Testovací funkce

Definice: Nosič funkce
Nosičem funkce $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rozumíme uzávěr množiny všech argumentů funkce φ s nenulovým obrazem, tj:
$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}}$

Definice: Testovací funkce
Buď $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Řekneme, že f je testovací funkce, jestliže má kompaktní nosič.

Množinu všech testovacích funkcí značíme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) / \operatorname{supp} \varphi \text{ je omezený}\}$

Poznámka:
- Pro $G = G^\circ$ klademe $\mathcal{D}(G) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} \varphi \subset G\}$
- $\mathcal{D}(G)$ tvoří vektorový prostor

Definice: Zobecněná funkce
Buď $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, taková, že $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx < \infty$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
Pak tento integrál ve smyslu funkcionálu $\mathcal{D} \to \mathbb{C}$ nazýváme zobecněnou funkcí.

Značíme $f(\varphi) := (f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$

Definice: Prostor zobecněných funkcí
Množinu všech lineárních spojitých funkcionálů nad $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $(\mathcal{D}(G))$ nazýváme prostorem zobecněných funkcí, značíme $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $(\mathcal{D}'(G))$

Definice: Konvergence v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Buď $(\varphi_k)_{k\geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Řekneme, že $\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\rightarrow} \varphi$, právě když ① $\exists R>0 : \forall k \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \varphi_k \subset B(0,R)$
② $D^\alpha \varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} D^\alpha \varphi$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$

Poznámka:

Značení: Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

- $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(G)}{\rightarrow} \varphi \Rightarrow \varphi_k \overset{G}{\rightrightarrows} \varphi \Rightarrow \varphi_k \rightarrow \varphi$

- $\mathcal{D}$ je úplný vůči $\overset{\mathcal{D}}{\rightarrow}$

- $\mathcal{D}'$ je vektorový prostor

Definice: Rovnost v $\mathcal{D}'$

Buďte $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Řekneme, že $f = g$ právě tehdy když $(f, \varphi) = (g, \varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

Definice: Konvergence v $\mathcal{D}'$

Buď $(f_k)_{k\geq 1} \subset \mathcal{D}'$, $f \in \mathcal{D}'$.

Řekneme, že $f_k \rightarrow f$ v $\mathcal{D}'$, právě tehdy když $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

Definice: Lokálně integrovatelné funkce

Buď $G \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ otevřená množina.

Potom lokálně integrovatelnými funkcemi na G nazýváme množinu $L^1_{loc} = \{ f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall x_0 \in G : \exists U_{x_0} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} : \int_{U_{x_0}} |f| < \infty \}$

Poznámka:

Jestliže $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pak $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\operatorname{supp}\varphi} f(x)\varphi(x)\,dx$

Věta:

$f \in L^1_{loc} \iff \forall K \subset G$ kompaktní $\int_K |f| < \infty$

Důkaz:

$\Leftarrow$ Buď $x_0 \in G$ libovolné:

Pak $\exists K \subset G$ kompaktní: $x_0 \in K$

Buď $S \subset \mathcal{T}$ libovolné pokrytí K

Potom $\exists S' \subset S$ podpokrytí K: $\exists U \in S'$: $x_0 \in U \subset K$

$$\to \int_U |f| \le \int_K |f| < \infty$$

$\Rightarrow$ Buď $K \subset G$ libovolná kompaktní podmnožina:

Potom $\forall x_0 \in K$: $\exists U_{x_0}$: $\int_{U_{x_0}} |f| < \infty$

$$\to K \subset \bigcup_{x_0 \in K} U_{x_0} \to \exists m \in \mathbb{N}: \{x_1, \dots, x_m\} \subset K: K \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{x_k}$$

$$\to \int_K |f| \le \int_{\bigcup_{k=1}^{m} U_{x_k}} |f| \le \sum_{k=1}^{m} \int_{U_{x_k}} |f| < \infty$$

Důsledek:

Buď $f \in L^1(G)$ libovolné.

Potom $(f, \varphi) = \int_{\operatorname{supp}\varphi} f(x)\varphi(x)\,dx < \infty$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$

Poznámka:

Souvislost mezi klasickými a zobecněnými funkcemi:

Lze L^1_{loc} vnořit do $\mathcal{D}'$?

Buď $f \in L^1_{loc}$ libovolné.

Označme $\Phi: L^1_{loc} \to \mathcal{D}'$ $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

Věta: $\Phi(L^1_{loc}) \subset \mathcal{D}'$

Důkaz

Buď $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ libovolná.

Chceme ukázat, že $\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ je lineární spojitý funkcionál

Označme $\tilde{f} := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot dx$:

- $\tilde{f}$ je funkcionál ✓

- $\tilde{f}$ je lineární:

Buďte $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ libovolné:

$$(\tilde{f}, \varphi + \alpha\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\varphi(x) + \alpha\psi(x))\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\alpha\psi(x)\,dx =$$

$$= (\tilde{f}, \varphi) + \alpha(\tilde{f}, \psi)$$

- $\tilde{f}$ je spojitý:

Buď $(\varphi_k)_{k=1} \subset \mathcal{D}$, $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \in \mathcal{D}$ libovolné

Nechť BÚNO $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ ($\mathcal{D}$ je vektorový prostor)

$$\lim_{k\to+\infty} (\tilde{f}, \varphi_k) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_k(x)\,dx \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x)\,dx = 0$$

(*) Záměna limity a integrálu:

$$|f(x)\varphi_k(x)| \leq |f(x) K_k| \leq |f(x)| K$$

$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \Rightarrow \exists R > 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N} \;\; \operatorname{supp} \varphi_k \subset B(0,R)$

$\Rightarrow \exists K > 0 \quad K \geq \sup\{K_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $K_k = \max_{x \in B(0,R)} |\varphi_k|$

Definice: Regulární zobecněné funkce D'_{reg}
Nechť $\tilde{f} \in D'$ je zobecněná funkce.
Řekneme, že $\tilde{f} \in D'_{reg}$, $\tilde{f}$ je regulární zobecněná funkce,
jestliže existuje $f \in L^1_{loc}$: $(\tilde{f}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$, $\forall \varphi \in D$.

Funkce, které nejsou regulární nazýváme singulární.

Lemma:
Skalární součin hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ je spojitý.

Důkaz:
Buď $(a_n) \subset \mathcal{H}$, $a_n \to a$ libovolná; $b \in \mathcal{H}$ libovolné

$$\lim_{n\to+\infty} \langle a_n | b \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle a_n - a + a | b \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle a_n - a | b \rangle + \langle a | b \rangle = \langle a | b \rangle$$

$\cdot\ |\langle a_n - a | b \rangle| \le \|a_n - a\| \, \|b\| \to 0$

Lemma:
Nechť $\mathcal{H}$ je hilbertův prostor, $M \subset \mathcal{H}$. $\overline{M} = \mathcal{H}$, $a \in \mathcal{H}$.
Jestliže $\langle a | b \rangle = 0$, $\forall b \in M$, potom $a = 0$.

Důkaz:
$a = 0 \iff \forall h \in \mathcal{H}: \langle a | h \rangle = 0$
Buď $h \in \mathcal{H}$ libovolné:

Potom $\exists (a_n) \subset M: a_n \to h$:

$\Rightarrow \langle a | h \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle a | a_n \rangle = 0$

Věta: $\forall p \in \mathbb{N}$: $\overline{D} = L^p$

Věta:
Nechť $f \in L^1_{loc}(G)$.
Potom $\tilde{f} = 0 \iff f = 0$ s.v. na G.

Důkaz:
$\Leftarrow$ triviální

$\Rightarrow$ jen pro $f \in L^2(G)$
Nechť $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}$
Pak $\overline{\mathcal{D}} = L^p \xrightarrow{\text{Lemma}} f = 0$ s.v. na $\mathbb{R}^n$

Důsledek: $\Phi : L^1_{loc} \to \mathcal{D}'$ je prosté

Důkaz:
Nechť $\tilde{f} = \tilde{g}, \forall \varphi \in \mathcal{D}$:

$\to \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^n} (f-g)(x)\varphi(x)\,dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}$

$\to f - g = 0$ s.v. na $\mathbb{R}^n \to f = g$ s.v. na $\mathbb{R}^n$

Tvrzení: $\delta \in \mathcal{D}' \setminus \mathcal{D}_{reg}$

Důkaz:
(sporem)
Nechť $\delta \in \mathcal{D}'$:
Pak $\exists f \in L^1_{loc} : \forall \varphi \in \mathcal{D} : \varphi(0) = (\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$

Buď $\varphi \in \mathcal{D}$ libovolná, $\tau \in C^\infty; \tau(0) = 0$
Potom $\tau\varphi \in \mathcal{D}$

$\to 0 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\tau(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}$

$\to f\tau = 0$ s.v. na $\mathbb{R}^n$, volba $\tau(x) := x$ $f = 0$ s.v. na $\mathbb{R}^n$

Základní operace v $\mathcal{D}'$

Poznámka:
Chceme zavést operace v $\mathcal{D}'$ tak, aby byly invariantní vůči Φ.

Definice: Derivace v $\mathcal{D}'$
Pro $f \in \mathcal{D}'$ klademe $(D^\alpha f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi)$

Věta:
$\forall f \in \mathcal{D}' : f' \in \mathcal{D}'$

Důkaz:
Stačí ukázat, že f' je lineární spojitý funkcionál nad $\mathcal{D}$:

- f' funkcionál nad $\mathcal{D}$ ✓
- f' je lineární:
  Buďte $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ libovolné:

$$(f', \varphi + \alpha\psi) = -(f, \varphi' + \alpha\psi') = -(f, \varphi') - \alpha(f, \psi') = (f', \varphi) + \alpha(f', \psi)$$

- f' spojitý:
  Buď $(\varphi_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}$, $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ libovolná

$$\lim_{k \to +\infty} (f', \varphi_k) = -\lim_{k \to +\infty} (f, \varphi_k') \overset{f \in \mathcal{D}'}{=} 0$$

Důsledek:
Každá $f \in \mathcal{D}'$ má všechny derivace

Definice: Regulární lineární transformace v $\mathcal{D}'$

Buďte $f \in \mathcal{D}'$, $\mathbb{A} \in GL(\mathbb{R}, n)$, $b \in \mathbb{R}^n$.
Pak klademe: $(f(\mathbb{A}x+b), \varphi(x)) := (f(y), \varphi(\mathbb{A}^{-1}(y-b)))\dfrac{1}{|\det \mathbb{A}|}$

Věta:
$\forall f \in \mathcal{D}'\ \forall \mathbb{A} \in GL(\mathbb{R}, n), b \in \mathbb{R}^n:\ f(\mathbb{A}x+b) \in \mathcal{D}'$

Důkaz:
Buďte $f \in \mathcal{D}'$, $\mathbb{A} \in GL(\mathbb{R},n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ libovolná:

- $f(\mathbb{A}x+b)$ je funkcionál nad $\mathcal{D}$ ✓

- $f(\mathbb{A}x+b)$ je lineární:
  Buďte $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ libovolné:

$\uparrow$ $|\det \mathbb{A}|$

$$(f(\mathbb{A}x+b), \varphi(x) + \alpha\psi(x)) = (f(\mathbb{A}x+b), (\varphi+\alpha\psi)(x)) =$$

$$= (f(y), (\varphi+\alpha\psi)(\mathbb{A}^{-1}(y-b))) =$$

$$= (f(y), \varphi(\mathbb{A}^{-1}(y-b))) + \alpha(f(y), \psi(\mathbb{A}^{-1}(y-b))) =$$

$$= \left[(f(\mathbb{A}x+b), \varphi(x)) + \alpha(f(\mathbb{A}x+b), \psi(x))\right] |\det \mathbb{A}|$$

- $f(\mathbb{A}x+b)$ je spojité:
  Buď $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$, $\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$ libovolná:

$$\lim_{k\to+\infty} (f(\mathbb{A}x+b), \varphi_k) \overset{\frac{1}{|\det \mathbb{A}|}}{=} \lim_{k\to+\infty} (f(y), \varphi_k(\mathbb{A}^{-1}(y-b))) = (f(y), \lim_{k\to+\infty} \varphi_k(\mathbb{A}^{-1}(y-b)))\frac{1}{|\det \mathbb{A}|} =$$

$$= 0, \text{ neboť } \varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$$

Definice: Násobení hladkou funkcí

Pro $f', g \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{D}'_{reg}$, $g \in C^\infty$ klademe:

$$(f' \cdot g, \varphi) := (f', g\varphi)$$

Věta:

$\forall f \in \mathcal{D}', \forall g \in \mathcal{D}'_{reg} \wedge g \in C^\infty: \quad f' \cdot g \in \mathcal{D}'$

Důkaz:

Buďte f', g libovolná taková:

- $f' g$ funkcionál nad $\mathcal{D}$:

$\forall \varphi \in \mathcal{D}: (f' g, \varphi) = (f', \underbrace{g \cdot \varphi}_{\in \mathcal{D}}) \in \mathbb{C}$ ✓

- $f' g$ lineární:

Pro $\varphi, \psi \in \mathcal{D}, \alpha \in \mathbb{C}$, platí

$$(f' g, \varphi + \alpha \psi) = (f', g(\varphi + \alpha\psi)) = (f', g\varphi) + \alpha (f', g\psi) =$$

$$= (f' g, \varphi) + \alpha (f' g, \psi)$$

Definice: Konvergence v $\mathcal{D}'$

Buďte $(f_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}'$, $f \in \mathcal{D}'$.

