Obsah

Část 1. Topologické prostory 1

1.1 Topologické struktury 1

1.2 Vnitřek, vnějšek, hranice 2

1.3 Uzávěr množiny 3

1.4 Lokální báze, báze, systémy generátorů 5

1.5 Topologické prostory prvního a druhého typu spočetnosti 7

1.6 Husté množiny a separabilní prostory 8

1.7 Hausdorffovy prostory 8

1.8 Příklady 8

Cvičení 11
Topologické struktury . . . 11
Podmnožiny topologických prostorů . . . 12
Hausdorffovy prostory . . . 14
Hromadné body . . . 15

Část 2. Spojitá zobrazení 17

2.1 Spojitá zobrazení, homeomorfismy 17

2.2 Srovnatelné topologie 19

2.3 Iniciální topologie 19

2.4 Finální topologie 21

2.5 Příklady 22

Cvičení 24
Spojitá zobrazení . . . 24
Uzavřená zobrazení . . . 26
Srovnání topologií . . . 26
Iniciální a finální topologie . . . 27

Část 3. Podprostory, součiny, faktorové prostory 31

3.1 Podprostory topologického prostoru 31

3.2 Součin dvou topologických prostorů 33

3.3 Součin systému topologických prostorů 35

3.4 Ekvivalence a faktorové prostory 38

3.5 Ekvivalence asociovaná se zobrazením 40

3.6 Oddělitelnost faktorového prostoru 42

3.7 Příklady 43

Cvičení 47

Podprostory 47
Euklidův topologický prostor 48
Spojitá zobrazení a homeomorfismy 50
Součin topologických prostorů 54
Silný součin topologických prostorů 56
Faktorové prostory 57

Část 4. Sítě 87

4.1 Sítě 87

4.2 Konvergentní sítě 88

4.3 Třídy konvergence 91

4.4 Konvergence v prostorech prvního typu spočetnosti 93

4.5 Příklady 94

Cvičení 98

Sítě v topologických prostorech 98
Hromadné body sítí 101
Sekvenční a Fréchetovy prostory 102
Filtry 105
Topologie, generovaná systémem filtrů 109

Část 5. Metrické prostory 111

5.1 Metrika 111

5.2 Metrická topologie 112

5.3 Spojitá zobrazení metrických prostorů 113

5.4 Podprostory a součiny metrických prostorů 114

5.5 Úplné metrické prostory 117

5.6 Stejnoměrně spojitá zobrazení 118

5.7 Kontrakce 120

5.8 Zúplnění metrického prostoru 121

5.9 Uniformní metrika 123

5.10 Příklady 125

Cvičení 129
Metrika, metrická topologie . . . 129
Stejnoměrně spojitá zobrazení . . . 135
Cauchyovské posloupnosti, úplné metrické prostory . . . 136
Kontrakce, izometrie . . . 137
Bodová a stejnoměrná konvergence . . . 138

Část 6. Regulární, normální a parakompaktní prostory 141

6.1 Regulární prostory 142

6.2 Normální prostory 143

6.3 Bodově konečné a lokálně konečné systémy množin 149

6.4 Rozklad jednotkové funkce 151

6.5 Metrizovatelné normální prostory 152

6.6 Parakompaktní prostory 157

6.7 Příklady 163

Cvičení 169
Oddělovací axiomy . . . 169
Metrizovatelné topologické prostory . . . 174
Topologické grupy . . . 176
Topologické vektorové prostory . . . 179
Normované prostory . . . 184
Unitární prostory . . . 189

Část 7. Kompaktní a lokálně kompaktní prostory 195

7.1 Kompaktní prostory 195

7.2 Součin kompaktních prostorů 197

7.3 Kompaktní Hausdorffovy prostory 198

7.4 Lokálně kompaktní prostory 200

7.5 σ-kompaktní prostory 203

7.6 Úplně regulární prostory 204

7.7 Kompaktifikace topologického prostoru 206

7.8 Příklady 210

Cvičení 218
Kompaktní topologické prostory . . . 218
Sítě a filtry v kompaktním prostoru . . . 222
Součin kompaktních prostorů . . . 224
Kompaktní metrické prostory . . . 225
Lokálně kompaktní topologické prostory . . . 228

Parakompaktní topologické prostory 231
Topologické variety 236
Kompaktifikace topologického prostoru 241

Část 8. Souvislé a lokálně souvislé prostory **249**

8.1Souvislé prostory **249**

8.2Lokálně souvislé prostory **254**

8.3Obloukově souvislé prostory **256**

8.4Příklady **257**

Cvičení **260**
Souvislé topologické prostory 260
Lokálně souvislé prostory 264
Obloukově souvislé prostory 265

I. Základní množinové operace

Pro libovolné podmnožiny A, B, C množiny X platí

$$\begin{aligned}
&\text{(I.1)} && A \cup B = B \cup A,\\
&\text{(I.2)} && A \cap B = B \cap A,\\
&\text{(I.3)} && A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\\
&\text{(I.4)} && A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,\\
&\text{(I.5)} && A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),\\
&\text{(I.6)} && A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\\
&\text{(I.7)} && C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B),\\
&\text{(I.8)} && C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B),\\
&\text{(I.9)} && A \setminus B = A \cap (X \setminus B),\\
&\text{(I.10)} && (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C),\\
&\text{(I.11)} && X \setminus (A \setminus B) = B \cup (X \setminus A).
\end{aligned}$$

Vztahy (1.7) a (1.8) se nazývají *de Morganova pravidla.*
Buďte $(A_\iota)_{\iota \in I}$, $(B_\kappa)_{\kappa \in K}$ systémy podmnožin množiny X. Platí

$$\begin{aligned}
&\text{(I.12)} && \Big(\bigcup_\iota A_\iota\Big) \cap \Big(\bigcup_\kappa B_\kappa\Big) = \bigcup_{\iota,\kappa} (A_\iota \cap B_\kappa)\,,\\
&\text{(I.13)} && \Big(\bigcap_\iota A_\iota\Big) \cup \Big(\bigcap_\kappa B_\kappa\Big) = \bigcap_{\iota,\kappa} (A_\iota \cup B_\kappa)\,,\\
&\text{(I.14)} && X \setminus \Big(\bigcup_\iota A_\iota\Big) = \bigcap_\iota (X \setminus A_\iota)\,,\\
&\text{(I.15)} && X \setminus \Big(\bigcap_\iota A_\iota\Big) = \bigcup_\iota (X \setminus A_\iota).
\end{aligned}$$

Vztahy (I.14) a (I.15) se nazývají *de Morganova pravidla* (pro systémy množin).
Buďte X, Y množiny, $X \times Y$ jejich *součin*, tj. množina všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in X$, $y \in Y$; pojem *uspořádané dvojice* je zde chápán jako primitivní. Pro libovolné množiny U_1, $U_2 \subset X$, V_1, $V_2 \subset Y$ platí

$$\begin{aligned}
&\text{(I.16)} && (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)\,,\\
&\text{(I.17)} && (U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2) \subset (U_1 \cup U_2) \times (V_1 \cup V_2)\,.
\end{aligned}$$

Množina $f \subset X \times Y$ se nazývá *funkcionální graf* nebo také *zobrazení* X do Y, jestliže ke každému $x \in X$ existuje právě jeden element $y \in Y$ tak, že $(x, y) \in f$; prvek y se pak nazývá *hodnota* nebo *funkční hodnota* zobrazení f v bodě x a označuje $f(x)$ nebo f_x. Samotné zobrazení f označujeme symboly $f = (f_x)_{x \in X}$, $f : X \to Y$, $f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$.
Buď $f : X \to Y$ zobrazení. *Obraz* $f(A)$ množiny $A \subset X$ je definován jako množina všech bodů $y \in Y$ splňujících podmínku "existuje bod $x \in A$ tak, že $y = f(x)$". *Vzor* $f^{-1}(A')$ množiny $A' \subset Y$ je definován jako množina všech bodů $x \in X$ takových, že $f(x) \in A'$. f se nazývá *surjektivní*, jestliže $f(X) = Y$; f se nazývá *injektivní*, jestliže z

podmínky $f(x_1) = f(x_2)$ vyplývá $x_1 = x_2$; f se nazývá *bijektivní*, jestliže je surjektivní a injektivní.

Buď $f : X \to Y$ bijektivní zobrazení. Podle definice ke každému $y \in Y$ existuje právě jeden element $x \in X$ tak, že $y = f(x)$. Množina $f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid y = f(x)\}$ je tedy zobrazení Y do X; nazývá se *inverzní zobrazení* k zobrazení f.

Buď $f : X \to Y$ zobrazení. Předpokládejme, že existují zobrazení g, $h : Y \to X$ taková, že $g(f(x)) = x$ pro každé $x \in X$ a $f(h(y)) = y$ pro každé $y \in Y$. Pak f je bijekce a $g = h = f^{-1}$.

Buď $f : X \to Y$ zobrazení. Pro libovolné množiny $A, B \subset X$ a libovolný systém množin $(A_\iota)_{\iota \in I}$, kde $A_\iota \subset X$, platí vztahy

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \tag{I.18}$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B), \tag{I.19}$$
$$f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B), \tag{I.20}$$
$$f\Big(\bigcup_\iota A_\iota\Big) = \bigcup_\iota f(A_\iota), \tag{I.21}$$
$$f\Big(\bigcap_\iota A_\iota\Big) \subset \bigcap_\iota f(A_\iota). \tag{I.22}$$

Pro libovolné množiny A', $B' \subset Y$ a libovolný systém $(A_\iota)_{\iota \in I}$ podmnožin množiny Y platí

$$f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B'), \tag{I.23}$$
$$f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B'), \tag{I.24}$$
$$f^{-1}(A' \setminus B') = f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B'), \tag{I.25}$$
$$f(f^{-1}(A')) = A' \cap f(X), \tag{I.26}$$
$$f^{-1}\Big(\bigcup_\iota A'_\iota\Big) = \bigcup_\iota f^{-1}\left(A'_\iota\right), \tag{I.27}$$
$$f^{-1}\Big(\bigcap_\iota A'_\iota\Big) = \bigcap_\iota f^{-1}\left(A'_\iota\right). \tag{I.28}$$

Dále

$$A \subset f^{-1}(f(A)), \tag{I.29}$$
$$f(A) \cap A' = f(A \cap f^{-1}(A')). \tag{I.30}$$

Je-li f injektivní, pak

$$f^{-1}(f(A)) = A. \tag{I.31}$$

Je-li f surjektivní, pak

$$f(f^{-1}(A')) = A'. \tag{I.32}$$

II. Uspořádání

Binární relace $\leq$ na neprázdné množině X se nazývá *uspořádání*, jestliže jsou splněny tyto podmínky:

(1) Platí pro elementy $x, y, z \in X$ $x \leq y$, $y \leq z$, pak $x \leq z$.

(2) Pro každé $x \in X$ platí $x \leq x$.

(3) Platí-li pro elementy $x, y \in X$ $x \leq y$ a $y \leq x$, pak $x = y$. Binární relace $\leq$ se nazývá *úplné uspořádání*, je-li kromě podmínek (1), (2), (3) splněna ještě tato podmínka:

(4) Pro libovolné dva elementy x, $y \in X$ platí buď $x \leq y$ nebo $y \leq x$.

Množina X spolu s daným uspořádáním (resp. úplným uspořádáním) se nazývá *uspořádaná* (resp. *úplně uspořádaná*) množina.

Všimněme si, že podmínka (2) vyplývá z podmínky (4).

Binární relaci $x \leq y$, $x \neq y$, označujeme symbolem $x < y$. Platí-li $x \leq y$ (resp. $x < y$), píšeme také $y \geq x$ (resp. $y > x$).

Uspořádání (resp. úplné uspořádání) na množině X přirozeným způsobem definujeme uspořádáním (resp. úplné uspořádání) na libovolné neprázdné množině X.

Buď X uspořádaná množina s uspořádáním $\leq$. Elementy x, $y \in X$ se nazývají *srovnatelné*, platí-li buď $x \leq y$ nebo $y \leq x$. Uspořádání $\leq$ je úplné uspořádání tehdy a jen tehdy, jsou-li libovolné dva elementy x, $y \in X$ srovnatelné.

Buď X úplně uspořádaná množina. Pro libovolná a, $b \in X$, $a \leq b$, klademe $[a, b] = \{x \in X \,|\, a \leq x \leq b\}$, $(a, b] = \{x \in X \,|\, a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x \in X \,|\, a \leq x < b$, $(a, b) = \{x \in X \,|\, a < x < b\}$. Množina $[a, b]$ (resp. $(a, b]$, resp. $[a, b)$, resp. (a, b)) se nazývá *uzavřený interval* (resp. *zleva otevřený zprava uzavřený interval*, resp. *zleva uzavřený zprava otevřený interval*, resp. *otevřený interval*) s *levým koncem a* a *pravým koncem b*.

Bod x_0 uspořádané množiny X se nazývá *minimální* (resp. *maximální*), jestliže z podmínky $x \leq x_0$ (resp. $x \geq x_0$) vyplývá $x = x_0$. Uspřádaná množina nemusí mít žádný minimální či maximální element nebo jich může mít více. Bod x_0 se nazývá *horní* (resp. *dolní*) *závora* množiny $A \subset X$, platí-li $x \leq x_0$ (resp. $x \geq x_0$) pro každé $x \in A$. Existuje-li horní (resp. dolní) závora množiny A, A se nazývá *shora* (resp. *zdola*) *omezená*. Množina A se nazývá *omezená*, je-li shora omezená i zdola omezená.

Buď A podmnožina uspopřádané množiny X, B_A množina všech horních (resp. dolních) závor A. Platí-li $B_A \neq \emptyset$, element $y_0 \in B_A$ pro který $y_0 \leq y$ (resp. $y_0 \geq y$) pro každé $y \in B_A$, se nazývá *supremum* (resp. *infimum*) množiny A nemusí vždy existovat.

