Řešené příklady z předmětu "Rovnice Matematické Fyziky"

František Havlůj

6. ledna 2004

2. Parciální diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a řešitelné substitucí

Příklad 2.1 *Nalezněte obecné řešení rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$v\ (0,x) \times (0,x)$

Řešení. Zavedeme substituci $v(y) = \frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} - \frac{v}{2y} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{v}{2y}$$

$$\ln v = \frac{1}{2}\ln y + c(x)$$

$$v(y) = \sqrt{y}c(x)$$

Integrujme podle x:

$$u(x,y) = \sqrt{y}\int c(x)$$

$$u(x,y) = \sqrt{y}\left(f(x) + h(y)\right)$$

$$u(x,y) = \sqrt{y}f(x) + g(y)$$

Příklad 2.2 *Nalezněte obecné řešení rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Řešení. Hledejme řešení ve tvaru $u = e^{\lambda y}$:

$$\lambda^2 e^{\lambda y} - \lambda e^{\lambda y} = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = f(x)e^{1y} + g(x)e^{0y}$$

$$u(x,y) = f(x)e^{y} + g(x)$$

Příklad 2.3 *Nalezněte obecné řešení rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 - y$$

Řešení. Integrujme podle x:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3}x^3 - xy + h(y)$$

a podle y:

$$u(x,y) = \frac{1}{3}x^3y - \frac{1}{2}xy^2 + \int h(y)$$

$$u(x,y) = \frac{1}{3}x^3y - \frac{1}{2}xy^2 + f(y) + g(x)$$

Příklad 2.4 *Nalezněte obecné řešení rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Řešení. Zavedeme substituci $v(y) = \frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} - 2vy = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = 2vy$$

$$\ln v = y^2 + a(x)$$

$$v(y) = b(x)e^{y^2}$$

Integrujeme podle x:

$$u(x,y) = e^{y^2}\int b(x)$$

$$u(x,y) = e^{y^2}(f(x) + h(y))$$

$$u(x,y) = e^{y^2}f(x) + g(y)$$

Příklad 2.5 *Nalezněte obecné řešení rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y$$

Řešení. Integrujme podle y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xy + \frac{1}{2}y^2 + f(x)$$

A znovu podle y:

$$u(x,y) = x\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + yf(x) + g(x)$$

Příklad 2.6 *Do rovnice*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial z} + f = 0$$

dosaďte vztah $f(x,y,z) = e^{\mu z}g(x,y,z)$ *a určete* μ *tak, aby byl výsledek co nejjednodušší.*

Řešení.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} e^{\mu z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} e^{\mu z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \mu e^{\mu z} g + e^{\mu z} \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \mu^2 e^{\mu z} g + \mu e^{\mu z} \frac{\partial g}{\partial z} + \mu e^{\mu z} \frac{\partial g}{\partial z} + e^{\mu z} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} e^{\mu z} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} e^{\mu z} + \mu^2 e^{\mu z} g + \mu e^{\mu z} \frac{\partial g}{\partial z} + \mu e^{\mu z} \frac{\partial g}{\partial z} + e^{\mu z} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \mu e^{\mu z} g + e^{\mu z} \frac{\partial g}{\partial z} + e^{\mu z} g = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + (2\mu + 1) \frac{\partial g}{\partial z} + (\mu^2 + \mu + 1) g = 0$$

Pokud zvolíme $\mu = -\frac{1}{2}$, dostaneme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \frac{3}{4} g = 0$$

Příklad 2.7 *Převeďte rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2Dxy - 4Dxz - 6Dyz - Dzz = 0$$

na kanonický tvar.

Řešení. Odpovídající kvadratická forma má tvar

$$h(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4xz - 6yz + z^2 = (x + y - 2z)^2 - (y + z)^2 - (2z)^2$$

Matice pro hledání polární báze je

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice je

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Odtud odečteme po sloupcích bazické vektory a hledaná substituce je

$$\xi = x$$

$$\eta = -x + y$$

$$\lambda = \frac{3}{2} x - \frac{1}{2} y + \frac{3}{2} z$$

Kanonický tvar je pak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} = 0$$

Příklad 2.8 *Nalezněte kanonický tvar rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Řešení. Odpovídající kvadratická forma má tvar

$$h(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4yz = (x + y)^2 + (y + 2z)^2 + z^2$$

Matice pro hledání polární báze je

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice je

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odtud odečteme po sloupcích bazické vektory a hledaná substituce je

$$\xi = x$$

$$\eta = -x + y$$

$$\lambda = 2x - 2y + z$$

Vypočteme derivace

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} + 2\frac{\partial u}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} - 2\frac{\partial u}{\partial \lambda}$$

Kanonický tvar je pak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

3. Parciální diferenciální rovnice druhého řádu

Příklad 3.1 *Substituujte rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

vztahy $\xi = x + 2\sqrt{-y}$ *a* $\eta = x - 2\sqrt{-y}$ *v oblasti* $y < 0$.

Řešení. Vypočteme derivace

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{-y\sqrt{-y}}(-1)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{-y}}\left(\frac{1}{\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) - \frac{1}{\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{-2y\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{-y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) \\ &= \frac{1}{-2y\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{y}\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{-2\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \left(2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = 0$$

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

Po použití transformačního vztahu

$$2\sqrt{-y} = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$$

získáme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

Příklad 3.2 *Substituujte rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

vztahy $\xi = x + y$ *a* $\eta = x - y$.

Řešení. Vypočteme nejprve zpětnou transformaci

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$$

$$y = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$$

a poté derivace

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Dosadíme do rovnice a dostaneme

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{2.2y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Příklad 3.3 *Rovnici*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

převeďte na kanonický tvar v oblastech, v nichž zachovává typ.

Řešení. Vypočteme diskriminant

$$D = 4x^2y^2$$

Protože $D > 0$, jedná se o hyperbolickou rovnici. Aby se zachoval typ, musí platit přinejmenším $x \neq 0$, $y \neq 0$. Její kořeny jsou

$$\lambda = \frac{\pm 2|xy|}{2x^2} = \pm\left|\frac{y}{x}\right| = \pm\frac{y}{x}$$

Řešíme tedy rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + K$$

$$\ln y + \ln x = K$$

$$\ln xy = \ln C$$

$$xy = C$$

a

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$\ln y = \ln x + K$$
$$\ln y = \ln Cx$$
$$\frac{y}{x} = C$$

Odkud dostáváme substituce

$$\xi = xy$$
$$\eta = \frac{y}{x}$$

Vypočteme derivace

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y\left(y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\right) - \frac{y}{x^2}\left(y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + \frac{2}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta} =$$
$$= y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + y\frac{2}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\right) + \frac{1}{x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) =$$
$$= x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

a dosadíme do rovnice

$$x^2\left(y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + y\frac{2}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - y^2\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = 0$$

$$x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta} - x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

$$-4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2}\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2}\frac{1}{xy}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

Příklad 3.4 *Rovnici*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

převeďte na kanonický tvar v oblastech, v nichž zachovává typ.

