

Úlohy z 2.týdne RMF

testované na cvičeních v 3.týdnu

3. října 2020

Úloha 1 Ukažte spojitost operace škálování nad prostorem testovacích funkcí, tj. definujeme-li pro $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a pro $\varepsilon > 0$ testovací funkce

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

ukážete, že platí

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0.$$

Návod: Ověřte obě podmínky konvergence v $\mathcal{D}$. Uvědomte si, že ε (a tedy i ε^n) je pevně zvolené (konstanta).

Úloha 2 Rozhodněte, zda je následující zobrazení $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ prvkem $\mathcal{D}'$:

- a) $(f, \varphi) = \varphi(\pi)$,
- b) $(f, \varphi) = \varphi(0)^2$.

Hint: Jedná se o spojité lineární funkcionály?

Úloha 3 Rozhodněte, zda je následující zobrazení $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ prvkem $\mathcal{D}'$:

- a) $(f, \varphi) = \varphi^{(n)}(\pi)$, $n \in \mathbb{N}$,
- b) $(f, \varphi) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

Hint: Jedná se o spojité lineární funkcionály?

Úloha 4 Napište definici konvergence v $\mathcal{D}$, tj. $\xrightarrow{\mathcal{D}}$. Napište definici zobecněných funkcí. Nakonec rozhodněte, zda $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ a svou odpověď zdůvodněte.

Poznámka: Podmnožinová relace se (pochopitelně) chápe ve smyslu příslušného ztotožnění s generátory prvků $\mathcal{D}'$.