^+$, $\operatorname{supp} g \subset \mathbb{R}^+$. Pro takový případ ale konvoluci nemáme zavedenou. [1] Přesto se můžeme pokusit tento případ vyřešit:

$$((f * g)(t), \varphi(t)) = (f(t), (g(\tau), \varphi(t + \tau))) = \bullet$$

O funkci $(g(\tau), \varphi(t + \tau))$ víme, že je třídy $\mathcal{C}^\infty$. Pokud bychom ještě dokázali říci, že je její nosič omezený, měli bychom vyhráno. (Toto je v podstatě jediný rozdíl mezi naší definicí konvoluce a tou, ve skriptech prof. Šťovíčka.)

$$\bullet = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t f(t) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tau g(\tau) \underbrace{\varphi(t + \tau)}_{\psi(t,\tau)} = \bullet$$

Zkoumejme nyní nosič funkce $\psi(t, \tau)$. Vzhledem k její definici se jedná o „pás“ v rovině (t, τ) protínající osu t v $\operatorname{supp}\varphi$ a osu τ rovněž v těchto bodech. Vzhledem k tomu, že funkce $f(t)$ je

[1] Konvoluci, která by toto umožňovala, lze zavést. Tuto její vlastnost bychom ale využili jen zde, proto byla použita jiná definice. Zájemci definici naleznou ve [Šťovíček]

nulová dle definice alespoň na $\mathbb{R}^-$ a funkce $g(\tau)$ stejně tak, lze nosič funkce $\psi(t,\tau)$ omezit a tím umožnit výpočet integrálu.

Zde bude taky jednoho krásného dne obrázek. Doufám...

Budeme se jej snažit převést do tvaru definice působení regulární zobecněné funkce. Proto použijeme substituci:

$$\bullet = \left\{ \begin{array}{c} \text{Substituce} \\ z = t + \tau \\ t = t \end{array} \right\} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \dot{f}(t) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z \dot{g}(z-t)\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z\, \varphi(z) \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(z-t)\mathrm{d}t \right)$$

Tímto jsme zjistili, že výsledek konvoluce regulárních zobecněných funkcí je regulární zobecněná funkce, jejíž klasický generátor je klasická konvoluce generátorů zobecněných funkcí. Tento výsledek by neměl být překvapivý.

Mají-li tedy funkce f, g nosič na kladné polopřímce, lze je zapsat jako $f(t) = \Theta(t)f(t)$ a $g(z-t) = \Theta(z-t)g(z-t)$. Vidíme, že $\Theta(t)\Theta(z-t) \neq 0 \Leftrightarrow t \in (0,z), z > 0$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t f(t)g(z-t) = \Theta(z) \int_0^z f(t)g(z-t)\mathrm{d}t.$$

Naše funkce $\tilde{f}(t)$ a $\varepsilon(t)$ splňují z definice předpoklady výše zmíněné, a proto můžeme spočíst jejich konvoluci.

$$\varepsilon(t) * \tilde{f}(t) = \Theta(t)Z(t) * \Theta(t)f(t) = \Theta(t) \int_0^t Z(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \Theta(t) \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-2\tau})3(t-\tau)e^{t-\tau}\mathrm{d}\tau =$$

$$= \Theta(t)3e^t \left[t \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-2\tau})e^{-\tau}\mathrm{d}\tau - \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-2\tau})\tau e^{-\tau}\mathrm{d}\tau \right] = (1)$$

Tímto jsme spočetli i poslední člen konvoluce a opět vidíme, že je napsatelný ve tvaru součinu Heavisideovy funkce a nějaké klasické funkce. Tedy nyní již víme, že

$$\tilde{y}(t) = (1) + (2) + (3) =$$

$$= \Theta(t) \underbrace{\left[7\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) + 2\left(2e^{-2t} - e^{-t}\right) + 3e^t \left[t \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-2\tau})e^{-\tau}\mathrm{d}\tau - \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-2\tau})\tau e^{-\tau}\mathrm{d}\tau \right] \right]}_{=y(t)}$$

O funkci $y(t)$ bychom mohli tvrdit, že je řešením klasické úlohy. Z našeho postupu to ale nevyplývá. Ve skutečnosti tomu tak ale je a přesvědčí nás o tom následující věta.

Věta 4.1.1. Nechť $u = u(t)$ pro $t \geq 0$ je klasické řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvaru

$$Lu = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}u' + a_n u = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}u^{(k)} = f(t),$$

kde $a_k = konst.$ pro všechna $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a $a_0 = 1$, které splňuje počáteční podmínky $u^{(k)}(0) = u_k$ pro všechna $k \in \hat{n}$ a nechť $f(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ je po částech spojitá funkce.

Definujeme-li $\tilde{u}(t) = \Theta(t)u(t)$ a $\tilde{f}(t) = \Theta(t)f(t)$, tak potom:

1. Zobecněná funkce $\tilde{u}$ vyhovuje rovnici v $\mathscr{D}'$:

$$L\tilde{u} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\tilde{u}^{(k)} = \tilde{f} + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \delta^{(r)} = F,$$

kde $c_r = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-r} a_{n-k-r}u_{k-1}$.

2. Pro řešení klasické úlohy platí

$$u(t) = \int_0^t Z(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau + \sum_{k=0}^{n-1} c_k Z^{(k)},$$

kde $Z(t)$ je funkce z fundamentálního řešení operátoru L, tj. $LZ = 0$ a $Z^{(k)}(0) = 0\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ a $Z^{(n-1)}(0) = 1$.

Důkaz. První tvrzení se ověří přímým výpočtem, stejně, jako u ilustračního příkladu.
Druhá část tvrzení se dokáže taky přímo. Potřebujeme znát fundamentální řešení. Buď tedy $\tilde{u} = \varepsilon * F$, kde $\varepsilon(t) = \Theta(t)Z(t)$. Pak

$$\tilde{u} = \varepsilon * F = \varepsilon * \tilde{f} + \varepsilon * \left(\sum_{r=0}^{n-1} c_r \delta^{(r)}\right) =$$

$$= \varepsilon * \tilde{f} + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \varepsilon * \delta^{(r)} = \varepsilon * \tilde{f} + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \varepsilon^{(r)} * \delta = \varepsilon * \tilde{f} + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \varepsilon^{(r)}.$$

Díky počátečním podmínkám na funkci $Z(t)$ je tato vždy spojitou funkcí a pro její derivace (za použití věty pro derivování po částech spojité funkce) platí $\varepsilon^{(r)} = \Theta(t)Z^{(r)}$. Z předešlého výpočtu taky mj. víme, že $(\varepsilon * \tilde{f})(t) = \Theta(t)\displaystyle\int_0^t Z(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$.
Pokud toto dosadíme do vztahu pro $\tilde{u}(t)$, dostaneme:

$$\tilde{u}(t) = \Theta(t)\left[\underbrace{\int_0^t Z(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau}_{(I)} + \underbrace{\sum_{r=0}^{n-1} c_r Z^{(r)}}_{(II)}\right]$$

Tedy skutečně získáváme $\tilde{u}(t) = \Theta(t)u(t)$ Nyní ověříme, že $u(t)$ je řešením klasické úlohy. U členů (I) a (II) ověříme, že jsou n-krát diferencovatelné a že řeší L.
(II): Jelikož je $Z \in \mathcal{C}^\infty$ je

$$\left(\sum_{r=0}^{n-1} c_r Z^{(r)}\right)^{(k)} = \sum_{r=0}^{n-1} c_r Z^{(r+k)} \in \mathcal{C}^\infty\ \forall k.$$

Navíc díky linearitě L a konstantnosti koeficientů a_k platí:

$$L\left(\sum_{r=0}^{n-1} c_r Z^{(r)}\right) = \sum_{r=0}^{n-1} c_r L Z^{(r)} = \sum_{r=0}^{n-1} c_r (LZ)^{(r)} = 0$$

Tedy toto je homogenní řešení operátoru L.
(I): Nejprve ověříme, že je výraz n-krát diferencovatelný.

Poznámka. Z MAA4 (MAB4) si jistě pamatujete vztah $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\displaystyle\int_0^t g(t,\tau)\mathrm{d}\tau\right) = g(t,t) + \displaystyle\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} g(t,\tau)\mathrm{d}\tau$.
Pokud ne, je vhodné si jej dokázat.

Díky této poznámce můžeme psát:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^t Z(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) &= \underbrace{Z(t-t)}_{Z(0)=0} f(t) + \int_0^t \dot{Z}(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \dot{Z}(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\int_0^t Z(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) &= \underbrace{\dot{Z}(t-t)}_{\dot{Z}(0)=0} f(t) + \int_0^t \ddot{Z}(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \ddot{Z}(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(\int_0^t Z(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) &= \underbrace{Z^{(n-2)}(t-t)}_{Z^{(n-2)}(0)=0} f(t) + \int_0^t Z^{(n-1)}(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t Z^{(n-1)}(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \\
\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}t^{n}}\left(\int_0^t Z(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) &= \underbrace{Z^{(n-1)}(t-t)}_{Z^{(n-1)}(0)=1} f(t) + \int_0^t Z^{(n)}(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) + \int_0^t Z^{(n)}(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Vidíme, že všechny derivace existují. To, že je toto řešením dané úlohy, plyne z aplikace operátoru L. Je zřejmé, že toto řešení je partikulárním řešením (díky členu $f(t)$ v n-té derivaci)

$$L\left(\int_0^t Z(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\left(\int_0^t Z(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{(k)} =$$

$$= f(t) + \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}Z^{(k)}(t-\tau)f(\tau)\right)\mathrm{d}\tau = f(t) + \int_0^t LZ\cdot f(t)\mathrm{d}\tau = f(t)$$

Tímto jsme ukázali, že $u(t)$ řeší rovnici $Lu = f$. Že toto řešení splňuje i počáteční podmínky je taky jednoduché ukázat. Pro $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ plyne z nulovosti integrálu $(I)^{(k)}(0) = 0$ a tedy nepřispívají do počátečních podmínek. Proto použijeme člen (II) a aplikujeme podmínky na $Z^{(r)}$ a definici koeficientů c_r. Odtud po dosazení nejvyšší derivace vyjádřené z (derivací) rovnice $LZ = 0$ vyplývá, že $u^{(r)}(0) = u_r$. Dosazovat v plné obecnosti lze, jedná se však o zbytečně dlouhý technický výpočet. Čtenář si jej může provést sám doma, jako cvičení. Důležité je jej umět aplikovat konkrétně. Tímto jsme rovněž ukázali, že splňujeme počáteční podmínky a větu jsme zcela dokázali. □

4.2 Parciální diferenciální rovnice

Poznámka. Pro parciální diferenciální rovnice nemáme k dispozici nic jako fundamentální systém řešení, který známe z lineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Prakticky to znamená, že zabývat se problémem nalezení „obecného řešení PDR“ nedává příliš smysl. Zabýváme se tedy vždy úlohou řešit PDR doplněnou o počáteční, eventuálně okrajové podmínky.

Uveďme pro ilustraci této poznámky následující příklady:

1. Rovnici $\frac{\partial}{\partial t}u + a\frac{\partial}{\partial x}u = 0$ splní jakákoliv funkce $u(x,t) = f(x-at)$ pro libovolnou $f \in \mathcal{C}^1$.
2. Rovnici $\mathrm{div}u = 0$ řeší v $\mathbb{R}^3$ libovolná funkce tvaru $u = \mathrm{rot}F$, kde F je libovolné vektorové pole.

4.2.1 PDR 1. řádu a metoda charakteristik

Uvažujme lineární PDR 1. řádu se 2 neznámými proměnnými ve tvaru [2]

$$\tilde{a}(x,t)u + \tilde{b}(x,t)u_t + \tilde{c}(x,t)u_x = \tilde{g}(x,t).$$

[2]Značení: $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ atp.

Je-li $\tilde{b}(x,t)$ nenulová funkce, lze tímto členem vydělit celou rovnici a převést ji na tvar

$$a(x,t)u + u_t + c(x,t)u_x = g(x,t) \text{ s počáteční podmínkou } u(x,0) = u_0(x). \tag{4.1}$$

Poznámka. Následující sled poznámek poslouží jako popis metody charakteristik.

1. $u_t + c(x,t)u_x$ lze chápat jako směrovou derivaci funkce u ve směru $(c(x,t),1)$ v rovině (x,t);
2. Vektory $(c(x,t),1)$ tvoří vektorové pole v rovině (x,t). Křivky $x = X(t)$ podél vektorového pole jsou dány obyčejnou diferenciální rovnicí $X'(t) = c(X(t),t)$. Tyto křivky zveme *charakteristiky.*
3. Charakteristika procházející bodem $(x_0,0)$ vyhovuje počátečním podmínkám $X(0) = x_0$.
4. Nechť $u(x,t)$ je řešením úlohy (4.1) a $x = X(t)$ s $X(0) = x_0$ je charakteristika. Zúžení řešení $u(x,t)$ na charakteristiku je dáno
$$v(t) = u(X(t),t),$$
kde $v'(t) = u_x(X(t),t)\cdot X'(t) + u_t(X(t),t) = u_x(X(t),t)\cdot c(X(t),t) + u_t(X(t),t)$. Touto úpravou jsme úlohu (4.1) převedli na úlohu řešení systému ODR.

Poznámka. V literatuře je metoda charakteristik obvykle zapisována jen ve velmi stručném tvaru:

$$\tilde{a}(x,t)u + \tilde{b}(x,t)u_t + \tilde{c}(x,t)u_x = \tilde{g}(x,t)$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \tilde{b}(x(s),t(s));$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \tilde{c}(x(s),t(s));$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \tilde{a}(x(s),t(s))u = \tilde{g}(x(s),t(s)).$$

Parametr s slouží k parametrizaci charakteristiky.

