

# Cvičení k předmětu Rovnice matematické fyziky

Matěj Tušek

11. prosince 2020

## Abstrakt

Tyto poznámky obsahují řešené příklady ke cvičením z předmětu *Rovnice matematické fyziky*. Jejich výběr vhodně doplňuje přednášku Václava Kliky vedenou na FJFI, ČVUT v Praze.

*“Pain is inevitable. Suffering is optional. Say you’re running and you think, ‘Man, this hurts, I can’t take it anymore. The ‘hurt’ part is an unavoidable reality, but whether or not you can stand anymore is up to the runner himself.”*

Haruki Murakami

## Notace

Prvky  $\mathbb{R}^n$  pro  $n = 2, 3, \dots$  budeme značit tučně, např.  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ .

|                            |                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\cdot$                    | standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$                                                                                                                                                                                                                          |
| $*$                        | konvoluce                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $ x $                      | eukleidovská norma, je-li $x \in \mathbb{R}^n$ ; $n$ -rozměrný objem, je-li $x$ varieta dimenze $n$ ; stupeň, je-li $x$ multiindex                                                                                                                                    |
| $\ f\ _p$                  | norma $f$ na $L^p(U, \mu; \mathcal{B})$ , $\ f\ _p^p = \int_U \ f(x)\ _{\mathcal{B}}^p d\mu(x)$ pro $p \geq 1$ a $\ f\ _\infty = \text{ess sup}_{x \in U}  f(x) $ ; bude-li vhodné specifikovat množinu $U$ , použijeme značení $\ f\ _p \equiv \ f\ _{L^p(U)}$       |
| $G_\delta$                 | otevřené $\delta$ -okolí množiny $G \subset \mathbb{R}^n$ ; $G_\delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\mathbf{x}, G) < \delta\}$                                                                                                                       |
| $B(x, r)$                  | otevřená koule se středem $x$ a poloměrem $r$                                                                                                                                                                                                                         |
| $C^k(U)$                   | prostor $k$ -krát spojitě diferencovatelných funkcí na otevřené podmnožině $U \subset \mathbb{R}^n$                                                                                                                                                                   |
| $C^\infty(U)$              | prostor hladkých funkcí na otevřené podmnožině $U \subset \mathbb{R}^n$                                                                                                                                                                                               |
| $\mathcal{D}(U)$           | prostor testovacích funkcí na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$                                                                                                                                                                                               |
| $\mathcal{D}'(U)$          | duální prostor k $\mathcal{D}(U)$ , prostor zobecněných funkcí                                                                                                                                                                                                        |
| dist                       | vzdálenost množin, tj. pro $A, B \subset \mathbb{R}^n$ : $\text{dist}(A, B) = \inf\{ x - y  : x \in A, y \in B\}$                                                                                                                                                     |
| $\omega_\varepsilon$       | standardní vyhlazovací funkce                                                                                                                                                                                                                                         |
| $L^p(U, \mu; \mathcal{B})$ | vektorový prostor (tříd ekvivalence skoro všude shodných) funkcí $\mu$ -integrovatelných v $p$ -té mocnině na $U \subset \mathbb{R}^n$ s hodnotami v Banachově prostoru $\mathcal{B}$ ; není-li uvedeno jinak, $\mathcal{B} = \mathbb{R}$ a $\mu$ je Lebesgueova míra |

|                    |                                                                                                 |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $L^\infty(U)$      | vektorový prostor (tříd ekvivalence skoro všude shodných) reálných skoro všude omezených funkcí |
| $\hat{n}$          | $:= \{1, 2, \dots, n\}$                                                                         |
| $\mathbb{N}_0$     | množina nezáporných celých čísel, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$                        |
| $\bar{\mathbb{N}}$ | rozšířená množina přirozených čísel, $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$           |
| $S^n$              | $n$ -rozměrná sféra poloměru 1, $ S^n  = 2\pi^{\frac{n+1}{2}}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$            |
| supp               | nosič funkce či zobecněné funkce/distribuce                                                     |

## 1 Cvičení 1

- Explicitní příklady testovacích funkcí, vyhlazení pomocí konvoluce, základní operace na testovacích funkcích.

### Příklad 1.1 (explicitní konstrukce testovacích funkcí)

i. Ukažte, že funkce

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

je hladká na  $\mathbb{R}$ .

ii. Využijte funkce  $h$  ke konstrukci nějaké netriviální testovací funkce.

iii. Pro  $a, b$  splňující  $-\infty < a < b < +\infty$  nalezněte testovací funkci s nosičem  $[a, b]$ . K tomu využijte předchozího bodu.

iv. Promyslete si, že

$$\omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} C_n e^{-1/(1-|\mathbf{x}|^2)} & |\mathbf{x}| < 1 \\ 0 & |\mathbf{x}| \geq 1, \end{cases}$$

kde  $C_n \in \mathbb{R}$ , leží v  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Konvenčně budeme hodnotu  $C_n$  volit takovou, aby  $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ .

v. Konečně pro  $\varepsilon > 0$  položme  $\omega_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-n} \omega(\mathbf{x}/\varepsilon)$ . Jaké jsou nosič a  $L^1$ -norma funkce  $\omega_\varepsilon$ ?

♣ Funkce  $\omega_\varepsilon$  z příkladu výše nazýváme *standardní vyhlazovací funkce*.

*Řešení:*

i. Funkce  $h$  je zřejmě hladká na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Soustředíme se tedy dále na bod  $x = 0$ . Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0-} h(x) = h(0),$$

je funkce  $h$  spojitá v bodě nula. Dále jsou všechny levostranné derivace funkce  $h$  v  $x = 0$  nulové. Ukážeme, že to samé platí i pro derivace pravostranné. Začneme první derivací, ta je dána limitou

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{-1/t}}{t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0.$$

Druhou pravostrannou derivaci potom můžeme počítat jako

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^{-2} e^{-1/t}}{t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0.$$

Nulové vyjdou i vyšší pravostranné derivace, protože pro libovolný polynom  $p$  platí  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) e^{-x} = 0$ . Celkem dostáváme  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

- ii. Funkce  $h$  má nosič  $[0, +\infty)$ , nejedná se tedy o funkci testovací. Nicméně například funkce  $\varphi(x) = h(x)h(1-x)$  již leží v  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , neboť je dána součinem dvou hladkých funkcí a platí pro ni  $\text{supp}(\varphi) = [0, 1]$ .
- iii. Pomocí afinní transformace  $x \mapsto (x-a)/(b-a)$ , převedeme interval  $[a, b]$  bijektivně na interval  $[0, 1]$ , tj. na nosič funkce  $\varphi$  z předchozího bodu. Funkce  $\varphi_{a,b}(x) := \varphi((x-a)/(b-a))$  má potom požadované vlastnosti. To lze nahlédnouti velice rychle buď přímo či s využitím obecného poznatku, že afinní transformace (s regulární maticí) složená s testovací funkcí dává opět testovací funkci.
- iv. Začneme případem  $n = 1$ . Funkci  $\omega$  můžeme rozložit jako  $\omega(x) = C_1 h(2(x+1))h(2(1-x))$ , z čehož podobně jako ve druhém bodě dostáváme  $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . V obecném případě (včetně  $n = 1$ ) platí  $\omega(\mathbf{x}) = C_n h(1 - |\mathbf{x}|^2)$ . Funkce  $h$  a  $\mathbf{x} \mapsto (1 - |\mathbf{x}|^2)$  jsou hladké, tudíž  $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dále nosič funkce  $\omega$  je omezený z definice.
- v. Jelikož  $\text{supp}(\omega) = B(\mathbf{0}, 1)$ , platí  $\text{supp}(\omega_\varepsilon) = B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ . Dále máme

$$\|\omega_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\omega_\varepsilon| = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(\mathbf{x}/\varepsilon) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1.$$

**Příklad 1.2 (vyhlazená charakteristická funkce)** Budťe  $\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  třída vyhlazovacích funkcí z příkladu 1.1 a  $G$  otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$ . Dále pro libovolné  $\delta > 0$  zavedme  $\delta$ -okolí množiny  $G$  jako

$$G_\delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\mathbf{x}, G) < \delta\}.$$

Potom funkce  $\eta_\varepsilon$  definovaná předpisem

$$\eta_\varepsilon := \omega_\varepsilon * \chi_{G_{2\varepsilon}}, \text{ tj. } \eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \chi_{G_{2\varepsilon}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

má následující vlastnosti

- i.  $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,
- ii.  $0 \leq \eta_\varepsilon \leq 1$ ,
- iii.  $\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1$  pro  $x \in G_\varepsilon$ ,
- iv.  $\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$  pro  $x \notin G_{3\varepsilon}$ ,
- v.  $(\forall \alpha)(\exists K_\alpha)(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(|D^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leq K_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|})$ .

♣ Funkci  $\eta_\varepsilon$  z příkladu výše nazýváme *vyhlazená charakteristická funkce množiny  $G$* .

*Řešení:*

- i. Pro spojitost funkce  $\eta_\varepsilon$  stačí ukázat, že pro libovolné pevné  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  platí  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \eta_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ , tj.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Chceme tedy zaměnit integrál a limitu. K tomu je dle Lebesgueovy věty nutno najít integrabilní majorantu na  $G_{2\varepsilon}$ , která bude nezávislá na volbě  $\mathbf{x}$  z jistého otevřeného (libovolně malého ale pevně zvoleného) okolí bodu  $\mathbf{x}_0$ . Za něj můžeme volit například kouli  $B(\mathbf{x}_0, 1)$ , na které platí odhad

$$(\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, 1))(\forall \mathbf{y} \in G_{2\varepsilon})(|\omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq \chi_{B(\mathbf{x}_0, 1+\varepsilon)}(\mathbf{y}) \sup_{\mathbb{R}^n} |\omega_\varepsilon| = C_n \varepsilon^{-n} \chi_{B(\mathbf{x}_0, 1+\varepsilon)}(\mathbf{y})),$$

přičemž majoranta je zjevně integrabilní. V odhadu jsme využili skutečnost, že nosič funkce  $\mathbf{y} \mapsto \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  je koule  $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ .

Podívejme se nyní na první parciální derivaci funkce  $\eta_\varepsilon$ . Pokud by platilo

$$\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_j} = \int_{G_{2\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x_j} \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

redukuje se důkaz spojitosti první derivace v bodě  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  na nalezení integrabilní majoranty pro integrand výše na nějakém okolí bodu  $\mathbf{x}_0$  (přesněji stačí uvažovat okolí  $j$ -té komponenty  $\mathbf{x}_0$ ). To je současně kruciální podmínka pro záměnu integrálu a derivace podle parametru (kterým je v našem případě  $x_j$ ), jež navíc s ostatními předpoklady věty o záměně implikuje existenci derivace integrálu podle parametru, tj. samotnou diferencovatelnost funkce  $\eta_\varepsilon$ . Podobně jako v důkaze spojitosti  $\eta_\varepsilon$  ale platí

$$(\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, 1))(\forall \mathbf{y} \in G_{2\varepsilon}) \left( \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right| \leq \chi_{B(\mathbf{x}_0, 1+\varepsilon)}(\mathbf{y}) \sup_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \omega_\varepsilon \right| \right).$$

Jelikož  $\omega_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , dostáváme  $\sup_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \omega_\varepsilon \right| < +\infty$ . (Funkce  $\frac{\partial}{\partial x_j} \omega_\varepsilon$  je totiž spojitá a s kompaktním nosičem. Supremum je dokonce nabýváno.)

U vyšších derivací se postupuje naprosto analogicky.

ii. Pro spodní odhad si připomeňme, že  $\omega_\varepsilon \geq 0$ . Horní odhad dostaneme následovně

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leq \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 1.$$

iii. Je-li  $\mathbf{x} \in G_\varepsilon$ , potom v integrálu pro  $\eta_\varepsilon$  integrujeme přes celý nosič integrandu, ten se ale integruje na jedničku.

iv. Pro  $\mathbf{x}$  vně  $G_{3\varepsilon}$  naopak celý nosič funkce  $\mathbf{y} \mapsto \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  leží vně integrační oblasti  $G_{2\varepsilon}$ . V definčním vztahu pro  $\eta_\varepsilon(\mathbf{x})$  tak integrujeme čistou nulu.

v. Dle prvního bodu platí

$$D^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = D^\alpha \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{G_{2\varepsilon}} D^\alpha \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

což dále upravíme na

$$D^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{G_{2\varepsilon}} (D^\alpha \omega_\varepsilon)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \varepsilon^{-n-|\alpha|} \int_{G_{2\varepsilon}} (D^\alpha \omega)\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{y}$$

Nakonec provedeme následující odhady

$$|D^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \varepsilon^{-n-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \left| (D^\alpha \omega)\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon}\right) \right| d\mathbf{y} = \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |(D^\alpha \omega)(\mathbf{z})| d\mathbf{z}.$$

Poslední integrál je konečný, neboť  $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**Příklad 1.3 (operace na  $\mathcal{D}$ )** Pro  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  zavedme funkci  $\psi$  jako

i.  $\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{a})$ , kde  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ,

ii.  $\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\alpha \mathbf{x})$ , kde  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

iii.  $\psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(\mathbf{x})$ , kde  $j \in \hat{n}$ ,

iv.  $\psi(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$ , kde  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Ukažte, že  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

*Řešení:*

i. Jelikož funkce  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$  a  $\varphi$  jsou hladké, je hladká i složená funkce  $\psi$ . Dále platí  $\text{supp}(\psi) = \{\mathbf{x} - \mathbf{a} : \mathbf{x} \in \text{supp}(\varphi)\}$ , tj. nosič funkce  $\psi$  se dostane z nosiče funkce  $\varphi$  prostým posunutím o konstantní vektor. Jmenované nosiče jsou tedy omezené právě současně.

- ii. Protože funkce  $\mathbf{x} \mapsto \alpha \mathbf{x}$  a  $\varphi$  jsou hladké, je hladká i složená funkce  $\psi$ . Nosič funkce  $\psi$  se dostane škálováním nosiče funkce  $\varphi$  (smršťováním pro  $|\alpha| > 1$ , respektive natahováním pro  $|\alpha| < 1$ ), které je v případě  $\alpha < 0$  ještě nutno složit s prostorovou inverzí (středovou souměrností podle počátku), protože  $\text{supp}(\psi) = \{\alpha^{-1}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \text{supp}(\varphi)\}$ . Nosiče funkcí  $\varphi$  a  $\psi$  jsou tedy opět omezené právě současně.
- iii. Libovolná derivace hladké funkce je hladká, speciálně to platí pro funkci  $\psi$ . Dále ukážeme, že  $\text{supp}(\psi) \subset \text{supp}(\varphi)$  (může platit i rovnost). Uvažujme  $\mathbf{x} \in N := \mathbb{R}^n \setminus \text{supp}(\varphi)$ . Množina  $N$  je z definice nosiče vždy otevřená, tj. existuje  $\delta > 0$  s vlastností  $B(\mathbf{x}, \delta) \subset N$ . Pro libovolné  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta)$  tedy platí  $\varphi(\mathbf{y}) = 0$ . Potom ale nutně  $(\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta))(\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y}) = 0)$ . Odtud dostáváme, že  $\mathbf{x} \notin \text{supp}(\psi)$ . Kdyby totiž naopak  $\mathbf{x} \in \text{supp}(\psi)$ , musel by v libovolném okolí bodu  $\mathbf{x}$  existovat bod  $\mathbf{y}$  s vlastností  $\psi(\mathbf{y}) \neq 0$ . Tím jsme odvodili, že  $\mathbb{R}^n \setminus \text{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^n \setminus \text{supp}(\psi)$ , což je ekvivalentní dokazované inkluzi.
- iv. Hladkost  $\psi$  plyne z pozorování, že součin hladkých funkcí je opět hladký. Navíc zřejmě platí  $\text{supp}(a\varphi) \subset \text{supp}(\varphi)$ , protože množina nulových bodů součinu  $a\varphi$  se určitě nemůže zmenšit vůči množině nulových bodů funkce  $\varphi$ .

**Bonus 1.1** Standardně definujeme konvergenci na  $\mathcal{D}$  následovně. Mějme  $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  a  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ . Potom řekneme, že  $\varphi_n$  konverguje k  $\varphi$  v  $\mathcal{D}$ , značíme  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ , právě tehdy jsou-li následující dvě podmínky splněny: 1.  $(\exists R > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\text{supp}(\varphi_n) \subset B(\mathbf{0}, R))$ ; 2.  $(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(D^\alpha \varphi_n \xrightarrow{\mathbb{R}^d} D^\alpha \varphi)$ . Lze však užívat definici alternativní: Řekneme, že  $\varphi_n$  konverguje v  $\mathcal{D}$ , značíme  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}}$ , jsou-li následující dvě podmínky splněny: 1.  $(\exists R > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\text{supp}(\varphi_n) \subset B(\mathbf{0}, R))$ ; 2.  $(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(D^\alpha \varphi_n \xrightarrow{\mathbb{R}^d})$ . V druhé definici a priori nepředpokládáme existenci limitní funkce a to, že nutně leží v  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ . Dokažte, že obojí však platí!

**Bonus 1.2** Na  $\mathcal{D}$  jsme zavedli konvergenci přímo. Ve skutečnosti je možné na  $\mathcal{D}$  zavést takovou topologii, že konvergence posloupnosti vzhledem k této topologii splývá s výše uvedenou konvergencí. Více k tématu například na <https://terrytao.wordpress.com/2009/04/19/245c-notes-3-distributions/>.

## 2 Cvičení 2

- Konvergence testovacích funkcí.

**Příklad 2.1** Rozhodněte zda posloupnost funkcí

$$\varphi_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-1/(1-(n|\mathbf{x}|)^2)} & |\mathbf{x}| < 1/n \\ 0 & |\mathbf{x}| \geq 1/n, \end{cases}$$

konverguje v  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ .

*Řešení:* Z příkladu 1.1 víme, že  $(\forall n \in \mathbb{N})(\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d))$ . Úloha je tedy smyslupně zadána. Konvergence na  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  v sobě speciálně zahrnuje stejnoměrnou konvergenci na  $\mathbb{R}^d$ . Jediným možným kandidátem na stejnoměrnou limitu je limita bodová (pokud vůbec existuje), pro kterou dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-1} & \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \end{cases}$$

což je nespojitá funkce. Stejnoměrná limita spojitých funkcí by ale byla nutně spojitá. Docházíme k závěru, že posloupnost  $(\varphi_n)$  v  $\mathcal{D}$  nekonverguje.