Řekneme, že $f_k \to f'$, konvergují k f' v $\mathcal{D}'$, jestliže číselná posloupnost (f_k, φ) konverguje k (f', φ), $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

Věta: Záměna limity a derivace v $\mathcal{D}'$

$\forall (f_n) \subset \mathcal{D}; f_n \to f \in \mathcal{D}: \quad f_n' \to f'$ v $\mathcal{D}'$

Důkaz:

$$(f', \varphi) = ((\lim_{n\to+\infty} f_n)', \varphi) = -(\lim_{n\to+\infty} f_n, \varphi') = -\lim_{n\to+\infty} (f_n, \varphi') = \lim_{n\to+\infty} (f_n', \varphi) =$$

$$= (\lim_{n\to+\infty} f_n', \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Věta: Spojitost operací v $\mathcal{D}'$

Při splnění příslušných předpokladů platí:

① $f_n + g_n \to f + g$

② $a \cdot f_n \to a \cdot f$

③ $f_n' \to f'$

④ $f_n(Ax+b) \to f(Ax+b)$

Důkaz:

① $(\lim_{n\to+\infty}(f_n+g_n), \varphi) = \lim_{n\to+\infty}(f_n+g_n, \varphi) = \lim_{n\to+\infty}[(f_n,\varphi)+(g_n,\varphi)] = (f+g, \varphi)$

② $(\lim_{n\to+\infty} a f_n, \varphi) = \lim_{n\to+\infty}(a f_n, \varphi) = \lim_{n\to+\infty}(f_n, a\varphi) = (f, a\varphi) = (a f, \varphi)$

③ věta o záměně limity a derivace

④ $(\lim_{n\to+\infty} f_n(Ax+b), \varphi) = \lim_{n\to+\infty}(f_n(Ax+b), \varphi) = \lim_{n\to+\infty}(f_n(y), \varphi(A^{-1}(y-b))) =$

$$= (f(y), \varphi(A^{-1}(y-b))) = (f(Ax+b), \varphi)$$

Věta: O derivaci složené funkce

Pro $f \in \mathcal{D}'$, $A \in GL(n,\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ platí: $[f(Ax+b)]' = A \cdot f'(Ax+b)$

Důkaz:

$([f(Ax+b)]', \varphi(x)) = -(f(Ax+b), \varphi'(x)) = -\frac{1}{|A|}(f(y), \varphi'(A^{-1}(y-b))) =$

$$\overset{(*)}{=} \frac{A}{|A|}(f'(y), \varphi(A^{-1}(y-b))) = A(f'(Ax+b), \varphi(x))$$

$(*)$: $\varphi'(A^{-1}(y-b)) = \frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x=A^{-1}(y-b)} \underbrace{\frac{dx}{dy}}_{A^{-1}} = \frac{d\varphi}{dy}$

Věta: Leibnitzovo pravidlo

Pro $f, g \in \mathcal{D}'$, $g \in C^\infty$ platí: $(fg)' = f'g + fg'$

Důkaz:

$(f'g, \varphi) = (f', g\varphi) = -(f, g'\varphi + g\varphi') = -(f, g'\varphi) - (f, g\varphi') =$

$= (-fg', \varphi) + ((fg)', \varphi)$

$\rightarrow ((fg)', \varphi) = (f'g + fg', \varphi)$

Věta: Záměnost parciálních derivací

Pro $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ platí: $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} f = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} f$

Důkaz:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} f, \varphi\right) = \left(f, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \varphi\right) = \left(f, \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} \varphi\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} f, \varphi\right)$$

Věta: Derivace po částech C^1 funkce v $\mathcal{D}'$

Buď $M \subset \mathbb{R}$ nejvýše spočetná množina bez hromadného bodu. Nechť $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus M)$ a nechť $\forall x \in M$ existují konečné jednostranné limity klasické funkce f, $\{f'\} \in L^1_{loc}$.

Potom platí:

$$f' = \{f'\} + \sum_{x_0 \in M} [f]_{x_0} \delta(x - x_0), \quad [f]_{x_0} = \lim_{x_0+} f - \lim_{x_0-} f$$

Důkaz:

Uvažujme BÚNO $M = \{x_0\}$.

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{x_0} + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,dx - [f(x)\varphi(x)]_{x_0}^{+\infty} + \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \varphi(x_0)\left(\lim_{x \to x_0+} f(x) - \lim_{x \to x_0-} f(x)\right) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= (\{f'\}, \varphi) + ([f]_{x_0} \delta(x - x_0), \varphi)$$

Věta: O derivaci

Buď $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Pak platí: $f'(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$

Důkaz:

$\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \varphi\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \varphi\right) =$

$= \lim_{n \to +\infty} n\left[(f(x+\tfrac{1}{n}), \varphi) - (f(x), \varphi)\right] =$

$= \lim_{n \to +\infty} \left[\left(f(x), \frac{\varphi(x-\frac{1}{n}) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}}\right)\right] \stackrel{?}{=} (f(x), -\varphi'(x))$

? Stačí ukázat, že $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} -\varphi'(x)$,

$\psi_n(x) = \frac{\varphi(x-\frac{1}{n}) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}}$

① $\exists R > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}: \operatorname{supp} \psi_n \subset B(0,R)$:

$\operatorname{supp} \varphi \subset B(0,R) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \operatorname{supp} \psi_n \subset B(0,R+1)$ ✓

② $\forall k \in \mathbb{N}_0: \psi_n^{(k)} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} -\varphi^{(k+1)}$

$\cdot\ k = 0: \psi_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} -\varphi^{(k+1)} \Leftrightarrow \sigma_n \to 0$

$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_n(x) + \varphi'(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\varphi(x-\frac{1}{n}) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}} + \varphi'(x)\right| =$

$= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi'(x)\frac{1}{n} + \varphi''(\xi)\frac{1}{2n^2} - \varphi(x)}{\frac{1}{n}} + \varphi'(x)\right| =$

$= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\varphi''(\xi)}{2n} \right| \leq \sup_{\xi \in \operatorname{supp} \varphi} \left| \frac{\varphi''(\xi)}{2n} \right| \leq \frac{k}{2n} \to 0$

pro $k \in \mathbb{N}$ stejně

Definice: $\mathcal{N}(f)$

Buď $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $G \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Řekneme, že f je nulová na G, jestliže $(f, \varphi) = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$

Pro každou $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ existuje největší množina $G \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ s touto vlastností.

Tuto maximální množinu značíme $\mathcal{N}(f)$.

Definice: Nosič zobecněné funkce

Buď $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Potom nosičem zobecněné funkce f rozumíme

množinu $\operatorname{supp} f := \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}(f)$.

Věta:

Buď $\tilde{f} \in \mathcal{D}'_{reg}(\mathbb{R})$, f po částech C.

Potom $\operatorname{supp} \tilde{f} = \operatorname{supp} f$.

Důkaz:

$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$

$\operatorname{supp} \tilde{f} = \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}(f)$:

$\mathcal{N}(f)$:

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \overset{!}{=} 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$$

$\Leftrightarrow f = 0$ s. v. na $G \Rightarrow \mathcal{N}(f) = \mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} f$

$\operatorname{supp} \tilde{f} = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} f) = \operatorname{supp} f$

Věta: O řešení rovnice $x^m f = 0$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Buď $m \in \mathbb{N}$.

Potom rovnice $x^m f = 0$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ má řešení tvaru

$$f = \sum_{n=0}^{m-1} c_n \delta^{(n)}, \; c_n \in \mathbb{C}$$

Důkaz:

Dokazujeme: $x^m f = 0 \iff f = \sum_{n=0}^{m-1} c_n \delta^{(n)}$

Pouze pro $m=1$ (1. indukční krok), dále → štenicek

$\Leftarrow$ $f = c\delta$: $(cx\delta, \varphi) = (c\delta, x\varphi) = 0$ ✓

$\Rightarrow$ Nechť platí $(xf, \varphi) = (f, x\varphi) = 0, \; \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Rozlišme dva případy: a) $\varphi(0) = 0$

b) $\varphi(0) \neq 0$

a) $\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)\,dt = \varphi(0) + x \underbrace{\int_0^1 \varphi'(x\tau)\,d\tau}_{\psi \in C^\infty} = x\psi(x)$

$\to \varphi(x) = x\psi(x) \to \forall \varphi \in \mathcal{D}, \varphi(0) = 0 : \exists \psi \in \mathcal{D} : \varphi(x) = x\psi(x) \to (f, \varphi) = 0$

b) jistě existuje $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\eta(0) = 1$

pak funkce $\psi = \varphi - \eta\varphi(0)$ splňuje a)

$\to (f, \varphi - \varphi(0)\eta) = (f, \varphi) - \varphi(0)(f, \eta) = 0$

$\to (f, \varphi) = \varphi(0)(f, \eta) = (\delta, \varphi)\underbrace{(f, \eta)}_{\in \mathbb{C}}$

Věta: Uzavřenost $\mathcal{D}'$

Buď $(f_n)_{n=1} \subset \mathcal{D}'(G)$ a nechť $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ existuje $\lim_{n\to+\infty} (f_n, \varphi) \in \mathbb{C}$

Potom $(f, \varphi) := \lim_{n\to+\infty} (f_n, \varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ definuje zobecněnou funkci $f \in \mathcal{D}'$

Důkaz:

- $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$: $\lim_{n\to+\infty} (f_n, \varphi) \in \mathbb{C} \to f$ je funkcionál nad $\mathcal{D}(G)$

- f je lineární:

Buďte $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(G)$, $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$(f, \varphi + \alpha\psi) = \lim_{n\to+\infty} (f_n, \varphi + \alpha\psi) = \lim_{n\to+\infty} \left[(f_n, \varphi) + \alpha (f_n, \psi)\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (f_n, \varphi) + \alpha \lim_{n\to+\infty} (f_n, \psi) = (f, \varphi) + \alpha (f, \psi)$$

- f je spojité

Buď $(\varphi_k)_{k=1} \subset \mathcal{D}(G)$, $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ libovolná

$$\lim_{k\to+\infty} (f, \varphi_k) = \lim_{k\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} (f_n, \varphi_k) \to 0$$

Tensorový součin

Definice Tensorový součin

Buďte $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$.
Pak tensorovým součinem funkcí f, g rozumíme:

$$(f(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)) := (f(x), (g(y), \varphi(x,y)))$$

Věta: Vlastnosti tensorového součinu

1. Komutativita
2. Linearita
3. Asociativita
4. Spojitost
5. Derivace a tensorový součin
6. Násobení hladkou funkcí
7. Posunutí v argumentu

Důkaz:

1. Komutativita:

$\forall f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$: $f \otimes g = g \otimes f$

Uvažujme $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ tvaru $\varphi(x,y) = \varphi_x(x)\varphi_y(y)$

$$(f(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)) = (f(x) \otimes g(y), \varphi_x(x) \cdot \varphi_y(y)) = (f(x), (g(y), \varphi_x(x)\,\varphi_y(y))) =$$

$$= (f(x), \varphi_x(x)(g(y), \varphi_y(y))) = (f(x), \varphi_x(x))(g(y), \varphi_y(y)) =$$

$$= (g(y), \varphi_y(y)(f(x), \varphi_x(x))) = (g(y), (f(x), \varphi_x(x)\,\varphi_y(y))) =$$

$$= (g(y) \otimes f(x), \varphi(x,y))$$

② Linearita

$\forall f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m), \forall \alpha \in \mathbb{C}: (f+\alpha g)(x) \otimes h(y) = f(x) \otimes h(y) + \alpha g(x) \otimes h(y)$

$$((f(x)+\alpha g(x)) \otimes h(y), \varphi(x,y)) = (f(x)+\alpha g(x), (h(y), \varphi(x,y))) =$$

$$= (f(x), (h(y), \varphi(x,y))) + \alpha (g(x), (h(y), \varphi(x,y))) =$$

$$= ((f \otimes h)(x,y) + \alpha (g \otimes h)(x,y), \varphi(x,y))$$

→ Z komutativity plyne linearita v druhém argumentu

③ Asociativita

$\forall f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m), h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k): (f(x) \otimes g(y)) \otimes h(z) = f(x) \otimes (g(y) \otimes h(z))$

$$((f(x) \otimes g(y)) \otimes h(z), \varphi(x,y,z)) = (f(x) \otimes g(y), (h(z), \varphi(x,y,z))) =$$

$$= (f(x), (g(y), (h(z), \varphi(x,y,z)))) =$$

$$= (f(x), (g(y) \otimes h(z), \varphi(x,y,z))) =$$

$$= (f(x) \otimes (g(y) \otimes h(z)), \varphi(x,y,z))$$

④ Spojitost

$\forall (f_k) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), f_k \to f, \forall g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m): f_k \otimes g \to f \otimes g$