Postup metody charakteristik pro nalezení řešení úlohy (4.1)

1. Nalezneme charakteristiky, tj. řešíme rovnici $X'(t) = c(X(t),t)$ s počáteční podmínkou $X(0) = x_0$. Řešení označme $X_{x_0}(t)$.
2. Nalezneme x_0 počátek charakteristiky pro daný bod (x,t), kterým charakteristika prochází, tj. řešíme rovnici $X_{x_0}(t) = x$ pro x_0. Její řešení označme $x_0 = p(x,t)$.
3. Vyřešíme ODR na charakteristikách z bodu 1, tj. řešíme rovnici $v'(t)+a(X(t),t)v(t) = g(X(t),t)$ s počáteční podmínkou $v(0) = u_0(x_0)$. Řešení označme $v_{x_0}(t)$.
4. Vybereme, resp. dosadíme správnou charakteristiku, tj:
$$u(x,t) = v_{x_0}(t)|_{x_0=p(x,t)}$$

Ilustrujme tuto metodu na konkrétním případě:

$$u + u_t + xu_x = 3x \text{ s počáteční podmínkou } u(x,0) = \arctan(x)$$

Postupujme dle naznačeného postupu:

$$X'(t) = X(t) \text{ s počáteční podmínkou } X(0) = x_0$$

Řešením této rovnice je očividně $X_{x_0}(t) = x_0e^t$.

$$X_{x_0}(t) = x = x_0e^t \Rightarrow p(x,t) = x_0 = xe^{-t}$$

$$v'(t) + 1v(t) = 3X(t) = 3x_0e^t \text{ s počáteční podmínkou } v(0) = \arctan(x_0)$$

Tuto rovnici řešíme pohledem:

$$v(t) = Ke^{-t} + Ae^t$$
$$v'(t) = -Ke^{-t} + Ae^t$$

Po dosazení do předpisu máme:

$$2Ae^t = 3x_0e^t \Rightarrow A = \frac{3}{2}x_0$$

Aplikací počáteční podmínky navíc získáváme:

$$v(0) = K + A = K + \frac{3}{2}x_0 = \arctan(x_0)$$

Tedy řešení je tvaru:

$$v(t) = (\arctan(x_0) - \frac{3}{2}x_0)e^{-t} + \frac{3}{2}x_0e^t$$

Nyní již můžeme vyřešit naši úlohu dosazením za x_0:

$$u(x,t) = (\arctan(xe^{-t}) - \frac{3}{2}xe^{-t})e^{-t} + \frac{3}{2}x$$

Obecnost metody V tomto odstavci budeme opět jen v poznámkách a bodech diskutovat, co je důležité pro tuto metodu a kam až ji je možné rozšířit.

1. Potřebujeme, aby existovala charakteristika z daného bodu (x_1, t_1) vedoucí zpět do $t = 0$. Toto požadujeme kvůli tomu, abychom mohli nalézt $x_0 = p(x,t)$. Toto totiž obecně není vždy možné.
2. Limitujícím faktorem jen rovněž hladkost funkcí.
3. Metodu lze přímočaře rozšířit na nelineární případ, tj. úlohu

   $$u_t + c(x,t)u_x = f(x,t,u),\ u(x,0) = u_0(x).$$

   Pak v 3 stačí řešit rovnici

   $$v'(t) = f(t, X(t), v(t)),\ v(0) = u_0(x_0).$$

4. Obdobně lze metodu rozšířit pro kvazidiagonální PDR, tj. pro úlohu tvaru

   $$u_t + c(x,t,u)u_x = f(x,t,u),\ u(x,0) = u_0(x).$$

   Opět lze zúžit řešení na charakteristiky $V(t) = u(X(t),t)$ splňující

   $$X'(t) = c(X(t), t, v(t)),\ X(0) = x_0.$$

   Pak řešíme rovnici

   $$v'(t) = f(X(t), t, v(t)),\ v(0) = u_0(x_0).$$

4.2.2 Klasifikace PDR 2. řádu a převod na normální tvar

V této kapitole se budeme zabývat PDR 2. řádu, tj. rovnicí tvaru

$$f = Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u + c(x)u.$$

Budeme hledat její klasické řešení $u \in \mathcal{C}^2(G)$, $a_{ij}(x) \in \mathcal{C}(G)$, $b_i(x) \in \mathcal{C}(G)$, $c \in \mathcal{C}(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^n$.

Definice 4.2.1. Řekneme, že lineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu je **eliptická**, resp. **hyperbolická**, resp. **parabolická** na $M \subset G$, právě když je eliptická, resp. hyperbolická, resp. parabolická její přidružená kvadratická forma $q(y,x) = y^T \mathbb{A}(x) y$, kde $\mathbb{A}_{ij} = a_{ij}(x)$ a $\mathbb{A}$ je symetrická.

Řekneme, že parciální diferenciální rovnice je v **normálním tvaru**, právě když je matice $\mathbb{A}$ diagonální s 0, -1 a 1 na diagonále. Typicky se tak děje po transformaci.

Poznámka. Připomeňme, že o kvadratické formě řekneme, že je eliptická, pokud má její matice veškerá vlastní čísla nezáporná nenulová, resp. nekladná nenulová. Řekneme, že je hyperbolická, pokud jsou veškerá její vlastní čísla nenulová a není eliptická, tj. má jak kladná, tak záporná vlastní čísla, která jsou nenulová. Řekneme, že je parabolická, pokud je alespoň jedno její vlastní číslo nulové a alespoň jedno nenulové.

Nyní uveďme několik příkladů operátorů a jejich klasifikaci:

- Laplaceův operátor $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ je eliptický operátor v normálním tvaru
- Operátor vedení tepla $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$ je parabolický operátor
- Operátor vlnění $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$ je hyperbolický operátor

Převod lineární PDR 2. řádu se dvěma nezávislými proměnnými do normálního tvaru
Uvažujme rovnici tvaru:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(\nabla u, u, x, y) = 0 \tag{4.2}$$

Hledáme transformaci souřadnic $(x,y) \leftrightarrow (\xi,\eta)$, kde $\xi = \xi(x,y)$ a $\eta = \eta(x,y)$, takovou, aby původní rovnice byla v normálním tvaru. Proto je třeba nejdříve spočítat derivace vyjádřené pomocí nových souřadnic:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

Nyní tyto členy dosadíme do původní rovnice a rovnici upravíme. Při úpravě nás budou zajímat pouze členy vyjadřující druhou derivaci u podle nových proměnných. Zbylé členy můžeme vnořit do nové funkce $\tilde{F}$. Proto rovnice po transformaci souřadnic přejde do tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\underbrace{\left(a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\right)}_{I} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\underbrace{\left(a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right)}_{II} +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\underbrace{\left(2a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + 2c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right)}_{III} + \tilde{F}(\nabla u, u, \xi, \eta).$$

Zabývejme se nyní členem I; ten lze totiž přepsat do následující podoby:

$$(I) = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)\left(a + b\left(\frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}}\right) + c\left(\frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}}\right)^2\right)$$

Vidíme, že jsme v závorce obdrželi kvadratický výraz $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$ pro $\lambda(x,y) = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}}$. Stejný kvadratický výraz bychom obdrželi, kdybychom vytkli člen $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2$ ve členu II. Proto pokud má ona určující kvadratická rovnice právě jeden dvojnásobný kořen, jsme schopni pomocí této volby vynulovat buď člen I, nebo II. Pokud bychom ovšem získali dva různé kořeny, pak pomocí jednoho kořene vynulujeme člen I a pomocí druhého člen II. Toto nyní podrobně rozebereme[3]: Uvažujeme tedy PDR tvaru (4.2) a k ní získanou rovnici pro $\lambda(x,y)$. Rozepíšeme-li nyní přidruženou kvadratickou formu naší PDR, získáme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}.$$

Pak rovnice 4.2 je

1. *Parabolická*
   Dle definice, právě když má přidružená kvadratická forma $\mathbb{A}$ alespoň jedno vlastní číslo rovno nule. Toto je ekvivalentní tomu, že $\det\mathbb{A} = 0 = ac - \frac{b^2}{4}$. Toto ale znamená totéž co fakt, že diskriminant $d(x,y)$ kvadratické rovnice je nulový a to je ekvivalentní s tvrzením, že kvadratická rovnice má právě jeden dvojnásobný kořen.

2. *Eliptická*
   Aby rovnice byla eliptická, je potřeba, aby její přidružená kvadratická forma měla dvě vlastní čísla $\lambda_\pm$ stejného znaménka, tj. buď $\lambda_\pm > 0$, nebo $\lambda_\pm < 0$. Pro vlastní čísla matice 2×2 platí vztah
   $$\lambda_\pm = \frac{\mathrm{tr}\mathbb{A}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\mathrm{tr}\mathbb{A})^2 - \det\mathbb{A}}.$$
   Aby byl navíc splněn požadavek na stejné znaménko obou vlastních čísel, musí být pro $\lambda_\pm > 0$ splněno $\mathrm{tr}\mathbb{A} > 0$ a zároveň $\det\mathbb{A} > 0$. Pro $\lambda_\pm < 0$ zase $\mathrm{tr}\mathbb{A} < 0$ a zároveň $\det\mathbb{A} > 0$. Z těchto dvou podmínek plyne jediná, která říká, že pro to, aby byla rovnice eliptická, je potřeba, aby její přidružená kvadratická forma měla pozitivní determinant. To ale znamená, že výraz $ac - \frac{b^2}{4} > 0$. Toto je ale ekvivalentní tomu, že $d(x,y) < 0$, tedy faktu, že kvadratická rovnice $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$ má dva komplexně sdružené kořeny.

3. *Hyperbolická*
   Aby byla rovnice hyperbolická, je třeba, aby její přidružená kvadratická forma měla dvě nenulová vlastní čísla s opačnými znaménky. Stejnou úvahou jako byla provedena výše dostáváme, že tato podmínka je přepsatelná do tvaru (resp. z ní lze vyvodit) $\det\mathbb{A} < 0$, což je ekvivalentní s tvrzením, že $d(x,y) > 0$ a tedy kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny.

Nyní provedeme krátké shrnutí toho, co jsme získali a tyto poznatky aplikujeme na rovnici 4.2.

Parabolická rovnice Ukázali jsme, že aby byla rovnice parabolická, musí mít rovnice $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$ právě jeden kořen. Ten použijeme na vynulování členu I a ukážeme, že zajistí rovněž vynulování členu III. Pokud není $\xi(x,y) = x$, volme BÚNO $\eta(x,y) = x$. Pak můžeme upravovat člen III do tvaru:

$$III = 2a\frac{\partial \xi}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{1} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{0} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{1}\right) + 2c\frac{\partial \xi}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{0} = 2a\frac{\partial \xi}{\partial x} + b\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}(2a + b\lambda) = 0$$

[3] Velmi často se zde nyní budou používat fakty týkající se vlastních čísel, matic atp. Není od věci si některá tvrzení připomenout (LAA2, ev. LAB2).

Poslední rovnost je důsledkem Viètových vztahů pro naši rovnici[4] , která má jeden dvojnásobný kořen. Tedy rovnici 4.2 jsme převedli do očekávaného normálního tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\tilde{F}(\nabla u, u, \xi, \eta)}{II} = 0$$

Eliptická a hyperbolická rovnice Ukázali jsme, že aby byla rovnice eliptická nebo hyperbolická, musí mít rovnice $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$ dva různé kořeny. Díky nim můžeme zvolit souřadnice ξ, η tak, že vynulují členy I a II. Pak dostáváme rovnici tvaru:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\tilde{F}(\nabla u, u, \xi, \eta)}{III} = 0$$

Tato rovnice není v normálním tvaru. pro převod budeme muset ještě jednou provést transformaci souřadnic. Jelikož u eliptické rovnice existují dva komplexně sdružené kořeny, funkce ξ, η transformují do komplexních proměnných, což musíme touto transformací změnit. V hyperbolickém případě, kdy jsou řešení kvadratické rovnice reálná, jsou nové souřadnice ξ, η rovněž reálné, ale tvar rovnice zatím neukazuje přímo na to, že by byla hyperbolická, což se právě novou transformací budeme snažit změnit.

Hyperbolický případ Pro tento případ uvažujme transformaci $r = \xi + \eta, s = \xi - \eta$. Pak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial s}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

Touto transformací jsme tedy dostali rovnici v normálním tvaru.

Eliptický případ Je vhodné si uvědomit, že díky komplexnímu sdružení kořenů kvadratické rovnice budou komplexně sdruženy i funkce ξ, η. Tohoto využijeme a pomocí transformace $r = \xi + \eta = 2\mathrm{Re}\xi, s = \mathrm{i}(\xi - \eta) = -2\mathrm{Im}\xi$ z nich vytvoříme reálné souřadnice. Potom již můžeme psát

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial s}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \mathrm{i}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} - \mathrm{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + \mathrm{i}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2},$$

což je už rovnice v požadovaném normálním tvaru.

Nyní zbývá vyřešit otázku, jak nalézt ony nové souřadnice $\xi(x, y)$ a $\eta(x, y)$. Víme, že jsme získali koeficient $\lambda(x, y)$ jakožto řešení rovnice $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$. Víme také, že $\lambda(x, y) = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}}$. Toto ale nápadně připomíná derivaci implicitně zadané funkce $x(y)$, která je zadána funkcí $\xi(x(y), y) = K$, kde K je konstanta. Zderivujeme-li tento výraz dle y, obdržíme $\frac{\partial \xi}{\partial x}x' + \frac{\partial \xi}{\partial y}$. Odtud ale již

$$x'(y) = -\frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}} = -\lambda(x, y)$$

Tedy v konkrétních případech stačí nalézt x a řešení zapsat ve tvaru implicitní funkce. Toto si ukážeme na konkrétním příkladě. Budeme chtít nalézt souřadnice, ve kterých rovnice

$$x^3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3x^2\frac{\partial u}{\partial x} + 3xy\frac{\partial u}{\partial y} + 8x^4y^5 = 0$$

přejde do normálního tvaru.