Řešení. Vypočteme diskriminant

$$D = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$$

Protože $D = 0$, jedná se o parabolickou rovnici. Její kořen je

$$lambda = \frac{-2xy}{2x^2} = -\frac{y}{x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y}{x}\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\mathrm{d}x}{x}\\
\ln|y| &= \ln|x| + K\\
\ln|y| - \ln|x| &= K\\
\ln\left|\frac{y}{x}\right| &= K\\
\left|\frac{y}{x}\right| &= C
\end{aligned}$$

Nyní si řešení úlohy rozdělíme na 2 případy podle znaménka $\frac{y}{x}$:

1. $\frac{y}{x} > 0$:
   Substituce je

   $$\xi = \frac{y}{x}$$

   a druhou si libovolně (regulárně) zvolíme

   $$\eta = x$$

   Vypočteme derivace

   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

   $$\begin{aligned}
   \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) &=\\
   = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}&
   \end{aligned}$$

   $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

a dosadíme do rovnice:

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + 2xy\left(-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) + y^2\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

2. $\frac{y}{x} < 0$:
   Substituce je

   $$\xi = -\frac{y}{x}$$

   a druhou si libovolně (regulárně) zvolíme

   $$\eta = x$$

   Vypočteme derivace

   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) =$$

   $$= \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

   $$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) =$$

   $$= \frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

   a dosadíme do rovnice:

   $$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + 2xy\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) + y^2\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$$

   $$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

Kanonický tvar rovnice je tedy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

a dospějeme k němu pomocí substitucí

$$\xi = \left|\frac{y}{x}\right|$$
$$\eta = x$$

Příklad 3.5 *Pro $x > 0$ a $y > 0$ převeďte rovnici*

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

na kanonický tvar. Diskutujte pak její typ.

Řešení. Vypočteme diskriminant

$$D = -4xy$$

Protože $D < 0$, jedná se o eliptickou rovnici. Vybereme si její kořen

$$\lambda = \frac{-2i\sqrt{xy}}{2x} = -\frac{i\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

a budeme řešit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\lambda$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{i\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$
$$-i\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$
$$-i\sqrt{y} + c = \sqrt{x}$$
$$c = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$$

Tedy zavedeme substituci

$$\xi = \Re\, c = \sqrt{x}$$
$$\eta = \Im\, c = \sqrt{y}$$

Vypočteme derivace

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4x\sqrt{x}}\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{4x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{4y\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{4y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

a dosadíme do rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

4. Distribuce

Příklad 4.3 *Určete derivaci Heavisideovy funkce* $\Theta(x)$

Řešení. Užijeme výsledku příkladu 4.2:

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x - x_0)$$

Skok je v bodě $x_0 = 0$, velikost skoku je $[f]_{x_0} = 0$ a funkce je jinde konstantní, takže $\{f'(x)\} = 0$.

$$\Theta(x)' = 0 + 1\delta(x - x_0) = \delta(x)$$

Příklad 4.4a *Dokažte, že* $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$

Řešení.

$$(a(x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), a(x)\varphi(x)) = a(0)\varphi(0) = a(0)\,(\delta(x), \varphi(x)) = (a(0)\delta(x), \varphi(x))$$

Příklad 4.4b *Dokažte, že* $0\delta(x) = 0$

Řešení.

$$(0\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), 0\varphi(x)) = (\delta(x), 0) = 0 = (0, \varphi(x)) = (a(0)\delta(x), \varphi(x))$$

Příklad 4.5 *Dokažte, že* $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$

Řešení.

$$\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x)\right) = PV\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\varphi(x)}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) = (1, \varphi(x))$$

Příklad 4.6 *Nechť je dána funkce*

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x - 2k\pi}{2\pi}$$

pro $x \in \langle 2k\pi, 2\pi(k+1))$*,kde* $k \in \mathbb{Z}$*. Určete její derivaci.*

Řešení. Užijeme výsledku příkladu 4.2. Funkce má nekonečně mnoho skoků v bodech $2k\pi$. Vypočteme jejich velikost:

$$\lim_{x\to 2k\pi+} f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2k\pi - 2k\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2k\pi-} f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2k\pi - 2(k-1)\pi}{2\pi} = \frac{3}{2}$$

tedy

$$[f(x)]_{2k\pi} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

V ostatních bodech je derivace

$$\{f(x)\}' = -\frac{1}{2\pi}$$

Tedy derivace je

$$f'(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)\delta(x - 2k\pi) = -\frac{1}{2\pi} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$$

Příklad 4.12 *Vypočtěte*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln|x|)$$

Řešení.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln|x|), \varphi(x)\right) = -(\ln|x|, \varphi'(x)) = -(1, \ln|x|\varphi'(x)) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\varphi'(x) = \left| \begin{array}{cc} u = \ln|x| & v' = \varphi'(x) \\ u' = \frac{1}{x} & v = \varphi(x) \end{array} \right| =$$

$$= -PV[\varphi(x)\ln|x|]_{-\infty}^{+\infty} + PV\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right)$$

protože

$$PV[\varphi(x)\ln|x|]_{-\infty}^{+\infty} = \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln|-\varepsilon| - \ln|\varepsilon|)_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Příklad 4.13 *Dokažte, že v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ platí:*

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$$

kde

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi\right) \equiv PV\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. Nejprve vypočteme

$$\left(\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)', \varphi\right) = -\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi'\right) = -PV\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} = \left| \begin{array}{cc} u = \frac{1}{x} & v' = \varphi'(x) \\ u' = -\frac{1}{x^2} & v = \varphi(x) \end{array} \right| =$$

$$= -PV\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-\infty}^{+\infty} - PV\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

Dále si spočítáme

$$PV\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\left[\frac{1}{x}\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \left[\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{+\infty}\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{1}{-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right) = 2\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\varepsilon}$$

Nyní vyjádříme

$$PV\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-\infty}^{-\varepsilon}+\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{+\infty}\right)=\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon}-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\frac{\varphi(0)}{-\varepsilon}-\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right)=-2\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{\varepsilon}=-\varphi(0)PV\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}$$

a nakonec dostaneme

$$\left(\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)',\varphi\right)=-\left(-\varphi(0)PV\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\right)-PV\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}=$$

$$=-PV\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}=\left(-\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi\right)$$

Příklad 4.16 *Vypočtěte*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{x\pm i\varepsilon}\right)$$

Řešení. Podle Sochoského vzorců a příkladu 4.13

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{x\pm i\varepsilon}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mp i\pi\delta(x)+\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\mp i\pi\delta'(x)-\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$$

Příklad 4.17 *V $\mathbb{R}$ vypočtěte derivace zobecněné funkce*

$$f(x)=|x|\sin x$$

do čtvrtého řádu včetně.