$$\lim_{k \to +\infty} (f_k(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)) = \lim_{k \to +\infty} (f_k(x), (g(y), \varphi(x,y))) = (f(x), (g(y), \varphi(x,y))) =$$

$$= (f(x) \otimes g(y), \varphi(x,y))$$

→ Spojitost v druhém argumentu plyne z komutativity

⑤ Derivace a tensorový součin

$\forall f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : D_x^\alpha (f(x) \otimes g(y)) = (D_x^\alpha f(x)) \otimes g(y)$

$$(D_x^\alpha (f(x) \otimes g(y)), \varphi(x,y)) = (-1)^{|\alpha|} (f(x) \otimes g(y), D_x^\alpha \varphi(x,y)) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} (f(x), (g(y), D_x^\alpha \varphi(x,y))) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} (f(x), D_x^\alpha (g(y), \varphi(x,y))) =$$

$$= (D_x^\alpha f(x), (g(y), \varphi(x,y))) =$$

$$= ((D_x^\alpha f(x)) \otimes g(y), \varphi(x,y))$$

⑥ Násobení hladkou funkcí

$\forall f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \forall g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)\ \forall a \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : a(x)(f(x) \otimes g(y)) = (a(x) f(x)) \otimes g(y)$

$$(a(x)(f(x) \otimes g(y)), \varphi(x,y)) = (f(x) \otimes g(y), a(x)\varphi(x,y)) = (f(x), (g(y), a(x)\varphi(x,y))) =$$

$$= (f(x), a(x)(g(y), \varphi(x,y))) = (a(x) f(x), (g(y), \varphi(x,y)))$$

$$= (a(x) f(x)) \otimes g(y), \varphi(x,y))$$

⑦ Posunutí v argumentu

$\forall f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \forall g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m), \forall b \in \mathbb{R}^n : (f \otimes g)(x+b, y) = f(x+b) \otimes g(y)$

$$((f \otimes g)(x+b,y), \varphi(x,y)) = (f(x) \otimes g(y), \varphi(x-b,y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x-b,y))) =$$

$$= (f(x+b), (g(y), \varphi(x,y))) =$$

$$= (f(x+b) \otimes g(y), \varphi(x,y))$$

Konvoluce

Definice: Konvoluce (na $\mathcal{D}$)

Nechť $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ jsou testovací funkce.
Potom konvolucí φ a ψ: $(\varphi * \psi)(x)$ rozumíme:

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x-y)\,dy$$

Poznámka:
Předpoklad testovacích funkcí je zbytečně silný.
Konvoluce je dobře definovaná operace nad $L^1 \times L^1$:

Pro $f, g \in L^1$ platí:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f*g|(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} dy\, |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} dx\, |g(x-y)| \leq \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty \ \checkmark$$

Věta: Vlastnosti konvoluce (nad $\mathcal{D}$)

1. Komutativita
2. Asociativita
3. Posunutí v argumentu
4. Záměna derivace a konvoluce

Důkaz:

1. Komutativita

$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\varphi * \psi = \psi * \varphi$

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x-y)\,dy = \left| \begin{matrix} x-y =: z \\ |J| = 1 \end{matrix} \right| = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)\varphi(x-z)\,dz =$$

$$= (\psi * \varphi)(x)$$

② Asociativita:

$\forall \varphi, \psi, \mathcal{J} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\varphi * (\psi * \mathcal{J}) = (\varphi * \psi) * \mathcal{J}$

$$((\varphi * \psi) * \mathcal{J})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi * \psi)(y)\, \mathcal{J}(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\psi(y-z)\, dz\right] \mathcal{J}(x-y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} dz\, \varphi(z)\psi(y-z)\, \mathcal{J}(x-y)$$

$$(\varphi * (\psi * \mathcal{J}))(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, (\psi * \mathcal{J})(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(z)\, \mathcal{J}(x-y-z)\, dz =$$

$$= \left| \begin{matrix} y + z = t \\ |J| = 1 \end{matrix} \right| = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} dt\, \varphi(y)\psi(t-y)\, \mathcal{J}(x-t)$$

③ Posunutí v argumentu:

$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$: $(\varphi * \psi)(x-\alpha) = \varphi(x-\alpha) * \psi(x) = \varphi(x) * \psi(x-\alpha)$

$$(\varphi * \psi)(x-\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x-\alpha-y)\, dy = \left| \psi(x-\alpha) =: h_\alpha(x) \right| =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, h_\alpha(x-y)\, dy = (\varphi * h_\alpha)(x) = (h_\alpha * \varphi)(x)$$

④ Záměna derivace a konvoluce

$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$: $D^\alpha(\varphi * \psi)(x) = (D^\alpha \varphi * \psi)(x) = (\varphi * D^\alpha \psi)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Pro $n = 1, \alpha = 1$

$$\frac{d}{dx}(\varphi * \psi)(x) = \frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\psi(x-y)\, dy \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\psi'(x-y)\, dy =$$

Komutativita $\longrightarrow = \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\, \varphi'(x-y)\, dy$

? Záměna derivace a integrálu:

$|\varphi(y)\psi'(x-y)| \leq |\varphi(y)| K$ ✓

$K = \max\{\psi(z) \mid z \in \langle -|x| + m_1, m_2 + |x| \rangle\}$, kde $\langle m_1, m_2 \rangle = \operatorname{supp} \psi$

Věta: $*: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$

Buďte $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, potom $\varphi * \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Důkaz:

- $\varphi * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

plyne z věty o záměně derivace a konvoluce

- Kompaktní nosič

$$\mathrm{supp}(\varphi * \psi) = \overline{\mathbb{R}^n \setminus N}$$

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\varphi * \psi)(x) = 0\}$$

$$(\varphi * \psi)(x) = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \psi(x-y)\, dy = \int_{\mathrm{supp}\,\varphi} \varphi(y)\, \psi(x-y)\, dy$$

$\Leftarrow$ $\psi(x-y) = 0$, $\forall y \in \mathrm{supp}\,\varphi =: \langle a, b\rangle$, $\mathrm{supp}\,\psi =: \langle c, d\rangle$

~~$\Leftrightarrow x \notin \mathrm{supp}\,\varphi$~~

~~$\mathrm{supp}(\varphi * \psi) = \langle 2a, 2b\rangle$~~

$\mathrm{supp}(\varphi * \psi) \in \langle -|c| - |b|, |b| + |d| \rangle$

~~Ze symetrie (komutativity) $\Leftrightarrow x \notin \mathrm{supp}\,\psi$~~

~~$\Rightarrow \mathrm{supp}(\varphi * \psi) = \mathrm{supp}\,\varphi \cap \mathrm{supp}\,\psi$~~

Poznámka:

- Označme pro $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$): $\varphi(-x) =: \check{\varphi}(x)$

- Skalární součin na $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$:

$$\langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

Lemma:

Buďte $\varphi, \psi, \vartheta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Potom platí: ① $\langle \varphi | \psi \rangle = (\varphi * \psi^{-})(0) = (\psi * \varphi^{-})(0)$

② $\langle \varphi * \vartheta | \psi \rangle = \langle \varphi | \vartheta^{-} * \psi \rangle$

Důkaz:

① jasné ✓

② $\langle \varphi * \vartheta | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi * \vartheta)(x) \overline{\psi(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \vartheta(x-y) \overline{\psi(x)}\, dy =$

$\langle \varphi | \vartheta^{-} * \psi \rangle \overset{*}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) (\vartheta^{-} * \psi)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \vartheta(-y) \psi(x-y)\, dy =$

$= \left| \begin{matrix} x-y=t \\ |J|=1 \end{matrix} \right| = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}^n} dt\, \varphi(x) \vartheta(t-x) \psi(t)$ ✓

Definice Konvoluce distribuce a zobecněné funkce

Buďte $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$.

Potom klademe: $(f * \varphi)(x) = (f(y), \varphi(x-y)) = (f(x-y), \varphi(y))$

Poznámka:

- Pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ je $(f * \varphi)(x)$ klasická funkce
- Je-li $\tilde{f} \in \mathcal{D}'_{reg}$, pak $(\tilde{f} * \varphi)(x) = (f * \varphi)(x)$
- $(f, \varphi) = (f * \varphi^{-})(0)$
- Pro $\delta \in \mathcal{D}'$ platí:

$(\delta * \varphi)(x) = (\delta(y), \varphi(x-y)) = \varphi(x), \ \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Věta: Vyhlazovací vlastnost konvoluce

Buďte $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$.

Potom $(f * \varphi) \in C^\infty$.

Pokud je navíc $\operatorname{supp} f$ kompaktní, pak $(f * \varphi) \in \mathcal{D}$.

Důkaz.

Lemma 1:

Buďte $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$, potom $f * \varphi$ je spojitá funkce.

Důkaz:

Buď $(x_n) \subset \mathbb{R}^m$, $x_n \to x \in \mathbb{R}^m$ libovolná konvergentní posloupnost.

Chceme ukázat, že $(f * \varphi)(x_n) \to (f * \varphi)(x)$:

$$\lim_{n \to +\infty} (f * \varphi)(x_n) = \lim_{n \to +\infty} (f(y), \varphi(x_n - y)) \overset{?}{=} (f(y), \lim_{n \to +\infty} \varphi(x_n - y)) =$$

$$= (f(y), \varphi(x - y)) = (f * \varphi)(x)$$

?: Musíme ověřit, že $\varphi(x_n - y) \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi(x - y) \iff \varphi_n^x \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi^x$

① $\exists R > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}: \operatorname{supp} \varphi_n^x \subset B(0, R)$:

$x_n \to x \iff \exists n_0 \; \forall n > n_0: \|x_n - x\| < 1$

$$\varphi \in \mathcal{D} \to \operatorname{supp} \varphi \subset B(0, R) \to \operatorname{supp} \varphi^x \subset B(0, R + x) \to \operatorname{supp} \varphi_n^x \subset B(0, R + 1 + x)$$

② $\forall k \in \mathbb{N}_0 \; (\varphi_n^x)^{(k)} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} (\varphi^x)^{(k)}$

$$(\varphi_n^x)^{(k)} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} (\varphi^x)^{(k)} \iff \sigma_n^{(k)} \to 0$$

$$\sigma_n^{(k)} = \sup_{y \in \mathbb{R}} |(\varphi_n^x)^{(k)}(x_n - y) - (\varphi^x)^{(k)}(x - y)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |(\varphi^x)^{(k+1)}(\xi)| |x_n - x| \le K |x_n - x| \to 0$$

Lemma 2:

Buď $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$, potom $(f * \varphi)' = f * \varphi' = f' * \varphi$

Důkaz:

z Lemma 1 plyne, že $(f * \varphi)$ je spojitá:

$$(f * \varphi)'(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{(f * \varphi)(x - \frac{1}{n}) - (f * \varphi)(x)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(f(x + \frac{1}{n} - y), \varphi(y)) - (f(x-y), \varphi(y))}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f(x + \frac{1}{n} - y) - f(x-y)}{\frac{1}{n}}, \varphi(y) \right) =$$

$$= \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x + \frac{1}{n} - y) - f(x-y)}{\frac{1}{n}}, \varphi(y) \right) =$$

$$= (f'(x-y), \varphi(y)) = (f(x-y), \varphi'(y)) =$$

$$= (f' * \varphi)(x) = (f * \varphi')(x)$$

Důsledek:

Opakovaným použitím ~~..~~ Lemma 1 a Lemma 2 získáme tvrzení věty

- Nechť f má kompaktní nosič:

$\mathrm{supp}\, f = \langle a, b \rangle$

$\mathrm{supp}\, \varphi = \langle c, d \rangle$

$\Rightarrow \mathrm{supp}(f * \varphi) \subset \langle -|a| - |c|, |b| + |d| \rangle$

Věta: Asociativita

Buďte $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, pak $(f' * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi)$

Důkaz:

$n = 1$:

Lemma:

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x - \frac{m}{n}\right) \psi\left(\frac{m}{n}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi * \psi$$

Důkaz:

① $\exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \Gamma_n \subset B(0, R)$

$\operatorname{supp} \varphi$, $\operatorname{supp} \psi$ jsou omezené $\Rightarrow$ suma je konečná

② $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \Gamma_n^{(k)} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} (\varphi * \psi)^{(k)}$

ψ, φ stejnoměrně spojité $\Rightarrow \psi^{(k)}, \varphi^{(k)}$ stejnoměrně spojité

$\Rightarrow \Gamma_n^{(k)} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} (\varphi * \psi)^{(k)}$

$$(f' * (\varphi * \psi))(x) = (f'(y), (\varphi * \psi)(x-y)) = (f'(y), \lim_{n \to +\infty} \Gamma_n(x-y)) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} (f'(y), \Gamma_n(x-y)) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(f'(y), \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x - y - \frac{m}{n}\right) \psi\left(\frac{m}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(f'(y), \varphi\left(x - y - \frac{m}{n}\right) \psi\left(\frac{m}{n}\right)\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dz \, (f'(y), \varphi(x-y-z) \psi(z)) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dz \, \psi(z) (f'(y), \varphi(x-y-z)) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dz \, \psi(z) (f' * \varphi)(x-z) = ((f' * \varphi) * \psi)(x)$$

