# Sbírka příkladů z rovnic matematické fyziky

**Mgr. Milan KRBÁLEK**

• *Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská,*
*Trojanova 13, Praha, Česká Republika*
• *Fyzikální ústav Akademie věd ČR*
*Cukrovarnická 10, Praha, Česká Republika*

e-mail: *milan.krbalek@uhk.cz*

## 1 Integrály podle parametru, hlavní hodnota integrálu

(1.1)
Určete

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx$$

pro $\alpha, \beta > 0$ a $\beta$ pevné.

(1.2)
Vypočtěte integrály

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

a

$$I(\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

(1.3)
Dokažte:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad (a > 0)$$

a

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2} \qquad (a > 0)$$

(1.4)
Vypočtěte:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx$$

(1.5)
Vypočtěte:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

(1.6)
Vypočtěte:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$$

(1.7)
Vypočtěte:

$$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{b^2+x^2}\,dx$$

(1.8)
Vypočtěte:

$$I(r)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(rx)}{x(1+x^2)}\,dx,$$

kde $r\geq 0$.

(1.9)
Vypočtěte:

$$\mathcal{VP}\int_{-a}^{a}\frac{1}{x}\,dx$$

(1.10)
Dokažte, že

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{c^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2|c|}\ln|c|$$

pro $c\neq 0$.

(1.11)
Vypočtěte:

$$\mathcal{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{x+b}\,dx$$

(1.12)
Vypočtěte:

$$\mathcal{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x+b}\,dx$$

(1.13)*
Vypočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^n e^{bx-ax^2}\,dx,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}^+$ a $n \in \mathbb{N}$.

(1.14)
Použitím věty o derivaci integrálu podle parametru vypočtěte integrál

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln(a^2+x^2)}{b^2+x^2}\,dx,$$

kde $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Využijte výsledku úlohy (1.10).

# 2 Parciální diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a rovnice řešitelné substitucí

(2.1)
Nalezněte obecné řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

v $(0,\infty)\times(0,\infty)$.

(2.2)
Nalezněte obecné řešení rovnice $u=u(x,y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

(2.3)
Nalezněte obecné řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=x^2-y$$

(2.4)
Nalezněte obecné řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-2y\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

(2.5)

Nalezněte obecné řešení rovnice $u = u(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y.$$

(2.6)

Do rovnice

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial z} + f = 0$$

dosaďte vztah $f(x, y, z) = g(x, y, z)\, e^{\mu z}$. Určete $\mu$ tak, aby výsledek byl co nejjednodušší.

(2.7)

Převeďte na kanonický tvar rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(2.8)

Nalezněte kanonický tvar rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(2.9)

Rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

převeďte na kanonický tvar a diskutujte její typ.

(2.10)

Převeďte na kanonický tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(2.11)

Rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 6\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

převeďte na kanonický tvar. Proveďte diskusi jejího typu. Zapište transformační vztahy, které danou rovnici převádí na kanonický tvar. Transformaci proveďte!

# 3 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu

(3.1)
Substituujte rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

vztahy $\xi = x + 2\sqrt{-y}$ a $\eta = x - 2\sqrt{-y}$ v oblasti $y < 0$.

(3.2)
Substituujte rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

vztahy $\xi = x + y$ a $\eta = x - y$.

(3.3)
Rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

převeďte na kanonický tvar v oblastech, v nichž zachovává typ.

(3.4)
Rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

převeďte na kanonický tvar v oblastech, v nichž zachovává typ.

(3.5)
Pro $x > 0$ a $y > 0$ převeďte rovnici

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

na kanonický tvar. Diskutujte pak její typ.

(3.6)
Rovnici

$$4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4y^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

převeďte v oblasti $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$ na kanonický tvar.

(3.7)
Rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

převeďte na množině $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$ na kanonický tvar. O jaký typ rovnice se na množině $A$ jedná?

(3.8)
Rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2 x - 2y\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

převeďte v $\mathbb{R}^2$ na kanonický tvar a diskutujte její typ.

(3.9)
Rovnici

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

převeďte na kanonický tvar. Proveďte diskusi jejího typu.

(3.10)
Na množině $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$ převeďte rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

na kanonický tvar. Uveďte, o jaký typ rovnice se na množině $A$ jedná.

(3.11)
Určete typ následující diferenciální rovnice a transformujte ji v $\mathbb{R}^2$ do kanonické tvaru.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3+\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

# 4 Distribuce

(4.1)
Dokažte, že derivace definovaná v $\mathcal{D}'$ je lineární.

(4.2)
Nechť je dána funkce $f(x)$ tak, že $f \in C^1(x \leq x_0)$ a $f \in C^1(x \geq x_0)$. Dokažte, že

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\,\delta(x - x_0),$$

kde $\{f'(x)\}$ je derivace funkce $f$ v bodech $x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ a $[f]_{x_0}$ je skok funkce $f(x)$ v bodě $x_0$, tedy $[f]_{x_0} := f(x_0)^+ - f(x_0)^-$.