**Příklad 2.2** *Nechť posloupnost  $(\varphi_n)$  konverguje na  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ . Potom*

$$(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(\exists K_\alpha \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\sup_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha \varphi_n| \leq K_\alpha).$$

*Řešení:* Pro  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  označme  $\sup_{\mathbb{R}^d} |\psi| =: \|\psi\|_\infty$ . Zobrazení  $\psi \mapsto \|\psi\|_\infty$  skutečně vyhovuje axiomům normy, speciálně pro něj platí trojúhelníková nerovnost. Jelikož  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$  pro nějaké  $\varphi \in \mathcal{D}$ , můžeme psát  $(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi\|_\infty) = 0$ . To například znamená, že  $(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n > n_1)(\|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi\|_\infty < 1)$ . Z trojúhelníkové nerovnosti odvodíme, že

$$\|D^\alpha \varphi_n\|_\infty \leq \|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi\|_\infty + \|D^\alpha \varphi\|_\infty \leq \max\{1\} \cup \{\|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_\infty\}_{j=1}^{n_1} + \|D^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Zbývá pravou stranu označit jako  $K_\alpha$ .

♣ Norma zavedená v příkladu výše se nazývá *supremová norma*. V případě testovacích funkcí je supremum dokonce nabýváno, můžeme tedy stejně dobře hovořit o *maximové normě*.

**Příklad 2.3** *Zkuste vymyslet nějaké explicitní netriviální, tj. nikoliv od jistého členu konstantní, příklady posloupností konvergujících v  $\mathcal{D}$ .*

*Řešení:* Uvedeme několik možných příkladů.

- $(a_n \varphi)_{n=1}^{+\infty}$ , kde  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$  je libovolná konvergentní číselná posloupnost,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ , a  $\varphi$  je pevný prvek z  $\mathcal{D}$ . Zřejmě  $\text{supp}(a_n \varphi) \subset \text{supp}(\varphi)$ . Stejnoměrná konvergence všech derivací plyne z rovnosti

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |D^\alpha(a_n \varphi(\mathbf{x})) - D^\alpha(a \varphi(\mathbf{x}))| = |a_n - a| \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |D^\alpha \varphi(\mathbf{x})|,$$

neboť supremum na pravé straně je konečné na základě předpokladu  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

- $(\varphi^n)_{n=1}^{+\infty}$ , kde  $\varphi \in \mathcal{D}$  je taková, že  $(\exists C \in (0, 1))(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d)(|\varphi(\mathbf{x})| \leq C)$ . Zjevně platí  $\text{supp}(\varphi^n) = \text{supp}(\varphi)$ . Bodová limita  $\varphi^n$  je nulová funkce. Ukážeme, že se jedná dokonce o limitu na  $\mathcal{D}$ . Stejněměrnou konvergenci dostáváme z odhadu

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbb{R}^d} |\varphi^n - 0| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C^n = 0.$$

Pro první derivaci dostaneme

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sup_{\mathbb{R}^d} |\varphi^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n C^{n-1} \sup_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right| = 0,$$

protože supremum na pravé straně odhadu je konečné díky předpokladu  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Podobně lze postupovat pro vyšší derivace, kdy je výraz pro  $D^\alpha \varphi^n$  tvořen konečným součtem (počet členů lze odhadnout v termínech  $\alpha$ ) členů tvaru

$$b_n \varphi^{n-k} D^{\beta_1} \varphi D^{\beta_2} \varphi \dots D^{\beta_l} \varphi,$$

kde  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n C^{n-k} = 0$ . Součet odhadneme z trojúhelníkové nerovnosti a každý člen odhadneme analogicky jako pro případ první derivace. (Alternativně dokážeme hypotézu, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha \varphi^n| = 0$ , pomocí matematické indukce dle stupně derivace.)

- $(\varphi * \omega_{1/n})_{n=1}^{+\infty}$ , kde  $\varphi$  je pevný prvek v  $\mathcal{D}$  a  $\omega_{1/n}$  je standardní vyhlazovací funkce, viz příklad 1.1. Připomeňme, že

$$\varphi_n(\mathbf{x}) := (\varphi * \omega_{1/n})(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \omega_{1/n}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Při hledání bodové limity posloupnosti  $\varphi_n$  narážíme na problém, že bodová limita posloupnosti  $\omega_{1/n}(\mathbf{x})$  je  $+\infty$  pro  $\mathbf{x} = 0$  a 0 všude jinde. Kdybychom provedli záměnu limity a integrálu dostaneme jako limitní funkci posloupnosti  $(\varphi_n)$  nulu, což je, jak záhy uvidíme, špatný výsledek. Ostatně to ani neodpovídá již získané intuici, že konvoluce s  $\omega_{1/n}$  má vyhlazovací účinek. Je tedy spíše rozumné předpokládat, že limitní funkce je  $\varphi$  samotná. Tu lze přepsat jako  $\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathbf{x}) \omega_{1/n}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ , protože  $\int_{\mathbb{R}^d} \omega_{1/n} = 1$ . Z vlastností funkce  $\omega_{1/n}$  a věty o přírůstku funkce postupně odvodíme

$$\begin{aligned} |\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x})) \omega_{1/n}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \int_{B(\mathbf{0}, 1/n)} |\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x})| \omega_{1/n}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \leq \int_{B(\mathbf{0}, 1/n)} |\nabla \varphi(\mathbf{z})| |\mathbf{y}| \omega_{1/n}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{z}$  leží někde na úsečce mezi body  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  a jeho volba závisí na konkrétních hodnotách  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ . Jelikož  $\varphi \in \mathcal{D}$ , máme  $\sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d} |\nabla \varphi(\mathbf{z})| =: C \in \mathbb{R}$ . V odhadu tak můžeme pokračovat následovně

$$|\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{n} \int_{B(\mathbf{0}, 1/n)} \omega_{1/n}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{C}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$



Jelikož horní odhad  $C/n$  je nezávislý na  $\mathbf{x}$ , právě jsme odvodili stejnoměrnou konvergenci  $\varphi_n$  k  $\varphi$  na  $\mathbb{R}^d$ .

Pokud bychom ukázali, že  $D^\alpha(\varphi * \omega_{1/n}) = (D^\alpha\varphi) * \omega_{1/n}$ , mohli bychom odvodit i potřebný vztah  $D^\alpha\varphi_n \xrightarrow{\mathbb{R}^d} D^\alpha\varphi$  naprosto stejně jako výše, protože  $D^\alpha\varphi \in \mathcal{D}$ . Podívejme se na první derivaci. Ptáme se tedy, zda platí

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \omega_{1/n}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \omega_{1/n}(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

tj. jestli můžeme zaměnit integrál a derivaci podle parametru ( $n$  je nyní fixní). Ta kruciální ze sady postačujících podmínek záměny říká, že musíme najít integrabilní majorantu pro integrand na pravé straně na nějakém okolí parametru  $x_j$  (ten je libovolný, protože záměnu chceme provádět na celém  $\mathbb{R}$ , ale fixní). Velkoryse za toto okolí vezmeme celé  $\mathbb{R}$ , kde provedeme odhad

$$(\forall x_j \in \mathbb{R})(\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d) \left( \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \omega_{1/n}(\mathbf{y}) \right| \leq \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial}{\partial z_j} \varphi(\mathbf{z}) \right| \chi_{B(\mathbf{0}, 1/n)}(\mathbf{y}) \right).$$

Pravá strana je integrabilní na  $\mathbb{R}^d$ . Pro vyšší derivace bychom postupovali zcela analogicky.

Zbývá ukázat, že nosiče  $\varphi_n$  jsou stejně omezené. Z integrální definice konvoluce spolu s faktem, že  $\text{supp}(\omega_{1/n}) = B(\mathbf{0}, 1/n)$ , nahlédneme, že

$$\text{supp}(\varphi_n) \subset \overline{(\text{supp}(\varphi))_{1/n}}.$$

Připomínáme, že dolním indexem u množiny rozumíme její odpovídající okolí. Všechny nosiče tudíž leží v  $\overline{(\text{supp}(\varphi))_1}$ .

**Bonus 2.1** Rozhodněte pro jaká  $p \in [1, +\infty]$  platí  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ .

**Bonus 2.2** Pro jaké  $a \in \mathbb{R}$ ,  $p \in [1, +\infty)$  a jakou otevřenou podmnožinu  $G \subset \mathbb{R}^d$  platí  $x^{-a} \in L^p(G)$ .

### 3 Cvičení 3

- Příklady zobecněných funkcí.

**Příklad 3.1** Rozhodněte, zda je následující zobrazení  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  prvkem  $\mathcal{D}'$ :

- $(f, \varphi) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$
- $(f, \varphi) = \lim_{x \rightarrow \pi} \varphi^{(100)}(x)$
- $(f, \varphi) = \varphi(0) + 5.5$

- iv.  $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \cos(ax) \varphi(x) dx$  pro nějaké  $a \in \mathbb{R}$
- v.  $(f, \varphi) = \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$
- vi.  $(f, \varphi) = \int_M \nu(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$ , kde  $M$  je po částech hladká nadplocha v  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ ,  $\nu \in L^1(M, dS)$
- vii.  $(f, \varphi) = (\mathcal{P}_x^1, \varphi) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{1}{x} \varphi(x) dx$ .

*Řešení:* Připomeňme, že  $f \in \mathcal{D}'$  právě tehdy, pokud  $f$  je lineární spojité zobrazení na prostoru  $\mathcal{D}$ . Spojitostí míníme, že  $f$  převádí libovolnou konvergentní posloupnost  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  v  $\mathcal{D}$  na konvergentní posloupnost  $((f, \varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$  v  $\mathbb{R}$ . Máme-li již dokázanou linearitu, stačí pro libovolné lineární zobrazení dokazovat spojitost v libovolném pevném bodě, za něj bývá výhodné volit nulový vektor, tj. v našem případě nulovou funkci (v  $\mathcal{D}$ ). Níže tedy  $(\varphi_n)$  bude představovat libovolnou posloupnost v  $\mathcal{D}$  splňující  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ . Pro spojitost lineárního funkcionálu  $f$  se budeme snažit ukázat, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = 0$ .

- i. Jelikož  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0)$  pro libovolnou  $\varphi \in \mathcal{D}$ , dostáváme, že  $f$  je Diracova  $\delta$ -funkce, tedy prvek  $\mathcal{D}$  – viz přednáška.
- ii. Podobně jako výše nahlédneme, že  $f$  je stá derivace  $\delta$ -funkce s nosičem v  $x = \pi$ . Pro libovolné  $\varphi \in \mathcal{D}$  totiž platí

$$(f, \varphi) = \lim_{x \rightarrow \pi} \varphi^{(100)}(x) = \varphi^{(100)}(\pi) = (\delta_\pi, \varphi^{(100)}) = (-1)^{100} (\delta_\pi^{(100)}, \varphi) = (\delta_\pi^{(100)}, \varphi).$$

Obecně platí, že libovolná derivace zobecněné funkce je opět zobecněná funkce, viz přednáška, ale zkusme si to v tomto případě ověřit i přímo.

V první řadě z linearity derivace a limity ověříme, že  $f$  je lineární. Dále uvažujme libovolnou posloupnost  $(\varphi_n)$  s vlastností  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ , tedy speciálně  $\varphi_n^{(100)} \xrightarrow{\mathbb{R}^d} 0^{(100)} = 0$ , z čehož již plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^{(100)}(\pi) = 0.$$

Shrnujeme, že  $f \in \mathcal{D}'$ .

- iii. Zobrazení  $f$  není ani lineární, snadno například nahlédneme, že

$$(f, 2\varphi) = 2\varphi(0) + 5.5 \neq 2\varphi(0) + 11 = 2(f, \varphi).$$

- iv. Jelikož  $\cos(ax) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ , jedná se o regulární distribuci, tedy nutně prvek  $\mathcal{D}'$ . Zkusme si to odvodit přímo. Linearitu  $f$  dostáváme z linearity integrálu. Pro libovolnou výše popsanou posloupnost  $(\varphi_n)$  máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \cos(ax) \varphi_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(ax) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0.$$

V druhém kroce jsme použili Lebesgueovu větu s integrabilní majorantou  $K_0 \chi_B$ , kde  $B$  je taková koule, že  $(\forall n \in \mathbb{N})(\text{supp}(\varphi_n) \subset B)$ . Existence takové koule je

zaručena stejnou omezeností nosičů konvergentní posloupnosti  $(\varphi_n)$ . Konstanta  $K_0$  má vlastnost, že  $(\forall n \in \mathbb{N})(\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n| \leq K_0)$ . Její existenci jsme odvodili v příkladě 2.2.

v. Předpis pro  $f$  upravíme následovně

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx &= \lim_{a \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} \chi_{(a, +\infty)} \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{a \rightarrow 0+} \chi_{(a, +\infty)} \varphi(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(0, \infty)}(x) \varphi(x) dx = (\chi_{(0, \infty)}, \varphi). \end{aligned}$$

Zde jsme v druhé rovnosti aplikovali Lebesgueovu větu s integrabilní majorantou  $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi| \chi_{\text{supp}(\varphi)}(x)$ . Odtud  $f = \chi_{(0, \infty)}$  jako funkcionál na  $\mathcal{D}$ , kde po částech konstatní funkce  $\chi_{(0, \infty)}$  je zřejmě lokálně integrabilní, a tudíž se jedná o regulární distribuci.

vi. Linearita  $f$  je důsledkem linearit integrálu. Nechť  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ . Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \nu(\mathbf{x}) \varphi_n(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_M \nu(\mathbf{x}) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0.$$

V druhé rovnosti jsme opět použili Lebesgueovu větu, tentokrát s integrabilní majorantou  $K_0 |\nu|$ , kde  $K_0$  je konstanta z příkladu (2.2).

vii. Nejprve si upravíme integrál v definici  $f$  následujícím způsobem

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{1}{x} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx, \quad (1)$$

kde jsme v prvním integrálu substituovali  $x \mapsto -x$ . Integrál na pravé straně si dále přepíšeme jako

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \chi_{(\varepsilon, +\infty)}(x) \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

Pro takto zapsaný integrand jsme již schopni najít integrabilní majorantu nezávislou na  $\varepsilon$  (všimněte si, že pro původní integrál to není možné). Konkrétně máme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in (0, +\infty)) \left( \left| \chi_{(\varepsilon, +\infty)}(x) \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| \leq \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| \right).$$

Věta o přírůstku funkce říká, že existuje  $\xi_x \in (-x, x)$  takové, že  $\varphi(x) - \varphi(-x) = \varphi'(\xi_x) 2x$ . Horní odhad ve vztahu výše je tedy omezený. Spolu s omezeností  $\text{supp}(\varphi)$  nám toto implikuje, že

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \in L^1((0, +\infty), dx). \quad (2)$$

Po záměně limity a integrálu v (1) dostáváme

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx. \quad (3)$$

Linearita funkcionálu  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$  je zjevná. Prozkoumejme nyní jeho spojitost. Nechť  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ . Potom z Lebesgueovy věty odvodíme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_n) = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{x} dx = 0.$$

Zde jsme integrabilní majorantu našli pomocí odhadu ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) ( $\forall x \in (0, +\infty)$ )

$$\left| \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{x} \right| = 2|\varphi'_n(\xi_{x,n})| \leq 2K_1\chi_B(x),$$

kde hodnota  $\xi_{x,n} \in (-x, x)$  pochází z věty o přírůstku funkce,  $K_1$  je zavedeno v příkladě 2.2 a  $B$  je koule (zde konkrétně interval) se středem v počátku obsahující nosiče všech funkcí  $\varphi_n$  (a tedy i nosiče jejich derivací). Celkem jsme tedy dokázali, že  $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

♣ Zobecněná funkce zavedená v bodě *vi.* předchozího příkladu se nazývá *jednoduchá vrstva* a značí se  $\nu\delta_S$ . Zobecněná funkce  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$  je tzv. *regularizací*  $\frac{1}{x}$  *ve smyslu hlavní hodnoty* (anglicky *principal value*).

**Příklad 3.2** Zjednodušte v  $\mathcal{D}'$  výraz  $x\mathcal{P}\frac{1}{x}$ .

*Řešení:* Pro libovolnou  $\varphi \in \mathcal{D}$  platí

$$\begin{aligned} (x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) &= (\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x)) = \int_0^{+\infty} \frac{x\varphi(x) - (-x)\varphi(-x)}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(x) + \varphi(-x) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = (1, \varphi). \end{aligned}$$

Zde jsme využili vztah (3). Dospíváme k závěru, že na  $\mathcal{D}'$  platí  $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$ .

## 4 Cvičení 4

- Sochockého vzorce, operace se zobecněnými funkcemi, limita poslupnosti zobecněných funkcí.

**Příklad 4.1** Připomeňte si další možné regularizace  $\frac{1}{x}$  na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  dané jako

$$(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$$

a dokažte platnost tzv. Sochockého vzorců:

$$\boxed{\frac{1}{x \pm i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta.}$$

*Řešení:* Pro libovolné  $\varphi \in \mathcal{D}$  a  $\varepsilon > 0$  provedeme následující úpravy

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi\right) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} - \frac{\varphi(-x)}{x \mp i\varepsilon} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x(\varphi(x) - \varphi(-x))}{x^2 + \varepsilon^2} dx \mp i\varepsilon \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \end{aligned}$$

a limitu pro  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi\right)$  spočteme zvlášť pro reálnou a imaginární část. Jelikož  $(\forall \varepsilon > 0) (\forall x > 0)$

$$\left| \frac{x(\varphi(x) - \varphi(-x))}{x^2 + \varepsilon^2} \right| \leq \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right|,$$

kde horní odhad je integrabilní na  $(0, +\infty)$  – viz (2), dostáváme z Lebesgueovy věty, že

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} \frac{x(\varphi(x) - \varphi(-x))}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right).$$

Dále přepíšeme imaginární část  $\left(\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi\right)$  jako

$$\begin{aligned} \mp \varepsilon \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx &= \mp \varepsilon \left( \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(-x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right) \\ &= \mp \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \mp \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon x)}{1 + x^2} dx. \end{aligned}$$

Pomocí Lebesgueovy věty, kde za integrabilní majorantu vezmeme  $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi| (1 + x^2)^{-1}$ , potom snadno odvodíme

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \mp \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon x)}{1 + x^2} dx = \mp \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(0)}{1 + x^2} dx = \mp \pi \varphi(0) = \mp \pi(\delta, \varphi).$$

Celkem jsme tak dokázali

$$\left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) \mp i\pi(\delta, \varphi),$$

jinými slovy na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  platí Sochockého vzorce.

