Zápisky z předmětu "Rovnice Matematické Fyziky"

František Havlůj

7. ledna 2004

Obsah

Kapitola 1

Třída $\mathscr{L}_2$

1.1 Třída $\mathscr{L}_2$

Definice 1 *Třída $\mathscr{L}_2$ na oblasti $\mathcal{G}$ je množina funkcí definovaná takto:*

$$\mathscr{L}_2(\mathcal{G}) = \left\{ f \middle| \int_{\mathcal{G}} |f|^2 < +\infty \right\}$$

Tvrzení. Třída $\mathscr{L}_2$ je lineárním vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$.

Důkaz: Stačí dokázat uzavřenost $\mathscr{L}_2$ vůči násobení a sčítání. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}; f, g \in \mathscr{L}_2$. Pak platí:

$$|\alpha f + \beta g|^2 \leq \alpha^2 |f|^2 + \beta^2 |g|^2$$

$$\int_{\mathcal{G}} |\alpha f + \beta g|^2 \leq \alpha^2 \int_{\mathcal{G}} |f|^2 + \beta^2 \int_{\mathcal{G}} |g|^2$$

Oba integrály na pravé straně nerovnosti jsou však konečné, tedy i integrál vlevo a proto lineární kombinace funkcí z $\mathscr{L}_2$ opět patří do $\mathscr{L}_2$.
Q.E.D.

Věta 1 (Cauchyho-Buňakovského nerovnost) *Nechť $f, g \in \mathscr{L}_2$. Pak platí:*

$$\left| \int fg \right| \leq \left(\int |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Důkaz: Nechť $f, g \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G}), \lambda \in \mathbb{R}$. Pak platí:

$$0 \leq \big(|f| + \lambda |g| \big)^2$$

$$0 \leq \int_{\mathcal{G}} \big(|f| + \lambda |g| \big)^2 = \int_{\mathcal{G}} \big(|f|^2 + 2\lambda |fg| + \lambda^2 |g|^2 \big)$$

To je kvadratická rovnice v λ. Diskriminant

$$D_\lambda = 4\Big(\int_{\mathcal{G}} |fg|\Big)^2 - 4\int_{\mathcal{G}} |f|^2 \int_{\mathcal{G}} |g|^2 \le 0$$

$$\Big|\int_{\mathcal{G}} fg\Big| \le \int_{\mathcal{G}} |fg| \le \Big(\int_{\mathcal{G}} |f|^2 \int_{\mathcal{G}} |g|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Q.E.D.

Definice 2 *Na prostoru* $\mathscr{L}_2$ *definujeme skalární součin* $\big(f,g\big) = \int_{\mathcal{G}} f\overline{g}$ *a normu* $\|f\| = \Big(\int_{\mathcal{G}} |f|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Ověříme trojúhelníkovou nerovnost, totiž že $\| f + g \| \le \| f \| + \| g \|$.

$$\| f + g \|^2 = \big(f+g, f+g\big) = \big(f,f\big) + \big(f,g\big) + \big(g,f\big) + \big(g,g\big) \le$$

$$\le \| f \|^2 + \| g \|^2 + \big|\,\big(f,g\big)\,\big| \le \Big(\| f \| + \| g \|\Big)^2$$

Q.E.D.

Poznámka. Z Cauchyho-Buňakovského nerovnosti platí $\big|\big(f,g\big)\big| \le \| f \| \| g \|$.

Tvrzení. Je-li $\big(f_n\big), f_n \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ cauchyovská, pak $\exists f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ tak, že $\| f_n - f \| \to 0$ pro $n \to \infty$. Tedy $\mathscr{L}_2$ je Hilbertův prostor.

Důkaz: $\emptyset$

Definice 3 $M \subset \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ *je hustá v* $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$*, jestliže* $\forall f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G}) \quad \exists \big(f_n\big), f_n \in M, f_n \to f$.

Definice 4 *Nosič* $\operatorname{supp}(f)$ *funkce f je množina* $\operatorname{supp}(f) = \Big\{x \big| f(x) \neq 0\Big\}$.

Lemma 1 *Nechť* $\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \Big\{f \in C^\infty(\mathcal{G}) \big| \operatorname{supp}(f) \text{ je kompakt}\Big\}$. *Potom* $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ *je hustá v* $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$.

Důkaz: Sami.

Poznámka. Heavisideova funkce $\Theta(x)$ je definována takto:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

1.2 Ortonormální soubory

Definice 5 *$f, g \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ jsou ortogonální, právě když $\big(f,g\big) = 0$. $\{f_i\}$ je ortonormální, právě když $\big(f_i, f_j\big) = \delta_{ij}$*

Příklad. $\varphi_k(x) = e^{ikx}$ je ortonormální na $\mathscr{L}_2(-\pi, +\pi)$. Ukažte.

Důkaz:

$$\varphi_j.\overline{\varphi_k} = (cos\, jx + i\, sin\, jx)(cos\, kx - i\, sin\, kx) =$$

$$= \underbrace{cos\, jx\; cos\, kx + sin\, jx\; sin\, kx}_{\equiv 1\ pro\ i=j,\ jinak\ lichá\ fce} + i\ \underbrace{(sin\, jx\; cos\, kx - sin\, kx\; cos\, jx)}_{lichá\ funkce}$$

Důsledek. $\{f_k\}$ je ortonormální $\Rightarrow$ $\{f_k\}$ je lineárně nezávislý.

Důsledek. Je-li $\{\psi_i\}_1^n$ je lineárně nezávislý, lze jej převést na ortnonormální $\{\varphi_i\}_1^n$.

Důkaz:

$$\varphi_1 = \psi_1, \quad \varphi_k = \psi_k - \big(\psi_k, \varphi_{k-1}\big)\varphi k - 1 - \ldots - \big(\psi_k, \varphi_1\big)\varphi 1$$

Protože jsou $\{\psi_k\}$ lineárně nezávislé, lze soubor $\{\varphi_i\}_1^n$ normovat. **Q.E.D.**

Definice 6 *Mějme ortonormální soubor $\{\varphi_i\}_1^\infty$, $\varphi_k \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ a funkci $f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$. Potom definujeme:*
Fourierovy koeficienty$\big(f, \varphi_k\big)$
Fourierova řada $\sum_{k=1}^\infty \big(f, \varphi_k\big)\varphi_k$

Lemma 2 *Nechť $\{\varphi_i\}_1^\infty$, $\varphi_k \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$. Potom $\forall f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$, $\forall N \in \mathbb{N}$ a $\forall\, a_1 \ldots a_N \in \mathbb{C}$ platí*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \right\|^2 =$$

$$= \left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} \big(f, \varphi_k\big)\varphi_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \, \big(f, \varphi_k\big) - a_k \, \right|^2$$

Důkaz: Sami.

Pokud položíme $\forall k\ a_k = 0$,dostaneme

$$0 \leq \left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} \big(f, \varphi_k\big)\varphi_k \right\| = \parallel f \parallel^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \left| \, \big(f, \varphi_k\big) \, \right|^2$$

$$\parallel f \parallel^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \, \big(f, \varphi_k\big) \, \right|^2$$

(Besselova nerovnost)

Důsledek.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k \to f \Leftrightarrow \| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\, (f, \varphi_k) \,|^2$$
(Parsevalova rovnost)

Definice 7 *Soubor $\{\varphi_k\}$ je úplný, právě když Parsevalova rovnost platí $\forall f$.*

Věta 2 *Nechť $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $\psi_j(y)$ úplný ortonormální systém v $\mathscr{L}_2(D)$, $\varphi_{kj}(x)$ úplný ortonormální systém v $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$.*
Potom $\psi_{kj}(x, y) = \varphi_{kj}(x)\psi_j(y)$ je ortonormální na $\mathscr{L}_2(D \times \mathcal{G})$ a je úplný.

Důkaz: Sami.

1.3 Lineární prostory

Mějme prostory funkcí $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$.

Definice 8 *Zobrazení $L : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ nazveme lineární, jestliže pro $\forall\ f, g \in \mathscr{M}$ a $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ platí*
$$L(\lambda f + \mu g) = \lambda L f + \mu L g$$
$\mathscr{M} = \mathscr{M}_L$ je definiční obor zobrazení.

Definice 9 *L je spojitý operátor, jestliže pro každou posloupnost f_k funkcí z $\mathscr{M}$ platí*
$$f_k \to f \Rightarrow L f_k \to L f$$

Pokud jsou prostory $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ normované, je konvergence definovaná
$$f_k \to f \Leftrightarrow \| f_k - f \| \to 0$$
a můžeme definovat:

Definice 10 *L je omezené zobrazení, právě když $\exists c > 0$ tak, že $\forall\ f$ platí*
$$\| L f \|_{\mathscr{N}} \leq c \| f \|_{\mathscr{M}}$$

Věta 3 *L je omezené $\Rightarrow$ L je spojité.*

Důkaz:
$$\| L f_k - L f \|_{\mathscr{N}} = \| L(f_k - f) \|_{\mathscr{N}} \leq c \| f_k - f \|_{\mathscr{M}} \to 0$$
Q.E.D.

Definice 11 *Identickým operátorem nazveme $I : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$, $If = f$.*

Nechť $L : \mathscr{M} \to \mathscr{N}_1$, $K : \mathscr{N}_1 \to \mathscr{N}$. Potom $KLf = K(Lf)$, $KL : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$. Z toho například plyne

$$
\begin{aligned}
&K^0 = I \\
&K^1 = K \\
&K^2 = KK \\
&\dots \\
&K^p = K(K^p - 1)
\end{aligned}
$$

Zvláštním případem lineárních zobrazení jsou lineární funkcionály $l : \mathscr{M} \to \mathbb{C}$. Hodnotu funkcionálu aplikovaného na funkci f potom značíme $\big(l, f\big)$.

Příklad.

$$Kf = \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathcal{G}$$

je integrální operátor K s jádrem $\mathscr{K}(x, y)$. Pokud $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G} \times \mathcal{G})$, je K omezený (a tedy spojitý) a zobrazuje $\mathscr{L}_2(\mathcal{G}) \to \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$.

1.4 Lineární rovnice

Nechť L je lineární operátor s definičním oborem $\mathscr{M}_L$.

$$Lu = f \tag{1.1}$$

je (nehomogenní) lineární rovnice. Pokud $f = 0$, je

$$Lu = f \tag{1.2}$$

homogenní lineární rovnice. Řešení této rovnice tvoří lineární prostor.

Tvrzení. Každé řešení u rovnice (1.1) lze napsat jako součet jednoho (partikulárního) řešení $\widetilde{u}$ rovnice (1.1) a některého řešení u_0 rovnice (1.2),

$$u = \widetilde{u} + u_0$$

Tvrzení. Rovnice (1.1) má jednoznačné řešení právě tehdy, když rovnice (1.2) má pouze nulové řešení.

Definice 12 *Pokud $\lambda \neq 0$ a rovnice*

$$Lu = \lambda u$$

má nenulové řešení, pak λ nazýváme vlastní hodnotou operátoru L a u nazýváme vlastním vektorem operátoru L. Označme jednotlivé vlastní vektory $u_1, \dots, u_m$. Pokud $m = 1$, je λ prostá vlastní hodnota, jinak m je násobnost vlastní hodnoty.

1.5 Hermitovské operátory

Definice 13 *Operátor L je hermitovský, jestliže* $\big(Lf,g\big)=\big(f,Lg\big)$ *pro* $\forall\ f,g\in\mathscr{M}_L$. *Výrazy* $\big(Lf,f\big)$, *resp.* $\big(Lf,g\big)$ *nazýváme kvadratickou, resp. bilineární formou generovanou operátorem L.*

Věta 4 *L je hermitovský operátor právě tehdy, když* $\big(Lf,f\big)$ *nabývá jen reálných hodnot.*

Důkaz:
$\Rightarrow$:

$$\big(Lf,f\big)=\big(f,Lf\big)=\overline{\big(Lf,f\big)}$$

$\Leftarrow$:
Pokud $\big(Lf,f\big)$ nabývá jen reálných hodnot, platí

$$\Re[\big(Lg,f\big)-\big(Lf,g\big)]=\Re\frac{1}{i}[\big(L(f+ig),f+ig\big)-\big(Lf,f\big)-\big(Lg,g\big)]=0$$

$$\Im[\big(Lg,f\big)+\big(Lf,g\big)]=\Im[\big(L(f+g),f+g\big)-\big(Lf,f\big)-\big(Lg,g\big)]=0$$

a tedy

$$\big(Lf,g\big)=\Re\big(Lf,g\big)+i\Im\big(Lf,g\big)=\Re\big(Lg,f\big)-i\Im\big(Lg,f\big)=\overline{\big(Lg,f\big)}=\big(f,Lg\big)$$

Q.E.D.

Definice 14 *Operátor L je pozitivní právě tehdy, když* $\big(Lf,f\big)$ *je nezáporné pro* $\forall\ f\in\mathscr{M}_L$.

Věta 5 *Je-li L hermitovský (resp. pozitivní) operátor, jsou jeho vlastní hodnoty reálná (resp. nezáporná) čísla a vlastní vektory odpovídající různým vlastním hodnotám jsou ortogonální.*

Důkaz: Nechť λ_0 je vlastní hodnota a u_0 odpovídající vlastní vektor operátoru L, tedy $Lu_0=\lambda_0u_0$. Pak platí:

$$\big(Lu_0,u_0\big)=\big(\lambda_0u_0,u_0\big)=\lambda_0\big(u_0,u_0\big)=\lambda_0\|\,u_0\,\|^2$$

Ale hermitovský (resp. pozitivní) operátor připouští pouze reálné (resp. nezáporné) hodnoty $\big(Lu_0,u_0\big)$ a $\|\,u_0\,\|^2$ je kladné reálné číslo, tedy i λ_0 je reálné (resp. nezáporné).

Nechť $Lu_1=\lambda_1u_1$, $Lu_2=\lambda_2u_2$. Potom z hermitovskosti L (pozitivní operátor je hermitovský) dostáváme:

$$\lambda_1\big(u_1,u_2\big)=\big(\lambda_1u_1,u_2\big)=\big(Lu_1,u_2\big)=\big(u_1,Lu_2\big)=$$
$$=\big(u_1,\lambda_2u_2\big)=\lambda_2\big(u_1,u_2\big)$$

Tedy

$$\lambda_1\big(u_1,u_2\big)=\lambda_2\big(u_1,u_2\big)$$

Ovšem $\lambda_1\neq\lambda_2$ a proto $\big(u_1,u_2\big)=0$.
Q.E.D.

Kapitola 2

Zobecněné funkce

Nechť $\psi \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R})$ a mějme zobrazení $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}_2(\mathbb{R})$.

Operátor x: $\psi(x) \to x.\psi(x)$

Hledáme vlastní čísla a vlastní funkce operátoru, tedy x_0 a ψ tak, aby $\forall x\ :$ $x\,\psi(x) = x_0\,\psi(x)$. To je ovšem možné jen pro $\psi(x) \sim 0$.

Dirac tento problém vyřešil zavedením zobecněné δ-funkce, $\psi(x) = \delta(x - x_0)$.

2.1 Testovací funkce

Definice 15 (Testovací funkce) *Prostor $\mathscr{D} = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \middle| \operatorname{supp}\ \varphi \text{ je kompakt}\right\}$ nazveme prostorem testovacích funkcí.*
Konvergence na $\mathscr{D}$ je definována takto:

$$\varphi_k \to \varphi \Leftrightarrow \begin{array}{ll} 1. & \exists R > 0\ \forall k\ \ \operatorname{supp}\ \varphi_k \subset B(0, R) \\ 2. & \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)\ \mathrm{D}^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows \mathrm{D}^\alpha \varphi(x) \end{array}$$

Poznámka.

$$\mathrm{D}^\alpha \varphi(x_1, x_2) = \mathrm{D}^{\alpha_1, \alpha_2} \varphi(x_1, x_2) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \varphi$$

Tvrzení. Operátor D^β je spojitý.

Důkaz: Sami.

Tvrzení. Operátor $\varphi(x) \to \varphi(\alpha x + \beta)$ je spojitý.

Důkaz: Sami.

Tvrzení. Operátor $\varphi(x) \to a(x)\varphi(x)$ je spojitý, $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz: Sami.

Tvrzení. $\omega_\varepsilon(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon exp\Big(- \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2} \Big) & |\,x\,| \leq \varepsilon \\ 0 & |\,x\,| > \varepsilon \end{cases}$$

C_ε je konstanta zvolená tak, aby $\int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon = 1$

Důkaz: Sami.

Lemma 3 *$\forall \mathcal{G}$ oblast a $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ taková, že:*
$0 \leq \eta(x) \leq 1$
$\eta(x) = 1$ *pro* $x \in \varepsilon -$ *okolí* $\mathcal{G}$
$\eta(x) = 0$ *pro* $x \notin 3\varepsilon -$ *okolí* $\mathcal{G}$

Důkaz: $\emptyset$

2.2 Zobecněné funkce

Definice 16 (Zobecněné funkce) *Prostor $\mathscr{D}'$ nazveme prostorem zobecněných funkcí.*
$f \in \mathscr{D}' \Leftrightarrow$ *1. f je funkcionál na* $\mathscr{D}$
2. f je lineární, tedy $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ $\big(f, \lambda\varphi + \mu\psi\big) = \lambda\big(f, \varphi\big) + \mu\big(f, \psi\big)$
3. f je spojitý, tedy $\varphi_k \to \varphi \;\Rightarrow\; \big(f, \varphi_k\big) \to \big(f, \varphi\big)$

Konvergence na $\mathscr{D}'$ je definována takto:
$f_k, f \in \mathscr{D}',\; \varphi \in \mathscr{D}:\; f_k \to f \Leftrightarrow \big(f_k, \varphi\big) \to \big(f, \varphi\big)$

Tvrzení. $\mathscr{D}'$ je lineární vektorový prostor. Operace sčítání a násobení číslem se definuje takto:

$$\big(\lambda f + \mu g, \varphi\big) := \lambda\big(f, \varphi\big) + \mu\big(g, \varphi\big)$$

Důkaz: Sami.

Tvrzení. $\mathscr{D}'$ je úplný prostor.

Důkaz: $\emptyset$

Definice 17 *Nechť $f, g \in \mathscr{D}'$. Pak $f = 0$ na $\mathcal{G} \Leftrightarrow \big(f, \varphi\big) = 0$ $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{G})$.*

Definice 18 *Nechť $f, g \in \mathscr{D}'$. Pak $f = g$ na $\mathcal{G} \Leftrightarrow f - g = 0$ na $\mathcal{G}$.*

Definice 19 *Nechť $f, g \in \mathscr{D}'$. Pak $f \in C^{(p)}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow \exists f_0(x) \in C^{(p)}(\mathcal{G}) : \big(f, \varphi\big) = \int_{\mathcal{G}} f_0 \varphi$.*

2.2.1 Regulární zobecněné funkce

Nechť $f(x)$ je lokálně integrovatelná (obyčejná) funkce na $\mathbb{R}^n$. Potom definujeme

$$\big(f,\varphi\big) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\psi \in \mathscr{D}$$

Tvrzení. $f \in \mathscr{D}'$

Důkaz: Sami.

Věta 6 *Nechť f(x) je lokálně integrovatelná (obyčejná) funkce na $\mathcal{G}$. Potom $f = 0$ na $\mathcal{G} \Leftrightarrow f(x) \sim 0$ na $\mathcal{G}$.*

Důkaz: $\emptyset$

2.2.2 Singulární zobecněné funkce

Definice 20 (Diracova δ-funkce) $\delta \in \mathscr{D}'$, $\quad \big(\delta,\varphi\big) = \varphi(0) \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}$

Tvrzení. Diracova δ-funkce je singulární.

Důkaz: Důkaz provedeme sporem.
Nechť existuje lokálně integrabilní $f(x)$ a pro $\forall\varphi \in \mathscr{D}$ platí

$$\int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

Protože potom i $x_1\varphi(x) \in \mathscr{D}$ (x_1 je první složka x), musí platit

$$\int f(x)x_1\varphi(x)\,\mathrm{d}x = x_1\varphi(x)|_{x=0} = 0 = \big(x_1 f,\varphi\big)$$

pro $\forall\varphi \in \mathscr{D}$. Tedy podle definice $x_1 f = 0$ jako zobecněná funkce. Potom podle předchozí věty $x_1 f(x) \sim 0$ a tedy $f(x) \sim 0$.
To je ovšem spor s nenulovostí integrálu $\int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.
Q.E.D.

Tvrzení. $\omega_\varepsilon \to \delta$ pro $\varepsilon \to 0+$.

Důkaz: Sami.

Definice 21 *Zavedeme funkcionál $\mathcal{P}\frac{1}{x}$*

$$\big(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\big) := PV\int \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Poznámka. PV$\int$ označuje konečnou část neboli hlavní hodnotu (Principal Value) integrálu. Někdy se též značí $\mathcal{VP}\int$.

Tvrzení. $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'$

Důkaz: Dokážeme spojitost $\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Předpokládejme $\varphi_k \to 0$, tedy například že $\varphi_k(x) = 0$ pro $\left|\, x \,\right| > R$ a $\mathrm{D}^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows 0$. Potom

$$\left|\, (\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k) \,\right| = \left|\, PV \int \frac{\varphi_k(x)}{x} \,\mathrm{d}x \,\right| = \left|\, PV \int_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0) + x\varphi_k'(x')}{x} \,\mathrm{d}x \,\right| \leq$$

$$\leq \int_{-R}^{R} \left|\, \varphi_k'(x') \,\right| \mathrm{d}x \leq 2R \max_{|x|<R} \left|\, \varphi_k'(x) \,\right| \to 0$$

Q.E.D.

Definice 22 *Protože platí*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} \,\mathrm{d}x = \mp i\pi\varphi(0) + PV \int \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}$$

můžeme zavést zobecněné funkce

$$\frac{1}{x + i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x - i0} = +i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$$

Poznámka. Zejména pro účely cvičení je vhodné výše uvedenou rovnost dokázat: Protože $\varphi(x) = 0$ pro $|x| > R$, platí

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} \,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-R}^{+R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) \,\mathrm{d}x =$$

$$= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-R}^{+R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-R}^{+R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] \,\mathrm{d}x =$$

$$= -2i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0+} \operatorname{arctg} \frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^{+R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \,\mathrm{d}x = -i\pi\varphi(0) + PV \int \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}x$$

Q.E.D.