(4.3)
Určete derivaci Heavsideovy funkce $\Theta(x)$.

(4.4)
Dokažte, že pro libovolnou funkci $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ platí

- $a(x)\,\delta(x) = a(0)\,\delta(x)$
- $0\,\delta(x) = 0$

(4.5)
Dokažte:

$$x\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$$

(4.6)
Nechť je dána funkce

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x - 2k\pi}{2\pi}$$

pro $x \in \langle 2k\pi, 2\pi(k+1))$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Určete její derivaci.

(4.7)
Dokažte, že pro libovolnou funkci $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, splňující podmínky $\forall x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) \geq 0$, a $\int_{R^n} \alpha(x)\,dx = 1$ platí

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\alpha(\frac{x}{\epsilon})}{\epsilon^n} = \delta(x)$$

v $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

(4.8)
Dokažte, že funkce definovaná předpisem

- $\omega_\epsilon(x) = C_\epsilon e^{-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - |x|^2}}$ pro $|x| < \epsilon$
- $\omega_\epsilon(x) = 0$ pro $|x| \geq \epsilon$,

kde konstanta $C_\epsilon$ je určena z podmínky

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\epsilon(x)\,dx = 1,$$

konverguje pro $\epsilon \to 0$ k funkci $\delta(x)$.

(4.9)*
Dokažte, že

$$\lim_{\epsilon\to 0_+} \frac{\sin(\frac{x}{\epsilon})}{\pi x} = \delta(x)$$

v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(4.10)
Dokažte Sochockého vzorce

$$\lim_{\epsilon\to 0_+} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$$

v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(4.11)
Vypočtěte

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Theta(x,y)$$

v $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

(4.12)
Vypočtěte

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|)$$

v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(4.13)
Dokažte, že v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ platí

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2},$$

kde

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi\right) \equiv \mathcal{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx.$$

(4.14)
Dokažte, že v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ platí:

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0_+} \frac{e^{itx}}{x+i\epsilon} = 0.$$

(4.15)
Dokažte, že v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ platí:

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0_+} \frac{e^{itx}}{x-i\epsilon} = 2\pi i\delta(x).$$

(4.16)
Vypočtěte

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{\epsilon\to 0_+} \frac{1}{x \pm i\epsilon}\right)$$

v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(4.17)
V $\mathbb{R}$ vypočtěte derivace zobecněné funkce

$$f(x) = |x| \sin x$$

do čtvrtého řádu včetně.

(4.18)
Definujme funkci $g_\epsilon(x)$ takto:

- $g_\epsilon(x) = \frac{x}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon}$ pro $x \in (-\epsilon, 0\rangle$
- $g_\epsilon(x) = -\frac{x}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon}$ pro $x \in (0, \epsilon)$
- $g_\epsilon(x) = 0$ pro ostatní $x \in \mathbb{R}$

Dokažte, že $g_\epsilon(x) \to \delta(x)$ při $\epsilon \to 0_+$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

# 5 Konvoluce, Fourierova transformace

(5.1)
Vypočtěte konvoluci

$$\Theta(x)\, e^{ax} * \Theta(x)\, e^{bx}.$$

(5.2)
Vypočtěte konvoluci

$$G_\sigma(x) * G_\tau(x),$$

kde $G$ je Gaussova distribuční funkce se střední hodnotou 0 a rozptylem $\sigma$, resp. $\tau$.

(5.3)
Určete konvoluci

$$\Theta(x) * \Theta(x)$$

v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(5.4)
Vypočtěte konvoluci

$$e^{-|x|} * e^{-|x|}$$

v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(5.5)
V $\mathbb{R}^n$ určete

$$\mathcal{F}[\delta(x - x_0)].$$

(5.6)
Určete

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}],$$

je-li $a > 0$.

(5.7)
Vypočtěte

$$\mathcal{F}[\Theta(x).e^{-\alpha x}],$$

je-li $\alpha > 0$ .

(5.8)
Vypočtěte

$$\mathcal{F}[\sin \alpha x],$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(5.9)
Vypočtěte konvoluci

$$\Theta(x)\sin(x) * \Theta(x)\sin(x).$$

Upravte na jednoduchý tvar.

(5.10)
Vypočtěte

$$\mathcal{F}[\cos \alpha x],$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(5.11)
V $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ nalezněte Fourierův obraz funkce

$$\frac{2a}{a^2 + x^2},$$

kde $a > 0$.

(5.12)
Pro

$$P_\alpha = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \qquad (\alpha > 0)$$

vypočtěte $P_\alpha * P_\beta$.