Úplné uspppořádání na množině X se nazývá *dobré uspořádání*, obsahuje-li každá neprázdná podmnožina A množiny X minimální element. Množina X spolu s dobrým uspořádáním se nazývá *dobře uspořádaná množina*.

Každá neprázdná podmnožina dobře uspořádané množiny je dobře uspořádaná množina a obsahuje právě jeden minimální element.

Úsekem dobře uspořádané množiny X rozumíme podmnožinu A množiny X spolu s dobrým uspořádáním definovaným z X takovo, že pro každé $x_0 \in A$ a $x \in X$ pro které $x \leq x_0$ platí $x \in A$. Pro libovolné $y \in X$ množina $X_y = \{x \in X \,|\, x < y\}$ je úsek X; X_y se nazývá úsek *určený* prvkem y. Evidentně $X_y \neq X$. Na druhé straně je-li $A \subset X$ úsek takový, že $A \neq X$, pak $A = \{x \in X \,|\, x < y\}$, kde y je minimální element množiny $X \backslash A$; platí tedy $A = X_y$. Je-li y minimální element X, pak $X_y = \emptyset$.

III. Axiom výběru

Buď X uspořádaná množina. Množina všech úplně uspořádaných podmnožin množiny X spolu s množinovou inkluzí $\subset$ je uspořádaná množina; každý její maximální element se nazývá *maximální úplně uspořádaná podmnožina* množiny X.

Budeme říkat, že systém množin σ má *konečný charakter*, jsou-li splněny tyto podmínky:

(1) Pro libovolnou množinu $A \subset \sigma$ a libovolnou konečnou podmnožinu $B \subset A$ platí $B \in \sigma$.

(2) Je-li A množina taková, že libovolná konečná podmnožina $B \subset A$ patří systému σ, pak $A \in \sigma$.

Věta 1. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *Pro libovolnou neprázdnou množinu X a libovolný systém $(A_\iota)_{\iota \in I}$ neprázdných podmnožin množiny X existuje funkce $f : I \to X$ taková, že $f(\iota) \in A_\iota$ pro každé $\iota \in I$.*

(2) *Na každé množině existuje dobré uspořádání.*

(3) *Každá úplně uspořádaná podmnožina uspořádané množiny je obsažena v nějaké maximální úplně uspořádané podmnožině.*

(4) *Má-li systém množin konečný charakter, pak každý jeho element je osažen v jistém maximálním elementu.*

(5) *Je-li každá úplně uspořádaná podmnožina uspořádané množiny X shora omezená, pak každý element $x \in X$ je srovnatelný s nějakým maximálním elementem.*

Důkaz. Ukážeme, že z podmínky (1) vyplývá podmínka (2). Buď X libovolná neprázdná množina. Předpokládejme, že je dáno zobrazení f přiřazující každé neprázdné množině $A \subset X$ bod $f(A) \in A$. Řekněme, že množina A je *označená*, jsou-li splněny tyto podmínky: (a) Na A existuje dobré uspořádání; (b) pro každá $a \in A$ platí $f(X \backslash A_a)\{a\}$, kde A_a označuje úsek množiny A (s tímto dobrým uspořádáním) určeným bodem a (viz odst. II). Označené množiny existují: vezmeme-li např. $A\{a\}$, kde $\{a\} = f(X)$, pak $A_a = \emptyset$ a $f(X \backslash A_a) = f(X) = \{a\}$.

Mějme dvě označené množiny A, $B \subset X$. Ukážeme, že buď A je úsekem B nebo B je úsekem A. *Společným úsekem* označených množin A, B budeme rozumět podmnožinu $C \subset A \cap B$ takovou, že C je úsek A i B. Označme a (resp. b) minimální prvek A (resp. B). Pak $A_a = \emptyset$, $B_b = \emptyset$ a tedy $f(X \backslash A_a) = \{a\} f(X) = f(X \backslash B_b) = \{b\}$. $f(X)$ je tedy minimální prvek A i B. $\{f(X)\}$ je ovšem úsek A i úsek B, takže množina všech společných úseků A a B je neprázdná. Označme C' sjednocení všech společných úseků A a B. C' je zřejmě také společný úsek A a B; je to tedy největší ze všech společných úseků A a B. Předpokládejmě, že $C' \neq A, B$. Pak $C' = A_y = B_z$ pro jisté $y \in A$, $z \in B$ a jelikož množiny A, B jsou označené, platí $f(X \backslash A_y) = \{y\}$, $f(X \backslash B_z) = \{z\}$, t.j. $\{y\} = \{z\} = f(X \backslash C')$. To ovšem znamená, že $C \ = C' \cup \{f(X \backslash C')\}$ je také společný úsek A a B, což je spor s definicí C' jako největšího společného úseku A a B. Alespoň jedna z množin A, B musí být tedy rovna C', t.j. buď A je úsekem B nebo B je úsekem A.

Nyní ukážeme, že sjednocení Y všech označených množin je označená množina.

Pro libovolné dva body a, $b \in Y$ klademe $a \leq b$ tehdy a jen tehdy když existuje označená množina A tak, že a, $b \in A$ a $a \leq b$ v A. Relace $a \leq b$ na Y je definována korektně: platí-li totiž, že a, $b \in A$, a, $b \leq B$, kde B je delší označená množina, pak buď A je úsek B nebo B je úsek A a tedy $a \leq b$ v A tehdy a jen tehdy když $a \leq b$ v B. Z definice přímo vyplývá, že tato relace je úplné uspořádání na Y.

Ukážeme, že Y je dobře uspořádaná množina. Buď $Y_0 \subset Y$ libovolná neprázdná množina. Každému $z \in Y_0$ přiřadíme označenou množinu $A(z) \subset Y$ tak, že $z \in A(z)$. Zvolme bod $z_0 \in Y_0$. Je-li z_0 minimální, není co dokazovat. Předpokládejme, že z_0 není minimální bod. Existují tedy body $z \in Y_0$ pro které $z \leq z_0$, $z \neq z_0$ (v Y_0). Pro každé takové z $A(z)$ musí být úsekem $A(z_0)$ nebo $A(z_0)$ musí být úsekem $A(z)$. V obou případech podmínka $z \leq z_0$, $neqz_0$ zaručuje, že $z \in A(z_0)$. Uvažujme úsek

$\{z \in Y_0 \,|\, z \leq z_0, z \neq z_0\} \subset A(z_0)$ a označme w její minimální element (v množině $A(z_0)$). Buď $u \in Y_0$ libovolný element pro který $u \leq w$ (v Y_0). Pak $u \in A(z_0)$ a $u \leq w$ v $A(z_0)$ a z minimálnosti w vyplývá, že $u = w$. w je tedy minimální element Y_0 a Y je dobře uspořádaná množina.

Buď $a \in Y$ libovolný bod, A libovolná označená množina obsahující a, $Y_a = \{z \in Y \,|\, z \leq a, z \neq a\}$ (resp. $A_a = \{z' \in A \,|\, z' \leq a, z' \neq a\}$) úsek v Y (resp. A) určený bodem a. Bod $z \in Y_a$ padne do jisté označené množiny B a buď B je úsek A nebo A je úsek B; v obou případech podmínka $z \leq a$, $z \neq a$ zaručuje, že $z \in A_a$ a obráceně podmínka $z \in A_a$ zaručuje, že $z \in Y_a$. Platí tedy $Y_a = A_a$. Odtud $f(X \backslash Y_a) = f(X \backslash A_a) = \{a\}$.

Množina Y je tedy označená a je to zřejmě největší označená množina v X. Předpokládáme-li, že $Y \neq X$, t.j. $X \backslash Y \neq \emptyset$, pak podle předpokladu $f(X \backslash Y) = \{z_0\} \in X \backslash Y$ a množina $Y' = Y \cup \{z_0\}$ je označená. Skutečně, položíme-li $z_0 > x$ pro každé $x \in Y$, dostaneme dobré uspořádání na Y'. V tomto uspořádání úsek určený bodem z_0 splývá s Y, t.j. $Y'_{z_0} = Y$. Odtud $f(X \backslash Y'_{z_0}) = \{z_0\}$. Dále pro libovolné $a \in Y'$, $a \neq z_0$, platí $Y'_a = Y_a$ a tedy $f(X \backslash Y'_a) = f(X \backslash Y_a) = \{a\}$ jelikož Y je označená množina. Na základě předpokladu, že $Y \neq X$ jsme tedy zkonstruovali označenou množinu Y' větší než Y. To je ovšem spor, který ukazuje, že $Y = X$.

2. Ukážeme, že z podmínky (2) vyplývá podmínka (3). Buď X uspořádaná množina, $A \subset X$ její úplně uspořádaná podmnožina. Platí-li $A = X$, podmínka (3) je splněna. Předpokládejme, že $A \neq X$. Z (2) vyplývá, že na $B = X \backslash A$ existuje dobré uspořádání $\leq$. Využijeme tohoto dobrého uspořádání ke konstrukci jisté podmnožiny $C_A \subset B$.

Buď $x \in B$ libovolný bod. Označme B_x množinu všech $x' \in B$, $x' \leq x$, srovnatelných s každým bodem $a \in A$ i s bodem x (v uspořádání množiny X). Není-li bod x srovnatelný s každým bodem $a \in A$ i s bodem x (v uspořádání množiny X). Není-li bod x srovnatelný s nějakým bodem $a \in A$, pak $B_x = \emptyset$; je-li srovnatelný s každým bodem $a \in A$, pak $x \in B_x$ a $B_x \neq \emptyset$. Z tranzitivity uspořádání vyplývá, že každé dva body x_1, $x_2 \in A \cup B_x$ jsou srovnatelné; množina $A \cup B_x$ je tedy úplně uspořádaná podmnožina množiny X. Klademe $C_A = \bigcup_{x \in B}(A \cup B_x)$. Pak libovolné dva body x_1, $x_2 \in C_A$ jsou evidentně srovnatelné, takže C_A je úplně uspořádaná podmnožina množiny X.

Je-li $C_A = X$, pak je podmínka (3) splněna. Předpokládejme, že $C_A \neq X$. Buď $y \in X \backslash C$ bod. Pak $B_y = \emptyset$, t.j. existuje element $a \in A$ takový, že y a a nejsou srovnatelné. Množina $C_A \cup \{y\}$ již tedy není úplně uspořádaná. C_A je tudíž maximální úplně uspořádaná podmnožina v X obsahující A.

3. Ukážeme, že z podmínky (3) vyplývá podmínka (4). Buď σ systém podmnožin množiny X. Předpokládejme, že σ má konečný charakter. Nechť ν je libovolná úplně uspořádaná množina v σ (vzhledem k množinové inkluzi $\subset$). Podle předpokladu existuje maximální úplně uspořádaná množina $\nu_0 \subset \sigma$ tak, že $\nu \subset \nu_0$. Označme A_0 sjednocení všech elementů ν_0.

Ukážeme, že $A_0 \in \sigma$. Pro libovolnou konečnou podmnožinu $B \subset A$ platí $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ pro jisté k, kde každá z množin B_i leží v jisté množině A_i patřící ν_0. Jelikož ν_0 je úplně uspořádaná, konečný systém množin $\{A_1, \ldots, A_k\} \subset \nu_0$ má největší element A_s. Každá z množin B_i je obsažena v A_s. Platí tedy $B \subset A_s$. Podle definice systému množin konečného charakteru z toho, že $B \subset A_s$, vyplývá, že $B \in \sigma$ a z libovolnosti B vyplývá, že $A_0 \in \sigma$.

Ovšem $\nu_0 \cup \{A_0\}$ je úplně uspořádaná podmnožina σ, takže z maximalnosti ν_0 vyplývá, že $A_0 \in \nu_0$.

Buď $C \in \sigma$ libovolný element. Klademe $\nu = \{C\}$. Pak $C \subset A_0$. Existuje-li $D \in \sigma$ tak, že $A_0 \subset D$, systém $\nu_0 \cup \{D\}$ je úplně uspořádaný, takže z maximality ν_0 dostáváme $A_0 = D$. A_0 je tedy maximální element systému σ obsahující element C systému σ.

4. Ukážeme, že z podmínky (4) vyplývá podmínka (5). Buď X uspořádaná množina, $\leq$ její uspořádání. Buď σ systém všech úplně uspořádaných podmnožin množiny X. σ je evidentně konečného charakteru; je-li množina $A \subset X$ úplně uspořádaná, pak libovolná její konečná podmnožina je úplně uspořádána; je-li libovolná konečná podmnožina množiny A úplně uspořádána, pak A je také úplně uspořádaná. Z podmínky (4) tedy vyplývá, že každá úplně uspořádaná množina A leží v maximální úplně uspopřádané množině A_0.

Buď $x \in X$ libovolný bod. Klademe $A = \{x\}$. Podle předpokladu úplně uspořádaná množina A_0 je shora omezená. Existuje tedy bod $x_0 \in X$ tk, že $y \leq x_0$ pro každé $y \in A_0$. Tvrdíme, že x_0 je maximální element X. Předpokládejme, že pro bod $y' \in X$ platí $x_0 \leq y'$.

Pak $A_0 \cup \{y'\}$ je úplně uspořádaná množina; ovšem z maximálnosti A_0 vyplývá, že $y' = x_0$. To dokazuje, že x_0 je maximální bod.

5. Nakonec ukážeme, že z podmínky (5) vyplývá podmínka (1). Buď $(X_\iota)_{\iota \in I}$ systém neprázdných množin. Označme P množinu všech dvojic (J, f), kde $J \subset I$ a $f : J \to \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$ je zobrazení takové, že $f(\iota) \in X_\iota$ pro každé $\iota \in J$. Relace " $(J_1, f_1) \leq (J_2, f_2)$ tehdy a jen tehdy, když $J_1 \subset J_2$ a $f_1(\iota) = f_2(\iota)$ pro každé $\iota \in J_1$ " je uspořádání na P. Buď $Q = ((J_\kappa, f_\kappa))_{\kappa \in K}$ úplně uspořádaná podmnožina P. Klademe $J_0 = \bigcup J_\kappa, f_0(\iota) = f_\kappa(\iota), \iota \in J_\kappa$. Dvojice (J_0, f_0) je element P a pro každé $\kappa \in K$ platí $(J_\kappa, f_\kappa) \leq (J_0, f_0)$. Úplně uspořádaná množina $Q \subset P$ má tedy horní závoru. Z podmínky (5) vyplývá, že v P existují maximální elementy.