2.3 Operace se zobecněnými funkcemi

2.3.1 Záměna proměnných

$f(x)$ lokálně integrabilní na $\mathbb{R}^n$, $x = \mathbb{A}y + b$, $b \in \mathbb{R}^n$,$\mathbb{A}$ regulární matice na $\mathbb{R}^n$.

$$\big(f(\mathbb{A}y + b), \varphi\big) = \int f(\mathbb{A}y + b)\varphi(y) dy = \frac{1}{|\det \mathbb{A}|} \int f(x)\varphi(\mathbb{A}^{-1}(x - b)) \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{|\det \mathbb{A}|}\big(f, \varphi(\mathbb{A}^{-1}(x-b))\big)$$

Můžeme tedy definovat:

Definice 23 *Nechť* $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{A}$ *regulární matice na* $\mathbb{R}^n$*.Pak platí:*

$$\big(f(\mathbb{A}y+b), \varphi\big) = \big(f, \frac{\varphi(\mathbb{A}^{-1}(x-b)))}{|\det \mathbb{A}|}\big) \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

Rotace. $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^{-1}$, $b = 0$, $\det \mathbb{A} = 1$.

$$\big(f, \varphi\big) = \big(f(Ay), \varphi\big) = \big(f, \varphi(A^* x)\big)$$

Dilatace. $\mathbb{A} = diag\,(c, c, ...)$, $b = 0$, $|\det \mathbb{A}| = |c|^n$.

$$\big(f(cy), \varphi\big) = \frac{1}{|c|^n}\big(f, \varphi(x/c)\big)$$

Translace. $\mathbb{A} = I$, $b \neq 0$.

$$\big(f(y+b), \varphi\big) = \big(f, \varphi(x-b)\big)$$

2.3.2 Násobení obyčejnou funkcí

Definice 24 *Nechť* $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. *Potom definujeme zobrazení* $f(x) \to a(x)f(x)$ *takto:*

$$\big(a(x)f(x), \varphi(x)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} (a(x)f(x))\varphi(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(a(x)\varphi(x)) := \big(f(x), a(x)\varphi(x)\big)$$

Příklad. $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$

$$\big(a(x)\delta(x), \varphi(x)\big) = \big(\delta(x), a(x)\varphi(x)\big) = a(0)\varphi(0) = \big(a(0)\delta(x), \varphi(x)\big) \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}$$

Příklad. $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$

$$\big(x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\big) = \big(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x)\big) = PV\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \big(1, \varphi(x)\big) \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}$$

Tvrzení. Nelze definovat komutativní a asociativní součin zobecněných funkcí.

Důkaz: Sporem.

$$0 = 0\mathcal{P}\frac{1}{x} = (x\delta(x))\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta(x)x)\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta(x)(x\mathcal{P}\frac{1}{x}) = \delta(x)$$

2.3.3 Derivace

$$\big(\mathrm{D}^\alpha f(x), \varphi(x)\big) = \int (\mathrm{D}^\alpha f(x))\varphi(x)dx = \big|per\,partes\big| = (-1)^\alpha \int f(x)\,\mathrm{D}^\alpha\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \quad \big(\mathrm{D}^\alpha f, \varphi\big) := (-1)^{|\alpha|}\big(f, \mathrm{D}^\alpha\varphi\big)$$

Tvrzení. Nechť $f \in \mathscr{D}'$. Potom derivace $\mathrm{D}^\alpha f \in \mathscr{D}'$.

Důkaz:

1. Funkcionál to je.
2. Je lineární? $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$, $f \in \mathscr{D}'$
$$\big(\mathrm{D}^\alpha f, \lambda\varphi + \mu\psi\big) = \lambda(-1)^{|\alpha|}\big(f, \mathrm{D}^\alpha\varphi\big) + \mu(-1)^{|\alpha|}\big(f, \mathrm{D}^\alpha\psi\big) =$$
$$= \lambda\big(\mathrm{D}^\alpha f, \varphi\big) + \mu\big(\mathrm{D}^\alpha f, \psi\big)$$
3. Je spojitý?
$$\varphi_k \to \varphi \overset{?}{\Rightarrow} \big(\mathrm{D}^\alpha f, \varphi_k\big) \to \big(\mathrm{D}^\alpha f, \varphi\big)$$
$$\big(\mathrm{D}^\alpha f, \varphi_k\big) = (-1)^{|\alpha|}\big(f, \mathrm{D}^\alpha\varphi_k\big) = (-1)^{|\alpha|}\big(f, \mathrm{D}^\alpha\varphi_k\big) \to (-1)^{|\alpha|}\big(f, \mathrm{D}^\alpha\varphi\big) = \big(\mathrm{D}^\alpha f, \varphi\big)$$

Q.E.D.

Vlastnosti $\mathrm{D}^\alpha f$:

- má nekonečně mnoho derivací (protože $Df \in \mathscr{D}'$, tedy $D(Df) \in \mathscr{D}'$ atd.)
- derivace jsou záměnné, obecně $\mathrm{D}^\alpha(\mathrm{D}^\beta f) = \mathrm{D}^\beta(\mathrm{D}^\alpha f)$
- Platí Leibnizovo pravidlo: Nechť $f \in \mathscr{D}'$, $a \in C^\infty$, pak $(af)' = f'a + fa'$.
Důkaz:
$$\big(\frac{\partial(af)}{\partial x_1}, \varphi\big) = -\big(af, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\big) = -\big(f, a\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\big) =$$
$$= -\big(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1} - \frac{\partial a}{\partial x_1}\varphi\big) = -\big(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1}\big) + \big(f, \frac{\partial a}{\partial x_1}\varphi\big) =$$
$$= \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, a\varphi\big) + \big(\frac{\partial a}{\partial x_1}f, \varphi\big) = \big(a\frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi\big) + \big(\frac{\partial a}{\partial x_1}f, \varphi\big) =$$
$$= \big(a\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_1}f, \varphi\big)$$

Příklad. Nechť $f \in C^1$ pro $x \le x_0$ a $f \in C^1$ pro $x \ge x_0$. Potom lze funkci f přiřadit zobecněnou funkci f a její derivace je potom:

$$\big(f', \varphi\big) = -\big(f, \varphi'\big) = -\int f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = |perpartes| =$$
$$= [f(x_0+0) - f(x_0-0)]\varphi(x_0) + \int \{f'(x)\}\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \big([f]_{x_0}\delta(x-x_0) + \{f'(x)\}, \varphi\big)$$

kde $\{f'(x)\}$ je derivace obyčejné funkce f a $[f]_{x_0}$ je velikost skoku v bodě x_0.

Kapitola 3

Direktní součin a konvoluce

3.1 Direktní součin zobecněných funkcí

Nechť f, g jsou lokálně integrabilní v $\mathbb{R}^n$,resp. v $\mathbb{R}^m$.Potom je $f(x)g(y)$ lokálně integrabilní v $\mathbb{R}^{n+m}$ a definuje regulární zobecněnou funkci:

$$\big(f(x)g(y),\varphi\big) = \int f(x)g(y)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int f(x)\int g(y)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$
$$= \Big(f(x),\big(g(y),\varphi(x,y)\big)\Big)$$

Definice 25 *Nechť* $f(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$*,* $g(y) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$*. Potom direktní součin* $f(x)\cdot g(y)$ *definujeme*

$$\big(f(x)\cdot g(y),\varphi\big) = \Big(f(x),\big(g(y),\varphi(x,y)\big)\Big),\quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

Lemma 4 $\forall g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ *a* $\forall\ \varphi \in \mathbb{R}(\mathbb{R}^{n+m})$ *je* $\psi(x) = \big(g(y),\varphi(x,y)\big) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *a*

$$\mathrm{D}^\alpha\psi(x) = \big(g(y),\,\mathrm{D}^\alpha_x\varphi(x,y)\big)\qquad\forall\ \alpha$$

Dále jestliže $\varphi_k \to 0$ *v* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$*, potom* $\psi_k(x) = \big(g(y),\varphi_k(x,y)\big) \to 0$ *v* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$*.*

Důkaz: $\emptyset$

Komutativita direktního součinu

$$f(x)\cdot g(y) = g(y)\cdot f(x)$$

Důkaz: Nejprve si komutatitivitu dokážeme pro funkce tvaru

$$\varphi(x,y) = \sum_l u_l(x)v_l(y),\quad u_l\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n),\ v_l\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m) \tag{3.1}$$

Platí
$$\big(f(x)\cdot g(y),\varphi\big) = \big(f,\sum_l u_l(g,v_l)\big) = \sum_l \big(f,u_l\big)\big(g,v_l\big) =$$
$$= \big(g,\sum_l v_l(f,u_l)\big) = \big(g(y)\cdot f(x),\varphi\big)$$

Q.E.D.

Platnost komutativity direktního součinu rozšíříme na všechny testovací funkce následujícím lemma:

Lemma 5 $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ *existuje posloupnost funkcí* φ_k *typu (3.1), která konverguje k* φ*.*

Důkaz: $\emptyset$

Spojitost direktního součinu

Nechť $\varphi_k \to 0$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Potom podle lemmatu 4 je $\psi = \big(g(y),\varphi(x,y)\big)$ a tedy
$$\big(f_k(x)\cdot g(y),\varphi\big) = \big(f_k(x),\big(g(y),\varphi\big)\big) = \big(f_k(x),\psi\big) \to 0$$

Q.E.D.

Asociativita direktního součinu

Nechť $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, $h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^k)$, $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m+k})$. Potom
$$\big(f(x)\cdot[g(y)\cdot h(z)],\varphi\big) = \big(f(x),\big(g(y)\cdot h(z),\varphi\big)\big) = \big(f(x),\big(g(y),\big(h(z),\varphi\big)\big)\big) =$$
$$= \big(f(x)\cdot g(y),\big(h(z),\varphi\big)\big) = \big([f(x)\cdot g(y)]\cdot h(z),\varphi\big)$$
tedy
$$f(x)\cdot[g(y)\cdot h(z)] = [f(x)\cdot g(y)]\cdot h(z)$$

Q.E.D.

Derivace direktního součinu

Nechť $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$. Potom
$$\big(\mathrm{D}_x^\alpha[f(x)\cdot g(y)],\varphi\big) = (-1)^{|\alpha|}\big(f(x)\cdot g(y),\,\mathrm{D}_x^\alpha\varphi\big) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\big(g(y),\big(f(x),\,\mathrm{D}_x^\alpha\varphi(x,y)\big)\big) = \big(g(y),\big(\mathrm{D}^\alpha f(x),\varphi\big)\big) = \big(\mathrm{D}^\alpha f(x)\cdot g(y),\varphi\big)$$
tedy
$$\mathrm{D}_x^\alpha[f(x)\cdot g(y)] = \mathrm{D}^\alpha f(x)\cdot g(y)$$

Q.E.D.

Násobení direktního součinu

Nechť $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$, $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\big(a(x)[f(x) \cdot g(y)], \varphi\big) = \big(f(x) \cdot g(y), a\varphi\big) = \big(f(x), \big(g(y), a(x)\varphi(x,y)\big)\big) =$$

$$= \big(f(x), a(x)\big(g(y), \varphi(x,y)\big)\big) = \big(a(x)f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\big) = \big(a(x)f(x) \cdot g(y), \varphi\big)$$

Tedy

$$a(x)[f(x) \cdot g(y)] = a(x)f(x) \cdot g(y)$$

Q.E.D.

Translace direktního součinu

Nechť $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$. Potom

$$\big((f \cdot g)(x+h, y), \varphi\big) = \big(f(x) \cdot g(y), \varphi(x-h, y)\big) = \big(g(y), \big(f(x), \varphi(x-h, y)\big)\big) =$$

$$= \big(g(y), \big(f(x+h), \varphi(x,y)\big)\big) = \big(f(x+h) \cdot g(y), \varphi\big)$$

Tedy

$$(f \cdot g)(x+h, y) = f(x+h) \cdot g(y)$$

Q.E.D.

3.2 Konvoluce

3.2.1 Konvoluce obyčejných funkcí

Definice 26 *Nechť $f(x), g(x)$ jsou lokálně integrabilní funkce na $\mathbb{R}^n$ takové, že*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y$$

je také lokálně integrabilní funkce na $\mathbb{R}^n$. Potom definujeme konvoluci funkcí f, g takto:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y = (g * f)(x)$$

Tvrzení. Konvoluce funkcí f, g existuje v těchto případech:

1. f nebo g má kompaktní nosič
2. $n = 1$ a f nebo g je rovna 0 pro $x < 0$
3. f a g jsou integrabilní na $\mathbb{R}^n$

Důkaz: $\emptyset$

3.2.2 Konvoluce zobecněných funkcí

Definice 27 *Nechť $\eta_k(x)$ je posloupnost funkcí z $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Říkáme, že η_k konverguje k 1 na $\mathbb{R}^n$ právě když pro všechny kompaktní množiny $K \subset \mathbb{R}^n$ existuje N tak, že $(\forall k \geq N)(\forall x \in K)\eta_k(x) = 1$ a $(\forall \alpha)(\exists C_\alpha)\big|\, \mathrm{D}^\alpha \eta_k(x)\, \big| < C_\alpha$.*

Příklad. Existuje posloupnost $\eta_k(x)$ konvergující k 1.
$n = 1$, $\eta(x) = 1$ na ε-okolí $(-1, 1)$, $\eta(x) = 0$ mimo 3ε-okolí $(-1, 1)$, jinde $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\eta(x) \in C^\infty$.
$\eta_k(x) = \eta(x/k)$

Definice 28 *Nechť $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x + y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ a $\eta_k(x, y) \to 1$. Dále nechť $\lim_{k\to\infty} \big(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big)$ nezávisí na výběru posloupnosti η_k. Potom definujeme konvoluci zobecněných funkcí f, g takto:*

$$\big(f * g, \varphi\big) = \big(f(x) \cdot g(y), \varphi(x + y)\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big)$$

Příklad.

$$f * \delta = \delta * f = f$$

Důkaz: Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ a nechť (η_k) je posloupnost funkcí z $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ konvergující k 1 v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Potom $\eta_k(x, 0)\varphi(x) \to \varphi(x)$ pro $k \to \infty$ a potom

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(x) \cdot \delta(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(x), \eta_k(x, 0)\varphi(x)\big) = \big(f, \varphi\big)$$

Z definice pak plyne, že $f * \delta$ a $\delta * f$ existují a jsou rovny f.
Q.E.D.

Věta 7 *Nechť f je libovolná a g má kompaktní nosič, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\eta_k(x, y) \to 1$. Potom existuje konvoluce $f * g$ a platí:*

$$\big(f * g, \varphi\big) = \big(f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big)$$

Důkaz: $\emptyset$

3.2.3 Vlastnosti konvoluce

Komutativita konvoluce

Komutativita konvoluce plyne z komutativity direktního součinu:

$$\big(f * g, \varphi\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \big(g(x)f(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big) = \big(g * f, \varphi\big)$$

Derivace konvoluce

Věta 8 *Nechť existuje* $f * g$*. Potom existují* $\mathrm{D}^\alpha f * g$ *a* $f * \mathrm{D}^\alpha g$ *a platí:*

$$\mathrm{D}^\alpha f * g = \mathrm{D}^\alpha (f * g) = f * \mathrm{D}^\alpha g$$

Důkaz: Stačí větu dokázat pro všechny první derivace. Platí, že pokud $\eta_k(x,y) \to 1$, potom i $\eta_k(x,y) + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}(x,y) \to 1$. Z existence $f * g$ dostaneme ($\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$):

$$\big(\frac{\partial}{\partial x_j}(f*g), \varphi\big) = -\big((f*g), \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\big) =$$

$$= -\lim_{k\to\infty} \big(f(x)\cdot g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_j}\big) =$$

$$= -\lim_{k\to\infty} \big(f(x)\cdot g(y), \frac{\partial[\eta_k \varphi(x+y)]}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}\varphi(x+y)\big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \big(\frac{\partial}{\partial x_j}[f(x)\cdot g(y)], \eta_k\varphi(x+y)\big) + \lim_{k\to\infty}\big(f(x)\cdot g(y), [\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}]\varphi(x+y)\big) -$$

$$- \lim_{k\to\infty}\big(f(x)\cdot g(y), \eta_k\varphi(x+y)\big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot g(y), \eta_k\varphi(x+y)\big) + \big(f*g,\varphi\big) - \big(f*g,\varphi\big) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_j} * g, \varphi\big)$$

Odtud plyne $\mathrm{D}^\alpha f * g = \mathrm{D}^\alpha(f*g)$. Z komutativity konvoluce dostaneme

$$\mathrm{D}^\alpha(f*g) = \mathrm{D}^\alpha(g*f) = \mathrm{D}^\alpha g * f = f * \mathrm{D}^\alpha g$$

Q.E.D.

Příklad. $\Theta * 1$ neexistuje.

$$\Theta' * 1 = \delta * 1 = 1$$

$$\Theta * (1)' = \Theta * 0 = 0$$

Kapitola 4

Funkce pomalého růstu

4.1 Rychle ubývající funkce

Definice 29 (Rychle ubývající funkce) *Prostor $\mathscr{S}$ funkcí $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ takových, že pro $|x| \to \infty$ f(x) se všemi svými derivacemi konverguje k nule rychleji než libovolná mocnina $|x|^{-1}$, nazveme prostorem rychle ubývajících funkcí. Konvergenci na prostoru $\mathscr{S}$ definujeme takto:*

$$\varphi_k \to \varphi \Leftrightarrow x^\beta \,\mathrm{D}^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows x^\beta \,\mathrm{D}^\alpha \varphi(x)$$

pro $\forall \alpha, \beta \in (Z)^n_{0+}$.

Tvrzení. $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$.

Důkaz: Nechť $\varphi \in \mathscr{D}$. Pak $\varphi \in C^\infty$ a $\exists R > 0$ tak, že $\forall x \Big| |x| > R : \varphi(x) = 0$, tedy pro $|x| \to \infty$ je $\varphi(x) \equiv 0$, tedy určitě konverguje k 0 rychleji než cokoliv.

Tvrzení. Zobrazení $\varphi \to \mathrm{D}^\alpha \varphi$ je spojité.

Důkaz: Plyne rovnou z definice konvergence.

Tvrzení. Zobrazení $\varphi(x) \to \varphi((A)y + b)$ je spojité.

Důkaz: Plyne rovnou z definice konvergence.

4.2 Funkce pomalého růstu

Definice 30 (Funkce pomalého růstu) *Prostor $\mathscr{S}'$ nazveme prostorem funkcí pomalého růstu.*

$f \in \mathscr{S}' \Leftrightarrow$
1. *f je funkcionál na $\mathscr{S}$*
2. *f je lineární, tedy $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ $\big(f, \lambda\varphi + \mu\psi\big) = \lambda\big(f, \varphi\big) + \mu\big(f, \psi\big)$*
3. *f je spojitý, tedy $\varphi_k \to \varphi \;\Rightarrow\; \big(f, \varphi_k\big) \to \big(f, \varphi\big)$*

Konvergence na $\mathscr{S}'$ je definována takto:
$f_k, f \in \mathscr{S}',\ \varphi \in \mathscr{S}:\ f_k \to f \Leftrightarrow \big(f_k, \varphi\big) \to \big(f, \varphi\big)$

Definice 31 *Zavedeme množinu funkcí, kterými se dá násobit funkce z $\mathscr{S}$.*

$$\Theta_M = \Big\{ a \in C^\infty \Big| |x| \to \infty : |\,\mathrm{D}^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^m \alpha \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in (Z)^n_{0+} \Big\}$$

Pro tyto funkce platí $\varphi \in \mathscr{S} \Rightarrow a\varphi \in \mathscr{S}$.

Tvrzení. $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$.

Důkaz: Plyne z toho, že $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$. Když $f \in \mathscr{S}'$, je to funkcionál, který lze aplikovat na funkci z $\mathscr{S}$, tedy i na funkci z $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$.

Věta 9 (L. Schwartz) *Aby funkcionál f na $\mathscr{S}$ byl spojitý, je nutné a stačí, aby $\exists c > 0$ a $\exists p \in (Z)^+_0$ tak, že $\forall \varphi \in \mathscr{S}$*

$$\big|\,\big(f, \varphi\big)\,\big| \leq c \|\,\varphi\,\|_p,$$

kde

$$\|\,\varphi\,\|_p = \sup_{|\alpha| \leq p, x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^p |\,\mathrm{D}^\alpha \varphi(x)|.$$

Důkaz: $\emptyset$

Direktní součin na $\mathscr{S}'$

$f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$

$$\big(f(x).g(y), \varphi(x,y)\big) := \big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\big), \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}$$

Konvoluce na $\mathscr{S}'$

$f \in \mathscr{S}'$, $g \in \mathscr{D}'$ a $\operatorname{supp} g$ je kompakt

$$f * g \in \mathscr{S}', \big(f * g, \varphi\big) = \big(f(x).g(y), \eta(y)\varphi(x+y)\big), \quad \forall \varphi \in \mathscr{S},$$

kde $\eta \in \mathscr{D}$ je rovno 1 v okolí $\operatorname{supp} g$.

Kapitola 5

Fourierova transformace

5.1 Fourierova transformace na $\mathscr{S}$

Definice 32 *Nechť $\varphi \in \mathscr{S}$. Potom $\mathcal{F}[\varphi]$ je Fourierova transformace funkce φ.*

$$\mathcal{F}[\varphi] := \int \varphi(x) e^{i\left(\xi, x\right)} dx$$

Poznámka. $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ je izomorfismus.

Poznámka. Fourierovu transformaci není možné definovat pro funkce z $\mathscr{D}$, protože $\varphi \in \mathscr{D} \Rightarrow \mathcal{F}[\varphi] \notin \mathscr{D}$.

Derivace FT:

$$\mathrm{D}^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int \varphi(x) \, \mathrm{D}^\alpha (e^{i(\xi,x)}) dx = \int (ix)^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi,x)} dx = \mathcal{F}[(ix)^\alpha \varphi(x)](\xi)$$

FT derivace:

$$\mathcal{F}[\, \mathrm{D}^\alpha \varphi](\xi) = \int \mathrm{D}^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi,x)} dx = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi)$$

Derivace FT a mocnina:

$$\xi^\beta \, \mathrm{D}^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F}[\, \mathrm{D}^\beta (x^\alpha \varphi(x))](\xi)$$

Protože

$$\left| \, i^\alpha i^\beta \mathcal{F}[\, \mathrm{D}^\beta (x^\alpha \varphi(x))](\xi) \, \right| \le \int \left| \, \mathrm{D}^\beta (x^\alpha \varphi(x)) \, \right| dx,$$

je $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathscr{S}$.

Inverzní FT na $\mathscr{S}$:

Definice 33 *Zobrazení $\mathcal{F}^{-1}$ nazýváme inverzní Fourierovou transformací. Platí pro něj*

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]]$$

a má tvar

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(\xi)e^{-i(\xi,x)}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}[\psi](-x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(-\xi)e^{i(\xi,x)}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}[\psi(-\xi)]$$

Důsledek. Fourierova transformace $\mathcal{F}$ je bijekce na $\mathscr{S}$.

Lemma 6 *Zobrazení $\mathcal{F}$ je spojité na $\mathscr{S}$.*

Důkaz: Nechť $\varphi_k \to 0$ pro $k \to \infty$. Potom

$$\big|\, i^\alpha i^\beta F[\,\mathrm{D}^\beta(x^\alpha\varphi_k(x))](\xi)\,\big| \le \int \big|\,\mathrm{D}^\beta(x^\alpha\varphi_k(x))\,\big|\,dx \le$$

$$\le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\,\mathrm{D}^\beta(x^\alpha\varphi_k)|(1+|x|)^{n+1}\int \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}},$$

tedy

$$|\xi^\beta\,\mathrm{D}^\alpha\mathcal{F}[\varphi_k]| \overset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0,\ k\to\infty,$$

a proto

$$\mathcal{F}[\varphi_k] \to 0,\ k \to \infty.$$

Q.E.D.

5.2 Fourierova transformace na $\mathscr{S}'$

Definice 34 *Nechť $\varphi \in \mathscr{S}$, $f \in \mathscr{S}'$. Potom definujeme Fourierovu transformaci $\mathcal{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$*

$$\big(\mathcal{F}[f],\varphi\big) = \big(f,\mathcal{F}[\varphi]\big)$$

Tvrzení. $\mathcal{F}[f] \in \mathscr{S}'$

Důkaz: $\mathcal{F}$ je funkcionál a zřejmě lineární. Dokážeme spojitost:
Nechť $\varphi_k \in \mathscr{S}$, $\varphi_k \to 0$ pro $k \to \infty$. Potom z předchozího lemmatu $\mathcal{F}[\varphi_k] \to 0$ a protože $f \in \mathscr{S}'$, $\big(f,\mathcal{F}[\varphi]\big) \to 0$.
Q.E.D.