[4]Jestliže má rovnice $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$ kořeny λ_+ a λ_-, pak platí

1. $\lambda_+ + \lambda_- = -\frac{b}{c}$

2. $\lambda_+\lambda_- = \frac{a}{c}$

Nejprve napíšeme určující kvadratickou rovnici:

$$x^3 - xy^2\lambda^2 = 0.$$

Její diskriminant je

$$d(x,y) = 4x^4y^2 > 0 \ s.v.$$

Odtud plyne, že rovnice je skoro všude hyperbolická, kromě bodů $x = 0$, $y = 0$. Zde přechází v parabolickou. Kořeny určující rovnice jsou $\lambda_\pm = \pm\frac{x}{y}$ a tedy odtud máme řešení například [5] $\ln x = \mp \ln y + C$, odkud $\xi_1(x,y) = \ln\frac{x}{y}$ a $\eta_1(x,y) = \ln xy$. Pokud rovnici odlogaritmujeme, dostaneme implicitní rovnici $yx^{\pm 1} = \tilde{C}$, odkud máme nové souřadnice určené v elegantnější podobě $\xi(x,y) = xy$ a $\eta(x,y) = \frac{x}{y}$.

Lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty a n proměnnými Díky konstantnosti koeficientů jsme schopni provést převod na normální tvar pro obecně n proměnných, neboť se jedná o úlohu ekvivalentní s převodem matice do polární báze. Vystačíme si jen s lineární transformací. Mějme rovnici tvaru

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(\nabla u, u) = (\nabla^T \mathbb{A} \nabla)u + F(\nabla u, u)$$

Označme $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ polární bázi matice a dále označme $\mathbb{B}$ matici [6], která spňuje $\mathbb{B}^T\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{D}$, kde $\mathbb{D}$ je diagonální matice s plus mínus jedničkami a nulami na diagonále. Pak můžeme rovnici upravit do podoby

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(\nabla u, u) = (\nabla^T \mathbb{B}\mathbb{B}^T\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{B}^T\nabla)u + F(\nabla u, u) = \left((\mathbb{B}^T\nabla)^T\mathbb{B}^T\mathbb{A}\mathbb{B}(\mathbb{B}^T\nabla)\right)u + F(\nabla u, u) =$$

$$= \nabla_y^T \mathbb{D} \nabla_y + F(\nabla_y u, u) = \sum_{j=1}^{n} D_{jj}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} + F(\ldots)$$

Nyní chceme přejít od $x \to y$ tak, aby $\mathbb{B}^T\nabla_x = \nabla_y$. Tato podmínka je ekvivalentní

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{B}^T_{kj}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{B}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

Zároveň víme, že se jedná o lineární transformaci, tj. transformaci $x = Jy$, z čehož za použití řetězového pravidla plyne

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} J_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Tedy $J = \mathbb{B}$.

4.2.3 Řešení počátečních úloh lineárních PDR 2. řádu

V této kapitole se budeme soustředit na nalezení řešení dvou typických zástupců parabolických a hyperbolických rovnic. Díky transformacím budeme schopni společně s touto znalostí řešit značnou část PDR. Postup bude analogický jako u ODR, jen s tím rozdílem, že nebude tak rigorózní. V podstatě nebudeme schopni obecně ověřit existenci konvoluce a stejně tak nebudeme schopni ověřit souvislost řešení zobecněné a klasické úlohy.

[5] Řešení bude vícero, mohu to různě pronásobit konstantami atp.

[6] Jedná o matici složenou z vektorů polární báze, což jsou vlastní vektory pronásobené odmocninou příslušeného vlastního čísla.

1. Klasickou počáteční (Cauchyho) úlohu převedeme na zobecněnou úlohu vytvořením nespojitosti v $t = 0$: Toto budeme ilustrovat na rovnici vedení tepla v $\mathbb{R}^{1+1}$.

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = f(t,x) \text{ s počátečními podmínkami } \ u(0,x) = u_0(x)$$

λ je koeficient vedení tepla a $\lambda > 0$. Hledáme tedy klasické řešení, tj. $u(\ ,x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$, $u(t,\ ) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ pro $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{1+1})$. Nyní již budeme postupovat stejně jako u ODR, tj. hledáme řešení tvaru $\tilde{u}(x,t) = \Theta(t)u(x,t)$. [7] Určíme potřebné derivace

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{u}(x,t) = \Theta(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t) = \Theta(t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u_0(x)\otimes\delta(t)$$

Pak po dosazení do počáteční úlohy máme

$$L\tilde{u} = \Theta(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}u - \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}u\right) + u_0(x)\otimes\delta(t) = \Theta(t)f(t) + u_0(x)\otimes\delta(t) = \tilde{f} + u_0(x)\otimes\delta(t)$$

Toto je *zobecněná formulace počáteční úlohy rovnice vedení tepla.* Známe-li fundamentální řešení operátoru L, známe řešení zobecněné úlohy, protože

$$\tilde{u}(x,t) = \varepsilon(x,t) * \left(\tilde{f}(x,t) + u_0(x)\otimes\delta(t)\right)$$

Později bude ukázáno, že pro fundamentální řešení operátoru vedení tepla v $\mathbb{R}^{1+1}$ má tvar:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\lambda\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4\lambda t}}$$

2. Nyní se vraťme k řešení zobecněné úlohy. Druhý sčítanec nyní upravíme:

$$(\varepsilon(x,t) * (u_0(x)\otimes\delta(t)), \varphi(x,t)) = (\varepsilon(x,t), ((u_0(\xi)\otimes\delta(\tau), \varphi(x+\xi, t+\tau))) =$$

$$= (\varepsilon(x,t), (u_0(\xi), \varphi(x+\xi,t))) = (\varepsilon(x,t) * u_0(x), \varphi(x,t))$$

Zde je nutno poznamenat, že vůbec nevíme, jestli má vůbec celá tato úprava smysl. Pro náš konkrétní případ dostáváme

$$\varepsilon(x,t) * u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\xi \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\lambda\pi t}}e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda t}}u_0(x-\xi) = \Theta(t)\int_{\mathbb{R}}\dots$$

To, že zde zobecněnou konvoluci najednou chápeme jako klasickou je prostě fakt, který je třeba přijmout. Stejnou úpravu použijeme i pro první sčítanec:

$$\varepsilon(x,t) * (\Theta(t)f(t,x)) = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\tau\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\xi\frac{\Theta(\tau)}{2\sqrt{\lambda\pi\tau}}e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda\tau}}\Theta(t-\tau)f(t-\tau,x-\xi) =$$

$$= \Theta(t)\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi\tau}}e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda\tau}}f(t-\tau,x-\xi)$$

Tímto jsme nalezli řešení zobecněné úlohy rovnice vedení tepla v $\mathbb{R}^{1+1}$, které je tvaru $\tilde{u}(x,t) = \Theta(t)u(x,t)$. Vyjádřeme řešení této úlohy v úplném tvaru

$$\tilde{u}(t,x) = \Theta(t)\underbrace{\left[\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi\tau}}e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda\tau}}f(t-\tau,x-\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda t}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\xi u_0(x-\xi)e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda t}}\mathrm{d}\xi\right]}_{=u(t),\text{ což je řešením klasické úlohy.}}$$

Že je toto řešení klasické úlohy si čtenář může zkusit sám ověřit na konkrétním příkladě. Například volbou $f(t,x) = e^{-t}\cos x$ a počáteční podmínkou $u_0(x) = \cos x$.

[7] Zjistil jsem, že volně zaměňuji výrazy typu f(x,t) a f(t,x). Jedná se o jedno a totéž.

Jako zástupce hyperbolických operátorů, budeme řešit počáteční úlohu vlnové rovnice v 1 dimensi, s pravou stranou $f(t,x)$ a počátečními podmínkami $u_0 = u(0,x)$, $u_1 = \dot{u}(0,x)$.

$$L_W \tilde{u} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta\right)\tilde{u} = \dot{\delta}(t) \otimes u(0,x) + \delta(t) \otimes \dot{u}(0,x) + \Theta(t)\ddot{u}(t,x) - \Theta(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) =$$

$$= \Theta(t) f(t,x) + \dot{\delta}(t) \otimes u(0,x) + \delta(t) \otimes \dot{u}(0,x)$$

.

Dále upravme konvoluci tohoto výrazu s fundamentálním řešením

$$\mathscr{E}(t,x) * \left(\tilde{f}(t,x) + \dot{\delta}(t) \otimes u(0,x) + \delta(t) \otimes \dot{u}(0,x)\right) = \mathscr{E}(t,x) * \tilde{f}(t,x) + \frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{E}(t,x) * u_0) + \mathscr{E}(t,x) * u_1$$

Dosazením $\mathscr{E}(t,x) = \dfrac{\Theta(t)}{2a}\Theta(at - |x|)$ získáme zobecněné řešení, vzorec je ale ještě třeba řádně upravit

$$\mathscr{E}_1 * \tilde{f} = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\Theta(t-\tau)}{2a}\Theta(a(t-\tau) - |x-\xi|)\Theta(\tau) f(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau = \frac{\Theta(t)}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$\dot{\mathscr{E}}_1 * u_0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} \frac{\Theta(at - |x-\xi|)}{2a}\Theta(t) u_0(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{\Theta(t)}{2a}(a u_0(x-at) + a u_0(x+at))$$

$$\mathscr{E}_1 * u_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{\Theta(t)}{2a}\Theta(at - |x-\xi|) u_1(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{\Theta(t)}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\mathrm{d}\xi$$

Sečteme-li předchozí výrazy a vytkneme z nich Heavisidovu funkci získáme klasické řešení

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\left(\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau + \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\mathrm{d}\xi\right) + \frac{u_0(x-at) + u_0(x+at)}{2}$$

4.2.4 Hledání fundamentálních řešení $\mathscr{E}$ některých operátorů

Při hledání fundamentálních řešení základních operátorů budeme hojně využívat integrální transformace.

Rovnice vedení tepla Připomeňme operátor vedení tepla v $\mathbb{R}^{1+n}$ [8]

$$L_H = \frac{\partial}{\partial t} - \lambda\Delta, \text{ kde } \lambda > 0$$

Tento operátor zde vyřešíme pro $n = 1$. Pro obecné n bude vyřešen na cvičeních. Hledejme tedy fundamentální řešení $\mathscr{E}(t,x)$

$$L_H \mathscr{E}(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathscr{E}(t,x) = \delta(t,x) = \delta(t) \otimes \delta(x)$$

Aplikujme na celou rovnici částečnou Fourierovu transformaci v proměnné x:

$$\mathfrak{F}_x\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathscr{E}(t,x)\right](t,\xi) = \mathfrak{F}_x\left[\delta(t) \otimes \delta(x)\right](t,\xi) = \delta(t) \otimes \mathfrak{F}_x\left[\delta(x)\right](\xi) = \delta(t) \otimes 1$$

[8] Touto notací rozumíme operátor v n prostorových souřadnicích a jedné časové proměnné.

Vidíme tedy, že funkce na pravé straně rovnice je nezávislá na ξ. Upravme ještě levou stranu a tu porovnejme s pravou stranou:

$$F_x\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}-\lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathscr{E}(t,x)\right](t,\xi)=\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{F}_x\left[\mathscr{E}(t,x)\right](t,\xi)-\lambda(-\mathrm{i}\xi)^2\mathfrak{F}_x\left[\mathscr{E}(t,x)\right](t,\xi)=\delta(t)\otimes 1$$

Označme $\hat{\mathscr{E}}^x(t,\xi)$. Pokud zafixujeme proměnnou ξ a nahlížíme-li na ni jako na parametr, můžeme označit $\hat{\mathscr{E}}^x_\xi(t):=\hat{\mathscr{E}}^x(t,\xi)$. Pak dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathscr{E}}^x_\xi(t)+\lambda\xi^2\hat{\mathscr{E}}^x_\xi(t)=\delta(t)$$

Je tedy zřejmé, že funkce $\hat{\mathscr{E}}^x_\xi(t)$ je fundamentálním řešením operátoru $L=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+a$ pro $a>0$. Toto řešení již známe[9], tedy $\hat{\mathscr{E}}^x_\xi(t)=\hat{\mathscr{E}}^x(t,\xi)=\Theta(t)e^{-\lambda\xi^2 t}$. Abychom nalezli řešení $\mathscr{E}(t,x)$, zbývá provést inverzní Fourierovu transformaci

$$\mathscr{E}(t,x)=\mathfrak{F}_x^{-1}\left[\hat{\mathscr{E}}^x(t,\xi)\right](t,x)=\Theta(t)\mathfrak{F}_x^{-1}\left[e^{-\lambda\xi^2 t}\right](t,x)=\frac{\Theta(t)}{2\pi}\mathfrak{F}_x\left[e^{-\lambda\xi^2 t}\right](t,x)=\frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\lambda t\pi}}e^{-\frac{x^2}{4\lambda t}}$$

Tímto jsme našli řešení operátoru vedení tepla v jedné prostorové a jedné časové dimenzi.

Obecné řešení operátoru vedení tepla má tvar

$$\mathscr{E}(t,x)=\frac{\Theta(t)}{(2\sqrt{\pi\lambda t})^n}e^{-\frac{\|x\|^2}{4\lambda t}}$$

kde $\|x\|^2=\sum_1^n x_k^2$. Určit fundamentální řešení některých operátorů je snadné. U jiných je to značně obtížné. Následující věta popíše metodu, pomocí které určíme např. fundamentální řešení Laplaceovy rovnice.

Věta 4.2.2 (Metoda sestupu). Nechť $u(t,x)\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$ je zobecněná funkce s omezeným nosičem v t, tj. $\exists R>0$ takové, že $\forall x$ je $\operatorname{supp} u(t,x)\subset B_R(0)$, která je řešením diferenciální rovnice $\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial^k}{\partial t^k}L_k+L_0\right)u(t,x)=\delta(t)\otimes f(x)$, kde L_k,L_0 jsou lineární diferenciální operátory působící v $x\in\mathbb{R}^n$ s koeficienty třídy $\mathcal{C}^\infty$. Potom u_0 definované

$$(u_0(x),\varphi(x)):=(u(t,x),\varphi(x)\eta(t)),$$

kde $\eta\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ taková, že $u(t,x)=\eta(t)u(t,x)$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$ a $\eta(0)=1$, je řešením rovnice $\mathrm{L}_0u_0=f$.