Buď (J, f) maximální element. Abychom ukázali, že je splněna podmínka (1), stačí ukázat, že $J = I$. Předpokládejme, že $J \neq I$. Pak existuje index $\iota_0 \in I \backslash J$; zvolíme $x_0 \in X_{\iota_0}$ a položíme $J' = J \cup \{\iota_0\}, f'(\iota) = f(\iota)$ pro $\iota \in I$ a $f'(\iota_0) = x_0$. Dostaneme dvojici $(J, f) \in P$ pro kterou $(J, f) \leq (J', f')$, $(J, f) \neq (J', f')$, což je spor s maximálností (J, f).

Tím je důkaz věty ukončen.

Podmínka (1) (resp. (2), resp. (3), resp. (4), resp. (5)) z výše uvedené věty se nazývá *axiom výběru* (resp. *Zermelova podmínka*, resp. *Hausdorffova podmínka*, resp. *Tukeyho podmínka*, resp. *Kuratowského–Zornova podmínka*).

Podmínky (2)–(5) jsou tedy ekvivalentní s axiomem výběru. V tomto skriptu budeme předpokládat, že je splněna každá z (ekvivalentních) podmínek (1)–(5).

IV. Reálná čísla

Množina P spolu se zobrazeními $P \times P \ni (x, y) \to x + y \in P$, $P \times P \ni (x, y) \to x \cdot y \in P$ se nazývá *pole*, jestliže jsou splněny tyto podmínky:

(1) Pro každé x, y, $z \in P$ platí $x + (y + z) = (x + y) + z$.
(2) Pro každé x, $y \in P$ platí $x + y = y + x$.
(3) Existuje prvek $0 \in P$ takový, že $0 + x = x$ pro každé $x \in P$.
(4) Ke každému $x \in P$ existuje prvek $-x \in P$ takový, že $x + (-x) = 0$.
(5) Pro každé x, y, $z \in P$ platí $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
(6) Pro každé x, $y \in P$ platí $x \cdot y = y \cdot x$.
(7) Existuje prvek $1 \in P$ různý od 0 takový, že $1 \cdot x = x$ pro každé $x \in P$.
(8) Ke každému $x \in P$, $x \neq 0$, existuje prvek $x^{-1} \in P$ takový, že $x \cdot x^{-1} = 1$.
(9) Pro každé x, y, $z \in P$ platí $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Zobrazení $(x, y) \to x + y$ (rersp. $(x, y) \to x \cdot y$) se nazývá *sčítání* (resp. *násobení*); prvek $x + y$ (resp. $x \cdot y$) se nazývá *součet* (resp. *součin*) prvků x, y. Podmínka (1) (resp. (2)) se nazývá *asociativa* (resp. *komutativita*) *sčítání*. Podmínka (5) (resp. (6)) se nazývá *asociativita* (resp. *komutativita*) *násobení* a podmínka (9) se nazývá *distributivita sčítání* *a násobení*. Prvek 0 (resp. 1) splňující podmínku (3) (resp. (7)) je určen jednoznačně a nazývá se *nula* (resp. *jednička*) pole P. Prvek $-x$ (resp. x^{-1}) splňující podmínku (4) (resp. (8)) je také určen jednoznačně; nazývá se *opačný* k prvku x (resp. *převrácená hodnota* prvku x).

Pro jednoduchost budeme součin $x \cdot y$ prvků x, $y \in P$ označovat také xy.

Pro každé x, $y \in P$ klademe $x - y = x + (-y)$. Zobrazení $P \times P \ni (x, y) \to x - y \in P$ se nazývá *odčítání*; element $x - y$ se nazývá *rozdíl* elementů x, y. Podobně pro každé x, $x \in P$, $y \neq 0$, klademe $x/y = x \cdot y^{-1}$. Zobrazení $P \times (P \backslash \{0\} \ni (x, y) \to x/y \in P$ se nazývá *dělení*; element x/y se nazývá *podíl* elementů x, y.

Buď P pole. Úplné uspořádání $\leq$ na P se nazývá *kompatibilní* s polem P, jsou-li splněny tyto podmínky:

(1) Platí-li pro elementy $x, y \in P$, $x \leq y$, pak pro libovolný element $z \in P$ platí $x + x \leq y + z$.

(2) Platí-li pro elementy x, $y \in P$, $0 \leq x$, $0 < y$, pak $0 \leq x \cdot y$.

Pole P ns kterém je dáno úplné uspořádání kompatibilní s P, se nazývá *uspořádané pole*. Elementy uspořádaného pole P se nazývají *čísla* (uspořádaného pole P).

Buď P uspořádané pole, $\leq$ jeho úplné uspořádání. Element $x \in P$ se nazývá *kladný* (resp. *nezáporný*, resp. *záporný*), platí-li $x > 0$ (resp. $x \geq 0$, resp. $x < 0$).

Množina $A \subset P$ se nazývá *induktivní*, obsahuje-li s každým číslem x také číslo $x + 1$. Průnik všech induktivních množin obsahujících číslo 1 označujeme N_P. Je zřejmé, že $1 \in N_P$. Klademe $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1, \ldots$; evidentně opět $2, 3, 4, \ldots \in N_P$. Platí tedy $\{1, 2, 3, 4, \ldots\} \subset N_P$ a jelikož množina N_P je sama induktivní a obsahuje jedničku, musí platit $N_P = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Elementy množiny N_P se nazývá *přirozená čísla* (pole P).

Číslo $x \in P$ se nazývá *celé*, platí-li buď $x = 0$ nebo $x \in N_P$ nebo $-x \in N_P$. Množinu všech celých čísel označujeme Z_P. Číslo $x \in P$ se nazývá *racionální*, existuje-li element $p \in Z_P$ a $q \in N_P$ tak, že $x = p/q$.

Buď $x \in P$ libovolné číslo. Klademe $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^2 = x \cdot x^1$, $x^3 = x \cdot x^2, \ldots$. Pro libovolné $n \in N_P$ tedy $x^n = x \cdot x^{n-1}$. Číslo x^{-1} je již definováno. Dále klademe $x^{-2} = x^{-1} \cdot x^{-1} = 1/x^2$, $x^{-3} = x^{-1} \cdot x^{-2} = 1/x^3, \ldots$. Pro libovolné celé číslo $m \in Z_P$ je tak definováno číslo $x^m \in P$, které nazýváme *mtá množina* čísla $x \in P$.

Věta 2. *Buď P uspořádané pole, $\leq$ jeho úplné uspořádání. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *Množina všech horních závor libovolné podmnožiny $A \subset P$ je buď prázdná nebo obsahuje nejmenší element.*

(2) *(a) Množina N_P přirozených čísel uspořádaného pole P není shora ohraničena. (b) Pro libovolný systém $(I_i)_{i \in N_P}$ uzavřených intervalů v P takový, že $I_i \supset I_{i+1}$ pro každé $i \in N_P$ množina $\bigcap I_i$ je neprázdná.*

Důkaz. 1. Ukážeme, že z podmínky (1) výplývá (2)(a). Předpokládejme, že N_P má horní závoru. Pak podle (1) existuje nejmenší horní závora a. Existuje tedy přirozené číslo $n > a - 1$, jinak by totiž $a - 1$ byla horní závora menší než a. Pro toto n platí $n + 1 > a$, což je spor s tím, že a je horní závora N_P.

Ukážeme, že z (1) vyplývá (2)(b). Označme $I_i = [a_i, b_i]$. Množina $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ je shora omezená. Podle předpokladu tedy existuje její nejmenší horní závora $c = \sup A$. Každý z elementů b_1, b_2, b_3, $\ldots$ je horní závora množiny A, takže $c \leq b_i$ pro každé i. Ovšem $a_i \leq c$ pro každé i, takže $c \in I_i$ pro každé i a tedy $\bigcap I_i \neq \emptyset$.

2. Ukážeme, že z podmínky (2) vyplývá podmínka (1). Označme B množinu všech horních závor množiny A a předpokládejme, že $B \neq \emptyset$. Zvolme $a \in A$, $b \in B$ a $n \in N_P$. Podle (2)(a) existuje $m \in N_P$ tak, že $2^n \cdot (b-a) \leq m$, t.j. $b \leq a + m \cdot 2^{-n}$; $a + m \cdot 2^{-n}$ je tedy horní závora A. Čísla $a + m \cdot 2^{-n}$, $a + (m-1) \cdot 2^{-n}$, $\ldots$, $a + 2^{-n}$, a, $a - 2^{-n}$ splňující podmínku $a+m\cdot 2^{-n} > a+(m-1)2^{-n} > \ldots > a+2^{-n} > a > a-2^{-n}$, přičemž $a+m\cdot 2^{-n}$ je horní závora A a $a - 2^{-n}$ není horní závora A. Označme p_n nejmenší z čísel m, $m-1$, $\ldots$, 1, 0 pro která $a + p_n \cdot 2^{-n}$ je horní závora A. Pak $a + (p_n - 1) \cdot 2^{-n}$ již není horní závora A. Klademe $I_n = [a + (p_n - 1) \cdot 2^{-n}, a + p_n \cdot 2^{-n}]$; pak $I_n \cap A \neq \emptyset$.

Ukážeme, že $I_{n+1} \subset I_n$. Podle definice $I_n = [a + 2 \cdot (p_n - 1) \cdot 2^{-n-1}, a + 2 \cdot p_n \cdot 2^{-n-1}]$, $I_{n1} = [a + (p_n + 1) \cdot 2^{-n-1}, a + p_{n+1} \cdot 2^{-n-1}]$. Přitom p_{n+1} je nejmenší z čísel m, $m-1$, $\ldots$, 1, 0 pro která $a + p_{n+1} \cdot 2^{-n-1}$ je horní závora $a + 2 \cdot p_n \cdot 2^{-n-1}$ musí tedy platit $p^{n+1} \leq 2p_n$. Čísla $a + (p_n - 1) \cdot 2^{-n} = a + 2 \cdot (p_n - 1) \cdot 2^{-n-1}$, $a + (p_{n+1} - 1) \cdot 2^{-n-1}$ již nejsou horní závory A, přičemž $p_{n+1} - 1$ a $2(p_n - 1)$ jsou celá čísla. Z definice p_{n+1} vyplývá, že $p_{n+1} - 1$ je největší z čísel m, $m-1$, $\ldots$, 1, 0 pro která $a + (p_{n+1} - 1 \cdot 2^{-n-1}$ není horní závora A. Musí tedy platit $p_{n+1} - 1 \geq 2 \cdot (p_n - 1)$. Odvozené nerovnosti ukazují, že $I_{n+1} \subset I_n$.

Systém uzavřených intervalů $(I_n)_{n \in N_P}$ tedy splňuje podmínku (2)(b). Klademe $J = \bigcap I_n$; množina J je neprázdná. Ukážeme, že J je jednoprvková množina. Předpokládejme, že α, $\beta \in J$, $\alpha < \beta$. Pak uzavřený interval $[\alpha, \beta]$ je obsažen v každém I_n. Platí tedy pro každé $n \in N_P a + (p_n - 1) \cdot 2^{-n} \leq \alpha < \beta \leq a + p_n \cdot 2^{-n}$. Odtud $\beta - \alpha \leq a + p_n \cdot 2^{-n} - \alpha \leq a + p_n \cdot 2^{n-1} - a - (p_n - 1) \cdot 2^{-n} = 2^{-n} = 2^{-n}$, t.j. 2^n $1/(\beta - \alpha)$. Ovšem $n < 2^n$ pro každé $n \in N_P$, takže $n < 1/(\beta - \alpha)$ pro každé $n \in N_P$, t.j. $1/(\beta - \alpha)$ je horní závora N_P. Dochází tedy ke sporu s podmínkou (2)(a) a musí platit $\alpha = \beta$, t.j. $J = \bigcap I_n$ je množina jednoprvková.

Nechť $\alpha \in J$. Ukážeme, že $\alpha \in B$, t.j. α je horní závora A. Předpokládejme, že $\alpha \notin B$. Pak existuje element $c \in A$ takový, že $c > \alpha$. Podle (2)(a) existuje přirozené číslo $n \in N_P$ takové, že $1/(c - \alpha) < n < 2^n$. Z toho, že $\alpha \in I_n$, dostáváme, že musí platit $a + (p_n - 1) \cdot 2^{-n} \leq \alpha \leq a + p_n \cdot 2^{-n}$. Dostáváme tedy $c - \alpha > 2^{-n}$, t.j. $2^{-n} + \alpha < c$ a $a + (p_n - 1) \cdot 2^{-n} \leq \alpha$. Odtud $a + (p_n - 1) \cdot 2^{-n} + 2^{-n} \leq \alpha + 2^{-n} < c$, t.j. $a + p_n \cdot 2^{-n} < c$. To je ovšem spor, jelikož $a + p_n \cdot 2^{-n}$ je horní závora A. Platí tedy $\alpha \in B$.

Zbývá ukázat, že pro každé $y \in B$ platí $\alpha \leq y$. Předpokládejme, že pro jistý element $y \in B$ platí $y < \alpha$. Pak podle (2)(a) existuje přirozené číslo $n \in N_P$ takové, že $1/(\alpha - y) < n < 2^n$, t.j. $2^{-n} + y < \alpha$. Ovšem $\alpha \in I_n$, takže $\alpha \leq a + p_n \cdot 2^{-n}$. Celkově $2^{-n} + y < \alpha \leq a + p_n \cdot 2^{-n}$, t.j. $y < a + p_n \cdot 2^{-n} - 2^{-n} = a + (p_n - 1) \cdot 2^{-n}$. Přitom na pravé straně vystupuje levý konec intervalu I_n, obsahujícího body množiny A. Platí tedy $y < \alpha$, y není horní závora množiny A a dostáváme spor. Musí tedy platit $\alpha \leq y$, což jsme chtěli dokázat.