Věta: Spojitost konvoluce:
Buď $f \in \mathcal{D}'$ s kompaktním nosičem, $(\varphi_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{D}$.
Potom $\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\rightrightarrows} \varphi \Rightarrow f * \varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\rightrightarrows} f * \varphi$

Bez důkazu

Věta: Přibližné identity
Buď $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi \geq 0$ a $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$.
Označme $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Potom $\forall \psi \in \mathcal{D}$: $\varphi_n * \psi \overset{\mathcal{D}}{\rightrightarrows} \psi$

Důkaz:
① $\exists R > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $\operatorname{supp} \varphi_n * \psi \subset B(0,R)$

$\operatorname{supp} \varphi_n = \frac{1}{n} \operatorname{supp} \varphi = \frac{1}{n}\langle a,b \rangle$
$\operatorname{supp} \psi = \langle c,d \rangle$

$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$: $\operatorname{supp} \varphi_n * \psi \subset \langle -|a| - |c|, |b| + |d| \rangle$ ✓

② $\forall k \in \mathbb{N}_0$: $(\varphi_n * \psi)^{(k)} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \psi^{(k)}$

$(\varphi_n * \psi)^{(k)} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \psi^{(k)} \Leftrightarrow \sigma_n^{(k)} \to 0$

$\sigma_n^{(k)} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |(\varphi_n * \psi)^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)| =$

$= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) \psi^{(k)}(x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) \psi^{(k)}(x)\,dy \right| =$

$= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) [\psi^{(k)}(x-y) - \psi^{(k)}(x)]\,dy \right| =$

$= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) \psi^{(k+1)}(\xi) y\,dy \right| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) y\,dy \right| K \leq K \frac{1}{n} \to 0$

Poznámka: φ_n se nazývají přibližné identity

Věta: Aproximace zobecněných funkcí

Každá $f \in \mathcal{D}'$ je limitou nějaké $(\varphi_n) \subset C^\infty$ ve smyslu konvergence v $\mathcal{D}'$.

Pokud má navíc f kompaktní nosič, pak lze volit $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}$: $\forall \psi \in \mathcal{D}$: $\varphi_n * \psi \overset{\mathcal{D}}{\to} f * \psi$

Důkaz:

Lemma

$\forall f \in \mathcal{D}', \varphi, \psi \in \mathcal{D}$ $(f * \varphi, \psi) = (f, \varphi^- * \psi)$

Důkaz:

$$(f * \varphi, \psi) = ((f * \varphi) * \psi^-)(0) = (f * (\varphi * \psi^-))(0) =$$

$$= (f * (\varphi^- * \psi)^-)(0) = (f, \varphi^- * \psi)$$

Označme η_n přibližné identity z předchozí věty.

$\varphi_n = f * \eta_n^- \in C^\infty$ (navíc jestli supp f je kompaktní $\Rightarrow \varphi_n \in \mathcal{D}$

$$(\lim_{n\to+\infty} \varphi_n, \psi) = \lim_{n\to+\infty} (\varphi_n, \psi) = \lim_{n\to+\infty} (f * \eta_n^-, \psi) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (f, \eta_n * \psi) \overset{\#}{=} (f, \psi)$$

$\#$ $\eta_n * \psi \to \psi$

Navíc:

$$\varphi_n * \psi = (f * \eta_n^-) * \psi = f * (\eta_n^- * \psi) \overset{\mathcal{D}}{\to} f * \psi$$

věta o spojitosti konvoluce

Konvoluce zobecněných funkcí

Definice: Konvoluce zobecněných funkcí
Buďte $f, g \in D'$, $\operatorname{supp} f$ kompaktní
Pak klademe: $(g * f, \varphi) := (g, \bar{f} * \varphi)$

Poznámka:
- Závisí na pořadí
- $g * f \in D'$

Věta: Vlastnost konvoluce v D'
Buďte $f, g, h \in D'$ s omezenými nosiči
Potom platí:
① $f * g = g * f$ Komutativita
② $(f * g) * h = f * (g * h)$ asociativita
③ $(f * g)' = (f' * g) = (f * g')$
④ $(f * g)(x-a) = f(x-a) * g(x)$

Důkaz:
① $f, g \in D'$ s kompaktním nosičem
$\to \exists (\varphi_n)_{n \geq 1} \subset D : \varphi_n \to f$ v D'
$\to \exists (\eta_m)_{m \geq 1} \subset D : \eta_m \to g$ v D'

$\to \varphi_n * \eta_m = \eta_m * \varphi_n \xrightarrow{n \to +\infty} \eta_m * f \xrightarrow{m \to +\infty} g * f$

② Nechť $(f_n), (g_m), (h_k) \subset D : f_n \to f, g_m \to g, h_k \to h$

$\to (f_n * g_m) * h_k = f_n * (g_m * h_k)$

③ $f_n' * g_m = f_n * g_m' = (f_n * g_m)'$

④ $(f_n * g_m)(x-a) = f_n(x-a) * g_m(x)$

Integrální transformace

Definice: Rychle klesající funkce
Funkci $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme rychle klesající, jestliže:
$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n: \lim_{\|x\| \to +\infty} |x^\alpha f(x)| < \infty$

Klesá rychleji, než libovolný polynom.

Definice: Pomalu rostoucí funkce
Funkci $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme pomalu klesající, jestliže:
$\exists \alpha_0 \in \mathbb{N}^n: \lim_{\|x\| \to +\infty} \left|\frac{f(x)}{x^{\alpha_0}}\right| < \infty$

Roste pomaleji, než nějaký polynom.

Definice Schwarzův prostor
O funkci $f \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ řekneme, že ~~je~~ je ze Schwarzova prostoru, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, když:
① $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
② $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \; \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n: \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty$

Platí:
1. $\mathcal{S} \subset L^1$
2. $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$

Důkaz:
① Buď $f \in \mathcal{S}$ libovolná:

$$\int_{\mathbb{R}} |f| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-k}^{k} |f(x)| dx + \int_{-\infty}^{-k} |f(x)| dx + \int_{k}^{+\infty} |f(x)| dx = C + \int_{-\infty}^{-k} \left| \frac{f(x)}{x^2} x^2 \right| dx + \int_{k}^{+\infty} \left| \frac{f(x)}{x^2} x^2 \right| dx =$$

$$= C + M_1 \int_{-\infty}^{-k} \frac{1}{x^2} dx + M_2 \int_{k}^{+\infty} \frac{1}{x^2} < \infty \to f \in L^1$$

② $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$: Buď $f \in \mathcal{D}$ libovolná:

- $f \in C^\infty$ ✓
- $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| = \sup_{x \in \operatorname{supp} f} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty$

Definice: Konvergence v $\mathcal{S}$

Buďte $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$, $\varphi \in \mathcal{S}$.

Řekneme, že (φ_n) konvergují k φ v $\mathcal{S}$, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, jestliže:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n: \; x^\alpha D^\beta \varphi_n \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} x^\alpha D^\beta \varphi$

Definice: Prostor temperovaných distribucí

Prostorem temperovaných distribucí rozumíme prostor $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ všech spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Lemma:

$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \implies \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$

Důkaz:

Buďte $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$, $\varphi \in \mathcal{D}$ libovolné taková, že $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$:

Chceme: $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$

$\iff \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n: \; x^\alpha D^\beta \varphi_n(x) \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} x^\alpha D^\beta \varphi(x) \iff \sigma_n \to 0$

stejně omezený nosič

$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(\varphi_n(x) - \varphi(x))| = \sup_{x \in B(0,R)} |x^\alpha D^\beta(\varphi_n(x) - \varphi(x))| \leq$

$\leq R^\alpha \sup_{x \in B(0,R)} |D^\beta(\varphi_n(x) - \varphi(x))| \to 0$

Důsledek:

$\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$

Důkaz:

Buď $f \in \mathcal{S}'$ libovolná:

- f funkcionál nad $\mathcal{D}$ ✓
- f lineární ✓
- f spojitá:

Buď $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ libovolná

$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \implies (f, \varphi_n) \to 0$ ✓

Poznámka:
Operace na $\mathcal{S}'$ jsou definované stejně jako na $\mathcal{D}'$ a jsou uzavřené vůči $\mathcal{S}'$ až na násobení v $\mathcal{S}'$!

Násobení v $\mathcal{S}'$:
$(f\cdot a, \varphi) = (f, a\cdot\varphi)$

pro $a \in C^\infty : \exists \alpha_0 \in \mathbb{N}^n : \lim_{\|x\| \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^{\alpha_0}} \right| < \infty$

Fourierova transformace

Definice Fourierova transformace
Fourierovou transformací rozumíme zobrazení $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)\, dx \quad , \forall f \in L^1$$

Platí:
1. $\mathcal{F}[f](\xi)$ je omezená
2. supp $\mathcal{F}[f]$ není omezený
3. $\mathcal{F}[f] \notin L^1$

Důkaz:
1. $|\mathcal{F}[f](\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{ix\xi}| |f(x)|\, dx = \|f\|_1$

2. Protipříklad: $f(x) := \chi_{[0,1]}(x) \in \mathcal{D}$

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(x)\, dx = \int_0^1 e^{ix\xi}\, dx = \int_0^1 [\cos(x\xi) + i\sin(x\xi)]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\xi}\left[\sin(\xi) - i(\cos(\xi) - 1)\right]$$

3. $\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}[f](\xi)|\, d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_{\mathbb{R}^n} dx\, |e^{ix\xi}| |f(x)| = \int_{\mathbb{R}^n} d\xi\, \|f\|_1 = +\infty$

Věta: Uzavřenost $\mathcal{S}$ na $\mathcal{F}$

$\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$

Lemma:

$\forall \varphi \in \mathcal{S}$ ① $\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}[\varphi(x)](\xi) = \mathcal{F}[(ix)\varphi(x)](\xi)$

② $\mathcal{F}[\frac{d}{dx}\varphi(x)](\xi) = (-i\xi)\mathcal{F}[\varphi(x)](\xi)$

Důkaz:

① $\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}[\varphi(x)](\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\varphi(x)\,dx \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}(ix)\varphi(x)\,dx = \mathcal{F}[(ix)\varphi(x)](\xi)$

?: $|e^{ix\xi}(ix)\varphi(x)| \leq |x\varphi(x)|$, $x\varphi(x) \in \mathcal{S} \subset L^1$

② $\mathcal{F}[\frac{d}{dx}\varphi(x)](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\varphi'(x)\,dx = \begin{vmatrix} u' = \varphi'(x) & u = \varphi(x) \\ v = e^{ix\xi} & v' = e^{ix\xi}\cdot i\xi \end{vmatrix} =$

$= \underbrace{\left[e^{ix\xi}\varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - i\xi\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\varphi(x)\,dx = (-i\xi)\mathcal{F}[\varphi(x)](\xi)$

Důkaz věty:

Chceme ukázat, že: $\forall \varphi \in \mathcal{S}\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n: \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \mathcal{F}[\varphi](\xi)| < \infty$

Buď $\varphi \in \mathcal{S}$ libovolná; buďte $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$ libovolné.