Řešení. Platí $(|x|)'=\operatorname{sgn}x$, podle příkladu 4.2 $(\operatorname{sgn}x)'=2\delta(x)$. Potom

$$f'(x)=\operatorname{sgn}x\sin x+|x|\cos x$$

$f''(x)=\delta(x)\sin x+\operatorname{sgn}x\cos x+\operatorname{sgn}x\cos x-|x|\sin x=2\operatorname{sgn}x\cos x-|x|\sin x$

(protože $\delta(x)\sin x=\delta(x)\sin 0=0$)

$f'''(x)=2(2\delta(x)\cos x-\operatorname{sgn}x\sin x)-(\operatorname{sgn}x\sin x+|x|\cos x)=4\delta(x)-3\operatorname{sgn}x\sin x-|x|\cos x$

(protože $\delta(x)\cos x=\delta(x)\cos 0=\delta(x)$)

$f''''(x)=4\delta'(x)-3(\delta(x)\sin x+\operatorname{sgn}x\cos x)-(\operatorname{sgn}x\cos x-|x|\sin x)=4\delta'(x)-4\operatorname{sgn}x\cos x+|x|\sin x$

5. Konvoluce, Fourierova transformace

- $\mathcal{F}[f(x)] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i(\xi,x)}\,\mathrm{d}x$
- $\mathcal{F}[f(x)](\xi) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}[f(\eta)](-\xi)$
- $\mathcal{F}[D^\alpha f(x)] = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f(x)]$
- $D^\alpha \mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}[(ix)^\alpha f(x)]$
- $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$
- $\mathcal{F}[f(x - x_0)] = e^{i\xi x_0}\mathcal{F}[f]$
- $\mathcal{F}[\Theta(t)e^{-at}] = \frac{1}{a-i\xi}$
- $\mathcal{F}[\delta(x-a)] = e^{ia\xi}$

Často také využijeme faktu, že

$$\Theta(x)f(x) * \Theta(x)g(x) = \Theta(x)\int_0^x f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$$

(podrobně viz 5.1)

Příklad 5.1 Vypočtěte konvoluci

$$\Theta(x)e^{ax} * \Theta(x)e^{bx}$$

Řešení.

$$\Theta(x)e^{ax}*\Theta(x)e^{bx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(y)e^{ay}\Theta(x-y)e^{b(x-y)}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} e^{ay}*\Theta(x-y)e^{b(x-y)} =$$

$$= e^{bx}\int_0^{+\infty} \Theta(x-y)e^{(a-b)y}$$

Pro $x \leq 0$ je $\Theta(x)e^{ax} * \Theta(x)e^{bx} = 0$, jinak

$$= e^{bx}\int_0^x e^{(a-b)y}\,\mathrm{d}y = \begin{cases} e^{bx}\frac{e^{(a-b)x}-1}{a-b} = \frac{e^{ax}-a^{bx}}{a-b} & a \neq b \\ e^{bx}x & a = b \end{cases}$$

Celkový výsledek můžeme psát ve tvaru

$$\Theta(x)e^{ax} * \Theta(x)e^{bx} = \begin{cases} \Theta(x)\frac{e^{ax}-a^{bx}}{a-b} & a \neq b \\ \Theta(x)xe^{bx} & a = b \end{cases}$$

Příklad 5.3 Vypočtěte konvoluci

$$\Theta(x) * \Theta(x)$$

v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Řešení.
$$\Theta(x) * \Theta(x) = \Theta(x) \int_0^x \mathrm{d}y = \Theta(x)x$$

Příklad 5.4 Vypočtěte konvoluci
$$e^{-|x|} * e^{-|x|}$$
v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Řešení.
$$e^{-|x|} * e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} * e^{-|x-y|}\,\mathrm{d}y$$

Pro $x > 0$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} * e^{-|x-y|}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{0} e^{y}e^{-x+y} + \int_0^x e^{-y}e^{-x+y} + \int_x^{\infty} e^{-y}e^{x-y} =$$
$$= \frac{1}{2}e^{-x}(1-0) + e^{-x}(x-0) - \frac{1}{2}e^{x}(0-e^{-2x}) = (1+x)e^{-x}$$

Pro $x < 0$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} * e^{-|x-y|}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x} e^{y}e^{-x+y} + \int_x^0 e^{y}e^{x-y} + \int_0^{\infty} e^{-y}e^{x-y} =$$
$$= \frac{1}{2}e^{-x}(e^{2x}-0) + e^{x}(0-x) - \frac{1}{2}e^{x}(0-1) = (1-x)e^{x}$$

Dohromady je tedy
$$e^{-|x|} * e^{-|x|} = (1+|x|)e^{-|x|}$$

Příklad 5.5 V $\mathbb{R}^n$ určete
$$\mathcal{F}[\delta(x-x_0)]$$

Řešení. Z definice
$$\mathcal{F}[\delta(x-x_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)e^{i(\xi,x)}\,\mathrm{d}x = e^{i(\xi,x_0)}$$

Příklad 5.6 Určete
$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}]$$
je-li $a > 0$.

Řešení. Z definice
$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+i\xi x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$$

Příklad 5.7 Vypočtěte
$$\mathcal{F}[\Theta(x)e^{-ax}]$$

je-li $a > 0$.

Řešení. Z definice

$$\mathcal{F}[\Theta(x)e^{-ax}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x)e^{-ax+i\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} e^{(-a+i\xi)x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{-a+i\xi}\left[e^{(-a+i\xi)x}\right]^{\infty} = \frac{1}{-a+i\xi}(0-1) = \frac{1}{a-i\xi}$$

Příklady 5.8+5.10 *Vypočtěte*

$$\mathcal{F}[\sin ax], \quad \mathcal{F}[\cos ax]$$

kde $a \in \mathbb{R}$

Řešení. Nejprve vypočítáme:

$$\mathcal{F}[e^{iax}] = (2\pi)\mathcal{F}^{-1}[e^{ia\xi}](-\eta) = 2\pi\delta(-\eta-a) = 2\pi\delta(\eta+a)$$

$$\mathcal{F}[e^{-iax}] = (2\pi)\mathcal{F}^{-1}[e^{-ia\xi}](-\eta) = 2\pi\delta(-\eta-(-a)) = 2\pi\delta(\eta-a)$$

Nyní rozepíšeme sinus a cosinus

$$\sin ax = \frac{e^{iax}-e^{iax}}{2i}$$

$$\cos ax = \frac{e^{iax}+e^{iax}}{2}$$

a teď už víme, že

$$\mathcal{F}[\sin ax] = \frac{1}{2i}2\pi(\delta(\eta+a)-\delta(\eta-a)) = i\pi(\delta(\eta-a)-\delta(\eta+a))$$

$$\mathcal{F}[\cos ax] = \frac{1}{2}2\pi(\delta(\eta+a)+\delta(\eta-a)) = \pi(\delta(\eta-a)+\delta(\eta+a))$$

Příklad 5.9 *Vypočtěte konvoluci*

$$\Theta(x)\sin(x) * \Theta(x)\sin(x)$$

Upravte na jednoduchý tvar.