**Příklad 4.2** Pro  $n \in \mathbb{N}$  nalezněte  $(x^n)'$  v  $\mathcal{D}'$ .

*Řešení:* Nejprve si uvědomme, že úloha má smysl, neboť  $x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , je regulární zobecněná funkce. Buď nyní  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  libovolná, potom

$$\begin{aligned} ((x^n)', \varphi) &= -(x^n, \varphi') = - \int_{\mathbb{R}} x^n \varphi'(x) dx = -[x^n \varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} nx^{n-1} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} nx^{n-1} \varphi(x) dx = (nx^{n-1}, \varphi). \end{aligned}$$

Zde hraniční člen v integraci per-partes vyšel nulový díky omezenosti  $\text{supp}(\varphi)$ . I slepý nyní vidí, že na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  platí  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , stejně jako v případě klasických funkcí.

**Příklad 4.3** Dokažte, že na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  platí  $\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$ .

*Řešení:* Pro libovolnou testovací funkci  $\varphi$  platí

$$\begin{aligned} (\delta(x - x_0), \varphi(x)) &= (\delta(x), \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0) = (\delta_{x_0}, \varphi) \\ &= (\delta(x), \varphi(x_0 - x)) = (\delta(x_0 - x), \varphi(x)), \end{aligned}$$

z čehož obdržíme dokazovanou rovnost.

**Příklad 4.4** Upravte na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  výraz  $x^2\delta''(x)$ .

*Řešení:* Pro libovolnou testovací funkci  $\varphi$  platí

$$(x^2\delta''(x), \varphi(x)) = (\delta''(x), x^2\varphi(x)) = (\delta(x), 2\varphi(x) + 4x\varphi'(x) + x^2\varphi''(x)) = (2\delta(x), \varphi(x))$$

a tudíž  $x^2\delta''(x) = 2\delta(x)$ .

**Příklad 4.5** Upravte na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  výraz  $x^n\delta^{(k)}(x)$ , kde  $n, k \in \mathbb{N}$ .

*Řešení:* Pro libovolné  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  dostáváme

$$\begin{aligned} (x^n\delta^{(k)}(x), \varphi(x)) &= (\delta^{(k)}(x), x^n\varphi(x)) = (-1)^k(\delta(x), (x^n\varphi(x))^{(k)}) \\ &= (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left( (x^n)^{(j)} \varphi^{(k-j)}(x) \right) \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n > k \\ (-1)^k \binom{k}{n} n! \varphi^{(k-n)}(0) & \text{pro } n \leq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Ve výsledku pro druhou alternativu dále provedeme následující úpravy

$$\binom{k}{n} n! \varphi^{(k-n)}(0) = \frac{k!}{(k-n)!} \varphi^{(k-n)}(0) = \frac{k!}{(k-n)!} (\delta, \varphi^{(k-n)}) = \frac{(-1)^{k-n} k!}{(k-n)!} (\delta^{(k-n)}, \varphi).$$

Můžeme tedy psát

$$x^n\delta^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n > k \\ \frac{(-1)^n k!}{(k-n)!} \delta^{(k-n)} & \text{pro } n \leq k. \end{cases}$$

**Příklad 4.6** Spočítejte první tři derivace v  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  zobecněné funkce  $f(x) = \cos(x)|x|$ .

*Řešení:* Všimněme si, že regulární zobecněná funkce  $f$  je součinem hladké funkce  $\cos(x)$  s funkcí  $|x|$ , která je diferencovatelná všude na  $\mathbb{R}$  vyjma bodu  $x = 0$ . Na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  přitom platí  $|x|' = \text{sgn}(x)$ . Z Leibnizova pravidla potom máme

$$f'(x) = -\sin(x)|x| + \cos(x)\text{sgn}(x).$$

Podobně dostaneme

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\cos(x)|x| - \sin(x)\operatorname{sgn}(x) - \sin(x)\operatorname{sgn}(x) + \cos(x)2\delta(x) \\ &= -\cos(x)|x| - 2\sin(x)\operatorname{sgn}(x) + 2\delta(x). \end{aligned}$$

Zde jsme využili poznatků, že  $\operatorname{sgn}(x)' = \{0\} + 2\delta(x)$  a pro libovolnou  $a \in C^\infty(\mathbb{R})$  platí  $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ . Pomocí daru přítele Leibnize spočítáme i třetí derivaci jako

$$f'''(x) = \sin(x)|x| - 3\cos(x)\operatorname{sgn}(x) + 2\delta'(x).$$

**Příklad 4.7** Spočítejte na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} nf(nx)$  s volbou  $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$ .

*Řešení:* Připomeňme, že posloupnost zobecněných funkcí  $(f_n)$  má limitu  $f \in \mathcal{D}'$  právě tehdy, pokud  $(\forall \varphi \in \mathcal{D})(\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi))$ . Jelikož zadaná posloupnost je tvořena regulárními zobecněnými funkcemi, působí na testovací funkce skrze integrál. Ten upravíme pomocí substituce  $x \mapsto \frac{x}{n}$ ,

$$(n\chi_{(-1,1)}(nx), \varphi(x)) = n \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(nx)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(x)\varphi\left(\frac{x}{n}\right)dx.$$

Limitu výrazu na pravé straně vypočteme pomocí Lebesgueovy věty s integrabilní majorantou  $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi| \chi_{(-1,1)}(x)$  jako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(x)\varphi\left(\frac{x}{n}\right)dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(x)\varphi(0)dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(x)dx \quad (\delta, \varphi) = (2\delta, \varphi).$$

Na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  tedy platí rovnost  $\lim_{n \rightarrow \infty} nf(nx) = 2\delta$ .

♣ Všimněme si, že v řešení výše jsme použili pouze skutečnost, že  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Pro obecné  $f$  s touto vlastností potom platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} nf(nx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \delta$ . Pro  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  obdržíme podobný vztah  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^d f(n\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \delta_0$ . Zřejmou obměnou lze odvodit, že  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon^{-d} f(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \delta_0$ .

**Příklad 4.8** Pomocí výsledku předchozího příkladu sestrojte posloupnost zobecněných funkcí konvergující na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  k  $\delta'$ .

*Řešení:* Stačí si uvědomit, že pokud  $\lim f_n = f$  na  $\mathcal{D}'$ , potom i  $\lim D^\alpha f_n = D^\alpha f$  na  $\mathcal{D}'$ . Pro libovolné  $\varphi \in \mathcal{D}$  totiž máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (D^\alpha f_n, \varphi) = (-1)^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, D^\alpha \varphi) = (-1)^\alpha (f, D^\alpha \varphi) = (D^\alpha f, \varphi).$$

Na  $\mathcal{D}'$  je tedy vždy možno zaměnit limitu a derivaci!

Pokud konkrétně volíme  $f_n(x) = n\chi_{(-1,1)}(nx) = n\chi_{(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})}(x)$ , potom

$$f'_n(x) = n(\delta_{-\frac{1}{n}}(x) - \delta_{\frac{1}{n}}(x)) = \frac{\delta(x + \frac{1}{n}) - \delta(x - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

a současně s využitím výsledku předchozího příkladu platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = 2\delta'$  na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Nyní je i mrtvému jasné, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\delta(x + \frac{1}{n}) - \delta(x - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \delta'(x) \quad \text{na } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

**Příklad 4.9** Nalezněte limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos(nx)$  na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

*Řešení:* Pro libovolné  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  platí

$$|(\frac{1}{n} \cos(nx), \varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} \cos(nx) \varphi(x) dx \right| \leq \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| dx,$$

a tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} \cos(nx), \varphi) = 0$ , což znamená, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos(nx) = 0$  na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Příklad 4.10** Nalezněte limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cos(nx)$  na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

*Řešení:* Označíme posloupnost z předchozího příkladu jako  $f_n(x) = \frac{1}{n} \cos(nx)$  a povšimneme si, že  $f''_n(x) = -\cos(nx)$ . Ze záměnosti limity a derivace na  $\mathcal{D}'$  tak dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cos(nx) = - \lim_{n \rightarrow \infty} f''_n(x) = -(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)'' = -0'' = 0$$

na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

♣ Porovnejte tento výsledek s výsledkem příkladu 4.7 a za ním následujícím komentářem. Zdánlivý nesoulad je ozřejmen pozorováním, že  $\cos(x) \notin L^1(\mathbb{R})$ . Podobně jako výše bychom na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ukázali i vztahy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cos(nx) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \sin(nx) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{Z}).$$

## 5 Cvičení 5

- Nosič zobecněných funkcí, tenzorový součin zobecněných funkcí.



♣ Pro otevřenou podmnožinu  $U \subset \mathbb{R}^d$  budeme symbolem  $\mathcal{D}(U)$  rozumět vektorový prostor hladkých funkcí na  $U$  s nosičem v  $U$ . Rozšíříme-li takové funkce na celé  $\mathbb{R}^d$  nulou, dostaneme prvky  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ . Buď totiž například  $\varphi \in \mathcal{D}(U)$  a  $V := \text{supp } \varphi$ . Potom v  $U$  leží celé nějaké  $\varepsilon$ -okolí množiny  $V$  (to si zapíšeme jako množinu  $V_\varepsilon := \bigcup_{x \in V} B(x, \varepsilon)$ ). Předpokládejme opak. Potom pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  existuje  $x_n \in V$  tak, že  $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U$ . Vzhledem ke kompaktnosti  $V$  lze z  $(x_n)$  vybrat konvergentní podposloupnost  $(x_{k_n})$ . Označme její limitu  $x \in V \subset U$ . Jelikož  $U$  je otevřená, existuje  $\delta > 0$  tak, že  $B(x, \delta) \subset U$ . Od jistého indexu  $n_\delta$  výše ale platí  $B(x_{k_n}, \frac{1}{k_n}) \subset B(x, \delta) \subset U$ , což je spor. Dokázali jsme tedy, že nosič funkce  $\varphi$  je "odražen" od hranice množiny  $U$ . Rozšíření  $\varphi$  nulou si tedy zachová hladkost i při přechodu přes tuto hranici.

Naopak libovolné  $\varphi \in \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) : \text{supp } (\varphi) \subset U\}$  lze zúžit na  $U$  a získat tak jednoznačně určený prvek prostoru  $\mathcal{D}(U)$ . Proto se běžně identifikují množiny  $\{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) : \text{supp } (\varphi) \subset U\}$  a  $\mathcal{D}(U)$ . Tak to budeme v zájmu zkrácení zápisu činit i my.

**Příklad 5.1** Nalezněte zobecněný nosič funkce  $\delta_{x_0}$ , kde  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

*Řešení:* Připomeňme, že  $\text{supp } \delta_{x_0} = \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$ , kde  $\mathcal{N}$  je největší (ve smyslu inkluze) otevřená množina, na které platí

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{N}))(\delta_{x_0}, \varphi) = 0. \quad (4)$$

Jelikož  $(\delta_{x_0}, \varphi) = \varphi(x_0)$ , nabízí se volit  $\mathcal{N} = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ . Potom skutečně platí (4). Jediná větší množina než  $\mathcal{N}$  je  $\mathbb{R}$ , pro kterou ale (4) s  $\mathbb{R}$  namísto  $\mathcal{N}$  již neplatí. Stačí volit nějaké  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  nenulové v  $x_0$ .

**Příklad 5.2** Nalezněte zobecněný nosič funkce  $\theta(x)x^n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ , a porovnejte jej s klasickým nosičem.

*Řešení:* Klasický nosič funkce  $f(x) := \theta(x)x^n$  je  $[0, +\infty)$ . To nám dává rozumného kandidáta na nosič zobecněný. Ověříme tedy hypotézu, že nulová množina  $\mathcal{N}$  zobecněné funkce  $f$  je dána intervalem  $(-\infty, 0)$ . V první řadě má platit, že  $(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{N}))((f, \varphi) = 0)$ . To ale plyne z pozorování

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x)x^n \varphi(x) dx = \int_{(0, +\infty) \cap \text{supp } (\varphi)} x^n \varphi(x) dx = \int_{\emptyset} x^n \varphi(x) dx = 0.$$

Libovolnou otevřenou podmnožinu  $\mathbb{R}$  lze napsat jako sjednocení otevřených intervalů. Tudíž libovolný kandidát na větší nulovou množinu obsahuje množinu tvaru  $\mathcal{N}' := \mathcal{N} \cup (a, b)$ , kde  $(a, b) \not\subset \mathcal{N}$ . Buď  $P := (a, b) \cap (0, +\infty)$ . Potom  $P$  je z konstrukce otevřená neprázdná podmnožina  $(0, +\infty)$ . Vezmeme-li nyní libovolné nezáporné  $\varphi \in \mathcal{D}(P) \setminus \{0\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{N}') \setminus \{0\}$ , dostáváme

$$(f, \varphi) = \int_{(0, +\infty) \cap \text{supp } (\varphi)} x^n \varphi(x) dx = \int_P x^n \varphi(x) dx > 0,$$

tj.  $\mathcal{N}'$  není nulovou množinou zobecněné funkce  $f$ . Zobecněný nosič tedy splývá s tím klasickým.

♣ Pro  $f \in \mathcal{D}'_{\text{reg}}(\mathbb{R}^d)$  lze podobně jako výše odvodit, že zobecněný nosič  $f$  splývá s tzv. *esenciálním nosičem* funkce  $f$ . Ten lze definovat následovně

$$\text{ess supp}(f) := \mathbb{R}^d \setminus \{x \in \mathbb{R}^d : (\exists \text{ okolí } U_x)(f(x) = 0 \text{ s.v. na } U_x)\}.$$

Všimněte si, že definice je smysluplná, nezávisí totiž na volbě konkrétního reprezentanta  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ .

**Příklad 5.3** Nalezněte zobecněný nosič funkce  $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ .

*Řešení:* Nosič klasické funkce  $x \mapsto \frac{1}{x}$  je celé  $\mathbb{R}$ . Jako vhodný kandidát na nulovou množinu zobecněné funkce  $\mathcal{P} \frac{1}{x}$  se tak nabízí  $\mathcal{N} = \emptyset$ . Podmínku nulovosti splňuje triviálně. Podívejme se na podmínku maximality. Libovolná větší otevřená podmnožina v  $\mathbb{R}$  obsahuje neprázdný otevřený interval, řekněme  $(a, b)$ . Pro takový pevně zvolený interval určité existuje  $\varepsilon_0 > 0$  s vlastností, že rozdíl  $(a, b) \setminus (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  obsahuje neprázdný otevřený interval  $P$ , který navíc leží v jedné z poloos  $(-\infty, 0)$  nebo  $(0, +\infty)$ . Pro libovolné nezáporné  $\varphi \in \mathcal{D}(P) \setminus \{0\} \subset \mathcal{D}((a, b)) \setminus \{0\}$ , dostáváme

$$(\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_P \frac{\varphi(x)}{x} dx \neq 0,$$

protože spojitý integrand je všude na  $P$  buď nezáporný nebo nekladný a současně není na  $P$  identicky nulový.

**Příklad 5.4** Dokažte na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  identitu  $\delta(x) \otimes \delta(y) = \delta(x, y)$ .

*Řešení:* Pro libovolné  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  postupně dostáváme

$$(\delta(x) \otimes \delta(y), \varphi(x, y)) = (\delta(x), (\delta(y), \varphi(x, y))) = (\delta(x), \varphi(x, 0)) = \varphi(0, 0) = (\delta(x, y), \varphi(x, y)),$$

z čehož již plyne dokazovaný vztah.

♣ Říkáme, že  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , kde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ , ležící v  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$  *nezávisí na  $\mathbf{y}$*  právě tehdy, pokud existuje  $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  takové, že  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x}) \otimes 1$ .

**Příklad 5.5** Dokažte, že pokud  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  *nezávisí na  $x_k$* , potom  $\partial_{x_k} f = 0$ .

*Řešení:* Jelikož  $f$  nezávisí na  $x_k$ , existuje podle definice  $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d-1})$  s vlastností, že  $f = h \otimes 1$ , kde konstantní regulární distribuce 1 působí v proměnné  $x_k$ . Pro libovolnou  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  tak máme

$$(\frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi) = -(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) = -(h \otimes 1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) = -(h, (1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k})) = (h, (\frac{\partial 1}{\partial x_k}, \varphi)) = (h, 0) = 0,$$

tj.  $\partial_{x_k} f = 0$ .

Alternativně a ještě rychleji dostaneme stejný výsledek z vlastností tenzorového součinu, protože

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \partial_{x_k}(h \otimes 1) = h \otimes \partial_{x_k} 1 = h \otimes 0 = 0.$$

**Příklad 5.6** Pro  $f \in C^2(\mathbb{R}^{1+n})$  označme  $f_{\theta_t}(t, \mathbf{x}) = \theta(t)f(t, \mathbf{x})$ . Spočítejte  $\partial_t f_{\theta_t} + \Delta f_{\theta_t}$ .

*Řešení:* Laplaceán  $\Delta$  se skládá z partiálních derivací v prostorových proměnných. Pro fixní  $t$  je ale funkce  $f_{\theta_t}$  vždy třídy  $C^2(\mathbb{R}^n)$ . Platí tedy  $\Delta f_{\theta_t}(t, x) = \theta(t)\Delta f(t, x)$ . V proměnné  $t$  však může mít funkce  $f_{\theta_t}$  skok. Spočítáme tedy odpovídající zobecněnou derivaci opatrně přímo z definice. Pro libovolnou  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{1+n})$  pomocí Fubiniho věty a následné integrace per partes dostaneme

$$\begin{aligned} (\partial_t f_{\theta_t}(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{x})) &= -(f_{\theta_t}(t, \mathbf{x}), \partial_t \varphi(t, \mathbf{x})) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{1+n}} \theta(t)f(t, \mathbf{x})\partial_t \varphi(t, \mathbf{x})dtd\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} f(t, \mathbf{x})\partial_t \varphi(t, \mathbf{x})dtd\mathbf{x} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} [f(t, \mathbf{x})\varphi(t, \mathbf{x})]_{t=0}^{+\infty}d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \partial_t f(t, \mathbf{x})\varphi(t, \mathbf{x})dtd\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(0, \mathbf{x})\varphi(0, \mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \partial_t f(t, \mathbf{x})\varphi(t, \mathbf{x})dtd\mathbf{x} \\ &= (\delta(t), \int_{\mathbb{R}^n} f(0, \mathbf{x})\varphi(t, \mathbf{x})d\mathbf{x}) + \int_{\mathbb{R}^{1+n}} \theta(t)\partial_t f(t, \mathbf{x})\varphi(t, \mathbf{x})dtd\mathbf{x} \\ &= (\delta(t) \otimes f(0, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{x})) + (\theta(t)\partial_t f(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{x})). \end{aligned}$$

Na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$  tedy platí

$$(\partial_t f_{\theta_t} + \Delta f_{\theta_t})(t, \mathbf{x}) = \theta(t) (\partial_t f + \Delta f)(t, \mathbf{x}) + \delta(t) \otimes f(0, \mathbf{x}).$$

## 6 Cvičení 6

- Konvoluce klasických a zobecněných funkcí.