$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \mathcal{F}[\varphi](\xi)| \overset{①}{=} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \mathcal{F}[(ix)^\beta \varphi(x)](\xi)| \overset{②}{=} |\mathcal{F}[D_x^\alpha((ix)^\beta\varphi(x))]| < \infty$

Věta: Vlastnosti $\mathcal{F}$ na $\mathcal{S}$

① $\mathcal{F}$ je spojité zobrazení

② $\mathcal{F}[f](\xi + b) = \mathcal{F}[e^{ibx}\varphi(x)](\xi)$

③ $\mathcal{F}[f(x-b)](\xi) = e^{ib\xi}\mathcal{F}[f](\xi)$

④ $\mathcal{F}[f(ex)](\xi) = \frac{1}{|e|^n}\mathcal{F}[f(x)](\frac{\xi}{e})$

Důkaz:

① Buď $(\varphi_m)_{m=1} \subset \mathcal{S}$, $\varphi_m \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ libovolná

Tj.: $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$: $x^\alpha D^\beta \varphi_m \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$

Chceme ukázat, že: $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$: $\xi^\alpha D^\beta \mathcal{F}[\varphi_n](\xi) \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0 \Leftrightarrow \sigma_n \to 0$

$$\sigma_n = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta_\xi \mathcal{F}[\varphi_n](\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \mathcal{F}[(ix)^\beta \varphi_n(x)](\xi)| =$$

$$= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}[D^\alpha_x((ix)^\beta \varphi_n(x))](\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(D^\alpha_x (ix)^\beta \varphi_n(x)) dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha_x (ix)^\beta \varphi_n(x)\, dx \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

② $\mathcal{F}[\varphi](\xi+b) = \mathcal{F}[e^{ibx}\varphi(x)](\xi)$

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi+b) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix(\xi+b)}\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(e^{ixb}\varphi(x))dx = \mathcal{F}[e^{ixb}\varphi(x)](\xi)$$

③ $\mathcal{F}[\varphi(x-b)](\xi) = e^{ib\xi}\mathcal{F}[\varphi(x)](\xi)$

$$\mathcal{F}[\varphi(x-b)](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\varphi(x-b)dx = \left|\begin{matrix} x-b=y \\ |J|=1 \end{matrix}\right| = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y+b)\xi}\varphi(y)dy =$$

$$= e^{ib\xi}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\xi}\varphi(y)dy = e^{ib\xi}\mathcal{F}[\varphi(x)](\xi)$$

④ $\mathcal{F}[\varphi(\varepsilon x)](\xi) = \frac{1}{|\varepsilon|^n}\mathcal{F}[\varphi(x)](\frac{\xi}{\varepsilon})$

$$\mathcal{F}[\varphi(\varepsilon x)](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\varphi(\varepsilon x)dx = \left|\begin{matrix} \varepsilon x = y \\ |J| = \frac{1}{|\varepsilon|^n} \end{matrix}\right| = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\frac{\xi}{\varepsilon}}\varphi(y)\frac{1}{|\varepsilon|^n}dy =$$

$$= \frac{1}{|\varepsilon|^n}\mathcal{F}[\varphi(x)](\tfrac{\xi}{\varepsilon})$$

Definice Částečná Fourierova transformace

Částečnou Fourierovou transformací funkce $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ Rozumíme $\mathcal{F}_x[\varphi(x,y)](\xi,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\varphi(x,y)dx$

Platí: $\mathcal{F}_x \circ \mathcal{F}_y = \mathcal{F}_y \circ \mathcal{F}_x = \mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_x \circ \mathcal{F}_y = \int_{\mathbb{R}^n} dx\, e^{ix\xi}\int_{\mathbb{R}^m} dy\, e^{iy\eta}\varphi(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} dy\, e^{iy\eta}\int_{\mathbb{R}^n} dx\, e^{ix\xi}\varphi(x,y) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} e^{i(x\xi+y\eta)}\varphi(x,y)\, dxdy$$

Věta: Konvoluční teorém

$\forall f, g \in \mathcal{S}: \mathcal{F}[f * g](\xi) = (\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g])(\xi)$

Důkaz:

$$\mathcal{F}[f*g](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(f*g)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy\right)dx = \left| \begin{matrix} s = x-y \\ r = y \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(s+r)\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(r)g(s)\,dr\right)ds =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{is\xi} g(s)\,ds \int_{\mathbb{R}^n} e^{ir\xi} f(r)\,dr = \mathcal{F}[f](\xi) \cdot \mathcal{F}[g](\xi)$$

Věta:

$\forall f, g \in \mathcal{S}: \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathcal{F}[g](x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](x)\,g(x)\,dx$

Důkaz:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathcal{F}[g(y)](x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\int_{\mathbb{R}} e^{iyx} g(y)\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}} dy\, g(y)\int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathcal{F}[f](y)\,dy$$

Věta: O inverzní $\mathcal{F}$

$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je bijekce a navíc platí:

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n}\bar{\mathcal{F}} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\,dx$$

Věta: Riemann-Lebesguovo lemma

$\forall \varphi \in \mathcal{S}: \lim_{\|\xi\| \to +\infty} \mathcal{F}[\varphi](\xi) = 0$

Zobecněná Fourierova transformace na $\mathcal{S}'$

Definice: Zobecněná Fourierova transformace
Buď $f \in \mathcal{S}'$, pak klademe:

$$(\mathcal{F}[f](\xi), \varphi(\xi)) := (f(x), \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)), \ \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Věta: Vlastnosti $\mathcal{F}$ na $\mathcal{S}'$

① $D_\xi^\alpha \mathcal{F}[f(x)](\xi) = \mathcal{F}[(ix)^{|\alpha|} f(x)](\xi)$

② $\mathcal{F}[D_x^\alpha f(x)](\xi) = (-i\xi)^{|\alpha|} \mathcal{F}[f(x)](\xi)$

③ $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ je spojité zobrazení na $\mathcal{S}'$

④ $\mathcal{F}[f(x)](\xi + b) = \mathcal{F}[e^{ixb} f(x)](\xi)$

⑤ $\mathcal{F}[f(x-b)](\xi) = e^{ib\xi} \mathcal{F}[f(x)](\xi)$

⑥ $\mathcal{F}[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} \mathcal{F}[f(x)](\frac{\xi}{c})$

Důkaz:

① $D_\xi^\alpha \mathcal{F}[f(x)](\xi) = \mathcal{F}[(ix)^{|\alpha|} f(x)](\xi)$

$$(D_\xi^\alpha \mathcal{F}[f(x)](\xi), \varphi(\xi)) = (-1)^{|\alpha|} (\mathcal{F}[f(x)](\xi), D_\xi^\alpha \varphi(\xi)) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} (f(x), \mathcal{F}[D_\xi^\alpha \varphi(\xi)](x)) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} (f(x), (-ix)^{|\alpha|} \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)) =$$

$$= (f(x)(ix)^{|\alpha|}, \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)) =$$

$$= (\mathcal{F}[(ix)^{|\alpha|} f(x)](\xi), \varphi(\xi))$$

② $\mathcal{F}[D_x^\alpha f(x)](\xi) = (-i\xi)^{|\alpha|}\mathcal{F}[f(x)](\xi)$

$$(\mathcal{F}[D_x^\alpha f(x)](\xi), \varphi(\xi)) = (D_x^\alpha f(x), \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)) \overset{(-1)^{|\alpha|}}{=} (f(x), D_x^\alpha \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(f(x), \mathcal{F}[(i\xi)^{|\alpha|}\varphi(\xi)](x)) =$$

$$= ((-i\xi)^{|\alpha|}\mathcal{F}[f(x)](\xi), \varphi(\xi))$$

③ $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ je spojité zobrazení

Buďte $(f_n) \subset \mathcal{S}'$, $f_n \to f$ v $\mathcal{S}'$ libovolné:

$$(\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}[f_n](\xi), \varphi(\xi)) = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{F}[f_n](\xi), \varphi(\xi)) = \lim_{n\to\infty}(f_n(x), \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)) =$$

$$= (f(x), \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)) = (\mathcal{F}[f(x)](\xi), \varphi(\xi))$$

④ $\mathcal{F}[f(x)](\xi+b) = \mathcal{F}[e^{ibx}f(x)](\xi)$

$$(\mathcal{F}[f(x)](\xi+b), \varphi(\xi)) \underset{\xi}{=} (\mathcal{F}[f(x)](\xi), \varphi(\xi-b)) = (f(x), \mathcal{F}[\varphi(\xi-b)](x)) =$$

$$= (f(x), e^{ixb}\mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)) = (f(x)e^{ixb}, \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)) =$$

$$= (\mathcal{F}[e^{ixb}f(x)](\xi), \varphi(\xi))$$

⑤ $e^{ixb}\mathcal{F}[f(\xi)](x) = \mathcal{F}[f(\xi-b)](x)$

$$(\mathcal{F}[f(\xi-b)](x), \varphi(x)) = (f(\xi-b), \mathcal{F}[\varphi(x)](\xi)) = (f(\xi), \mathcal{F}[\varphi(x)](\xi+b)) =$$

$$= (f(\xi), \mathcal{F}[e^{ixb}\varphi(x)](\xi)) =$$

$$= (\mathcal{F}[f(\xi)](x), e^{ixb}\varphi(x)) =$$

$$= (e^{ixb}\mathcal{F}[f(\xi)](x), \varphi(x))$$

⑥ $\mathcal{F}[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n}\mathcal{F}[f(x)](\frac{\xi}{c})$

$(\mathcal{F}[f(cx)](\xi), \varphi(\xi)) = (f(cx), \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)) = (f(x), \frac{1}{|c|^n}\mathcal{F}[\varphi(\xi)](\frac{x}{c})) =$

$= (f(x), \mathcal{F}[\varphi(c\xi)](x)) = (\mathcal{F}[f(x)](\xi), \varphi(c\xi)) =$

$= (\frac{1}{|c|^n}\mathcal{F}[f(x)](\frac{\xi}{c}), \varphi(\xi))$

Definice Částečná Fourierova transformace na $\mathcal{S}'$

Buď $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$

Pak částečnou Fourierovou transformací f rozumíme $\mathcal{F}_x$:

$(\mathcal{F}_x[f(x,y)](\xi,y), \varphi(\xi,y)) = (f(x,y), \mathcal{F}_\xi[\varphi(\xi,y)](x,y))$

Platí

① $\mathcal{F}_x \circ \mathcal{F}_y = \mathcal{F}_y \circ \mathcal{F}_x = \mathcal{F}$

② $\mathcal{F}[f(x) \otimes g(y)](\xi,\eta) = \mathcal{F}[f(x)](\xi) \otimes \mathcal{F}[g(y)](\eta)$

Příklad $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta$ v $\mathcal{S}'$

$0 = \mathcal{F}[\frac{d}{dx}1](\xi) = -i\xi \underbrace{\mathcal{F}[1]}_{f(\xi)} \Rightarrow f(\xi)\xi = 0 \Rightarrow f(\xi) = c\delta(\xi)$

$c = c\,(\delta(\xi), e^{-\xi^2}) = (c\delta(\xi), e^{-\xi^2}) = (\mathcal{F}[1](\xi), e^{-\xi^2}) =$

$= (1, \mathcal{F}[e^{-\xi^2}](x)) = \sqrt{\pi}\,(1, e^{-\frac{x^2}{4}}) = \sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4}}dx = \sqrt{\pi}\cdot 2\sqrt{\pi} = 2\pi$

$\Rightarrow \mathcal{F}[1] = 2\pi\delta$

Věta: O inverzi $\mathcal{F}$

$\mathcal{F}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ je bijekce a platí: $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}^-$,

$$\mathcal{F}^- = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \cdot dx$$

Důkaz:

$n = 1$:

Nejprve v $\mathcal{S}$:

Chceme: $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^- \circ \mathcal{F} = (2\pi)\, id$

Buď $y \in \mathbb{R}$ libovolné pevné:

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^-[\varphi(x)](y) = \int_{\mathbb{R}} e^{iy\xi} \mathcal{F}[\varphi(x)](\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{iy\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\xi \int_{\mathbb{R}} e^{i(y-x)\xi} \varphi(x)\, dx = \left| \begin{matrix} y - x = t \\ |J| = 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\xi\, \mathcal{F}[\varphi(y-t)](\xi) = (1, \mathcal{F}[\varphi(y-t)](\xi)) =$$

$$= (\mathcal{F}[1](t), \varphi(y-t)) = (2\pi\delta(t), \varphi(y-t)) =$$

$$= 2\pi\, \varphi(y), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

v $\mathcal{S}'$:

$$(\mathcal{F}[\mathcal{F}^-[f(x)](\xi)](y), \varphi(y)) = (\mathcal{F}^-[f(x)](\xi), \mathcal{F}[\varphi(y)](\xi)) =$$

$$= (f(x), \mathcal{F}^-[\mathcal{F}[\varphi(y)](\xi)](x)) =$$

$$\stackrel{\text{v } \mathcal{S}}{=} (f(x), 2\pi\, \varphi(x)) =$$

$$= (2\pi f(x), \varphi(x))$$

Věta: Konvoluční teorém pro zobecněné funkce

Buďte $f, g \in \mathcal{S}'$ s kompaktním nosičem

Potom platí: $\mathcal{F}[(f*g)(x)](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) \cdot \mathcal{F}[g](\xi)$

Důkaz:

$$\left(\mathcal{F}[(f*g)(x)](\xi), \varphi(\xi)\right) = \left((f*g)(x), \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)\right) =$$

$$= \left(f(x), \left(g(y), \mathcal{F}[\varphi(\xi)](x-y)\right)\right) =$$

$$= \left(f(x), \left(g(y), \mathcal{F}[e^{ix\xi}\varphi(\xi)](y)\right)\right) =$$

$$= \left(f(x), \left(\mathcal{F}[g(y)](\xi), e^{ix\xi}\varphi(\xi)\right)\right) =$$

$$(*) \rightarrow = \left(f(x), \mathcal{F}\left[\mathcal{F}[g(y)](\xi) \cdot \varphi(\xi)\right](x)\right) =$$

$$= \left(\mathcal{F}[f(x)](\xi), \mathcal{F}[g(y)](\xi) \cdot \varphi(\xi)\right) =$$

$$= \left(\mathcal{F}[f(x)](\xi) \cdot \mathcal{F}[g(y)](\xi), \varphi(\xi)\right)$$

$$(*): \left(\mathcal{F}[g(y)](\xi), e^{ix\xi}\varphi(\xi)\right) \overset{\text{FAKT}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[g(y)](\xi)\, e^{ix\xi}\, \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \mathcal{F}\left[\mathcal{F}[g(y)](\xi)\, \varphi(\xi)\right](x)$$

Laplaceova transformace

Definice: Laplaceova transformace $\mathcal{L}$

Buď f měřitelná na $\mathbb{R}^+$, tak že $\exists c \geq 0$ $\exists a \in \mathbb{R}$: $|f(t)| \leq c\, e^{at}$

Pak $\mathcal{L}[f(t)](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$ pro $p \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Re}(p) > a$

nazýváme Laplaceovou transformací funkce f.