Tvrzení. Zobrazení $\mathcal{F}$ je spojité na $\mathscr{S}'$.

Důkaz: Nechť $f_k \in \mathscr{S}'$,$f_k \to 0$ pro $k \to \infty$. Pro $\forall\varphi \in \mathscr{S}$ platí $\big(\mathcal{F}[f_k],\varphi\big) = \big(f_k,\mathcal{F}[\varphi]\big) \to 0$, tedy $\mathcal{F}[f_k] \to 0$.
Q.E.D.

Inverzní FT na $\mathscr{S}'$:

Definice 35 *Zobrazení $\mathcal{F}^{-1}$ nazýváme inverzní Fourierovou transformací. Má tvar*

$$\mathcal{F}^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}[f(-x)]$$

Tvrzení. $\mathcal{F}^{-1}$ je inverzní k $\mathcal{F}$, tedy

$$\big(\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]], \varphi\big) = \big(f, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]]\big) = \big(f, \varphi\big)$$

Důkaz:

$$\big(\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]], \varphi\big) = \frac{1}{(2\pi)^n}\big(\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](-\xi), \varphi\big) = \frac{1}{(2\pi)^n}\big(\mathcal{F}[f](-\xi), \mathcal{F}[\varphi]\big) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\big(\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[\varphi](-\xi)\big) = \big(\mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[\varphi]\big) = \big(f, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]]\big)$$

Důsledek. Fourierova transformace $\mathcal{F}$ je bijekce na $\mathscr{S}'$.

Definice 36 *Nechť $f(x,y) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$, kde $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^m$. Potom zavedeme Fourierovu transformaci vzhledem k x $\mathcal{F}_x[f]$ takto:*

$$\big(\mathcal{F}_x[f], \varphi\big) = \big(f, \mathcal{F}_\xi[\varphi]\big)$$

pro $\forall\varphi(\xi, y) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+m})$. Dále platí

$$\mathcal{F}_\xi[\varphi] = \int \varphi(\xi, y)e^{i(\xi,x)}d\xi$$

Derivace FT:

$$\mathrm{D}^\alpha\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[(ix)^\alpha f], \quad f \in \mathscr{S}'$$

Důkaz:

$$\big(\mathrm{D}^\alpha\mathcal{F}[f], \varphi\big) = (-1)^{|\alpha|}\big(\mathcal{F}[f], \mathrm{D}^\alpha\varphi\big) = (-1)^{|\alpha|}\big(f, \mathcal{F}[\mathrm{D}^\alpha\varphi]\big) =$$

$$= (ix)^\alpha\big(f, \mathcal{F}[\varphi]\big) = \big(\mathcal{F}[(ix)^\alpha f], \varphi\big)$$

FT derivace:

$$\mathcal{F}[\mathrm{D}^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha\mathcal{F}[f], \quad f \in \mathscr{S}'$$

FT translace:

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = e^{i(x_0,\xi)}\mathcal{F}[f], \quad f \in \mathscr{S}'$$

Translace FT:

$$\mathcal{F}[f](\xi+\xi_0)=\mathcal{F}[e^{i(\xi_0,x)}f],\quad f\in\mathscr{S}'$$

FT direktního součinu:

$$\mathcal{F}[f(x)g(y)]=\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]=\mathcal{F}_x[f(x)\mathcal{F}[y]]=\mathcal{F}_y[\mathcal{F}[f]g(y)],\quad f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),\ g\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$$

Věta 10 *Nechť f je zobecněná funkce, $\mu(\operatorname{supp} f)<\infty$. Potom $\mathcal{F}[f]\in\Theta_M$ a platí*

$$\mathcal{F}[f](\xi)=\big(f(x),\eta(x)e^{i(\xi,x)}\big)$$

kde $\eta(x)\in\mathscr{D}$ a $\eta(x)=1$ v okolí $\operatorname{supp} f$.

Důkaz: $\emptyset$

Příklad. Funkce $\delta(x-x_0)$ má kompaktní nosič, tedy

$$\mathcal{F}[\delta(x-x_0)]=\big(\delta(x-x_0),\eta(x)e^{i(\xi,x)}\big)=\eta(x_0)e^{i(\xi,x_0)}=e^{i(\xi,x_0)}$$

$$\mathcal{F}[\delta]=1$$

$$\delta=\mathcal{F}^{-1}[1]$$

$$\mathcal{F}[1]=(2\pi)^n\delta$$

FT konvoluce

Věta 11 *Nechť $f\in\mathscr{S}'$, $g\in\mathscr{D}'$, $\mu(\operatorname{supp} g)<\infty$. Pak platí:*

$$\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}[g]\mathcal{F}[f]$$

Důkaz: Podle věty 7 konvoluce existuje a platí:

$$\big(f*g,\varphi\big)=\big(f(x),\big(g(y),\eta(y)\varphi(x+y)\big)\big),\quad \varphi\in\mathscr{S}$$

Z toho plyne, že

$$\big(\mathcal{F}[f*g],\varphi\big)=\big(f*g,\mathcal{F}[\varphi]\big)=\big(f(x),\big(g(y),\eta(y)\int_{\mathcal{G}}\varphi(\xi)e^{i((x+y),\xi)}\,\mathrm{d}\xi\big)\big),\quad \varphi\in\mathscr{S}$$

Z věty 10 víme, že $F[g]\in\Theta_M$ a můžeme psát

$$\big(\mathcal{F}[f*g],\varphi\big)=\big(f,\int_{\mathcal{G}}(g,\eta(y)e^{i(\xi,y)})e^{i(\xi,x)}\,\mathrm{d}\xi\big)=$$

$$=\big(f,\int_{\mathcal{G}}\mathcal{F}[g](\xi)\varphi(\xi)e^{i(\xi,x)}\,\mathrm{d}\xi\big)=\big(f,\mathcal{F}[\mathcal{F}[g\varphi]\big)=$$

$$\big(\mathcal{F}[f],\mathcal{F}[g]\varphi\big)=\big(\mathcal{F}[g]\mathcal{F}[f],\varphi\big)$$

Q.E.D.

Kapitola 6

Lineární diferenciální rovnice

Budeme se zabývat rovnicí

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x)\,\mathrm{D}^\alpha u(x) = f(x),$$

kde $a_\alpha \in C^\infty$, $u \in \mathscr{D}'$. Je to lineární diferenciální rovnice m-tého řádu. Zavedením diferenciálního operátoru $L(x, D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x)\,\mathrm{D}^\alpha$ můžeme tuto rovnici zapsat takto:

$$L(x, D)u = f(x)$$

Tedy řešením je každá funkce $u \in \mathscr{D}'$ splňující rovnost

$$\big(L(x, D)u, \varphi\big) = \big(f, \varphi\big) \tag{6.1}$$

pro $\forall \varphi \in \mathscr{D}$.

Rovnice 6.1 je ekvivalentní rovnici

$$\big(u, L^*(x, D)\varphi\big) = \big(f, \varphi\big),$$

kde $L^*(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^{m}(-1)^{|\alpha|}\,\mathrm{D}^\alpha(a_\alpha \varphi)$

Dále budeme uvažovat pouze rovnice s konstatními koeficienty, tedy $a_\alpha(x) = a_\alpha$.

Operátory L, L^* pak přejdou na tvar

$$L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha\,\mathrm{D}^\alpha, \qquad L^*(D) = L(-D)$$

6.1 Fundamentální řešení rovnice s konstatními koeficienty

Zobecněná funkce $\mathscr{E} \in \mathscr{D}'$ splňující rovnici $L(D)\mathscr{E} = \delta(x)$ se nazývá fundamentálním řešením operátoru $L(D)$.

Fundamentální řešení $\mathscr{E}$ operátoru $L(D)$ není určeno jednoznačně. Je-li $\mathscr{E}$ fundamentální řešení, pak je i $(\mathscr{E} + \mathscr{E}_0)$ fundamentální řešení, kde $\mathscr{E}_0$ je libovolné řešení homogenní rovnice $L(D)\mathscr{E}_0 = 0$.

Věta 12 *Aby $\mathscr{E} \in \mathscr{S}'$ bylo fundamentálním řešením operátoru $L(D)$, je nutné a stačí, aby*

$$L(-i\xi)F[\mathscr{E}] = 1,$$

kde

$$L(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Důkaz: Nechť $\mathscr{E}$ je fundamentálním řešením operátoru $L(D)$, tedy platí

$$L(D)\mathscr{E} = \delta(x)$$

$$\mathcal{F}[L(D)\mathscr{E}] = \mathcal{F}[\delta(x)] = 1$$

Z předchozího a z vlastností Fourierovy transformace:

$$1 = \mathcal{F}[L(D)\mathscr{E}] = \mathcal{F}\left[\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \, \mathrm{D}^\alpha \mathscr{E}\right] = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \mathcal{F}[\, \mathrm{D}^\alpha \mathscr{E}] =$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[\mathscr{E}] = L(-i\xi)\mathcal{F}[\mathscr{E}]$$

Q.E.D.

Hledejme nyní fundamentální řešení $\mathscr{E} \in \mathscr{S}'$. Z předchozího lemmatu vyplývá, že je tento problém ekvivalentní s hledáním řešení $X \in \mathscr{S}'$ rovnice

$$P(\xi)X = 1 \tag{6.2}$$

kde P je polynom. Označíme si

$$N_p = \xi | P(\xi) = 0$$

množinu nulových bodů polynomu. Mimo N_p je řešením $1/P(\xi)$, pokud $N_p \neq \emptyset$, řešení není jednoznačné a jednotlivá řešení se od sebe liší o zobecněnou funkci, jejíž nosič leží v N_p.

Příklad. Rovnice

$$\xi X = 1$$

má řešení

$$\frac{1}{\xi + i0}, \quad \frac{1}{\xi + i0}, \quad \mathcal{P}\frac{1}{\xi}$$

která se od sebe liší o násobky $\delta(\xi)$.

Hoermander dokázal, že rovnice 6.2 má řešení pro libovolný nenulový polynom.

Platí, že

$$\mathcal{F}(\mathscr{E}) = reg\frac{1}{L(-i\xi)}$$

a řešení rovnice 6.2 je tedy dáno vzorcem

$$\mathscr{E} = \mathcal{F}^{-1}\left[reg\frac{1}{L(-i\xi)}\right] = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}\left[reg\frac{1}{L(i\xi)}\right]$$

6.2 Řešení rovnice s konstatními koeficienty a s pravou stranou

Budeme řešit rovnici

$$L(D)u = f(x) \tag{6.3}$$

Věta 13 *Nechť $f \in \mathscr{D}'$ a existuje konvoluce $\mathscr{E} * f$ v $\mathscr{D}'$. Potom existuje řešení rovnice 6.3 v $\mathscr{D}'$ a je rovno*

$$u = \mathscr{E} * f$$

Toto řešení je jednoznačné ve třídě funkcí z $\mathscr{D}'$, pro které existuje konvoluce s $\mathscr{E}$.

Důkaz: Ze vztahu pro derivaci konvoluce a z toho, že $\mathscr{E}$ je fundamentálním řešením $L(D)$ vyplývá:

$$L(D)(\mathscr{E}*f) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \, \mathrm{D}^\alpha(\mathscr{E}*f) = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \, \mathrm{D}^\alpha \mathscr{E}\right)*f = L(D)\mathscr{E}*f = \delta*f = f$$

Tedy $u = \mathscr{E} * f$ je řešením rovnice 6.3.

Jednoznačnost řešení rovnice 6.3 je ekvivalentní tomu, že homogenní rovnice

$$L(D)u = 0$$

má pouze nulové řešení. Platí ovšem

$$u = u * \delta = u * L(D)\mathscr{E} = L(D)u * \mathscr{E} = 0$$

Q.E.D.

6.3 Spádová metoda

Řešíme lineární diferenciální rovnici s konstatními koeficienty v proměnných (x,t):

$$L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f(x).\delta(t), \quad f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \tag{6.4}$$

kde

$$L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{q=1}^{p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} L_q(D) + L_0(D)$$

Nechť $u(x,t) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, $\eta_k(t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\eta_k(t) \to 1$.

Zavedeme prodloužení $u_0(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ řešení u:

$$\big(u_0, \varphi(x)\big) = \lim_{k\to\infty} \big(u, \varphi(x)\eta_k(t)\big)$$

Tato limita nezávisí na volbě posloupnosti η_k.

Ukažme si nyní dva příklady konstrukce prodloužení $u_0(x)$:

1. $\int_{\mathbb{R}} \big| u(x,t) \big| \,\mathrm{d}t$ je lokálně integrovatelná v $\mathbb{R}^n$
   Potom

$$\lim_{k\to\infty} \big(u, \varphi(x)\eta_k(t)\big) = \lim_{k\to\infty} \int u(x,t)\varphi(x)\eta_k(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int u(x,t)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

   a tedy

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t$$

2. $u = f(x).\delta(t)$, $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$
   Potom

$$\big(u_0, \varphi\big) = \lim_{k\to\infty} \big(u, \varphi(x)\eta_k(t)\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(x).\delta(t), \varphi(x)\eta_k(t)\big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \big(f(x), \varphi(x)\eta_k(0)\big) = \big(f, \varphi\big) \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

   a tedy

$$u_0 = f$$

Věta 14 *Jestliže řešení u rovnice (6.4) umožňuje prodloužení u_0, platí*

$$L_0(D)u_0 = f(x) \tag{6.5}$$

Důkaz: Nechť $\big(\eta_k(t)\big)$ je posloupnost funkcí z $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ konvergující k 1 v $\mathbb{R}$. Potom pro $q = 1, 2, \dots$ také posloupnost $\eta_k + \eta_k^{(q)} \to 1$ a tedy

$$\lim_{k\to\infty} \big(u, \varphi(x)\eta_k^{(q)}(t)\big) = \lim_{k\to\infty} \big(u, \varphi(x)[\eta_k^{(q)}(t) + \eta_k(t)]\big) - \lim_{k\to\infty} \big(u, \varphi(x)\eta_k(t)\big) =$$

$$\big(u_0, \varphi\big) - \big(u_0, \varphi\big) = 0$$

Nyní ukážeme, že u_0 splňuje rovnici (6.5):

$$\big(L_0(D)u_0, \varphi\big) = \big(u_0, L_0(-D)\varphi\big) = \lim_{k\to\infty} \big(u, L_0(-D)\varphi(x)\eta_k(t)\big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \big(u, L_0(-D)\varphi(x)\eta_k(t) + \sum_{q=1}^{p} (-1)^q L_q(-D)\varphi(x)\eta_k^{(q)}(t)\big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \big(u, L\Big(-D, -\frac{\partial}{\partial t}\Big)\varphi(x)\eta_k(t)\big) = \lim_{k\to\infty} \big(L\Big(D, \frac{\partial}{\partial t}\Big)u, \varphi(x)\eta_k(t)\big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \big(f(x).\,\delta(t), \varphi(x)\eta_k(t)\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(x), \varphi(x)\eta_k(0)\big) = \big(f, \varphi\big)$$

Q.E.D.

Spádovou metodu lze využít zejména ke hledání fundamentálního řešení. Použijeme-li předchozí větu a položíme-li $f = \delta(x)$, můžeme vyslovit následující větu.

Věta 15 *Je-li $\mathscr{E}(x,t)$ fundamentálním řešením operátoru $L(D, \partial/\partial t)$ a umožňuje-li prodloužení $\mathscr{E}_0$, je zobecněná funkce*

$$\big(\mathscr{E}_0, \varphi(x)\big) = \lim_{k\to\infty} \big(\mathscr{E}, \varphi(x)\eta_k(t)\big), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

fundamentálním řešením operátoru $L_0(D)$; speciálně je-li $\mathscr{E}(x,t)$ takové, že $\int_{\mathbb{R}} \big|\, \mathscr{E}(x,t) \,\big| \,\mathrm{d}t$ je lokálně integrabilní v $\mathbb{R}^n$, platí

$$\mathscr{E}_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

6.4 Fundamentální řešení lineárního diferenciálního operátoru s obyčejnými derivacemi

$$L\mathscr{E} \equiv \frac{\mathrm{d}^n \mathscr{E}}{\mathrm{d}t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \dots + a_n \mathscr{E} = \delta(t)$$

Dá se ukázat, že fundamentální řešení je

$$\mathscr{E}(t) = \Theta(t) Z(t)$$

kde $Z(t)$ splňuje homogenní rovnici $LZ = 0$ a počáteční podmínky

$$Z(0) = Z'(0) = \dots = Z^{(n-2)}(0) = 0, \quad Z^{(n-1)}(0) = 1$$

Důkaz:

$$\mathscr{E}'(t) = (\Theta(t)Z(t))' = \delta(t)Z(t) + \Theta(t)Z'(t) = \delta(t)Z(0) + \Theta(t)Z'(t) = \Theta(t)Z'(t)$$

Obdobně

$$\mathscr{E}''(t) = (\Theta(t)Z(t))'' = \Theta(t)Z''(t)$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{E}^{(n-2)}(t) = (\Theta(t)Z(t))^{(n-2)} = \Theta(t)Z^{(n-2)}(t)$$
$$\mathscr{E}^{(n-1)}(t) = (\Theta(t)Z^{(n-1)}(t))' = \delta(t)Z^{(n-1)}(t) + \Theta(t)Z^{(n)}(t) = \delta(t) + \Theta(t)Z^{(n-2)}(t)$$

Po dosazení do $L\mathscr{E}(t) = \delta(t)$ dostáváme rovnici $LZ = 0$, která je splněna.

Příklad. Fundamentálním řešením operátoru

$$L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a$$

je

$$\mathscr{E}(t) = \Theta(t)e^{-at}$$

Příklad. Fundamentálním řešením operátoru

$$L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t + a^2}$$

je

$$\mathscr{E}(t) = \Theta(t)\frac{\sin at}{a}$$

6.5 Fundamentální řešení operátoru vedení tepla

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - a^2\nabla^2\mathscr{E} = \delta(x,t) \tag{6.6}$$

Řešením je

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)$$

Důkaz: Sami.

K tomuto řešení lze také dojít pomocí Fourierovy transformace. Na rovnici 6.6 aplikujeme Fourierovu transformaci $\mathcal{F}_x$:

$$\mathcal{F}_x[\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}] - a^2\mathcal{F}_x[\nabla^2\mathscr{E}] = \mathcal{F}_x[\delta(x,t)]$$
$$\mathcal{F}_x[\delta(x,t)] = \mathcal{F}_x[\delta(x).\,\delta(t)] = \mathcal{F}[\delta](\xi).\,\delta(t) = 1(\xi).\,\delta(t) = \delta(t)$$

$$\mathcal{F}_x[\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}] = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_x[\mathscr{E}]$$
$$\mathcal{F}_x[\nabla^2 \mathscr{E}] = -|\xi|^2\mathcal{F}_x[\mathscr{E}]$$

Tedy pro zobecněnou funkci $\widetilde{\mathscr{E}}(\xi,t) = \mathcal{F}_x[\mathscr{E}](\xi,t)$ máme rovnici:

$$\frac{\partial \widetilde{\mathscr{E}}(\xi,t)}{\partial t} + a^2|\xi|^2\widetilde{\mathscr{E}}(\xi,t) = \delta(t)$$

Z předchozího odstavce ovšem víme, že dosazením $a^2|\xi|^2$ za a je řešením

$$\widetilde{\mathscr{E}}(\xi,t) = \Theta(t)e^{-a^2|\xi|^2 t}$$

Použitím inverzní Fourierovy transformace $\mathcal{F}_\xi^{-1}$ dostáváme

$$\mathscr{E}(x,t) = \mathcal{F}_\xi^{-1}[\widetilde{\mathscr{E}}(\xi,t)] = \frac{\Theta(t)}{(2\pi)^n}\int e^{-a^2|\xi|^2 - i(\xi,x)}\,\mathrm{d}\xi =$$
$$= \frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right)$$

6.6 Fundamentální řešení vlnového operátoru

$$\Box_a \mathscr{E}_n = \delta(x,t)$$

kde

$$\Box_a = \hat{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \triangle$$

Aplikací Fourierovy transformace $\mathcal{F}_x$ dostáváme (viz předchozí odstavec):

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\mathscr{E}}_n(\xi,t)}{\partial^2 t} + a^2|\xi|^2\widetilde{\mathscr{E}}_n(\xi,t) = \delta(t)$$

Z odstavce ovšem víme, že dosazením $a|\xi|$ za a je řešením

$$\widetilde{\mathscr{E}}_n(\xi,t) = \Theta(t)\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}$$

Použitím inverzní Fourierovy transformace $\mathcal{F}_\xi^{-1}$ dostáváme

$$\mathscr{E}_n(x,t) = \mathcal{F}_\xi^{-1}[\widetilde{\mathscr{E}}_n(\xi,t)] = \Theta(t)\mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right]$$

Položme $n = 3$. Potom

$$\mathscr{E}_3(x,t) = \frac{\Theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x) \equiv \frac{\Theta(t)}{2\pi a}\delta(a^2t^2 - |x|^2)$$

Chceme-li získat $\mathscr{E}_2((x_1, x_2), t) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$,použijeme spádovou metodu vzhledem k proměnné x_3. Musíme tedy ukázat, že $\mathscr{E}_3(x, x_3, t)$ lze prodloužit. Nechť $\eta_k(x_3) \to 1$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} \big(\mathscr{E}_3, \varphi(x,t)\eta_k(x_3)\big) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x,t)\eta_k(x_3)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = \big(\mathscr{E}_3, \varphi(x,t).1(x_3)\big)$$

Tedy tato limita existuje a nezávisí na $\eta_k(x_3)$.

Použitím věty 15 dostaneme

$$\big(\mathscr{E}_2, \varphi\big) = \big(\mathscr{E}_3, \varphi(x,t).1(x_3)\big) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$

Sférickou transformací dostaneme

$$\big(\mathscr{E}_2, \varphi\big) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty \int_{|x|<at} \frac{\varphi(x,t)}{\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \int \frac{\Theta(at - |x|)}{\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{E}_2(x,t) = \frac{\Theta(at - |x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}$$

Podobně lze získat

$$\mathscr{E}_1(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\Theta(at - |x|)$$

Kapitola 7

Integrální rovnice

7.1 Úvod

Definice 37 *Rovnici*

$$\int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$$

nazýváme ***Fredholmovou rovnicí I.druhu*** *s neznámou funkcí φ, kde $\mathscr{K}(x,y)$ je jádro integrální rovnice.*

Definice 38 *Rovnici*

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)dy + f(x)$$

nazýváme ***Fredholmovou rovnicí II.druhu*** *s neznámou funkcí φ, kde $\mathscr{K}(x,y)$ je jádro integrální rovnice a $f(x)$ je nehomogenní člen.*

Zavedeme integrální operátor K s jádrem $\mathscr{K}(x,y)$ a platí:

$$(Kf)(x) = \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x,y)f(y)dy$$

Potom lze II. Fredholmovu rovnici zapsat ve tvaru

$$\varphi = \lambda K\varphi + f$$

a k ní sdruženou rovnici ve tvaru

$$\psi = \overline{\lambda}K^*\psi + g$$

kde K^* je sdružený integrální operátor se sdruženým jádrem $\mathscr{K}^*(x,y) = \overline{\mathscr{K}}(y,x)$.