Důkaz.

$$(L_0u_0(x),\varphi(x)):=(u_0(x),\tilde{L}_0\varphi(x))$$

Operátor $\tilde{L}_0$ působí na testovací funkci tak jako operátor L_0, jen navíc zahrnuje změnu znaménka vyplývající z definice derivace v $\mathscr{D}$ a před provedením derivace je testovací funkce napřed vynásobena příslušným koeficientem (z tohoto důvodu byla požadována hladkost v předpokladech). Uveďme konkrétní příklad. Máme-li operátor $L_0=a(x)\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}$, tak operátor $\tilde{L}_0=(-1)^3\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}(a(x)\cdot)$. Nyní již v této notaci dokazujme tvrzení.

$$(u_0(x),\tilde{L}_0\varphi(x))=(u(t,x),\tilde{L}_0\varphi(x)\eta(t))+\underbrace{\sum_{k=1}^n\left(u(t,x),\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\tilde{L}_k\right)(\varphi(x)\eta(t))\right)}_{=0,\ \eta(t)\ \text{ je rovno 1}}=$$

$$=\left(u(t,x),\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial^k}{\partial t^k}\tilde{L}_k+\tilde{L}_0\right)(\varphi(x)\eta(t))\right)=\left(\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial^k}{\partial t^k}L_k+L_0\right)u(t,x),\varphi(x)\eta(t)\right)=$$

$$=(\delta(t)\otimes f(x),\varphi(x)\eta(t))=(f(x),\varphi(x))$$

□

[9] Opět se jedná o řešení tvaru $\varepsilon(t)=\Theta(t)Z(t)$, kde $Z(t)$ splňuje rovnici $LZ=0$ s počáteční podmínkou $Z(0)=1$

Poznámka. Je-li funkce $u(t,x) \in \mathscr{D}'_{reg}$ a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\mathrm{d}t \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, tak i pro tento případ jsme schopni určit $u_0(x)$.

$$(u_0(x), \varphi(x)) := (u(t,x), \varphi(x)\eta(t)) = \int_{\mathbb{R}^{1+n}} u(t,x)\varphi(x)\eta(t)\mathrm{d}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t u(t,x) \right)$$

Jelikož tato úprava platí pro všechny testovací funkce, je $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t\ u(t,x) = u_0(x)$

Je-li $u(t,x) = \delta(t) \otimes v(x)$, pak $u_0(x) = v(x)$.

Laplaceova rovnice Laplaceův operátor je tvaru

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

Jednodimenzionální případ je triviálně vyřešitelný (co se fundamentálního řešení týče) a dvoudimenzionální fundamentální řešení je na druhou stranu velice složitě odvoditelné. Má tvar

$$\mathscr{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \|x\|$$

Pro $n \geq 3$ budeme demonstrovat určení fundamentální řešení z fundamentálního řešení rovnice vedení tepla metodou sestupu v proměnné t. Využijeme přitom první poznámky, která zajišťuje funkčnost metody.

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\Theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \mathrm{d}t$$

Provedeme substituci v t:

$$\frac{\|x\|^2}{4t} = u$$
$$-\frac{\|x\|^2}{4t^2}\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \Rightarrow \mathrm{d}t = -\frac{4t^2}{\|x\|^2}\mathrm{d}u = -\frac{\|x\|^2}{4u^2}\mathrm{d}u$$

Poté přejde po několika drobných úpravách ve tvar

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \frac{4^{n/2}}{4} \|x\|^{-n+2} \int_0^{+\infty} u^{\frac{n}{2}-2} e^{-u} \mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{\frac{n}{2}} \|x\|^{n-2}} = \mathscr{E}_n(x)$$

Vyjádříme-li toto speciálně pro dimenzi 3, dostáváme

$$\mathscr{E}_3(x) = \frac{1}{4\pi \|x\|}$$

Vlnová rovnice Opět připomeneme tvar vlnové rovnice v $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_{x,y,z}$$

na cvičeních bude ukázáno, že pro dimenzi 3 platí

$$\mathscr{E}_3(t,x) = \frac{\Theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x)$$

My nyní pomocí metody sestupu (v x_3) ukážeme, jak lze získat fundamentální řešení $\mathscr{E}_2(t,x)$ vlnové rovnice v dimenzi 2.

$$(\mathscr{E}_2(x_1,x_2,t), \varphi(x_1,x_2,t)) = (\mathscr{E}_3(x_1,x_2,x_3,t), \varphi(x_1,x_2,t)\eta(x_3)) = \frac{1}{2\pi a^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{S_{at}} \frac{\varphi(x_1,x_2,t)}{t} \underbrace{\eta(x_3)}_{=1} \mathrm{d}S =$$

Jedná se o plošný integrál prvního druhu, proto zvolme následující parametrizaci

$$x_3 = \pm\sqrt{a^2t^2 - x_1^2 - x_2^2}$$
$$(at)^2 \geq x_1^2 + x_2^2$$
$$\left\|\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_1} \times \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_2}\right\| = \frac{at}{\sqrt{a^2t^2-x_1^2-x_2^2}}$$

Po ní zkoumaný integrál přejde do tvaru (2 před integrálem vzejde díky parametrizaci přes dvě polokoule)

$$\frac{2}{4\pi a^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{(at)^2\geq x_1^2+x_2^2}\mathrm{d}(x_1,x_2)\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-x_1^2-x_2^2}}\frac{\varphi(x_1,x_2,t)}{t} =$$
$$= \frac{1}{2\pi a}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}(x_1,x_2)\frac{\Theta(t)\Theta(a^2t^2-x_1^2-x_2^2)}{\sqrt{a^2t^2-x_1^2-x_2^2}}\varphi(x_1,x_2,t)$$

Odtud již plyne řešení (díky první části poznámky). Abychom dostali řešení v elegantním tvaru, přepíšeme ještě podmínku $(at)^2 \geq x_1^2 + x_2^2 = (at)^2 \geq \|x\|^2$, tu odmocníme, a máme $at \geq \|x\|$. Pak tuto množinu, přes kterou integrujeme, můžeme vnořit do integrálu pomocí Heavisideovy funkce, jako tomu bylo v předešlém postupu. Tímto získáme finální podobu fundamentálního řešení:

$$\mathscr{E}_2(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\Theta(t)\Theta(at-\|x\|)}{\sqrt{a^2t^2-\|x\|^2}}$$

Tímto jsme dokončili celou kapitolu a zároveň jsme se tímto vymanili ze sevření zobecněných funkcí.

Kapitola 5

Integrální rovnice, spektrum, ON báze

Výrazem integrální se označují takové rovnice, v níž se neznámá funkce nachází pod integrálem. Jde o určitou analogii diferenciálních rovnic, jak už totiž z fyziky víme, celou řadu rovnic lze ekvivalentně zapsat jak v integrální, tak v diferenciální podobě, např. Gaussovu větu

$$\Delta \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad <=> \qquad \oint_S E \,\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho \,\mathrm{d}V.$$

To je naše motivace pro zkoumání integrálních rovnic, vlastně jde způsob jak hledat nové metody řešení diferenciálních rovnic. Na závěr našeho snažení budeme demonstrovat převod zástupce jisté široké třídy diferenciálních rovnic na rovnice integrální.

Definice 5.0.1. Buď G omezená oblast v $\mathbb{R}^n$, pak zavádíme označení:

$L^2(G)$, pro funkce s normou $\|f\|_2 = \left(\int_G f(x)\bar{f}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$;

$\mathcal{C}(\bar{G})$, pro funkce s normou $\|f\|_{\mathcal{C}} = \max_{x\in\bar{G}}|f(x)|$.

Definice 5.0.2. Integrálním operátorem $\mathbf{K}$ působícím na funkci φ rozumíme

$$\mathbf{K}\varphi(x) = \int_G \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

Přičemž $\mathscr{K} \in \mathcal{C}(\bar{G}\times\bar{G})$ nazýváme integrální jádro a zavádíme označení:

mez jádra $M := \max_{\bar{G}\times\bar{G}}|\mathscr{K}(x,y)|$;

objem jádra $V := \int_G 1\mathrm{d}x$.

Integrální rovnice se rozdělují na dvě základní třídy: Fredholmovy integrální rovnice a Volterrovy integrální rovnice. U Fredholmových rovnic má interval integrace konstantní hranice, u Volterrových rovnic je pak jedna z hranic funkcí nezávislé proměnné.

5.1 Fredholmovy integrální rovnice

Definice 5.1.1. Fredholmovou integrální rovnicí pro funkci φ rozumíme rovnici tvaru

$$\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi + f,$$

kde $\lambda \in \mathbb{C}$, funkce f se tradičně nazývá pravá strana a $\mathbf{K}$ je integrální operátor se spojitým jádrem.

Tuto úlohu můžeme přepsat do ekvivalentní podoby $(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})\varphi = f$ a hledáme řešení buď v $L^2(G)$ (pak $f \in L^2(G)$), nebo v $\mathcal{C}(\bar{G})$ (pak $f \in \mathcal{C}(\bar{G})$). Speciálně pro nulovou pravou stranu dostáváme úlohu na vlastní čísla operátoru $\mathbf{K}$.

5.1.1 Degenerované jádro

Definice 5.1.2. Řekneme, že integrální jádro $\mathscr{K}(x,y)$ je degenerované, jestliže je separovatelné, tj. existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že je možné jej zapsat ve tvaru $\mathscr{K}(x,y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} u_j(x)v_j(y)$, kde $u_j(x), v_j(y) \in \mathcal{C}(\bar{G})$.

Přepišme nyní Fredholmovu integrální rovnici pro degenerované jádro:

$$\varphi(x) = \lambda\mathbf{K}\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_G \sum_{j=1}^{p} u_j(x)v_j(y)\varphi(y)\mathrm{d}y + f(x) =$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{p} u_j(x) \underbrace{\int_G v_j(y)\varphi(y)\mathrm{d}y}_{c_j \in \mathbb{C}} + f(x)$$

Tímto jsme získali tvar řešení

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{j=1}^{p} u_j(x)c_j + f(x).$$

Nyní je možné dosazením tohoto tvaru do vyjádření c_j spočítat tyhle koeficienty. My tyto koeficienty určíme jinou metodou. Uvažujme tedy řešení

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{j=1}^{p} u_j(x)c_j + f(x).$$

Pronásobme celou rovnost výrazem $v_j(x)$ a zintegrujme ji přes G podle x. Máme pak

$$c_j = \int_G v_j(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lambda \sum_{k=1}^{p} c_k \int_G u_k(x)v_j(x)\mathrm{d}x + \int_G v_j(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

Pokud tuto úpravu provedeme pro veškerá j, získáme soustavu lineárních algebraických rovnic pro koeficienty c_j.

Dosaďme za $\varphi(x)$ z Fredholmovy rovnice:

$$c_i = \int_G (v_i(x)(\lambda\mathbf{K}\varphi(x) + f(x))\mathrm{d}x = \lambda \int_G v_i(x) \sum_{j=1}^{p} u_j(x) \left(\int_G v_j(y)\varphi(y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_G v_i(x)f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\left(\int_G v_i(x)u_j(x)\mathrm{d}x \right)}_{A_{ij}} \underbrace{\left(\int_G v_j(y)\varphi(y)\mathrm{d}y \right)}_{c_j} + \underbrace{\int_G v_i(x)f(x)\mathrm{d}x}_{b_i}$$

Tedy jsme získali rovnici

$$c = \lambda\mathbb{A}c + b.$$

Označme c^* řešení této rovnice. Jelikož celou dobu chceme získat řešení Fredholmovy integrální rovnice, dosaďme tento výsledek do tvaru, do kterého jsme rovnici v první úpravě převedli.

$$\varphi^*(x) = \lambda\mathbf{K}\varphi^*(x) + f = \lambda \sum_{j=1}^{p} u_j(x) \underbrace{\int_G v_j(y)\varphi^*(y)\mathrm{d}y}_{c_j^*} + f(x) = \lambda \sum_{j=1}^{p} u_j(x)c_j^*(x) + f(x)$$

Tímto jsme vyřešili Fredholmovu rovnici pro degenerované jádro.

5.1.2 Iterativní metody řešení

Věta 5.1.3. Integrální operátor $\mathbf{K}$ se spojitým jádrem $\mathscr{K}$ zobrazuje:

1. $L^2(G) \to \mathcal{C}(\bar{G})$, protože $\|\mathbf{K}f\|_{\mathcal{C}} \leq M\sqrt{V}\|f\|_2$ pro všechny $f \in L^2(G)$;
2. $\mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$, protože $\|\mathbf{K}f\|_{\mathcal{C}} \leq MV\|f\|_{\mathcal{C}}$ pro všechny $f \in \mathcal{C}(\bar{G})$;
3. $L^2(G) \to L^2(G)$, protože $\|\mathbf{K}f\|_2 \leq MV\|f\|_2$ pro všechny $f \in L^2(G)$.

Důkaz. V důkazu budeme často využívat Schwarzovu nerovnost a mez jádra.

1.

$$\|\mathbf{K}f\|_{\mathcal{C}} = \max_{\bar{G}}\left|\int_G \mathscr{K}(x,y)f(y)\mathrm{d}y\right| \leq \max_{\bar{G}}\left|\left(\int_G \mathscr{K}^2(x,y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_G f^2(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\right| =$$

$$= \sqrt{M^2}\max_{\bar{G}}\left(\int_G 1\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2 = M\sqrt{V}\|f\|_2$$

2.

$$\|\mathbf{K}f\|_{\mathcal{C}} = \max_{\bar{G}}\left|\int_G \mathscr{K}(x,y)f(y)\mathrm{d}y\right| \leq \max_{\bar{G}}\int_G |\mathscr{K}(x,y)||f(y)|\mathrm{d}y \leq M\|f\|_{\mathcal{C}}$$

3.

$$\|\mathbf{K}f\|_2^2 = \int_G |\mathbf{K}f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_G\left|\left(\int_G \mathscr{K}(x,y)f(y)\mathrm{d}y\right)\right|^2\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int_G\left[\left(\int_G |\mathscr{K}(x,y)|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_G |f(y)|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int_G\left(MV^{\frac{1}{2}}\|f\|_2\right)^2\mathrm{d}x = M^2V^2\|f\|_2^2$$

Odtud již plyne požadovaná nerovnost.