Věta: Vlastnosti $\mathcal{L}$

① $\frac{d^n}{dp^n} \mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](p)$

② $\mathcal{L}[\dot{f}(t)](p) = p\,\mathcal{L}[f(t)](p) - f(0_+)$

③ $\mathcal{L}[f(t)](p-a) = \mathcal{L}[e^{at} f(t)](p)$

④ $\mathcal{L}[f(t+a)](p) = e^{ap}\mathcal{L}[f(t)](p)$

⑤ $\mathcal{L}[f(ct)](p) = \frac{1}{c}\mathcal{L}[f(t)](\frac{p}{c})$

⑥ $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{p \to 0+} \mathcal{L}[f(t)](p)$

Důkaz:

① $\frac{d^n}{dp^n} \mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](p)$

$n = 1$:

$$\frac{d}{dp} \mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \overset{?}{=} \int_0^{+\infty} e^{-pt}(-t) f(t)\, dt = \mathcal{L}[(-t) f(t)](p)$$

? záměna

$$|e^{-pt}(-t) f(t)| \leq t\, c\, e^{at} e^{-\mathrm{Re}(p)t} = t\, c\, e^{(a-\mathrm{Re}(p))t} \leq c\, e^{(a-\mathrm{Re}(p)-\varepsilon)t}$$

② $\mathcal{L}[f'(t)](p) = p\,\mathcal{L}[f(t)](p) - f(0+)$

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\,dt = \left| \begin{matrix} u' = f'(t) & u = f(t) \\ v = e^{-pt} & v' = -p e^{-pt} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left[e^{-pt} f(t)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p\, e^{-pt} f(t)\,dt =$$

$$= p\,\mathcal{L}[f(t)](p) + \lim_{t\to+\infty}\left(e^{-pt} f(t)\right) - \lim_{t\to 0}\left(e^{-pt} f(t)\right) =$$

$$\overset{(*)}{=} p\,\mathcal{L}[f(t)](p) - f(0+)$$

$(*)$: $\left|e^{-pt} f(t)\right| \le C\, e^{(a-\operatorname{Re}(p))t} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$

③ $\mathcal{L}[f(t)](p-a) = \mathcal{L}[e^{at} f(t)](p)$

$$\mathcal{L}[f(t)](p-a) = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t} f(t)\,dt = \cancel{\ldots}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(e^{at} f(t)\right)dt = \mathcal{L}[e^{at} f(t)](p)$$

④ $\mathcal{L}[f(t+a)](p) = e^{ap}\,\mathcal{L}[f(t)](p)$

$$\mathcal{L}[f(t+a)](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t+a)\,dt = \left| \begin{matrix} t+a =: x \\ |J| = 1 \end{matrix} \right| = \int_0^{+\infty} e^{-p(x-a)} f(x)\,dx =$$

$$= e^{ap}\,\mathcal{L}[f(t)](p)$$

⑤ $\mathcal{L}[f(ct)](p) = \frac{1}{c}\,\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{c}\right)$

$$\mathcal{L}[f(ct)](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(ct)\,dt = \left| \begin{matrix} ct = x \\ |J| = \frac{1}{c} \end{matrix} \right| = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{c}x} f(x)\,\frac{1}{c}\,dx =$$

$$= \frac{1}{c}\,\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{c}\right)$$

⑥ $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{p\to 0+} \mathcal{L}[f(t)](p)$

$$\lim_{p\to 0+} \mathcal{L}[f(t)](p) = \lim_{p\to 0+} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int_0^{+\infty} f(t)$$, záměna. $f \in \mathcal{L} \subset L^1$

Věta: Konvoluční teorém pro $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}[(f*g)(x)](p) = \mathcal{L}[f(x)](p) \cdot \mathcal{L}[g(x)](p)$$

Důkaz:

$$\mathcal{L}[(f*g)(x)](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}(f*g)(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-px}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy\right)dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x-y =: s \\ dy = -ds \end{matrix} \right| = \int_0^{+\infty} dx\, e^{-px} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s)\,ds = \left| \begin{matrix} x-s = r \\ dx = dr \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{-s}^{+\infty} e^{-(r+s)p}\,dr \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)g(s)\,ds =$$

$$= \int_{-s}^{+\infty} e^{-rp} f(r)\,dr \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sp} g(s)\,ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rp} f(r) \int_{-r}^{+\infty} e^{-sp} g(s)\,ds\,dr = \mathcal{L}[f(t)](p)\,\mathcal{L}[g(t)](p$$

když $\operatorname{supp} f, g \subset \mathbb{R}^+$

Věta:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathcal{L}[g(x)](t)\,dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}[f(t)](x)\,g(x)\,dx$$

Důkaz:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathcal{L}[g(x)](t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\int_0^{+\infty} e^{-tx} g(x)\,dx\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\,dt \int_0^{+\infty} dx\, g(x) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathcal{L}[f(t)](x)\,g(x)\,dx$$

Věta:

$$\mathcal{L}\left[\theta(t)\int_0^t f'(x)dx\right](p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f'(t)](p)$$

Důkaz:

$$\mathcal{L}\left[\theta(t)\int_0^t f'(x)dx\right](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\theta(t)\left(\int_0^t f'(x)dx\right)dt = \int_x e^{-pt}\theta(t)\int_0^{+\infty} f'(x)dx\,dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} t-x=s \\ dt=ds \end{matrix} \right| = \int_0^{+\infty} e^{-p(s+x)}\theta(\cancel{x}+s)ds \int_0^{+\infty} f'(x)dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sp}ds \int_0^{+\infty} e^{-xp} f'(x)dx =$$

$$= \mathcal{L}[1]\cdot\mathcal{L}[f'(x)](p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f'(x)](p)$$

Věta:

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = \int_p^{+\infty} \mathcal{L}[f'(t)](q)\,dq \quad , \; p\in\mathbb{R},\; p>a \; (|f'|\leq e^{at})$$

Důkaz

$$\mathcal{L}\left[\frac{f'(t)}{t}\right](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{f(t)}{t}dt$$

- $\frac{d}{dp}\mathcal{L}\left[\frac{f'(t)}{t}\right](p) = -\mathcal{L}[f'(t)](p)$

$\rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f'(t)}{t}\right](p) = \int_p^{+\infty} \mathcal{L}[f'(t)](q)\,dq$

Věta: Inverzní $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dt,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ takové, že $c >$ Re část všech singularit F

Zobecněná Laplaceova transformace

Definice: Zobecněná Laplaceova transformace

Buď $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, taková, že: ① $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^+_0$

② $\exists a \in \mathbb{R} : \forall \sigma > a \,,\; e^{-\sigma t} f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Pak klademe $\mathcal{L}[f(t)](p) := \mathcal{F}[e^{-\sigma t} f(t)](-\omega)$, kde $p = \sigma + i\omega$

Poznámka:

- Obrazem zobecněné funkce $f \in \mathcal{S}'$ je jednoparametrická množina temperovaných distribucí
- Lze ukázat (Štovíček), že obrazem $\mathcal{L}$ je vždy regulární zobecněná funkce
- Definice je konzistentní: $\mathcal{L}[\hat{f}](p) = \widehat{\mathcal{L}[f](p)}$

Příklad: $\mathcal{L}[\delta(t)](p) = 1$

$$(\mathcal{L}[\delta(t)](p), \varphi(\omega)) = (\mathcal{F}[e^{-\sigma t}\delta(t)](-\omega), \varphi(\omega)) =$$

$$= (e^{-\sigma t}\delta(t), \mathcal{F}[\varphi(-\omega)](t)) =$$

$$= \mathcal{F}[\varphi(-\omega)](0) = \int_{\mathbb{R}} e^{+i\omega 0} \varphi(-\omega)\, d\omega =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(\omega)\, d\omega = (1, \varphi(\omega)), \; \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Věta: Vlastnosti $\mathcal{L}$ na $\mathcal{S}'$

① $\frac{d^n}{dp^n} \mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](p)$

② $\mathcal{L}[\frac{d^n}{dt^n} f(t)](p) = p^n \mathcal{L}[f(t)](p)$

③ $\mathcal{L}[f(t)](p-\lambda) = \mathcal{L}[e^{\lambda t} f(t)](p)$, $Re(p) > a + Re(\lambda)$

④ $\mathcal{L}[f(ct)](p) = \frac{1}{c} \mathcal{L}[f(t)](\frac{p}{c})$, $Re(p) > c \cdot a$

⑤ $\mathcal{L}[(f * g)(t)](p) = \mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p)$ Konvoluční teorém

⑥ $\mathcal{L}[f(t-\tau)](p) = e^{-\tau p} \mathcal{L}[f(t)](p)$

Řešení počátečních úloh ODR a PDR

Poznámka:

Uvažujme rovnici $Lu = f \in D'$, L diferenciální operátor

Cílem je nalézt fundamentální řešení $\mathcal{E}$: $L\mathcal{E} = \delta$

Potom $u = \mathcal{E} * f$: $Lu = L(\mathcal{E} * f) = L\mathcal{E} * f = \delta * f = f$

Nalezení fundamentálního řešení $\mathcal{E}$:

Buď L tvaru $L = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$

Potom $\mathcal{E}$ je tvaru $\mathcal{E}(x) = \Theta(x)\, z(x)$,

kde z splňuje $Lz = 0$, $z^{(1)}(0) = 0, \dots, z^{(n-2)}(0) = 0$, $z^{(n-1)}(0) = 1$

Věta: Řešení ODR

Nechť $u = u(t),\ t \geq 0$ je klasické řešení LODR tvaru:

$$Lu = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_n u = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} u^{(k)} = f(t),\ a_k \in \mathbb{R}$$

s počátečními podmínkami $u^{(k)}(0) = u_k,\ \forall k < n$

a nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ po částech C.

Označme $\tilde{u}(t) := \Theta(t) u(t),\ \tilde{f}(t) := \Theta(t) f(t)$

Potom:

① $\tilde{u}$ splňuje rovnici

$$L\tilde{u} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \tilde{u} = \tilde{f} + \sum_{\eta=0}^{n-1} c_\eta \delta^{(\eta)} = F,$$

kde $c_\eta = \sum_{k=1}^{n-\eta} a_{n-k-\eta} u_{k-1}$

② Pro řešení klasické úlohy platí:

$$u(t) = \int_0^t z(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^{(k)},$$

kde $z(t)$ je taková, že: $\mathcal{E}(t) = \Theta(t) z(t)$

Důkaz:

Lemma:

Pro $f, g \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$, $\operatorname{supp} f, g \subset \mathbb{R}^+_0$ platí

$$(f * g)(x) = \Theta(x) \int_0^x g(y) f(x-y)\, dy \ \text{v}\ \mathcal{D}'$$

Důkaz (lemma):

$$((f*g)(x)), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(x) \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy =$$

$$= \left| \begin{matrix} x-y =: t \\ y = y, |J|=1 \end{matrix} \right| = \int_{\mathbb{R}} dt\,\varphi(t+y) \int_{\mathbb{R}} f(y)g(t)\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dt\,\varphi(t+y) \int_{\mathbb{R}} \theta(y) f(y) g(t) \theta(t)\,dy = \left| \begin{matrix} t+y =: z \\ y = y, |J|=1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dz\,\varphi(z) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \theta(y) f(y) \theta(z-y) g(z-y)\,dy}_{I} = (\#)$$

(*) $I \neq 0 \Leftrightarrow \theta(y)\theta(z-y) \neq 0 \Leftrightarrow y > 0 \wedge z-y > \rightarrow z > y > 0$

$$(\#) = \int_{\mathbb{R}} dz\,\varphi(z)\,\theta(z) \int_0^z f(y)g(z-y)\,dy = \left(\theta(z)\int_0^z f(y)g(z-y)\,dy, \varphi(z)\right)$$

Důkaz věty:

① Stačí ověřit výpočtem

② Buď $\tilde{u}(t)$ řešení zobecněné úlohy,

$\cdot\ \tilde{u}$ je tvaru $\tilde{u}(t) = (\mathcal{E} * F)(t) = \underbrace{\mathcal{E}(t) * \tilde{f}(t)}_{A} + \underbrace{\mathcal{E}(t) * \sum_{n=0}^{m-1} c_n \delta^{(n)}}_{B}$

$$A = \theta(t)z(t) * \theta(t)f(t) = \theta(t)\int_0^t z(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

$$B = \mathcal{E}(t) * \sum_{n=0}^{m-1} c_n \delta^{(n)} = \sum_{n=0}^{m-1} c_n \mathcal{E}^{(n)} = \sum_{n=0}^{m-1} c_n \theta(t) z^{(n)}(t)$$

$$\rightarrow \tilde{u}(t) = \theta(t)\left[\int_0^t z(t-\tau)f(\tau)\,d\tau + \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{(n)}(t)\right] = \theta(t)u(t)$$

Zbývá ověřit, že $u(t)$ řeší $Lu = f$

Parciální diferenciální rovnice

I. Metoda charakteristik

Uvažujme rovnici typu:

$$a(x,t)u + \partial_t u + c(x,t)\partial_x u = g(x,t), \quad u(x,0) = u_0(x)$$

Kuchařka:

① $X'(t) = c(X(t),t), \quad X(0) = x_0$
Řešení označíme jako $X_{x_0}(t)$

② $X_{x_0}(t) = x$ pro x_0
Řešení označíme $x_0 = p(x,t)$

③ $v'(t) + a(X(t),t)v(t) = g(X(t),t), \quad v(0) = u_0(x_0)$
Řešení označíme $v_{x_0}(t)$

④ $u(x,t) = v_{x_0}(t)\Big|_{x_0 = p(x,t)}$

Poznámka:

$$\partial_t u + c(x,t)\partial_x u = (\partial_t u \;\; \partial_x u)\begin{pmatrix}1\\ c(x,t)\end{pmatrix} = u'\begin{pmatrix}1\\ c(x,t)\end{pmatrix}$$

→ $\partial_t u + c(x,t)\partial_x u$ lze chápat jako směrovou derivaci ve směru $(1, c(x,t))$

Vektory $\begin{pmatrix}1\\ c(x,t)\end{pmatrix}$ tvoří vektorové pole $v(x,t)$.