Definice 39 *Pokud $\exists\lambda \neq 0$ tak, že existuje nenulová funkce $\varphi \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$, která řeší rovnici $\varphi = \lambda K\varphi$, nazýváme číslo λ charakteristickou hodnotou jádra $\mathscr{K}$ a číslo $\frac{1}{\lambda}$ vlastní hodnotou jádra $\mathscr{K}$.*

Úmluva:

Dále se omezíme na $\mathcal{G}$ omezenou oblast a $\mathscr{K} \in C(\overline{\mathcal{G}} \times \overline{\mathcal{G}})$.

Norma funkce

$$\| f \| = \left(\int_{\mathcal{G}} \left| f(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$$
$$\| f \|_C = \max_{x \in \overline{\mathcal{G}}} \left| f(x) \right|, \quad f \in C(\overline{\mathcal{G}})$$

Lemma 7 *Jestliže* $\forall f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ *platí*

$$(Kf)(x) = \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x,y) f(y) dy = 0$$

potom $\mathscr{K}(x,y) = 0$.

Důkaz: $\emptyset$

Lemma 8 *Integrální operátor* K *se spojitým jádrem* $\mathscr{K}(x,y)$ *zobrazuje* $\mathscr{L}_2(\mathcal{G}) \to \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ *a také* $C(\overline{\mathcal{G}}) \to C(\overline{\mathcal{G}})$ *a navíc platí:*

1. $\| Kf \|_C \leq M\sqrt{V} \| f \|, \quad f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$
2. $\| Kf \|_C \leq MV \| f \|_C, \quad f \in C(\overline{\mathcal{G}})$
3. $\| Kf \| \leq MV \| f \|, \quad f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$

kde $M = \max_{x \in \overline{\mathcal{G}}, y \in \overline{\mathcal{G}}} |\mathscr{K}(x,y)|$ *a* $V = \int_{\mathcal{G}} dx$.

Důkaz:

1. (s použitím Cauchyho-Buňakovského nerovnosti)

$$\| Kf \|_C = \max_{x \in \overline{\mathcal{G}}} \left| (Kf)(x) \right| = \max_{x \in \overline{\mathcal{G}}} \left| \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x,y) f(y) dy \right| \leq \max_{x \in \overline{\mathcal{G}}} \int_{\mathcal{G}} \left| \mathscr{K}(x,y) \right| \left| f(y) \right| \leq$$
$$\overset{C-B}{\leq} \max_{x \in \overline{\mathcal{G}}} \left(\int_{\mathcal{G}} |\mathscr{K}(x,y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{G}} |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq M\sqrt{V} \left(\int_{\mathcal{G}} |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = M\sqrt{V} \| f \|$$

2. Sami.

3. Sami.

7.2 Metoda postupných aproximací

7.2.1 Řešení rovnice se spojitým jádrem

Řešíme rovnici

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \qquad (*)$$

Zavedeme posloupnost $\varphi^{(p)}(x)$ takto:

$$\varphi^{(0)}(x) = f(x)$$

$$\varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x,y)\varphi^{(p-1)}(y)dy + f(x)$$

Tvrzení. Posloupnost $\varphi^{(p)}(x)$ lze vyjádřit ve tvaru $\varphi^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \lambda^k K^k f$

Důkaz:

$$\varphi^{(0)} = \lambda^0 K^0 f = f$$

Indukční krok:

$$\varphi^{(p+1)} = |z\ definice| = \lambda K\varphi^{(p)} + f = \lambda K\Big(\sum_{k=0}^{p} \lambda^k K^k f\Big) + f = \sum_{k=0}^{p} \lambda^{k+1} K^{k+1} f + f =$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} \lambda^k K^k f + \lambda^0 K^0 f = \sum_{k=0}^{p+1} \lambda^k K^k f$$

Q.E.D.

Tvrzení.

$$\| K^p f \|_C \leq (MV)^p \| f \|_C$$

Důkaz:

$$\| K^p f \|_C = \big\| K(K^{p-1} f) \big\|_C \leq MV \big\| K^{p-1} f \big\|_C \leq \ldots \leq (MV)^p \| f \|_C$$

Tvrzení.

$$\Big| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K^k f \Big| \leq \| f \|_C \frac{1}{1 - MV|\lambda|} \quad pro\ MV|\lambda| < 1$$

Důkaz:

$$\Big| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K^k f \Big| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k (MV)^k \| f \|_C = \| f \|_C \sum_{k=0}^{\infty} (|\lambda| MV)^k =$$

$$= \| f \|_C \frac{1}{1 - MV|\lambda|} \quad pro\ MV|\lambda| < 1$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K^k f$ nazveme Neumannovou řadou.

Ukážeme, že Neumannova řada jednoznačně řeší rovnici $(*)$:

Věta 16 *Rovnice* $\varphi = \lambda K\varphi + f$ *se spojitým jádrem* $\mathscr{K}(x,y)$ *a* $|\lambda| < \frac{1}{MV}$ *má jednoznačné řešení ve třídě* $C(\overline{\mathcal{G}})$ *pro* $f \in C(\overline{\mathcal{G}})$.
Toto řešení je dáno Neumannovou řadou $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K^k f$.

Důkaz: Z předchozího tvrzení vidíme, že tato řada pro $MV|\lambda| < 1$ stejnoměrně konverguje na $\overline{\mathcal{G}}$, tedy definuje spojitou funkci na $\overline{\mathcal{G}}$. Proto posloupnost aproximací $\varphi^{(p)}$ stejnoměrně konverguje na $\overline{\mathcal{G}}$.

Existence řešení:

$$\varphi(x) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \lambda^k K^k f(x) = \lim_{p\to\infty} \varphi^{(p)} = \lim_{p\to\infty} \left(\lambda \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x,y)\varphi^{(p-1)}(y)dy + f(x)\right) =$$
$$= \lambda \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x,y)(\lim_{p\to\infty} \varphi^{(p-1)})dy + f = \lambda \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)dy + f(x)$$

Jednoznačnost:

Protože K je lineární, má rovnice $(*)$ právě jedno řešení právě tehdy, má-li rovnice $\varphi_0 = \lambda K\varphi_0$ pouze nulové řešení.

$$\|\,\varphi_0\,\| = \|\,\lambda K\varphi_0\,\| \le |\lambda| MV \|\,\varphi_0\,\| < \|\,\varphi_0\,\|$$

Tedy $\|\,\varphi_0\,\| = 0$ a rovnice $\varphi_0 = \lambda K\varphi_0$ má pouze nulové řešení.

Q.E.D.

Poznámka. Rovnici $\varphi = \lambda K\varphi + f$ lze převést na tvar $(I - \lambda K)\varphi = f$. Její řešení pak odpovídá hledání $(I - \lambda K)^{-1}$.

7.2.2 Iterované jádro a resolventa

Tvrzení.

$$\big(Kf, g\big) = \big(f, K^* g\big)$$

Důkaz:

$$\big(Kf, g\big) = \int_{\mathcal{G}} Kf\overline{g}dx = \int_{\mathcal{G}} \left[\int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x,y)f(y)dy\right]\overline{g}(x)dx =$$
$$= \int_{\mathcal{G}} f(y)\left[\int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x,y)\overline{g}(x)dx\right]dy = \int_{\mathcal{G}} f\overline{K^* g}dy = \big(f, K^* g\big)$$

Q.E.D.

Lemma 9 *Nechť* K_1, K_2 *jsou integrální operátory se spojitými jádry* $\mathscr{K}_i(x,y)$.
Potom $K_3 = K_2 K_1$ *je integrální operátor se spojitým jádrem* $\mathscr{K}_3 = \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_2(x,y')\mathscr{K}_1(y',y)dy'$ *a platí* $K_3^* = K_1^* K_2^*$.

Důkaz: Pro $\forall f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ platí

$$(K_3 f)(x) = (K_2 K_1 f)(x) = \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_2(x, y') \left[\int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_1(y', y) f(y) dy \right] dy' =$$

$$= \int_{\mathcal{G}} \left[\int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_2(x, y') \mathscr{K}_1(y', y) dy' \right] f(y) dy$$

a tedy

$$\mathscr{K}_3 = \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_2(x, y') \mathscr{K}_1(y', y) dy'$$

Dále s využitím předchozího tvrzení

$$\big(f, K_3^* g\big) = \big(K_3 f, g\big) = \big(K_2 K_1 f, g\big) = \big(K_1 f, K_2^* g\big)$$

Definice 40 *Iterovaným jádrem $\mathscr{K}_p(x, y)$ nazýváme jádro operátoru K^p a zavádí se takto:*

$$\mathscr{K}_1(x, y) = \mathscr{K}(x, y)$$

$$\mathscr{K}_p(x, y) = \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x, y') \mathscr{K}_{p-1}(y', y) dy' = \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_{p-1}(x, y') \mathscr{K}(y', y) dy'$$

Tvrzení. $\big| \mathscr{K}_p(x, y) \big| \leq M^p V^{p-1}$

Důkaz:

$$\big| \mathscr{K}_1(x, y) \big| \leq M$$

Indukční krok:

$$\big| \mathscr{K}_p(x, y) \big| \leq M \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_{p-1}(y', y) dy' \leq MV.M^{p-1} V^{p-2} = M^p V^{p-1}$$

Q.E.D.

Tvrzení. Řada $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \mathscr{K}_k(x, y)$ konverguje na $\overline{\mathcal{G}} \times \overline{\mathcal{G}} \times (-\frac{1}{MV}, +\frac{1}{MV})$.

Důkaz: $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \mathscr{K}_k(x, y) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k M^k V^{k-1}$ a ta konverguje pro $|\lambda| < \frac{1}{MV}$.

Definice 41 *Resolventou $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$ jádra $\mathscr{K}(x, y)$ nazýváme funkci*

$$\mathscr{R}(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathscr{K}_{k+1}(x, y)$$

Poznámka. Integrální operátor odpovídající resolventě $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$ budeme značit R.

Věta 17 *Řešení rovnice $\varphi = \lambda K \varphi + f$ se spojitým jádrem $\mathscr{K}(x, y)$ existuje a je jednoznačné ve třídě $C(\overline{\mathcal{G}})$ pro $|\lambda| < \frac{1}{MV}$ a pro $\forall f \in C(\overline{\mathcal{G}})$ jej lze vyjádřit ve tvaru*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathcal{G}} \mathscr{R}(x, y; \lambda) f(y) dy$$

Tuto rovnici lze zapsat také jako operátorovou:

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda R, \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}$$

Důkaz: Řešení $\varphi(x)$ je dáno Neumannovou řadou. Můžeme tedy psát:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K^k f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_k(x,y) f(y) dy =$$

$$= f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_k(x,y) f(y) dy = f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_{k+1}(x,y) f(y) dy =$$

$$= f(x) + \int_{\mathcal{G}} \lambda \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathscr{K}_{k+1}(x,y) \Big] f(y) dy = f(x) + \lambda \int_{\mathcal{G}} \mathscr{R}(x,y;\lambda) f(y) dy$$

Q.E.D.

Tvrzení. Uvažujme iterovaná jádra $(\mathscr{K}^*)_p(x,y)$ a resolventu $\mathscr{R}_*(x,y;\lambda)$ hermitovsky sdruženého jádra $\mathscr{K}^*(x,y)$. Platí

$$(\mathscr{K}^*)_p(x,y) = \mathscr{K}_p^*(x,y)$$

$$\mathscr{R}_*(x,y;\lambda) = \overline{\mathscr{R}}(y,x;\overline{\lambda})$$

Důkaz: První tvrzení plyne z toho, že $(K_2 K_1)^* = K_1^* K_2^*$, tedy $(K^p)^* = (K^*)^p$. Dále:

$$\mathscr{R}_*(x,y;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (\mathscr{K}^*)_{k+1}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (\mathscr{K}_{k+1})^*(x,y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \overline{\mathscr{K}_{k+1}}(y,x) = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\lambda^k} \mathscr{K}_{k+1}(y,x)} = \overline{\mathscr{R}}(y,x;\overline{\lambda})$$

Q.E.D.

7.2.3 Volterrovy rovnice

V této části zavedeme následující omezení:

$$n = 1, \ \mathcal{G} = (0,a)$$

$$\mathscr{K}(x,y) = 0 \text{ pro } 0 < x < y < a$$

Pak Fredholmovy rovnice I. a II. druhu nazýváme **Volterrovy rovnice**.

Volterrova rovnice I. druhu:

$$\int_0^x \mathscr{K}(x,y) \varphi(y) \, \mathrm{d}y = f(x)$$

Volterrova rovnice II. druhu:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x)$$

Volterrovu rovnici I. druhu lze převést na Volterrovu rovnici II. druhu, pokud jsou $\mathscr{K}(x,y)$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathscr{K}(x,y)$ spojité na $0 \leq y \leq x \leq a$ a $\mathscr{K}(x,x) \neq 0$, derivací podle x:

$$\mathscr{K}(x,x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial \mathscr{K}(x,y)}{\partial x}\varphi(y)\,\mathrm{d}y = f'(x)$$

Opět definujeme posloupnost $\varphi^{(p)}$:

$$\varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \lambda^k K^k f = \lambda K^{(p-1)} + f$$

Tvrzení. Nechť $\left|\,\mathscr{K}(x,y)\,\right| \leq M$. Potom $\left|\,(K^p f)(x)\,\right| \leq \|\, f\,\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}$

Důkaz:

$$\left|\,(K^0 f)(x)\,\right| \leq \|\, f\,\|_C \frac{(Mx)^0}{1}$$

x

$$\left|\,(K^p f)(x)\,\right| = \left|\,(K(K^{p-1}f))(x)\,\right| = \left|\int_0^x \mathscr{K}(x,y)(K^{p-1}f)(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq$$

$$\leq M\|\, f\,\|_C \int_0^x \frac{M^(p-1)y^(p-1)}{(p-1)!}\,\mathrm{d}y = \|\, f\,\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}$$

Q.E.D.

Důsledek. Neumannova řada má pro Volterrovy rovnice integrabilní majorantu:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K^k f\right| \leq \|\, f\,\|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \frac{(Ma)^k}{k!} = \|\, f\,\|_C e^{|\lambda|Ma}$$

Věta 18 *Volterrova rovnice II. druhu se spojitým jádrem $\mathscr{K}(x,y)$ má jednoznačné řešení φ ve třídě $C([0,a])$ pro každé λ a každé $f \in C([0,a])$. Toto řešení je dáno Neumannovou řadou $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K^k f$.*

Důkaz:

Jednoznačnost:

Protože K je lineární, má rovnice právě jedno řešení právě tehdy, má-li rovnice $\varphi_0 = \lambda K \varphi_0$ pouze nulové řešení.

$$\varphi_0 = \lambda K(\lambda K \varphi_0) = ... = \lambda^p K^p \varphi_0$$

Také platí:

$$\left|\,\varphi_0(x)\,\right| \leq \left|\,\lambda^p K^p \varphi_0(x)\,\right| \leq \left|\,\lambda\,\right|^p \|\, f\,\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}$$

V limitě pro $p \to \infty$ je $\|\,\varphi_0\,\| = 0$ a rovnice $\varphi_0 = \lambda K \varphi_0$ má pouze nulové řešení.
Q.E.D.

7.3 Fredholmovy věty

Budeme se zabývat řešitelností Fredholmových rovnic se spojitým jádrem.

7.3.1 Rovnice s degenerovaným jádrem

Definice 42 *Jádro tvaru*

$$\mathscr{K}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) \quad f_i, g_i \in C(\overline{\mathcal{G}})$$

se nazývá degenerované.

Poznámka. Bez újmy na obecnosti můžeme přepokládat, že funkce f_i, g_i jsou lineárně nezávislé. Kdyby totiž například platilo $f_N = \sum_{i=1}^{N-1} c_i f_i$, tak bychom mohli jádro vyjádřit takto:

$$\mathscr{K}(x,y) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x) g_i(y) + g_N(y) \sum_{i=1}^{N-1} c_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x) \widetilde{g_i}(y)$$

Uvažujme Fredholmovu rovnici s degenerovaným jádrem

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int_{\mathcal{G}} g_i(y) \varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x) \tag{7.1}$$

a sdruženou rovnici

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \overline{g_i}(x) \int_{\mathcal{G}} \overline{f_i}(y) \psi(y)\,\mathrm{d}y + g(x)$$

Přepíšeme rovnici (7.1) takto:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x) + f(x) \tag{7.2}$$

kde

$$c_i = \big(\varphi, \overline{g_i}\big) \tag{7.3}$$

Dosazením (7.2) do (7.3) dostaneme soustavu lineárních rovnic v proměnných c_i:

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i \int_{\mathcal{G}} g_k(x) f_i(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{G}} g_k(x) f(x) \, \mathrm{d}x$$

Zavedením koeficientů $\alpha_{ki} = \big(f_i, \overline{g_k}\big)$ a $a_i = \big(f, \overline{g_k}\big)$ můžeme psát:

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ki} c_i + a_k, \quad k = 1, 2, ..., N$$

Nebo také v maticovém tvaru:

$$\boldsymbol{c} = \lambda \mathbb{A} \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}$$

kde $\mathbb{A} = \big(\alpha_{ki}\big)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_N)$.

Užitím Cramerova pravidla můžeme vypočítat koeficienty c_i (symbolem $D(\lambda)$ označujeme determinant soustavy, tedy $\det(\mathbb{I} - \lambda \mathbb{A})$),

$$c_k = \frac{D_k(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{N} a_i M_{ki} \lambda$$

takže řešení rovnice (7.1) můžeme psát ve tvaru

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^{N} M_{ik} f_i(x) \int_{\mathcal{G}} g_k(y) f(y) \, \mathrm{d}y + f(x)$$

Pro sdruženou rovnici

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \overline{g_i}(x) \int_{\mathcal{G}} \overline{f_i}(y) \psi(y) \, \mathrm{d}y + g(x)$$

můžeme použít zcela analogický postup a tak dostat

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i \overline{g_i(x)} + g(x)$$

$$d_k = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \beta_{ki} d_i + b_k, \quad k = 1, 2, ..., N$$

$$\beta_{ki} = \big(\overline{g_k}, f_i\big) = \overline{\alpha}_{ik}, \quad b_k = \big(g, f_i\big)$$

$$\boldsymbol{d} = \lambda \mathbb{A}^* \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}$$
$$\mathbb{A}^* = \big(\beta_{ki}\big) = \overline{\mathbb{A}}^T,\ \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N),\ \boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \dots, d_N)$$

Použitím vztahů lineární algebry dostáváme

$$D^*(\lambda) = \det(\mathbb{I} - \overline{\lambda}\mathbb{A}^*) = \det(\mathbb{I} - \overline{\lambda \mathbb{A}^T}) =$$
$$= \det(\overline{\mathbb{I} - \lambda \mathbb{A}^T}) = \overline{\det(\mathbb{I} - \lambda \mathbb{A})} = \overline{D(\lambda)}$$

$$\operatorname{rank}(\mathbb{I} - \overline{\lambda}\mathbb{A}^*) = \operatorname{rank}(\overline{\mathbb{I} - \lambda \mathbb{A}^T}) = \operatorname{rank}(\mathbb{I} - \lambda \mathbb{A}) = q$$

Nyní rozlišujeme dva případy:

1. $D(\lambda) \neq 0$, $q = N$
   Rovnice (7.2) i rovnice sdružená mají jednoznačná řešení pro $\forall f, g$.
2. $D(\lambda) = 0$, $q < N$
   Rovnice $\varphi = \lambda K \varphi$ i rovnice sdružená $\psi = \overline{\lambda} K^* \psi$ mají $N - q$ lineárně nezávislých řešení.

Pro $D(\lambda) = 0$ si řešení soustavy $\boldsymbol{c} = \lambda \mathbb{A} \boldsymbol{c}$ a soustavy k ní sdružené $\boldsymbol{d} = \lambda \mathbb{A}^* \boldsymbol{d}$ označíme:

$$c^{(s)} = (c_1^{(s)}, c_2^{(s)}, \dots, c_N^{(s)})$$
$$d^{(s)} = (d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \dots, d_N^{(s)}), \quad s = 1, 2, \dots, N-q$$

Z algebry dále víme, že soustava $\boldsymbol{c} = \lambda \mathbb{A} \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}$ má řešení, právě když $\big(a, d^{(s)}\big) = 0$ pro všechna $s = 1, 2, \dots, N$.

Přejdeme nyní zpět k původním rovnicím $\varphi = \lambda K \varphi$, $\psi = \overline{\lambda} K^* \psi$:

$$\varphi^{(s)} = \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i c_i^{(s)}$$

$$\psi^{(s)} = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \overline{f_i} d_i^{(s)}, \quad s = 1, 2, \dots, N-q$$

Tvrzení. Pokud jsou $c^{(s)}$, resp. $d^{(s)}$ lineárně nezávislé, potom jsou i $\varphi^{(s)}$, resp. $\psi^{(s)}$ lineárně nezávislé.

Důkaz: Uvažujme lineární kombinaci

$$0 = \sum_{i=1}^{N-p} \gamma_s \varphi^{(s)} = \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \sum_{s=1}^{N-p} c_i^{(s)} \gamma_s$$

Protože $f_i(x)$ jsou lineárně nezávisle, musí platit

$$\sum_{s=1}^{N-p} c_i^{(s)} \gamma_s = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N$$

Řešení $c^{(s)}$ jsou ovšem lineárně nezávislá, musí tedy

$$\gamma_s = 0 \quad \forall s = 1, 2, \ldots, N - p$$

Tedy $\varphi^{(s)}$ jsou lineárně nezávislé. **Q.E.D.**

Tvrzení. $\varphi = \lambda K\varphi + f$ má řešení, právě když $\big(f, \psi^{(s)}\big) = 0$ pro všechna $s = 1, 2, \ldots, N$.

Důkaz:

$$\int_{\mathcal{G}} f(x)\overline{\psi^{(s)}}(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \sum_{i=1}^{N} \left[\int_{\mathcal{G}} f(x) g_i(x)\,\mathrm{d}x\right] \overline{d_i^{(s)}} = \lambda \sum_{i=1}^{N} a_i \overline{d_i^{(s)}} = \lambda\big(a_i, \overline{d_i^{(s)}}\big)$$

a platí, že $\boldsymbol{c} = \lambda\mathbb{A}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}$ má řešení, právě když $\big(a, d^{(s)}\big) = 0$ pro všechna $s = 1, 2, \ldots, N$.

Zjištěné skutečnosti nám umožňují vyslovit Fredholmovy věty:

Věta 19 (Fredholmovy věty) *Nechť K je integrální operátor s degenerovaným jádrem $\mathscr{K}(x, y)$. Potom*

1. *Je-li $D(\lambda) \neq 0$, mají rovnice $\varphi = \lambda K\varphi + f$, $\psi = \overline{\lambda} K^*\psi + g$ jednoznačné řešení pro všechna f, g.*
2. *Je-li $D(\lambda) = 0$, mají homogenní rovnice $\varphi = \lambda K\varphi$, $\psi = \overline{\lambda} K^*\psi$ stejný počet lineárně nezávislých řešení rovný $N - q$, kde q je hodnost matice $(\mathbb{I} - \lambda\mathbb{A})$.*
3. *Je-li $D(\lambda) = 0$, rovnice $\varphi = \lambda K\varphi + f$ má řešení právě tehdy, je-li $\big(f, \psi^{(s)}\big) = 0$ pro všechna $s = 1, 2, \ldots, N - q$, kde $\psi^{(s)}$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice $\psi = \overline{\lambda} K^*\psi$.*

7.3.2 Rovnice se spojitým jádrem

Tvrzení. Nechť $\mathscr{K}(x, y)$ je spojité. Potom

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathscr{P}(x, y) = \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \ :\ \big|\mathscr{K}(x, y) - \mathscr{P}(x, y)\big| < \varepsilon$$

Důkaz: $\emptyset$

Můžeme potom psát

$$\mathscr{K}(x, y) = \mathscr{P}(x, y) + \mathscr{Q}(x, y),$$

kde $\mathscr{P}(x,y)$ je degenerované jádro integrálního operátoru P a $\mathscr{Q}(x,y)$ je spojité jádro integrálního operátoru Q.

