RMF - zadání zkouškových písemek

5.1. 2021

1. Definujte $\mathscr{D}$ a $\mathscr{S}$.
2. Napište a dokažte vztahy mezi $\mathscr{D}$ a $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}$ a L^1.
3. $\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$; $u(0,x) = x^2$
4. Definice S-L operátoru a 3 jeho vlastnosti, jednu dokázat.
5. Definice ON báze a alespoň 2 ekvivalentní vyjádření.
6. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xt$; $u(0,x) = x^2$, $\partial_t u(0,x) = x$

7.1. 2021

1. Nalezněte Greenovu funkci pro S-L operátor
$$\mathcal{L}[u] = -((x^2+1)u')' = \lambda u.$$
2. Definujte Laplaceovu transformaci. Následně uveďte 3 vlastnosti Laplaceovy transformace a jednu dokažte.
3. Definujte zobecněný nosič.
4. Definujte konvoluci klasickou a konvoluci zobecněných funkcí s kompaktním nosičem.
5. Vypočtěte $(\cos|x|e^{|x|})'''$ v $\mathscr{S}'$.
6. Nalezněte řešení rovnice
$$u_t = 3u_{tx} + \theta(t)x, \quad u(0,x) = x.$$

8.1. 2020

1. Napište definici derivace v $\mathscr{D}'$ a úprava výrazu $x^2\delta^{(3)}(x)$.
2. Definujte $\mathscr{D}$ a $\mathscr{S}$, napište a dokažte vztahy mezi $\mathscr{D}$ a $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}$ a L^1.
3. $\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$; $u(0,x) = x^2$
4. Definice S-L operátoru a 3 jeho vlastnosti, jednu dokázat.
5. Definice ON báze a alespoň 2 ekvivalentní vyjádření.
6. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xt$; $u(0,x) = x^2$, $\partial_t u(0,x) = x$

15.1. 2020

1. Definujte konvergenci v prostoru zobecněných funkcí $\mathscr{D}'$ a vypočtěte
$$\lim_{x\to\infty} n^2 \sin(nx).$$
2. Vyřeště integrální rovnici
$$\varphi(x) = \mu \int_0^x \frac{y^2\varphi(y)}{x}\,dy + 8e^{\frac{\mu}{2}x^2}.$$

3. Rozhodněte, zda platí $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, definujte zobecněný nosič a spočtěte supp $\delta(x)$.
4. Uveďte tři vlastnosti zobecněné Fourierovy transformace a dvě z nich dokažte.
5. Zformulujte větu o derivování po částech $C^1(\mathbb{R})$ funkce a užijte na výpočet $(x^5)''$. Dostaneme stejný výsledek užitím Leibnitzova pravidla pro derivaci součinu ($x^5 = x^2x^3$ například)?
6. (POSLEDNÍ ÚLOHA) Vyřešte

$$\frac{\partial}{\partial t}u = 4\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - \frac{\partial}{\partial x}u - 2u + te^x, \quad u(x,0) = xe^x$$

pomocí kompletního postupu.
(Nápověda: rovnici tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}u - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - b\frac{\partial}{\partial x}u - cu = f(x,t)$$

lze převést na rovnici vedení tepla pomocí substituce $v(y,t) = e^{-ct}u(y - bt, t)$.)

22.1. 2020

1. Nalezněte Greenovu funkci pro S-L operátor

$$\mathcal{L}[u] = -(4 - x^2)u'' + 2xu', \quad u(0) = u(1) = 0.$$

2. Definujte klasickou Laplaceovu transformaci, uveďte 3 její vlastnosti a jednu z nich dokažte.
3. Jak zahrnuje klasické L^1_{loc} funkce do zobecněných funkcí $\mathscr{D}'$? Demonstrujte následně na příkladě $x^5 \in \mathscr{D}'$.
4. Definujte konvoluce zobecněných funkcí s kompaktním nosičem.
5. Vypočtěte derivaci $(e^{|x|}\cos|x|)'''$ v $\mathscr{S}'$.
6. (POSLEDNÍ ÚLOHA) Vyřešte

$$\frac{\partial}{\partial t}u = 3\Delta u + e^t, \quad u(0,x,y,z) = \sin(x - y - z)$$

pomocí kompletního postupu.

29.1. 2020

1. Sestavte explicitní příklad posloupnosti konvergující k δ' v $\mathscr{D}'$ (nápověda: začněte posloupností konvergující k δ v $\mathscr{D}'$; souvisí tato posloupnost nějak s úlohou?).
2. Věta o spojitosti omezeného lineárního zobrazení vč důkazu.
3. Vyřešte integrální rovnici

$$\varphi(x,y) = \lambda\int_0^1\int_0^3 (x\xi)^2 y\eta\varphi(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi + xe^y.$$

4. Nalezněte Greenovu funkci pro S-L operátor

$$\mathcal{L}[u] = -(4 - x^2)u'' + 2xu', \quad u(0) = u(1) = 0.$$

5. Uveďte definici konvoluce testovacích funkcí spolu s pěti vlastnostmi. Dvě z nich dokažte.
6. (POSLEDNÍ ÚLOHA) Nalezněte fundamentální řešení Laplaceova operátoru ve 3D pomocí kompletního postupu.

