RMF úkol z 25.9.

Lukáš Vácha

27. září 2020

1 Věty o záměně v Lebegueově integrálu

Věta 1 (Levi)**.** Buď $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Lambda$, $\varphi_n \gtrsim 0$, $\varphi \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$. Pak $\varphi \in \Lambda$ a $\mathbf{I}\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{I}\varphi_n$.

Věta 2 (Lebesgue)**.** Buď $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}$, $\varphi_n \to \varphi$ a $(\exists \varphi_0 \in \mathcal{L})(\forall n \in \mathbb{N})(|\varphi_n| \lesssim \varphi_0)$. Pak $\varphi \in \mathcal{L}$ a

$$\mathbf{I}\varphi = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n.$$

Posloupnost integrabilních funkcí je integrabilní, jestliže existuje integrabilní majoranta.

Věta 3 (o limitě)**.** Buď $M \subset \mathbb{R}^n$, (P, ρ) metrický prostor, $A \subset P$, $\alpha_0 \in A'$, $f : M \times A \mapsto \mathbb{R}$ a nechť platí:

1. Pro skoro všechna $x \in M$
$$\lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0 \\ \alpha\in A}} f(x,\alpha) = \varphi(x),$$
2. $(\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\})(f(\ ,\alpha)$ je měřitelná na $M)$,
3. $(\exists g \in \mathcal{L}(M))(\text{pro skoro všechna } x \in M)(\forall \alpha \in A \setminus \alpha_0)(|f(x,\alpha)| \leq g(x))$.

Potom

1. $\varphi \in \mathcal{L}(M)$,
2. $$\int_M \varphi = \lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0 \\ \alpha\in A}} \int_M f(x,\alpha).$$

Věta 4 (o derivaci)**.** Buď M měřitelná množina, $M \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $\mathcal{I} = \mathcal{I}^\circ \subset \mathbb{R}$. Nechť $f : M \times \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ je reálná funkce a platí:

1. Existuje $\alpha_0 \in \mathcal{I}$ takové, že $f(\ ,\alpha_0) \in \mathcal{L}(M)$,
2. pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$ platí, že $f(\ ,\alpha)$ je měřitelná na M,

3. je-li $N \subset M$, $\mu(N) = 0$, pak $f(x, \ )$ je diferencovatelná na $\mathcal{I}$ pro každé $x \in M \setminus N$,

4. existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že

$$(\forall x \in M \setminus N)(\forall \alpha \in \mathcal{I}) \left(\left| \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq g(x) \right).$$

Potom

1. $f(\ , \alpha) \in \mathcal{L}(M)$ pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$,

2. $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\ , \alpha) \in \mathcal{L}(M)$ pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$,

3. a platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x = \int_M \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

2 Skalární součin

Věta 5.

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

je skalární součin na $C[a,b] \times C[a,b]$

Důkaz. 1. linearita:

$$(\alpha f + h, g) = \int_a^b (\alpha f(x) + h(x))\overline{g(x)}dx = \int_a^b (\alpha f(x)\overline{g(x)} + h(x)\overline{g(x)})dx =$$
$$\alpha \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx + \int_a^b h(x)\overline{g(x)})dx = \alpha(f,g) + (h,g) \quad (1)$$

2. hermitovskost:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = \int_a^b \overline{g(x)} f(x) dx = \int_a^b \overline{g(x)\overline{\overline{f(x)}}} = \overline{\int_a^b g(x)\overline{f(x)}dx} = \overline{(g,f)} \quad (2)$$

3. Pozitivní definitnost:

$$f^2(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(x)dx \geq 0 \quad (3)$$

$$\int_a^b 0dx = 0 \quad (4)$$

sporem:

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0 \wedge (\exists x_0)(f(x_0) \neq 0) \Rightarrow (\exists U_{x_0} \subset [a,b])(\forall x \in U_{x_0})(f(x) \neq 0) \Rightarrow$$

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_{U_{x_0}} f^2(x)dx + \int_{[a,b]\setminus U_{x_0}} f^2(x)dx \neq 0 \quad (5)$$

, což je spor

□

3 spojitost f

Věta 6. $g \in C(\mathbb{R}^2); A \subset \mathbb{R}$ omezená, pak
$f(x) = \int_A g(x,y)dy$ je spojitá na $\mathbb{R}$

1. *Důkaz.* $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\forall \varepsilon_0 > 0)(\exists \delta_0 > 0)(|g(x+\delta,y) - g(x,y)| < \varepsilon_0)$
$|f(x+\delta) - f(x)| = \left|\int_A g(x+\delta,y)dy - \int_A g(x,y)dy\right| \leq \left|\int_A |g(x+\delta,y) - g(x,y)dy|\right| \leq$
$\left|\int_A \varepsilon_0\right| = \varepsilon_0 \mu(A) < \varepsilon$ □

2. *Důkaz.* g je spojtá, na $\bar{A}$ nabývá svého maxima M, g má integrabilní majorantu M:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \int_A g(x,y)dy = \int_A \lim_{x \to x_0} g(x,y)dy = \int_A g(x_0,y)dy = f(x_0) \quad (6)$$

□

4 derivace fce

1. $a_0 = 0, f(,a_0) \in \mathcal{L}, \int_0^\infty cos(-\pi x)dx$ existuje
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\forall a \in (\varepsilon, +\infty))$

$$\left|-\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} cos((a-\pi)x) - xe^{-ax^2} sin((a-\pi)x)\right| \leq \left|(-x^2-x)e^{-ax^2}\right| \leq \left|(-x^2-x)e^{-\varepsilon x^2}\right| \quad (7)$$

, což je integrabilní majoranta

$\forall a \in (\varepsilon, \infty)$

$$f'(a) = \frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-ax^2} cos((a-\pi)x)dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} e^{-ax^2} cos((a-\pi)x)dx =$$
$$-\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} cos((a-\pi)x) - xe^{-ax^2} sin((a-\pi)x)dx \quad (8)$$