(5.13)
Vypočtěte konvoluci funkcí
$$\Theta(x)\sin(x) * \Theta(x)\cos(x).$$
Upravte na jednoduchý tvar.

(5.14)
Podle definice určete Fourierův obraz funkce 1 v prostoru $\mathbb{R}^n$.

(5.15)
Vypočtěte:
$$\Theta(x)\ \sin(x) * \Theta(x)\, x^2$$

(5.16)
Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}\,(a \neq \pm b)$ dokažte rovnost
$$\Theta(x)\sin(ax) * \Theta(x)\sin(bx) = \Theta(x)\,\frac{b\ \sin(ax) - a\ \sin(bx)}{b^2 - a^2}.$$
Zvažte možné postupy a volte jednodušší variantu důkazu.

# 6 Laplaceova transformace

(6.1)
Odvoďte tabulkové korespondence Laplaceovy transformace:

- $\mathcal{L}[\delta(t-\tau)] = e^{-\tau p}$
- $\mathcal{L}[\Theta(t)] = \frac{1}{p}$
- $\mathcal{L}[\Theta(t)\sin\beta t] = \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
- $\mathcal{L}[\Theta(t)\cos\beta t] = \frac{p}{p^2+\beta^2}$
- $\mathcal{L}[\Theta(t)e^{\mu t}\cos\omega t] = \frac{p-\mu}{(p-\mu)^2+\omega^2}$
- $\mathcal{L}[\Theta(t)e^{\mu t}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(p-\mu)^2+\omega^2}$
- $\mathcal{L}[\Theta(t)\sinh\omega t] = \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
- $\mathcal{L}[\Theta(t)\cosh\omega t] = \frac{p}{p^2-\omega^2}$

(6.2)
Dokažte, že pro funkce vhodné k transformaci platí
$$\mathcal{L}[f'(t)] = p.\mathcal{L}[f(t)] - f(0_+).$$

(6.3)
Vypočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$$
pro $a, b \in \mathbb{R}^+$.

(6.4)
Dokažte, že konverguje-li $\int_0^\infty f(\tau)\, d\tau$ a $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, platí
$$\int_0^\infty f(\tau)\, d\tau = \lim_{p \to 0} F(p).$$

(6.5)
Vypočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{\sin at \sin bt}{t}\, dt,$$
kde $a \neq b$.

(6.6)
Řešte diferenciální rovnici
$$y' + y = t^2 e^{-t}$$
za podmínky $y(0_+) = a$.
(6.7)
Řešte soustavu obyčejných diferenciálních rovnic
$$y_1' = 7y_1 - 18y_2 + 12e^{-t}$$
$$y_2' = 3y_1 - 8y_2 + 5e^{-t},$$
za podmínek $y_1(0_+) = 2, y_2(0_+) = 1$.

(6.8)
Vypočtěte:
$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} \cos bt \sin ct}{t}\, dt,$$
kde $a \in \mathbb{R}^+$ a dále $b, c \in \mathbb{R}\, (c \neq \pm b)$.

(6.9)
Užitím Laplaceovy transformace nalezněte funkci $u = u(t)$, vyhovující rovnici
$$u'' + u' + u = e^t(3\cos t + 2\sin t)$$
a podmínkám $u(0) = 0$ a $u'(0) = 1$.

(6.10)
Nalezněte řešení soustavy diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty pro dvě neznámé funkce $y_1(t), y_2(t)$

$$y_2' + y_1 = 1 + te^t$$

$$y_1' - y_2 = te^t - e^t,$$

které vyhovuje podmínkám $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$.

(6.11) Užitím Laplaceovy transformace vypočtěte

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bt}\sin at}{t}\,dt,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}^+$.

(6.12)
Užitím Laplaceovy transformace řešte soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$u' + 5u + 2v = e^{-t}$$

$$v' + 2u + 2v = 0$$

za podmínek $u(0) = 1, v(0) = 0$.

(6.13)
Řešte integrodiferenciální rovnici

$$y' + 2y + \int_0^t y(\tau)d\tau = \sin t$$

za podmínky $y(0_+) = 0$.

(6.14)
Vypočtěte

$$\int_0^\infty \frac{\cos bt - \cos at}{t}\,dt,$$

kde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(6.15)
Užitím Laplaceovy transformace řešte rovnici

$$y''' + y' = e^{2t}$$

za podmínek $y(0_+) = y'(0_+) = y''(0_+) = 0$.

(6.16)
Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin t - t\cos t}{t^3}\,dt.$$

(6.17)
Řešte integrodiferenciální rovnici

$$y'(t) + 2\,y(t) + 2\int_0^t y(\tau)d\tau = 1$$

s danou počáteční podmínkou $y(0_+) = 0$.