□

Definice 5.1.4. Buďte V, V_1 normované vektorové prostory. Zobrazení (operátor) $B : V \to V_1$ nazveme **omezené (omezený)**, jestliže existuje $c > 0$ takové, že pro všechna $x \in V$ platí, že

$$\|Bx\|_1 \leq c\|x\|.$$

Nejmenší takovéto c nazveme normou operátoru B a označujeme jej $\|B\|$.

Je zřejmé, že normu operátoru lze snadno určit pomocí vztahu

$$\|B\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Bx\|_1}{\|x\|}.$$

Věta 5.1.5. Buďte $(V, \|\cdot\|), (V_1, \|\cdot\|_1)$ normované prostory [1] a buď $B : V \to V_1$ lineární operátor. Pak následující výroky jsou ekvivalentní :

1. B je omezený;
2. B je spojitý;
3. B je spojitý v bodě.

Důkaz.

$1 \Rightarrow 2$

$$\|Bx - By\|_1 = \|B(x-y)\|_1 \leq \|B\|\|x-y\|$$

Odtud již z omezenosti plyne spojitost.

[1] Nikoliv nutně Banachovy, nepožadujeme úplnost!

$2 \Rightarrow 3$ Je zřejmé, že zobrazení, které je spojité (tedy je spojité v každém bodě svého definičního oboru), je spojité v bodě.

$3 \Rightarrow 1$ Buď B spojité BÚNO v $x = 0$. To znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \|x\| < \delta \Rightarrow \|Bx\|_1 < \varepsilon.$$

Volme tedy $\varepsilon = 1$. Pak $\|x\| < \delta \Rightarrow \|Bx\|_1 < 1$. Beru-li nyní libovolné $y \in V$, $y \neq 0$, pak zcela jistě

$$\left\| \frac{\delta}{2} \frac{y}{\|y\|} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| B \left(\frac{\delta}{2} \frac{y}{\|y\|} \right) \right\|_1 < 1$$

Toto ale lze přepsat na tvar

$$\frac{\delta}{2} \frac{1}{\|y\|} \|By\|_1 < 1 \Leftrightarrow \|By\|_1 < \frac{2}{\delta} \|y\|$$

Tímto jsme ukázali omezenost.

□

Důsledkem této věty je fakt, že Fredholmův integrální operátor je omezený a spojitý (a samozřejmě lineární) jako zobrazení $L^2(G) \to \mathcal{C}(\bar{G})$, $\mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$, $L^2(G) \to L^2(G)$.

5.1.3 Metoda postupných aproximací na $\mathcal{C}(\bar{G})$

Předpokládejme, že $f \in \mathcal{C}(\bar{G})$ a hledejme funkci $\varphi \in \mathcal{C}(\bar{G})$, která bude řešit úlohu

$$\varphi(x) = \lambda \mathbf{K} \varphi(x) + f(x). \tag{5.1}$$

Jak název metody napovídá, budeme se snažit najít řešení iterací. Proto položme

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x), \\ \varphi_{k+1}(x) &= \lambda \mathbf{K} \varphi_k(x) + f(x). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Získáváme posloupnost funkcí $\varphi_k(x)$. Je zřejmé, že

$$\lim_{k \to +\infty} \varphi_k(x) = \varphi(x),$$

což je funkce, která řeší zadanou úlohy. Skutečně. Stačí provést limitu rekutrentního výrazu pro φ_{k+1} (5.2). Jelikož je $\mathbf{K}$ spojité, dostáváme po provedení limity hledané řešení (5.1).

Věta 5.1.6. Buď $|\lambda| < \frac{1}{MV}$. Pak posloupnost $\varphi_k \overset{\bar{G}}{\rightrightarrows} \varphi$, kde funkce φ je jediným řešením rovnice $\varphi(x) = \lambda \mathbf{K} \varphi(x) + f(x)$.

Důkaz. Z rekurentního vztahu dostáváme

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda^j \mathbf{K}^j f + f.$$

Toto ověříme matematickou indukcí: Pro $k = 0, 1$ je vztah dle definice výše zřejmě splněn. Proto se zaměřme na přechod od k ke $k + 1$:

$$\varphi_{k+1} = \lambda \mathbf{K} \varphi_k + f = \lambda \mathbf{K} \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda^j \mathbf{K}^j f + f \right) + f = \sum_{j=1}^{k} \lambda^{j+1} \mathbf{K}^{j+1} f + \lambda \mathbf{K} f + f =$$

$$= \sum_{j=2}^{k+1} \lambda^j \mathbf{K}^j f + \lambda \mathbf{K} f + f = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda^j \mathbf{K}^j f + f$$

Abychom ukázali stejnoměrnou konvergenci funkční posloupnosti φ_k, stačí ukázat, že řada $\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j \mathbf{K}^j f$ konverguje stejnoměrně. K důkazu toho tvrzení využijeme Weierstrassovu větu, která říká, že stačí najít konvergentní číslenou majorantu. Stačí totiž pracovat v normě. Tedy řada $\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j \mathbf{K}^j f$ konverguje stejnoměrně na $\bar{G}$, pokud $\sum_{j=1}^{+\infty} \|\lambda^j \mathbf{K}^j f\|_{\mathcal{C}}$ konverguje. Použijme nyní pro člen uvnitř této sumy odhad:

$$\|\lambda^j \mathbf{K}^j f\|_{\mathcal{C}} \leq |\lambda M V|^j \|f\|_{\mathcal{C}}$$

Jelikož je $\|f\|_{\mathcal{C}}$ konstanta, je možné ji z řady vytknout a díky předpokladům [2] je výraz v závorce ostře menší než jedna, tudíž řada (geometrická) konverguje.

Jednoznačnost se ukáže sporem, jak tomu obvykle bývá. □

Poznámka. Z důkazu vyplynulo, že

$$\varphi(x) = \lim_{k \to +\infty} \varphi_k(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j \mathbf{K}^j f(x) + f(x).$$

Později ukážeme, že $\mathbf{K}^j$ je integrální operátor s jádrem $\mathscr{K}_j(x, y)$. Využijme nyní této znalosti a zkusme formálně rozepsat výraz, který jsme dostali. Můžeme rovněž zkusit provést záměnu sumy a integrálu a zkoumat výraz, který obdržíme. Korektnost postupu bude ověřena později.

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j \mathbf{K}^j f(x) + f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j \int_G \mathscr{K}_j(x, y) f(y) \mathrm{d}y + f(x) =$$

$$= \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j \int_G \mathscr{K}_{j+1}(x, y) f(y) \mathrm{d}y + f(x) = \lambda \int_G \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j \mathscr{K}_{j+1}(x, y) \right) f(y) \mathrm{d}y + f(x)$$

Výraz $\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j \mathscr{K}_{j+1}(x, y)$ nazývámme *resolventa* a označujeme jej $\mathscr{R}(x, y, \lambda)$. Pomocí resolventy je pak možné napsat funkci $\varphi(x)$ ve tvaru:

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathscr{R}(x, y, \lambda) f(y) \mathrm{d}y + f(x)$$

Je očividné, jakou výhodu resolventa poskytuje. Jestliže máme nějaký integrální operátor, tak pro něj spočítáme jen jednou resolventu a pak pomocí ní konstruujeme řešení pro libovolnou pravou stranu f.

5.1.4 Metoda iterovaných jader

Poznámka. Buďte $K, L : \mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$ integrální operátory se spojitými jádry $\mathscr{K}(x, y), \mathscr{L}(x, y)$. Pak operátor $(KL) : \mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$ a působí na funkci f následovně:

$$(KLf)(x) = K(Lf(z))(x) = \int_G \mathscr{K}(x, z) Lf(z) \mathrm{d}z = \int_G \mathscr{K}(x, z) \left(\int_G \mathscr{L}(z, y) f(y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z =$$

$$= \int_G f(y) \left(\int_G \mathscr{K}(x, z) \mathscr{L}(z, y) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y$$

[2] Tento předpoklad tam není jen z důvodu „aby to vyšlo“, ale vyplývá ze spektra operátoru, o kterém bude pojednáno dále.

Odtud plyne, že KL je integrální operátor se spojitým jádrem $\int_G \mathscr{K}(x,z)\mathscr{L}(z,y)\mathrm{d}z$. Speciálně, dosadíme -li ze $L = K^j$, získáme rekurentní vztah pro posloupnost iterovaných jader.

$$\mathscr{K}_{j+1}(x,y) = \int_G \mathscr{K}(x,z)\mathscr{K}_j(z,y)\mathrm{d}z$$

Následující věta korektně zdůvodní, proč je možné provést záměny, kterou jsme dělali v postupu výše.

Věta 5.1.7 (o možnosti záměny). Je-li $|\lambda| < \frac{1}{MV}$, pak řada $\mathscr{R}(x,y,\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \mathscr{K}_{k+1}(x,y)$ konverguje v $\mathcal{C}(\bar{G}\times\bar{G})$. Řadu $\mathscr{R}$ nazýváme resolventní jádro. Toto jádro je spojité na $\mathcal{C}(\bar{G}\times\bar{G}\times B_{\frac{1}{MV}}(0))$. Navíc řešení φ rovnice $\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi + f$ je

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G \mathscr{R}(x,y,\lambda)f(y)\mathrm{d}y.$$

Poznámka. Celou dobu řešíme problém $\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi + f$, který je možno převést na tvar $(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})\varphi = f$. Zároveň ale tato věta říká, že $\varphi = f + \lambda\mathbf{R}f = (\mathbf{I} + \lambda\mathbf{R})f$. Odtud ale plyne, že

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})^{-1} = (\mathbf{I} + \lambda\mathbf{R}).$$

Tedy problém nalezení řešení integrální rovnice vyřešíme nalezením inverzního operátoru se spojitým jádrem pomocí původního operátoru. Tímto získáme mnohem více informací, než kdybychom použili kteroukoliv jinou metodu.

Důkaz. Ukážeme, že $\mathscr{R}$ je stejnoměrně konvergentní. Pak je možné v postupu provést záměnu a tím je tvrzení dokázáno. K vyšetření stejnoměrné konvergence opět použijeme Weierstrassovu větu. Buď proto $x, y \in \bar{G}$ libovolná. Pak

$$|\mathscr{K}_{p+1}(x,y)| = \left|\int_G \mathscr{K}(x,z)\mathscr{K}_p(z,y)\mathrm{d}z\right| \leq MV \max_{\bar{G}\times\bar{G}} |\mathscr{K}_p(x,y)|.$$

Toto ale říká, že

$$\|\mathscr{K}_{p+1}\|_{\mathcal{C}} \leq MV \|\mathscr{K}_p\|_{\mathcal{C}}$$

Tímto dokážeme odhadnout každý člen. Zbývá vyšetřit odhad prvního členu.

$$|\mathscr{K}_1(x,y)| \leq |\mathscr{K}(x,y)| \Rightarrow \|\mathscr{K}_1\|_{\mathcal{C}} = M$$

Odtud již získáváme žádaný odhad

$$\|\mathscr{K}_p\|_{\mathcal{C}} \leq M^p V^{p-1}$$

Je očividné, že $\sum_{k=0}^{+\infty} \left\|\lambda^k \mathscr{K}_{k+1}\right\|_{\mathcal{C}}$ je číselnou majorantou $\mathscr{R}$. Navíc pro ni platí

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\|\lambda^k \mathscr{K}_{k+1}\right\|_{\mathcal{C}} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda|^k M^{k+1} V^k = \frac{M}{1 - |\lambda| MV} < +\infty$$

Tedy jsme nalezli číselnou majorantu, která majorizuje $\mathscr{R}(x,y,\lambda)$ pro libovolné x, y z uvažovaného definičního oboru. Z tohoto důvodu můžeme při hledání řešení (v rozepisování, které jsme provedli před touto větou, jdeme zpětně) zaměňovat řadu a integrál. $\square$

5.2 Volterrovy integrální rovnice

Definice 5.2.1. Buď $G = (0, a)$, kde $a > 0$. Pak **Volterrovou integrální rovnicí** nazýváme rovnici tvaru

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y + f(x) = \lambda \mathbf{K}\varphi + f.$$

Hned vidíme, že metoda degenerovaného jádra zde nemá žádnou praktickou výhodu, neboť máme proměnnou x v mezi integrálu. chtěli bychom ale problém řešení Volterrovy rovnice převést na Fredholmovu rovnici, tj. do tvaru

$$\lambda \mathbf{K}\varphi + f = \lambda \int_G \widetilde{\mathscr{K}}(x,y)\varphi(y) + f(x) = \lambda \widetilde{\mathbf{K}}\varphi + f,$$

kde $\widetilde{\mathbf{K}}$ je Fredholmův integrální operátor. Proto se zavádí tzv. Volterrovo integrální jádro:

Definice 5.2.2. **Volterrovo integrální jádro** je definováno jako

$$\widetilde{\mathscr{K}}(x,y) = \begin{cases} \mathscr{K}(x,y), & \text{pro } 0 \leq y < x < a, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je snadno vidět, že Volterrovo integrální jádro působí nenulově na množině, kterou je v $\mathbb{R}^2$ pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, který má jednu z odvěsen na x-ové ose.

Poznámka. Volterrovo jádro není nutně spojité! Ukážeme později, že předpoklad spojitosti je zbytečně silný. Spokojíme se totiž pouze se spojitostí jádra $\mathscr{K}$ na výše zmiňovaném trojúhelníku.