V dalším se omezíme na $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V}$, abychom mohli využít závěrů oddílu 7.2.2, zvláště pak věty 17. Toto nám však vlastně žádné skutečné omezení nepřináší, protože s ε můžeme jít libovolně blízko k nule.

Zavedeme novou funkci

$$\Phi = \varphi - \lambda Q\varphi$$

Potom můžeme podle věty 17 psát

$$\varphi = (I - \lambda Q)^{-1}\Phi = (I + \lambda R)\Phi,$$

kde R je integrální operátor s jádrem $\mathscr{R}(x,y;\lambda)$, resolventou jádra $\mathscr{Q}(x,y)$.

Přepíšeme rovnici $\varphi = \lambda K\varphi + f$ takto:

$$\varphi = \lambda P\varphi + \lambda Q\varphi + f$$

$$\varphi - \lambda P\varphi = \lambda Q\varphi + f$$

Z předchozích vztahů pro Φ a φ vidíme, že

$$\Phi = \lambda P(I + \lambda R)\Phi + f$$

Označíme-li $T = P(I + \lambda R)$, rovnice přejde v

$$\Phi = \lambda T\Phi + f$$

To je ovšem opět Fredholmova rovnice II. druhu s jádrem

$$\mathscr{T}(x,y) = \mathscr{P}(x,y) + \lambda \int_{\mathcal{G}} \mathscr{P}(x,y')\mathscr{R}(y',y)dy'$$

Toto jádro je ale spojité a také degenerované.

Budeme nyní transformovat sdruženou rovnici $\psi = \overline{\lambda}K^*\psi + g$.

$$K^* = P^* + Q^*$$

$$\psi = \overline{\lambda}K^*\psi + g = \overline{\lambda}P^*\psi + \overline{\lambda}Q^*\psi + g$$

$$(I - \overline{\lambda}Q^*)\psi = \overline{\lambda}K^*\psi + f = \overline{\lambda}P^*\psi + g, \quad (I - \overline{\lambda}Q^*)^{-1} = (I + \overline{\lambda}R^*)$$

$$\psi = \overline{\lambda}(I + \lambda R^*)(\overline{\lambda}P^*\psi + g) = \overline{\lambda}T^*\psi + (I + \lambda R^*)g$$

$$\psi = \overline{\lambda}T^*\psi + \widetilde{g},$$

kde $\widetilde{g} = (I + \lambda R^*)g$.

Nyní můžeme vyslovit sadu tvrzení, které jsou obdobou Fredholmových vět pro rovnice s degenerovaným jádrem, známou pod názvem Fredholmovy alternativy.

Věta 20 (Fredholmovy alternativy) *Nechť K je integrální operátor se spojitým jádrem $\mathscr{K}(x,y)$. Potom*

1. *Pokud má rovnice $\varphi = \lambda K\varphi + f$ řešení pro $\forall f \in C(\overline{\mathcal{G}})$, má také rovnice $\psi = \overline{\lambda} K^* \psi + g$ řešení pro $\forall g \in C(\overline{\mathcal{G}})$ a tato řešení jsou jednoznačná.*

2. *Homogenní rovnice $\varphi = \lambda K\varphi$ a $\psi = \overline{\lambda} K^* \psi$ mají stejný (konečný) počet lineárně nezávislých řešení.*

3. *Rovnice $\varphi = \lambda K\varphi + f$ má řešení právě tehdy, je-li $\big(f, \psi^{(s)}\big) = 0$ pro všechna $s = 1, 2, \ldots, N$, kde $\psi^{(s)}$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice $\psi = \overline{\lambda} K^* \psi$.*

4. *V každém kruhu $|\lambda| \leq R$ je jen konečný počet vlastních hodnot jádra $\mathscr{K}(x, y)$.*

Důkaz:

1. Nechť má rovnice $\varphi = \lambda K\varphi + f$ řešení pro $\forall f \in C(\overline{\mathcal{G}})$. Potom pro $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V}$ můžeme psát
$$\Phi = \varphi - \lambda Q\varphi, \quad \Phi = \lambda T\Phi + f$$
Tato rovnice je také řešitelná pro $\forall f \in C(\overline{\mathcal{G}})$, má tedy $D(\lambda) \neq 0$ a potom
$$\psi = \overline{\lambda} T^* \psi + \widetilde{g}$$
má jednoznačné řešení pro $\forall \widetilde{g} \in C(\overline{\mathcal{G}})$. Díky jednoznačnosti transformací má také rovnice $\psi = \overline{\lambda} K^* \psi + g$ řešení pro $\forall g \in C(\overline{\mathcal{G}})$. **Q.E.D.**

2. Sami.

3. Sami.

4. $\emptyset$

Důsledky Fredholmových alternativ

Uspořádáme charakteristické hodnoty jádra $\mathscr{K}(x, y)$ podle jejich absloutních hodnot (vícenásobné charakteristické hodnoty se v příslušném počtu opakují):

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$$

Odpovídají jim vlastní funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Sdružené jádro má charakteristické hodnoty $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots$ s odpovídajícími vlastními funkcemi $\psi_1, \psi_2, \ldots$.

Tvrzení. $\lambda_k \neq \lambda_i \Rightarrow \big(\varphi_k, \psi_i\big) = 0$

Důkaz: Využijeme toho, že $\psi_i = \overline{\lambda_i} K^* \psi_i$ a $\lambda_k K\varphi_k = \varphi_k$.

$$\big(\varphi_k, \psi_i\big) = \big(\varphi_k, \overline{\lambda}_i K^* \psi_i\big) = \lambda_i \big(K\varphi_k, \psi_i\big) =$$

$$= \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \big(\lambda_k K\varphi_k, \psi_i\big) = \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \big(\varphi_k, \psi_i\big)$$

Tedy pokud $\frac{\lambda_i}{\lambda_k} \neq 1$, potom $\big(\varphi_k, \psi_i\big) = 0$. **Q.E.D.**

Poznámka. Nechť charakteristické hodnoty jádra $\mathscr{K}(x,y)$ jsou $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Potom charakteristické hodnoty jádra $\mathscr{K}_p(x,y)$ jsou $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots$.

Lemma 10 *Nechť μ je charakteristická hodnota jádra $\mathscr{K}_p(x,y)$ s vlastní funkcí φ (tedy $\varphi = \mu K^p \varphi$). Potom aspoň jeden z kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ rovnice $\lambda^p = \mu$ je charakteristickou hodnotou jádra $\mathscr{K}(x,y)$.*

Důkaz:

$$(\mu K^p - I)\varphi = (-1)^{p-1}(\lambda_1 K - I)(\lambda_2 K - I)\ldots(\lambda_p K - I)\varphi = 0$$

Potom buď $\psi = (\lambda_2 K - I)\ldots(\lambda_p K - I)\varphi \neq 0$, tedy $(\lambda_1 K - I)\varphi = 0$ a λ_1 je charakteristickou hodnotou jádra $\mathscr{K}(x,y)$, anebo $\psi = (\lambda_2 K - I)\ldots(\lambda_p K - I)\varphi = 0$. Dále použijeme obdobný postup. **Q.E.D.**

Věta 21 (Fredholmovy alternativy - jiná formulace) *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ jsou charakteristické hodnoty jádra $\mathscr{K}(x,y)$ a $r_1, r_2, \ldots$ jejich násobnosti.*

1. *$\lambda \neq \lambda_k$ Potom rovnice $\varphi = \lambda K\varphi + f$, $\psi = \overline{\lambda} K^*\psi + g$ mají jednoznačné řešení pro všechna f, g.*

2. *$\lambda = \lambda_k$ Potom rovnice $\varphi = \lambda K\varphi + f$ má řešení, právě když $\big(f, \psi_{k+l}\big) = 0$ pro $l = 0, 1, \ldots, r_k - 1$.*

7.3.3 Rovnice s hermitovským spojitým jádrem

Hermitovské jádro je takové, pro které platí

$$\mathscr{K}(x,y) = \mathscr{K}^*(x,y) = \overline{\mathscr{K}(y,x)}$$

Poznámka.

$$\big(Kf, g\big) = \big(f, Kg\big)$$
$$(\mathscr{K}_p)^*(x,y) = (\mathscr{K}^*)_p(x,y) = \mathscr{K}_p(x,y)$$

Lemma 11 *Integrální operátor K se spojitým jádrem $\mathscr{K}(x,y)$ zobrazuje omezenou podmnožinu $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ na omezenou podmnožinu $C(\overline{\mathcal{G}})$, jejíž prvky jsou stejnoměrně spojité funkce.*

Důkaz: $\emptyset$

Lemma 12 (Arzela) *Nechť B je nekonečná omezená podmnožina $C(K)$, kde K je kompaktní a prvky B jsou funkce stejnoměrně spojité na K. Potom lze vybrat z B konvergentní posloupnost.*

Důkaz: $\emptyset$

Věta 22 *Každé hermitovské spojité jádro $\mathscr{K}(x,y) \neq 0$ má aspoň jednu charakteristickou hodnotu. λ_1 s nejmenší absolutní hodnotou splňuje variační princip*

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{f\in\mathscr{L}_2(\mathcal{G})} \frac{\| Kf \|}{\| f \|}$$

Důkaz: Označíme si

$$\nu = \sup_{||f||=1} \| Kf \|.$$

Víme, že $\| Kf \| \leq MV$ a tedy $\nu \leq MV$. Protože $\mathscr{K}(x,y) \neq 0$, platí také $\nu > 0$.

Z definice suprema plyne existence posloupnosti f_k takové, že $\| Kf_k \| \to \nu$ pro $k \to \infty$.

Dále také platí $\forall f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$

$$\| K^2 f \| = \left\| K\Big(\frac{Kf}{\| Kf \|}\Big) \right\| \| Kf \| \leq \nu \| Kf \|$$

Nyní dokážeme, že $K^2 f_k - \nu^2 f_k \to 0$ pro $k \to \infty$.

$$\left\| K^2 f_k - \nu^2 f_k \right\|^2 = \big(K^2 f_k - \nu^2 f_k, K^2 f_k - \nu^2 f_k\big) =$$

$$= \big(K^2 f_k, K^2 f_k\big) + \nu^4\big(f_k, f_k\big) - \nu^2\big(f_k, K^2 f_k\big) - \nu^2\big(K^2 f_k, f_k\big) =$$

$$= \left\| K^2 f_k \right\|^2 + \nu^4 - 2\nu^2 \| Kf_k \|^2 \leq \nu^2 \| Kf_k \|^2 + \nu^4 - 2\nu^2 \| Kf_k \|^2 = \nu^4 - \nu^2 \| Kf_k \|^2 \to 0$$

Podle lemmatu 11 tvoří posloupnost funkcí Kf_k omezenou podmnožinu $C(\overline{\mathcal{G}})$ a Kf_k jsou stejnoměrně spojité. Tedy podle Arzelova lemmatu 12 lze vybrat posloupnost $\psi_i = Kf_{k_i}$ konvergující k $\psi \in C(\overline{\mathcal{G}})$, tedy $\| \psi - \psi_i \|_C \to 0$ a platí:

$$\left\| K^2\psi - \nu^2\psi \right\|_C \leq \left\| K^2(\psi - \psi_i) \right\|_C + \nu^2 \| \psi - \psi_i \|_C + \left\| K^2\psi_i - \nu^2\psi_i \right\|_C \leq$$

$$\leq MV \| K(\psi - \psi_i) \|_C + \nu^2 \| \psi - \psi_i \|_C + \left\| K(K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i}) \right\|_C \leq$$

$$\leq (M^2V^2 + \nu^2) \| \psi - \psi_i \|_C + M\sqrt{V} \left\| K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i} \right\|_C \to 0$$

Tedy

$$K^2\psi = \nu^2\psi$$

Protože $K\psi_i - \nu^2 f_{k_i} \to 0$ a $\| f_k \| = 1$, je $\| K\psi_i \| \to \nu^2$. Dále ovšem $\| K\psi_i \| \to \| K\psi \|$ a tedy $\| K\psi \| = \nu^2 > 0$. Proto $\psi \neq 0$ a $\frac{1}{\nu^2}$ je charakteristickou hodnotou jádra $\mathscr{K}_2(x,y)$ a alespoň jedna z hodnot $\pm\frac{1}{\nu}$ je charakteristickou hodnotou jádra $\mathscr{K}(x,y)$.

Absolutní hodnota $|\lambda_1|$ je tedy rovna $\frac{1}{\nu}$ a splňuje variační princip. Nakonec je třeba dokázat, že λ_1 je charakteristická hodnota s nejmenší absolutní hodnotou.

Tedy nechť λ_0 je charakteristická hodnota a φ_0 odpovídající vlastní funkce. Potom

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})} \frac{\| Kf \|}{\| f \|} \geq \frac{\| K\varphi_0 \|}{\| \varphi_0 \|} = \frac{1}{|\lambda_0|}$$

a tedy $|\lambda_1| \leq |\lambda_0|$.

Q.E.D.

7.4 Hilbert-Schmidtova věta a její důsledky

7.4.1 Hilbert-Schmidtova věta pro hermitovské spojité jádro

Nechť λ_1, λ_2, ... jsou charakteristické hodnoty hermitovského spojitého jádra $\mathscr{K}(x, y) \neq 0$ uspořádané podle jejich absolutní hodnoty, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$ a nechť φ_1, φ_2, ... jsou odpovídající ortonormální vlastní funkce, $\big(\varphi_k, \varphi_l\big) = \delta_{kl}$.

Víme, že charakteristické hodnoty λ_k jsou reálné a vlastní funkce φ_k jsou spojité na $\overline{\mathcal{G}}$; množina $\{\lambda_k\}$ je buď konečná nebo spočetná (v tom případě $|\lambda_k| \to \infty$ pro $k \to \infty$).

Zavedeme posloupnost hermitovských spojitých jader

$$\mathscr{K}^{(p)}(x, y) = \mathscr{K}(x, y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Odpovídající hermitovské integrální operátory mají tvar

$$K^{(p)} f = Kf - \sum_{i=1}^{p} \frac{\big(f, \varphi_i\big)}{\lambda_i} \varphi_i, \quad f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$$

Tvrzení. $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots$ a $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \ldots$ jsou všechny charakteristické hodnoty a funkce jádra $\mathscr{K}^{(p)}(x, y)$.

Pro $k \geq p + 1$ platí

$$K^{(p)} \varphi_k = K\varphi_k - \sum_{i=1}^{p} \frac{\big(\varphi_k, \varphi_i\big)}{\lambda_i} \varphi_i = K\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k$$

tedy λ_k a φ_k jsou pro $k \leq p + 1$ charakteristické hodnoty a funkce jádra $\mathscr{K}^{(p)}(x, y)$. Dále nechť λ_0 je charakteristická hodnota a φ_0 odpovídající vlastní funkce jádra $\mathscr{K}^{(p)}(x, y)$:

$$\varphi_0 = \lambda_0 K^{(p)} \varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{\big(\varphi_0, \varphi_i\big)}{\lambda_i} \varphi_i \tag{7.4}$$

Odkud pro $k = 1, 2, \ldots, p$ dostáváme

$$\big(\varphi_0, \varphi_k\big) = \lambda_0 \big(K\varphi_0, \varphi_k\big) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{\big(\varphi_0, \varphi_i\big)\big(\varphi_i, \varphi_k\big)}{\lambda_i} =$$

$$= \lambda_0\big(\varphi_0, K\varphi_k\big) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{\big(\varphi_0, \varphi_i\big)}{\lambda_i}\delta_{ik} =$$

$$= \frac{\lambda_0}{\lambda_k}\big(\varphi_0, \varphi_k\big) - \frac{\lambda_0}{\lambda_k}\big(\varphi_0, \varphi_k\big) = 0$$

Tedy z (7.4) dostaneme $\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0$, tj. λ_0 je charakteristická hodnota a φ_0 odpovídající vlastní funkce jádra $\mathscr{K}(x, y)$.

Protože φ_0 je ortogonální ke všem vlastním funkcím $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, je zřejmé, že je rovno jedné z charakteristických hodnot λ_{p+1}, λ_{p+2}, …a tedy $\varphi_0 = \varphi_k$ pro nějaké $k \le p + 1$.
Q.E.D.

Tedy λ_{p+1} je charakteristická hodnota jádra $\mathscr{K}^{(p)}(x, y)$ s nejmenší absolutní hodnotou. Podle věty 22 aplikované na toto jádro platí

$$\left\| K^{(p)} f \right\| = \left\| Kf - \sum_{i=1}^{p} \frac{\big(f, \varphi_i\big)}{\lambda_i}\varphi_i \right\| \le \frac{\| f \|}{|\lambda_{p+1}|}, \quad f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$$

Nechť má hermitovské spojité jádro $\mathscr{K}(x, y)$ konečný počet charakteristických hodnot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Jak bylo dokázáno, $\mathscr{K}^{(N)}(x, y)$ nemá žádné vlastní hodnoty, tedy podle věty 22 je $\mathscr{K}^{(N)}(x, y) = 0$, což ovšem znamená, že

$$\mathscr{K}(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i} \tag{7.5}$$

neboli jádro $\mathscr{K}(x, y)$ je degenerované.

Důsledek. Hermitovské spojité jádro je degenerované, právě když má konečný počet charakteristických hodnot.

Poznámka. Říkáme, že funkce $f(x)$ je vyjádřitelná pomocí jádra $\mathscr{K}(x, y)$, jestli že existuje funkce $h \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ taková, že

$$f(x) = \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x, y)h(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathcal{G}$$

Věta 23 (Hilbert-Schmidtova) *Je-li funkce $f(x)$ vyjádřitelná pomocí hermitovského spojitého jádra $\mathscr{K}(x, y)$, konverguje její Fourierův rozvoj do vlastních funkcí jádra $\mathscr{K}(x, y)$ regulárně (tj. absolutně a stejnoměrně) na $\overline{\mathcal{G}}$ k funkci*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(f, \varphi_k\big)\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(h, \varphi_k\big)}{\lambda_k}\varphi_k(x)$$

Důkaz: Protože $f = Kh$, podle lemmatu je $f \in C(\overline{\mathcal{G}})$ a platí, že

$$\big(f, \varphi_k\big) = \big(Kh, \varphi_k\big) = \big(h, K\varphi_k\big) = \frac{\big(h, \varphi_k\big)}{\lambda_k}$$

Má-li $\mathscr{K}(x,y)$ konečný počet charakteristických hodnot, pak podle (7.5) je

$$f(x) = Kh = \sum_{k=1}^{N} \frac{\big(h,\varphi_k\big)}{\lambda_k}\varphi_k(x)$$

a věta je dokázána.

Nyní nechť má $\mathscr{K}(x,y)$ charakteristických hodnot nekonečný počet. Potom $|\lambda_k| \to \infty$ pro $k \to \infty$. Platí:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{p} \big(f,\varphi_k\big)\varphi_k \right\| = \left\| Kh - \sum_{k=1}^{p} \frac{\big(h,\varphi_k\big)}{\lambda_k}\varphi_k(x) \right\| \le \frac{\| h \|}{|\lambda_{p+1}|} \to 0, \quad p \to \infty$$

Potřebujeme ještě dokázat regulární konvergenci. Použitím Cauchyho-Buňakovského nerovnosti dostaneme:

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{q} \left| \big(h,\varphi_k\big) \right| \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| &\le \left[\sum_{k=p}^{q} \left| \big(h,\varphi_k\big) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=p}^{q} \frac{\left| \varphi_k(x) \right|^2}{\lambda_k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le \left[\sum_{k=p}^{q} \left| \big(h,\varphi_k\big) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathcal{G}} \left| \mathscr{K}(x,y) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le M\sqrt{V} \left[\sum_{k=p}^{q} \left| \big(h,\varphi_k\big) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \overline{\mathcal{G}} \end{aligned} \tag{7.6}$$

Podle Besselovy nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \big(h,\varphi_k\big) \right|^2 \le \| h \|^2$$

konverguje pravá strana nerovnosti (7.6) k 0 pro $p \to \infty$, $q \to \infty$, tedy Fourierova řada konverguje regulárně.
Q.E.D.

7.4.2 Bilineární rozvoj iterovaného jádra

Tvrzení. Iterované jádro $\mathscr{K}_p(x,y)$ hermitovského spojitého jádra $\mathscr{K}(x,y)$ lze rozvinout do řady

$$\mathscr{K}_p(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k}(y)}{\lambda_k^p}, \quad p = 2,3,\dots \tag{7.7}$$

a tato řada konverguje regulárně na $\overline{\mathcal{G}} \times \overline{\mathcal{G}}$.

Důkaz: Protože $\mathscr{K}_p(x,y) = \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x,y')\mathscr{K}_{p-1}(y',y)\,\mathrm{d}y'$, je jádro $\mathscr{K}_p(x,y)$ vyjádřitelné pomocí jádra $\mathscr{K}(x,y)$ a lze na něj aplikovat Hilbert-Schmidtovu větu:

$$\mathscr{K}_p(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mathscr{K}_p(x,y),\varphi_k\big)\varphi_k(x)$$

a tato řada konverguje regulárně na $\overline{\mathcal{G}}$. Vypočteme $\big(\mathscr{K}_p(x,y),\varphi_k\big)$:

$$\big(\mathscr{K}_p(x,y),\varphi_k\big)=\int_{\mathcal{G}}\mathscr{K}_p(x,y)\overline{\varphi_k}(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathcal{G}}\overline{\mathscr{K}_p}(y,x)\overline{\varphi_k}(x)\,\mathrm{d}x=$$

$$=(\overline{K^p\varphi_k})(y)=\frac{\overline{\varphi_k}(y)}{\lambda_k^p},\quad p\geq 1$$

Spojením těchto výrazů dostáváme tvrzení věty.
Q.E.D.

Důsledek. Pro $x=y$ a $p=2$ dostáváme:

$$\mathscr{K}_2(x,x)=\int_{\mathcal{G}}\mathscr{K}(x,y')\mathscr{K}(y',x)\,\mathrm{d}y'=\int_{\mathcal{G}}\mathscr{K}(x,y')\overline{\mathscr{K}}(x,y')=\int_{\mathcal{G}}\big|\,\mathscr{K}(x,y)\,\big|^2\,\mathrm{d}y$$

$$\mathscr{K}_2(x,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k}(x)}{\lambda_k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\big|\,\varphi_k(x)\,\big|^2}{\lambda_k^2}$$

$$\Rightarrow\quad\int_{\mathcal{G}}\big|\,\mathscr{K}(x,y)\,\big|^2\,\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}\tag{7.8}$$

Integrací rovnice (7.8) podle x dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}=\int_{\mathcal{G}}\int_{\mathcal{G}}\big|\,\mathscr{K}(x,y)\,\big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

7.4.3 Bilineární rozvoj hermitovského spojitého jádra

Budeme zkoumat konvergenci řady (7.7) pro $p=1$, tedy dokazovat toto tvrzení:

Tvrzení. Hermitovské spojité jádro $\mathscr{K}(x,y)$ lze rozvinout do řady

$$\mathscr{K}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k}(y)}{\lambda_k}$$

a tato řada je regulárně konvergentní v y v $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ ve smyslu normy, tj.

$$\left\|\,\mathscr{K}(x,y)-\sum_{k=1}^{p}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k}(y)}{\lambda_k}\,\right\|\to 0,\quad p\to\infty$$

Důkaz: Z důkazu předchozího tvrzení dostáváme, že $\big(\mathscr{K}(x,y),\varphi_k\big)=\frac{\overline{\varphi_k}(y)}{\lambda_k}$.
Potom platí:

$$\left\|\,\mathscr{K}(x,y)-\sum_{k=1}^{p}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k}(y)}{\lambda_k}\,\right\|^2=\int_{\mathcal{G}}\big|\,\mathscr{K}(x,y)\,\big|^2\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{p}\frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k^2},\quad y\in\overline{\mathcal{G}}$$

Z toho ovšem díky regulární konvergenci řady (7.7) plyne konvergence zkoumaného výrazu.
Q.E.D.