Uspořádané pole splňující podmínku (1) a s ní ekvivalentní podmínku (2) z výše uvedené věty se nazývá *pole reálných čísel* a označuje se symbolem R; jeho elementy se nazývají *reálná čísla*.

Množinu *přirozených* (resp. *celých*, resp. *racionálních*) čísel patřících poli reálných čísel označujeme N (resp. Z, resp. Q).

Existence pole reálných čísel R patří mezi základní matematické předpoklady; v tomto skriptu také vycházíme z tohoto předpokladu.

Část 1

Topologické prostory

V této úvodní kapitole zavádíme základní pojmy množinové topologie. Studujeme množiny, na kterých je dána topologická struktura (= topologie), t.j. systém jejich podmnožin, splňujících určité podmínky (axiomy topologie). Tyto podmínky axiomatizují nejzákladnější vlastnosti tzv. "otevřených" množin v číselných prostorech, známé z elementární matematické analýzy funkcí jedné a více reálných proměnných, a týkají se sjednocení a průniku systémů těchto množin. Je-li na množině X dána topologie, pak každé její podmnožině A lze přirozeným způsobem přiřadit nové podmnožiny - vnitřek, vnějšek, hranici a uzávěr množiny A, které konstruujeme pomocí dané topologie a které na této topologii závisejí; vyšetřujeme vlastnosti těchto nových podmnožin. Dále diskutujeme způsoby topologizace množin, t.j. způsoby zavádění topologie na množinách pomocí báze, systému generátorů a pomocí Kuratowského operátoru uzávěru. V závěrečných odstavcích zavádíme některé základní typy topologických prostorů - prostory prvního a druhého typu spočetnosti, separabilní prostory a Hausdorffovy prostory.

1.1. Topologické struktury

Topologickou strukturou na množině X rozumíme systém τ podmnožin množiny X splňující tyto podmínky:

(1) Množina prázdná $\emptyset$ a množina X patří systému τ.

(2) Sjednocení libovolného systému množin z τ patří systému τ.

(3) Průnik libovolných dvou množin z τ patří systému τ.

Topologickou strukturu na množině X také nazýváme *topologií* na X. Podmínky (1) – (3) se nazývají *axiomy topologie*.

Množina X na níž je dána topologie τ se nazývá *topologický prostor* a označuje (X, τ); je-li však zřejmé, o jakou topologii τ se jedná, místo symbolu (X, τ) používáme symbol X. Prvky topologie τ se nazývají *otevřené množiny*. Otevřená množina, obsahující množinu $A \subset X$, se nazývá *okolí množiny A*. *Okolím bodu* $x \in X$ rozumíme okolí množiny $\{x\}$. Množina $A \subset X$ se nazývá *uzavřená*, je-li její doplněk $X \setminus A$ množina otevřená.

Pomocí axiomů $\mathscr{R}^2$ topologie $\mathscr{R}$ lze snadno $\mathscr{P}X$ zjistit, jaké $\mathscr{L}_1^2$ vlastnosti $\mathscr{C}_1^2$ má systém $\mathscr{S}_1$ všech Pomocí axiomů $\mathscr{R}$ topologie $\mathscr{R}$ lze snadno $\mathscr{P}X$ zjistit, jaké $\mathscr{L}$ vlastnosti $\mathscr{C}$ má systém $\mathscr{S}$ všech *uzavřených* podmnožin daného$\mathscr{S}$ topologického prostoru. Systémy podmnožin dané množiny, které mají tyto vlastnosti, lze rovněž použít k zavedení topologie na této množině

Pomocí axiomů topologie lze snadno zjistit, jaké vlastnosti má systém všech *uzavřených* podmnožin daného topologického prostoru. Systémy podmnožin dané množiny, které mají tyto vlastnosti, lze rovněž použít k zavedení topologie na této množině.

Věta 1. (a) *Buď X topologický prostor. Systém σ všech uzavřených podmnožin X splňuje tyto podmínky:*
(1) $\emptyset$*,* $X \in \sigma$*.*
(2) *Průnik libovolného systému množin ze systému σ patří systému σ.*
(3) *Sjednocení libovolných dvou množin ze systému σ patří systému σ.*
(b) *Buď X množina, σ systém jejích podmnožin splňující podmínky (1) – (3). Pak systém množin $\tau = \{U \subset X \mid U = X \setminus A, A \in \sigma\}$, je topologie na X. Systém všech uzavřených množin v topologii τ splývá se systémem σ.*

Důkaz. 1. Dokážeme tvrzení (a). Podmínka (1) vyplývá přímo z definice. Dále buď $(A_\iota)_{\iota\in I}$ systém uzavřených podmnožin X. Pak $X \setminus (\bigcap A_\iota) = \bigcup(X \setminus A_\iota)$, což je množina otevřená; $\bigcap A_\iota$ musí tedy být množina uzavřená. To dokazuje podmínku (2). Nakonec pro libovolné uzavřené množiny A, $B \subset X$ množina $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ je otevřená; $A \cup B$ je tedy množina uzavřená a je tedy splněna také podmínka (3).

2. Dokážeme (b). Z axiomů topologie přímo vyplývá, že τ je topologie na X. Dále je zřejmé, že každá množina, patřící σ, je uzavřená v topologii τ. Obráceně nechť A je uzavřená množina. Existuje otevřená množina U tak, že $A = X \setminus U$. Podle předpokladu ovšem $U = X \setminus B$, kde $B \in \sigma$; odtud $B = X \setminus U = A$, t.j. $A \in \sigma$.

1.2. Vnitřek, vnějšek, hranice

Uvažujeme libovolnou množinu A v topologickém prostoru X. Bod $x \in X$ splňuje právě jednu z těchto tří podmínek:
(1) Existuje okolí U bodu x tak, že $U \subset A$.
(2) Existuje okolí U bodu x tak, že $U \subset X \setminus A$.
(3) Každé okolí U bodu x má neprázdný průnik s množinou A i s jejím doplňkem $X \setminus A$.
Splňuje-li bod x první (resp. druhou, resp. třetí) podmínku, nazývá se *vnitřní* (resp. *vnější*, resp. *hraniční*) bod množiny A. Množina všech vnitřních (resp. vnějších, resp. hraničních) bodů množiny A se nazývá *vnitřek* (resp. *vnějšek*, resp. *hranice*) množiny A a označuje se $\operatorname{int} A$ (resp. $\operatorname{ext} A$, resp. $\operatorname{fr} A$).

Z definice ihned vyplývá, že $\operatorname{int}\emptyset = \emptyset$, $\operatorname{fr}\emptyset = \emptyset$, $\operatorname{ext}\emptyset = X$.

Věta 2. *Buď X topologický prostor.*
(a) *Pro libovolnou množinu $A \subset X$ množiny $\operatorname{int} A$, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{fr} A$ jsou disjunktní a platí $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \operatorname{fr} A$. Dále $\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(X \setminus A)$, množiny $\operatorname{int} A$, $\operatorname{ext} A$ jsou otevřené a množina $\operatorname{fr} A$ je uzavřená.*
(b) *Pro libovolnou množinu $A \subset X$ množina $\operatorname{int} A$ je největší otevřená množina ležící v A.*
(c) *Množina $A \subset X$ je otevřená právě když $A = \operatorname{int} A$.*
(d) *Platí-li pro množiny A, $B \subset X$, že $B \subset A$, pak $\operatorname{int} B \subset \operatorname{int} A$, $\operatorname{ext} A \subset \operatorname{ext} B$.*
(e) *Pro libovolné množiny A, $B \subset X$ platí $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.*
(f) *Pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí $\operatorname{fr} A = \operatorname{fr}(X \setminus A)$.*
(g) *Pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí $A \cup \operatorname{fr} A = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A$.*
(h) *Pro libovolné množiny A, $B \subset X$ platí $\operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B = \operatorname{fr}(A \cup B) \cup \operatorname{fr}(A \cap B) \cup (\operatorname{fr} A \cap \operatorname{fr} B)$.*

Důkaz. (a) Tvrzení je přímým důsledkem definice.

(b) Evidentně každá otevřená množina ležící v A leží v $\operatorname{int} A$; sjednocení všech otevřených množin ležících v A je tedy rovno $\operatorname{int} A$.

(c) Tvrzení je zřejmé.

(d) Platí-li $B \subset A$, pak $\operatorname{int} B \subset A$; $\operatorname{int} B$ je ovšem množina otevřená, z tvrzení (b) tedy vyplývá, že $\operatorname{int} B \subset \operatorname{int} A$. Dále $\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(X \setminus A) \subset \operatorname{int}(X \setminus B) = \operatorname{ext} B$.

(e) Z definice vnitřního bodu vyplývá, že $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$. Nechť $x \in \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$. Pak existuje okolí U (resp. V) bodu x tak, že $U \subset A$ (resp. $V \subset B$). Pro okolí $U \cap V$ platí $x \in U \cap V \subset A \cap B$, takže $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$. Odtud dostáváme $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \cap B)$ a tvrzení (e) je dokázáno.

(f) Tvrzení je zřejmé.

(g) Stačí ukázat, že $A \cup \operatorname{fr} A \subset \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A$. Pro bod $x \in A \cup \operatorname{fr} A$ takový, že $x \in \operatorname{fr} A$, platí $x \in \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A$. Nechť $x \in A \cup \operatorname{fr} A$ je bod takový, že $x \notin \operatorname{fr} A$. Pak $x \notin X \setminus A$, t.j. $x \notin \operatorname{ext} A \subset X \setminus A$ a z rozkladu $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \operatorname{fr} A$ vyplývá, že $x \in \operatorname{int} A$. Platí tedy opět, že $x \in \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A$ a požadovaná inkluze je dokázána.

(h) Označme $Y = \operatorname{fr}(A \cup B) \cup \operatorname{fr}(A \cap B) \cup (\operatorname{fr} A \cap \operatorname{fr} B)$. Nechť $x \in \operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B$; x je tedy prvkem alespoň jedné z množin $\operatorname{fr} A$, $\operatorname{fr} B$. Předpokládejme, že $x \in \operatorname{fr} A$. Bod x splňuje právě jednu z těchto tří podmínek: (1) $x \in \operatorname{fr} B$, (2) $x \in \operatorname{int} B$, (3) $x \in \operatorname{ext} B$.

Je-li splněna podmínka (1), pak $x \in \operatorname{fr} A \cap \operatorname{fr} B$, t.j. $x \in Y$.

Předpokládejme, že je splněna podmínka (2). Ukážeme, že pak $x \in \operatorname{fr}(A \cap B)$, t.j. opět $x \in Y$. Buď U libovolné okolí bodu x. Platí $U \cap (A \cap B) \supset U \cap \operatorname{int} B \cap A$; ovšem $U \cap \operatorname{int} B$ je okolí x a $x \in \operatorname{fr} A$, takže $(U \cap \operatorname{int} B) \cap A \neq \emptyset$, $U \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Dále $U \cap (X \setminus (A \cap B)) \supset U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ jelikož $x \in \operatorname{fr} A$. Bod x tedy patří množině $\operatorname{fr}(A \cap B)$.

Nechť je splněna podmínka (3). Ukážeme, že pak $x \in \operatorname{fr}(A \cup B)$, t.j. opět $x \in Y$. Buď U libovolné okolí bodu x. Platí $U \cap (A \cup B) \supset U \cap A \neq \emptyset$, jelikož $x \in \operatorname{fr} A$. Dále $U \cap (X \setminus (A \cup B)) = U \cap ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \supset U \cap (X \setminus A) \cap X \setminus (\operatorname{int} B \cup \operatorname{fr} B) = U \cap (X \setminus A) \cap \operatorname{ext} B$. Ovšem $U \cap \operatorname{ext} B$ je okolí bodu x a $x \in \operatorname{fr} A$, takže $U \cap \operatorname{ext} B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Odtud dostáváme $U \cap (X \setminus (A \cup B)) \neq \emptyset$. Platí tedy, že $x \in \operatorname{fr}(A \cup B)$, t.j. $x \in Y$.

Dokázali jsme tedy, že platí $\operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B \subset Y$. Nyní ukážeme, že platí také $\operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B \supset Y$.

Předpokládejme, že $y \in X$ je bod, který nepatří množině $\operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B$, t.j. $y \notin \operatorname{fr} A$, $y \notin \operatorname{fr} B$. Bod y splňuje právě jednu z těchto čtyř podmínek: (1) $y \in \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$, (2) $y \in \operatorname{int} A \cap \operatorname{ext} B$, (3) $y \in \operatorname{ext} A \cap \operatorname{int} B$, (4) $y \in \operatorname{ext} A \cap \operatorname{ext} B$.

Vyšetříme podmínku (1). Platí $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B = \operatorname{int}(A \cap B)$, takže $y \notin \operatorname{fr}(A \cap B)$; dále $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} A, \operatorname{int} B$, takže $y \notin \operatorname{fr} A \cap \operatorname{fr} B$. Podobně $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int}(A \cup B)$, takže $y \in \operatorname{int}(A \cup B)$. Celkově tedy vidíme, že $y \notin Y$.

Vyšetříme podmínku (2). Platí $\operatorname{int} A \cap \operatorname{ext} B = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int}(X \setminus B) = \operatorname{int}(A \cap (X \setminus B)) \subset \operatorname{int} A \subset \operatorname{int}(A \cup B)$, $\operatorname{int} A \cap \operatorname{ext} B \subset \operatorname{int}(X \setminus B) = \operatorname{ext} B \subset \operatorname{ext}(A \cap B)$. V tomto případě tedy také $y \notin Y$.

Podmínka (3) se vyšetřuje stejně.

