Výpočet $\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(c(t),\tau)\,d\tau$

$a, b, c \in C^1$
$(\forall x)\ (y \mapsto f(x,y) \in C)$
(+ další předpoklad níže)

- označme F primitivní funkci k f vůči druhé proměnné, tj.:

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = f(x,y) \quad (\star)$$

- z Newtonovy formule máme

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(c(t),\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\Big(F(c(t),b(t)) - F(c(t),a(t))\Big) \quad (\star\star)$$

- označme si derivaci podle první proměnné jako ∂_x a derivaci podle druhé proměnné jako ∂_y; derivaci podle t čárkou

- z řetězového pravidla plyne

$$\frac{d}{dt}\Big(F(c(t),b(t)) - F(c(t),a(t))\Big) = (\partial_x F)(c(t),b(t))\,c'(t) + $$
$$+ (\partial_y F)(c(t),b(t))\,b'(t) - (\partial_x F)(c(t),a(t))\,c'(t) - (\partial_y F)(c(t),a(t))\,a'(t)$$

- dosazením do $(\star\star)$ a použitím $(\star)$ tak dostaneme

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(c(t),\tau)\,d\tau = c'(t)\Big((\partial_x F)(c(t),b(t)) - (\partial_x F)(c(t),a(t))\Big) +$$
$$+ b'(t)\, f(c(t),b(t)) - a'(t)\, f(c(t),a(t))$$

- zbývá napočítat $(\partial_x F)(x_0,y_0)$; primitivní funkce F je tvaru

$$F(x,y) = \int_0^y f(x,\tau)\,d\tau + \underline{C(x)}$$

int. konst. (může být pro různá x různá), je výhodné (nikoliv však nutné) volit $\boxed{C(x) \equiv 0}$

$$\Rightarrow (\partial_x F)(x_0,y_0) = \partial_x \int_0^{y_0} f(x,\tau)\,d\tau\,\Big|_{x=x_0} \overset{\text{V}}{=} \int_0^{y_0} \partial_x f(x,\tau)\,d\tau\,\Big|_{x=x_0}$$
$$= \int_0^{y_0} (\partial_x f)(x_0,\tau)\,d\tau$$

V o záměně: $|\partial_x f(x,\tau)| \overset{\text{V}}{\le} C \in L^1((0,y_0))$

předpokládáme, že f je dif. v první proměnné a tato derivace je (lokálně) omezená, tj. postačuje spojitost $\partial_x f$

→ odtud máme

$$(\partial_x F)(c(t),b(t)) - (\partial_x F)(c(t),a(t)) = \int_0^{b(t)} \partial_x f(c(t),\tau)\,d\tau - \int_0^{a(t)} \partial_x f(c(t),\tau)\,d\tau =$$
$$= \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_x f(c(t),\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(c(t),\tau)\,d\tau = c'(t)\int_{a(t)}^{b(t)} \partial_x f(c(t),\tau)\,d\tau + b'(t)\, f(c(t),b(t)) - a'(t)\, f(c(t),a(t))}$$