**Bonus 6.1 (Youngova nerovnost pro klasickou konvoluci)** Bud'  $p, q \geq 1$  a  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ , potom funkce

$$\mathbf{x} \mapsto (f * g)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

leží v  $L^{r'}(\mathbb{R}^d)$ , kde  $r'$  je dáno vztahem  $r'^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1$ , přičemž existuje konstanta  $C(p, q, d)$  nezávislá na konkrétní volbě funkcí  $f$  a  $g$  taková, že platí Youngova nerovnost

$$\|f * g\|_{r'} \leq C(p, q, d)\|f\|_p\|g\|_q.$$

Zejména potom platí, že konvoluce dvou funkcí z prostoru  $L^1(\mathbb{R}^d)$  zůstává v  $L^1(\mathbb{R}^d)$ .

Důkaz Youngovy nerovnosti spolu s dalšími detaily lze nalézt například na <http://people.math.gatech.edu/~loss/10springtea/Lecture1.pdf> nebo

<https://qnlw.info/post/youngs-inequality/>.

**Příklad 6.1** Pro  $f(x) = e^{-ax^2}$ , kde  $a > 0$ , spočtěte klasickou konvoluci  $f * f$ .

*Řešení:* Přímým výpočtem provedeme následující integraci

$$\begin{aligned}(f * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x-y)^2} e^{-ay^2} dy = e^{-ax^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-2ay^2 + 2axy} dy = e^{-ax^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-2a(y - \frac{x}{2})^2 + \frac{a}{2}x^2} dy \\ &= e^{-\frac{a}{2}x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-2ay^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{-\frac{a}{2}x^2}.\end{aligned}$$

**Příklad 6.2** Pro  $f(x) = \theta(a - |x|)$ , kde  $a > 0$ , spočtěte klasickou konvoluci  $f * f$ .

*Řešení:* Jelikož nosič funkce  $y \mapsto \theta(a - |y|)$  je interval  $[-a, a]$  a nosič funkce  $y \mapsto \theta(a - |x - y|)$  je interval  $[x - a, x + a]$ , dostáváme

$$(f * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta(a - |x - y|) \theta(a - |y|) dy = \begin{cases} 0 & |x| \geq 2a \\ a - (x - a) = 2a - x & x \in (0, 2a) \\ x + a - (-a) = 2a + x & x \in (-2a, 0), \end{cases}$$

což znamená, že  $(f * f)(x) = \theta(2a - |x|)(2a - |x|)$ .

**Bonus 6.2** Ukažte, že  $e^{-ax^2} * \chi_{[-1,1]}(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

♣ Po martýriu na přednášce víme, že pro dvě zobecněné funkce  $f$  a  $g$  s kompaktními nosiči lze konvoluci zavést jako

$$((f * g)(x), \varphi(x)) := (f(x), (g(y), \varphi(x + y))) \quad (= "(f(x) \otimes g(y), \varphi(x + y))").$$

S touto definicí je konvoluce komutativní, asociativní, spojitá v obou argumentech (nikoliv však současně-viz příklad 6.5) a derivaci lze přetáhnout na libovolnou z dvojice funkcí, jejichž konvoluci počítáme. Poslední z jmenovaných vlastností si záhy dokážeme.

**Příklad 6.3** Buďte  $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  s kompaktním nosičem. Dokažte, že platí  $(f * g)' = f' * g = f * g'$ .

*Řešení:* Pro libovolnou  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  platí

$$\begin{aligned}((f * g)', \varphi) &= -(f * g, \varphi') = -(f(x), (g(y), \varphi'(x + y))) = -(f(x), (g(y), \partial_y \varphi(x + y))) \\ &= (f(x), (\partial_y g(y), \varphi(x + y))) = (f(x), (g'(y), \varphi(x + y))) = (f * g', \varphi),\end{aligned}$$

tj.  $(f * g)' = f * g'$ . Zde jsme v poslední rovnosti využili definice konvoluce pro zobecněné funkce s kompaktním nosičem. Musíme si tedy rozmyslet, že  $\text{supp } g'$  je omezený, má-li tuto vlastnost  $\text{supp } g$ .

Buď tedy  $\mathcal{N}$  nějaká nulová množina zobecněné funkce  $g$ , tzn.  $(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{N}))((g, \varphi) = 0)$ . Pro libovolné  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{N})$  potom platí  $(g', \varphi) = -(g, \varphi') = 0$ , tedy  $\mathcal{N}$  je i nulová množina zobecněné funkce  $g'$ . Odtud již plyne inkluze  $\text{supp } g' \subset \text{supp } g$ , speciálně je tedy  $\text{supp } g'$  skutečně omezený.

Identita  $(f * g)' = f' * g$  plyne z předchozího v kombinaci s komutativitou konvoluce.

**Příklad 6.4 (užití konvolucí k řešení ODR v  $\mathcal{D}'$ )** Uvažujme lineární diferenciální operátor  $L = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dx^k}$  s konstantními koeficienty  $a_k$  a  $a_n = 1$ . Dále  $z \in C^\infty(\mathbb{R})$  buď klasické řešení homogenní rovnice  $Lz = 0$  s počáteční podmínkou  $z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-2)}(0) = 0$  a  $z^{(n-1)}(0) = 1$ . Dokažte, že  $\mathcal{E}(x) := \theta(x)z(x)$  je fundamentální řešení  $L$  v  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , tj. na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  platí identita  $L\mathcal{E} = \delta$ .

*Řešení:* Zobecněnou funkci  $\mathcal{E}$  budeme chápat jako součin hladké funkce  $z(x)$  s po částech spojitou a po částech diferencovatelnou funkcí  $\theta$ . S použitím Leibnizova pravidla tak dostaneme  $\mathcal{E}' = z'\theta + z\delta = z'\theta + z(0)\delta = z'\theta$ , kde poslední rovnost plyne z podmínky  $z(0) = 0$ . Podobně odvodíme, že  $\mathcal{E}^{(k)} = z^{(k)}\theta$  pro všechna  $k = 2, 3, \dots, n-1$  a  $\mathcal{E}^{(n)} = z^{(n)}\theta + z^{(n-1)}(0)\delta = z^{(n)}\theta + \delta$ . Celkem tedy platí  $L\mathcal{E} = \theta Lz + \delta = \delta$ , protože  $Lz = 0$  dle předpokladu.

**Příklad 6.5** Konvoluce není spojitá v obou argumentech současně ani při omezení se na zobecněné funkce s kompaktními nosiči. Demonstrujte to na protipříkladě s posloupností  $(\delta_n * \delta_{-n})_{n=1}^\infty$ .

*Řešení:* Nejprve si uvědomme, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\pm n} = 0$ . Pro libovolnou  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  totiž díky omezenosti jejího nosiče platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta_{\pm n}, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\pm n) = 0 = (0, \varphi).$$

Na druhou stranu pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  dostáváme

$$(\delta_n * \delta_{-n}, \varphi) = (\delta_n(x), (\delta_{-n}(y), \varphi(x+y))) = (\delta_n(x), \varphi(x-n)) = \varphi(0) = (\delta, \varphi),$$

odkud plyne  $\delta_n * \delta_{-n} = \delta$ . Z výše uvedeného již odvodíme nespojitost konvoluce v obou argumentech současně, protože

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n * \delta_{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\delta_n * \delta_{-n}) \neq \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \right) * \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-n} \right) = 0 * 0 = 0.$$

## 7 Cvičení 7

- Klasická Fourierova transformace, temperované distribuce.

**Příklad 7.1** Budťe  $a > 0, b \in \mathbb{R}$ . Nalezněte Fourierovu transformaci funkce  $f$ , která je dána předpisem

i.  $f(x) = \theta(a - |x|)$ ,

ii.  $f(x) = \theta(x)e^{-ax}$ ,

iii.  $f(x) = \theta(-x)e^{ax}$ ,

iv.  $f(x) = \theta(x)e^{-ax} \sin(bx)$ ,

v.  $f(x) = e^{-a|x|} \cos(bx)$ ,

vi.  $f(x) = e^{-ax^2}$ .

*Řešení:* Jelikož ve všech zadaných případech  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , můžeme k výpočtu Fourierovy transformace bez okolků použít integrální formule

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x) dx.$$

i.

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \theta(a - |x|) dx = \int_{-a}^a e^{i\xi x} dx = \int_{-a}^a \cos(\xi x) dx + i \int_{-a}^a \sin(\xi x) dx \\ &= \int_{-a}^a \cos(\xi x) dx = 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \end{aligned}$$

ii.

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \theta(x) e^{-ax} dx = \int_0^{+\infty} e^{(i\xi - a)x} dx = \frac{1}{i\xi - a} [e^{(i\xi - a)x}]_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{a - i\xi},$$

zde jsme se dopustili zločinu formální integrace funkce  $x \mapsto e^{zx}$ , kde  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Nicméně lze velmi snadno matematicky korektně dokázat, že  $x \mapsto \frac{1}{z} e^{zx}$  je skutečně její primitivní funkcí, neboť s označením  $c := \Re z$ ,  $d := \Im z$  platí

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{z} e^{zx} \right) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{cx}}{c^2 + d^2} (c \cos(dx) + d \sin(dx)) + i \frac{e^{cx}}{c^2 + d^2} (c \sin(dx) - d \cos(dx)) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{cx}}{c^2 + d^2} (c \cos(dx) + d \sin(dx)) \right) + i \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{cx}}{c^2 + d^2} (c \sin(dx) - d \cos(dx)) \right) \\ &= \dots = e^{cx} \cos(dx) + i e^{cx} \sin(dx) = e^{zx}. \end{aligned}$$

Alternativně lze integrovat reálnou a imaginární část podobně jako v bodě i.

iii. Zřejmě  $f(x) = \tilde{f}(-x)$ , kde  $\tilde{f}(x) = \theta(x)e^{ax}$  jsme transformovali v předchozím bodě s výsledkem  $(\mathcal{F}f)(\xi) = 1/(a - i\xi)$ . Dále platí

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \tilde{f}(-x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \tilde{f}(x) dx = (\mathcal{F}\tilde{f})(-\xi),$$

odkud již máme

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{a + i\xi}.$$

iv. Pomocí integrace per-partes a výsledku o derivaci funkce  $e^{zx}$  z bodu ii. odvodíme

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \theta(x) e^{-ax} \sin(bx) dx = \int_0^{+\infty} e^{(i\xi - a)x} \sin(bx) dx \\ &= -\frac{1}{b} [e^{(i\xi - a)x} \cos(bx)]_0^{+\infty} + \frac{i\xi - a}{b} \int_0^{+\infty} e^{(i\xi - a)x} \cos(bx) dx \\ &= \frac{1}{b} + \frac{i\xi - a}{b} \left( \frac{1}{b} [e^{(i\xi - a)x} \sin(bx)]_0^{+\infty} - \frac{i\xi - a}{b} \int_0^{+\infty} e^{(i\xi - a)x} \sin(bx) dx \right) \\ &= \frac{1}{b} - \left( \frac{i\xi - a}{b} \right)^2 (\mathcal{F}f)(\xi). \end{aligned}$$

Odtud již snadno spočítáme, že

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{b}{b^2 + (a - i\xi)^2}.$$

V celém výpočtu jsme uvažovali  $b \neq 0$ . Nicméně výsledná formule platí pro každé  $b \in \mathbb{R}$ .

v. Nejprve pomocí parity integrandu provedeme následující úpravy

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-a|x|} \cos(bx) dx = 2 \int_0^{+\infty} \cos(\xi x) e^{-ax} \cos(bx) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \cos((\xi + b)x) e^{-ax} dx + \int_0^{+\infty} \cos((\xi - b)x) e^{-ax} dx. \end{aligned}$$

Podobně jako v bodě iv. se odvodí, že pro libovolné  $\beta \in \mathbb{R}$  platí

$$\int_0^{+\infty} \cos(\beta x) e^{-ax} dx = \frac{a}{a^2 + \beta^2}.$$

Celkem tak dostáváme

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{a}{a^2 + (\xi + b)^2} + \frac{a}{a^2 + (\xi - b)^2}.$$

vi. Doplněním na  $\square$  dostáváme

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-ax^2} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x-\frac{i\xi}{2a})^2} dx.$$

Integrál na pravé straně vypočteme elegantně za pomoci komplexní analýzy. Lze si totiž povšimnouti, že

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a(x-\frac{i\xi}{2a})^2} dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L e^{-a(x-\frac{i\xi}{2a})^2} dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_L} e^{-az^2} dz,$$

kde  $\gamma_L : x \in (-L, L) \mapsto (x - \frac{i\xi}{2a}) \in \mathbb{C}$  je úsečka v komplexní rovině rovnoběžná s reálnou osou. Tuto úsečku doplníme na obdélník s vrcholy  $-L$ ,  $L$ ,  $L - \frac{i\xi}{2a}$ ,  $-L - \frac{i\xi}{2a}$ , jehož hranici označíme jako  $\Gamma_L$ . Jelikož  $z \mapsto e^{-az^2}$  je holomorfní na  $\mathbb{C}$ , z Cauchyho teorému plyne

$$\int_{\Gamma_L} e^{-az^2} dz = 0. \quad (5)$$

Na druhou stranu můžeme integrál podél obdélníku rozložit na čtveřici integrálů po úsečkách jako

$$\int_{\Gamma_L} e^{-az^2} dz = \int_{-L}^L e^{-at^2} dt + \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(L-it)^2} dt - \int_{\gamma_L} e^{-az^2} dz + \int_{\frac{\xi}{2a}}^0 e^{-a(-L-it)^2} dt. \quad (6)$$

Pro druhý (a podobně i pro čtvrtý z integrálů) odvodíme

$$\left| \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(L-it)^2} dt \right| \leq e^{-aL^2} \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{at^2} dt \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} 0.$$

Limitním přechodem v (6) s přihlédnutím k (5) tak dostáváme

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_L} e^{-az^2} dz = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L e^{-at^2} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Celkem jsme tak odvodili

$$\boxed{(\mathcal{F}(e^{-ax^2}))(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}}.$$

♣ Právě jsme odvodili, že Fourierova transformace Gaussovy funkce je opět Gaussova funkce. Je-li směrodatná odchylka původní Gaussovy funkce (ta je nepřímo úměrná  $\sqrt{a}$ ) malá, je směrodatná odchylka transformované funkce velká a naopak. To je speciální případ tzv. *Heisenbergových relací neurčitosti*-ty mají podobu jisté nerovnosti, přičemž rovnost v nich nastává právě pro případ Gaussovy funkce.



**Příklad 7.2** Rozhodněte, které ze zobecněných funkcí

- i.  $x^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,
- ii.  $\theta(x)$ ,
- iii.  $\operatorname{sgn}(x)$ ,
- iv.  $\sin(ax)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,
- v.  $\theta(a - |x|)$ ,  $a > 0$ ,
- vi.  $\theta(x)e^{-x}$ ,
- vii.  $\theta(x)x^3e^{-x}$ ,
- viii.  $e^{iax}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,
- ix.  $e^{-x}$

jsou temperované distribuce, tj prvky  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

*Řešení:* Všechny vypsane funkce jsou spojité nebo po částech spojité funkce na  $\mathbb{R}$ , leží tedy v  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , tj. ztotožňujeme je s prvky  $\mathcal{D}'_{\text{reg}}(\mathbb{R})$ . K tomu aby  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  náležela dokonce do  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  postačuje, aby existovala konstanta  $m \in \mathbb{N}_0$  taková, že

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1 + |x|)^m} dx < +\infty. \quad (7)$$

Speciálně tedy prvky  $L^1(\mathbb{R})$  patří mezi (regulárními) prvky  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Odtud okamžitě vidíme, že v funkce zadané v v. – vii. jsou temperované distribuce. Funkce z bodů ii. – iv. a viii. nejsou sice integrabilní na  $\mathbb{R}$ , jsou ale omezené, odhad (7) pro ně tudíž platí pro libovolné  $m \geq 2$ . Pro funkci z prvního bodu odvodíme z limitního srovnávacího kritéria v kritických bodech  $x = \pm\infty$  (se srovnávací funkcí  $x^{-2}$ ), že

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|x^k|}{(1 + |x|)^{k+2}} dx < +\infty,$$

tj. (7) opět platí. Funkce zadaná v bodě ix. ale není regulární temperovanou distribucí. Jelikož pro libovolné  $m \in \mathbb{N}_0$  máme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{(1 + |x|)^m} = +\infty,$$

podmínku (7) nelze nikdy splnit, neplatila by totiž nutná podmínka konvergence integrálu na okolí bodu  $x = -\infty$ . Nicméně (7) je pouze podmínka postačující. Přímou ale

ukážeme, že  $e^{-x}$  ani nelze zavést jako regulární distribuci na celém  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Zvolíme-li totiž například  $\varphi(x) = e^{-\sqrt{1+x^2}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , potom

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{1+x^2}-x} dx > \int_{-\infty}^0 e^{-\sqrt{1+x^2}-x} dx.$$

Spodní odhad je divergentní, protože  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\sqrt{1+x^2}-x} = 1 \neq 0$ , tj. není splněna nutná podmínka konvergence integrálu.