(6.18)
Nalezněte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$4ty'' + (4t+8)y' + (t+4)y = 0,$$

kde $y(0_+) = a$.

(6.19)
Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty e^{-3t}\cos 3t \cos 4t\,dt$$

(6.20)
Vypočtěte příklad (1.6) užitím Laplaceovy transformace.

# 7 Fundamentální řešení operátorů

(7.1)
Nalezněte fundamentální řešení operátoru

$$\mathcal{O} = \frac{d}{dt} + a,$$

kde $a > 0$.

(7.2)
Nalezněte fundamentální řešení operátoru

$$\mathcal{O} = 2\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} - 12$$

užitím Fourierovy transformace.

(7.3)
Nalezněte fundamentální řešení operátoru

$$\mathcal{O} = \frac{d^4}{dx^4} - a^4,$$

kde $a > 0$.

(7.4)
Nalezněte fundamentální řešení operátoru

$$\mathcal{O} = \frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} + 2$$

(7.5)
Nalezněte fundamentální řešení operátoru

$$\mathcal{O} = \frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} + \frac{5}{2}$$

(7.6)
Pomocí Fourierovy transformace odvoďte tvar fundamentálního řešení $E(x,t)$ operátoru vedení tepla v $\mathbb{R}$ :

$$\mathcal{O} = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

(7.7)
Nalezněte fundamentální řešení operátoru

$$\mathcal{O} = \frac{d^4}{dx^4} - 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$$

(7.8)
Nalezněte fundamentální řešení operátoru

$$\mathcal{O} = \frac{d^3}{dx^3} + \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + 1$$

(7.9)
Nalezněte fundamentální řešení operátoru

$$\mathcal{O} = \frac{d^3}{dx^3} - 6\frac{d^2}{dx^2} + 11\frac{d}{dx} - 6$$

# 8 Cauchyova úloha pro vlnovou rovnici, pro rovnici vedení tepla a pro rovnici s obyčejnými derivacemi

(8.1)
Řešte rovnici

$$\frac{d^2y}{dx^x} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$$

užitím fundamentálního řešení příslušného operátoru. Nalezněte takové řešení, pro které $y(0_+) = y'(0_+) = 0$.

(8.2)
Řešte rovnici

$$\frac{d^2y}{dx^x} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$$

s podmínkami $y(0_+) = 2$ a $y'(0_+) = 1$.

(8.3)
V $\mathbb{R}^{1+1}$ řešte rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x$$

s počátečními podmínkami $u(x, 0_+) = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0_+) = x + \cos x$.

(8.4)
Řešte zobecněnou Cauchyovu úlohu pro vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^{1+1}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-x^2}\delta'(t) + e^{-x}\sin x\,\delta(t).$$

(8.5)
Řešte smíšenou úlohu pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

při $x \geq 0$ s počáteční podmínkou $u(x, 0_+) = \cos bx, b > 0$ a s okrajovou podmínkou $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$.

(8.6)
Řešte Cauchyovu úlohu pro vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^{2+1}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6xyt,$$

kde $u(x, y, 0_+) = x^2 - y^2$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0_+) = xy$.

(8.7)
V $\mathbb{R}^{3+1}$ řešte Cauchyovu úlohu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 8\triangle u + t^2 x_1^2$$

za podmínek $u(x, 0_+) = x_2^2$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0_+) = x_3^2$.

(8.8)
Metodami matematické fyziky řešte rovnici

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 4e^{-x}.$$

Nalezněte takové řešení, pro nějž $u(0_+) = 0$ a $u'(0_+) = 0$.

(8.9)
Řešte Cauchyovu úlohu v $\mathbb{R}^{3+1}$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle u + 6te^{\sqrt{2}x_1} \sin x_2 \cos x_3$$

s počátečními podmínkami $u(x, 0_+) = e^{x_1+x_2} \cos \sqrt{2}\, x_3$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0_+) = e^{3x_2+4x_3} \sin 5x_1$.

(8.10)
Řešte Cauchyovu úlohu pro vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^{3+1}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 8\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + 2xyz$$

za podmínek $u(x, y, z, 0_+) = x^2 + y^2 - 2z^2$ a $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0_+) = 1$.

(8.11)
Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla v $\mathbb{R}^{1+1}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t + e^t$$

za podmínky $u(x, 0_+) = 2$.

(8.12)
Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla v $\mathbb{R}^{1+1}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \cos x$$

za podmínky $u(x, 0_+) = \cos x$.

(8.13)
Řešte Cauchyovu úlohu pro vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^{2+1}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 8\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2xyt$$

za podmínek $u(x, y, 0_+) = x^2 - y^2$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0_+) = 4xy$.