5.2. 2020

1. Vypočtěte Laplaceův obraz Diracovy delta funkce, tj $\mathscr{L}[\delta]$.
2. Definujte obě regularizace funkce $1/x$ v $\mathscr{D}'$ a rozhodněte výpočtem, jestli pro obě platí, že po vynásobení fcí x dostaneme konstantní funkci 1.
3. Definujte a seřaďte $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ a $L^1(\mathbb{R})$. Své tvrzení dokažte.
4. Vyřešte úlohu
$$u_t + au_x = u^2, \quad u(x,0) = \cos(x).$$
5. Ukažte (důkazem), že klasická i zobecněná Fourierova transformace "převádí derivování na násobení".
6. (POSLEDNÍ ÚLOHA) Vyřešte
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + e^x, \quad u(0,x) = \sin(x), \;\; \partial_t u(0,x) = x + \cos(x)$$
pomocí kompletního postupu.

21.1. 2019

1. Napište definici násobení a derivace v $\mathscr{D}'$ a upravte výraz $x^2\delta'(x)$ v $\mathscr{D}'$.
2. Vypočtěte Fourierovu transformaci funkce e^{-x^2}.
3. V $\mathscr{D}'$ vypočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(nx-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$
4. Vypočtěte integrální rovnici
$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x^2 y^3 \varphi(y)\, dy + x.$$
5. Napište definici $\mathscr{S}$ a $\mathscr{D}$ a také definice $\mathscr{S}'$ a $\mathscr{D}'$ a napište vztahy mezi nimi a dokažte vztah mezi $\mathscr{S}$ a $\mathscr{D}$.
6. Vyřešte
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + e^x, \quad u(0,x) = \sin(x), \;\; \partial_t u(0,x) = x + \cos(x)$$
pomocí kompletního postupu.

28.1. 2019

1. Nalezněte Greenovu funkci pro S-L operátor
$$\mathcal{L}[u] = -(1+x^2)u'' - 2xu', \quad u(0) = u'(1) = 0.$$
2. Vyřešte úlohu
$$u_t + au_x = u^2, \quad u(x,0) = \cos(x).$$
3. Rozhodněte, zda platí $\delta \in \mathscr{S}'$ a své tvrzení následně dokažte.
4. Vypočtěte Laplaceovu transformaci $\mathscr{L}[\delta(x)](p)$.

5. Převeďte následující parciální diferenciální rovnici pro $u(x,y)$ na normální tvar
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0.$$
6. (POSLEDNÍ ÚLOHA) Vyřešte
$$\frac{\partial}{\partial t}u = 3\Delta u + e^t, \quad u(0,x,y,z) = \sin(x-y-z)$$
pomocí kompletního postupu.

4.2. 2019

1. Definujte konvergenci v prostoru zobecněných funkcí $\mathscr{D}'$ a vypočtěte
$$\lim_{x\to\infty} n^2\sin(nx).$$
2. Vyřeště integrální rovnici
$$\varphi(x) = \mu\int_0^x \frac{y^2\varphi(y)}{x}\,dy + 8e^{\frac{\mu}{2}x^2}.$$
3. Rozhodněte, zda platí $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, definujte zobecněný nosič a spočtěte supp $\delta(x)$.
4. Uveďte tři vlastnosti zobecněné Fourierovy transformace a dvě z nich dokažte.
5. Zformulujte větu o derivování po částech $C^1(\mathbb{R})$ funkce a užijte na výpočet $(x^5)''$. Dostaneme stejný výsledek užitím Leibnitzova pravidla pro derivaci součinu ($x^5 = x^2x^3$ například)?
6. (POSLEDNÍ ÚLOHA) Vyřešte
$$\frac{\partial}{\partial t}u = 4\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - \frac{\partial}{\partial x}u - 2u + te^x, \quad u(x,0) = xe^x$$
pomocí kompletního postupu.
(Nápověda: rovnici tvaru
$$\frac{\partial}{\partial t}u - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - b\frac{\partial}{\partial x}u - cu = f(x,t)$$
lze převést na rovnici vedení tepla pomocí substituce $v(y,t) = e^{-ct}u(y-bt,t)$.)