**Příklad 7.3** *Ukažte, že*

i.  $\delta_{x_0}$ ,

ii.  $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$

náleží do  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

*Řešení:* Již dříve jsme ukázali, že oba zkoumané funkcionály jsou lineární na všech funkcích, kde dávají smysl, stačí tedy vyšetřit jejich spojitost na  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . (Skutečnost, že jsou na celém  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  definovány ověříme při důkazu spojitosti.) Pro tento účel buď  $(\varphi_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  posloupnost konvergentní na  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  k limitní funkci  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , tj.  $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0)(\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^\alpha D^\beta(\varphi_n - \varphi)\|_\infty = 0)$ . Budeme se snažit ukázat, že potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi)$ , kde za  $f$  uvažujeme funkcionály ze zadání. (Poznamenejme, že BÚNO bychom mohli položit  $\varphi = 0$ .)

i. Protože speciálně platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_\infty = 0$ , tj.  $(\varphi_n)$  konverguje na  $\mathbb{R}$  stejnoměrně (a tedy i bodově) k  $\varphi$ , dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta_{x_0}, \varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_0) = \varphi(x_0) = (\delta_{x_0}, \varphi).$$

ii. Stejně jako v příkladě 3.1 přepíšeme akci  $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$  na

$$(\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} \chi_{(\varepsilon, +\infty)}(x) \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

V limitním přechodu nelze postupovat zcela stejně jako na  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , protože nemáme nutně zaručenou omezenost  $\text{supp}(\varphi)$ . Proto si integrál rozdělíme na dvě části

$$(\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^\delta \chi_{(\varepsilon, +\infty)}(x) \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx + \int_\delta^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx,$$

kde  $\delta > 0$  je libovolné ale fixní. Pro první integrál najdeme integrabilní majorantu opět pomocí věty o střední hodnotě s využitím skutečnosti, že prvky  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  mají omezené derivace. Druhý integrál konverguje na okolí  $+\infty$ , protože lze přepsat

jako akce omezené regulární temperované distribuce  $\chi_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)}(x)x^{-1}$  na  $\varphi$ –viz (7). Stejně jako na  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  můžeme tedy nakonec psát

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

(Právě jsme mimoděk ukázali, že funkcionál  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$  je dobře definován na celém  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .) Nyní si uvědomíme, že zcela analogicky jako v příkladě 2.2 lze nahlédnout, že

*Pokud posloupnost  $(\varphi_n)$  konverguje na  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , potom*

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d)(\exists K_{\alpha, \beta} \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\|x^\alpha D^\beta \varphi_n\|_\infty \leq K_{\alpha, \beta}).$$

Akci  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$  na posloupnost  $(\varphi_n)$  rozdělme do dvou integrálů

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_n) = \int_0^\delta \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{x} dx + \int_\delta^{+\infty} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{x} dx.$$

Pokud pro oba integrály najdeme integrabilní majoranty nezávislé na  $n$ , bude tím spojitost  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$  dokázána, protože bodová limita  $\varphi_n$  je právě  $\varphi$ . Podle věty o střední hodnotě existuje  $\xi_{x,n} \in (-x, x)$  tak, že  $\varphi_n(x) - \varphi_n(-x) = \varphi'_n(\xi_{x,n})2x$ . Máme tedy

$$\frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{x} = 2\varphi'_n(\xi_{x,n}).$$

V prvním z integrálů lze tutíž za integrabilní majorantu volit konstantu  $2K_{0,1}$ . Jelikož druhý integrál je přes neomezenou oblast, musíme zvolit jinou strategii. Jmenovitě na  $(\delta, +\infty)$  učiníme odhad

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{x} \right| &\leq \frac{1}{\delta} (|\varphi_n(x)| + |\varphi_n(-x)|) = \frac{1}{\delta x^2} (|x^2 \varphi_n(x)| + |(-x)^2 \varphi_n(-x)|) \\ &\leq \frac{2K_{2,0}}{\delta x^2} \in L^1((\delta, +\infty)). \end{aligned}$$

A jsme doma.

## 8 Cvičení 8

- Fourierova transformace temperovaných distribucí.

**Příklad 8.1** *Vypočtěte (zobecněnou) Fourierovu transformaci temperované distribuce  $f$  dané předpisem*

- $f(x) = \theta(x)$ ,
- $f(x) = \theta(-x)$ ,

- iii.  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ ,
- iv.  $f(x) = 1$ ,
- v.  $f(x) = \mathcal{P}\frac{1}{x}$ ,
- vi.  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,
- vii.  $f(x) = e^{i\alpha x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
- viii.  $f(x) = \sin(\alpha x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
- ix.  $f(x) = \cos(\alpha x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*Řešení:*

i. Pro libovolnou  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  platí

$$(\mathcal{F}[\theta], \varphi) = (\theta, \mathcal{F}[\varphi]) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x) \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \varphi(y) dy dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \varphi(y) dy dx,$$

protože  $\theta$  je regulární temperovaná distribuce. Nyní se nabízí prohodit pořadí integrace. Není však splněn základní předpoklad Fubiniho věty, neboť  $|e^{ixy}\varphi(y)| = |\varphi(y)| \notin L^1((0, +\infty) \times \mathbb{R})$  (vyjma triviálního případu  $\varphi \equiv 0$ ). Pomůžeme si tedy trikem, kdy do integrandu přidáme vhodně zvolenou funkci konvergující bodově k jedničce, která nám integrabilitu zajistí. Konkrétně díky Lebesgueově větě *ve vnějším integrálu* platí

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \varphi(y) dy dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \varphi(y) dy dx.$$

Za majorantu lze volit  $|\mathcal{F}[\varphi]|$ , jejíž integrabilita plyne z poznatku  $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Dále pro každé  $\varepsilon > 0$  pomocí Fubiniho věty dostáváme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \varphi(y) dy dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \int_0^{+\infty} e^{(iy-\varepsilon)x} dx dy = i \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y + i\varepsilon} \varphi(y) dy.$$

V limitě  $\varepsilon \rightarrow 0+$  jsme tedy odvodili

$$(\mathcal{F}[\theta], \varphi) = i \left( \frac{1}{y + i0_+}, \varphi(y) \right),$$

odkud plyne

$$\mathcal{F}[\theta(x)](y) = i \frac{1}{y + i0_+} = i \mathcal{P}\frac{1}{y} + \pi\delta(y). \quad (8)$$

ii. Z vlastností Fourierovy transformace spolu s (8) okamžitě obdržíme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\theta(-x)](y) &= \frac{1}{|-1|} \mathcal{F}[\theta(x)]\left(\frac{y}{-1}\right) = \mathcal{F}[\theta(x)](-y) = i \frac{1}{-y + i0_+} \\ &= -i \frac{1}{y + i0_-} = -i \mathcal{P}\frac{1}{y} + \pi\delta(y). \end{aligned}$$

iii. Jelikož Fourierova transformace je lineární a  $\text{sgn}(x) = \theta(x) - \theta(-x)$ , odvodíme za pomoci předešlých dvou výsledků, že

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\text{sgn}(x)](y) &= \mathcal{F}[\theta(x)](y) - \mathcal{F}[\theta(-x)](y) \\ &= i \mathcal{P} \frac{1}{y} + \pi \delta(y) - (-i \mathcal{P} \frac{1}{y} + \pi \delta(y)) = 2i \mathcal{P} \frac{1}{y}.\end{aligned}\quad (9)$$

iv. Podobným argumentem jako v předešlém bodě dostaneme

$$\mathcal{F}[1](y) = \mathcal{F}[\theta(x)](y) + \mathcal{F}[\theta(-x)](y) = i \mathcal{P} \frac{1}{y} + \pi \delta(y) + (-i \mathcal{P} \frac{1}{y} + \pi \delta(y)) = 2\pi \delta(y).\quad (10)$$

v. Jelikož pro inverzní Fourierovu transformaci platí identita

$$\mathcal{F}^{-1}[f](y) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f](-y),$$

s pomocí (9) dostáváme

$$\mathcal{F}[\mathcal{P} \frac{1}{x}](y) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{P} \frac{1}{x}](-y) = 2\pi \frac{\text{sgn}(-y)}{2i} = i\pi \text{sgn}(y).$$

vi. S využitím identity

$$\mathcal{F}[(ix)^n f(x)] = \frac{d^n}{dy^n} \mathcal{F}[f(x)](y)$$

a výsledku (10) snadno odvodíme, že

$$\mathcal{F}[x^n](y) = (-i)^n \frac{d^n}{dy^n} \mathcal{F}[1](y) = (-i)^n 2\pi \delta^{(n)}(y).$$

vii. Identita

$$\mathcal{F}[e^{i\alpha x} f(x)] = \mathcal{F}[f(x)](y + \alpha)$$

spolu s výsledkem (10) dávají

$$\mathcal{F}[e^{i\alpha x}](y) = \mathcal{F}[1](y + \alpha) = 2\pi \delta(y + \alpha) = 2\pi \delta_{-\alpha}(y).$$

viii. Z linearit  $\mathcal{F}$  a výsledku výše i německý ovčák po lobotomii vidí, že

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\sin(\alpha x)](y) &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i}\right](y) = \frac{1}{2i} (\mathcal{F}[e^{i\alpha x}](y) - \mathcal{F}[e^{-i\alpha x}](y)) \\ &= i\pi (\delta_{\alpha}(y) - \delta_{-\alpha}(y)).\end{aligned}$$

ix. Zcela analogicky jako v předchozím bodě dojdeme k závěru, že

$$\mathcal{F}[\cos(\alpha x)](y) = \pi (\delta_{\alpha}(y) + \delta_{-\alpha}(y)).$$

**Příklad 8.2** Nalezněte Fourierovu transformaci jednoduché vrstvy  $\delta_{S_R}$ , kde  $S_R$  představuje sféru v  $\mathbb{R}^3$  o poloměru  $R$ .

*Řešení:* V první řadě je nutné si uvědomit, že  $\delta_{S_R} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  – ověření je analogické tomu z příkladu 3.1 *vi*.

Nyní pro libovolnou  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  dostaneme s pomocí přítele Fubiniho

$$(\mathcal{F}[\delta_{S_R}], \varphi) = (\delta_{S_R}, \mathcal{F}[\varphi]) = \int_{S_R} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} dS_{\mathbf{y}} = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) \int_{S_R} e^{i\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}} dS_{\mathbf{y}} d\mathbf{x}.$$

Vnitřní integraci provedeme ve sférických souřadnicích  $(R, \theta, \phi)$ , které orientujeme tak, aby kladná poloosa  $z$  ukazovala stejným směrem jako vektor  $\mathbf{x}$ , tj. pomyslný severní pól sféry ležel ve směru vektoru  $\mathbf{x}$ . Souřadnice  $\theta$  tak měří úhel svíraný  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ . Máme potom  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{y}| |\mathbf{x}| \cos \theta = R |\mathbf{x}| \cos \theta$  a

$$\int_{S_R} e^{i\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}} dS_{\mathbf{y}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{iR|\mathbf{x}| \cos \theta} R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi R^2 \int_0^\pi e^{iR|\mathbf{x}| \cos \theta} \sin \theta d\theta.$$

Poslední integrál spočteme pomocí substituce  $t = \cos \theta$  jako

$$\int_0^\pi e^{iR|\mathbf{x}| \cos \theta} \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 e^{iR|\mathbf{x}|t} dt = 2 \int_0^1 \cos(R|\mathbf{x}|t) dt = \frac{2 \sin(R|\mathbf{x}|)}{R|\mathbf{x}|}.$$

Celkem tak dostáváme

$$(\mathcal{F}[\delta_{S_R}], \varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) 4\pi R \frac{\sin(R|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} d\mathbf{x},$$

tj.  $\mathcal{F}[\delta_{S_R}]$  regulární temperovaná distribuce s generátorem

$$\mathcal{F}[\delta_{S_R}](\mathbf{x}) = 4\pi R \frac{\sin(R|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}.$$

**Bonus 8.1** Nalezněte  $\mathcal{F}[|x|]$ ,  $\mathcal{F}[\theta(x)x^n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bonus 8.2** Nalezněte  $\mathcal{F}[e^{ix^2}]$ .

♣ Dodatek obsahuje tabulku význačných vlastností Fourierovy a Laplaceovy transformace spolu s přehledem vybraných obrazů a vzorů (převzato z [http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~klikavac/wp-content/uploads/2016/12/tabulka\\_vlastnosti.pdf](http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~klikavac/wp-content/uploads/2016/12/tabulka_vlastnosti.pdf)).

## 9 Cvičení 9

- Laplaceova transformace.

♣ Pro klasickou funkci  $f$  na  $(0, +\infty)$  splňující bodový odhad

$$\forall x \in (0, +\infty) \quad |f(x)| \leq Ce^{\alpha x}$$

pro nějaké  $C \geq 0$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$  zavádíme *Laplaceovu transformaci* funkce  $f$  jako funkci na  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > \alpha\}$  předpisem

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Injektivitu  $\mathcal{L}$  pro třídu po částech spojitých funkcí jako první dokázal *Matyáš Lerch* v roce 1903.

Pro temperovanou distribuci  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  se  $\text{supp } f \subset [0, +\infty)$  takovou, že  $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \sigma > a)(e^{-\sigma t} f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$  klademe pro  $p = \sigma + i\omega$ , kde  $\sigma > a$  a  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{L}[f(t)](p) := \mathcal{F}[e^{-\sigma t} f(t)](-\omega),$$

kde  $\mathcal{F}$  značí zobecněnou Fourierovu transformaci.

**Příklad 9.1** Pro  $a > 0$ ,  $b > 0$  spočítejte

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt.$$

*Řešení:* Zde po druhé v životě a dost možná naposledy potkáváme tzv. *Frullaniho integrál*, viz [https://en.wikipedia.org/wiki/Frullani\\_integral](https://en.wikipedia.org/wiki/Frullani_integral). Nově jej v tomto speciálním případě spočteme pomocí Laplaceovy transformace. Pozor integrál nelze rozdělit na dvojici integrálů s exponenciálami! Laplaceovu transformaci dostaneme do hry pomocí identity

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0+} \mathcal{L}[f(t)][p] = \lim_{p \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

kde se uvažuje pouze  $p > 0$ . Tato rovnost se ukáže pomocí Lebesguovy věty, kde za majorantu vezmeme funkci  $|f|$ . Platí tedy určitě pro  $f \in L^1((0, +\infty))$ , což je v našem případě splněno.

Můžeme tedy psát

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \lim_{p \rightarrow 0+} \mathcal{L}\left[\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right](p) = \lim_{p \rightarrow 0+} \int_p^{+\infty} \mathcal{L}[e^{-at} - e^{-bt}](q) dq,$$

kde druhá rovnost plyne z jedné z identit pro Laplaceovu transformaci, viz Dodatek. Jelikož  $\mathcal{L}$  je lineární stačí nyní napočítat  $\mathcal{L}[e^{-\alpha t}]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . To provedeme přímočaře pomocí integrální formule, kterou lze použít kdykoliv  $\Re q > -\alpha$ ,

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}](q) = \int_0^{+\infty} e^{-qt} e^{-\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(q+\alpha)t} dt = \frac{1}{q+\alpha}. \quad (11)$$

Platí tedy

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt &= \lim_{p \rightarrow 0+} \int_p^{+\infty} \frac{1}{q+a} - \frac{1}{q+b} dq = \lim_{p \rightarrow 0+} \left[ \ln \frac{q+a}{q+b} \right]_{q=p}^{+\infty} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0+} \ln \frac{p+b}{p+a} = \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Hurá!

**Bonus 9.1** Vyřešte úlohu výše za použití identity

$$\int_0^{+\infty} f(t) \mathcal{L}[g](t) dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}[f](t) g(t) dt.$$

**Příklad 9.2** Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$u'' + u' + u = e^t(3 \cos t + 2 \sin t), \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

*Řešení:* Trik spočívá v převedení obou stran rovnice na Laplaceovy obrazy. Pro první derivaci platí identita

$$\mathcal{L}[u'(t)](p) = p\mathcal{L}[u(t)](p) - u(0_+)$$

jejíž opětovnou aplikací dostaneme

$$\mathcal{L}[u''(t)](p) = p\mathcal{L}[u'(t)](p) - u'(0_+) = p^2\mathcal{L}[u(t)](p) - pu(0_+) - u'(0_+).$$

Po dosazení počáteční podmínky a zalistování v tabulce Laplaceových obrazů, viz Dodatek, dojdeme ke vztahu

$$p^2\mathcal{L}[u](p) - 1 + p\mathcal{L}[u](p) + \mathcal{L}[u](p) = 3\frac{p-1}{(p-1)^2+1} + 2\frac{1}{(p-1)^2+1},$$

odkud plyne

$$\mathcal{L}[u](p) = \frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Dalším nahlédnutím do tabulek a s poděkováním Matyáši Lerchovi odhalíme, že

$$u(t) = \theta(t)e^t \sin t.$$

Funkce  $t \mapsto e^t \sin t$  dokonce řeší naši diferenciální rovnici na celém  $\mathbb{R}$  a automaticky vyhovuje počáteční podmínce.



**Příklad 9.3** Pomocí Laplaceovy transformace vyřešte integro-diferenciální rovnici

$$u' + 2u + 2 \int_0^t u(\tau) d\tau = 1, \quad u(0) = 0$$

na  $(0, +\infty)$ .

*Řešení:* Na obě strany rovnice opět vypustíme zdvořelou Laplaceovu transformaci a vedle dříve uvedené identity pro derivaci použijeme ještě zaklínadlo

$$\mathcal{L}\left[\theta(t) \int_0^t u(\tau) d\tau\right](p) = \frac{\mathcal{L}[u](p)}{p}.$$

Dostaneme tak rovnost

$$p\mathcal{L}[u](p) + 2\mathcal{L}[u](p) + 2\frac{\mathcal{L}[u](p)}{p} = \frac{1}{p},$$

kde jsme již dosadili počáteční podmínku a využili platnosti (11) s  $\alpha = 0$ . Snadnou algebraickou úpravou odvodíme, že

$$\mathcal{L}[u](p) = \frac{1}{(p+1)^2 + 1}.$$

Po náhlednutí do tabulky Laplaceových obrazů tedy můžeme psát

$$u(t) = \theta(t)e^{-t} \sin t.$$

Přímým dosazením lze ověřit, že  $t \mapsto \theta(t)e^{-t} \sin t$  je řešením na celém  $\mathbb{R}$ . Platnost počáteční podmínky je opět automaticky splněna.