(8.14)
Nalezněte funkci $u \in \mathcal{D}'$, splňující rovnost

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - 4\frac{du}{dx} + 4u = xe^{2x} + \delta' x - 2\delta(x).$$

(8.15)
Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t + t$$

za podmínky $u(x, 0_+) = 10$.

(8.16)
Nalezněte funkci $u(x, t)$ takovou, aby vyhovovala rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x$$

a počátečním podmínkám $u(x, 0_+) = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0_+) = \cos x + x$.

(8.17)
Nalezněte řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle u + (x^3 - 3xy^2)t^2$$

takové, aby vyhovovalo podmínkám $u(x, y, 0_+) = e^x \cos y$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0_+) = e^y \sin x$.

(8.18)
Řešte rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$$

v $\mathbb{R}^{1+1}$ s podmínkami $u(x, 0_+) = 4e^{-x^2}$ a $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0_+) = e^{-x} \cos x$.

(8.19)
Nalezněte řešení $\psi(x, t)$ v $\mathbb{R}^{1+1}$ Schrödingerovy rovnice

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t},$$

má-li příslušná vlnová funkce částice v čase $t = 0$ lokalizovaný tvar $\psi(x, 0_+) = Ce^{-Ax^2+Bx}$, kde $\Re e(A) > 0$ a $B, C \in \mathbb{C}$. Využijte faktu, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{bx-cx^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}\, e^{\frac{b^2}{4c}}$$

Řešení upravte do tvaru

$$\psi(x,t) = C\,\theta(t)\, e^{\frac{B^2}{4A}}\, \chi(t)^{\frac{-1}{2}}\, e^{-A\frac{(x-\frac{B}{2A})^2}{\chi(t)}},$$

kde $\chi(t) = 1 + \frac{2iA\hbar}{m}t$.

(8.20)
Nalezněte funkci $u$, jež řeší rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos\left(x^2 + 2\right) + x\, \sin t$$

a vyhovuje podmínkám $u(x, 0_+) = x^2$ a $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0_+) = x$.

# 9 Integrální rovnice

(9.1)
Nalezněte řešení rovnice

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin\left(x + y\right)\varphi(y)dy + f(x).$$

Dále určete rezolventu a vlastní funkce integrálního operátoru této rovnice.

(9.2)
Řešte předchozí úlohu metodou postupných aproximací.

(9.3)
Zjistěte, zda lze příklad (9.1) řešit při hodnotách $\lambda = \frac{1}{\pi}$ a $f(x) = x + 2\cos x$.

(9.4)
Určete konstanty $a, b, c$ tak, aby rovnice

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (xy + x^2y^2)\varphi(y)dy + ax^2 + bx + c$$

měla řešení pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$.

(9.5)
Řešte Volterovu rovnici prvního druhu s jádrem $\mathcal{K}(x,y) = xy$ a s pravou stranou $f(x) = \frac{x^4}{3}$.

(9.6)
Řešte integrální rovnici

$$\int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy = \Theta(x)\cos x$$

pro $x > 0$.

(9.7)
Řešte integrální rovnici

$$\int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy = \cos x,$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

(9.8)
Nalezněte funkci $\varphi(x)$ tak, aby vyhovovala rovnici

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)dy + f(x),$$

kde $\mathcal{K}(x,y) = \sin y + y\cos x$ a $f(x) = 1 - 2\frac{x}{\pi}$. Úlohu řešte pro všechna přípustná $\lambda \in \mathbb{R}$.

(9.9)
Pro všechna přípustná $\lambda \in \mathbb{R}$ nalezněte funkci $\varphi(x)$ tak, aby vyhovovala integrální rovnici

$$\varphi(x) = \int_G \lambda\cos(y-2x)\varphi(y)dy + \sin x + \cos x.$$

$G = \langle 0, \pi/2\rangle$.

(9.10)
Nalezněte řešení integrální rovnice

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2xy + 1 - y)\varphi(y)dy + e^x$$

pro $\lambda = 1$.

(9.11)
Pro všechna přípustná $\lambda \in \mathbb{R}$ řešte integrální rovnici

$$\varphi(x) = \lambda \int_G e^{x+y}\varphi(y)dy + x,$$

kde $G = \langle 0, 1\rangle$. Konkretizujte řešení pro $\lambda = -1$ a pro tento zvláštní případ proveďte zkoušku.

(9.12)
Řešte příklad (9.10) metodou postupných aproximací.