5.2.1 Iterovaná jádra

Nejprve si uvědomme, že operátor $\widetilde{\mathscr{K}}(x,z)$ je nenulový pro $0 < z < x < a$ a operátor $\widetilde{\mathscr{K}_k}(z,y)$ je nenulový pro $0 < y < z < a$. Na množině, na které je operátor nenulový, pak působí jako $\mathscr{K}(x,z)$, resp. $\mathscr{K}_k(z,y)$ Proto potom platí

$$\widetilde{\mathscr{K}_{k+1}}(x,y) = \int_0^a \widetilde{\mathscr{K}}(x,z)\widetilde{\mathscr{K}_k}(z,y)\mathrm{d}z = \int_y^x \mathscr{K}(x,z)\mathscr{K}_k(z,y)\mathrm{d}z.$$

Zvolíme-li $y > x$, integrujeme přes prázdnou množinu a proto je integrál nulový, tedy je vidět, že $\widetilde{\mathscr{K}_{k+1}}(x,y)$ má strukturu Volterrova integrálního jádra, přičemž jeho nenulové hodnoty jsou dány hodnotami $\mathscr{K}_{k+1}(x) = \int_y^x \mathscr{K}(x,z)\mathscr{K}_k(z,y)\mathrm{d}z$. Je zřejmě jasné, kam směřujeme. Najdeme jen odhad pro velikost obrazu Volterrova integrálního operátoru a převedeme tento případ na Fredholmovu úlohu.

Lemma 5.2.3. Buď $\mathbf{K}$ Volterrův integrální operátor. Pak pro všechna $p \in \mathbb{N}_0$ a pro všechna $x \in [0, a]$ platí

$$|\mathbf{K}^p\varphi(x)| \leq \frac{(Mx)^p}{p!}\|\varphi\|_{\mathcal{C}}.$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $p = 0$ zjevně platí. Pro $p = 1$ platí:

$$|\mathbf{K}\varphi(x)| = \left|\int_0^x \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y\right| \leq \int_0^x |\mathscr{K}(x,y)||\varphi(y)|\mathrm{d}y \leq Mx\|\varphi\|_{\mathcal{C}}.$$

Nyní provedeme indukční krok $p \mapsto p + 1$:

$$|\mathbf{K}^{p+1}\varphi(x)| = |\mathbf{K}(\mathbf{K}^p\varphi(x))| \leq \int_0^x |\mathscr{K}(x,y)||\mathbf{K}^p\varphi(y)|\mathrm{d}y \leq \int_0^x M\frac{(My)^p}{p!}\|\varphi\|_{\mathcal{C}}\mathrm{d}y = \frac{(Mx)^{p+1}}{(p+1)!}\|\varphi\|_{\mathcal{C}}.$$

□

V důsledku tohoto lemmatu máme vyřešenou Volterrovu integrální rovnici, protože pro metodu postupných aproximací (u Fredholmových integrálních rovnic) jsme potřebovali znát odhad $\|\mathbf{K}^p\varphi\|_{\mathcal{C}}$ kvůli nalezení integrabilní majoranty. Ten ale již máme a dokonce víme, že díky němu bude resolventa konvergovat. Odhad je zřejmě

$$\|\mathbf{K}^p\varphi\|_{\mathcal{C}} \leq \frac{(Ma)^p}{p!}\|\varphi\|_{\mathcal{C}}.$$

Zopakujeme-li nyní důkaz, který jsme provedli u metody post. aproximací a iterovaných jader, a využijeme-li odhady výše, máme tyto metody pro Volterrovy rovnice a máme zajištěno, že fungují pro libovolné λ, neboť odhady tentokrát na λ nezávisí. Zformulujme tento poznatek do věty.

Věta 5.2.4. Volterrova integrální rovnice $\varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y + f(x)$ má pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$ a pro všechny spojité funkce $f \in \mathcal{C}([0,a])$ právě jedno řešení $\varphi(x) \in \mathcal{C}([0,a])$.

5.3 Spektrum, ortonormální báze a vlastnosti integrálních operátorů

V této sekci budou definovány pojmy jako spektrum operátoru, ortonormální báze atp., které budou navazovat na látku lineární algebry a budou ji rozšiřovat na prostory nekonečné dimense. Jedná se o jistý krátký úvod do funkcionální analýzy.

V celé kapitole budeme pracovat s Banachovými prostory, nebude-li řečeno jinak. Operátor $T : X \to X$ bude lineární operátor na Banachově prostoru. Zkoumejme řešení rovnice

$$(T - \lambda I)x = y \tag{5.3}$$

v závislosti na $\lambda \in \mathbb{C}$ a $y \in X$. Připomeňme, že z lineární algebry (tj. pro X konečně dimensionální) víme, že spektrum operátoru T je množina

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in X,\ x \neq 0,\ Tx = \lambda x\}.$$

Rovněž víme, že

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \det(T - \lambda I) = 0.$$

Zmiňme ještě, že operátor je regulární (na prostorech kon. dimense), právě když je prostý a to je tehdy a jen tehdy, když je surjektivní. Proto je-li $y = 0$, má rovnice (5.3) řešení, právě když $\lambda \in \sigma(T)$. Jestliže je $y \neq 0$, pak je operátor $(T - \lambda I)$ bijekcí, právě když $\lambda \notin \sigma(T)$. Odtud je možné získat další definici, kterou nakonec zobecníme:

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \varrho(T),$$

kde $\varrho(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ existuje a je omezený}\right\}$. Tyto úvahy jsou na prostorech konečné dimense ekvivalencemi, ale na prostorech nekonečné dimense ekvivalencemi obecně nejsou. Nyní se již přesuňme na prostory nekonečné dimense.

Definice 5.3.1. **Spektrem operátoru** $T : X \to X$ (X je Banachův prostor) rozumíme

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \varrho(T),$$

kde $\varrho(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ existuje a je omezený}\right\}$ a $\varrho(T)$ nazýváme resolventní množina.

Na základě toho, co způsobuje to, že operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje, dělíme spektrum na několik typů. Předpokládejme, že $\lambda \in \sigma(T)$. Pak

1. $(T - \lambda I)$ není prosté a tedy k němu neexistuje inverzní operátor. Pak ale tato vlastní čísla λ odpovídají řešení rovnice $Tx = \lambda x$ ($\exists y, z \in X,\ y \neq z$ tak, že $(T - \lambda)(y) = (T - \lambda)(z)$). Množinu těchto čísel nazýváme *bodové spektrum* a označujeme $\sigma_p(T)$.

2. Inverzní operátor existuje, ale není surjektivní. Jestliže je
   $\overline{\mathrm{Ran}(T-\lambda I)} = X$, pak říkáme, že λ leží ve *spojitém spektru*, tj. $\lambda \in \sigma_c(T)$;
   $\overline{\mathrm{Ran}(T-\lambda I)} \neq X$, pak říkáme, že λ leží v *residuálním spektru*, tj. $\lambda \in \sigma_r(T)$.

Odtud tedy plyne, že spektrum je možné zapsat jako sjednocení bodového, spojitého a residuálního spektra, tj.

$$\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r$$

Definice 5.3.2. $R_T(\lambda) = (T-\lambda I)^{-1}$ se nazývá **resolventa operátoru** pro $\lambda \in \varrho(T)$. Zobrazení $R_T : \varrho(T) \to \mathscr{B}^3 : \lambda \mapsto (T-\lambda I)^{-1}$ nazýváme **resolventní funkcí**.

Zamysleme se nyní nad souvislostí s integrálními rovnicemi. Jistou roli bude určitě hrát resolventa a parametr λ. Například díky předešlým úvahám víme, že pro

$$\varphi = \lambda \mathbf{K}\varphi + f \Leftrightarrow \left(\mathbf{K} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{I}\right)\varphi = -\frac{1}{\lambda} f$$

nemá smysl hledat řešení $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(\mathbf{K})$. Nyní vyslovíme několik drobných tvrzení, která nám pak poslouží k důkazu věty, která vysvětlí onu záhadnou podmínku na λ v kapitole o Fredholmových integrálních rovnicích.

Lemma 5.3.3. Buďte B, C omezené operátory. Pak operátor BC je omezený a platí $\|BC\| \leq \|B\| \cdot \|C\|$.

Důkaz.

$$\|BCx\| = \|B(Cx)\| \leq \|B\| \cdot \|Cx\| \leq \|B\| \cdot \|C\| \cdot \|x\|$$

Odtud již (protože norma operátoru je nejmenší takové číslo c, které splňuje $\|BCx\| \leq c\|x\|$) plyne, že

$$\|BC\| \leq \|B\| \cdot \|C\|$$

□

Lemma 5.3.4. Je-li B omezený operátor a $\|I - B\| < 1$, pak existuje B^{-1} omezený operátor.

Důkaz. Z faktu, že $\|I-B\| < 1$ plyne, že posloupnost $\|I-B\|^n$ konverguje k nule. Díky tomu $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in$ taková, že $n_0 < m < n$, a že platí

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{n} (I-B)^j \right\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \|(I-B)\|^j = \frac{\|I-B\|^m - \|I-B\|^n}{1 - (\|I-B\|)} < \varepsilon,$$

což plyne ze součtu gemetické řady a vhodnou volbou n_0 zajistíme konvergenci. Pak tedy posloupnost $S_n = \sum\limits_{j=0}^{n} (I-B)^j$ je cauchyovská. Jelikož je prostor omezených operátorů Banachův, má tato posloupnost za limitu opět omezený operátor S. Navíc platí, že

$$\begin{array}{ccc} BS_n = S_n B & = & S_n - S_{n+1} + I \\ & \downarrow \lim & \\ BS = SB & = & I \end{array}$$

Tedy $S = B^{-1}$. □

Věta 5.3.5. Buď T omezený operátor , pak $\sigma(T) \subset B_{\|T\|}(0)$.

[3] $\mathscr{B}$ označuje prostor všech omezených operátorů.

Důkaz. Volme λ takové, že $|\lambda| > \|T\|$. Budeme chtít ukázat, že při této volně již λ leží v resolventní množině $\varrho(T)$. Proto definujme operátor A jako:

$$A = I - \frac{1}{\lambda}T$$

Tento operátor je zřejmě omezený, protože identický operátor je omezený a násobek omezeného operátoru je rovněž omezený operátor. Navíc $\|I - A\| < 1$. Dle předchozího lemmatu tedy existuje A^{-1} omezený operátor. Nyní zkoumejme operátor z definice resolventní množiny:

$$(T - \lambda I)^{-1} = (\lambda)^{-1}(I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}A^{-1}$$

Jelikož je operátor na prvé straně omezený, je číslo $\lambda \in \varrho(T)$. Tedy odtud plyne, že pro spektrum, které splňuje $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$, platí dokazované tvrzení, tj.

$$\sigma(T) \subset B_{\|T\|}(0)$$

□

V důsledku této věty je již zřejmá podmínka, která vyvstávala u integrálních rovnic. Tam jsme totiž měli operátor $\mathbf{K} : \mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$, který byl omezený a norma byla rovna $\|\mathbf{K}\|_{\mathcal{C}} = MV$.

Bez důkazu uveďme nyní dvě věty z funkcionální analýzy, které budou úzce souviset s pojmem ortogonální báze, jenž bude představen vzápětí.

Věta 5.3.6. Integrální operátor $\mathbf{K} : \mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$ se spojitým jádrem má čistě bodové spektrum kromě 0, všechny vlastní hodnoty mají konečnou násobnost a nemají nenulový hromadný bod.

Věta 5.3.7 (Hilbert-Schmidtova věta). Buď $\mathbf{K} : L^2(G) \to L^2(G)$ integrální operátor se spojitým jádrem $\mathscr{K}(x,y)$, které navíc splňuje $\mathscr{K}(x,y) = \overline{\mathscr{K}(y,x)}$. Pak $\mathbf{K}$ má čistě bodové spektrum kromě 0 a z vlastních funkcí operátoru $\mathbf{K}$ lze sestavit ortonormální bázi.

Pojem ortonormální (ortogonální) báze je pouhým rozšířením klasické definice báze a pojmů ortogonální, resp. ortonormální množina, tak jak ji známe z lineární algebry. Intuitivně pod pojmem báze rozumíme nějakou množinu, z jejichž prvků jsme schopni lineární kombinací získat libovolný prvek, resp. jsme schopni každý prvek z daného prostoru rozložit do podoby lineární kombinace prvků z této množiny. S nějakou takovouto množinou jsme se již dříve setkali. Při studiu Fourierových řad jsme prováděli v podstatě rozklad funkcí z $L^2((a, a + l))$ do ortogonální báze

$$\left\{1, \sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right), \cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Nyní již definujme korektně ortonormální a ortogonální bázi

Definice 5.3.8. O množině M řekneme, že je ortonormální (ON), resp. ortogonální (OG) bází Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$, jestliže

1. M je ortonormální, resp. ortogonální množina;
2. $\overline{M_{lin}} = \mathcal{H}$, tj. množina všech lineárních kombinací prvků z M je hustá v prostoru $\mathcal{H}$ (taková M je tzv. totální množina).

Věta 5.3.9. Následující výroky o množině $M \subset \mathcal{H}$ jsou ekvivalentní:

1. Množina M je OG bází v $\mathcal{H}$;
2. $M^{\perp} = \{0\}$;
3. M je maximální OG množina v $\mathcal{H}$, tj. není vlastní podmnožinou jiné OG množiny;
4. $\forall x \in \mathcal{H}$ platí $x = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \beta_\alpha m_\alpha$ pro β_α z tělesa (tj. $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) a $m_\alpha \in M$. $\mathcal{I}$ je indexová množina.

Uveďme některé příklady ortogonálních bází na prostoru funkcí lebegueovsky integrovatelných s kvadrátem.