Řešení.

$$\Theta(x)\sin(x) * \Theta(x)\sin(x) = \Theta(x)\int_0^x \sin y\sin(x-y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \Theta(x)\int_0^x \sin x\sin y\cos y - \cos x\sin^2 y\,\mathrm{d}y =$$

$$= \Theta(x)\sin x\frac{1}{2}\sin^2 x - \cos x\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x) =$$

$$= \frac{\Theta(x)}{2}(\sin x\sin^2 x - x\cos x + \sin^2 x\cos x) =$$

$$= \frac{\Theta(x)}{2}(\sin x - x\cos x)$$

Příklad 5.11 V $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ nalezněte Fourierův obraz funkce

$$\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$$

kde $\alpha > 0$.

Řešení. Z příkladu (1.6) víme, že

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}$$

$$\mathcal{F}[\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}] = 2\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x = 2\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\xi + i\sin x\xi}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$$

Protože sinus je lichá funkce a cosinus sudá, je

$$= 4\alpha\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\xi}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\xi}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| x = \alpha t, \quad \mathrm{d}x = \alpha\,\mathrm{d}t \right| = 4\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha\xi t}{t^2+1}\,\mathrm{d}x = 4\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha\xi|} = 2\pi e^{-\alpha|\xi|}$$

Příklad 5.12 *Pro*

$$P_\alpha = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}, \qquad \alpha > 0$$

vypočtěte $P_\alpha * P_\beta$.

Řešení.

$$P_\alpha = \frac{1}{2\pi}\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$$

a z předchozího příkladu víme

$$\mathcal{F}[P_\alpha] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}] = e^{-\alpha|\xi|}$$

$$\mathcal{F}[P_\alpha * P_\beta] = \mathcal{F}[P_\alpha]\mathcal{F}[P_\beta] = e^{-\alpha|\xi|}e^{-\beta|\xi|} = e^{-(\alpha+\beta)|\xi|} = \mathcal{F}[P_{\alpha+\beta}]$$

$$P_\alpha * P_\beta = P_{\alpha+\beta}$$

Příklad 5.14 *Podle definice určete Fourierův obraz funkce* 1 *v prostoru* $\mathbb{R}^n$.

Řešení.

$$\mathcal{F}[1] = (2\pi)^n\mathcal{F}^-1[1](-\xi) = (2\pi)^n\delta(-\xi) = (2\pi)^n\delta(\xi)$$

6. Laplaceova transformace

- $\mathcal{L}[f'(t)] = p\mathcal{L}[f] - f(0_+)$
- $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f(t)]$
- $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty \mathcal{L}[f(t)](q)\,\mathrm{d}q$
- $\int_0^\infty f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lim_{p\to 0}\mathcal{L}[f(t)](p)$
- $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\mathcal{L}[f]$

- $\mathcal{L}[\Theta(t)e^{-at}] = \frac{1}{p+a}$
- $\mathcal{L}[\Theta(t)t^n e^{-at}] = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
- $\mathcal{L}[\Theta(t)\sin\beta t] = \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
- $\mathcal{L}[\Theta(t)\cos\beta t] = \frac{p}{p^2+\beta^2}$

Většinou budeme používat toto značení:

$$\mathcal{L}[f] \equiv F$$

Příklad 6.3 *Vypočtěte integrál*

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$$

pro $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Řešení.

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right] = \int_p^\infty \mathcal{L}[e^{-at} - e^{-bt}](q)\,\mathrm{d}q =$$

$$= \int_p^\infty \left(\frac{1}{q+a} - \frac{1}{q+b}\right)\mathrm{d}q = [\ln|q+a| - \ln|q+b|]_p^\infty =$$

$$= \left[\ln\frac{|q+a|}{|q+b|}\right]_p^\infty = \ln 1 - \ln\frac{|p+a|}{|p+b|} = \ln\frac{|p+b|}{|p+a|}$$

A nyní použijeme vzorce pro výpočet integrálu:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0}\ln\frac{|p+b|}{|p+a|} = \ln\frac{|b|}{|a|} = \ln\frac{b}{a}$$

Příklad 6.6 *Řešte diferenciální rovnici*

$$y' + y = t^2 e^{-t}$$

za podmínky $y(0_+) = a$.

Řešení. Přejdeme ke zobecněné úloze

$$y' + y = \Theta(t)t^2e^{-t}$$

a provedeme Laplaceovu transformaci:

$$(pF - a) + F = \frac{2}{(p+1)^3}$$

$$(p+1)F = a + \frac{2}{(p+1)^3}$$

$$F = \frac{a}{p+1} + \frac{2}{(p+1)^4} = a\frac{1}{p+1} + \frac{1}{3}\frac{3!}{(p+1)^4}$$

kde již vidíme známé Laplaceovy obrazy a tedy

$$y = \Theta(t)(a + \frac{1}{3}t^3)e^{-t}$$

Příklad 6.7 *Řešte soustavu obyčejných diferenciálních rovnic*

$$y_1' = 7y_1 - 18y_2 + 12e^{-t}$$

$$y_2' = 3y_1 - 8y_2 + 5e^{-t}$$

za podmínek $y_1(0_+) = 2$, $y_2(0_+) = 1$.

Řešení. Nejprve podrobíme soustavu Laplaceově transformaci ($\mathcal{L}[y_1] = F_1$, $\mathcal{L}[y_2] = F_2$):

$$pF_1 - 2 = 7F_1 - 18F_2 + \frac{12}{p+1}$$

$$pF_2 - 1 = 3F_1 - 8F_2 + \frac{5}{p+1}$$

Nyní potřebujeme slušně vyjádřit F_1 a F_2. Nejprve vyjádříme F_1 pomocí F_2 z první rovnice

$$F_1 = \frac{1}{p-7}\left(2 - 18F_2 + \frac{12}{p+1}\right)$$

a dosadíme do druhé rovnice:

$$(p+8)F_2 = 1 + \frac{3}{p-7}\left(2 - 18F_2 + \frac{12}{p+1}\right) + \frac{5}{p+1}$$

$$(p+8)(p-7)(p+1)F_2 = (p-7)(p+1) + 3(2(p+1) - 18(p+1)F_2 + 12) + 5(p-7)$$

$$(p+1)F_2(p^2 + p - 7.8 + 3.18) = (p-7)(p+1) + 3(2(p+1) + 12) + 5(p-7)$$

$$(p+1)(p-1)(p+2)F_2 = p^2 + 5p$$

$$F_2 = \frac{p^2 + 5p}{(p+1)(p-1)(p+2)}$$

Potom vyjádříme z druhé rovnice F_2 pomocí F_1

$$F_2 = \frac{1}{p+8}\left(1 + 3F_1 + \frac{5}{p+1}\right)$$

a dosadíme do první rovnice:

$$(p-7)F_1 = 2 - \frac{18}{p+8}\left(1+3F_1+\frac{5}{p+1}\right)+\frac{12}{p+1}$$

$$(p-7)(p+8)(p+1)F_1 = 2(p+1)(p+8)-18(p+1+3(p+1)F_1+5)+12(p+8)$$

$$(p+1)F_1(p^2+p-7.8+18.3) = 2(p+1)(p+8)-18(p+1+5)+12(p+8)$$

$$(p+1)(p-1)(p+2)F_1 = 2p^2+12p+4$$

$$F_1 = \frac{2p^2+12p+4}{(p+1)(p-1)(p+2)}$$

Teď provedeme rozklad na parciální zlomky:

$$F_1 = \frac{3}{p+1}+\frac{3}{p-1}+\frac{-4}{p+2}$$

$$F_2 = \frac{2}{p+1}+\frac{1}{p-1}+\frac{-2}{p+2}$$

Zde už vidíme známý Laplaceův obraz a můžeme psát

$$y_1 = \Theta(x)(3e^{-t}+3e^{t}-4e^{-2t})$$

$$y_2 = \Theta(x)(2e^{-t}+e^{t}-2e^{-2t})$$

Příklad 6.8 *Vypočtěte integrál*

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}\cos bt \sin ct}{t}\,\mathrm{d}t$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$ *a dále* $b, c \in \mathbb{R} (c \neq \pm b)$.