Tvrzení. Nechť K je hermitovský spojitý operátor, $f, g \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$.

$$\big(Kf, g\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(f, \varphi_k\big)\overline{\big(g, \varphi_k\big)}}{\lambda_k}$$

Důkaz: Podle Hilbert-Schmidtovy věty

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(f, \varphi_k\big)}{\lambda_k} \varphi_k(x)$$

a tato řada regulárně konverguje na $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$. Vynásobme tento výraz funkcí $\overline{g}$ a integrujme ho:

$$\big(Kf, g\big) = \int_{\mathcal{G}} Kf\overline{g}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(f, \varphi_k\big)}{\lambda_k} \int_{\mathcal{G}} \varphi_k(x)\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(f, \varphi_k\big)\overline{\big(g, \varphi_k\big)}}{\lambda_k}$$

Q.E.D.

Důsledek. Položme $f = g$:

$$\big(Kf, f\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\big(f, \varphi_k\big)|^2}{\lambda_k}, \quad f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$$

7.4.4 Řešení nehomogenní integrální rovnice s hermitovským spojitým jádrem

Chceme řešit rovnici

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \tag{7.9}$$

s hermitovským spojitým jádrem $\mathscr{K}(x, y)$.

Věta 24 *Nechť $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$ a $f \in C(\overline{\mathcal{G}})$. Potom (jednoznačné) řešení lze vyjádřit řadou regulárně konvergentní na $\overline{\mathcal{G}}$:*

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(f, \varphi_k\big)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + f(x)$$

Důkaz: Podle Hilbert-Schmidtovy věty můžeme funkci $K\varphi$ vyjádřit pomocí regulárně konvergentní řady, tedy

$$\varphi = \lambda K\varphi + f = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(\varphi, \varphi_k\big)}{\lambda_k} \varphi_k + f$$

Vypočtěme Fourierovy koeficienty $\big(\varphi, \varphi_k\big)$:

$$\big(\varphi, \varphi_k\big) = \lambda\big(K\varphi, \varphi_k\big) + \big(f, \varphi_k\big) = \lambda\big(\varphi, K\varphi_k\big) + \big(f, \varphi_k\big) = \frac{\lambda}{\lambda_k}\big(\varphi, \varphi_k\big) + \big(f, \varphi_k\big)$$

Tedy

$$\big(\varphi, \varphi_k\big) = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda}\big(f, \varphi_k\big), \quad k = 1, 2, \dots$$

a odtud již přímo plyne tvrzení věty.
Q.E.D.

Poznámka. Pokud $\lambda = \lambda_k$, odpovídá na otázku řešitelnosti rovnice (7.9) III. Fredholmova věta (věta 20).

Tvrzení. Resolventu $\mathscr{R}(x, y; \lambda)$ hermitovského spojitého jádra $\mathscr{K}(x, y)$ lze vyjádřit

$$\mathscr{R}(x, y; \lambda) = \mathscr{K}(x, y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k}(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k}(y)}{\lambda_k - \lambda}$$

Důkaz: Podle Hilbert-Schmidtovy věty

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(f, \varphi_k\big)}{\lambda_k}\varphi_k(x)$$

Dále

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(f, \varphi_k\big)}{\lambda_k}\varphi_k(x) + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(f, \varphi_k\big)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}\varphi_k(x) + f(x) =$$

$$= \lambda \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(f, \varphi_k\big)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}\varphi_k(x) + f(x)$$

konečně

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\mathcal{G}} \left[\mathscr{K}(x, y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k}(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}\right] f(y)\,\mathrm{d}y + f(x)$$

Užitím věty 17 dostáváme dokazované tvrzení.
Q.E.D.

7.4.5 Pozitivní jádra

Definice 43 *Hermitovské spojité jádro $\mathscr{K}(x, y)$ je pozitivní, právě když $\big(Kf, f\big) \geq 0$ pro $\forall f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$.*

Tvrzení. Pozitivní jádro $\mathscr{K}(x, y)$ má kladné charakteristické hodnoty.

Důkaz: Nechť λ_0 je charakteristická hodnota jádra $\mathscr{K}(x, y)$. Potom

$$\lambda_0 K\varphi_0 = \varphi_0$$

$$\lambda_0 \underbrace{\big(K\varphi_0, \varphi_0\big)}_{\geq 0} = \underbrace{\big(\varphi_0, \varphi_0\big)}_{\geq 0}$$

Q.E.D.

Věta 25 *Všechny charakteristické hodnoty λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ pozitivního jádra $\mathscr{K}(x, y)$ splňují variační princip*

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup \frac{\big(Kf, f\big)}{\| f \|^2}, f \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G}),\ \big(f, \varphi_i\big) = 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, k-1$$

Důkaz:
Nejprve si ukažme:

$$\frac{\big(Kf, f\big)}{\| f \|^2} = \frac{1}{\| f \|^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\big| \big(f, \varphi_i\big) \big|^2}{\lambda_i} =$$

$$= \frac{1}{\| f \|^2} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\big| \big(f, \varphi_i\big) \big|^2}{\lambda_i} \leq \frac{1}{\| f \|^2} \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=k}^{\infty} \big| \big(f, \varphi_i\big) \big|^2 \stackrel{Bessel}{\leq} \frac{1}{\lambda_k}$$

Dále položíme $f = \varphi_k$ a dostaneme

$$\frac{\big(K\varphi_k, \varphi_k\big)}{\| \varphi_k \|^2} = \frac{1}{\lambda_k}$$

Q.E.D.

7.4.6 Symetrická jádra

Definice 44 *Jádro $\mathscr{K}(x, y)$ nazýváme symetrické, je-li reálné a platí $\mathscr{K}(x, y) = \mathscr{K}(y, x)$.*

Lemma 13 *Vlastní funkce symetrického jádra $\mathscr{K}(x, y)$ lze vybrat reálné.*

Důkaz: Nechť $\varphi_0 = \varphi_1 + i\varphi_2$ je vlastní funkce jádra $\mathscr{K}(x, y)$ odpovídající charakteristické hodnotě λ_0,tedy

$$\varphi_0 = \varphi_1 + i\varphi_2 = \lambda_0 K\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_1 + i\lambda_0 K\varphi_2$$

Potom protože $\mathscr{K}(x, y)$ a také (protože $\mathscr{K}(x, y)$ je hermitovské) λ_0 jsou reálné, pak také (reálné) funkce φ_1, φ_2 jsou vlastními funkcemi jádra $\mathscr{K}(x, y)$ odpovídající charakteristické hodnotě λ_0. **Q.E.D.**

Definice 45 *Jádro $\mathscr{K}(x, y)$ nazýváme kladného typu, je-li symetrické a platí $\mathscr{K}(x, y) > 0$.*

Věta 26 (Jentschova) *Nechť jádro $\mathscr{K}(x,y)$ je kladného typu. Potom jeho charakteristická hodnota λ_1 (s nejmenší absolutní hodnotou) je kladná a nedegenerovaná a navíc odpovídající vlastní funkce φ_1 je kladná.*

Důkaz: Platí, že λ_1^2 je nejmenší charakteristická hodnota pozitivního jádra $\mathscr{K}_2(x,y)$ a φ_1 je odpovídající vlastní funkce, tedy $\varphi_1 = \lambda_1^2 K^2 \varphi_1$.
Chceme dokázat, že $\varphi_1(x)$ nemění na $\mathcal{G}$ znaménko, tedy že

$$\big|\, \varphi_1(x)\varphi_1(y)\,\big| = \varphi_1(x)\varphi_1(y)$$

pro $\forall x, y \in \mathcal{G}$. Důkaz provedeme sporem. Pokud někde znaménko mění, existují okolí $U(x', r)$ a $U(y', \varrho)$ taková, že

$$\big|\, \varphi_1(x)\,\big|\big|\, \varphi_1(y) > \varphi_1(x)\varphi_1(y)\,\big|, \quad x \in U(x', r), y \in U(y', \varrho)$$

Potom platí (protože $\mathscr{K}_2(x,y) > 0$)

$$\frac{\big(K^2|\varphi_1|, |\varphi_1|\big)}{\|\,|\varphi_1|\,\|^2} = \frac{1}{\|\,|\varphi_1|\,\|^2}\int_{\mathcal{G}}\int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_2(x,y)\big|\, \varphi_1(x)\,\big|\big|\, \varphi(y)\,\big|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y >$$

$$> \frac{1}{\|\,|\varphi_1|\,\|^2}\int_{\mathcal{G}}\int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_2(x,y)\varphi_1(x)\varphi(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{\big(K^2\varphi_1, \varphi_1\big)}{\|\,|\varphi_1|\,\|^2} = \frac{1}{\lambda_1^2}$$

což je ve sporu s variačním principem z věty .

Dokážeme, že vlastní funkce φ_1 je kladná. Kdyby nebyla, existoval by bod $x' \in \mathcal{G}$ tak, že

$$\varphi_1(x') = \lambda_1^2 \int_{\mathcal{G}} \mathscr{K}_2(x', y)\varphi_1(y)\, \mathrm{d}y = 0$$

odkud z toho, že $\mathscr{K}_2(x,y)$ plyne spor: $\varphi_1(y) \equiv 0$. Z kladnosti φ_1 a z $\mathscr{K}(x,y) > 0$ plyne $\lambda_1 > 0$, protože $\lambda_1 = K\varphi_1/\varphi_1$.

Konečně dokážeme, že λ_1 je nedegenerovaná. Kdyby existovala reálná vlastní funkce φ_2 lineárně nezávislá s φ_1 a odpovídající λ_1, lineární kombinace $\varphi_2 + c\varphi_2$ by také byla reálnou vlastní funkcí odpovídající λ_1 pro $\forall c \in \mathbb{R}$ a musela by (z předchozí části důkazu) být nenulová na $\mathcal{G}$, což je spor s libovolností c.
Q.E.D.

Kapitola 8

Eliptické rovnice

8.1 Problém vlastních hodnot

8.1.1 Úvod

Nechť $\mathcal{G}$ je omezená oblast, S je hranice $\mathcal{G}$.

Budeme uvažovat eliptickou rovnici

$$-\operatorname{div}(p\ \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u \tag{8.1}$$

s okrajovými podmínkami

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = 0 \tag{8.2}$$

za těchto podmínek:

$p \in C^1(\overline{\mathcal{G}}), p(x) > 0, x \in \mathcal{G}$

$q \in C(\overline{\mathcal{G}}), q(x) \geq 0, x \in \mathcal{G}$

$\alpha \in C(S), \beta \in C(S)$

$\alpha(x) \geq 0, \beta(x) \geq 0, \alpha(x)+\beta(x) > 0, x \in S$

Nechť S_0 je ta část S, kde zároveň $\alpha(x) > 0$ i $\beta(x) > 0$.

Hledáme řešení u rovnice (8.1) s okrajovými podmínkami (8.1.3) v třídě $C^2\mathcal{G} \cap C^1(\overline{\mathcal{G}})$.

Tento problém je vlastně hledání vlastních čísel a funkcí operátoru

$$L = -\operatorname{div}(p\ \operatorname{grad}) + q$$

Všechny funkce $f(x)$ třídy $C^2\mathcal{G} \cap C^1(\overline{\mathcal{G}})$ splňující okrajové podmínky (8.1.3) a podmínku $Lf \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ tvoří definiční obor $\mathscr{M}_L$ operátoru L.

8.1.2 Greenovy formule

Věta 27 (1. Greenova formule) *Pro* $u \in C^2(\mathcal{G}) \cap C^1(\overline{\mathcal{G}})$, $v \in C^1(\overline{\mathcal{G}})$ *platí*

$$\int_{\mathcal{G}} v\, Lu \,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{G}} p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x - \int_S pv \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{G}} quv \,\mathrm{d}x$$

Důkaz:

$$\int_{\mathcal{G}} v\, Lu \,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{G}} v[-\operatorname{div}(p \ \operatorname{grad} u) + qu] \,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{\mathcal{G}} \operatorname{div}(pv \ \operatorname{grad} u) \,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{G}} p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{G}} quv \,\mathrm{d}x$$

Z Gaussovy věty dostaneme

$$\int_{\mathcal{G}} v\, Lu \,\mathrm{d}x = -\int_S pv \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{G}} p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{G}} quv \,\mathrm{d}x$$

Q.E.D.

Věta 28 (2. Greenova formule) *Pro* $u, v \in C^2(\mathcal{G}) \cap C^1(\overline{\mathcal{G}})$ *platí*

$$\int_{\mathcal{G}} (v\, Lu - u\, Lv) \,\mathrm{d}x = \int_S p(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) \,\mathrm{d}S$$

Důkaz: Plyne přímo z 1. Greenovy formule dosazením za oba členy na levé straně.
Q.E.D.

8.1.3 Vlastnosti operátoru L

Věta 29 *Operátor* L *je hermitovský, tedy*

$$\big(Lf, g\big) = \big(f, Lg\big), \quad f, g \in \mathscr{M}_L$$

Důkaz: Protože $f, \in \mathscr{M}_L$, platí $Lf \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ a platí také $L\overline{g} = \overline{Lg}$. Pro $u = f$ a $v = \overline{g}$ má 2. Greenova formule tvar

$$\int_{\mathcal{G}} (\overline{g} Lf - f \overline{Lg}) \,\mathrm{d}x = \big(Lf, g\big) - \big(f, Lg\big) = \int_S (f \frac{\partial \overline{g}}{\partial n} - \overline{g} \frac{\partial f}{\partial n}) \,\mathrm{d}S$$

Dále f a $\overline{g}$ splňují okrajové podmínky (8.1.3):

$$\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial n}\Big|_S = 0, \qquad \alpha \overline{g} + \beta \frac{\partial \overline{g}}{\partial n}\Big|_S = 0$$

Tyto okrajové podmínky tvoří soustavu lineárních rovnic pro α, β a protože $\alpha+\beta>0$ na S, má tato stoustava nenulové řešení (α,β) a proto je determinant soustavy nulový.

$$\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \overline{g} & \frac{\partial \overline{g}}{\partial n} \end{vmatrix}_S = f\frac{\partial \overline{g}}{\partial n}\bigg|_S - \overline{g}\frac{\partial f}{\partial n}\bigg|_S = 0$$

Dosazením tohoto vztahu do získaného tvaru 2. Greenovy formule dostáváme tvrzení věty. **Q.E.D.**

Tvrzení. Operátor L je pozitivní, tedy

$$\big(Lf,f\big)\geq 0, \quad f\in\mathscr{M}_L$$

Důkaz: Z 1. Greenovy formule platí

$$\big(Lf,f\big)=\int_{\mathcal{G}} p|\operatorname{grad} f|^2\,\mathrm{d}x - \int_S p\overline{f}\frac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{G}} q|f|^2\,\mathrm{d}x$$

Z okrajových podmínek () plyne:
$\frac{\partial f}{\partial n}=-\frac{\alpha}{\beta}f$ když $\beta(x)>0$, $x\in S$
$f=0$ když $\beta(x)=0$, $x\in S$
Odtud dostaneme

$$\big(Lf,f\big)=\int_{\mathcal{G}}(p|\operatorname{grad} f|^2+q|f|^2)\,\mathrm{d}x+\int_{S_0} p\frac{\alpha}{\beta}|f|^2\,\mathrm{d}S \tag{8.3}$$

Vypuštěním druhého a třetího členu pravé strany získáme

$$\big(Lf,f\big)\geq\int_{\mathcal{G}} p|\operatorname{grad} f|^2\,\mathrm{d}x\geq \min_{x\in\overline{\mathcal{G}}} p(x)\int_{\mathcal{G}}|\operatorname{grad} f|^2\,\mathrm{d}x$$

$$\big(Lf,f\big)\geq p_0\|\,|\operatorname{grad} f|\,\|^2 \tag{8.4}$$

Protože $p(x)$ je spojitá a kladná na $\overline{\mathcal{G}}$, je $p_0>0$. Tedy $\big(Lf,f\big)\geq 0$.
Q.E.D.

Důsledek.

- vlastní hodnoty operátoru L jsou nezáporné
- vlastní funkce operátoru L odpovídající různým vlastním hodnotám jsou ortogonální
- vlastní funkce operátoru L mohou být vybrány kladné

Důkaz: Plyne rovnou z reálnosti a hermitovskosti operátoru L.

Lemma 14 *$\lambda=0$ je vlastní hodnotou operátoru L právě tehdy, když $q=0$ a $\alpha=0$. Potom $\lambda=0$ je nedegenerovaná a odpovídající vlastní funkce je $u_0=$ konst.*

Důkaz:
$\Rightarrow$: Nechť $\lambda = 0$ je vlastní hodnotou operátoru L a u_0 odpovídající vlastní funkce, tedy $Lu_0 = 0$, $u_0 \in \mathscr{M}_L$. Použitím vztahu (8.3) dostaneme:

$$0 = \big(Lu_0, u_0\big) \int_{\mathcal{G}} (p|\operatorname{grad} u_0|^2 + q|u_0|^2)\,\mathrm{d}x + \int_{S_0} p\frac{\alpha}{\beta}|u_0|^2\,\mathrm{d}S$$

Odkud z podmínek pro rovnici dostaneme

$$p\ \operatorname{grad} u_0 = 0, \qquad qu_0 = 0$$

tedy $u_0 = konst. \neq 0$ a $q = 0$.
$\Leftarrow$: Pokud $q = 0$ a $\alpha = 0$, je z podmínek pro rovnici $\beta > 0$ a rovnice dostává tvar

$$-\operatorname{div}(p\ \operatorname{grad} u) = \lambda u, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = 0$$

a je vidět, že $u_0 = konst.$ je vlastní funkcí odpovídající vlastní hodnotě $\lambda = 0$.
Q.E.D.

Věta 30 *Množina vlastních hodnot operátoru L je spočetná, každá vlastní hodnota má konečnou násobnost a množina nemá konečné hromadné body. Každou funkci $f \in \mathscr{M}_L$ lze rozvinout do regulárně konvergentní Fourierovy řady ve vlastních funkcích u_k operátoru L:*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \big(f, u_k\big) u_k$$

Důkaz: Pro $n = 1$ se jedná o Sturm-Liouvilleův problém, důkaz viz dále.

Důsledek. Z neexistence konečných hromadných bodů plyne rovnou diskrétnost množiny vlastních hodnot.

Poznámka.

$$\big(Lf, f\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(f, \lambda_k u_k\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\big(f, u_k\big)}\big(Lf, u_k\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \big|\,\big(f, u_k\big)\,\big|^2$$

Tvrzení. Platí variační princip

$$\lambda_k = \inf_f \frac{\big(Lf, f\big)}{\|\,f\,\|^2}, \quad f \in \mathscr{M}_L, \big(f, u_i\big) = 0, i = 1, \ldots, k-1$$

Důkaz:

$$\big(Lf, f\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \big|\,\big(f, u_i\big)\,\big|^2 = \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i \big|\,\big(f, u_i\big)\,\big|^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^{\infty} \big|\,\big(f, u_i\big)\,\big|^2 =$$

$$= \lambda_k \sum_{i=1}^{\infty} \big|\,\big(f, u_i\big)\,\big|^2 = \lambda_k \|\,f\,\|^2$$

a pro $f = u_0$ nastává rovnost. **Q.E.D.**

Tvrzení. Platí

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(f, u_k\big) \operatorname{grad} u_k(x)$$

a tato řada konverguje ve smyslu normy v $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$.

Důkaz: Zavedeme funkce

$$\eta_p = f - \sum_{i=1}^{p} \big(f, u_i\big) u_i, \quad p = 1, 2, \ldots$$

pro které platí

$$\big(\eta_p, u_k\big) = \big(f - \sum_{i=1}^{p} \big(f, u_i\big) u_i, u_k\big) = \begin{cases} 0 & k = 1, 2, \ldots, p \\ \big(f, u_k\big) & k = p+1, \ldots \end{cases}$$

a aplikujeme na ně vztah z předchozí poznámky:

$$\big(L\eta_p, \eta_p\big) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda_k \big| \big(f, u_k\big) \big|^2$$

Odtud plyne

$$\big(L\eta_p, \eta_p\big) \to 0, \quad p \to \infty$$

Použitím nerovnosti (8.4) pro funkce η_p pro $p \to \infty$ dostaneme

$$\big\| \, | \operatorname{grad} \eta_p | \, \big\|^2 = \left\| \, \left| \operatorname{grad} f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \big(f, u_k\big) \operatorname{grad} u_k(x) \right| \, \right\|^2 \leq \frac{1}{p_0} \big(L\eta_p, \eta_p\big) \to 0$$

Q.E.D.

8.2 Sturm-Liouvilleův problém

8.2.1 Úvod

Rovnice (8.1) s okrajovými podmínkami (8.1.3) se pro $n = 1$ nazývá Storm-Liouvilleův problém. Má tento tvar:

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = \lambda u, \qquad 0 < x < l \tag{8.5}$$

s okrajovými podmínkami

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0 \tag{8.6}$$

$$H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0 \tag{8.7}$$

Podmínky pro rovnici jsou:

$$p \in C^1(\langle 0, l\rangle), q \in C(\langle 0, l\rangle), p(x) > 0, q(x) \geq 0,$$

$$h_1 \geq 0, h_2 \geq 0, H_1 \geq 0, H_2 \geq 0, h_1 + h_2 > 0, H_1 + H_2 > 0$$

Definiční obor operátoru L je

$$\mathscr{M}_L = C^2(0,l) \cap C^1(\langle 0,l \rangle)$$

8.2.2 Greenova funkce

Předpokládejme, že $\lambda = 0$ není vlastní hodnota operátoru L, to podle lemmatu 14 znamená, že $q \neq 0$ nebo $h_1 \neq 0$ nebo $H_1 \neq 0$.

Uvažujme rovnici

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f(x), \qquad u \in \mathscr{M}_L \tag{8.8}$$

s příslušnými okrajovými podmínkami (8.6) a (8.7), kde $f \in C(0,l) \cup \mathscr{L}_2(0,l)$. Protože $\lambda = 0$ není vlastní hodnota operátoru L, je řešení této rovnice jednoznačné. To budeme nyní hledat.

Vezměmě dvě nenulová reálná řešení v_1, v_2 homogenní rovnice $Lv = 0$ s okrajovými podmínkami

$$h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0, \quad H_1 v_2(l) + H_2 v_2'(l) = 0 \tag{8.9}$$

Tato řešení jsou lineárně nezávislá; kdyby nebyla, platilo by $v_1(x) = cv_2(x)$ a z podmínek (8.9) by plynulo, že v_1 splňuje okrajové podmínky (8.6) a (8.7) a tedy $\lambda = 0$ je vlastní hodnota operátoru L, což je spor s předpoklady.