1. Pro $G = (-\pi, \pi)$ je to například $\{1, \sin(nx), \cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$.
2. *Ortogonální polynomy* (resp. ON polynomy při použití Gramm-Schmidtova ON procesu) Ze Stone-Weierstrassovy věty plyne, že každou funkci z $L^2(a,b)$ je možné libovolně přesně aproximovat polynomem. [4] Odtud plyne, že

   $$\left\{x^l : l \in \mathbb{N}_0\right\}$$

   je totální množina v $L^2((a,b))$. Z tohoto souboru pak můžeme pomocí Gramm-Schmidtova ON procesu získat různou volbou skalárního součinu následující ON polynomy:

   na $L^2((0,1))$ se skalárním součinem $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_0^1 \bar{u}(x)v(x)\mathrm{d}x$ dávají tzv. **Lagrangeovy polynomy**

   na $L^2((0,+\infty))$ se skalárním součinem $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \bar{u}(x)v(x)e^{-x}\mathrm{d}x$ dávají tzv. **Laguerrovy polynomy**

   Hermitovy polynomy etc.

Poznámka. Obecně je možné ortogonální polynomy vyjádřit čtyřmi způsoby:

1. Gramm-Schmidtovým ortogonalizačním procesem;
2. rekurentní formulí;
3. diferenciální rovnicí;
4. Rodriguezovou formulí.

[4] Pokud si myslíte, že jste o této větě nikdy neslyšeli, máte pravdu. Na FJFI se s ní obvykle jen setká pár vybraných jedinců u zkoušky z MAA3, kdy ji mají dokázat jako nové tvrzení, resp. o něm uvažovat. Jinak je možné se s ní setkat třeba na předmětu 01TOP, ale...

Kapitola 6

Eliptické diferenciální rovnice a operátory, Sturm-Liouvilleova teorie

Tento typ úlohy nás bude zvlášť zajímat protože se s ním často setkáváme (nejen) v kvantové mechanice, např. při řešení Schrödingerovy rovnice. Navíc lze ukázat, že libovolnou obyčejnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu lze převést do tvaru následující Sturm-Liouvilleovy úlohy.

Definice 6.0.1. Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ omezená, otevřená množina. Nechť je dále ∂G po částech z $\mathcal{C}^1$. Buďte dále $p \in \mathcal{C}^1(\bar{G})$, $q \in \mathcal{C}(\bar{G})$ takové funkce, že $p(x) > 0$ a $q(x) \geq 0$ pro všechna $x \in G$. Pak

$$Lf(x) = -\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} f(x)) + q(x)f(x) = g(x)$$

nazýváme **Sturm-Liovilleovou úlohou** s okrajovými podmínkami (Robinovými): Existují funkce $\alpha(x), \beta(x)$ takové, že $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ a $\alpha + \beta > 0$ takové, že

$$\alpha(x)f(x) + \beta(x)\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = 0 \;\text{ na }\; \partial G,$$

kde $\vec{n}$ značí jednotkový vektor směřující ve směru vnější normály.

Poznámka. Robinovy okrajové podmínky jsou jen kombinací dvou klasických podmínek, které je z nich možné snadno obdržet. Volíme-li

$\alpha = 0$, pak má podmínka tvar $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = 0$ na ∂G a tuto podmínku běžně nazýváme *homogenní Neumannovou okrajovou podmínkou.*

$\beta = 0$, pak má podmínka tvar $f(x) = 0$ na ∂G a tuto podmínku běžně nazýváme *Dirichletovou okrajovou podmínkou.*

Poznámka. Podmínky na funkce p, q zajišťují eliptičnost operátoru, resp. rovnice. Provedeme-li totiž aplikaci divergence, obdržíme složky Laplaceova operátoru pronásobené funkcí $p(x)$, která je kladná.

V následující kapitole budeme zkoumat obecné vlastnosti operátoru L. Ty se budou odvíjet i od jeho definičního oboru, podobně jako tomu je u funkcí. Pro naše účely budeme brát za definiční obor operátoru L množinu

$$\operatorname{Dom}(L) = \left\{ f \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\bar{G}) : Lf \in L^2(G) \text{ a splňují okrajové podmínky} \right\}$$

6.1 Vlastnosti L

Než si ukážeme několik vlastností operátoru L, rozepíšeme z praktických důvodů, následující integrál:

$$\int_G v(x)Lu(x)\mathrm{d}x = \int_G v(x)\left(-\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad}u(x)) + q(x)u(x)\right)\mathrm{d}x = -\int_G v(x)\left(\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad}u(x)) - q(x)u(x)\right)\mathrm{d}x$$

Nyní využijeme jednu identitu vektorové analýzy, která říká, že

$$\operatorname{div}(v(x)p(x)\operatorname{grad}u(x)) = p(x)\operatorname{grad}v(x)\operatorname{grad}u(x) + v(x)\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad}u(x)).$$

Aplikací této identity na integrand obdržíme

$$-\int_G \operatorname{div}v(x)p(x)\operatorname{grad}u(x))\mathrm{d}x + \int_G (p(x)\operatorname{grad}v(x)\operatorname{grad}u(x) + v(x)q(x)u(x))\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{\partial G} v(x)p(x)\underbrace{\operatorname{grad}u(x)\cdot\vec{n}}_{\frac{\partial u(x)}{\partial\vec{n}}}\mathrm{d}S + \int_G (p(x)\operatorname{grad}v(x)\operatorname{grad}u(x) + v(x)q(x)u(x))\mathrm{d}x$$

Nyní již přikročme k větě, která nám ozřejmí vlastnosti Sturm-Liouvilleova operátoru

Věta 6.1.1 (Vlastnosti S-L operátoru). Buď L operátor z definice výše s Robinovými okrajovými podmínkami. Pak platí:

1. L je symetrický operátor, tj. $\forall u, v \in \operatorname{Dom}(L)$ platí $\langle u, Lv\rangle = \langle Lu, v\rangle$;
2. L je positivní operátor, tj. $\forall u \in \operatorname{Dom}(L)$ platí $\langle u, Lu\rangle \geq 0$;
3. dimenze jádra operátoru L je buď 0, nebo 1;
4. všechny vlastní hodnoty operátoru L jsou nezáporné, tj. $\sigma(L) \subset \mathbb{R}^+$;
5. vlastní funkce příslušné různým vlastním hodnotám jsou na sebe kolmé;
6. vlastní funkce lze volit reálné.

Důkaz. 1. Jelikož $\langle u, Lv\rangle = \langle Lu, v\rangle \Leftrightarrow \langle u, Lv\rangle - \langle Lu, v\rangle = 0$, budeme zkoumat tento výraz a využijeme přitom faktu, že operátor L má reálné koeficienty a rozepsání integrálu, které jsme provedli výše:

$$\langle u, Lv\rangle - \langle Lu, v\rangle = \int_G \bar{u}Lv - \overline{Lu}v\ \mathrm{d}x = \int_G \bar{u}Lv - L\bar{u}v\ \mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{\partial G} p\left(\bar{u}\frac{\partial v}{\partial\vec{n}} - v\frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}S + \int_G [p\operatorname{grad}\bar{u}\operatorname{grad}v + \bar{u}vq - (p\operatorname{grad}v\operatorname{grad}\bar{u} + v\bar{u}q)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{\partial G} p\left(\bar{u}\frac{\partial v}{\partial\vec{n}} - v\frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}S$$

Abychom ukázali, že tento výraz je rovný nule, využijeme počáteční podmínky: Ty jsou pro funkce $\bar{u}$ a v následující: $\begin{cases}\alpha\bar{u} + \beta\frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}} = 0, & \text{na } \partial G,\\ \alpha v + \beta\frac{\partial v}{\partial\vec{n}} = 0, & \text{na } \partial G.\end{cases}$ Toto lze ale ekvivalentně přepsat na tvar rovnice pro α, β:

$$\begin{pmatrix}\bar{u} & \frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}}\\ v & \frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Tohle ale je ekvivalentní s tvrzením, že

$$\begin{vmatrix}\bar{u} & \frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}}\\ v & \frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\end{vmatrix} = \bar{u}\frac{\partial v}{\partial\vec{n}} - v\frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}} = 0$$

Tímto jsme ukázali, že integrand je nulový a tedy celý integrál je nulový, čímž jsme ukázali, že operátor je symetrický.

2. Nyní máme ukázat, že $\langle u, Lu\rangle \geq 0$. Rozepíšeme opět tento skalární součin a využijeme rozepsání integrálu

$$\langle u, Lu\rangle = \int_G \bar{u}Lu \, \mathrm{d}x = -\int_{\partial G} \bar{u}p\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}S + \int_G p \,\mathrm{grad}\bar{u}\, \mathrm{grad}u + \bar{u}uq \, \mathrm{d}x$$

Prozkoumáme integrandy u jednotlivých integrálů:

Pro druhý integrand dostáváme odhad

$$p \,\mathrm{grad}\bar{u}\, \mathrm{grad}u = p\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j} = p\sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 > 0,$$

přičemž využíváme kladnosti funkce p.

Pro třetí integrand dostáváme tento odhad (a tentokrát využíváme nezápornosti funkce q):

$$\bar{u}uq = \|u\|^2 q \geq 0$$

Pro první integrand bude diskuse nezápornosti obsáhlejší. Využijeme pro ni počáteční podmínky:
Jestliže existuje x_0 takové, že $\alpha(x_0) = 0$, pak $\beta(x_0) > 0$. Pak podmínka přechází na tvar $\beta(x_0)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x_0) = 0$. odtud pak již plyne, že $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x_0) = 0$. Pak ale pro všechna x taková, že $\alpha(x) = 0$ plyne, že integrand $p\bar{u}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ je nulový.
Jestliže existuje x_0 takové, že $\beta(x_0) = 0$, pak $\alpha(x_0) > 0$. Pak podmínka přechází na tvar $\alpha(x_0)u(x_0) = 0$. odtud pak již plyne, že $u(x_0) = 0$. Pak ale pro všechna x taková, že $\beta(x) = 0$ plyne, že integrand $p\bar{u}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ je nulový.
Označme $\Gamma = \{x \in \partial G : \alpha(x) \neq 0 \wedge \beta(x) \neq 0\}$. Pak $\forall x \in \Gamma$ platí

$$\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$$

Dosazením do prvního integrandu získáváme:

$$-p\bar{u}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = p\frac{\beta}{\alpha}\overline{\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = p\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \vec{n}}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = p\frac{\beta}{\alpha}\left\|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right\|^2 \geq 0$$

Tímto jsme tedy dokázali, že je Sturm-Liouvilleův operátor positivní.

3. Odhady, které jsme získali v předešlé části, použijeme i při dokazování dimense jádra. Ukážeme, že $\dim kerL = 1 \Rightarrow kerL$ obsahuje konstantní funkce a $\dim kerL = 0 \Rightarrow kerL$ obsahuje nulovou funkci. Berme tedy $u \in \mathrm{Dom}(L)$ takové, že $u \in kerL$. Pak tedy z linearity plyne

$$0 = \langle u, Lu\rangle = \int_G p\frac{\beta}{\alpha}\left\|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right\|^2 \mathrm{d}S + \int_G p\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + q\|u\|^2 \mathrm{d}x$$

Jelikož jsou všechny členy dle předešlé části důkazu nezáporné, musí být rovny nule, chceme-li dostat v jejich součtu nulu.

Pro druhý integrand máme

$$p\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 = 0 \Leftrightarrow \left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 = 0 \; \forall j \in \hat{n}.$$

Toto plyne z faktu, že $p > 0$. Znamená to tedy, že $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$ a tedy funkce u je konstantní na $\bar{G}$. Aby byla dimenze rovna jedné, musí být funkce $q \equiv 0$ na G.

První integrand je při těchto podmínkách již automaticky roven nule. Je-li ovšem dimense jádra 1, pak okrajová podmínka má tvar

$$\alpha u = 0 \Rightarrow \alpha \equiv 0 \text{ na } \partial G$$

Tedy shrňme výsledek tohoto důkazu: dim $kerL = 0$, nebo $\dim \ker L = 1 \Leftrightarrow q \equiv 0$ na $G \wedge \alpha \equiv 0$ na ∂G.

4. Buď λ vlastní hodnota operátoru L, tj. $Lu = \lambda u$ pro jisté $u \in \mathrm{Dom}(L)$. Pak

$$\langle u, Lu\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle u, \lambda u\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \lambda\langle u, u\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$$

Poslední nerovnost plyne z positivity skalárního součinu.

5. Buďte λ, μ různé vlastní hodnoty operátoru L a u, v k nim příslušné vlastní vektory. Potom

$$\langle u, Lv\rangle = \langle u, \mu v\rangle \wedge \langle Lu, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle$$

Jelikož je ale operátor L symetrický, platí $\langle u, Lv\rangle = \langle Lu, v\rangle$. To ale říká, že

$$\langle u, \mu v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle \Rightarrow \mu\langle u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle \Leftrightarrow (\mu - \lambda)\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$$

Poslední ekvivalence plyne z faktu, že μ a λ jsou různé vlastní hodnoty. Tedy vlastní funkce u, v jsou ortogonální.

6. Poslední tvrzení dokážeme snadno. Předpokládejme, že $Lu = \lambda u$. Pak pomocí komplexního sdružení získáme

$$\overline{Lu} = \overline{\lambda u} = \lambda \bar{u}$$

Jelikož má L reálné koeficienty, platí, že $\overline{Lu} = L\bar{u}$. Pak ale

$$\lambda \bar{u} = L\bar{u} \wedge Lu = \lambda u$$

Tedy vektory u a $\bar{u}$ jsou vlastní vektory stejné vlastní hodnoty, tedy i jejich součet je vlastním vektorem. Pak ale stačí volit jako reálnou funkci $u+\bar{u}$. Tímto jsme tedy explicitně našli konkrétní reálnou vlastní funkci příslušnou vlastní hodnotě λ.