Řešení.

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-at}\cos bt\sin ct}{t}\right] = \frac{1}{2}\int_p^\infty \mathcal{L}\left[e^{-at}\cos bt \sin ct\right]\,\mathrm{d}q =$$

$$= \frac{1}{2}\int_p^\infty \mathcal{L}\left[e^{-at}\left(\sin(b+c)t-\sin(b-c)t\right)\right]\,\mathrm{d}q =$$

$$= \frac{1}{2}\int_p^\infty \left(\frac{b+c}{(q+a)^2+(b+c)^2}-\frac{b-c}{(q+a)^2+(b-c)^2}\right)\mathrm{d}q =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(b+c)\frac{1}{b+c}\operatorname{arctg}\frac{q+a}{b+c}-(b-c)\frac{1}{b-c}\operatorname{arctg}\frac{q+a}{b-c}\right]_p^\infty =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{q+a}{b+c}-\operatorname{arctg}\frac{q+a}{b-c}\right]_p^\infty =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\left(\operatorname{arctg}\frac{p+a}{b+c}-\operatorname{arctg}\frac{p+a}{b-c}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{p+a}{b-c}-\operatorname{arctg}\frac{p+a}{b+c}\right)$$

A nyní použijeme vzorce pro výpočet integrálu:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}\cos bt \sin ct}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0}\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{p+a}{b-c} - \operatorname{arctg}\frac{p+a}{b+c}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b-c} - \operatorname{arctg}\frac{a}{b+c}\right)$$

Příklad 6.9 *Užitím Laplaceovy transformace nalezněte funkci $u = u(t)$, vyhovující rovnici*

$$u'' + u' + u = e^t(3\cos t + 2\sin t)$$

a podmínkám $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

Řešení. Provedeme Laplaceovu transformaci:

$$\mathcal{L}[u] = F$$

$$\mathcal{L}[u'] = pF$$

$$\mathcal{L}[u''] = p\mathcal{L}[u'] - 1 = p^2 - 1$$

a rovnice přejde na tvar

$$p^2F + pF + F - 1 = 3\frac{p-1}{(p-1)^2+1} + 2\frac{1}{(p-1)^2+1}$$

$$(p^2+p+1)F = \frac{3p-3+2+(p-1)^2+1}{(p-1)^2+1}$$

$$(p^2+p+1)F = \frac{p^2+p+1}{(p-1)^2+1}$$

$$F = \frac{1}{(p-1)^2+1}$$

$$u(t) = \Theta(t)e^t sin(t)$$

Příklad 6.13 *Řešte integrodiferenciální rovnici*

$$y' + 2y + \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sin t$$

za podmínky $y(0_+) = 0$.

Řešení. Přejdeme ke zobecněné úloze

$$y' + 2y + \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \Theta(t)\sin t$$

Laplaceovou transformací:

$$(pF - 0) + 2F + \frac{1}{p}F = \frac{1}{p^2+1}$$

$$p^2F + 2pF + F = \frac{p}{p^2+1}$$

$$F = \frac{p}{(p^2+1)(p+1)^2}$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{(p+1)^2}\right)$$

a rozpoznáním Laplaceových obrazů na pravé straně

$$y = \frac{1}{2}\Theta(t)(\sin t - te^{-t})$$

Příklad 6.14 *Vypočtěte integrál*

$$\int_0^\infty \frac{\cos bt - \cos at}{t}\,\mathrm{d}t$$

kde $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Řešení.

$$\mathcal{L}\left[\frac{\cos bt - \cos at}{t}\right] = \int_p^\infty \mathcal{L}[\cos bt - \cos at](q)\,\mathrm{d}q =$$

$$= \frac{1}{2}\int_p^\infty \left(\frac{q}{q^2+b^2} - \frac{q}{q^2+a^2}\right)\mathrm{d}q = \frac{1}{2}[\ln|q^2+b^2| - \ln|q^2+a^2|]_p^\infty =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{|q^2+b^2|}{|q^2+a^2|}\right]_p^\infty = \frac{1}{2}\ln 1 - \ln\frac{|p^2+b^2|}{|p^2+a^2|} = \frac{1}{2}\ln\frac{|p^2+a^2|}{|p^2+b^2|}$$

A nyní použijeme vzorce pro výpočet integrálu:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bt - \cos at}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0}\frac{1}{2}\ln\frac{|p^2+a^2|}{|p^2+b^2|} = \ln\frac{|a^2|}{|b^2|} = \ln\left|\frac{a}{b}\right|$$

Příklad 6.15 *Užitím Laplaceovy transformace řešte rovnici*

$$y''' + y' = e^{2t}$$

za podmínek $y(0_+) = y'(0_+) = y''(0_+) = 0$.

Řešení. Provedeme Laplaceovu transformaci:

$$p^3F + pF = \frac{1}{p-2}$$

$$F = \frac{1}{p(p-2)(p^2+1)}$$

Rozložíme na parciální zlomky:

$$F = -\frac{1}{2}\frac{1}{p} + \frac{1}{10}\frac{1}{p-2} + \frac{2}{5}\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{5}\frac{1}{p^2+1}$$

kde již vidíme známé Laplaceovy obrazy a tedy

$$y = \Theta(t)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t\right)$$

Příklad 6.17 *Řešte integrodiferenciální rovnici*

$$y' + 2y + 2\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1$$

s danou počáteční podmínkou $y(0_+) = 0$.

Řešení. Přejdeme ke zobecněné úloze

$$y' + 2y + 2\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \Theta(t)$$

Laplaceovou transformací:

$$(pF - 0) + 2F + 2\frac{1}{p}F = \frac{1}{p}$$

$$(p^2 + 2p + 2)F = 1$$

$$F = \frac{1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{(p+1)^2 + 1}$$

odkud již vidíme

$$y = \Theta(t)e^{-t}\sin t$$

Příklad 6.18 *Nalezněte partikulární řešení diferenciální rovnice*

$$4ty'' + (4t + 8)y' + (t + 4)y = 0$$

kde $y(0_+) = a$.