Nakonec vyšetříme podmínku (4). Platí $\operatorname{ext} A \cap \operatorname{ext} B = \operatorname{int}(X \setminus A) \cap \operatorname{int}(X \setminus B) = \operatorname{int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \subset \operatorname{int}(X \setminus A) = \operatorname{ext} A$. Analogicky $\operatorname{ext} A \cap \operatorname{ext} B = \operatorname{int}(X \setminus (A \cup B)) = \operatorname{ext}(A \cup B) \subset \operatorname{ext}(A \cap B)$. V tomto případě tedy rovněž $y \notin Y$.

Ukázali jsme tedy, že platí-li $y \notin \operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B$, pak $y \notin Y$. Patří-li tedy bod x množině Y, musí patřit také množině $\operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B$. Inkluze $Y \subset \operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B$ je tedy dokázána.

Celkově dostáváme, že platí $Y = \operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B$ a důkaz tvrzení (h) je ukončen.

1.3. Uzávěr množiny

Uzávěrem množiny A v topologickém prostoru X rozumíme množinu $\operatorname{cl} A = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A$.

Věta 3. *Uzávěr množiny A je nejmenší uzavřená množina obsahující množinu A.*

Důkaz. Jelikož $\operatorname{cl} A = X \setminus \operatorname{ext} A$, množina $\operatorname{cl} A$ je uzavřená. Nechť dále B je uzavřená množina taková, že $A \subset B$; ukážeme, že $\operatorname{cl} A \subset B$. Stačí ukázat, že každý bod $x \in \operatorname{fr} A$ patří množině B. Nechť $y \notin B$, t.j. $y \in X \setminus B$. $X \setminus B$ je množina otevřená. Přitom $X \setminus B \subset X \setminus A$, bod y tedy patří množině $\operatorname{ext} A$, t.j. $X \setminus B \subset \operatorname{ext} A$. Bod $x \in \operatorname{fr} A$ ovšem nepatří množině $\operatorname{ext} A$, platí tedy $x \in B$, t.j. $\operatorname{cl} A \subset B$.

Množina $\operatorname{cl} A$ je tedy průnikem všech uzavřených množin obsahujících A a tvrzení je dokázáno.

Věta 4. *Buď X topologický prostor.*
(a) *Pro prázdnou množinu $\emptyset \subset X$ platí* $\operatorname{cl} \emptyset = \emptyset$.
(b) *Pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí $A \subset \operatorname{cl} A$.*
(c) *Pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí* $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} A$.
(d) *Pro libovolné dvě množiny A, $B \subset X$ platí* $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$.

Důkaz. (a) Podle definice $\operatorname{cl} \emptyset = \operatorname{int} \emptyset \cup \operatorname{fr} \emptyset = \emptyset$.
(b) Tvrzení vyplývá z definice uzávěru množiny.
(c) Z Věty 3. odst. 1.3 str. 4 vyplývá, že $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} A)$ je nejmenší uzavřená množina v X obsahující $\operatorname{cl} A$; musí tedy platit $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} A$.
(d) $\operatorname{cl}(A \cup B)$ je uzavřená množina pro kterou $A, B \subset A \cup B \subset \operatorname{cl}(A \cup B)$. Z Věty 3. odst. 1.3 str. 4 vyplývá, že pak $\operatorname{cl} A$, $\operatorname{cl} B \subset \operatorname{cl}(A \cup B)$, t.j. $\operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B \subset \operatorname{cl}(A \cup B)$. Na druhé straně podle Věty 2. (g), (h) odst. 1.2 str. 2 $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{int}(A \cup B) \cup \operatorname{fr}(A \cup B) = A \cup B \cup \operatorname{fr}(A \cup B) \subset A \cup B \cup \operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$. Musí tedy platit $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$.

Označme $\mathscr{P}X$ množinu všech podmnožin topologického prostoru X s topologií τ. Zobrazení $\operatorname{cl} : \mathscr{P}X \to \mathscr{P}X$ přiřazující množině A její uzávěr $\operatorname{cl} A$, se nazývá *topologický uzávěr* na X asociovaný s topologií τ.

Základní vlastnosti topologického uzávěru na X jsou charakterizovány ve Větě 4. odst. 1.3 str. 4. Ukážeme, že tyto vlastnosti plně charakterizují samotnou topologickou strukturu X.

Věta 5. *Buď X množina a $f : \mathscr{P}X \to \mathscr{P}X$ zobrazení, splňující tyto podmínky:*
(1) $f(\emptyset) = \emptyset$.
(2) *Pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí $A \subset f(A)$.*
(3) *Pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí $f(f(A)) = f(A)$.*
(4) *Pro libovolné dvě množiny A, $B \subset X$ platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.*
Pak na X existuje jediná topologie τ taková, že pro každou množinu $A \subset X$ platí $f(A) = \operatorname{cl} A$, kde cl *je topologický uzávěr na X asociovaný s τ.*

Důkaz. Označme σ systém všech podmnožin A množiny X takových, že $f(A) = A$ a τ systém množin $\{B \subset X \mid B = X \setminus A, A \in \sigma\}$. Ukážeme, že τ je topologie na X a pro libovolnou množinu $A \subset X$ je $f(A)$ uzávěr $\operatorname{cl} A$ množiny A v této topologii.

Ukážeme nejdříve, že systém σ má tyto vlastnosti: (a) $\emptyset$, $X \in \sigma$, (b) průnik libovolného neprázdného podsystému σ je prvkem σ, (c) sjednocení libovolných dvou množin systému σ patří systému σ.

Z podmínky (1) vyplývá, že $\emptyset \in \sigma$; vezmeme-li v podmínce (2) $A = X$, dostaneme $X \subset f(X)$, t.j. $X = f(X)$ a tedy $X \in \sigma$. σ má tedy první z požadovaných vlastností.

Dále ukážeme, že z $A \subset B$ vyplývá $f(A) \subset f(B)$. Skutečně, v tomto případě podmínka (4) dává $f(A \cup B) = f(B) = f(A) \cup f(B)$, takže $f(A) \subset f(B)$.

Nechť nyní $A = \bigcap B_\iota$, kde $(B_\iota)_{\iota \in I}$ je systém podmnožin systému σ. Platí $f(B_\iota) = B_\iota$ pro každé ι a $A \subset B_\iota$, platí také $f(A) \subset f(B_\iota) = B_\iota$, t.j. $f(A) \subset \bigcap B_\iota = A$. Podmínka (2) nyní dává $f(A) = A$, t.j. $A \in \sigma$ a systém σ má vlastnost (b).

Z podmínky (4) ihned vyplývá, že systém σ má vlastnost (c).

Z Věty 1. (b) odst. 1.1 str. 2 nyní okamžitě vyplývá, že τ je topologie na X.

Buď $A \subset X$ libovolná množina. Zbývá ukázat, že $\operatorname{cl} A = f(A)$, kde cl je topologický uzávěr na X asociovaný s touto topologií. σ je systém všech uzavřených množin v topologii τ, množina $\operatorname{cl} A$ tedy patří systému σ. $f(A)$ také patří systému σ, jelikož podle podmínky (3) $f(f(A)) = f(A)$. Dále $A \subset \operatorname{cl} A$, $f(A)$ (podmínka (2)); $\operatorname{cl} A$ je ovšem nejmenší uzavřená množina obsahující A (Věta 3. odst. 1.3 str. 4), takže $\operatorname{cl} A \subset f(A)$. Na druhé straně $A \subset \operatorname{cl} A$ a tedy $f(A) \subset f(\operatorname{cl} A)$ jak bylo dokázáno výše. Ovšem $\operatorname{cl} A \in \sigma$, takže $f(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} A$ a tedy $f(A) \subset \operatorname{cl} A$. Celkem dostáváme $\operatorname{cl} A = f(A)$, což jsme chtěli dokázat.

Jednoznačnost topologie τ je evidentní. Tím je ukončen důkaz Věty 5..

Z Věty 5. vyplývá, že zobrazení $f : \mathscr{P}X \to \mathscr{P}X$ splňující podmínky (1) – (4), lze použít k zavedení topologie na množině X. Tento způsob zavedení topologie byl objeven Kuratowskim; podmínky (1) – (4) se nazývají *Kuratowského axiomy uzávěru.*

Shrneme některé další vlastnosti topologického uzávěru.

Věta 6. *Buď X topologický prostor,* cl *topologický uzávěr na X asociovaný s jeho topologií.*

(a) *Množina $A \subset X$ je uzavřená tehdy a jen tehdy když $A = \operatorname{cl} A$.*

(b) *Pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí* $\operatorname{cl} A = A \cup \operatorname{fr} A$.

(c) *Pro libovolné dvě množiny $A, B \subset X$ takové, že $A \subset B$, platí* $\operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} B$.

(d) *Pro libovolné dvě množiny $A, B \subset X$ platí* $\operatorname{cl}(A \cap B) \subset \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$.

Důkaz. (a) Tvrzení je důsledkem Věty 3. odst. 1.3 str. 4.

(b) Podle Věty 2. (g) odst. 1.2 str. 2 $A \cup \operatorname{fr} A = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A = \operatorname{cl} A$.

(c) Platí-li $A \subset B$, pak $A \subset \operatorname{cl} B$ a nejmenší uzavřená množina obsahující A je nutně podmnožinou $\operatorname{cl} B$; odtud $\operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} B$ (porov. Věta 3. odst. 1.3 str. 4).

(d) Podle (c) $\operatorname{cl}(A \cap B) \subset \operatorname{cl} A, \operatorname{cl} B$, takže $\operatorname{cl}(A \cap B) \subset \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$.

1.4. Lokální báze, báze, systémy generátorů

Pod *konečným průnikem* množin budeme rozumět průnik libovolného konečného systému množin.

Buď X topologický prostor, τ jeho topologie. *Lokální bází topologie* τ v bodě $x \in X$ rozumíme systém σ_x okolí bodu x takový, že ke každému okolí U bodu x existuje element $V \in \sigma_x$ tak, že $V \subset U$. *Bází* topologie τ rozumíme podsystém σ systému τ takový, že každá neprázdná množina z τ je sjednocením nějakých množin ze systému σ. *Systémem generátorů* topologie τ rozumíme podsystém σ systému τ takový, že systém všech konečných průniků množin ze σ je báze topologie τ.

Topologie se tedy vytváří ze své báze pomocí operace sjednocení množin; ze svého systému generátorů se vytváří pomocí operace konečného průniku a operace sjednocení množin.

Mají-li dvě topologie na množině X stejnou bázi (resp. systém generátorů), pak jsou totožné. Topologie τ, která má bázi (resp. systém generátorů) σ, se nazývá *generovaná* bází (resp. systémem generátorů) σ.

Věta 7. *Buď X topologický prostor, τ jeho topologie. K tomu, aby systém $\sigma \subset \tau$ byl bází topologie τ je nutné a stačí, aby pro každé $x \in X$ systém σ_x všech množin $U \in \sigma$ obsahujících x byl lokální bází topologie τ v bodě x.*

Důkaz. 1. Je-li σ báze topologie τ a V je okolí bodu $x \in X$, pak podle definice báze existuje $U \in \sigma$ tak, že $x \in U \subset V$; U je tedy prvkem σ_x a σ_x je lokální báze topologie τ v bodě x.

2. Nechť pro každé $x \in X$ systém σ_x je lokální báze topologie τ v bodě x. Pak pro libovolné $U \in \tau$ a libovolný bod $x \in U$ existuje element $V_x \in \sigma_x$ tak, že $V_x \subset U$. Ovšem $V_x \in \sigma$ a $\bigcup V_x = U$, takže σ je báze τ.

Říkáme, že systém $(B_\iota)_{\iota \in I}$ podmnožin množiny X *pokrývá* množinu $A \subset X$, platí-li $A \subset \bigcup B_\iota$; v tomto případě také říkáme, že $(B_\iota)_{\iota \in I}$ je *pokrytí množiny A*. *Podpokrytím* pokrytí $(B_\iota)_{\iota \in I}$ množiny A nazýváme libovolný podsystém $(B_\kappa)_{\kappa \in K}$ systému $(B_\iota)_{\iota \in I}$, kde $K \subset I$, který je sám pokrytím A. Je-li X topologický prostor a každá z množin B_ι je otevřená (resp. uzavřená), říkáme, že pokrytí $(B_\iota)_{\iota \in I}$ je *otevřené* (resp. *uzavřené*).

Libovolně zadaný systém podmnožin množiny X nemusí ještě tvořit bázi nějaké topologie na sjednocení svých elementů; lokální báze také nelze zadávat libovolně.

Věta 8. (a) *Systém σ podmnožin množiny X je bází nějaké topologie na X tehdy a jen tehdy, když jsou splněny tyto podmínky:*

(1) *σ pokrývá X.*

(2) *K libovolným dvěma množinám U, $V \in \sigma$ a libovolnému bodu $x \in U \cap V$ existuje element $W \in \sigma$ tak, že $x \in W \subset U \cap V$.*

(b) *Nechť X je množina a nechť ke každému $x \in X$ je dán systém σ_x podmnožin množiny X. Systém σ_x je lokální báze nějaké topologie na X v bodě x pro každé $x \in X$ tehdy a jen tehdy, když jsou splněny tyto podmínky:*

(1) *Pro každé $U \in \sigma_x$ platí $x \in U$.*

(2) *K libovolným dvěma množinám U, $V \in \sigma_x$ existuje element $W \in \sigma_x$ takový, že $W \subset U \cap V$.*

(3) *Ke každému bodu $y \in U$, kde $U \in \sigma_x$, existuje množina $V \in \sigma_y$ taková, že $V \subset U$.*

(c) *K tomu, aby systém σ podmnožin množiny X byl systémem generátorů nějaké topologie na X je nutné a stačí, aby pokrýval množinu X.*

Důkaz. (a) Předpokládejme, že σ je báze topologie topologického prostoru X. Pak je evidentně splněna podmínka (1). Dále pro libovolné otevřené množiny U, V množina $U \cap V$ je otevřená, je tedy splněna také podmínka (2).