□

6.2 Sturm-Liouvilleova úloha pro 1 dimensi

V této kapitole budeme řešit S-L úlohu pro 1 dimensi, což je případ, se kterým se člověk (ve zkouškových písemkách) setkává nejčastěji. Na konci této kapitoly budou rovněž zavedeny Greenovy funkce. Pro 1D má tedy úloha tvar:

Buď $G = (0, l)$, $l > 0$ s hranicí $\partial G = \{0, l\}$. Buď dále $p > 0$, $p \in \mathcal{C}^1([0, l])$ a $q \geq 0$, $q \in \mathcal{C}([0, l])$. Sturm-Liouvilleova úloha má pak tvar

$$Lu(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\right) + q(x)u(x) = f(x)$$

s okrajovou podmínkou pro dva body na hranici: Buďte $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \geq 0$ tak, že $\alpha_0 + \beta_0 > 0$ a $\alpha_1 + \beta_1 > 0$, pak

$$\alpha_0 u(0) - \beta_0 u'(0) = 0^1$$

$$\alpha_1 u(l) + \beta_1 u'(l) = 0$$

Budeme navíc předpokládat, že dimense jádra je 0. Tedy neplatí podmínka odvozená v předešlé kapitole, tj. není pravda, že $q(x) = 0\ \forall x \in G \wedge \alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Spočítáme řešení této úlohy a získáme vlastnosti L. Při řešení této úlohy budeme postupovat v několika krocích:

[1] Před druhým členem je skutečně mínus, neboť se jedná o derivaci ve směru vnější normály.

1. Najdeme dvojici řešení v_0, v_1, která řeší úlohu $Lv_0 = 0 = Lv_1$ a splňují právě jednu z okrajových podmínek. Nechť tedy v_0 splňuje levou hraniční podmínku, tj.

$$\alpha_0 v_0(0) - \beta_0 v_0'(0) = 0,$$

a v_1 splňuje pravou hraniční podmínku, tj.

$$\alpha_1 v_1(l) + \beta_1 v_1'(l) = 0.$$

Že taková řešení existují, vyplývá z teorie diferenciálních rovnic.

2. Hledejme obecné řešení tvaru:

$$u(x) = C_0(x)v_0(x) + C_1(x)v_1(x)$$

Pak po dosazení do S-L operátoru získáváme

$$Lu = -\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) = -\left[p(C_0'v_0 + C_0v_0' + C_1'v_1 + C_1v_1')\right]' + q(C_0v_0 + C_1v_1) =$$
$$= -p'(C_0'v_0) - p(C_0'v_0)' - p(C_0v_0')' - p'(C_0v_0') - p'(C_1'v_1) - p(C_1'v_1)' - p(C_1v_1')' - p'(C_1v_1') + qC_0v_0 + qC_1v_1 =$$
$$= C_0 \underbrace{\left[-(pv_0')' + qv_0\right]}_{Lv_0=0} - pC_0'v_0' + C_1 \underbrace{\left[-(pv_1')' + qv_1\right]}_{Lv_1=0} - pC_1'v_1' - p'(C_0v_0') - p(C_0v_0)' - p'(C_1'v_1) - p(C_1'v_1)' =$$
$$= -\left[p\left(C_0'v_0 + C_1'v_1\right)\right]' - p\left(C_0'v_0' + C_1'v_1'\right) \stackrel{!}{=} f$$

Aby tohle platilo, je třeba nalézt funkce C_0, C_1 takové, že

$$C_0'v_0 + C_1'v_1 = 0$$
$$C_0'v_0' + C_1'v_1' = -\frac{f}{p}$$

Tuto soustavu lze maticově formulovat jako:

$$\begin{pmatrix} v_0 & v_1 \\ v_0' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0' \\ C_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{f}{p} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Matice soustavy je *Wronského matice* funkcí v_0, v_1, ozn. $\mathcal{W}(v_0, v_1)$. Jestliže ukážeme, že *wronskián* $\mathscr{W}$ je nenulový, tj. det $\mathcal{W}(v_0, v_1) \neq 0$ pro všechna $x \in [0, l]$, pak je možné tuto soustavu vyřešit a najít funkce C_0 a C_1.

3. Sporem ukážeme, že $\mathscr{W} = \begin{vmatrix} v_0 & v_1 \\ v_0' & v_1' \end{vmatrix} = v_0v_1' - v_1v_0' \neq 0$ pro všechna $x \in [0, l]$. Pro spor předpokládejme, že existuje bod $x_0 \in [0, l]$ takový, že $\mathscr{W}(x_0) = 0$. To ale znamená, že Wronského matice má lineárně závislé sloupce. Tedy existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že

$$\begin{pmatrix} v_0(x_0) \\ v_0'(x_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1(x_0) \\ v_1'(x_0) \end{pmatrix}$$

Nyní prozkoumejme funkci $\tilde{v}(x) = v_0(x) - \lambda v_1(x)$. Je zřejmé, že z linearity operátoru L plyne, že $L\tilde{v} = 0$ a z nulovosti determinantu plyne $\tilde{v}(x_0) = 0$ a $\tilde{v}'(x_0) = 0$. Jelikož je ale $L\tilde{v} = 0$ diferenciální rovnice 2. řádu a máme dvě podmínky, plyne z věty o jednoznačnosti řešení, že jediné řešení je nulová funkce. Toto ale znamená, že pokud bychom našli jediný bod, ve kterém je $\mathscr{W}$ nulový, tak je nulový na intervalu $[0, l]$. A toto je spor, protože víme, že dimense jádra je 0. Tedy wronskián je nenulový.

4. Nyní ukážeme, že $p(x)\mathscr{W}(x) = konst$. Toto ověříme přímým výpočtem:

$$(p\mathscr{W})' = (p(v_0v_1' - v_1v_0'))' = v_0'pv_1' + v_0 \underbrace{(pv_1')'}_{qv_1} - v_1'pv_0' - v_1 \underbrace{(pv_0')'}_{qv_0} = qv_0v_1 - qv_1v_0 = 0$$

5. Nalezneme funkce C_0, C_1 pomocí „invertování“ rovnice 6.1

$$\begin{pmatrix} C_0' \\ C_1' \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathscr{W}} \begin{pmatrix} v_1' & -v_1 \\ -v_0' & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{f}{p} \end{pmatrix} = \frac{1}{p\mathscr{W}} \begin{pmatrix} f v_1 \\ -f v_0 \end{pmatrix}$$

Tímto jsme dvojici obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu, které určují funkce C_0, C_1:

$$C_0' = \frac{1}{p\mathscr{W}} v_1 f \tag{6.2}$$

$$C_1' = -\frac{1}{p\mathscr{W}} v_0 f \tag{6.3}$$

Abychom dokázali určit přesné řešení, musíme ještě využít okrajových podmínek, neboť víme, že $u = C_0 v_0 + C_1 v_1$ je musí rovněž splňovat. Na následujících řádcích nejprve dosadíme do levé hraniční podmínky, využijeme znalosti hraniční podmínky pro v_0 a využijeme vztahů 6.2 a 6.3:

$$0 = \alpha_0 u(0) - \beta_0 u'(0) =$$

$$= \alpha_0 \left(C_0(0) v_0(0) + C_1(0) v_1(0) \right) - \beta_0 \left(C_0'(0) v_0(0) + C_0(0) v_0'(0) + C_1'(0) v_1(0) + C_1(0) v_1'(0) \right) =$$

$$= \alpha_0 C_1(0) v_1(0) - \beta_0 v_0(0) \frac{1}{p\mathscr{W}} v_1(0) f(0) + \beta_0 v_1(0) \frac{1}{p\mathscr{W}} v_0(0) f(0) - \beta_0 C_1(0) v_1'(0) =$$

$$= \left[\alpha_0 v_1(0) - \beta_0 v_1'(0) \right] C_1(0)$$

Aby byl tento výraz roven nule, musí být buď $\alpha_0 v_1(0) - \beta_0 v_1'(0) = 0$, nebo $C_1(0) = 0$. Pokud by nastala první možnost, musela by funkce v_1 splňovat dvě počáteční podmínky a navíc $Lv_1 = 0$. Proto by byla v jádře a tudíž (neboť předpokládáme nulovou dimensi jádra) by byla nulová. Pomocí nulové funkce ale nejsme schopni najít řešení s pravou stranou. Proto musí platit, že

$$C_1(0) = 0$$

Obdobnou úvahou bychom z pravé okrajové podmínky získali

$$C_0(l) = 0$$

Když máme tyto podmínky, můžeme zintegrovat rovnice 6.2 a 6.3 a započítat počáteční podmínky:

$$C_0(x) - C_0(l) = \int_l^x \frac{1}{p\mathscr{W}} v_1(y) f(y) \mathrm{d}y$$

a tedy

$$C_0(x) = -\frac{1}{p\mathscr{W}} \int_x^l v_1(y) f(y) \mathrm{d}y$$

Pro funkci C_1 dostáváme

$$C_1(x) - C_1(0) = -\int_0^x \frac{1}{p\mathscr{W}} v_0(y) f(y) \mathrm{d}y$$

a tedy

$$C_1(x) = -\frac{1}{p\mathscr{W}} \int_0^x v_0(y) f(y) \mathrm{d}y$$

Tímto jsme nalezli funkce C_0, C_1 takové, že $u(x) = C_0(x) v_0(x) + C_1(x) v_1(x)$ je řešením úlohy $Lu = f$. Konkrétní tvar řešení $u(x)$ má podobu:

$$u(x) = -\frac{1}{p\mathscr{W}} \left[v_0(x) \int_x^l v_1(y) f(y) \mathrm{d}y + v_1(x) \int_0^x v_0(y) f(y) \mathrm{d}y \right] \overset{\text{ozn.}}{=} \int_0^l \mathscr{G}(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

Definice 6.2.1. Se značením použitým výše se funkce $\mathscr{G}(x,y)$ definovaná předpisem

$$\mathscr{G}(x,y) = -\frac{1}{p\mathscr{W}} \begin{cases} v_0(x)v_1(y), & \text{pro } 0 < x < y < l, \\ v_0(y)v_1(x), & \text{pro } 0 < y < x < l. \end{cases}$$

nazývá **Greenova funkce**.

Co jsme tedy získali řešením? Ukázali jsme, že řešení úlohy $Lu = f$ má tvar

$$u = \int_0^l \mathscr{G}(x,y)f(y)\mathrm{d}y = L^{-1}f,$$

kde L^{-1} je integrální operátor, jehož jádrem je Greenova funkce. Tato funkce je spojitá, neboť $v_1(x)$, $v_0(x)$ jsou řešeními diferenciální rovnice a pro $y = x$, což je jediná úsečka, na které by mohla vznikat nespojitost, jsou si funkční hodnoty rovny. Tedy $\mathscr{G} \in \mathcal{C}(\bar{G} \times \bar{G})$. Je očividné, že Greenova funkce je symetrická a tedy jsou splněny předpoklady Hilbert-Schmidtovy věty, která říká, že operátor L^{-1} má čistě bodové spektrum a jeho vlastní funkce tvoří ON bázi v $L^2(G)$. Tedy toto platí i pro operátor L. V důsledku tohoto zjištění si můžeme troufnout vyvodit mimo jiné to, že (přesuňme se do dimense 3) vlastní hodnoty Laplaceova operátoru jsou kladné. Z toho vyplývá

Věta 6.2.2 (Vlastnosti S-L operátoru II). Při předpokladech z první věty o vlastnostech S-L operátoru platí:

7. Vlastní čísla L mají konečné násobnsti a nemají konečný hromadný bod.
8. Z vlastních funkcí L lze sestavit ON bázi prostoru $L^2\left((0,l)\right)$.

Poznámka. Veškeré úvahy byly zatím vedeny pro nulové jádro. Jestliže je jádro operátoru nenulové, tj. je tvořeno konstantními funkcemi, můžeme operátor snadno převést na případ, která již budeme umět vyřešit. Stačí pak k operátoru „přičíst“ jedničku a spektrum tohoto operátoru bude totožné se spektrem původního, jen bude „posunuté“ o jedničku.

Věta 6.2.3 (Vlastnosti Greenovy funkce). 1. $\mathscr{G}(x,y)$ je spojitá funkce;

2. Pro všechna x, y $\mathscr{G}(x,y) = \mathscr{G}(y,x)$;
3. Buď $y \in (0,l)$ pevné. Označme $g_y(x) = \mathscr{G}(x,y)$. Pak
   [3a] $g_y(x)$ splňuje hraniční podmínky v 0 i v l;
   [3b]$Lg_y(x) = -(p(x)g_y'(x))' + q(x)g_y(x) = \delta(x-y)$
   [3c] $g_y(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([0,l] \setminus \{y\})$

Důkaz. Tvrzení 1, 2, 3a se dokáží přímým dosazením, tvrzení 3b je jen aplikace věty o derivování po částech hladké funkce: Zderivujeme výraz $pg_y'(x)$. Ten má následující podobu:

$$pg_y'(x) = -\frac{1}{\mathscr{W}} \begin{cases} v_0'(x)v_1(y), & \text{pro } 0 < x < y < l, \\ v_0(y)v_1'(x), & \text{pro } 0 < y < x < l. \end{cases}$$

Pak

$$(pg_y'(x))' = \left\{(pg_y'(x))'\right\} + \delta(x-y)\left(\frac{1}{\mathscr{W}}(v_1(x)v_0'(x) - v_1'(x)v_0(x)\right) =$$

$$\left\{(pg_y'(x))'\right\} - \delta(x-y)\left(\frac{1}{\mathscr{W}}\mathscr{W}\right) = \left\{(pg_y'(x))'\right\} - \delta(x-y)$$

Poslední vlastnost plyne z tvaru derivace výše. □

Tyto vlastnosti slouží pro zavedení Greenovy funkce pro vyšší dimense. Zbývá už jen naplnit dřívější slib a ukázat, jak pomocí tohoto řešení převést S-L úlohu na integrální rovnici.

6.3 Převedení Sturm-Liouvilleova problému na integrální rovnici

Věta 6.3.1. Uvažujme pro jednoduchost předchozí, jednorozměnou S-L úlohu s operátorem L, pak vlastní čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ a řešení $u(x) \in \mathcal{C}[0,l]$ takové, že $Lu = \lambda u$ +f, lze získat řešením integrální rovnice

$$u(x) = \lambda \int_0^l \mathcal{G}(x,y)u(y)\mathrm{d}y + \int_0^l \mathcal{G}(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

Důkaz si provede zvídavý čtenář sám. Tímto končí látka potřebná ke zkoušce, resp. látka, která má být zkoušena.