Z lineární nezávislosti v_1, v_2 plyne, že Wronskián

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad x \in < 0, l >$$

a dále platí

$$p(x)W(x) = p(0)W(0), \quad x \in < 0, l >$$

Budeme hledat řešení nehomogenní rovnice (8.8) metodou variace konstant:

$$u(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x)$$

Dojdeme k soustavě

$$C_1' v_1 + C_2' v_2 = 0 \tag{8.10}$$

$$C_1' v_1' + C_2' v_2' = -\frac{f}{p} \tag{8.11}$$

Tuto soustavu budeme řešit Cramerovým pravidlem a dostaneme

$$C_1' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ -\frac{f}{p} & v_2' \end{vmatrix} = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)W(0)}$$

$$C_2' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & -\frac{f}{p} \end{vmatrix} = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)W(0)}$$

Nyní je potřeba splnit okrajové podmínky (8.6) a (8.7):

$$
\begin{gathered}
0 = h_1 u(0) - h_2 u'(0) = h_1[C_1(0)v_1(0) + C_2(0)v_2(0)] - \\
-h_2[C_1'(0)v_1(0) + C_1(0)v_1'(0) + C_2'(0)v_2(0) + C_2(0)v_2'(0)] = \\
C_1(0)[h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0)] + C_2(0)[h_1 v_2(0) - h_2 v_2'(0)]
\end{gathered}
$$

$\Rightarrow C_2(0) = 0$

$$
\begin{gathered}
0 = H_1 u(l) - h_2 u'(l) = H_1[C_1(l)v_1(l) + C_2(l)v_2(l)] - \\
-H_2[C_1'(l)v_1(l) + C_1(l)v_1'(l) + C_2'(l)v_2(l) + C_2(l)v_2'(l)] = \\
C_1(l)[H_1 v_1(l) - H_2 v_1'(l)] + C_2(l)[H_1 v_2(l) - H_2 v_2'(l)]
\end{gathered}
$$

$\Rightarrow C_1(l) = 0$

(použili jsme (8.10), (8.9))

Integrací C_1, C_2 s podmínkami $C_1(l) = C_2(0) = 0$ dostaneme

$$
C_1(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \int_x^l f(y)v_2(y)\,\mathrm{d}y
$$

$$
C_2(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \int_0^x f(y)v_1(y)\,\mathrm{d}y
$$

a konečně

$$
u(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \left[v_2(x) \int_0^x f(y)v_1(y)\,\mathrm{d}y + v_1(x) \int_x^l f(y)v_2(y)\,\mathrm{d}y \right]
$$

což lze zapsat jako

$$
u(x) = \int_0^l \mathscr{G}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y
$$

kde

$$
\mathscr{G}(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \begin{cases} v_1(x)v_2(y) & 0 \le x \le y \le l \\ v_2(x)v_1(y) & 0 \le y \le x \le l \end{cases}
$$

je Greenova funkce operátoru L.

Můžeme tedy vyslovit následující lemma:

Lemma 15 *Jestliže $\lambda = 0$ není vlastní hodnota operátoru L, řešení rovnice (8.8) s okrajovými podmínkami (8.6) a (8.7) je jednoznačné a je dáno vztahem $u(x) = \int_0^l \mathscr{G}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$, kde $\mathscr{G}$ je Greenova funkce operátoru L.*

Greenova funkce $\mathscr{G}$ má z definice následující vlastnosti ($\Pi =< 0, l > \times < 0, l >$):

1. $\mathscr{G}$ je reálná a spojitá na Π

2. $\mathscr{G}$ je symetrická na Π, tj. $\mathscr{G}(x,y) = \mathscr{G}(y,x)$ na Π

3. na diagonále $x = y$ má derivace $\mathscr{G}_x$ skok $-1/p(y)$, tj.

$$\frac{\partial \mathscr{G}(y+0,y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathscr{G}(y-0,y)}{\partial x} = -\frac{1}{p(y)}$$

4. mimo diagonálu $x = y$ splňuje $\mathscr{G}$ na Π homogenní rovnici

$$L_x \mathscr{G}(x,y) = 0, \quad x \neq y$$

5. na hranici Π splňuje $\mathscr{G}$ okrajové podmínky

$$h_1 \mathscr{G}(0,y) - h_2 \frac{\partial \mathscr{G}(0,y)}{\partial x} = H_1 \mathscr{G}(l,y) + H_2 \frac{\partial \mathscr{G}(l,y)}{\partial x} = 0$$

6. platí

$$L_x \mathscr{G}(x,y) = \delta(x-y), \quad (x,y) \in \Pi$$

Příklad. Vypočtěme Greenovu funkci pro rovnici

$$-u'' = f(x)$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(1) = 0$$

Homogenní rovnice je

$$-u'' = 0$$

a okrajové podmínky pro v_1, v_2 jsou

$$v_1(0) = 0, \qquad v_2(1) = 0$$

Můžeme tedy zvolit například

$$v_1(x) = x, \qquad v_2(x) = 1 - x$$

Greenova funkce je

$$\mathscr{G}(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \begin{cases} v_1(x)v_2(y) & 0 \leq x \leq y \leq l \\ v_2(x)v_1(y) & 0 \leq y \leq x \leq l \end{cases}$$

V řešené rovnici je $p \equiv 1$,

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} = x.(-1) - (1-x).1 = -x - 1 + x = -1$$

Dostaneme tedy

$$\mathscr{G}(x) = \begin{cases} x(1-y) & 0 \leq x \leq y \leq l \\ (1-x)y & 0 \leq y \leq x \leq l \end{cases}$$

8.2.3 Převedení Sturm-Liouvilleova problému na integrální rovnici

Věta 31 *Okrajová úloha*

$$Lu = \lambda u + f, \quad u \in \mathscr{M}_L, \quad f \in C(0,l) \cap \mathscr{L}_2(0,l) \tag{8.12}$$

je ekvivalentní integrální rovnici

$$u(x) = \lambda \int_0^l \mathscr{G}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^l \mathscr{G}(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad u \in C(\langle 0,l\rangle) \tag{8.13}$$

kde $\mathscr{G}(x,y)$ *je Greenova funkce operátoru* L *za předpokladu, že* $\lambda = 0$ *není vlastní hodnota operátoru* L.

Důkaz:
$\Rightarrow$: Nechť $u(x)$ řeší okrajovou úlohu (8.12). Potom z lemmatu 15, kam dosadíme $\lambda u + f$ místo f, dostaneme

$$u(x) = \int_0^l \mathscr{G}(x,y)[\lambda u(y) + f(y)]\,\mathrm{d}y$$

tedy $u(x)$ splňuje integrální rovnici (8.13).
$\Leftarrow$: Nechť funkce u_0 splňuje rovnici (8.13). Uvažujme okrajovou úlohu

$$Lu = \lambda u_0 + f, \quad u \in \mathscr{M}_L$$

Podle lemmatu 15 je jediné řešení této rovnice dáno vzorcem

$$u(x) = \int_0^l \mathscr{G}(x,y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,\mathrm{d}y = u_0(x)$$

Tedy $u_0 \in \mathscr{M}_L$ a splňuje rovnici

$$Lu_0 = \lambda u_0 + f$$

tedy je řešením okrajové úlohy (8.12).
Q.E.D.

Pokud $f = 0$, je okrajová úloha (8.12) Sturm-Liouvilleův problém a tedy Sturm-Liouvilleův problém je ekvivalentní homogenní integrální rovnici

$$u(x) = \lambda \int_0^l \mathscr{G}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

za předpokladu, že $\lambda = 0$ není vlastní hodnota operátoru L.

Odstraníme nyná omezení, že $\lambda = 0$ není vlastní hodnota operátoru L. Podle lemmatu 14 není $\mu = 0$ vlastní hodnota rovnice

$$L_1 u \equiv -(pu')' + (q+1)u = \mu u$$

a tato rovnice je ekvivalentní okrajové úloze (8.12) a $\mu = \lambda + 1$. Konečně dostáváme tvrzení:

Tvrzení. Sturm-Liouvilleův problém je ekvivalentní integrální rovnici

$$u(x) = (\lambda + 1) \int_0^l \mathscr{G}_1(x, y) u(y)\,\mathrm{d}y$$

kde $\mathscr{G}_1(x, y)$ je Greenova funkce operátoru L_1.

Sturm-Liouvilleův problém má (jako každá okrajová úloha) tyto vlastnosti:

Množina vlastních hodnotčísel operátoru L je neprázdná. Množina vlastních hodnot operátoru L je nejvýše spočetná a nemá žádné konečné hromadné body. Vlastní hodnoty operátoru L jsou reálné a mají konečnou násobnost.

Tvrzení. Vlastní hodnoty operátoru L jsou nedegenerované.

Důkaz: Nechť X_1, X_2 jsou vlastní funkce odpovídající vlastní hodnotě λ_0. Tedy tyto funkce splňují rovnici (8.5) a okrajové podmínky (8.6), (8.7) pro $\lambda = \lambda_0$. Z první okrajové podmínky plyne

$$h_1 X_1(0) - h_2 X_1'(0) = 0, \qquad h_1 X_2(0) - h_2 X_2'(0) = 0$$

Protože $h_1 + h_2 > 0$, má soustava netriviální řešení a její determinant je nula:

$$\begin{vmatrix} X_1(0) & -X_1'(0) \\ X_2(0) & -X_2'(0) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X_1(0) & X_1'(0) \\ X_2(0) & X_2'(0) \end{vmatrix} = 0$$

tedy Wronskián řešení X_1, X_2 je v bodě 0 nulový a tedy tato řešení jsou lineárně závislá.
Q.E.D.

Věta 32 (Steklov) *Každou funkci $f \in \mathscr{M}_L$ lze vyjádřit jako regulárně koncergentní Fourierovu řadu ve vlastních funkcích X_k Sturm-Liouvilleova problému*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(f, X_k\big) X_k$$

Důkaz: Protože $f \in \mathscr{M}_L$, můžeme psát

$$L_1 f = Lf + f = h \in C(0, l) \cap \mathscr{L}_2(0, l)$$

Ale protože $\mathscr{M}_{L1} = \mathscr{M}_L$, je také $f \in \mathscr{M}_{L1}$. Potom f je řešením okrajové úlohy $L_1 f = h, \quad f \in \mathscr{M}_{L1}$ a $\lambda = 0$ není vlastní hodnotou operátoru L. Můžeme psát

$$f(x) = \int_0^l \mathscr{G}_1(x, y) h(y)\,\mathrm{d}y$$

a tedy f je vyjádřitelné pomocí hermitovského spojitého jádra $\mathscr{G}_1(x, y)$. Aplikací Hilbert-Schmidtovy věty (věta 23) dostáváme tvrzení věty.
Q.E.D.

8.2.4 Postup hledání vlastních hodnot a funkcí Sturm-Liouvilleova problému

Nechť u_1, u_2 jsou řešení rovnice (8.5) a splňující počáteční podmínky

$$u_1(0;\lambda) = 1, \qquad u_1'(0;\lambda) = 0$$

$$u_2(0;\lambda) = 0, \qquad u_2'(0;\lambda) = 1$$

Potom funkce

$$u(x;\lambda) = h_2 u_1(x;\lambda) + h_1 u_2(x;\lambda)$$

splňuje rovnici (8.5) a první okrajovou podmínku (8.6).

Aby byla splněna i druhá okrajová podmínka (8.7), musí platit

$$H_1 h_2 u_1(l;\lambda) + H_1 h_1 u_2(l;\lambda) + H_2 h_2 u_1'(l;\lambda) + H_2 h_1 u_2'(l;\lambda) = 0$$

Kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ této (složité) rovnice jsou všechny vlastní hodnoty Sturm-Liouvilleova problému. Odpovídající vlastní funkce jsou

$$X_k(x) = u(x;\lambda_k) = h_2 u_1(x;\lambda_k) + h_1 u_2(x;\lambda_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

8.3 Fourierova metoda - separace proměnných

Uvažujme oblast $\Omega = (x_1, \dots, x_n) \times (y_1, \dots, y_m) = \mathcal{G} \times D$. Označme $S = \partial\mathcal{G}$ a $\Gamma = \partial D$.
Potom $\partial\Omega = (S \times \overline{D}) \cup (\overline{\mathcal{G}} \times \Gamma)$.

Dále uvažujme operátor L závisející pouze na $x_1, \dots, x_n$ a operátor M závisející pouze na $y_1, \dots, y_m$.

V oblasti Ω uvažujme následující eliptickou rovnici:

$$Lu + Mu = \lambda u$$

s okrajovými podmínkami

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S \times \overline{D}} = 0, \gamma u + \delta \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\overline{\mathcal{G}} \times \Gamma} = 0$$

kde α, β závisí pouze na $x_1, \dots, x_n$ a γ, δ závisí pouze na $y_1, \dots, y_m$.

Vlastní funkce této rovnice budeme hledat ve tvaru

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Dosazením do rovnice dostaneme

$$Y(y)LX(x) + X(x)MY(y) = \lambda X(x)Y(y)$$

a platí

$$\frac{LX(x)}{X(x)} = \lambda - \frac{MY(y)}{Y(y)}$$

Levá strana nezávisí na y a pravá na x, ale jsou si rovny, tedy obě strany jsou nezávislé na x a y a rovné stejné konstantě μ. Položíme-li $\nu = \lambda - \mu$ dostaneme

$$LX = \mu X$$

$$MY = \nu Y$$

a problém jsme tedy separovali.

Příklad. Mějme rovnici

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u$$

s okrajovou podmínkou

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

na oblasti $\Omega = (0, l) \times (0, m)$.

Separací proměnných podle uvedeného postupu dostaneme

$$-X'' = \mu X, \qquad X(0) = X(l) = 0$$

$$-Y'' = \nu Y, \qquad Y(0) = Y(m) = 0$$

Řešením těchto rovnic (bylo provedeno již mnohokrát v různých fyzikálních předmětech) dostaneme

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$\nu_j = \left(\frac{j\pi}{m}\right)^2, \quad Y_j = \sqrt{\frac{2}{m}} \sin \frac{j\pi x}{m}$$

a návratem k původní úloze máme

$$\lambda_{kj} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}\right), \quad u_{kj}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{lm}} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m}$$

Kapitola 9

Smíšené úlohy

9.1 Fourierova metoda

9.1.1 Úvod

Nechť operátor L je definován takto:

$$Lu = -\operatorname{div}(p\ \operatorname{grad} u) + qu$$

a okrajová podmnka je

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = 0$$

kde na funkce $p(x)$, $q(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ jsou kladeny požadavky z odstavce 8.1.1.

Budeme předpokládat, že všechna vlastní hodnoty λ_k operátoru L jsou kladné, tedy $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ a odpovídající vlastní funkce

$$LX_k = \lambda_k \varrho X_k$$

jsou reálné a jsou prvky prostoru $\mathscr{L}_2(\mathcal{G}; \varrho)$ se skalárním součinem $\big(f, g\big)_\varrho = \int f \varrho \overline{g}$ s váhovou funkcí $\varrho(x) > 0$, $x \in \overline{\mathcal{G}}$, $\varrho \in C(\overline{\mathcal{G}})$.

9.1.2 Homogenní hyperbolické rovnice

Homogenní hyperbolickou rovnicí označujeme problém

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu \tag{9.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x) \tag{9.2}$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = 0, \quad t \geq 0 \tag{9.3}$$

Budeme hledat řešení rovnice (9.1) splňující okrajovou podmínku (9.3) a sestavíme jejich lineární kombinaci tak, že

Řešení budeme hledat ve tvaru

$$u(x,t) = T(t)X(x)$$

Dosazením do rovnice 9.1 a úpravami získáme

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{LX(x)}{\varrho(x)X(x)}$$

Levá strana nezávisí na x a pravá na t, tedy obě strany jsou rovny téže konstantě $-\lambda$. Problém lze tedy separovat do těchto rovnic:

$$T'' + \lambda T = 0$$

$$LX = \lambda \varrho X$$

První z těchto rovnic má obecné řešení pro $\lambda = \lambda_k > 0$ ve tvaru

$$T_k(t) = a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}t$$

kde a_k a b_k jsou libovolné konstanty. Sestrojili jsme tedy lineárně nezávislý soubor řešení rovnice (9.1)

$$T_k(t)X_k(x) = (a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}t)X_k(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

splňující okrajovou podmínku (9.3).

Sestrojíme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}t)X_k(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

a zvolíme konstanty a_k a b_k tak, aby tato řada splňovala počáteční podmínky (9.2):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x) = u_0(x), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} b_k X_k(x) = u_1(x)$$

tedy z ortonormality systému $\{X_k\}$ v $\mathscr{L}_2(\mathcal{G}; \varrho)$ máme

$$a_k = \big(u_0, X_k\big)_\varrho = \int_{\mathcal{G}} \varrho u_0 X_k \,\mathrm{d}x, \qquad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\big(u_1, X_k\big)_\varrho$$

Konečně jsme pro řešení $u(x,t)$ smíšeného problému (9.1)-(9.3) dostali formální vyjádření ve vlastních funkcích X_k operátoru L:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}t)X_k(x)$$

9.1.3 Nehomogenní hyperbolické rovnice

Budeme se nyní zabývat nehomogenní hyperbolickou rovnicí

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu + F(x,t) \tag{9.4}$$

se stejnými okrajovými a počátečními podmínkami (9.2), (9.3) jako u homogenní rovnice.

Pro každé $t > 0$ vyjádříme řešení $u(x,t)$ tohoto problému Fourierovou řadou ve vlastních funkcích X_k operátoru L:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \quad T_k(t) = \big(u, X_k\big)_\varrho$$

Neznámé funkce T_k musí tedy splňovat počáteční podmínky

$$T_k(0) = \int_{\mathcal{G}} \varrho(x) u(x,0) X_k(x) \,\mathrm{d}x = \big(u_0, X_k\big)_\varrho = a_k \tag{9.5}$$

$$T_k'(0) = \int_{\mathcal{G}} \varrho(x) \big(u(x,0), t\big) X_k(x) \,\mathrm{d}x = \big(u_1, X_k\big)_\varrho = \sqrt{\lambda_k} a_k \tag{9.6}$$

Zkonstruujeme diferenciální rovnici pro T_k. Skalárním vynásobením rovnice (9.4) funkcí X_k a úpravami dostaneme

$$\int_{\mathcal{G}} \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} X_k \,\mathrm{d}x = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\mathcal{G}} \varrho u X_k \,\mathrm{d}x = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \big(u, X_k\big)_\varrho =$$

$$= -\big(Lu, X_k\big) + \big(F, X_k\big) = -\big(u, LX_k\big) + \big(F, X + k\big) = -\lambda_k \big(u, X_k\big)_\varrho + \big(F, X_k\big)$$

tedy funkce T_k spoňují následující rovnici

$$T_k'' + \lambda_k T_k = c_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

kde

$$c_k(t) = \big(F, X_k\big) = \int_{\mathcal{G}} F(x,t) X_k(x) \,\mathrm{d}x$$

a řešením této rovnice s počátečními podmínkami (9.5), (9.6) dostaneme

$$T_k(t) = a_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t c_k(\tau) \sin\sqrt{\lambda_k}(t - \tau) \,\mathrm{d}\tau$$

Dosazením dostaneme tvar řešení $u(x,t)$ celého problému:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t c_k(\tau) \sin\sqrt{\lambda_k}(t - \tau) \,\mathrm{d}\tau \right] X_k(x)$$

9.1.4 Parabolické rovnice

Uvažujme smíšený problém s parabolickou rovnicí:

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + F(x,t) \tag{9.7}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{9.8}$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = 0, \quad t \geq 0 \tag{9.9}$$

Pro jeho řešení opět použijeme Fourierovu metodu. Řešení $u(x,t)$ budeme hledat ve tvaru řady

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \quad T_k(t) = \big(u, X_k\big)_\varrho$$

Pro funkce T_k obdržíme rovnici

$$T_k' + \lambda_k T = c_k(t), \qquad T_k(0) = a_k, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Kde

$$c_k(t) = \big(F, X_k\big) = \int_{\mathcal{G}} F(x,t) X_k(x) \,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \int_{\mathcal{G}} \varrho(x) u(x,0) X_k(x) \,\mathrm{d}x = \big(u_0, X_k\big)_\varrho$$

Tuto rovnici vyřešíme metodou variace konstant a dostaneme

$$T_k(t) = a_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t c_k(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)} \,\mathrm{d}\tau$$

Potom formální řešení problému (9.7)-(9.9) je

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t c_k(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)} \,\mathrm{d}\tau \right] X_k(x)$$

Příklad. Schrödingerova rovnice.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi + V(x)\psi$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x)$$

$$\alpha \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial n}\bigg|_S = 0, \quad t \geq 0$$

Rovnice pro T_k je

$$i\hbar T_k' - \lambda_k T_k = 0, \qquad T_k(0) = a_k = \big(\psi_0, X_k\big)$$

a tedy

$$T_k(t) = a_k e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda_k t} X_k(x)$$

Řešením Schrödingerovy rovnice je tedy

$$\psi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda_k t} X_k(x)$$

kde X_k jsou vlastní funkce operátoru L pro $p = \frac{\hbar^2}{2m}$, $q = V$ a $\varrho \equiv 1$.

9.1.5 Eliptické rovnice

Nakonec uvažujme smíšený problém s parabolickou rovnicí:

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + F(x,t) \tag{9.10}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{t=l} = u_l(x) \tag{9.11}$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = 0, \quad 0 \le t \le l \tag{9.12}$$

Pro jeho řešení opět použijeme Fourierovu metodu. Řešení $u(x,t)$ budeme hledat ve tvaru řady

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \quad T_k(t) = \big(u, X_k\big)_\varrho$$

Pro funkce T_k obdržíme rovnici

$$T_k' - \lambda_k T = c_k(t), \qquad k = 1, 2, \dots \tag{9.13}$$

kde

$$c_k(t) = \big(F, X_k\big) = \int_{\mathcal{G}} F(x,t) X_k(x)\,\mathrm{d}x$$

s okrajovými podmínkami

$$T_k(0) = \big(u_0, X_k\big)_\varrho = a_k, \qquad T_k(l) = \big(u_l, X_k\big)_\varrho = b_k$$

Funkce

$$v_k(t) = T_k(t) - a_k \frac{\sinh\sqrt{\lambda_k}(l-t)}{\sinh\sqrt{\lambda_k}l} - b_k \frac{\sinh\sqrt{\lambda_k}t}{\sinh\sqrt{\lambda_k}l}$$

splňuje rovnici (9.13) a okrajové podmínky $v_k(0) = v_k(l) = 0$.