**Bonus 9.2** Pokuste se vyřešit rovnici z předchozí úlohy bez použití Laplaceovy transformace.

**Příklad 9.4** Pro  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$  spočtěte

$$\int_0^\infty e^{-at} \frac{\sin^2(bt)}{t} dt.$$

*Řešení:* Na zkoumaný integrál můžeme nahlížet jako na hodnotu klasické Laplaceovy transformace funkce

$$f(t) = \frac{\sin^2(bt)}{t}$$

v bodě  $a$ . Jelikož  $(\forall x \in \mathbb{R})(|\sin x| \leq |x|)$ , máme  $\forall t \in (0, +\infty)$  odhad

$$\left| \frac{\sin^2(bt)}{t} \right| \leq |b| |\sin(bt)| \leq |b| \leq |b|e^{0t},$$

odkud  $\mathcal{L}[f](p)$  je dobře definována  $\forall p \in \mathbb{C} : \Re p > 0$ . Pro  $a > 0$  tedy skutečně můžeme psát

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-at} \frac{\sin^2(bt)}{t} dt &= \mathcal{L}\left[\frac{\sin^2(bt)}{t}\right](a) = \int_a^{+\infty} \mathcal{L}[\sin^2(bt)](q) dq \\ &= \int_a^{+\infty} \mathcal{L}\left[\frac{1 - \cos(2bt)}{2}\right](q) dq = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \mathcal{L}[1](q) - \mathcal{L}[\cos(2bt)](q) dq \\ &= \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{q} - \frac{q}{q^2 + 4b^2} dq = \frac{1}{2} \left[ \ln q - \frac{1}{2} \ln(q^2 + 4b^2) \right]_a^{+\infty} = \frac{1}{4} \ln \frac{a^2 + 4b^2}{a^2}, \end{aligned}$$

kde jsme použili znalosti tabelovaných Laplaceových obrazů.

**Bonus 9.3** Vyřešte úlohu výše za použití identity (9.1).

**Bonus 9.4** Pro  $b \in \mathbb{R}$  nalezněte  $\mathcal{L}[\sin^2(bt)/t^2]$ . (Nápověda: Vyděte z identity (9.1).)

## 10 Cvičení 10

- Fundamentální řešení pro význačných obyčejné a parciální diferenciální rovnice.

**Příklad 10.1** Nalezněte fundamentální řešení pro  $L = \frac{d}{dx} + a$ , kde  $a > 0$ .

*Řešení:* Podle úlohy 6.4 je hledané fundamentální řešení dáno jako  $\mathcal{E}(x) = \theta(x)z(x)$ , kde  $z$  je řešení problému

$$Lz = z' + az = 0, \quad z(0) = 1,$$

tedy  $z(x) = e^{-ax}$ . Celkem máme  $\mathcal{E}(x) = \theta(x)e^{-ax}$ .

Alternativně je možné aplikovat Fourierovu transformaci na vztah

$$L\mathcal{E} = \mathcal{E}' + a\mathcal{E} = \delta.$$

Tak dostaneme rovnost

$$-iy\mathcal{F}[\mathcal{E}](y) + a\mathcal{F}[\mathcal{E}](y) = 1,$$

které vyhovuje

$$\mathcal{F}[\mathcal{E}](y) = \frac{1}{a - iy}.$$

Vzor této funkce identifikujeme pomocí tabulky Fourierovy transformace jako  $\mathcal{E}(x) = \theta(x)e^{-ax}$ . V tomto kroce jsme použili předpoklad  $a > 0$ , který je při prvním postupu nadbytečný (lze tak ve skutečnosti uvažovat  $a \in \mathbb{R}$ ).

**Příklad 10.2** Nalezněte fundamentální řešení pro  $L = \frac{d^2}{dx^2} + a^2$ , kde  $a > 0$

*Řešení:* Na základě příkladu 6.4 budeme uvažovat přidružený problém

$$Lz = z'' + a^2 z = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 1,$$

jehož obecné řešení má tvar  $z(x) = C_1 \cos(ax) + C_2 \sin(ax)$ . Po dosazení počáteční podmínky dostáváme  $z(x) = \sin(ax)/a$ . Celkem tak máme

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x) \frac{\sin(ax)}{a}.$$

**Bonus 10.1** *Lze předchozí úlohu řešit pomocí Fourierovy nebo Laplaceovy transformace? (Nápověda: Pouze při použití Laplaceovy transformace vyjde obraz jako (regulární) temperovaná distribuce.)*

**Příklad 10.3 (FŘ rovnice vedení tepla)** *Nalezněte fundamentální řešení pro*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

kde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ .

*Řešení:* Aplikací částečné Fourierovy transformace v proměnné  $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$  na definiční vztah  $L\mathcal{E} = \delta$  dostaneme

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}]}{\partial t}(t, \mathbf{y}) + a^2 |\mathbf{y}|^2 \mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) = \delta(t) \otimes 1(\mathbf{y}).$$

Pravá strana v této zobecněné rovnosti působí v proměnné  $\mathbf{y}$  jako regulární distribuce, předpokládejme proto to samé o  $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}]$ . Pro libovolné  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{1+n})$  potom máme

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) + a^2 |\mathbf{y}|^2 \mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}), \varphi(t, \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} (\delta(t), \varphi(t, \mathbf{y})) d\mathbf{y},$$

kde  $\mathbf{y}$  vystupuje v kulatých závorkách jako fixní parametr. Jelikož s fixním  $\mathbf{y}$ ,  $\varphi(\cdot, \mathbf{y}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , stačí nyní volit  $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}]$  tak, aby platilo  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) + a^2 |\mathbf{y}|^2 \mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) = \delta(t) \quad (\text{na } \mathcal{S}'(\mathbb{R})).$$

Na základě příkladu 10.1 tedy můžeme psát

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) = \theta(t) e^{-a^2 |\mathbf{y}|^2 t}.$$

Po nahlédnutí do tabulek Fourierových obrazů docházíme k závěru, že

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}_{\mathbf{y}}[\mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y})](t, -\mathbf{x}) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n} \mathcal{F}_{\mathbf{y}}[e^{-a^2 t |\mathbf{y}|^2}](t, -\mathbf{x}) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4a^2 t}}.$$

**Příklad 10.4 (FŘ jednorozměrné vlnové rovnice)** *Nalezněte fundamentální řešení pro*

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \text{kde } a > 0.$$

*Řešení:* Budeme postupovat podobně jako v předchozí úloze a problém budeme uvažovat zatím v libovolné (prostorové) dimenzi. Definiční vztah pro fundamentální řešení vypadá po aplikaci částečné Fourierovy transformace v proměnné  $\mathbf{x}$  jako

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}]}{\partial t^2}(t, \mathbf{y}) + a^2 |\mathbf{y}|^2 \mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) = \delta(t) \otimes 1(\mathbf{y}).$$

Postačuje tedy, aby pro  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  platilo

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) + a^2 |\mathbf{y}|^2 \mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) = \delta(t) \quad (\text{na } \mathcal{S}'(\mathbb{R})).$$

Podle příkladu 10.2 je řešením této rovnice

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) = \theta(t) \frac{\sin(a|\mathbf{y}|t)}{a|\mathbf{y}|}. \quad (12)$$

V jedné dimenzi je Fourierův vzor znám,

$$\mathcal{E}(t, x) = \theta(t) \frac{1}{2a} \theta(at - |x|).$$

**Příklad 10.5 (FŘ trojrozměrné vlnové rovnice)** *Nalezněte fundamentální řešení pro*

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad \text{kde } a > 0.$$

*Řešení:* Vztah (12) umíme invertovat i ve třech prostorových dimenzích—viz příklad 8.2, ze kterého odvodíme, že

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(\mathbf{x}).$$

## 11 Cvičení 11

- Řešení význačných obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic pomocí fundamentálního řešení.

**Příklad 11.1** *Vyřešte následující diferenciální rovnici převedením na zobecněnou úlohu*

$$y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = e^{-x}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

**Řešení:** Postup rozdělíme do několika kroků.

**převezení na zobecněnou úlohu** Z klasické teorie obyčejných diferenciálních rovnic víme, že ve studovaném případě řešení existuje a je dokonce hladké. Označme ho jako  $y$  a položme  $\tilde{y} = \theta y$ , kde  $\theta$  je Heavisideova funkce. Platí, že

$$\begin{aligned}\tilde{y}'(x) &= \theta(x)y'(x) + (\tilde{y}(0+) - \tilde{y}(0-))\delta(x) = \theta(x)y'(x) + \delta(x) \\ \tilde{y}''(x) &= \theta(x)y''(x) + (\tilde{y}'(0+) - \tilde{y}'(0-))\delta(x) + \delta'(x) = \theta(x)y''(x) + 2\delta(x) + \delta'(x).\end{aligned}$$

Odtud dostáváme následující úlohu na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\tilde{y}'' + 2\pi\tilde{y}' + \pi^2\tilde{y} = \theta(y'' + 2\pi y' + \pi^2 y) + \delta' + 2(1 + \pi)\delta = \theta f + \delta' + 2(1 + \pi)\delta,$$

kde  $f(x) = e^{-x}$  je původní pravá strana.

**nalezení fundamentálního řešení** Podle příkladu 6.4 stačí najít klasické řešení  $z$  problému

$$z'' + 2\pi z' + \pi^2 z = 0; \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 1,$$

a přenásobit ho  $\theta$ -funkcí. Charakteristický polynom pro výše uvedou rovnici má zřejmě dvojnásobný kořen  $\lambda = -\pi$ . Obecné řešení homogenní rovnice tak vypadá jako  $z(x) = C_1 e^{-\pi x} + C_2 x e^{-\pi x}$ . Po dosazení počáteční podmínky dostáváme  $z(x) = x e^{-\pi x}$ . Fundamentální řešení zobecněného problému je tudíž

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x) x e^{-\pi x}.$$

**konvoluce s pravou stranou** Řešení  $\tilde{y}$  obdržíme pomocí konvoluce jako  $\tilde{y} = \mathcal{E} * (\theta f + \delta' + 2(1 + \pi)\delta)$ . Jelikož konvoluce působí lineárně ve svých argumentech, stačí jednotlivé příspěvky napočítat zvlášť. Okamžitě dostáváme  $\mathcal{E} * \delta = \mathcal{E}$  a  $\mathcal{E} * \delta' = (\mathcal{E} * \delta)' = \mathcal{E}'$ . Dále platí

$$\begin{aligned}(\mathcal{E} * \theta f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \theta(x-y) e^{-(x-y)} \theta(y) y e^{-\pi y} dy = \theta(x) e^{-x} \int_0^x y e^{(1-\pi)y} dy \\ &= \frac{\theta(x)}{1-\pi} \left( x e^{-\pi x} - \frac{1}{1-\pi} (e^{-\pi x} - e^{-x}) \right).\end{aligned}$$

Celkem jsme tak odvodili, že

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= \frac{\theta(x)}{1-\pi} \left( x e^{-\pi x} - \frac{1}{1-\pi} (e^{-\pi x} - e^{-x}) \right) + 2(1+\pi)\theta(x)x e^{-\pi x} + \theta(x)(e^{-\pi x} - \pi x e^{-\pi x}) \\ &= \theta(x) \left[ \left( 2 + \pi + \frac{1}{1-\pi} \right) x e^{-\pi x} + \left( 1 - \frac{1}{(1-\pi)^2} \right) e^{-\pi x} + \frac{1}{(1-\pi)^2} e^{-x} \right].\end{aligned}$$

(Všimněte si, že zobecněná derivace  $\mathcal{E}'$  obsahuje jen regulární část, neboť  $\mathcal{E}(0+) = \mathcal{E}(0-) = 0$ .)

**okamžik vítězství** Z přednášky víme, že výraz v hranaté závorce výše je řešení *původní* úlohy na kladné poloose a vyhovuje zadané počáteční podmínce! (Oboje lze zkontrolovat i prostým dosazením.)

**Příklad 11.2** *Převedením na zobecněnou úlohu vyřešte*

$$u'' + a^2 u = f, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1,$$

kde  $a > 0$  a  $f \in C([0, \infty))$ .

*Řešení:* Budeme postupovat stejně jako v předchozí úloze. Pro klasické řešení rovnice  $u$  zavedeme  $\tilde{u} := \theta u$ , které na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  vyhovuje rovnici

$$\tilde{u}'' + a^2 \tilde{u} = \theta(u'' + a^2 u) + u_1 \delta + u_0 \delta' = \theta f + u_1 \delta + u_0 \delta'.$$

Fundamentální řešení pro levou stranu jsme našli již v příkladě 10.2 jako

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x) \frac{\sin(ax)}{a}.$$

Zřejmě platí  $\mathcal{E} * \delta = \mathcal{E}$  a

$$\mathcal{E} * \delta'(x) = (\mathcal{E} * \delta)'(x) = \mathcal{E}'(x) = \theta(x) \cos(ax) + (\mathcal{E}(0+) - \mathcal{E}(0-))\delta(x) = \theta(x) \cos(ax).$$

Celkem tak pro řešení zobecněné úlohy máme

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= (\mathcal{E} * (\theta f + u_1 \delta + u_0 \delta'))(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \theta(x-y) f(x-y) \theta(y) \frac{\sin(ay)}{a} dy + u_1 \theta(x) \frac{\sin(ax)}{a} + u_0 \theta(x) \cos(ax) \\ &= \theta(x) \left[ \frac{1}{a} \int_0^x f(x-y) \sin(ay) dy + u_1 \frac{\sin(ax)}{a} + u_0 \cos(ax) \right]. \end{aligned}$$

S odvoláním na přednášku nakonec nahlédneme, že výraz v hranaté závorce vyhovuje na kladné poloose původnímu problému.

**Příklad 11.3** *Vyřešte na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  zobecněnou úlohu*

$$y'' + 3y' + 2y = 5\delta + \delta'$$

a najděte jí odpovídající klasickou úlohu.

*Řešení:* Začneme již rutinně hledáním fundamentálního řešení, to je dáno jako  $\mathcal{E} = \theta z$ , kde  $z$  řeší problém

$$z'' + 3z' + 2z = 0; \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 1.$$

Obecné řešení tohoto problému je  $z(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ , počáteční podmínky potom vyhovuje  $z(x) = (e^{-x} - e^{-2x})$ . Takto jsme napočítali, že

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x)(e^{-x} - e^{-2x}).$$

Zobecněnou úlohu tedy řeší funkce

$$y(x) = (\mathcal{E} * (5\delta + \delta'))(x) = 5\mathcal{E}(x) + \mathcal{E}'(x) = \theta(x)(4e^{-x} - 3e^{-2x}).$$

Na pravé straně zobecněné úlohy stojí jen  $\delta$ -funkce a její derivace, které odpovídají počáteční podmínce klasického problému. Ten vypadá jako

$$u'' + 3u' + 2u = 0; \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1.$$

Pokud nyní zapíšeme  $y = \theta u$ , potom

$$\begin{aligned} y' &= \theta u' + u_0 \delta \\ y'' &= \theta u'' + u_1 \delta + u_0 \delta', \end{aligned}$$

což po dosazení do původního zobecněného problému dává

$$\theta(u'' + 3u' + 2u) + (u_1 + 3u_0)\delta + u_0\delta' = 5\delta + \delta'.$$

Porovnáním příslušných koeficientů potom dostáváme  $u_0 = 1$  a  $u_1 = 2$ .

**Příklad 11.4 (Cauchyova úloha pro jednorozměrnou rovnici vedení tepla)** Pro  $t > 0$  nalezněte řešení úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t); \quad u(x, 0+) = u_0(x),$$

kde  $a > 0$  a  $u_0 \in C(\mathbb{R})$  a  $f \in C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$  ubývají dost rychle v nekonečnu (viz integrály v řešení níže).

*Řešení:* Postup si opět rozložíme do několika kroků.

**převedení na zobecněnou úlohu** Předpokládejme, že existuje klasické řešení problému výše; označme jej jako  $u$ . Pro  $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t) := \theta(t)u(x, t)$  platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x, t) &= \theta(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, t) &= \theta(t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u_0(x) \otimes \delta(t), \end{aligned} \tag{13}$$

viz příklad 5.6. Máme tedy

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \theta(t) \left( \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + u_0 \otimes \delta = \tilde{f} + u_0 \otimes \delta, \tag{14}$$

kde  $\tilde{f}(x, t) := \theta(t)f(x, t)$ .

**nalezení fundamentálního řešení** Z příkladu 10.3 s  $n = 1$  již víme, že fundamentální řešení problému výše je dáno vztahem

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

**konvoluce s pravou stranou** Zobecněné řešení rovnice (14) je dáno konvolucí  $\tilde{u} = \varepsilon * (\tilde{f} + u_0 \otimes \delta(t))$ . Spočítáme každý z příspěvků zvlášť. Prostým dosazením do integrální formule pro konvoluci (platné například pro integrovatelné  $f$ ) dostaneme

$$\begin{aligned} (\mathcal{E} * \tilde{f})(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} \theta(\tau) f(y, \tau) d\tau dy \\ &= \theta(t) \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(y, \tau) d\tau dy. \end{aligned}$$

Dále pro libovolné  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  platí

$$\begin{aligned} (\mathcal{E} * u_0 \otimes \delta, \varphi) &= (\mathcal{E}(y, \tau), (u_0(x) \otimes \delta(t), \varphi(y+x, \tau+t))) \\ &= (\mathcal{E}(y, \tau), (u_0(x), (\delta(t), \varphi(y+x, \tau+t)))) = (\mathcal{E}(y, \tau), (u_0(x), \varphi(y+x, \tau))) \\ &= (\mathcal{E}(\cdot, \tau) *_x u_0, \varphi(\cdot, \tau)), \end{aligned}$$

kde v posledním výrazu provádíme konvoluci jen v prostorové proměnné, což jsme označili symbolem  $*_x$ . Ubývá-li  $u_0$  dost rychle v nekonečnu (leží-li například v  $L^1(\mathbb{R})$ ), můžeme psát

$$(\mathcal{E} *_x u_0)(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy.$$

Celkem docházíme k výsledku

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(y, \tau) d\tau dy + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy \right].$$

**grand finale** Pro  $t > 0$  splývá klasické řešení  $u$  se zobecněným, což lze ověřit přímo dosazením, zároveň vyhovuje počáteční podmínce (chápané limitně). Druhé tvrzení si dokážeme. Zřejmě máme

$$u(x, 0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} (g_{\sqrt{t}} *_x u_0)(x).$$

Výše jsme zavedli jednoparametrickou množinu funkcí

$$g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \text{kde } g(x) := \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}, \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

Jelikož konvoluce je spojitá ve svých argumentech a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} g_\varepsilon = \delta$  na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , dostáváme

$$u(x, 0+) = \delta *_x u_0 = u_0.$$



**Bonus 11.1** Podobně lze postupovat ve více dimenzích. Zkuste si to!

**Příklad 11.5 (Cauchyova úloha pro jednorozměrnou vlnovou rovnici)** Pro  $t > 0$ , nalezněte řešení úlohy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t); \quad u(x, 0+) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0+) = u_1(x),$$

kde  $a > 0$  a  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$  a  $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ .

*Řešení:* K zobecněné formulaci přejdeme opět aplikací levé strany rovnice na  $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t) := \theta(t)u(x, t)$ , kde  $u$  je klasické řešení, jehož existenci zprvu jen předpokládáme (nicméně pro formulaci zobecněné úlohy nemusí ani existovat). Derivací vztahu (13) obdržíme

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(x, t) = \theta(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + u_0(x) \otimes \delta'(t) + u_1(x) \otimes \delta(t).$$

Pomocí této identity spolu s výchozí rovnicí odvodíme, že

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tilde{f} + u_0 \otimes \delta' + u_1 \otimes \delta,$$

kde  $\tilde{f}(x, t) := \theta(t)f(x, t)$ . Fundamentální řešení pro tento problém jsme odhalili již v úloze 10.4 jako

$$\mathcal{E}(x, t) = \theta(t) \frac{1}{2a} \theta(at - |x|).$$

Zbývá vypočítat konvoluci  $\mathcal{E} * (\tilde{f} + u_0 \otimes \delta' + u_1 \otimes \delta)$ , což opět provedeme člen po členu. Dosazením do integrální formule dostaneme

$$\begin{aligned} (\mathcal{E} * \tilde{f})(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \theta(t - \tau) \theta(a(t - \tau) - |x - y|) \theta(\tau) f(y, \tau) dy d\tau \\ &= \frac{\theta(t)}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau. \end{aligned}$$

Pomocí formulky odvozené v příkladu 11.4 odvodíme, že

$$(\mathcal{E} * u_1 \otimes \delta)(x, t) = (\mathcal{E}(\cdot, t) *_{\mathbf{x}} u_1)(x) = \frac{\theta(t)}{2a} \int_{\mathbb{R}} \theta(at - |x - y|) u_1(y) dy = \frac{\theta(t)}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy.$$

Pro zbývající příspěvek dostáváme podobně následující

$$\mathcal{E} * (u_0 \otimes \delta') = \mathcal{E} * \partial_t(u_0 \otimes \delta) = \partial_t(\mathcal{E} * (u_0 \otimes \delta)) = \partial_t(\mathcal{E} *_{\mathbf{x}} u_0),$$

odkud již

$$\begin{aligned} (\mathcal{E} * (u_0 \otimes \delta'))(x, t) &= \partial_t \frac{\theta(t)}{2a} \int_{\mathbb{R}} \theta(at - |y|) u_0(x - y) dy = \partial_t \frac{\theta(t)}{2a} \int_{-at}^{at} u_0(x - y) dy \\ &= \frac{\theta(t)}{2a} (u_0(x - at)a - u_0(x + at)(-a)) = \frac{\theta(t)}{2} (u_0(x + at) + u_0(x - at)). \end{aligned}$$

(Všimněte si, že v zobecněné derivaci podle  $t$  se neobjevil singulární člen.) Celkem tedy máme

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a} \left[ \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau + \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy + a(u_0(x+at) + u_0(x-at)) \right]. \quad (15)$$

Pro  $t > 0$  klasické řešení  $u$  splývá s tímto zobecněným řešením, jak se lze přesvědčit přímým dosazením.

**Bonus 11.2** Podobně lze postupovat ve dvou a třech dimenzích, kde známe potřebná fundamentální řešení. Zkuste si to!

**Bonus 11.3** Ověřte, že pro  $t > 0$  funkce (15) řeší Cauchyovu úlohu pro jednorozměrnou vlnovou rovnici, tj. splňuje diferenciální rovnici v klasickém smyslu a vyhovuje počáteční podmínce.

**Bonus 11.4** Potenciál  $U = U(\mathbf{x})$  gravitačního pole splňuje na  $\mathbb{R}^3$  rovnici  $\Delta U = k\rho$ , kde  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  je hustota hmoty a  $k$  je gravitační konstanta.

- i. Vyjádřete potenciál  $U$  pomocí integrálu. (Nápověda: fundamentální řešení operátoru  $\Delta$  je  $\varepsilon = 1/(4\pi|\mathbf{x}|)$ .)
- ii. Najděte potenciál  $U$  pro hustotu  $\rho = \delta_{S_R}$ .

## 12 Cvičení 12

- Integrální operátory, integrální rovnice.

**Příklad 12.1** *Vyřešte integrální rovnici*

$$\varphi(x) = 4 \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} \varphi(y) dy - 4xe^{-x}.$$

*Řešení:* Nejprve poznamenejme, že iterační metody odvozené na přednášce mají konvergenci *zaručenou* pouze pro omezené integrační oblasti a dostatečně malé hodnoty parametru před integrálem. My však úlohu vyřešíme i bez nich, navíc snadno a přímo! Integrální jádro je totiž degenerované. Máme tedy

$$\varphi(x) = 4e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y} \varphi(y) dy - 4xe^{-x} = Ae^{-x} - 4xe^{-x},$$

kde  $A \in \mathbb{R}$  závisí na  $\varphi$ . Hodnotu  $A$  nalezneme zpětným dosazením do integrální rovnice, odkud

$$A = 4 \int_0^{+\infty} e^{-y} (Ae^{-y} - 4ye^{-y}) dy = 4A \int_0^{+\infty} e^{-2y} dy - 16 \int_0^{+\infty} ye^{-2y} dy = 2A - 4,$$

a tedy  $A = 4$ . Zadání tudíž na celé poloose  $(0, +\infty)$  vyhovuje funkce

$$\varphi(x) = 4e^{-x}(1 - x).$$

**Příklad 12.2** *Metodou postupných aproximací vyřešte integrální rovnici*

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x^2 y^3 \varphi(y) dy + x.$$

*Řešení:* I v této úloze vystupuje degenerované jádro, řešení lze tedy hledat ve tvaru  $\varphi(x) = Ax^2 + x$ . Ze cvičných důvodů ale nasadíme v souladu se zadáním metodu postupných aproximací. Jako nultou iteraci zvolíme "pravou stranu"  $f(x) = x$ ; položíme tedy  $\varphi_0(x) = x$ . První iteraci dostaneme dosazením nulté do integrální rovnice, tj.

$$\varphi_1(x) = \lambda \int_0^1 x^2 y^3 \varphi_0(y) dy + x = \lambda x^2 \int_0^1 y^4 dy + x = \frac{\lambda}{5} x^2 + x.$$

Podobně  $k$ -tou iteraci napočteme dosazením  $(k-1)$ -té iterace do integrální rovnice. Tímto způsobem odvodíme, že

$$\varphi_2(x) = \lambda \int_0^1 x^2 y^3 \varphi_1(y) dy + x = \lambda x^2 \int_0^1 y^3 \left( \frac{\lambda}{5} y^2 + y \right) dy + x = \frac{\lambda^2}{5 \cdot 6} x^2 + \frac{\lambda}{5} x^2 + x$$

a

$$\begin{aligned}\varphi_3(x) &= \lambda \int_0^1 x^2 y^3 \varphi_2(y) dy + x = \lambda x^2 \int_0^1 y^3 \left( \frac{\lambda^2}{5 \cdot 6} y^2 + \frac{\lambda}{5} y^2 + y \right) dy + x \\ &= \frac{\lambda^3}{5 \cdot 6^2} x^2 + \frac{\lambda^2}{5 \cdot 6} x^2 + \frac{\lambda}{5} x^2 + x = \frac{\lambda}{5} \left( \frac{\lambda^2}{6^2} + \frac{\lambda^1}{6^1} + \frac{\lambda^0}{6^0} \right) x^2 + x.\end{aligned}$$

Odtud uhádneme (a čtenář si to i snadno potvrdí matematickou indukcí podle  $k$ ), že

$$\varphi_k(x) = \frac{\lambda}{5} \sum_{l=0}^{k-1} \left( \frac{\lambda}{6} \right)^l x^2 + x.$$

Pro  $\lambda : |\lambda| < 6$  suma výše konverguje, když  $k \rightarrow +\infty$ , čímž dostáváme

$$\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_k(x) = \frac{\lambda}{5} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{6}} x^2 + x = \frac{6\lambda}{5(6 - \lambda)} x^2 + x \quad (\forall x \in (0, 1)).$$

♣ Metoda postupných aproximací konvergovala v úloze výše pro všechna  $\lambda : |\lambda| < 6$ . Podle obecného výsledku z přednášky víme, že  $\varphi$  je určité řešením, tj. že aproximace konvergují k řešení, pokud

$$|\lambda| < \frac{1}{|(0, 1)| \sup_{(x, y) \in (0, 1)^2} |x^2 y^3|} = 1.$$

Pokud bychom řešení od počátku hledali ve tvaru  $\varphi(x) = Ax^2 + x$ , uspěli bychom pro všechna  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$ . Podívejme se krátce, co je na hodnotě  $\lambda = 6$  tak speciálního. Zkoumanou integrální rovnici můžeme pro  $\lambda \neq 0$  přepsat jako  $(K - z)\varphi = f$ , kde  $K$  je integrální operátor na  $(0, 1)$  s integrálním jádrem  $x^2 y^3$ ,  $z := \frac{1}{\lambda}$  a  $f(x) := -\frac{x}{\lambda}$ . Snadno ověříme, že operátor  $K$  má jedinou vlastní hodnotu  $z = \frac{1}{6}$ , které odpovídá právě  $\lambda = 6$ . Jelikož při řešení integrální rovnice typicky postupujeme tak, že v konečném důsledku hledáme  $(K - z)^{-1}$ , není divu, že je-li  $z$  vlastní hodnotou  $K$ , tak potom neuspějeme. Rozmyslete si, pro jakou pravou stranu  $f$  bychom našli řešení  $\varphi$  i pro  $\lambda = 6$ .

**Příklad 12.3** *Metodou iterovaných jader řešte rovnici*

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x + y) \varphi(y) dy + \sin(x).$$

*Řešení:* Jelikož  $\sin(x + y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ , jedná se i v tomto případě o degenerované jádro. Řešení integrální rovnice bude mít tedy nutně tvar  $\varphi(x) = A \sin x + B \cos x$  (tak jsme zahrnuli i "pravou stranu"  $\sin x$ ). Budeme ale nyní předstírat amnézii a ze cvičných důvodů rovnici vyřešíme metodou iterovaných jader. Ta vychází z metody postupných aproximací, kdy, po přepsání zadání na tvar  $\varphi = \lambda K \varphi + f$ , v  $k$ -tém kroce

počítáme

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \lambda K \varphi_{k-1} + f = \lambda K (\lambda K \varphi_{k-2} + f) + f = \lambda^2 K^2 \varphi_{k-2} + \lambda K f + f \\ &= \dots = \lambda^k K^k f + \lambda^{k-1} K^{k-1} f + \dots + \lambda K f + f = \sum_{l=0}^k \lambda^l K^l f, \quad (16)\end{aligned}$$

kde  $K^0$  je identické zobrazení a  $K^2 = K \circ K$ , atd. Operátory  $K^l$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , jsou integrální operátory s jádry  $\mathcal{K}_l$ , kde

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1(x, y) &= \mathcal{K}(x, y) := \sin(x + y) \\ \mathcal{K}_2(x, y) &= \int_0^\pi \mathcal{K}_1(x, z) \mathcal{K}_1(z, y) dz \\ &\vdots \\ \mathcal{K}_l(x, y) &= \int_0^\pi \mathcal{K}_1(x, z) \mathcal{K}_{l-1}(z, y) dz.\end{aligned}$$

Metoda iterovaných jader vychází z optimistického předpokladu, že všechna jádra  $\mathcal{K}_l$  lze explicitně napočítat. V našem konkrétním případě to je skutečně možné, máme totiž

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2(x, y) &= \int_0^\pi \sin(x + z) \sin(z + y) dz = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(x - y) - \cos(x + y + 2z)) dz \\ &= \frac{\pi}{2} \cos(x - y)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_3(x, y) &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin(x + z) \cos(z - y) dz = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \int_0^\pi (\sin(x - y + 2z) + \sin(x + y)) dz \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(x + y) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \mathcal{K}_1(x, y),\end{aligned}$$

odkud vidíme, že výpočet  $\mathcal{K}_l$  se až na konstantu zacyklil. Můžeme tedy okamžitě psát

$$\mathcal{K}_l(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{l-1} \begin{cases} \cos(x - y) & \text{pro } l \text{ sudé} \\ \sin(x + y) & \text{pro } l \text{ liché.} \end{cases}$$

Provedeme-li nyní v (16) limitní přechod, dostaneme  $\varphi = (\sum_{l=0}^{+\infty} \lambda^l K^l) f$ , což lze přepsat jako

$$\varphi = \lambda R_\lambda f + f,$$

kde  $R_\lambda$ , tzv. *rezolventa*, je operátor s integrálním jádrem

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \sum_{l=1}^{+\infty} \lambda^{l-1} \mathcal{K}_l(x, y).$$

V našem případě platí

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(x, y; \lambda) &= \cos(x - y) \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda^{2m+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} + \sin(x + y) \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda^{2m} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2} \left( \frac{\lambda\pi}{2} \cos(x - y) + \sin(x + y) \right)\end{aligned}$$

a následně,  $\forall x \in (0, \pi)$ ,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lambda \int_0^\pi \mathcal{R}(x, y; \lambda) \sin y \, dy + \sin x \\ &= \frac{\lambda}{1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2} \left( \int_0^\pi \frac{\lambda\pi}{2} \cos(x - y) \sin y \, dy + \int_0^\pi \sin(x + y) \sin y \, dy \right) + \sin x \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2} \sin x + \frac{\frac{\lambda\pi}{2}}{1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2} \cos x.\end{aligned}$$

Pro konvergenci geometrické řady ve výrazu pro  $\mathcal{R}$  jsme požadovali, aby  $|\lambda| < \frac{2}{\pi}$ . Podle obecné věty z přednášky je  $\varphi$  určité řešením pro  $|\lambda| < \frac{1}{\pi}$ . Nicméně přímým dosazením lze ověřit, že  $\varphi$  vyhovuje zadané integrální rovnici kdykoliv se v jeho koeficientech nedělí nulou, tj.  $\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi}$ .

**Bonus 12.1** Řešte předchozí úlohu přímo s využitím skutečnosti, že integrální operátor má degenerované jádro! Pro jaká  $\lambda$  naleznete řešení?

**Příklad 12.4** Nalezněte vlastní čísla a vlastní funkce operátoru  $L$ , který je dán předpisem

$$L\varphi(x) = \int_0^{2\pi} \sin(x + y) \varphi(y) dy.$$

*Řešení:* Připomeňme, že  $z \in \mathbb{C}$  je vlastní číslo lineárního operátoru  $L$  právě tehdy, pokud existuje nenulová funkce  $\psi$  v definičním oboru  $L$  tak, že  $L\psi = z\psi$ . V našem případě je  $L$  definován na spojitých omezených funkcích na intervalu  $(0, 2\pi)$ . Jelikož

$$L\psi(x) = \sin x \int_0^{2\pi} \cos y \, \psi(y) dy + \cos x \int_0^{2\pi} \sin y \, \psi(y) dy,$$

budeme vlastní funkce hledat nejprve ve tvaru  $\psi = A \sin + B \cos$ , kde  $|A| + |B| > 0$ . Dosazením do rovnice na vlastní čísla dostaneme podmínku

$$L\psi(x) = \pi A \cos x + \pi B \sin x = z(A \sin x + B \cos x) \quad (\forall x \in (0, 2\pi)),$$

která je splněna právě tehdy, pokud  $\pi A = zB \wedge \pi B = zA$ . Tato soustava připouští netriviální řešení jen a pouze pro  $z = \pm\pi$ . V případě  $z = \pi$  je odpovídající vlastní

podprostor lineárním obalem funkce  $\sin + \cos$ , v případě  $z = -\pi$  je vlastní podprostor nabalen na funkci  $\sin - \cos$ .

Pokud  $A = B = 0$ , potom  $L\psi = 0$ . Libovolné  $\psi$  vyhovující podmínkám

$$A = \int_0^{2\pi} \cos y \, \psi(y) dy = 0, \quad B = \int_0^{2\pi} \sin y \, \psi(y) dy = 0$$

je tedy vlastní funkcí  $L$  s vlastním číslem  $z = 0$ . Ze znalosti Fourierovy ortonormální báze nahlédneme, že vlastní funkce nuly leží právě v lineárním obalu lineárně nezávislých funkcí

$$\{\cos(nx) \mid n = 0, 2, 3, \dots\} \cup \{\sin(nx) \mid n = 2, 3, \dots\}.$$

Nula je tak vlastní číslo nekonečné násobnosti!

**Příklad 12.5** *Řešte Volterrovu integrální rovnici*

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{y^2}{x^2} \varphi(y) dy + e^x.$$

*Řešení:* Nejprve se nedáme nachytat, že se jedná o úlohu s degenerovaným jádrem. Horní mez totiž závisí na  $x$ . Pokud bychom ji nahradili mezí  $x = +\infty$ , vypadalo by integrální jádro jako  $\theta(x-y)y^2x^{-2}$ , což je již neseparovatelný výraz!

Nejpřímějším postupem, bude rovnici upravit jako

$$x^2 \varphi(x) = \int_0^x y^2 \varphi(y) dy + x^2 e^x$$

a tento vztah zderivovat podle  $x$ . Tak dostaneme lineární diferenciální rovnici

$$x^2 \varphi'(x) + 2x \varphi(x) = x^2 \varphi(x) + x^2 e^x + 2x e^x,$$

kterou snadno vyřešíme nalezením integračního faktoru jako

$$\varphi(x) = \left( \frac{C}{x^2} + \frac{x}{3} + 1 \right) e^x.$$

Integrační konstantu dostaneme dosazením  $x = 0$  do původní integrální rovnice, odkud  $\varphi(0) = 1$ , a tedy  $C = 0$ . Hledané řešení je proto tvaru

$$\varphi(x) = \left( \frac{x}{3} + 1 \right) e^x \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

**Bonus 12.2** *Metodou postupných aproximací vyřešte*

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \sqrt{xy} \varphi(y) dy + \sqrt{x}.$$

**Příklad 12.6** *Metodou iterovaných jader vyřešte*

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \frac{x^3}{y^2} \varphi(y) dy + x^3.$$

## 13 Cvičení 13

- Eliptické operátory, Greenova funkce.