# References


[1] Vladimirov V.S., Uravnenija matematičeskoj fyziky, Nauka, Moskva 1976

[2] Vladimirov V.S., Sbornik zadač po uravnenijam matematičeskoj fyziky, Nauka, Moskva 1974

[3] Jirásek F., Funkce komplexní proměnné a Laplaceova transformace, ČVUT 1983

[4] Doktor P., Příklady z matematické analýzy VI, Parciální diferenciální rovnice, SPN Praha 1983

[5] Moravčík J., Matematika-vybrané části III (Špeciálne funkcie, rovnice matematické fyziky), Alfa Bratislava 1984

[6] Virius M., Cvičení z metod matematické fyziky I a II, ČVUT 1988


# 10 Výsledky příkladů

### 1. Integrály podle parametru, hlavní hodnota integrálu

(1.1) $I(\alpha) = \ln\frac{\beta}{\alpha}$
(1.2) $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\beta - \mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$ a $I(\beta) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\beta$
(1.4.) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
(1.5) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$
(1.6) Řešte s pomocí Laplaceovy transformace a věty o derivaci integrálu podle parametru. Výsledek: $\frac{\pi}{2}\,e^{-|a|}$
(1.7) $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}a\;e^{-|ab|}$
(1.8) $\frac{\pi}{2}\,\ln(r+1)$
(1.9) $0$
(1.10) Nejprve ukažte, že $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$. Odsud $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0$. Dále řešíme vhodnou substitucí.
(1.11) $\pi\,\mathrm{sgn}a\;\cos(ab)$
(1.12) $\pi\,\mathrm{sgn}a\;\sin(|a|b)$
(1.13) Nalezněte rekurentní vzorec.
(1.14) $\frac{\pi}{|b|}\ln(|a|+|b|)$

**2. Parciální diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a rovnice řešitelné substitucí**

(2.1) $u(x,y) = \sqrt{y}f(x) + g(y)$
(2.2) $u(x,y) = f(x)e^y + g(x)$
(2.3) $u(x,y) = \frac{1}{3}x^3y - \frac{1}{2}xy^2 + f(y)$
(2.4) $u(x,y) = f(x)e^{y^2} + g(y)$
(2.5) $u(x,y) = \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}y^3 + yf(x) + g(x)$
(2.6) pro $\mu = -\frac{1}{2}$ dostaneme $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \frac{3}{4}g = 0$
(2.7) Substituce $\xi = x, \eta = x - y, \lambda = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ dává hyperbolickou rovnici
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} = 0$
(2.8) Substituce $\xi = x, \eta = -x + y, \lambda = 2x - 2y + z$ dává eliptickou rovnici
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$
(2.9) Substituce $\xi = -\frac{1}{2}y, \eta = z, \lambda = x + \frac{1}{2}y + z$ dává eliptickou rovnici
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$
(2.10) Substituce $\xi = x, \eta = -x + y$ dává parabolickou rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial u}{\partial \xi} + 4\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$
(2.11) Substituce $\xi = x, \eta = -2x + y, \lambda = x + y$ dává parabolickou rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -6\frac{\partial u}{\partial \xi} + 10\frac{\partial u}{\partial \eta} - 6\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$

**3. Parciální diferenciální rovnice druhého řádu**

(3.1) $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ (hyperbolická rovnice)
(3.2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}$
(3.3) Substituce $\xi = xy, \eta = \frac{x}{y}$ dává hyperbolickou rovnici
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$
(3.4) Substituce $\xi = \left|\frac{y}{x}\right|, \eta = x$ dává parabolickou rovnici
$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$
(3.5) Substituce $\xi = \sqrt{x}, \eta = \sqrt{y}$ dává eliptickou rovnici
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$
(3.6) Substituce $\xi = y^2 + e^x, \eta = y^2 - e^x$ dává hyperbolickou rovnici
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{-1}{4(\xi + \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$
(3.7) Substituce $\xi = \frac{2}{3}x^{3/2}, \eta = 2y^{1/2}$ dává eliptickou rovnici
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$
(3.8) Substituce $\xi = y\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}, \eta = y$ dává parabolickou rovnici
$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$
(3.9) Substituce $\xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ dává eliptickou rovnici
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$
(3.10) Substituce $\xi = xy, \eta = x$ dává parabolickou rovnici

$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\frac{\xi}{\xi^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$
(3.11) Substituce $\xi = y + 2x + \sin x, \eta = y - 2x + \sin x$ dává hyperbolickou rovnici
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\xi+\eta}{32}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$

## 4. Distribuce

Důkazové úlohy z této kapitoly jsou podrobně vyřešeny v Ref. ([6]).