Křivky $x = X(t)$, podél vektorového pole jsou charakteristiky

~~K~~ II. Klasifikace PDR 2. řádu a převod na normální tvar

Uvažujme rovnice tvaru:

$$Lu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

tj. $(\nabla u)^T \mathbb{A}(x) \nabla u + b^T \nabla u + c(x)u$

Definice Rovnice eliptická, hyperbolická, parabolická

Řekneme, že lineární ~~Ø~~ PDR 2. řádu je

eliptická $\Leftrightarrow \sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}^+ \vee \sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}^-$

hyperbolická $\Leftrightarrow \sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a není eliptická

parabolická $\Leftrightarrow \exists \lambda, \rho \in \sigma(\mathbb{A}): \lambda = 0 \wedge \rho \neq 0$

kde $\mathbb{A}(x)$ je její přidružená kvadratická forma na $G \subset \mathbb{R}^n$

Definice Normální tvar

Řekneme, že lineární PDR 2. řádu je v normálním tvaru, jestliže $\mathbb{A}$ je diagonální a $\mathbb{A}_{ii} \in \{-1, 0, 1\}$

Poznámka

Převod lineární PDR 2. řádu dvou proměnných na normální tvar:

Hledáme transformaci $\Phi: (x,y) \mapsto (\xi, \eta)$, tak aby rovnice byla v normálním tvaru.

Uvažujme rovnici tvaru:

$$a(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(\nabla u, x, y, u) = 0$$

Najdeme $\Phi : (x,y) \mapsto (\xi, \eta)$.

$$\cdot \ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\cdot \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\cdot \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$\cdot \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

Pak lze rovnici přepsat:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\underbrace{\left(a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right)}_{I} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\underbrace{\left(a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right)}_{II} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\underbrace{\left(2a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + 2c\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right)}_{III} + \tilde{F}$$

$$I: \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \left[a + b\frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}} + c\left(\frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}}\right)^2\right]$$

Což je kvadratický výraz pro $\lambda(x,y) = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}}$

$$a + b\lambda + c\lambda^2 \overset{!}{=} 0$$

- Stejný kvadratický výraz bychom získali, pokud bychom vytknuli $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2$ z II

III. Lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty

Díky konstantnosti koeficientů jsme schopni provést převod na normální tvar pro obecně n proměnných, neboť se jedná o úlohu ekvivalentní s převodem matice do polární báze:

Máme rovnici tvaru

$$(\nabla u)^T \mathbb{A} (\nabla u) + F(\nabla u, u, x_1, \dots, x_n) = 0$$

Označme $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ polární bázi $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$: $\mathbb{B}^T \mathbb{A} \mathbb{B} = \mathbb{D}$
($\mathbb{D}$ diagonální)

$$\rightarrow (\nabla^T \mathbb{A} \nabla) u + F(\nabla u, u, x) = (\nabla^T \mathbb{B}\mathbb{B}^T \mathbb{A} \mathbb{B}\mathbb{B}^T \nabla) u + F(\nabla u, u, x) =$$

$$= (\nabla^T \mathbb{B} \mathbb{D} \mathbb{B}^T \nabla) u + F(\nabla u, u, x) = ((\mathbb{B}^T \nabla)^T \mathbb{D} (\mathbb{B}^T \nabla)) u + F(\nabla u, u, x) =$$

$$= (\nabla_y^T \mathbb{D} \nabla_y) u + F(\nabla_y u, u, y) =$$

$x \mapsto y$?: $\nabla_y = \mathbb{B}^T \nabla \rightarrow \frac{\partial}{\partial y_k} = \mathbb{B}_{k\cdot} \nabla$

IV. Řešení počátečních úloh lineárních PDR 2. řádu

Integrální rovnice, spektrum, ON báze

Definice: Značení

Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast,

Pak zavádíme značení:

$L^2(G)$ pro funkce s normou $\|f\|_2 = \left(\int_G |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$C(\bar{G})$ pro funkce s normou $\|f\|_C = \max_{x \in \bar{G}} |f(x)|$

Definice Integrální operátor

Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast, $\mathcal{K} \in C(\bar{G} \times \bar{G})$

Potom integrálním operátorem K působícím na funkci φ rozumíme:

$$K\varphi(x) = \int_G \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy$$

Přičemž $\mathcal{K}$ nazýváme integrální jádro a zavádíme označení:

$M = \max_{x,y \in \bar{G}} |\mathcal{K}(x,y)|$ Mez jádra

$V = \int_G 1 \cdot dx$ Objem jádra

Fredholmovy integrální rovnice

Definice: Fredholmova integrální rovnice
Fredholmovou rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$\varphi = \lambda K\varphi + f$$

$\lambda \in \mathbb{C}$, K je integrální operátor se spojitým jádrem
f je „pravá strana"

Ekvivalentně: $(I - \lambda K)\varphi = f$

hledáme řešení buď v $L^2(G)$, pak $f \in L^2(G)$
nebo v $C(\overline{G})$, pak $f \in C(\overline{G})$

Pro $f = 0$ se jedná o úlohu na vlastní čísla

Definice: Degenerované jádro
Řekneme, že jádro $K(x,y)$ je degenerované, jestliže je separovatelné.

Tj. $\exists p \in \mathbb{N}$: $K(x,y) = \sum_{k=1}^{p} u_k(x) v_k(y)$, $u_k, v_k \in C(\overline{G})$

Poznámka
Fredholmova rovnice pro degenerované jádro

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x) =$$

$$= \int_G \lambda \sum_{k=1}^{p} u_k(x) v_k(y)\varphi(y)\,dy + f(x) =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{p} u_k(x) \int_G v_k(y)\varphi(y)\,dy + f(x)$$

Označme: $c_k := \int_G v_k(y)\varphi(y)\,dy \in \mathbb{C}$

$$\to \varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{p} C_k u_k(x) + f(x)$$

$$\to v_\ell(x)\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{p} C_k v_\ell(x) u_k(x) + v_\ell(x) f(x)$$

$$\to \int_G v_\ell(x)\varphi(x)\,dx = C_\ell = \lambda \sum_{k=1}^{p} C_k \int_G v_\ell(x) u_k(x)\,dx + \int_G v_\ell(x) f(x)\,dx$$

~~Dosazení zpět do rovnice:~~

$$C_\ell = \lambda \sum_{k=1}^{p} C_k \cdot A_{\ell k} + b_\ell$$

$$\to C = \lambda A C + b$$

$\to$ existuje řešení C^* $\to \varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{p} u_k C_k^* + f(x)$

Věta:

Integrální operátor K se spojitým jádrem $\mathcal{K}$ zobrazuje:

① $L^2(G) \to C(\overline{G})$

② $C(\overline{G}) \to C(\overline{G})$

③ $L^2(G) \to L^2(G)$

Důkaz.

Hölderova nerovnost

① $$\|Kf\|_C = \max_{x\in\overline{G}} \left| \int_G \mathcal{K}(x,y) f(y)\,dy \right| \le \max_{x\in\overline{G}} \left| \left(\int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_G |f(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \right| \le$$
$$\le \left(\int_G M^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 = M\sqrt{V}\,\|f\|_2 < \infty$$

② $$\|Kf\|_C = \max_{x\in\overline{G}} \left| \int_G \mathcal{K}(x,y) f(y)\,dy \right| \le \max_{x\in\overline{G}} \int_G |\mathcal{K}(x,y)|\,|f(y)|\,dy \le M \int_G |f(y)|\,dy \le$$
$$\le M \int_G \|f\|_C\,dy = MV\,\|f\|_C$$

③ $\cancel{\|Kf\|_2 = \left(\int_G \int_G |\mathcal{K}(x,y) f(y)\,dy|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}$

$$\|Kf\|_2 = \left(\int_G \left| \int_G \mathcal{K}(x,y) f(y)\,dy \right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_G \left[\left(\int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_G |f(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le MV\,\|f\|_2$$

Věta: O spojitosti operátoru

Buďte $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normované vektorové prostory.
$B \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.
Pak následující výroky jsou ekvivalentní:
① B je omezený
② B je spojitý
③ B je spojitý v nějakém bodě

Důkaz:
Viz FA1 - Štovíček

Poznámka:

Metoda postupných aproximací na $C(\bar{G})$.
Předpokládejme, že $f \in C(\bar{G})$:

$$\varphi(x) = \lambda K\varphi(x) + f(x)$$

Hledáme řešení $\varphi \in C(\bar{G})$

Věta: Metoda postupných aproximací

Buďte $f \in C(\bar{G})$, $|\lambda| < \frac{1}{MV}$.
Pak existuje jediné řešení rovnice $\varphi = \lambda K\varphi + f$.
Navíc existuje $(\varphi_k)_{k=0} \subset C(\bar{G})$ $\varphi_k \overset{\bar{G}}{\rightrightarrows} \varphi$

Důkaz:
• Konstrukce posloupnosti $(\varphi_k)_{k=0}$:

Položme $\varphi_0(x) := f(x)$

pro $k \in \mathbb{N}$ $\varphi_k(x) = \lambda K\varphi_{k-1}(x) + f(x)$

Platí:

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda^j K^j f + f$$

Ověření indukcí:

$$k = 1: \quad \varphi_1 = \lambda K \varphi_0 + f = \lambda K f + f \quad \checkmark$$

$$k \to k+1: \quad \varphi_{k+1} = \lambda K \varphi_k + f = \lambda K \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda^j K^j f + f \right) + f =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \lambda^{j+1} K^{j+1} f + \lambda K f + f = \sum_{j=2}^{k+1} \lambda^j K^j f + \lambda K f + f =$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1} \lambda^j K^j f + f$$

• Stejnoměrná konvergence:

$$\cancel{\left|\sum_{i=0}^{k} \lambda^i K^i f(x)\right| \le \sum_{i=0}^{k} |\lambda^i K^i f(x)| \le \sum_{i=0}^{k} |\lambda|^i \|K^i\| \|f\|_C \le \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{MV}}$$

$$\left|\sum_{i=0}^{k} \lambda^i K^i f(x)\right| \le \sum_{i=0}^{k} |\lambda^i K^i f(x)| \le \sum_{i=0}^{k} |\lambda|^i \|K^i f\|_C \le \sum_{i=0}^{k} |\lambda|^i (MV)^i \|f\|_C \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{k} \alpha^i \|f\|_C, \quad |\alpha| < 1$$

$$\rightarrow \varphi_k \overset{G}{\rightrightarrows} \varphi \quad \text{(Weierstrass)}$$

Jednoznačnost:

Poznámka:

Formálně lze provést tyto úpravy:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j K^j f(x) + f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j \int_G K_j(x,y)\, f(y)\, dy + f(x) =$$

$$= \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j \int_G K_{j+1}(x,y)\, f(y)\, dy + f(x) \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \lambda \int_G \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j K_{j+1}(x,y) \right) f(y)\, dy + f(x)$$

Výraz $\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j K_{j+1}(x,y)$ nazýváme resolventa.

Označme $\mathcal{R}(x,y,\lambda) = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j K_{j+1}(x,y)$

Pak lze řešení φ zapsat ve tvaru:

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{R}(x,y,\lambda)\, f(y)\, dy + f(x)$$

Metoda iterovaných jader

Poznámka:
Buďte $K, L: C(\bar{G}) \to C(\bar{G})$ integrální operátory se spojitými jádry $\mathcal{K}(x,y)$, $\mathcal{L}(x,y)$.

Pak operátor $KL: C(\bar{G}) \to C(\bar{G})$ a působí následovně:

$$KL(f(x)) = K(Lf(x)) = \int_G \mathcal{K}(x,y)\left(\int_G \mathcal{L}(y,z) f(z)\, dz\right) dy =$$

Fubini $\to = \int_G dz\, f(z) \int_G \mathcal{K}(x,y)\mathcal{L}(y,z)\, dy$

Speciálně pokud volíme $L := K^j$ získáme rekurentní vztah:

$$\mathcal{K}_{j+1}(x,y) = \int_G \mathcal{K}(x,z)\mathcal{K}_j(z,y)\, dz$$

Věta: Možnost záměny (Resolventa)
Je-li $|\lambda| < \frac{1}{MV}$, pak řada $\mathcal{R}(x,y,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x,y)$ konverguje v $C(\bar{G} \times \bar{G})$.
Řadu $\mathcal{R}$ nazýváme nazýváme resolventní jádro, které je spojité na $C(\bar{G} \times \bar{G} \times B(0, \frac{1}{MV}))$.