Obráceně nechť σ je systém podmnožin množiny X splňující podmínky (1), (2). Označme τ systém všech podmnožin X, vznikajících jako sjednocení množin ze σ, doplněný o prázdnou množinu. Jelikož $\sigma \subset \tau$, stačí dokázat, že τ je topologie na X. První axiom topologie je evidentně splněn. Dále sjednocení libovolných množin z τ je sjednocením jistých množin systému σ; patří tedy systému τ a je splněn také druhý axiom. Nakonec nechť $U, V \in \tau$ jsou libovolné množiny; zbývá prověřit, že $U \cap V \in \tau$. Platí-li $U \cap V = \emptyset$, pak $U \cap V \in \tau$. Nechť $U \cap V \neq \emptyset$ a nechť $x \in U \cap V$ je libovolný bod. Podle definice systému τ existují množiny $\bar{U}, \bar{V} \in \sigma$ tak, že $x \in \bar{U} \subset U$, $x \in \bar{V} \subset V$. Dále podle předpokladu existuje množina $W_x \in \sigma$ tak, že $x \in W_x \subset \bar{U} \cap \bar{V}$. Přitom $\bar{U} \cap \bar{V} \subset U \cap V$ a $U \cap V = \bigcup W_x$, což znamená, že je splněn také třetí axiom topologie a důkaz tvrzení (a) je ukončen.

(b) Je-li pro každé $x \in X$ systém σ_x lokální báze topologie τ na X v bodě x, pak zřejmě platí podmínky (1) – (3) uvedené v tvrzení (b).

Obráceně předpokládejme, že jsou splněny tyto podmínky. Klademe $\sigma = (\sigma_x)_{x \in X}$. Z již dokázaného tvrzení (a) této věty vyplývá, že σ je báze nějaké topologie na X; označme tuto topologii τ. Buď $x \in X$ libovolný bod, W jeho libovolné okolí v topologii τ. Z definice báze topologie plyne, že existuje množina $U \in \sigma$ obsahující bod x a ležící v množině W. Pak ovšem $U \in \sigma_y$ pro nějaké $y \in W$ a z podmínky (3) vyplývá, že existuje množina $V \in \sigma_x$ ležící v U. Celkově $V \subset U \subset W$ a je dokázáno, že σ_x je lokální báze topologie τ v bodě x.

(c) Je-li σ systém generátorů topologie τ topologického prostoru X, pak systém κ všech konečných průniků množin ze σ je báze topologie τ; κ tedy pokrývá X. Buď $x \in X$ bod, $U \in \kappa$ množina taková, že $x \in U$. U je konečným průnikem množin ze systému σ; existuje tedy $V \in \sigma$ tak, že $x \in V$. σ tedy pokrývá X.

Obráceně nechť σ pokrývá X. Pak systém κ všech konečných průniků množin ze σ také pokrývá X. Dále pro libovolné množiny U, $V \in \kappa$ množina $U \cap V$ je konečným průnikem množin ze σ, patří tedy systému κ. Podle již dokázaného tvrzení (a) této věty je tedy κ báze nějaké topologie na X.

Věta 9. *Nechť X je topologický prostor, τ jeho topologie. Systém σ podmnožin množiny X je báze topologie τ tehdy a jen tehdy, když $\sigma \subset \tau$ a pro libovolný bod $x \in X$ a libovolné jeho okolí U existuje množina $V \in \sigma$ tak, že $x \in V \subset U$.*

Důkaz. Je-li σ báze topologie τ, pak má evidentně požadované vlastnosti.

Dokážeme opak. Nechť σ je systém podmnožin X s výše uvedenými vlastnostmi. Ukážeme nejdříve, že σ je báze (nějaké) topologie na X. σ je evidentně pokrytí X. Nechť V_1, $V_2 \in \sigma$, nechť $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, a nechť $x \in V_1 \cap V_2$. Z podmínky $\sigma \subset \tau$ plyne, že V_1, V_2 jsou otevřené množiny v topologii τ a tedy $V_1 \cap V_2$ je okolí bodu x. Podle předpokladu tedy existuje množina $V \in \sigma$ tak, že $x \in V \subset V_1 \cap V_2$. Podle Věty 8. (a) odst. 1.4 str. 6 je σ báze topologie na X. Dále je třeba dokázat, že tato topologie splývá s τ. Buď $U \in \tau$ libovolná množina. Označme W sjednocení všech množin ze σ, které leží v U. Zřejmě $W \subset U$. Zvolme $x \in U$ libovolně. Existuje množina$V_x \in \sigma$ obsahující x tak, že $V_x \subset U$. Musí tedy platit $W = U$. σ je tedy báze topologie τ.

1.5. Topologické prostory prvního a druhého typu spočetnosti

Říkáme, že topologický prostor X je *prvního* (resp. *druhého*) *typu spočetnosti*, má-li v každém bodě spočetnou lokální bázi topologie (resp. má-li spočetnou bázi topologie).

Topologický prostor druhého typu spočetnosti je zároveň prvního typu spočetnosti.

Věta 10. *Nechť X je topologický prostor prvního typu spočetnosti. Pak pro libovolný bod $x \in X$ existuje lokální báze topologie v bodě x tvaru $(U_i)_{i \in \mathbf{N}}$, kde $U_i \supset U_{i+1}$ pro každé $i \in \mathbf{N}$.*

Důkaz. Pro libovolnou spočetnou bázi topologie $(V_i)_{i \in \mathbf{N}}$ v bodě x klademe $U_1 = V_1$, $U_2 = U_1 \cap V_2$, $\dots$, $U_i = U_{i-1} \cap V_i$, $\dots$. Pak systém množin $(U_i)_{i \in \mathbf{N}}$ má požadované vlastnosti.

Věta 11. (Lindelöfův teorém) *Každé otevřené pokrytí topologického prostoru druhého typu spočetnosti obsahuje spočetné podpokrytí.*

Důkaz. Buď X topologický prostor druhého typu spočetnosti, $(U_\iota)_{\iota\in I}$ otevřené pokrytí X, σ spočetná báze topologie X. Každá z množin U_ι je sjednocením elementů báze σ. Nechť $\kappa \subset \sigma$ je podsystém s těmito vlastnostmi: (a) každý element $V \in \kappa$ je podmnožinou některé z množin U_ι, (b) κ je pokrytí X. Ke každému elementu $V \in \kappa$ zvolme index $\iota(V)$ tak, že $V \subset U_{\iota(V)}$. Systém množin $(U_{\iota(V)})_{V\in\kappa}$ je spočetný podsystém systému $(U_\iota)_{\iota\in I}$. Tento podsystém je ovšem pokrytím X.

Topologický prostor se nazývá *Lindelöfův*, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje spočetné podpokrytí.

1.6. Husté množiny a separabilní prostory

Řekneme, že podmnožina A topologického prostoru X je *hustá* v X, jestliže $\operatorname{cl} A = X$.

Věta 12. *Buď X topologický prostor, A množina hustá v X. Pak pro libovolnou otevřenou množinu $U \subset X$ platí $\operatorname{cl} U = \operatorname{cl}(U \cap A)$.*

Důkaz. Buď $x \in \operatorname{cl} U$ bod. Pro libovolné okolí W_x bodu x platí $W_x \cap U \neq \emptyset$. Z toho, že A je hustá v X, vyplývá, že otevřená množina $W_x \cap U$ musí obsahovat body A, t.j. $W_x \cap U \cap A \neq \emptyset$. Z libovolnosti W_x nyní vyplývá, že $x \in \operatorname{cl}(U \cap A)$. Platí tedy $\operatorname{cl} U \subset \operatorname{cl}(U \cap A)$.

Na druhé straně $U \cap A \subset U$, t.j. $\operatorname{cl}(U \cap A) \subset \operatorname{cl} U$ (Věta 4. (c) odst. 1.3 str. 4). Celkově tedy $\operatorname{cl} U = \operatorname{cl}(U \cap A)$.

Topologický prostor se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje nejvýše spočetná hustá množina.

Věta 13. *Topologický prostor druhého typu spočetnosti je separabilní.*

Důkaz. Buď σ spočetná báze topologie topologického prostoru X. Ke každému $U \in \sigma$ vybereme $x \in U$. Dostaneme spočetnou množinu $A \subset X$. Množina $X \setminus \operatorname{cl} A$ je otevřená; neobsahuje ovšem žádný element báze σ, takže musí platit $X \setminus \operatorname{cl} A = \emptyset$ a $\operatorname{cl} A = X$.

1.7. Hausdorffovy prostory

Topologický prostor X se nazývá *Hausdorffův* nebo také *oddělitelný*, jestliže pro každé dva různé body x, $y \in X$ existuje okolí U bodu x a okolí V bodu y tak, že $U \cap V = \emptyset$.

Až na malé výjimky většina topologických prostorů, které se vyskytují v geometrii a v analýze, je Hausdorffových.

Věta 14. *V Hausdorffově topologickém prostoru je každá konečná množina uzavřená.*

Důkaz. Pro libovolný bod x Hausdorffova topologického prostoru X je množina $X\setminus\{x\}$ evidentně otevřená. Buď $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ libovolná konečná podmnožina X. Platí $A = \bigcup\{x_i\}$ (sjednocení jednoprvkových množin $\{x_1\}, \ldots, \{x_k\}$), takže množina $X \setminus A = \bigcap(X \setminus \{x_i\})$ je otevřená; množina A je tedy uzavřená.

1.8. Příklady

(1) *Triviální topologie*. Buď X libovolná množina. Klademe $\tau_T = \{\emptyset, X\}$. τ_T splňuje axiomy topologie; nazývá se *triviální topologie* na množině X. Množina X spolu s triviální topologií se nazývá *triviální topologický prostor*.

Za systém generátorů triviální topologie τ_T lze vzít jednoprvkovou množinu $\{X\}$ nebo dvouprvkovou množinu $\{\emptyset, X\}$; tyto systémy generátorů jsou zároveň báze topologie τ_T.

Triviální topologický prostor je druhého typu spočetnosti; je tedy také prvního typu spočetnosti a je separabilní; není Hausdorffův.

(2) *Diskrétní topologie*. Buď X množina. Klademe $\tau_D = \mathscr{P}X$, t.j. τ_D je systém všech podmnožin množiny X. τ_D je topologie na X; nazývá se *diskrétní topologie* na X. Množina X spolu s diskrétní topologií se nazývá *diskrétní topologický prostor* .

Za systém generátorů a zároveň za bázi diskrétního topologického prostoru lze vzít systém všech jednoprvkových podmnožin množiny X.

Diskrétní topologie má i jiné systémy generátorů. Obsahuje-li diskrétní topologický prostor X tři navzájem různé elementy, pak systém všech dvouprvkových množin $\{x, y\}$, kde x, $y \in X$, je systémem generátorů topologie τ_D.

Diskrétní topologický prostor je prvního typu spočetnosti; je druhého typu spočetnosti, právě když je množina X spočetná. Je-li X nespočetná množina, pak (X, τ_D) není separabilní, neboť pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí $\operatorname{cl} A = A$.

Topologický prostor (X, τ_D) je Hausdorffův.

(3) *Přirozená topologie na množině reálných čísel*. Systém všech otevřených intervalů v množině reálných čísel $\mathbf{R}$ je bází topologie na $\mathbf{R}$, kterou nazýváme *přirozenou* nebo také *Euklidovou*.

Ukážeme, že $\mathbf{R}$ s touto topologií je druhého typu spočetnosti. Uvažujme množinu všech intervalů $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$, kde x probíhá množinu racionálních čísel $\mathbf{Q}$ a n množinu přirozených čísel $\mathbf{N}$. Buď $y \in \mathbf{R}$ libovolný bod, I otevřený interval obsahující y. Existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset I$. Zvolme $m \in \mathbf{N}$ tak, aby platilo $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ a $x \in \mathbf{Q}$ tak, aby $x \in (y - \frac{1}{m}, y + \frac{1}{m})$. Pak $y \in (x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}) \subset (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset I$. Podle Věty 9. odst. 1.4 str. 7 je uvažovaný systém intervalů bází přirozené topologie na $\mathbf{R}$. Protože množiny $\mathbf{Q}$, $\mathbf{N}$ jsou spočetné, je tato báze spočetná; $\mathbf{R}$ je tedy druhého typu spočetnosti.

Z Věty 13. odst. 1.6 str. 8 vyplývá, že $\mathbf{R}$ je separabilní topologický prostor.

Lokální bázi přirozené topologie v bodě $x \in \mathbf{R}$ lze vybrat ve tvaru systému intervalů $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$; spočetnou lokální bázi v bodě x lze vybrat ve tvaru systému intervalů $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$, $n \in \mathbf{N}$.

Snadno lze ukázat, že topologický prostor $\mathbf{R}$ je Hausdorffův. Nechť x, $y \in \mathbf{R}$ jsou dva různé body; předpokládejme, že $x < y$. Existují reálná čísla a, b, c tak, že $a < x < b < y < c$. Interval (a, b) (resp. (b, c)) je okolí bodu x (resp. y), přičemž tyto intervaly nemají společný bod. Topologický prostor $\mathbf{R}$ je tedy Hausdorffův.

(4) *Topologie konečných doplňků*. Nechť τ_K je systém podmnožin množiny $\mathbf{R}$ reálných čísel, tvořený doplňky všech konečných množin a množinami $\emptyset$ a $\mathbf{R}$. τ_K je topologie na $\mathbf{R}$; nazývá se *topologie konečných doplňků.*

Ukážeme, že $(\mathbf{R}, \tau_K)$ není prvního typu spočetnosti. Předpokládejme, že existuje spočetný systém konečných množin A_i, $i \in \mathbf{N}$, takový, že systém $(\mathbf{R} \setminus A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ je lokální báze topologie τ_K v bodě x. Pak pro libovolnou konečnou množinu B neobsahující x existuje index n tak, že $\mathbf{R} \setminus A_n \subset \mathbf{R} \setminus B$, t.j. $B \subset A_n$. Množina $\bigcup A_i$ je spočetná a neobsahuje bod x. Množina $(\mathbf{R}\setminus\bigcup A_i)\setminus\{x\}$ je neprázdná. Zvolme $y\in(\mathbf{R}\setminus\bigcup A_i)\setminus\{x\}$. $\mathbf{R}\setminus\{y\}$ je okolí bodu x a $y\notin A_i$ pro žádné $i\in\mathbf{N}$, neexistuje tedy index $m\in\mathbf{N}$ tak, že $\mathbf{R}\setminus A_m\subset\mathbf{R}\setminus\{y\}$. τ_K tedy není prvního typu spočetnosti.