(4.3) $\Theta'(x) = \delta(x)$
(4.6) $f'(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(x - 2k\pi)$
(4.8) Využijte výsledku úlohy (4.7)
(4.11) $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = \delta(x, y)$
(4.12) $(\ln|x|)' = \mathcal{P}\frac{1}{x}$
(4.16) $\left(\frac{1}{x \pm i0}\right)' = \mp i\pi\delta'(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x^2}$
(4.17) $f'(x) = \operatorname{sgn} x(\sin x + x\cos x)$ $\quad f''(x) = \operatorname{sgn} x(2\cos x - x\sin x)$
$f'''(x) = 4\delta(x) - \operatorname{sgn} x(3\sin x + x\cos x)$ $\quad f^{(IV)}(x) = 4\delta'(x) + \operatorname{sgn} x(x\sin x - 4\cos x)$
(4.18) Využijte výsledku úlohy (4.7)

## 5. Konvoluce, Fourierova transformace

(5.1) $\Theta(x)\frac{e^{ax} - e^{bx}}{a - b}$, pro $a \neq b$ a $\Theta(x)xe^{ax}$ pro $a = b$
(5.2) $G_{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$
(5.3) $\Theta(x)x$
(5.4) $(1 + |x|)e^{-|x|}$
(5.5) $e^{ix_0\xi}$
(5.6) $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$
(5.7) $\frac{1}{a - i\xi}$
(5.8) $i\pi[\delta(\xi - \alpha) - \delta(\xi + \alpha)]$
(5.9) $\frac{\Theta(x)}{2}(\sin x - x\cos x)$
(5.10) $\pi[\delta(\xi - \alpha) + \delta(\xi + \alpha)]$
(5.11) $2\pi e^{-a\xi}$
(5.12) $P_\alpha * P_\beta = P_{\alpha\beta}$
(5.13) $\frac{\Theta(x)}{2}x\sin x$
(5.14) $\Theta(x)(x^2 + 2\cos x - 2)$

## 6. Laplaceova transformace

(6.3) $\ln\frac{b}{a}$
(6.5) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+a}{b-a}\right|$
(6.6) $y = \Theta(t)(\frac{1}{3}t^3e^{-t} + ae^{-t})$
(6.7) $y_1 = \Theta(t)(3e^t + 3e^{-t} - 4e^{-2t})$ a $y_2 = \Theta(t)(e^t + 2e^{-t} - 2e^{-2t})$
(6.8) $\frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{b+c}{a} + \frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{c-b}{a}$

(6.9) $u(t) = \Theta(t)e^t \sin t$
(6.10) $y_1 = \Theta(t)(1 + te^t - e^t)$ a $y_2 = \Theta(t)e^t$
(6.11) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$
(6.12) $u = \Theta(t)(\frac{9}{25}e^{-t} + \frac{1}{5}te^{-t} + \frac{16}{25}e^{-6t})$ a $v = \Theta(t)(-\frac{8}{25}e^{-t} - \frac{2}{5}te^{-t} + \frac{8}{25}e^{-6t})$
(6.13) $\frac{1}{2}\Theta(t)(\sin t - te^{-t})$
(6.14) $\ln\left|\frac{b}{a}\right|$
(6.15) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t$
(6.16) $-\frac{\pi}{4}$
(6.16) $\Theta(t)e^{-t}\sin t$
(6.18) $y = \Theta(t)\, a\, e^{-\frac{t}{2}}$
(6.19) $\frac{51}{290}$

## 7. Fundamentální řešení operátorů

(7.1) $E(t) = \Theta(t)e^{-at}$
(7.2) $E(x) = \frac{\Theta(x)}{10}(e^{2x} - e^{-3x})$
(7.3) $E(t) = \frac{\Theta(x)}{2a^3}(\sinh ax - \sin ax)$
(7.4) $E(x) = \Theta(x)(e^{-x} - e^{-2x})$
(7.5) $E(x) = 2\Theta(x)e^{-\frac{3}{2}x}\sin\frac{x}{2}$
(7.6) $E(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$
(7.7) $E(x) = \frac{\Theta(t)}{2}(x\cosh x - \sinh x)$
(7.8) $E(x) = \frac{\Theta(x)}{2}(e^{-x} + \sin x - \cos x)$
(7.9) $E(x) = \Theta(x)(\frac{1}{2}e^{x} - e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x})$