Ale hledání této funkce je řešení Sturm-Liouvilleova problému a můžeme tedy psát

$$v_k(t) = -\int_0^l \mathscr{G}_k(t,\tau) c_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

kde $\mathscr{G}_k$ je Greenova funkce pro problém $-v'' + \lambda_k v = -c_k(t)$, $v(0) = v(l) = 0$,

$$\mathscr{G})k(x) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}\sinh\sqrt{\lambda_k}l}\begin{cases}\sinh\sqrt{\lambda_k}t\sinh\sqrt{\lambda_k}(l-\tau) & 0 \le t \le \tau \le l\\ \sinh\sqrt{\lambda_k}(l-t)\sinh\sqrt{\lambda_k}\tau & 0 \le \tau \le t \le l\end{cases}$$

Nakonec tedy

$$T_k(t) = a_k\frac{\sinh\sqrt{\lambda_k}(l-t)}{\sinh\sqrt{\lambda_k}l} + b_k\frac{\sinh\sqrt{\lambda_k}t}{\sinh\sqrt{\lambda_k}l} - \int_0^l \mathscr{G}_k(t,\tau)c_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

a obecné řešení můžeme psát

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\frac{\sinh\sqrt{\lambda_k}(l-t)}{\sinh\sqrt{\lambda_k}l} + b_k\frac{\sinh\sqrt{\lambda_k}t}{\sinh\sqrt{\lambda_k}l} - \int_0^l \mathscr{G}_k(t,\tau)c_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]X_k(x)$$

9.2 Smíšená úloha pro hyperbolickou rovnici

9.2.1 Úvod

$$\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p\operatorname{grad} u) - qu + F(x,t) = -Lu + F(x,t) \tag{9.14}$$

$$(x,t) \in \Pi_\infty = \mathcal{G} \times (0,\infty)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x),\ x \in \mathcal{G} \tag{9.15}$$

$$\left.\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0, \quad t \ge 0 \tag{9.16}$$

kde p, q, α, β splňují podmínky odstavce 8.1.1.

9.2.2 Klasické řešení a integrál energie

Funkce $u(x,t)$ splňující rovnici (9.14) s počáteční podmínkou (9.15) a okrajovou podmínkou (9.16) se nazývá klasickým řešením smíšeného problému (9.14)-(9.16).

Podmínky

$$F \in C(\Pi_\infty), \quad u_0 \in C^1(\overline{\mathcal{G}}), \quad u_1 \in C(\overline{\mathcal{G}})$$

jsou nutné pro existenci klasického řešení.

Při studiu řešení tohoto smíšeného problému je výhodné použít integrálu energie.

Nechť $u(x,t)$ je klasické řešení. Potom veličina

$$J^2(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{G}}\left[\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p|\operatorname{grad} u|^2 + qu^2\right]\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{S_0} p\frac{\alpha}{\beta}u^2\,\mathrm{d}S$$

se nazývá integrál energie.

Lemma 16 *Nechť $u(x,t)$ je klasické řešení smíšeného problému (9.14)-(9.16) a $F \in C(\overline{\Pi_\infty})$. Potom*

$$J^2(t) = J^2(0) + \int_0^t \int_{\mathcal{G}} F(x,\tau) \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} \, \mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0$$

Důkaz: Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$ a $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ s hranicí S'. Vynásobíme rovnici (9.14) derivací $\frac{\partial u}{\partial t}$ a integrujeme přes $\mathcal{G}' \times (\varepsilon, T)$:

$$\int_{\mathcal{G}' \times (\varepsilon,T)} F \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_{\mathcal{G}' \times (\varepsilon,T)} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\mathcal{G}'} \varrho \int_\varepsilon^T \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x + \int_\varepsilon^T \frac{\partial u}{\partial t} Lu \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

Dále s použitím Greenovy formule

$$\int_{\mathcal{G}' \times (\varepsilon,T)} F \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}'} \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \Big|_\varepsilon^T \mathrm{d}x + \int_\varepsilon^T \left[\int_{\mathcal{G}'} p \big(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \frac{\partial u}{\partial t} \big) \, \mathrm{d}x - \int_{S'} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}S' + \int_{\mathcal{G}'} qu \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}'} \left[\varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p |\operatorname{grad} u|^2 + qu^2 \right] \Big|_\varepsilon^T \mathrm{d}x - \int_\varepsilon^T \int_{S'} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}S' \, \mathrm{d}t$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ a $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ dostaneme (u a F jsou spojité):

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} \left[\varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p |\operatorname{grad} u|^2 + qu^2 \right] \Big|_0^T \mathrm{d}x - \int_0^T \int_S p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}t = \int_{\Pi_T} F \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

Z okrajové podmínky (9.16) plyne že $\frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u / \beta$ na S když $\beta > 0$; pokud $b = 0$, je $u = 0$. Tedy

$$- \int_0^T \int_S p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}t = \int_0^T \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}T = \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u^2 \Big|_0^T \mathrm{d}S$$

a to společně s předchozím vztahem, pokud zaměníme T za t, dává tvrzení věty.
Q.E.D.

Důsledek. Pro $F = 0$ dostáváme

$$J^2(t) = J^2(0)$$

Poznámka. Tento důsledek je de facto zákonem zachování energie kmitající soustavy v nepřítomnosti vnější síly.

9.2.3 Jednoznačnost a spojitá závislost klasického řešení

Pokud derivujeme tvrzení předchozího lemmatu podle t, dostaneme

$$2J(t)J'(t) = \int_{\mathcal{G}} F(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x, \qquad t \geq 0$$

Použitím Cauchy-Buňakovského nerovnosti na pravou stranu dojdeme k nerovnosti

$$2JJ' \leq \|\, F \,\| \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \tag{9.17}$$

Dá se ukázat, že platí

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq \sqrt{\frac{2}{\varrho_0}} J(t) \tag{9.18}$$

$$\|\, |\operatorname{grad} u| \,\| \leq \sqrt{\frac{2}{p_0}} J(t) \tag{9.19}$$

kde $\varrho_0 \leq \varrho(x)$, $p_0 = \min p(x)$.

Dosazením (9.18) do (9.17) získáme

$$J'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\varrho_0}} \|\, F \,\|, \qquad t \geq 0$$

Integrací vyjde

$$J(t) \leq J(0) + \frac{1}{\sqrt{2\varrho_0}} \int_0^t \|\, F \,\|\,\mathrm{d}\tau$$

Z toho po použití (9.18), resp. (9.19) plynou odhady

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq \sqrt{\frac{2}{\varrho_0}} J(0) + \frac{1}{\varrho_0} \int_0^t \|\, F \,\|\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \geq 0 \tag{9.20}$$

$$\|\, |\operatorname{grad} u| \,\| \leq \sqrt{\frac{2}{p_0}} J(0) + \frac{1}{p_0 \varrho_0} \int_0^t \|\, F \,\|\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \geq 0 \tag{9.21}$$

Odhadneme nyní $\|\, u \,\|$. Derivováním

$$\|\, u \,\|^2 = \int_{\mathcal{G}} u^2(x,t)\,\mathrm{d}x$$

vzhledem k proměnné t a použitím Cauchy-Buňakovského nerovnosti a odhadu (9.20) dostaneme

$$2\|\, u \,\|\|\, u \,\|' = 2\int_{\mathcal{G}} u \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}x \leq 2\|\, u \,\| \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq 2\|\, u \,\| \left[\sqrt{\frac{2}{\varrho_0}} J(0) + \frac{1}{\varrho_0} \int_0^t \|\, F \,\|\,\mathrm{d}\tau \right]$$

neboli

$$\|\, u \,\|' \leq \sqrt{\frac{2}{\varrho_0}} J(0) + \frac{1}{\varrho_0} \int_0^t \|\, F \,\|\,\mathrm{d}\tau$$

a integrací

$$\| u \| \le \| u \|_0 + \sqrt{\frac{2}{\varrho_0}} J(0) t + \frac{1}{\varrho_0} \int_0^t \int_0^{t'} \| F \| \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}t'$$

kde $\| u \|_0$ je hodnota $\| u \|$ pro $t = 0$, tedy

$$\| u \|_0^2 = \int_{\mathcal{G}} u^2(x,0) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{G}} u_0^2(x) \, \mathrm{d}x = \| u_0 \|^2$$

Záměnou pořadí integrace nakonec dostaneme

$$\| u \| \le \| u \|_0 + \sqrt{\frac{2}{\varrho_0}} J(0) t + \frac{1}{\varrho_0} \int_0^t (t-\tau) \| F \| \, \mathrm{d}\tau, \qquad t \ge 0 \tag{9.22}$$

Věta 33 *Klasické řešení smíšeného problému (9.14)-(9.16) je jednoznačné a spojitě závisí na u_0, u_1 a F takto: Pokud $F \in C(\overline{\Pi_T})$, $\widetilde{F} \in C(\overline{\Pi_T})$ a*

$$\left\| F - \widetilde{F} \right\| \le \varepsilon, \quad 0 \le t \le T; \qquad \| u_0 - \widetilde{u_0} \|_C \le \varepsilon_0$$

$$\| \, | \operatorname{grad} u_0 - \operatorname{grad} \widetilde{u_0} | \, \| \le \varepsilon_0', \qquad \| u_1 - \widetilde{u_1} \|_C \le \varepsilon_1$$

potom odpovídající (klasická) řešení $u(x,t)$ a $\widetilde{u}(x,t)$ splňují pro $0 \le t \le T$ následující nerovnosti:

$$\| u - \widetilde{u} \| \le C \left(\varepsilon_0 + T\varepsilon_0 + T\varepsilon_0' + T\varepsilon_1 + \frac{T^2}{2} \varepsilon \right)$$

$$\| \, | \operatorname{grad}_x u - \operatorname{grad}_x \widetilde{u} | \, \| \le C \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_0' + \varepsilon_1 + T\varepsilon \right)$$

$$\| u_1 - \widetilde{u_1} \| \le C \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_0' + \varepsilon_1 + T\varepsilon \right)$$

kde C nezávisí na u_0, u_1, F, t, T.

Důkaz: Abychom dokázali jednoznačnost, stačí ukázat, že jediným řešením homogenního (tedy $u_0 = u_1 =$ a $F = 0$) smíšeného problému (9.14)-(9.16) je nulové řešení. To ovšem plyne přímo z odhadu (9.22).

Pro důkaz další části věty budeme zkoumat $\eta = u - \widetilde{u}$. Funkce η je klasickým řešením s $F - \widetilde{F}$, $u_0 - \widetilde{u_0}$ a $u_1 - \widetilde{u_1}$ namísto F, u_0 a u_1. Z předpokladů odhadneme integrál energie pro η:

$$2\widetilde{J^2}(0) = \int_{\mathcal{G}} [\varrho (u_1 - \widetilde{u_1})^2 + p | \operatorname{grad} u_0 - \operatorname{grad} \widetilde{u_0} |^2 + q (u_0 - \widetilde{u_0})^2] \, \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} (u_0 - \widetilde{u_0})^2 \, \mathrm{d}S \le$$

$$\le V \max_{x \in \overline{\mathcal{G}}} \varrho(x) \varepsilon_1^2 + V \max_{x \in \overline{\mathcal{G}}} p(x) (\varepsilon_0')^2 + [V \max_{x \in \overline{\mathcal{G}}} q(x) + \sigma V \max_{x \in \overline{S_0}} p \frac{\alpha}{\beta}(x)] \varepsilon_0^2 \le$$

$$\le C_1^2 (\varepsilon_0 + \varepsilon_0' + \varepsilon_1)^2$$

kde V je míra $\mathcal{G}$, σ míra S_0 a C_1 dostatečně velká konstanta. Získali jsme tedy odhad

$$\sqrt{2}\widetilde{J}(0) \leq C_1(\varepsilon_0 + \varepsilon_0' + \varepsilon_1)$$

Použitím odhadu (9.22) pro řešení η, předpokladů věty a posledně získaného odhadu dostáváme pro $0 \leq t \leq T$:

$$\|\eta\| \leq \sqrt{V}\| u_0 - \widetilde{u_0}\|_C + \frac{1}{\sqrt{\varrho_0}} C_1(\varepsilon_0 + \varepsilon_0' + \varepsilon_1)t + \frac{\varepsilon}{\varrho_0}\int_0^t (t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \leq$$

$$\leq \varepsilon_0\sqrt{V} + \frac{T}{\varrho_0}C_1(\varepsilon_0 + \varepsilon_0' + \varepsilon_1) + \frac{\varepsilon}{2\varrho_0}T^2 \leq$$

$$\leq C\left(\varepsilon_0 + T\varepsilon_0 + T\varepsilon_0' + T\varepsilon_1 + \frac{T^2}{2}\varepsilon\right)$$

Další nerovnosti se dokáží analogicky.

Q.E.D.

9.2.4 Funkce spojité na $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$

Definice 46 *Nechť $\forall\ t \in < a, b >$ funkce $u(x,t) \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$. Potom funkce $u(x,t)$ je spojitá na $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ v proměnné t na $< a, b >$, jestliže*

$$u(x,t') \to u(x,t) \text{ pro } t' \to t$$

pro $\forall\ t \in < a, b >$.

Norma $\| u \|$ je také spojitá, plyne to z nerovnosti

$$|\| u(x,t') \| - \| u(x,t) \|| \leq \| u(x,t') - u(x,t) \|$$

plynoucí z trojúhelníkové nerovnosti.

Spojitost $\big(u, F\big)$ plyne z Cauchy-Buňakovského nerovnosti

$$|\big(u(x,t'), f\big) - \big(u(x,t), F\big)| \leq \| u(x,t') - u(x,t) \| \| F \|$$

Definice 47 *Posloupnost funkcí $u_k(x,t)$ konverguje k funkci $u(x,t)$ v $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ stejnoměrně v t na $< a, b >$, jestliže*

$$\| u_k(x,t) - u(x,t) \| \overset{t\in<a,b>}{\rightrightarrows} 0, \quad k \to \infty$$

Lemma 17 *Jestliže posloupnost funkcí $u_k(x,t)$ spojitých na $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ v t na $< a, b >$ konverguje k funkci v $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ stejnoměrně v t na $< a, b >$, je $u(x,t)$ spojitá na $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ v t na $< a, b >$.*

To, že $u \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G} \times <a, b>)$ plyne z omezenosti $<a, b>$, spojitosti (a tedy na uzavřeném intervalu omezenosti) $\| u \|$ a z rovnosti

$$\int_a^b \int_{\mathcal{G}} |u(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_a^b \| u(x,t) \|^2 \, \mathrm{d}t$$

Důkaz: Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$. Potom existuje $m = m_\varepsilon$ takové, že

$$\| u_m(x,t) - u(x,t) \| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad t \in <a, b>$$

Protože $u_m(x,t)$ je spojitá, existuje $\delta = \delta_\varepsilon$ tak, že

$$\| u_m(x,t') - u_m(x,t) \| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |t - t'| < \delta, \quad t, \ t' \in <a, b>$$

Potom z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\| u(x,t') - u(x,t) \| \leq \| u(x,t') - u_m(x,t') \| + \| u_m(x,t') - u_m(x,t) \| + \| u_m(x,t') - u(x,t) \| \leq$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

pro všechna $|t - t'| < \delta$, $t, \ t' \in <a, b>$.
Q.E.D.

Definice 48 *Posloupnost funkcí $u_k(x,t)$ je cauchyovská stejnoměrně na $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ v t na $<a, b>$, právě když*

$$u_k - u_p \overset{t \in <a,b>}{\rightrightarrows} 0, \quad k, \ p \to \infty \text{ na } \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$$

Lemma 18 *Jestliže posloupnost funkcí $u_k(x,t)$ je cauchyovská na $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ v t na $<a, b>$, potom existuje funkce $u(x,t)$ spojitá na $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ v t na $<a, b>$ taková, že*

$$u_k \overset{t \in <a,b>}{\rightrightarrows} u, \ k \to \infty \text{ na } \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$$

Důkaz: $\emptyset$?

9.2.5 Zobecněné řešení

Nechť $F_k \in C(\overline{\Pi_\infty})$, $u_{k0} \in C^1(\overline{\mathcal{G}})$ a $u_{k1} \in C(\overline{\mathcal{G}})$ takové, že pro $k \to \infty$ platí

$$F_k \overset{t \in <0,T>}{\rightrightarrows} F \text{ na } \mathscr{L}_2(\mathcal{G}) \ \forall T > 0$$

$$u_{k0} \to u_0 \text{ na } C(\overline{\mathcal{G}}), \quad \operatorname{grad} u_{k0} \to \operatorname{grad} u_0 \text{ na } \mathscr{L}_2(\mathcal{G}), \quad u_{k1} \to u_1 \text{ na } \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$$

a pro každé $k = 1, 2, \ldots$ existuje klasické řešení $u_k(x,t)$ smíšeného problému

$$\varrho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = -L u_k + F_k(x,t) \tag{9.23}$$

$$u_k|_{t=0} = u_{k0}(x), \quad u_k|_{t=0} = u_{k1}(x) \tag{9.24}$$

$$\alpha u_k + \beta \frac{\partial u_k}{\partial n}\bigg|_S = 0 \tag{9.25}$$

Chceme ukázat, že existuje funkce $u(x,t)$ spojitá na $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ v t na $\langle 0,\infty\rangle$ taková, že pro všechna $T > 0$ platí

$$u_k \overset{t\in\langle 0,T\rangle}{\rightrightarrows} u, \quad k \to \infty \ na \ \mathscr{L}_2(\mathcal{G}) \tag{9.26}$$

Tato funkce $u(x,t)$ se bude nazývat zobecněným řešením smíšeného problému (9.23)-(9.25).

Pokud na rozdíl $u_k - u_p$ aplikujeme první nerovnost z tvrzení věty 33, dostaneme pro $t \in \langle 0, T\rangle$ a $T > 0$

$$\| u_k - u_p \| \leq C[(1+T)\| u_{k0} - u_{p0} \|_C + T\Big\| \left| \operatorname{grad} u_{k0} - \operatorname{grad} u_{p0} \right| \Big\| +$$

$$+T\| u_{k1} - u_{p1} \| + \frac{T^2}{2} \max_{0\leq t\leq T} \| F_k - F_p \|]$$

odkud plyne, že posloupnost $u_k(x,t)$ je cauchyovská na $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ v t na $\langle a,b\rangle$. Podle předchozího lemmatu potom existuje funkce $u(x,t)$ spojitá v $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ v t tak, že vztah (9.26) platí.

Tvrzení. Zobecněné řešení $u(x,t)$ problému (9.14)-(9.16) splňuje rovnici (9.14) ve zobecněném smyslu, tj. pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\Pi_\infty)$ platí vztah

$$\int u(x,t) \left(\varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + L\varphi \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int F(x,t) \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

Důkaz: Vyjdu z rovnice (9.23)

$$\varrho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_k) + q u_k = F_k(x,t)$$

vynásobím ji φ a integruji přes Π_T

$$\int_{\Pi_T} \left[\varrho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_k) + q u_k \right] \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_{\Pi_T} F_k(x,t) \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

Per partes a druhá Greenova formule dají

$$\int_{\Pi_T} u_k \left[\varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} \varphi) + q\varphi \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_{\Pi_T} F_k(x,t) \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

Limitním přechodem $k \to \infty$ dostaneme hledané tvrzení. **Q.E.D.**

Tvrzení. Zobecněné řešení $u(x,t)$ má první derivace u_t a $\operatorname{grad} u$ spojité v $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ v t na $\langle 0,\infty)$ a pro $T > 0$ platí

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} \overset{t\in\langle 0,T\rangle}{\rightrightarrows} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\operatorname{grad} u_k \overset{t\in\langle 0,T\rangle}{\rightrightarrows} \operatorname{grad} u$$

ve zobecněném smyslu.

Důkaz: $\emptyset$

Jednoznačnost a spojitá závislost zobecněného řešení

Nechť $u_k(x,t)$ je posloupnost klasických řešení konvergentní ke zobecněnému řešení $u(x,t)$. Použijeme-li odhad (9.22) na u_k, dostanu

$$\| u_k \| \le \| u_{k0} \| + \sqrt{\frac{2}{\varrho_0}} J_k(0) + \frac{1}{\varrho_0} \int_0^t (t-\tau) \| F_k \| \, \mathrm{d}\tau, \quad t \ge 0$$

kde

$$J_k^2(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} (\varrho u_{kt}^2 + p \big| \operatorname{grad} u_{k0} \big|^2 + q u_{k0}^2) + \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u_{k0}^2 \, \mathrm{d}S$$

Limitním přechodem se dá ukázat, že odhad (9.22) platí i pro zobecněné řešení $u(x,t)$. Možno dokázat i platnost odhadů (9.20) a (9.21). Z toho dále, stejně jako pro klasické řešení, plyne jednoznačnost a spojitá závislost zobecněného řešení.

9.2.6 Existence zobecněného řešení

Dříve jsme sestrojili formální řešení problému (9.14)-(9.16) ve tvaru Fourierova rozvoje ve vlastních funkcích $\{X_j\}$ operátoru L:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t) X_j(x)$$

kde

$$T_j(t) = a_j \cos\sqrt{\lambda_j} t + b_j \sin\sqrt{\lambda_j} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_0^t c_j \tau) \sin\sqrt{\lambda_j}(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

$$a_j = \big(u_0, X_j\big)_\varrho, \quad b_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \big(u_1, X_j\big)_\varrho, c_j(t) = \big(F, X_j\big)$$

Nyní chceme Fourierovu metodu rozšířit pro zobecněné řešení, tedy dokázat, že řada konverguje.

Předpokládejme $u_0 \in \mathscr{M}_L$, $u_1 \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ a F je spojitá v $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ v t na $\langle 0, T\rangle$. Rozvineme

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j(x)$$

$$u_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} b_j X_j(x)$$

$$F(x,t) = \varrho(x) \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t) X_j(x)$$

Dá se dokázat, že poslední řada konverguj stejnoměrně v t na $\langle 0, T\rangle$ a z toho všeho je vidět, že za daných podmínek se skutečně Fourierova metoda dá použít i pro hledání zobecněného řešení.

Věta 34 *Nechť $u_0 \in \mathscr{M}_L$, $u_1 \in \mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ a F je spojitá v $\mathscr{L}_2(\mathcal{G})$ v t na $\langle 0, T\rangle$. Potom existuje zobecněné řešení problému (9.14)-(9.16) a je dané Fourierovým rozvojem.*

9.2.7 Existence klasického řešení

Pokusíme se zodpovědět, kdy zobecněné řešení splývá s klasickým.

Omezíme se na problém se dvěmq proměnnými x, t na

$$\Pi_\infty = (0, l) \times (0, \infty)$$

:

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) - qu$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x), \quad 0 \le x \le l$$

$$h_1 u - h_2 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = H_1 u + H_2 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0$$

Předpokládejme λ_k. Vlastní funkce lze psát ve tvaru

$$X_k(x) = \lambda_k \int_0^l \mathcal{G}(x, y) X_k(y)\,\mathrm{d}y$$

Věta 35 (Mercer)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\, X_k(x)\,|^2}{\lambda_k} = \mathcal{G}(x, x)$$

Důkaz: $\emptyset$

Dokažme stejnoměrnou konvergenci na $\langle 0, l\rangle$ řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\, X_k'\,|^2}{\lambda_k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\, X_k''\,|^2}{\lambda_k^3}$$

Vyjdeme z řešení

$$X_k(x) = \lambda_k \int_0^l \mathcal{G}(x, y) X_k(y)\,\mathrm{d}y$$

Derivujeme podle x:

$$\frac{X_k'(x)}{\lambda_k} = \int_0^l \mathcal{G}_x(x, y) X_k(y)\,\mathrm{d}y = \big(\mathcal{G}_x, X_k\big)$$

Parsevalova rovnost dává

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\, \big(\mathcal{G}_x, X_k\big)\,\right|^2 = \|\, \mathcal{G}_x \,\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left| X_k'(x) \right|^2}{\lambda_k^2} = \int_0^l \left| \mathcal{G}_x(x,y) \right|^2 \mathrm{d}(y)$$

Integrál na pravé straně je spojitá funkce v x a protože jsme na kompaktu, musí být řada na levé straně stejnoměrně konvergentní.

Konvergence druhé řady se dá taky (nějak) dokázat.

Věta 36 *Nechť* $u_0, Lu_0, u_1 \in \mathscr{M}_L$. *Potom existuje klasické řešení problému (9.14)-(9.16) a je dané Fourierovým rozvojem.*