Topologický prostor $(\mathbf{R},\tau_K)$ je separabilní, neboť množina racionálních čísel $\mathbf{Q}$ je spočetná a platí $\operatorname{fr}\mathbf{Q}=\mathbf{R}$, t.j. $\operatorname{cl}\mathbf{Q}=\mathbf{R}$.

$(\mathbf{R},\tau_K)$ není Hausdorffův. Ukážeme to. Buďte x, $y\in\mathbf{R}$ dva různé body, U okolí x, V okolí y. Podle definice je $U=\mathbf{R}\setminus A$, $V=\mathbf{R}\setminus B$, kde A, B jsou konečné množiny. Platí $U\cap V=\mathbf{R}\setminus(A\cup B)$; $A\cup B$ je ovšem množina konečná, takže $U\cap V\neq\emptyset$.

(5) *Sorgenfreyova topologie*. Zleva uzavřené zprava otevřené intervaly v množině $\mathbf{R}$ reálných čísel tvoří bázi topologie na $\mathbf{R}$, kterou nazýváme *Sorgenfreyova* a označujeme τ_S.

Ukážeme, že $(\mathbf{R},\tau_S)$ je prvního typu spočetnosti. Stačí ukázat, že pro libovolný bod $x\in\mathbf{R}$ systém intervalů $[x,x+\frac{1}{n})$, $n\in\mathbf{N}$, tvoří spočetnou lokální bázi topologie τ_S v bodě x. Buď U libovolné okolí x. U obsahuje element báze $[x,x+\varepsilon)$ pro jisté $\varepsilon>0$; pro $n>\frac{1}{\varepsilon}$ dostáváme $[x,x+\frac{1}{n})\subset[x,x+\varepsilon)$, takže uvažovaný systém intervalů je lokální báze τ_S v bodě x. Tento systém je evidentně spočetný.

$(\mathbf{R},\tau_S)$ není druhého typu spočetnosti, t.j. nemá spočetnou bázi topologie. Libovolné okolí libovolného bodu $x\in\mathbf{R}$ v topologii τ_S totiž obsahuje interval $[x,x+\varepsilon)$ pro jisté $\varepsilon>0$. Podle Věty 9. odst. 1.4 str. 7 tedy každá báze topologie τ_S musí obsahovat množiny tvaru $[x,a_x)$, kde $a_x>x$. Množina $\mathbf{R}$ je ovšem nespočetná, takže každá báze topologie τ_S musí být také nespočetná.

$(\mathbf{R},\tau_S)$ je separabilní, neboť obsahuje množinu $\mathbf{Q}$, která je spočetná a hustá v $(\mathbf{R},\tau_S)$.

Podobně jako v případě přirozené topologie na $\mathbf{R}$ (viz (3)) se ukáže, že $(\mathbf{R},\tau_S)$ je Hausdorffův topologický prostor.

Všimněme si, že pro libovolné a, $b\in\mathbf{R}$, $a<b$, platí $[a,b)=\mathbf{R}\setminus((-\infty,a)\cup[b,\infty))$; znamená to, že interval $[a,b)$ je množina uzavřená. Z definice Sorgenfreyovy topologie tedy vyplývá, že $[a,b)$ je množina otevřená i uzavřená.

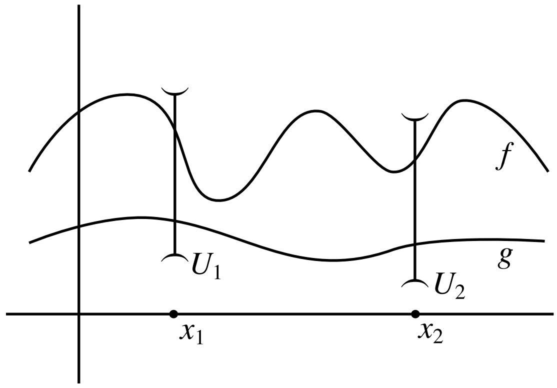
Každá množina otevřená v přirozené topologii na $\mathbf{R}$ je otevřená i v Sorgenfreyově topologii, neboť každý otevřený interval (a,b) lze vyjádřit jako sjednocení otevřených množin $[x,b)\in\tau_S$, kde $a<x<b$.

(6) *Topologie bodové konvergence.* Označme Y^X systém všech zobrazení z množiny X do topologického prostoru (Y,τ). Pro každé $x\in X$ a každé $U\in\tau$ klademe $W(x,U)=\{f\in Y^X\mid f(x)\in U\}$. Systém $(W(x,U))_{x\in X,U\in\tau}$ pokrývá množinu Y^X. Podle Věty 8. (c) odst. 1.4 str. 6 je tedy systémem generátorů nějaké topologie na Y^X. Tato topologie se nazývá *topologie bodové konvergence* nebo také *bodově-otevřená topologie* .

Báze této topologie je tvořena množinami typu $V=\{f\in Y^X\mid f(x_1)\in U_1,\dots,f(x_k)\in U_k\}$, kde $x_1,\dots,x_k$ jsou libovolné body z X, $U_1,\dots,U_k$ jsou libovolné elementy z τ a k probíhá množinu přirozených čísel $\mathbf{N}$.

Okolí bodu $g\in Y^X$ v topologii bodové konvergence je tedy tvořeno všemi zobrazeními $f\in Y^X$, která jsou "blízká" ke g v konečně mnoha bodech, t.j. funkční hodnoty g i f v těchto bodech leží v předepsaných otevřených podmnožinách topologického prostoru Y (viz obr. 1).

Obr. 1



Cvičení

Topologické struktury

1. (a) Nalezněte všechny topologie, které existují na jednoprvkové množině.
(b) Nalezněte všechny topologie na dvouprvkové množině.
(c) Kolik různých topologií existuje na tříprvkové množině?
(d) Ukažte, že systém množin $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$ je systém generátorů diskrétní topologie na množině $\{a, b, c\}$. [1]

Řešení. (a) $X = \{a\}, \tau = \{\emptyset, \{a\}\}$. (b) $X = \{a, b\}, \tau_1 = \{\emptyset, \{a, b\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}$, $\tau_4 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$. (c) 29. (d) Evidentně báze diskrétní topologie $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ na X vzniká pomocí konečných průniků množin systému $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$.

2. Rozhodněte, zda následující systém podmnožin množiny X je topologie na X: (a) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a\}\}$. (b) $X = \mathbf{R}$, $\tau = \{\emptyset, (-a, a)\}$, kde $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. (c) $X = \mathbf{R}$, $\tau = \{\emptyset, (a, b]\}$, kde a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$. (d) $X = \mathbf{R}^2$, $\tau = U \times V$, kde U, V probíhá všechny množiny otevřené v přirozené topologii na $\mathbf{R}$. Rozhodněte, zda některý ze systému (a) – (d) je báze topologie, určete tuto topologii.

Řešení. (a) τ není topologie na X, neboť nepokrývá X. (b) τ je topologie na $\mathbf{R}$; není to ovšem topologie přirozená, neboť množina $(0, 1)$ není v této topologii otevřená. (c) τ není topologie na X, neboť např. $(a, b] \cup (c, d] \notin \tau$ pro $b < c$. (d) τ není topologie na $\mathbf{R}^2$, neboť množina $(U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2)$ obecně není prvkem τ.
(a) τ není báze žádné topologie na X, neboť $\{a, b\} \cap \{b, c\} \notin \tau$. (b) τ je báze topologie, tvořené množinami $\emptyset$ a $(-a, a)$, kde $a > 0$. (c) τ je báze topologie; tuto topologii vytvoříme tak, že k τ přidáme všechna možná sjednocení množin z τ. (d) τ je báze topologie na $\mathbf{R}^2$; tuto topologii získáme uzavřením systému τ na všechna sjednocení.

3. (a) Ukažte, že systém σ_1 (resp. σ_2), tvořený množinami tvaru $U_a = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a, a \in \mathbf{R}\}$ (resp. $V_a = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a, a \in \mathbf{R}\}$), je báze topologie na $\mathbf{R}$.
(b) Ukažte, že systém $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ je systém generátorů topologie na $\mathbf{R}$. Určete tuto topologii.

[1] Místo pojmu systém generátorů se čtenář často setkává v literatuře s pojmem *subbáze* topologie; cv. 1 (d) ukazuje, že termín subbáze není vhodný.

Ř e š e n í . Systémy σ_1, σ_2 splňují předpoklady Věty 8. (a) odst. 1.4 str. 6, jsou to tedy báze nějakých topologií na $\mathbf{R}$. σ je systém generátorů podle Věty 8. (c) odst. 1.4 str. 6; báze topologie, generované tímto systémem generátorů, je tvořená otevřenými intervaly, σ tedy generuje přirozenou topologii.

4. Buď X topologický prostor, τ jeho topologie, $Y \subset X$ podmnožina. Dokažte, že systém τ_Y množin tvaru $U \cap Y$, kde U probíhá všechny otevřené množiny v X, je topologie na Y (*indukovaná topologie*). Topologický prostor (X, τ_Y) se nazývá (*topologický*) *podprostor* topologického prostoru (X, τ).

Ř e š e n í . Přímo prověříme, že τ_Y splňuje axiomy topologie. Platí $\emptyset = \emptyset \cap Y$, $Y = X \cap Y$, takže $\emptyset$, $Y \in \tau_Y$. Pro systém $(U_\iota)_{\iota \in I}$ množin z τ_Y platí $U_\iota = V_\iota \cap Y$, kde $V_\iota \in \tau$; odtud $\bigcup U_\iota = \bigcup (V_\iota \cap Y) = (\bigcup V_\iota) \cap Y$ z toho, že $\bigcup V_\iota \in \tau$, dostáváme, že $\bigcup U_\iota \in \tau_Y$. Podobně pro U_1, $U_2 \in \tau_Y$ platí $U_1 = V_1 \cap Y$, $U_2 = V_2 \cap Y$, kde V_1, $V_2 \in \tau$; odtud $U_1 \cap U_2 = (V_1 \cap V_2) \cap Y$, t.j. $U_1 \cap U_2 \in \tau_Y$. Axiomy topologie jsou tedy splněny.

5. Nechť τ_1, τ_2 jsou dvě topologie na množině X. Ukažte, že $\tau_1 \cap \tau_2$ je rovněž topologie na X. Platí analogické tvrzení i pro sjednocení?

Ř e š e n í . Snadno se prověří, že $\tau_1 \cap \tau_2$ je topologie. Sjednocení

$\tau_1 \cup \tau_2$ není topologie; pro množiny $U \in \tau_1$, $V \in \tau_2$ totiž množina $U \cap V$ nemusí patřit ani do τ_1 ani do τ_2. Příkladem jsou topologie na $\mathbf{R}$, generované bázemi σ_1, σ_2 ze cv. 3 (a).

Podmnožiny topologických prostorů

6. (a) Uveďte příklad topologického prostoru X a nekonečného systému otevřených podmnožin X, jejichž průnik není množina otevřená.

(b) Uveďte příklad topologického prostoru X a nekonečného systému uzavřených podmnožin X, jejichž sjednocení není uzavřená množina.

Ř e š e n í . (a) Uvažujme $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií a spočetný systém otevřených intervalů $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, kde $n \in \mathbf{N}$. Nechť J je průnik tohoto systému intervalů. Platí $J \neq \emptyset$ neboť $0 \in J$. Předpokládejme, že J obsahuje dva různé body α, β, přičemž $\alpha < \beta$. Porovnáním délek intervalů $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ a $[\alpha, \beta]$ dostaneme nerovnost $\frac{2}{n} > \beta - \alpha$, která je splněna pro každé n. Odtud $0 = \beta - \alpha$, což je spor s předpokladem, že J obsahuje dva různé body. Platí tedy $J = \{0\}$, což je množina uzavřená.

(b) Uvažujeme množinu $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií a systém jednoprvkových množin $\{x\}$, kde x probíhá množinu racionálních čísel $\mathbf{Q}$. Každá z množin $\{x\}$ je uzavřená, jejich sjednocení, t.j. množina $\mathbf{Q}$, však není množina uzavřená; množina $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ totiž není otevřená, neboť v libovolném okolí iracionálního čísla vždy leží alespoň jedno racionální číslo.

7. Buď X topologický prostor. Ukažte, že platí: Je-li $U \subset X$ množina otevřená a $A \subset X$ množina uzavřená, pak $U \setminus A$ (resp. $A \setminus U$) je množina otevřená (resp. uzavřená).

Ř e š e n í . Jelikož $U \setminus A = U \cap (X \setminus A)$, $A \setminus U = A \cap (X \setminus U)$, množina $U \setminus A$ (resp. $A \setminus U$) je otevřená (resp. uzavřená).

8. Rozhodněte, zda množiny $(0,1)$, $[0,1)$, $(0,1]$, $[0,1]$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$, $\{x\} \subset \mathbf{R}$ jsou otevřené nebo uzavřené (a) v přirozené topologii, (b) v Sorgenfreyově topologii, (c) v topologii konečných doplňků, (d) v diskrétní topologii. Určete vnitřek, vnějšek, hranici a uzávěr každé z těchto množin v topologiích (a) – (d).