Řešení. Nejprve si vypočteme některé Laplaceovy transformace:

$$\mathcal{L}[y] = F$$

$$\mathcal{L}[y'] = pF - a, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}[y'] = pF' + F$$

$$\mathcal{L}[y''] = p(pF - a) - a = p^2F - pa - a, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}[y''] = 2pF + p^2F' - a$$

Nyní transformujme rovnici:

$$4ty'' + 4ty' + 8y' + ty + 4y = 0$$

$$4(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}[y'']) + 4(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}[y']) + 8(\mathcal{L}[y']) + (-F') + 4F = 0$$

$$-4(2pF + p^2F' - a) - 4(pF' + F) + 8(pF - a) + (-F') + 4F = 0$$

$$-8pF - 4p^2F' + 4a - 4pF' - 4F + 8pF - 8a - F' + 4F = 0$$

$$-4p^2F' - 4a - 4pF' - F' = 0$$

$$F' = -\frac{4a}{4p^2 + 4p + 1} = -\frac{4a}{(2p+1)^2}$$

Integrací

$$F = \frac{a}{p + 1/2)} + c$$

Odtud je patrno

$$y = \Theta(t) a e^{-1/2t} + c\delta(t)$$

Z podmínky je $a = ae^0 + c$, tedy $c = 0$ a proto

$$y = \Theta(t) a e^{-1/2t}$$

Příklad 6.19 *Vypočtěte integrál*

$$\int_0^{+\infty} e^{-3t} \cos 3t \cos 4t \,\mathrm{d}t$$

Řešení. Vypočteme si Laplaceův obraz integrandu (upravíme si podle vzorce pro součin kosinů)

$$\mathcal{L}[e^{-3t} \cos 3t \cos 4t] = \mathcal{L}[e^{-3t}(\cos t + \cos 7t)] = \frac{1}{2}\left(\frac{p+3}{(p+3)^2+1} + \frac{p+3}{(p+3)^2+49}\right)$$

A nyní použijeme vzorce pro výpočet integrálu:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bt - \cos at}{t} \,\mathrm{d}t = \lim_{p \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{p+3}{(p+3)^2+1} + \frac{p+3}{(p+3)^2+49}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{3^2+1} + \frac{3}{3^2+49}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{10} + \frac{3}{58}\right) = \frac{51}{290}$$

7. Fundamentální řešení operátorů

Hledání fundamentálního řešení operátoru L je vlastně nalezení takové funkce $\mathcal{E}(t)$, která splňuje rovnici

$$L\mathcal{E}(t) = \delta(t)$$

Budeme často využívat faktu, že

$$\mathcal{F}\left[\Theta(t)e^{-at}\right](\xi) = \frac{1}{a - i\xi}$$

Většinou budeme používat toto značení:

$$\mathcal{F}[\mathcal{E}] \equiv E$$

Příklad 7.1 *Nalezněte fundamentální řešení operátoru*

$$L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a$$

kde $a > 0$.

Řešení.

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} + a\mathcal{E} = \delta(t)$$

Aplikujeme Fourierovu transformaci

$$(-i\xi)E + aE = 1$$

$$E = \frac{1}{a - i\xi}$$

$$\mathcal{E} = \Theta(t)e^{-at}$$

Příklad 7.2 *Nalezněte fundamentální řešení operátoru*

$$L = 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 12$$

užitím Fourierovy transformace.

Řešení.

$$2\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}x} - 12\mathcal{E} = \delta(t)$$

Aplikujeme Fourierovu transformaci

$$2(-i\xi)^2E + 2(-i\xi)E - 12E = 1$$

$$-2\xi^2E - 2i\xi E - 12E = 1$$

$$E = -\frac{1}{2}\frac{1}{\xi^2 + i\xi + 6}$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$E = -\frac{1}{2}\frac{1}{5i}\left(\frac{1}{\xi - 2i} - \frac{1}{\xi + 3i}\right) = \frac{1}{10(-i)}\left(\frac{1}{\xi - 2i} - \frac{1}{\xi + 3i}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{-2 - i\xi} - \frac{1}{3 - i\xi}\right)$$

a tedy

$$\mathcal{E} = \frac{\Theta(t)}{10}(e^{2t} - e^{-3t})$$

Příklad 7.4 *Nalezněte fundamentální řešení operátoru*

$$L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 2$$

Řešení.

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}}{\mathrm{d}x^2} + 3\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}x} + 2\mathcal{E} = \delta(x)$$

Aplikujeme Fourierovu transformaci:

$$(-i\xi)^2 E + 3(-i\xi)E + 2E = 1$$

$$-\xi^2 E - 3i\xi E + 2E = 1$$

$$E = -\frac{1}{\xi^2 + 3i\xi - 2} = \frac{-1}{(xi + i)(\xi + 2i)}$$

Rozkladem na parciální zlomky:

$$E = i\left(\frac{1}{\xi + i} - \frac{1}{\xi + 2i}\right) = \frac{1}{1 - i\xi} - \frac{1}{2 - i\xi}$$

Tedy

$$\mathcal{E} = \Theta(x)(e^{-x} - e^{-2x})$$

8. Cauchyova úloha pro vlnovou rovnici, pro rovnici vedení tepla a pro rovnici s obyčejnými derivacemi

Rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \triangle u = f(x,t), \quad u(x, 0_+) = u_0(x)$$

Zobecněná pravá strana je

$$\Theta(t) f(x,t) + u_0(x)\dot{\delta}(t)$$

a fundamentální řešení v $\mathbb{R}^{1+1}$:

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4a^2 t}}$$

Vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \triangle u = f(x,t), \quad u(x, 0_+) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0_+) = u_1(x)$$

Zobecněná pravá strana je

$$\Theta(t) f(x,t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t)$$

a fundamentální řešení v $\mathbb{R}^{1+1}$:

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2a} \Theta(at - |x|)$$

Řešení úlohy je dáno vzorcem

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x-at) + u_0(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$$

Příklad 8.1 *Řešte rovnici*

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = e^x$$

užitím fundamentálního řešení příslušného operátoru. Nalezněte takové řešení, pro které $y(0_+) = y'(0_+) = 0$.

Řešení. Fundamentální řešení je (z příkladu 7.4)

$$\mathcal{E}(x) = \Theta(x)(e^{-x} - e^{-2x})$$

Po přechodu ke zobecněné úloze je pravá strana

$$f(x) = \Theta(x) e^x$$

Řešení rovnice získáme konvolucí

$$y = \mathcal{E}{*}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(y)(e^{-y}{-}e^{-2y})\Theta(x{-}y)e^{x-y}\,\mathrm{d}y = \Theta(x)\int_0^x (e^{x-2y}{-}e^{x-3y})\,\mathrm{d}y =$$

$$= \Theta(x)e^x\left[-\frac{1}{2}e^{-2y}+\frac{1}{3}e^{-3y}\right]_0^x = \Theta(x)e^x\left(\frac{1}{2}e^{-3x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{6}\right) =$$

$$= \Theta(x)\left(\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{6}e^x\right)$$

Příklad 8.2 *Řešte rovnici*

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=e^x$$

s podmínkami $y(0_+)=2$, $y'(0_+)=1$.