## 8. Cauchyova úloha pro vlnovou rovnici, pro rovnici vedení tepla a pro rovnici s obyčejnými derivacemi

(8.1) $y(x) = \Theta(x)(-\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{6}e^{x})$
(8.2) $y(x) = \Theta(x)(\frac{9}{2}e^{-x} - \frac{8}{3}e^{-2x} + \frac{1}{6}e^{x})$
(8.3) $u(x,t) = e^x(\cosh t - 1) + xt + \sin(x+t)$
(8.4) $u(x,t) = \frac{1}{8}\Theta(t)e^{-x}\left(e^{2t}[\sin(x-2t) + \cos(x-2t)] - e^{-2t}[\sin(x+2t) + \cos(x+2t)]\right)+$
$+\Theta(t)e^{-x^2-4t^2}\cosh 4tx$
(8.5) $u(x,t) = \Theta(t)\cos bx\, e^{-tb^2}$
(8.6) $u(x,y,t) = x^2 - y^2 + xyt(1+t^2)$
(8.7) $u(x_1,x_2,x_3,t) = x_2^2 + tx_3^2 + 8t^2 + \frac{8}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4x_1^2 + \frac{2}{45}t^6$
(8.8) $u(x) = 2\Theta(x)(\sinh x - xe^{-x})$
(8.9) $u(x_1,x_2,x_3,,t) = t^3e^{\sqrt{2}x_1}\sin x_2\cos x_3 + te^{3x_2+4x_3}\sin 5x_1 + e^{x_1+x_2}\cos\sqrt{5}x_3$
(8.10) $u(x,y,z,t) = x^2 + y^2 - 2z^2 + t + xyzt^2$
(8.11) $u(x,t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 + e^t$
(8.12) $u(x,t) = (\Theta(x) + t)e^{-t}\cos x$
(8.13) $u(x,y,t) = x^2 - y^2 + 4xyt + \frac{1}{3}xyt^3$

(8.14) $u(x) = \Theta(x)(\frac{1}{6}x^3 e^{2x} + e^{2x})$
(8.15) $u(x,t) = 9 + e^t + \frac{1}{2}t^2$
(8.16) $u(x,t) = e^x(\cosh t - 1) + xt + \sin(x+t)$
(8.17) $u(x,y,t) = e^x \cos y + e^y t \sin x + \frac{1}{12}t^4(x^3 - 3xy^2)$
(8.18) $u(x,t) = 4e^{-x^2-4t^2}\cosh 4xt + \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{8}e^{-x}\left(e^{2t}[\cos(x-2t) - \sin(x-2t)]-\right.$
$\left.-e^{-2t}[\cos(x+2t) - \sin(x+2t)]\right)$
(8.20) $u(x,t) = x^2 \cos t$

## 9. Integrální rovnice

(9.1) $\varphi(x) = \lambda A_1 \sin x + \lambda A_2 \cos x$, kde
$A_1 = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)\cos\, dx + \lambda\pi \int_0^{2\pi} f(x)\sin\, dx}{1-\lambda^2\pi^2}$ a $A_2 = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)\sin\, dx + \lambda\pi \int_0^{2\pi} f(x)\cos\, dx}{1-\lambda^2\pi^2}$.
Rezolventa $\mathcal{R} = \frac{\sin(x+y)+\lambda\pi\cos(x-y)}{1-\lambda^2\pi^2}$ pro $\lambda\pi \neq \pm 1$
(9.3) $\varphi(x) = \left(2 + \frac{a}{\pi}\right)(\sin x + \cos x) + x$
(9.4) $b = 0$, $3a + 5c = 0$.
(9.5) Rezolventa $\mathcal{R}(x,y|-1) = \frac{y^2}{x^3}$ a řešení $\varphi(x) = x$.
(9.6) $\varphi(x) = \delta'(x)$. Singulární distribuci však nelze považovat za řešení.
(9.7) nemá řešení
(9.8) $\varphi(x) = \frac{-\lambda\pi^2}{6(1+2\lambda)}\cos x + 1 - 2\frac{x}{\pi}$ pro $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}$ $\qquad \varphi(x) = (8 + \pi^2 \cos x)C + \frac{4}{3} - 2\frac{x}{\pi}$ pro $\lambda = \frac{1}{2}$
Pro $\lambda = -\frac{1}{2}$ rovnice řešení nemá.
(9.9) $\left(\frac{3\lambda(2+\pi)}{12-4\lambda} + \frac{3\lambda^2(\pi+2)(3-2\lambda)}{(3-\lambda)(8\lambda^2-18\lambda+18)}\right)\cos 2x + \frac{3\lambda(\pi+2)(3-2\lambda)}{16\lambda^2-36\lambda+36}\sin 2x + \sin x + \cos x$ pro $\lambda \neq 3$
$\varphi(x) = \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{8}\pi\right)\cos 2x + \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{8}\pi\right)\sin 2x + \sin x + \cos x$ pro $\lambda = 3$
(9.10) $\varphi(x) = \frac{6\lambda}{e(3-4\lambda)}(2x-1) + \frac{12\lambda^2}{e(4\lambda-3)(1-2\lambda)} + \frac{e-e^{-1}}{1-2\lambda} + e^x$ pro $\lambda \neq \frac{3}{4}$ a $\lambda \neq \frac{1}{2}$. Pro vynechaná $\lambda$ rešení neexistuje. Pro $\lambda = 1$ má řešení tvar $\varphi(x) = \frac{-5-12x-e^2}{e} + e^x$
(9.11) $\varphi(x) = \frac{2\lambda}{2+\lambda(1-e^2)}e^x + x$ pro $\lambda \neq \frac{2}{e^2-1}$. Pro $\lambda = \frac{2}{e^2-1}$ rovnice řešení nemá.