**Příklad 13.1** Pro  $f \in C([0, 1])$  nalezněte řešení Sturm–Liouvilleovy úlohy

$$-(1+x^2)u'' - 2xu' = f, \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

*Řešení:* Levá strana zkoumané rovnice je skutečně tvaru  $Lu = -(pu')' + qu$ , kde  $p(x) = (1+x^2)$  a  $q(x) = 0$ . Z obecné teorie víme, že řešení zadané úlohy můžeme potom vyjádřit jako  $u = L^{-1}f$ , přičemž  $L^{-1}$  je integrální operátor, jehož jádro, tzv. *Greenova funkce*, je dáno předpisem

$$\mathcal{G}(x, y) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \begin{cases} v_1(x)v_2(y) & \text{pro } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ v_1(y)v_2(x) & \text{pro } 1 \geq x > y \geq 0, \end{cases} \quad (17)$$

kde  $v_i$ ,  $i = 1, 2$ , jsou nenulová řešení homogenní rovnice  $Lv = 0$ ,  $v_1$  splňuje hraniční podmínku v levém krajním bodě  $x = 0$ ,  $v_2$  vyhovuje hraniční podmínce v pravém krajním bodě  $x = 1$  a

$$w := \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že veličina  $pw$  je konstantní na celém intervalu  $[0, 1]$ .

V našem případě vyřešíme homogenní rovnici  $Lv = -(1+x^2)v'' - 2xv' = 0$  substitucí  $\tilde{v} = v'$ . Nová funkce vyhovuje rovnici

$$-(1+x^2)\tilde{v}' - 2x\tilde{v} = -((1+x^2)\tilde{v})' = 0.$$

Integrací tak postupně dostaneme

$$\tilde{v}(x) = \frac{A}{1+x^2} \quad \text{a} \quad v(x) = A \arctan x + B.$$

Řešení  $v_i$  jsou určena až na multiplikativní konstantu, protože hraniční podmínka v jednom z krajních bodů fixuje vždy jen jednu z konstant  $A, B$  (případně jejich poměr). My je zvolíme tak, že

$$v_1(x) = \arctan x, \quad v_2(x) = 1.$$

S touto volbou platí  $w(x) = -(1+x^2)^{-1}$  a  $p(x)w(x) = -1$ . Dosazením do (17) zjistíme, že

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} \arctan x & \text{pro } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ \arctan y & \text{pro } 1 \geq x > y \geq 0, \end{cases}$$

a tudíž

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, y)f(y)dy = \int_0^x \arctan y f(y)dy + \arctan x \int_x^1 f(y)dy \quad (\forall x \in [0, 1]).$$



**Příklad 13.2** Pro  $f \in C([0, 1])$  nalezněte řešení Sturm–Liouvilleovy úlohy

$$-xu'' - u' = f, \quad |u(0)| < \infty, u(1) = 0.$$

*Řešení:* V první řadě si všimněme, že hraniční podmínka je mimo rámec standardní formulace Sturm–Liouvilleovy úlohy. Dále snadno nahlédneme, že  $p(x) = x$ . Tato funkce však vymizí v levém krajním bodě  $x = 0$ , což nás opět dostává mimo standardní (regulární) formulaci. Přesto se pokusme postupovat běžným způsobem s tím, že platnost takto získaného výsledku ověříme prostým dosazením.

Homogenní problém  $-xv'' - v' = -(xv')' = 0$  má obecné řešení  $v(x) = A \ln x + B$ . Dvojici řešení  $v_i$ ,  $i = 1, 2$ , můžeme potom volit jako

$$v_1(x) = 1 \quad \text{a} \quad v_2(x) = \ln x.$$

Odtud již dopočteme  $w(x) = x^{-1}$ ,  $p(x)w(x) = 1$  a

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} -\ln y & \text{pro } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ -\ln x & \text{pro } 1 \geq x > y \geq 0. \end{cases}$$

Náš kandidát na řešení tedy vypadá jako

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, y) f(y) dy = -\ln x \int_0^x f(y) dy - \int_x^1 \ln y f(y) dy \quad (\forall x \in [0, 1]).$$

Jelikož  $f$  je omezená, druhý integrál konverguje i pro  $x = 0$ . Navíc platí

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy - \ln x f(x) + \ln x f(x) = -\frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy \\ u''(x) &= \frac{1}{x^2} \int_0^x f(y) dy - \frac{1}{x} f(x). \end{aligned}$$

Vidíme, že  $u$  není obecně spojitě dvakrát diferencovatelné na  $[0, 1]$ , nicméně pro všechna  $x \in (0, 1)$  řeší výchozí rovnici, navíc vyhovuje oběma hraničním podmínkám.

**Příklad 13.3** Převedte Sturm–Liouvilleovu úlohu

$$-u'' - u = f, \quad u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

na integrální rovnici.

*Řešení:* Všimněme si, že "potenciál"  $q(x) = -1$  je negativní na  $(0, \pi)$ . Nemáme tedy zaručeno, že standardní postup povede k výsledku. Přesvědčíme se, že skutečně nevede k cíli. Řešení homogenní rovnice  $-u'' - u = 0$  vyhovující podmínce  $u(0) = 0$ , respektive  $u(\pi) = 0$ , je  $v_1(x) = C_1 \sin x$ , respektive  $v_2(x) = C_2 \sin x$ . Řešení jsou lineárně závislá, odkud wronskián  $w \equiv 0$  a  $\sin x$  je vlastní funkce zadaného operátoru s vlastní hodnotou 0—operátor tedy nelze invertovat!

Přepíšeme tedy naši úlohu jako

$$-u'' = f + u, \quad u(0) = 0, u(\pi) = 0.$$

Odpovídající homogenní úloha má obecné řešení  $v(x) = C_1 \sin x + C_2$ , odkud odvodíme že  $v_1(x) = x$ ,  $v_2(x) = x - \pi$ ,  $w(x) = \pi$  a

$$\mathcal{G}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \begin{cases} x(y - \pi) & \text{pro } 0 \leq x \leq y \leq \pi \\ y(x - \pi) & \text{pro } \pi \geq x > y \geq 0. \end{cases}$$

Hledaná integrální rovnice potom vypadá jako

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^\pi \mathcal{G}(x, y)(f(y) + u(y))dy \\ &= \frac{\pi - x}{\pi} \int_0^x y(f(y) + u(y))dy - \frac{x}{\pi} \int_x^\pi (y - \pi)(f(y) + u(y))dy. \end{aligned}$$

**Příklad 13.4** Nalezněte vlastní hodnoty  $-\Delta$  na obdélníku  $(-\pi, \pi) \times (0, \pi)$  se smíšenou (Robinovou) hraniční podmínkou,

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u(-\pi, y) = u(x, 0) = u(\pi, y) = \partial_x u(x, \pi) = 0.$$

*Řešení:* Problém lze vyřešit tzv. *separací proměnných*, tj. vlastní funkce budeme hledat ve tvaru

$$u(x, y) = f(x)g(y)$$

pro zatím blíže neurčené funkce jedné proměnné  $f, g$ . Dosazením do rovnice na vlastní čísla dostaneme

$$-f''(x)g(y) - f(x)g''(y) = \lambda f(x)g(y),$$

což přepíšeme jako

$$-\frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda,$$

odkud podíly  $f''(x)/f(x)$  a  $g''(y)/g(y)$  musí být konstantní. Uvážíme-li ještě hraniční podmínku pro  $u$ , dostáváme dvojici jednorozměrných úloh na vlastní čísla

$$-f'' = \mu f, \quad f(\pm\pi) = 0$$

a

$$-g'' = \nu g, \quad g(0) = g'(\pi) = 0,$$

přičemž  $\mu + \nu = \lambda$ .

První z nich má obecné řešení  $f(x) = A \sin(\sqrt{\mu}x) + B \cos(\sqrt{\mu}x)$ . Hraniční podmínka dává  $0 = f(\pm\pi) = \pm A \sin(\sqrt{\mu}\pi) + B \cos(\sqrt{\mu}\pi)$ , odkud  $B \cos(\sqrt{\mu}\pi) = 0$ . Platí tedy  $B = 0$  nebo  $\cos(\sqrt{\mu}\pi) = 0$ . V prvním případě zvolíme  $A$  libovolné nenulové a dostáváme  $\sqrt{\mu}\pi =$

$k\pi$  pro nějaké  $k \in \mathbb{Z}$ , a tedy  $\mu = k^2$ . V druhém případě nutně platí  $\sqrt{\mu}\pi = (k + \frac{1}{2})\pi$  pro nějaké  $k \in \mathbb{Z}$ , tj.  $\mu = (k + \frac{1}{2})^2$ ; následně  $A = 0$  a  $B$  volíme libovolné nenulové. Rozmyslete si, že není nutné a priori předpokládat, že  $\mu$  je nezáporné (byť to plyne z toho, že v úloze vystupuje *nezáporný operátor*) nebo dokonce reálné. Oba typy vlastních čísel a funkcí můžeme zapsat jednotně jako

$$\mu_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2, \quad f_n(x) = \begin{cases} \cos(\frac{n}{2}x) & \text{pro } n \text{ liché} \\ \sin(\frac{n}{2}x) & \text{pro } n \text{ sudé,} \end{cases}$$

kde  $n \in \mathbb{N}$ .

Podobným postupem odvodíme

$$\nu_m = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2, \quad g_m(y) = \sin\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)y\right],$$

kde  $m \in \mathbb{N}$ . Pro původní problém jsme tak našli následující vlastní čísla a funkce

$$\lambda_{n,m} = \mu_n + \nu_m, \quad u_{n,m}(x, y) = f_n(x)g_m(y) \quad (\forall n, m \in \mathbb{N}).$$

Pozorný čtenář si položí otázku, zda nemohou existovat ještě nějaké další vlastní funkce. Odpověď zní *ne* a opírá se o následující poznatky funkcionální analýzy. V první řadě funkce  $\{f_n\}$ , respektive  $\{g_m\}$ , tvoří ortogonální bázi na  $L^2(-\pi, \pi)$ , respektive  $L^2(0, \pi)$ , z čehož plyne, že  $\{u_{n,m}\} \equiv f_n(x) \otimes g_m(y)$  tvoří ortogonální bázi  $L^2((-\pi, \pi) \times (0, \pi)) \equiv L^2((-\pi, \pi)) \otimes L^2((0, \pi))$ . Dále zkoumaný operátor je samosdružený, a tudíž jakoukoliv jeho další vlastní funkci by mělo být možné volit ortogonální k těm stávajícím. Jediná funkce kolmá ke všem  $u_{n,m}$  je ale nulová funkce.

**Bonus 13.1** Nalezněte vlastní hodnoty  $-\Delta$  na obdélníku  $(0, a) \times (0, b)$ , kde  $a, b > 0$ , s Neumannovou (tj. normálová derivace podél hranice vymizí) hraniční podmínkou.

## Dodatek

| Vlastnosti Fourierovy transformace                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{F}[f(cx)](\xi) = \frac{1}{ c ^n} \mathcal{F}[f(t)](\frac{\xi}{c})$                                        |
| $\mathcal{F}[(ix)^\alpha f(x)](\xi) = \mathcal{D}^\alpha \mathcal{F}[f(x)](\xi)$                                    |
| $\mathcal{F}[\mathcal{D}^\alpha(f(x))](\xi) = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f(x)](\xi)$                                |
| $\mathcal{F}[1](\xi) = (2\pi)^n \delta(\xi)$                                                                        |
| $\mathcal{F}\mathcal{F}[f(x)] = (2\pi)^n f(-x)$                                                                     |
| $e^{i\mu\xi} \mathcal{F}[f(x)](\xi) = \mathcal{F}[f(x - \mu)](\xi)$                                                 |
| $\mathcal{F}[e^{i\mu x} f(x)](\xi) = \mathcal{F}[f(x)](\xi + \mu)$                                                  |
| $\lim_{ \xi  \rightarrow \infty} \mathcal{F}[f(x)](\xi) = 0$                                                        |
| $\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = \mathcal{F}[f(x)] \cdot \mathcal{F}[g(x)]$                                              |
| $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathcal{F}[g(y)](x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(y)](x) g(x) \, dx$ |
| $\mathcal{F} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ i $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \mapsto \mathcal{S}'$ jsou spojité    |

| Fourieův vzor                                                                | Fourieův obraz                                       | Obor           |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|----------------|
| $e^{-a \mathbf{x} ^2}$                                                       | $(\frac{\pi}{a})^{n/2} e^{-\frac{ \xi ^2}{4a}}$      | $\mathbb{R}^n$ |
| $\theta(x) e^{-ax}, \quad \Re(a) > 0$                                        | $\frac{1}{a-i\xi} = \frac{i}{\xi+ia}$                | $\mathbb{R}$   |
| $\theta(x) e^{-a x }, \quad \Re(a) > 0$                                      | $\frac{2a}{a^2+\xi^2}$                               | $\mathbb{R}$   |
| $\delta(\mathbf{x} - \mu)$                                                   | $e^{i\xi \cdot \mu}$                                 | $\mathbb{R}^n$ |
| $\theta(x)$                                                                  | $\pi\delta(\xi) + i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$         | $\mathbb{R}$   |
| $\theta(-x)$                                                                 | $\pi\delta(\xi) - i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$         | $\mathbb{R}$   |
| $\text{sgn}(x)$                                                              | $2i \mathcal{P}\frac{1}{\xi}$                        | $\mathbb{R}$   |
| 1                                                                            | $(2\pi)^n \delta(\xi)$                               | $\mathbb{R}^n$ |
| $\mathcal{P}\frac{1}{x}$                                                     | $i\pi \text{sgn}(\xi)$                               | $\mathbb{R}$   |
| $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$                                                   | $-\pi  \xi $                                         | $\mathbb{R}$   |
| $e^{ix^2}$                                                                   | $\sqrt{\pi} e^{-\frac{i}{4}(\xi^2 - \pi)}$           | $\mathbb{R}$   |
| $\theta(\mathbf{R} -  \mathbf{x} )$                                          | $2 \frac{\sin(\mathbf{R}\xi)}{\xi}$                  | $\mathbb{R}$   |
| $\frac{\theta(\mathbf{R}- \mathbf{x} )}{\sqrt{\mathbf{R}^2- \mathbf{x} ^2}}$ | $2\pi \frac{\sin(\mathbf{R} \xi )}{ \xi }$           | $\mathbb{R}^2$ |
| $\delta_{S_{\mathbf{R}}}(\mathbf{x})$                                        | $4\pi\mathbf{R} \frac{\sin(\mathbf{R} \xi )}{ \xi }$ | $\mathbb{R}^3$ |
| $\mathbf{x}^\alpha$                                                          | $(-i)^{ \alpha } (2\pi)^n \delta^{(\alpha)}(\xi)$    | $\mathbb{R}^n$ |
| $e^{icx}$                                                                    | $2\pi\delta(\xi + c)$                                | $\mathbb{R}$   |
| $\cos(cx)$                                                                   | $\pi(\delta(\xi - c) + \delta(\xi + c))$             | $\mathbb{R}$   |
| $\sin(cx)$                                                                   | $i\pi(\delta(\xi - c) - \delta(\xi + c))$            | $\mathbb{R}$   |

| Vlastnosti Laplaceovy transformace                                                              |                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $\mathcal{L}[f(ct)](p) = \frac{1}{c} \mathcal{L}[f(t)](\frac{p}{c})$                            |                                             |
| $\mathcal{L}[(-t)^n f(t)](p) = \frac{d^n}{dp^n} \mathcal{L}[f(t)](p)$                           |                                             |
| $\mathcal{L}[\dot{f}(t)](p) = p \mathcal{L}[f(t)](p) - f(0_+)$                                  | , zarámovaný člen není v zob. $\mathcal{L}$ |
| $\mathcal{L}[\theta(t) \int_0^t f(\tau) d\tau](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f(t)](p)$           |                                             |
| $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}](p) = \int_p^\infty \mathcal{L}[f(t)](q) dq$                        |                                             |
| $e^{ap} \mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[f(t+a)](p)$                                          |                                             |
| $\mathcal{L}[e^{at} f(t)](p) = \mathcal{L}[f(t)](p-a)$                                          |                                             |
| $\int_0^\infty f(\tau) d\tau = \lim_{p \rightarrow 0^+} \mathcal{L}[f(t)](p)$                   |                                             |
| $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$                          |                                             |
| $\int_0^\infty f(t) \mathcal{L}[g(\tau)](t) dt = \int_0^\infty \mathcal{L}[f(\tau)](t) g(t) dt$ |                                             |

| Laplaceův vzor                             | Laplaceův obraz                         |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $\delta(t - \tau)$                         | $e^{-p\tau}$                            |
| $\theta(t)$                                | $\frac{1}{p}$                           |
| $\theta(t) t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$ | $\frac{n!}{p^{n+1}}$                    |
| $\theta(t) t^\alpha \quad (\alpha > -1)$   | $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ |
| $\theta(t) e^{\mu t}$                      | $\frac{1}{p-\mu}$                       |
| $\theta(t) \sin(\beta t)$                  | $\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$           |
| $\theta(t) \cos(\beta t)$                  | $\frac{p}{p^2 + \beta^2}$               |
| $\theta(t) (\sin(t) - t \cos(t))$          | $\frac{2}{(1+p^2)^2}$                   |
| $\theta(t) e^{\mu t} \cos(\omega t)$       | $\frac{p-\mu}{(p-\mu)^2 + \omega^2}$    |
| $\theta(t) e^{\mu t} \sin(\omega t)$       | $\frac{\omega}{(p-\mu)^2 + \omega^2}$   |
| $\theta(t) \sinh(\omega t)$                | $\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$         |
| $\theta(t) \cosh(\omega t)$                | $\frac{p}{p^2 - \omega^2}$              |