15.1. 2018

1. Definujte derivaci v $\mathscr{D}'$ + "motivace".
2. Definujte konvoluci dvou testovacích funkcí. Uveďte alespoň tři její vlastnosti a dvě z nich dokažte.
3. Popište metodu postupných aproximací pro Fredholmovu integrální rovnici. Co musí platit, aby byla zajištěna existence jednoznačného řešení?
4. Řešte Volterrovu integrální rovnici metodou postupných aproximací. Pokud nespočítáte součet výsledné řady, ověřte alespoň matematickou indukcí, že je odvozená řada správně.
$$\varphi(x) = \lambda\int_0^x \sqrt{xy}\,\varphi(y)\,dy + \sqrt{x}$$

5. Definujte Fourierovu transformaci v $\mathscr{S}$ a v $\mathscr{S}'$. Dokažte jeden ze dvou vztahů mezi Fourierovou transformací, derivací a násobením polynomem v $\mathscr{S}$ i v $\mathscr{S}'$.

6. Kompletním postupem vyřešte

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t)$$

s počátečními podmínkami $u_0(x) = u(x,0) = x$ a $\partial_t u_0(x) = x^2$ (v testu konkrétní funkce $f(x,t)$).

23.1. 2018

1. Definujte prostor testovacích funkcí $\mathscr{D}(G)$ a Schwartzův prostor $\mathscr{S}$. Jaký je vztah mezi $\mathscr{D}$ a $\mathscr{S}'$? Ukažte proč.

2. Definujte pojem tenzorového součinu v $\mathscr{D}'$, napište motivaci, která k definici vede a napište alespoň čtyři jeho vlastnosti.

3. Aplikací Laplaceovy transformace nalezněte funkci $y(t)$, která je řešením integrodiferenciální rovnice

$$y'' - 5y' + 17y - 13\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 28$$

a splňuje podmínky $y(0) = 3$ a $y'(0) = 4$.

4. Definujte normu operátoru a pojem omezenosti operátoru. Napište tvrzení (větu) o spojitosti omezeného operátoru a dokažte jej (ji).

5. Definujte klasickou a zobecněnou Laplaceovu transformaci. Pro které funkce je Laplaceova transformace dobře definovaná? Napište alespoň tři vlastnosti klasické Laplaceovy transformace, která jsou jiná (jiné znění/neplatí/nemáme uvedené) než vlastnosti Fourierovy transformace; a jednu z nich dokažte.

6. (Poslední úloha) Převeďte na normální tvar a vyřešte rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4x\frac{\partial u}{\partial x} - 6y\frac{\partial u}{\partial y} + 6u = 0.$$

31.1. 2018

1. Definujte $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, L^1_{loc}, $\mathscr{D}'$ a vztahy mezi nimi.

2. Definujte ON bázi a napiště ekvivalentní výroky.

3. Vypočítejte

$$\mathscr{L}[\cos(ax) \star \sin(bx)].$$

4. Definujte rychle klesající a pomalu rostoucí funkci. Diskutujte, jestli i součiny jednotlivých funkcí jsou také rychle rostoucí, resp. pomalu klesající.

5. Definujte konvoluci zobecněných funkcí a uveďte její vlastnosti, z nichž dvě dokažte.

6. Řešte dvě nezávislé Volterrovy rovnice

$$a) \quad \varphi(x) = a\int_0^x \frac{x^3}{y^2} f(y)\,dy + x^3$$

$$b) \quad \varphi(x) = a\int_0^x \frac{x^3}{y^2} f(y)\,dy + x^5$$

Hint: Stejná jádra operátoru napovídají, že řešení vede přes iterovaná jádra

22.12. 2016

1. Definujte prostor testovacích funkcí $\mathscr{D}(G)$ a ukažte jeho vztah k $L^1(G)$.
2. Rozhodněte o správnosti $\delta \in \mathscr{S}'$ a své tvrzení doložte.
3. Definujte operaci derivace v $\mathscr{D}'$ a užijte ji ke zjednodušení $x^2\delta^(3)$ v $\mathscr{S}$.
4. Odvoďte vztah $\mathscr{F}[D^\alpha f(x)](\xi) = ...$ v $\mathscr{S}'$.
5. Definujte spektrum lineárního operátoru na Banachově prostoru.
6. Vyřešte
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = 4\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + xt, \quad u(0,x) = x^2, \ \partial_t u(0,x) = x$$
pomocí kompletního postupu.
7. Mějme klasickou úlohu
$$Lu = u'' + 3u' - 2u = f, \quad u(0) = 1, \ u'(0) = 10.$$
Ukažte (ideálně bez explicitního nalezení funkce Z(x)), že řešení této klasické úlohy u je získatelné z řešení zobecněné úlohy $\tilde{u}$
$$\tilde{u}(x) = \theta(x)u(x) = \theta(x)[\int_0^x Z(x-y)f(y)\,dy + 13Z(x) + Z'(x)],$$
kde Z splňuje $LZ = 0$, $Z(0) = 0$, $Z'(0) = 1$.