Řešení. Fundamentální řešení je (z příkladu 7.4)

$$\mathcal{E}(x)=\Theta(x)(e^{-x}-e^{-2x})$$

Přejdeme ke zobecněné úloze, od klasického řešení y ke zobecněnému řešení $\widetilde{y}$:

$$\widetilde{y}=y$$

Aby mělo řešení v bodě 0 skok, musíme derivaci y' doplnit o člen s δ:

$$\widetilde{y}'=y'+2\delta(x)$$

Aby měla derivace řešení v bodě 0 skok, musíme druhou derivaci y'' doplnit o člen s δ:

$$\widetilde{y}''=y''+2\delta'(x)+\delta(x)$$

Zpětně vyjádříme klasické řešení

$$y=\widetilde{y}$$

$$y'=\widetilde{y}'-2\delta(x)$$

$$y''=\widetilde{y}''-2\delta'(x)-\delta(x)$$

a dosadíme do rovnice

$$(\widetilde{y}''-2\delta'(x)-\delta(x))+3(\widetilde{y}'-2\delta(x))+2\widetilde{y}=\Theta(x)e^x$$

$$\widetilde{y}''+3\widetilde{y}'+2\widetilde{y}=\Theta(x)e^x+7\delta(x)+2\delta'(x)$$

Řešení rovnice získáme konvolucí

$$\widetilde{y}(x)=\mathcal{E}(x)*(\Theta(x)e^x+7\delta(x)+2\delta'(x))$$

$$\mathcal{E}(x){*}\Theta(x)e^x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(y)(e^{-y}{-}e^{-2y})\Theta(x{-}y)e^{x-y}\,\mathrm{d}y = \Theta(x)\int_0^x (e^{x-2y}{-}e^{x-3y})\,\mathrm{d}y =$$

$$= \Theta(x)e^x \left[-\frac{1}{2}e^{-2y} + \frac{1}{3}e^{-3y}\right]_0^x = \Theta(x)e^x\left(\frac{1}{2}e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \Theta(x)\left(\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{6}e^x\right)$$

$$\mathcal{E}(x) * \delta(x) = \mathcal{E}(x) = \Theta(x)(e^{-x} - e^{-2x})$$

$$\mathcal{E}(x) * \delta'(x) = (\mathcal{E}(x) * \delta(x))' = \mathcal{E}'(x) =$$
$$= \Theta(x)(-e^{-x} + 2e^{-2x}) + \delta(x)(e^{-x} - e^{-2x}) = \Theta(x)(2e^{-2x} - e^{-x})$$

$$\widetilde{y}(x) = \Theta(x)\left(\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{6}e^x\right) + 7\Theta(x)(e^{-x} - e^{-2x}) + 2\Theta(x)(2e^{-2x} - e^{-x}) =$$

$$= \Theta(x)\left(\frac{1}{6}e^x + \frac{9}{2}e^{-x} - \frac{8}{3}e^{-2x}\right)$$

Příklad 8.3 *V $\mathbb{R}^{1+1}$ řešte rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x$$

s počátečními podmínkami $u(x, 0_+) = \sin x, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0_+) = x + \cos x$.

Řešení. Jedná se o vlnovou rovnici, tedy užijeme k řešení výše uvedeného vzorce:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x-at) + u_0(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(x-t) + \sin(x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (\xi + \cos\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} e^\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(x-t) + \sin(x+t)] + \frac{1}{2}[\frac{\xi^2}{2} + \sin\xi]_{x-t}^{x+t} + \frac{1}{2}\int_0^t [e^\xi]_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} =$$

$$= \sin(x+t) + xt + \frac{1}{2}(-e^{x+t}[e^{-\tau}]_0^t - e^{x-t}[e^\tau]_0^t) =$$

$$= \sin(x+t) + xt + \frac{1}{2}(-e^x + e^{x+t} - e^x + e^{x-t}) = \sin(x+t) + xt - e^x + \frac{1}{2}e^x(e^t + e^{-t}) =$$

$$= \sin(x+t) + xt - e^x + e^x\cosh t = \sin(x+t) + xt + e^x(\cosh t - 1)$$

Příklad 8.5 *Řešte smíšenou úlohu pro rovnici vedení tepla*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

při $x \geq 0$ s počáteční podmínkou $u(x,0_+) = \cos bx$, $b > 0$ a s okrajovou podmínkou $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$.

Řešení. Zobecněná úloha je

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(t)\cos bx$$

Fundamentální řešení je

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

Řešení úlohy získáme konvolucí

$$u(x,t) = \mathcal{E}(x,t) * \delta(t)\cos bx = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\xi^2}{4t}} \cos b(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\xi^2}{4t}} (\cos bx \cos b\xi + \sin bx \sin b\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\xi^2}{4t}} \cos bx \cos b\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \cos bx \sqrt{4\pi t} e^{-b^2 t} = \Theta(t)\cos bx e^{-b^2 t}$$

Příklad 8.8 *Metodami matematické fyziky řešte rovnici*

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - u = 4e^{-x}$$

Nalezněte takové řešení, pro něž platí $y(0_+) = 0$, $y'(0_+) = 0$.

Řešení. Použijeme Laplaceovu transformaci:

$$p^2 F - F = \frac{4}{p+1}$$

$$F = \frac{4}{(p-1)(p+1)^2}$$

Rozkladem na parciální zlomky:

$$F = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2}$$

A tedy

$$u = \Theta(x)(e^x - e^{-x} - 2xe^{-x}) = \Theta(x)(2\frac{e^x - e^{-x}}{2} - 2xe^{-x}) = 2\Theta(x)(\sinh x - xe^{-x})$$

Příklad 8.11 *Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla v $\mathbb{R}^{1+1}$*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t + e^t$$

za podmínky $u(x,0_+) = 2$.

Řešení. Zobecněná úloha je

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Theta(t)(t + e^t) + 2\delta(t)$$

Fundamentální řešení je

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\Theta(t)}{4\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{16t}}$$

Řešení úlohy získáme konvolucí

$$u(x,t) = \mathcal{E}(x,t) * (\Theta(t)(t + e^t) + 2\delta(t))$$

$$\mathcal{E}(x,t) * \Theta(t)(t+e^t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi \frac{\Theta(\eta)}{4\sqrt{\pi\eta}} e^{\frac{-\xi^2}{16\eta}} \Theta(t-\eta)(t-\eta+e^t e^{-\eta}) =$$

$$= \Theta(t) \int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi \frac{1}{4\sqrt{\pi\eta}} e^{\frac{-\xi^2}{16\eta}} (t-\eta+e^t e^{-\eta}) =$$

$$= \Theta(t) \int_0^t \frac{1}{4\sqrt{\pi\eta}} \sqrt{16\pi\eta}(t-\eta+e^t e^{-\eta})\,\mathrm{d}\eta =$$

$$= \Theta(t) \int_0^t (t-\eta+e^t e^{-\eta})\,\mathrm{d}\eta = \Theta(t)[t\eta - \frac{1}{2}\eta^2 - e^t e^{-\eta}]_0^t =$$

$$= \Theta(t)(\frac{1}{2}t^2 + e^t - 1)$$

$$\mathcal{E}(x,t) * 2\delta(t) = 2\frac{\Theta(t)}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\xi^2}{16t}}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= 2\frac{\Theta(t)}{4\sqrt{\pi t}} \sqrt{16\pi t} = 2\Theta(t)$$

$$u(x,t) = \Theta(t)(\frac{1}{2}t^2 + e^t + 1)$$

Příklad 8.12 *Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla v* $\mathbb{R}^{1+1}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}\cos x$$

za podmínky $u(x, 0_+) = \cos x$.

