

Úlohy z 1.týdne RMF

testované na cvičeních v 2.týdnu

24. září 2020

Úloha 1 Připomeňte si věty o záměně v Lebesgueově integrálu. Konkrétně věty o záměně $\int$ a $\lim$ (Lebesgue - integrabilní majoranta, Levi - monotónní posloupnost), dále pak záměnu $\lim$ dle parametru a integrálu a nakonec záměnu derivace dle parametru a integrálu.

Úloha 2 Připomeňte si definici skalárního součinu a ukažte, že na $C[a, b] \times C[a, b]$ (spojité funkce na intervalu $[a, b]$) je zobrazení

$$(f, g) \mapsto \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

skalárním součinem.

Úloha 3 Ukažte, že funkce

$$f(x) := \int_A g(x, y) dy,$$

je spojitá na celém $\mathbb{R}$, kde g je spojitá ve svých proměnných na celém $\mathbb{R}^2$ a $A \subset \mathbb{R}$ je omezená.

Hint: Lze zaměnit limitu s integrálem?

Úloha 4 Zderivujte funkci

$$f(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos((a - \pi)x) dx.$$

Hint: Ověřte, jestli (resp. za jakých podmínek) lze derivaci 'vtáhnout' do integrálu.