Navíc řešení φ rovnice $\varphi = \lambda K\varphi + f$ je rovno:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G \mathcal{R}(x,y,\lambda) f(y)\, dy$$

Důkaz:
Konvergence v $C(\bar{G} \times \bar{G})$ je stejnoměrná konvergence
$\to$ záměna je tedy oprávněná konvergencí v $C(\bar{G} \times \bar{G})$.

$$|K_p(x,y)| = \left| \int_G K(x,z) K_{p-1}(z,y)\,dz \right| \leq MV \|K_{p-1}\|_C$$

$$\rightarrow \|K_p\|_C \leq MV \|K_{p-1}\|_C$$

$$\cdot\ |K_1(x,y)| \leq |K(x,y)| \Rightarrow \|K_1\|_C = M$$

$$\rightarrow \|K_p\|_C \leq M^p V^{p-1}$$

$\rightarrow$ $C(\bar{G} \times \bar{G})$ je Banachův $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ konverguje $\Leftarrow\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|$ konverguje

$$\cdot\ \sum_{k=0}^{+\infty} \|\lambda^k K_{k+1}\|_C \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda|^k M^{k+1} V^k = \frac{M}{1-|\lambda| MV} < \infty$$

Valterovy integrální rovnice

Definice: Valterrova integrální rovnice:
Buď $G = (0,a)$, $a > 0$.
Pak Valterrovou integrální rovnicí nazýváme rovnici tvaru:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x) = \lambda K\varphi + f$$

Poznámka:
Chceme převést Valterovu rovnici na Fredholmovu rovnici:

$$\lambda K\varphi + f = \lambda \int_G \tilde{K}(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x) = \lambda\tilde{K}\varphi + f,$$

kde $\tilde{K}$ je Fredholmův integrální operátor.

Definice: Valterrovo integrální jádro
Pro Valterrovu integrální rovnici zavedeme Valterrovo integrální jádro $\tilde{K}(x,y) := \begin{cases} K(x,y), & 0 \le y \le x < a \\ 0 & \text{, jinak} \end{cases}$

Poznámka:
Pro iterovaná jádra platí:

$$\tilde{K}_{p+1}(x,y) = \int_0^a \tilde{K}(x,z)\tilde{K}_p(z,y)\,dz = \int_y^x K(x,z)K_p(z,y)\,dz$$

Lemma:
Buď K Valterrův integrální operátor.
Potom $\forall p \in \mathbb{N}_0\ \forall x \in [0,a]: |K^p\varphi(x)| \le \frac{(Mx)^p}{p!}\|\varphi\|_C$

Důkaz: (indukcí)
$p = 0$: ✓
$p \to p+1$: $|K^{p+1}\varphi(x)| = |K(K^p\varphi(x))| \le \int_0^x |K(x,y)||K^p\varphi(y)|\,dy \le \int_0^x M\left(\frac{M(y)^p}{p!}\right)\|\varphi\|_C\,dy \le$

$$\le \frac{(Mx)^{p+1}}{(p+1)!}\|\varphi\|_C$$

Věta:

Valterova integrální rovnice $\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x)$ má pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$ a pro všechny spojité funkce $f \in C([0,a])$ právě jedno řešení $\varphi(x) \in C([0,a])$

Důkaz:

Převedením na Fredholmovu rovnici

Spektrum, ortonormální báze

Definice: Spektrum, Resolventní množina

Buď $(X, \|\cdot\|)$ Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(X)$

Označme $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\}$

Potom $\rho(T)$ nazýváme resolventní množinou

a $\mathbb{C} \setminus \rho(T) =: \sigma(T)$ nazýváme spektrem operátoru T.

Poznámka:

Mohou nastat dvě situace:

① $(T - \lambda I)$ není prosté a tedy k němu neexistuje inverzní operátor:
Pak ale existuje řešení rovnice $Tx = \lambda x$.

Množinu těchto čísel nazýváme bodové spektrum operátoru T.
Označujeme $\sigma_p(T)$.

② Inverzní operátor existuje, ale není surjektivní:
Pokud $\overline{\mathrm{Ran}(T - \lambda I)} = X$, pak říkáme, že λ leží ve spojitém spektru
Označujeme $\sigma_c(T)$

Pokud $\overline{\mathrm{Ran}(T - \lambda I)} \neq X$, pak říkáme, že λ leží ve residuálním spektru
Označujeme $\sigma_r(T)$

Platí: $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r$

Definice: Resolventa operátoru

Buď $(V, \|\cdot\|)$ Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \rho(T)$

Zobrazení $R_T(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1}$ se nazývá resolventa operátoru T.

Přiřazení $M: \rho(T) \to \mathcal{B}(V)$ $\lambda \mapsto (T - \lambda I)^{-1}$ nazýváme resolventní funkcí.

Lemma:

Buďte $B, C \in \mathcal{B}(V)$, V Banachův.
Potom $BC \in \mathcal{B}(V)$ a platí: $\|BC\| \leq \|B\| \|C\|$

Lemma:
Buď $(V, \|\cdot\|)$ Banachův prostor, $B \in \mathcal{B}(V)$ takový, že $\|I - B\| < 1$.
Pak existuje $B^{-1} \in \mathcal{B}(V)$

Věta:
Buď $(V, \|\cdot\|)$ Banachův prostor, $T \in \mathcal{B}(V)$.
Potom $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$

Věta:
Integrální operátor $K: C(\bar{G}) \to C(\bar{G})$ se spojitým jádrem má čistě bodové spektrum kromě 0.
Všechny vlastní hodnoty mají konečnou násobnost a nemají nenulový hromadný bod

Věta: Hilbert-Schmidtova
Buď $K: L^2(G) \to L^2(G)$ integrální operátor se spojitým jádrem $k(x,y)$, které navíc splňuje $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$.

Potom K má čistě bodové spektrum kromě 0 a z vlastních funkcí operátoru K lze sestavit ON bázi.

Eliptické diferenciální rovnice a operátory, Sturm-Liouvilleova teorie

Definice: Sturm-Liouvilleova úloha
Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ omezená, otevřená množina.
Nechť ∂G je po částech C^1, $p \in C^1(\bar{G}), q \in C(\bar{G}) : p > 0 \wedge q \geq 0$ na G.

Potom $Lf(x) = -\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad}(f(x))) + q(x)f(x) = g(x)$

nazýváme Sturm-Liouvilleovou úlohou s okrajovými podmínkami

Okrajové podmínky: $\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = 0$ na ∂G
(Robinova hraniční podmínka)

$\alpha, \beta \in C(\partial G) : \alpha, \beta \geq 0 \wedge \alpha + \beta > 0$
$\vec{n}$ vnější normála

$\operatorname{Dom} L = \{ f \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G}) \mid Lf \in L^2(G), f$ splňuje hraniční podmínky $\}$

$\alpha = 0 : \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = 0$ Neumannova hr. p.

$\beta = 0 : f = 0$ Dirichletova hr. p.

Věta: Vlastnosti L

① L je symetrický operátor

② L je positivní operátor

③ $\dim \ker(L) \in \{0,1\}$

④ $\sigma(L) \subset \mathbb{R}_0^+$

⑤ Vlastní funkce tvoří OG soubor

⑥ Vlastní funkce lze volit reálné

Důkaz:

① L je symetrický: $\forall u,v \in Dom(L): \langle u|Lv\rangle = \langle Lu|v\rangle$

$\langle u|Lv\rangle = \langle Lu|v\rangle \Leftrightarrow \langle u|Lv\rangle - \langle Lu|v\rangle = 0$:

$$\langle u|Lv\rangle - \langle Lu|v\rangle = \int_G \bar{u} Lv - \int_G \overline{Lu}\, v = \int_G \left(\bar{u}(x) Lv(x) - \overline{Lu(x)}\, v(x)\right) dx = (\#)$$

$$* \langle u|Lv\rangle = \int_G \overline{u(x)} \left[-\operatorname{div}(p(x) \operatorname{grad}(v(x))) + q(x) v(x)\right] dx =$$

$$= \int_G -\overline{u(x)} \operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad}(v(x)))\, dx + \int_G \overline{u(x)}\, q(x) v(x)\, dx =$$

$$= \int_G -\operatorname{div}(\overline{u(x)} p(x) \operatorname{grad}(v(x)))\, dx + \int_G p(x) \operatorname{grad}(\overline{u(x)}) \operatorname{grad}(v(x))\, dx$$

$$+ \int_G q(x) v(x) \overline{u(x)}\, dx =$$

$$= -\int_{\partial G} \overline{u(x)} p(x) \operatorname{grad}(v(x)) \vec{n}\, dS + \int_G \left(p(x) \nabla v(x) \nabla \overline{u(x)} + q(x) \overline{u(x)} v(x)\right) dx =$$

$$= -\int_{\partial G} \overline{u(x)} p(x) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\, dS + \int_G \left(p(x) \nabla v(x) \nabla \overline{u(x)} + q(x) \overline{u(x)} v(x)\right) dx$$

$$(\#) = \int_{\partial G} p(x)\left(\overline{v(x)}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u(x)\frac{\overline{\partial v}}{\partial \vec{n}}\right) dS + \int_G \left(p \nabla \bar{u}\, \overline{\nabla v} - p \nabla u \overline{\nabla v} + u\bar{v}q - v\bar{u}q\right) =$$

$$= -\int_{\partial G} p(x) \underbrace{\left(\overline{v(x)}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u(x)\frac{\overline{\partial v}}{\partial \vec{n}}\right)}_{M} dx$$

$$M = \left|\begin{pmatrix} \bar{v} & \frac{\overline{\partial v}}{\partial \vec{n}} \\ u & \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0$$
$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$$

② L je positivní operátor : $\forall u \in Dom(L): \langle u | Lu \rangle \geq 0$

$$\langle u | Lu \rangle = \int_G \bar{u} L u = \int_G \bar{u}\left(-\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad}(u(x))) + q(x)u(x)\right) dx =$$

$$= -\underbrace{\int_{\partial G} \bar{u}(x)p(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS}_{A} + \int_G \left[\underbrace{p(x)\nabla u(x)\overline{\nabla u(x)}}_{B} + \underbrace{q(x)u(x)\overline{u(x)}}_{C}\right] dx =$$

$$B = p(x)|\nabla u|^2 \geq 0$$
$$C = q(x)|u|^2 \geq 0$$

$A = -p(x)\bar{u}(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$. $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$

$\alpha = 0 \Rightarrow \beta \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$

$\beta = 0 \Rightarrow \alpha \neq 0 \Rightarrow u = 0$

$\alpha, \beta \neq 0 : \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\frac{\alpha}{\beta} u$

$\rightarrow A = p(x)\bar{u}(x)\left(+\frac{\alpha}{\beta}u(x)\right) = +p(x)\frac{\alpha}{\beta}|u|^2 \geq 0$ ✓

③ $\dim \ker(L) \in \{0,1\}$

Buď $u \in Dom(L) \setminus \{0\}$.

Potom $u \in Ker(L) \Leftrightarrow Lu = 0 \Leftrightarrow \langle u | Lu \rangle = 0$

$$0 = \langle u | Lu \rangle = \int_{\partial G} \frac{\alpha}{\beta} p(x) |u(x)|^2 dS + \int_G p(x) |\nabla u|^2(x) dx + \int_G q(x) |u(x)|^2 dx$$

$u \in Ker(L) \Leftrightarrow$ ① $q\,|u|^2 = 0$
② $p\,|\nabla u|^2 = 0$
③ $\frac{\alpha}{\beta} p\,|u|^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ ① $q = 0$
③ $\alpha = 0$
② $\partial_{x_i} u = 0$, $\forall i \in \hat{n}$ $\rightarrow$ $u(x) = C$

④ $\sigma(L) \subset \mathbb{R}_0^+$

$0 \in \sigma(L) \Leftrightarrow q = 0 \wedge \alpha = 0$

pro $\lambda \in \sigma(L), \lambda \neq 0$:

$$\langle u_\lambda | L u_\lambda \rangle = \lambda \langle u_\lambda | u_\lambda \rangle = \lambda \|u_\lambda\|_2 > 0 \rightarrow \lambda > 0 \checkmark$$

⑤ Vlastní funkce tvoří OG soubor

pro $\lambda, \rho \in \sigma(L), \lambda \neq \rho$ platí

$$\langle u_\lambda | L v_\rho \rangle = \langle L u_\lambda | v_\rho \rangle \rightarrow \rho \langle u_\lambda | v_\rho \rangle = \lambda \langle u_\lambda | v_\rho \rangle \rightarrow \langle u_\lambda | v_\rho \rangle = 0$$