Řešení. Zobecněná úloha je

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\Theta(t)e^{-t} + \delta(t))\cos x$$

Fundamentální řešení je

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

Řešení úlohy získáme konvolucí

$$u(x,t) = \mathcal{E}(x,t) * (\Theta(t)e^{-t} + \delta(t))\cos x$$

$$\mathcal{E}(x,t)*\Theta(t)e^{-t}\cos x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\eta \frac{\Theta(\eta)}{2\sqrt{\pi\eta}} e^{\frac{-\xi^2}{4\eta}} \Theta(t-\eta) e^{-(t-\eta)} \cos(x-\xi) =$$

$$= \Theta(t)e^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi \int_0^t \mathrm{d}\eta \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta}} e^{\frac{-\xi^2}{4\eta}} e^{\eta} (\cos x \cos\xi + \sin x \sin\xi))$$

Člen násobený $\sin\xi$ vypadne, protože se integruje přes celé $\mathbb{R}$ a sinus je lichý:

$$= \cos x \Theta(t) e^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi \int_0^t \mathrm{d}\eta \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta}} e^{\frac{-\xi^2}{4\eta}} e^{\eta} \cos\xi$$

Vyintegrujeme přes ξ (viz příklad (1.5)):

$$= \cos x \Theta(t) e^{-t} \int_0^t \mathrm{d}\eta \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta}} 2\sqrt{\pi\eta} e^{-\eta} e^{\eta} = \Theta(t) e^{-t} \cos x \int_0^t \mathrm{d}\eta = \Theta(t) t e^{-t} \cos x$$

$$\mathcal{E}(x,t) * \delta(t) \cos x = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi e^{\frac{-\xi^2}{4t}}) \cos(x-\xi) =$$

$$= \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi e^{\frac{-\xi^2}{4t}}) \cos x \cos\xi =$$

$$= \Theta(t) e^{-t} \cos x$$

$$u(x,t) = \Theta(t) e^{-t} \cos x (1+t)$$

Příklad 8.14 *Nalezněte funkci $u \in \mathscr{D}'$ splňující rovnost*

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - 4\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + 4u = xe^{2x} + \delta'(x) - 2\delta(x)$$

Řešení. Nejprve nalezneme fundamentální řešení operátoru na levé straně Fourierovou transformací:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{E}}{\mathrm{d}x^2} - 4\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}x} + 4\mathcal{E} = \delta(x)$$

$$(-i\xi)^2 E + 4i\xi E + 4E = 1$$

$$E = \frac{1}{(-2-i\xi)^2}$$

$$\mathcal{E} = \Theta(x) x e^{2x}$$

Partikulární řešení získáme konvolucí

$$u = \Theta(x)(xe^{2x} + \delta'(x) - 2\delta(x)) * (\Theta(x) x e^{2x}) =$$

$$= (\Theta(x)xe^{2x}) * (\Theta(x)xe^{2x}) + \Theta(x)\delta'(x) * (\Theta(x)xe^{2x}) - 2\Theta(x)xe^{2x}$$

$$(\Theta(x)xe^{2x}) * (\Theta(x)xe^{2x}) = \Theta(x)\int_0^x \xi e^{2\xi}(x-\xi)e^{2(x-\xi)} =$$
$$= \Theta(x)e^{2x}[\frac{1}{2}x\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3]_0^x = \frac{1}{6}\Theta(x)e^{2x}x^3$$

$$\Theta(x)\delta'(x) * (\Theta(x)xe^{2x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Theta(x)\delta(x)) * (\Theta(x)xe^{2x}) =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x)\int_0^x \xi e^{2\xi}\delta(x-\xi) = (\Theta(x)xe^{2x})' = \Theta(x)(2xe^{2x} + e^{2x})$$

$$u = \frac{1}{6}\Theta(x)e^{2x}x^3 + \Theta(x)e^{2x}(2x+1) - 2x\Theta(x)e^{2x} = \Theta(x)e^{2x}(\frac{1}{6}x^3 + 1)$$

Příklad 8.15 *Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla v* $\mathbb{R}^{1+1}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t + e^t$$

za podmínky $u(x, 0_+) = 10$.

Řešení. Zobecněná úloha je

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Theta(t)(t + e^t) + 10\delta(t)$$

Fundamentální řešení je

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{6\pi t}}e^{\frac{-x^2}{24t}}$$

Řešení úlohy získáme konvolucí

$$u(x,t) = \mathcal{E}(x,t) * (\Theta(t)(t+e^t) + 10\delta(t))$$

$$\mathcal{E}(x,t) * \Theta(t)(t+e^t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\xi\frac{\Theta(\eta)}{2\sqrt{6\pi\eta}}e^{\frac{-\xi^2}{24\eta}}\Theta(t-\eta)(t-\eta+e^te^{-\eta}) =$$
$$= \Theta(t)\int_0^t\mathrm{d}\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\xi\frac{1}{2\sqrt{6\pi\eta}}e^{\frac{-\xi^2}{24\eta}}(t-\eta+e^te^{-\eta}) =$$
$$= \Theta(t)\int_0^t\frac{1}{2\sqrt{6\pi\eta}}\sqrt{24\pi\eta}(t-\eta+e^te^{-\eta})\,\mathrm{d}\eta =$$
$$= \Theta(t)\int_0^t(t-\eta+e^te^{-\eta})\,\mathrm{d}\eta = \Theta(t)[t\eta - \frac{1}{2}\eta^2 - e^te^{-\eta}]_0^t =$$
$$= \Theta(t)(\frac{1}{2}t^2 + e^t - 1)$$

$$\mathcal{E}(x,t) * 10\delta(t) = 10\frac{\Theta(t)}{2\sqrt{6\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\xi^2}{24t}}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= 10\frac{\Theta(t)}{2\sqrt{6\pi t}}\sqrt{24\pi t} = 10\Theta(t)$$

$$u(x,t) = \Theta(t)(\frac{1}{2}t^2 + e^t + 9)$$

Příklad 8.16 *Nalezněte funkci $u(x,t)$ takovou, aby vyhovovala rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x$$

s počátečními podmínkami $u(x,0_+) = \sin x, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0_+) = x + \cos x.$

Řešení. Jedná se o příklad (8.3), viz též.