Ř e š e n í . (a) V přirozené topologii množina $(0,1)$ je otevřená, množiny $[0,1]$, $\mathbf{N}$, $\{x\}$ jsou uzavřené, zbývající množiny nejsou ani otevřené ani uzavřené. Dále $\operatorname{int}(0,1) = \operatorname{int}[0,1) = \operatorname{int}(0,1] = \operatorname{int}[0,1] = (0,1)$, $\operatorname{int} \mathbf{N} = \operatorname{int} \mathbf{Q} = \operatorname{int}\{x\} = \emptyset$, $\operatorname{ext}(0,1) = \operatorname{ext}[0,1) = \operatorname{ext}(0,1] = \operatorname{ext}[0,1] = \mathbf{R} \setminus [0,1]$,

$\operatorname{ext}\mathbf{N} = \mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$, $\operatorname{ext}\mathbf{Q} = \emptyset$, $\operatorname{ext}\{x\} = \mathbf{R}\setminus\{x\}$, $\operatorname{fr}(0,1) = \operatorname{fr}[0,1) = \operatorname{fr}(0,1] = \operatorname{fr}[0,1] = \{0,1\}$, $\operatorname{fr}\mathbf{N} = \mathbf{N}$, $\operatorname{fr}\mathbf{Q} = \mathbf{R}$, $\operatorname{fr}\{x\} = \{x\}$, $\operatorname{cl}(0,1) = \operatorname{cl}[0,1) = \operatorname{cl}(0,1] = \operatorname{cl}[0,1] = [0,1]$, $\operatorname{cl}\mathbf{N} = \mathbf{N}$, $\operatorname{cl}\mathbf{Q} = \mathbf{R}$, $\operatorname{cl}\{x\} = \{x\}$.

(b) V Sorgenfreyově topologii jsou množiny $(0,1)$, $[0,1)$ otevřené, množiny $[0,1)$, $[0,1]$, $\mathbf{N}$, $\{x\}$ jsou uzavřené, zbývající množiny nejsou ani otevřené ani uzavřené. Dále $\operatorname{int}(0,1) = (0,1)$, $\operatorname{int}[0,1) = [0,1)$, $\operatorname{int}(0,1] = (0,1)$, $\operatorname{int}[0,1] = [0,1)$, $\operatorname{int}\mathbf{N} = \operatorname{int}\mathbf{Q} = \operatorname{int}\{x\} = \emptyset$, $\operatorname{ext}(0,1) = \operatorname{ext}[0,1) = \mathbf{R}\setminus[0,1)$, $\operatorname{ext}(0,1] = \operatorname{ext}[0,1] = \mathbf{R}\setminus[0,1]$, $\operatorname{ext}\mathbf{N} = \mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$, $\operatorname{ext}\mathbf{Q} = \emptyset$, $\operatorname{ext}\{x\} = \mathbf{R}\setminus\{x\}$, $\operatorname{fr}(0,1) = \{0\}$, $\operatorname{fr}[0,1) = \emptyset$, $\operatorname{fr}(0,1] = \{0,1\}$, $\operatorname{fr}[0,1] = \{1\}$, $\operatorname{fr}\mathbf{N} = \mathbf{N}$, $\operatorname{fr}\mathbf{Q} = \mathbf{R}$, $\operatorname{fr}\{x\} = \{x\}$, $\operatorname{cl}(0,1) = \operatorname{cl}[0,1) = [0,1)$, $\operatorname{cl}(0,1] = \operatorname{cl}[0,1] = [0,1]$, $\operatorname{cl}\mathbf{N} = \mathbf{N}$, $\operatorname{cl}\mathbf{Q} = \mathbf{R}$, $\operatorname{cl}\{x\} = \{x\}$.

(c) Žádná z uvedených množin není otevřená; množina $\{x\}$ je uzavřená, zbývající množiny nejsou uzavřené. Dále $\operatorname{int}(0,1) = \operatorname{int}[0,1) = \operatorname{int}(0,1] = \operatorname{int}[0,1] = \operatorname{int}\mathbf{N} = \operatorname{int}\mathbf{Q} = \operatorname{int}\{x\} = \emptyset$, $\operatorname{ext}(0,1) = \operatorname{ext}[0,1) = \operatorname{ext}(0,1] = \operatorname{ext}[0,1] = \operatorname{ext}\mathbf{N} = \operatorname{ext}\mathbf{Q} = \emptyset$, $\operatorname{ext}\{x\} = \mathbf{R}\setminus\{x\}$, $\operatorname{fr}(0,1) = \operatorname{fr}[0,1) = \operatorname{fr}(0,1] = \operatorname{fr}[0,1] = \operatorname{fr}\mathbf{N} = \operatorname{fr}\mathbf{Q} = \mathbf{R}$, $\operatorname{fr}\{x\} = \{x\}$, $\operatorname{cl}(0,1) = \operatorname{cl}[0,1) = \operatorname{cl}(0,1] = \operatorname{cl}[0,1] = \operatorname{cl}\mathbf{N} = \operatorname{cl}\mathbf{Q} = \mathbf{R}$, $\operatorname{cl}\{x\} = \{x\}$.

(d) V diskrétní topologii je každá z uvedených množin otevřená i uzavřená a je tedy rovna svému vnitřku a svému uzávěru. Vnějšek každé z těchto množin je roven jejímu doplňku v $\mathbf{R}$ a hranice je prázdná množina.

9. Platí tvrzení analogické Větě 2. (e) odst. 1.2 str. 2 pro množiny $\operatorname{int}(A\cup B)$, $\operatorname{ext}(A\cap B)$, $\operatorname{ext}(A\cup B)$?

Řešení. Ukážeme, že platí $\operatorname{int}(A\cup B) \supset \operatorname{int}A\cup\operatorname{int}B$, $\operatorname{ext}(A\cap B) \supset \operatorname{ext}A\cup\operatorname{ext}B$, $\operatorname{ext}(A\cup B) = \operatorname{ext}A\cap\operatorname{ext}B$, a že v těchto vztazích inkluze nelze nahradit rovnostmi.

Množina $\operatorname{int}(A\cup B)$ je největší otevřená množina obsažená v $A\cup B$. Množina $\operatorname{int}A\cup\operatorname{int}B$ je otevřená podmnožina $A\cup B$, neboť $\operatorname{int}A\subset A$, $\operatorname{int}B\subset B$. Odtud dostáváme $\operatorname{int}A\cup\operatorname{int}B\subset\operatorname{int}(A\cup B)$. Na příkladě ukážeme, že v tomto vztahu obecně neplatí rovnost. Nechť $\mathbf{R}$ je množina reálných čísel s přirozenou topologií, $A = [0,1]$, $B = [1,2]$. Pak $\operatorname{int}A\cup\operatorname{int}B = (0,1)\cup(1,2) = (0,2)\setminus\{1\}$, ale $\operatorname{int}(A\cup B) = (0,2)$.

Z Věty 2. (a) odst. 1.2 str. 2 a výše dokázaného vztahu plyne $\operatorname{ext}(A\cap B) = \operatorname{int}(X\setminus(A\cap B)) = \operatorname{int}((X\setminus A)\cup(X\setminus B)) \supset \operatorname{int}(X\setminus A)\cup\operatorname{int}(X\setminus B) = \operatorname{ext}A\cup\operatorname{ext}B$. V tomto vztahu obecně neplatí rovnost. Zvolme např. $X = \mathbf{R}$ a uvažujme přirozenou topologii na $\mathbf{R}$. Pro podmnožiny $A = (0,1)$, $B = (1,2)$ pak dostaneme $\operatorname{ext}(A\cap B) = \operatorname{ext}\emptyset = \mathbf{R}$, ale $\operatorname{ext}A\cup\operatorname{ext}B = (\mathbf{R}\setminus[0,1])\cup(\mathbf{R}\setminus\cup[1,2]) = \mathbf{R}\setminus\{1\}$.

Analogicky dostaneme z Věty 2. (a), (e) odst. 1.2 str. 2, že $\operatorname{ext}(A\cup B) = \operatorname{ext}A\cap\operatorname{ext}B$.

Poslední dvě z výše uvedených tří tvrzení lze dokázat také pomocí vztahu $X = \operatorname{cl}A\cup\operatorname{ext}A$ a Věty 4. (d) odst. 1.3 str. 4, 6. (d) odst. 1.3 str. 5.

10. Buď X topologický prostor, τ jeho topologie. Charakterizujte množiny A, pro které platí $\operatorname{fr}A = \emptyset$.

Řešení. Nechť $\operatorname{fr}A = \emptyset$. Ze vztahu $\operatorname{cl}A = A\cup\operatorname{fr}A$ pak dostáváme, že $A = \operatorname{cl}A$. Dále $\operatorname{int}A = \operatorname{cl}A\setminus\operatorname{fr}A$ a tedy $A = \operatorname{int}A$. Znamená to, že množina A je otevřená i uzavřená. Obráceně předpokládejme, že množina $A\subset X$ je otevřená i uzavřená. Pak $\operatorname{fr}A = X\setminus(\operatorname{int}A\cup\operatorname{int}(X\setminus A)) = X\setminus(A\cup(X\setminus A)) = \emptyset$.

11. Nechť A je konečná množina reálných čísel, uvažovaná s přirozenou topologií. Určete $\operatorname{fr}A$.

Řešení. $\mathbf{R}$ je Hausdorffův prostor (př. (3) odst. 1.8 str. 9). Podle Věty 14. odst. 1.7 str. 8 je tedy množina A uzavřená. Platí tedy $\operatorname{fr}A\subset A$. Na druhé straně každý bod $x\in A$ je evidentně hraničním bodem, t.j. $A\subset\operatorname{fr}A$. Celkově dostáváme $\operatorname{fr}A = A$.

12. Buď $(A_\iota)_{\iota\in I}$ systém podmnožin topologického prostoru X.

(a) Dokažte, že platí $\operatorname{cl}(\bigcup A_\iota) \supset \bigcup\operatorname{cl}A_\iota$. Uveďte příklady, kdy platí rovnost, a příklady, kdy rovnost neplatí.

(b) Kritizujte následující “důkaz”, že $\mathrm{cl}(\bigcup A_\iota) \subset \bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$: Nechť $x \in \mathrm{cl}(\bigcup A_\iota)$. Pak každé okolí U bodu x protíná $\bigcup A_\iota$. U tedy musí protínat některou z množin A_ι, t.j. x musí patřit uzávěru této množiny. To ovšem znamená, že $x \in \bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$.

Řešení. (a) Pro každé $\iota \in I$ platí $A_\iota \subset \bigcup A_\lambda$, takže $\mathrm{cl}\, A_\iota \subset \mathrm{cl}(\bigcup A_\lambda)$ a tedy $\bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota \subset \mathrm{cl}(\bigcup A_\lambda)$, což jsme chtěli ukázat.

Ukážeme, že v tomto vztahu platí rovnost právě když $\bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$ je uzavřená množina. Nechť $\mathrm{cl}(\bigcup A_\iota) = \bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$; pak $\bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$ je množina uzavřená. Obráceně předpokládejme, že $\bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$ je uzavřená množina. Ukážeme, že pak $\bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota \supset \mathrm{cl}(\bigcup A_\iota)$. Pro každé $\iota \in I$ platí $A_\iota \subset \mathrm{cl}\, A_\iota$, odtud $\bigcup A_\iota \subset \bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$, a tedy také $\mathrm{cl}(\bigcup A_\iota) \subset \mathrm{cl}(\bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota) = \bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$, což jsme chtěli ukázat.

Podle Věty 4. (a) odst. 1.3 str. 4 a právě dokázaného tvrzení pro každý konečný systém množin $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ platí $\mathrm{cl}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mathrm{cl}\, A_1 \cup \mathrm{cl}\, A_2 \cup \dots \cup \mathrm{cl}\, A_n$. Dokažte tento vztah rovněž pomocí Věty 4. (d) odst. 1.3 str. 4.

Druhým příkladem systému množin $(A_\iota)_{\iota \in I}$, pro který platí $\mathrm{cl}(\bigcup A_\iota) = \bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$, je *lokálně konečný systém množin* , t.j. takový systém množin, že každý bod $x \in X$ má okolí, které má neprázdný průnik s nejvýše konečným počtem množin tohoto systému.

Dokážeme to. Mějme lokálně konečný systém podmnožin $(A_\iota)_{\iota \in I}$. Jelikož inkluze $\bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota \subset \mathrm{cl}(\bigcup A_\iota)$ platí pro libovolný systém podmnožin X, stačí ukázat, že z podmínky lokální konečnosti vyplývá obrácená inkluze. Nechť $x \in \mathrm{cl}(\bigcup A_\iota)$ je libovolný bod. Z definice uzávěru vyplývá, že pro každé okolí U bodu x platí $U \cap (\bigcup A_\iota) \neq \emptyset$. Systém $(A_\iota)_{\iota \in I}$ je ovšem lokálně konečný, takže existuje okolí V bodu x a číslo $n \in \mathbf{N}$ tak, že $V \cap A_\iota \neq \emptyset$ pouze pro n indexů ι; označme tyto indexy $1, 2, \dots, n$. Platí tedy $V \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \neq \emptyset$ a $V \cap A_\iota = \emptyset$ pro všechny ostatní indexy ι. Uvažujme nyní libovolné okolí U bodu x. Je-li $U \supset V$, pak zřejmě platí $U \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \neq \emptyset$. Je-li $U \subset V$, pak $U \cap A_\iota = \emptyset$ pro každé $\iota \in I$, $\iota \neq 1, 2, \dots, n$. Podle předpokladu ovšem platí $U \cap (\bigcup A_\iota) \neq \emptyset$. Odtud dostáváme, že $U \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \neq \emptyset$. Ukázali jsme tedy, že libovolné okolí bodu $x \in \mathrm{cl}(\bigcup A_\iota)$ má neprázdný průnik s množinou $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, t.j. že platí $x \in \mathrm{cl}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. Ovšem $\mathrm{cl}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mathrm{cl}\, A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup \mathrm{cl}\, A_n \subset \bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$, a tedy $x \in \bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$. Odtud vyplývá, že platí $\mathrm{cl}(\bigcup A_\iota) \subset \bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$.

Tím je důkaz rovnosti $\mathrm{cl}(\bigcup A_\iota) = \bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$ pro lokálně konečný systém množin ukončen.

Jiný důkaz tohoto tvrzení nalezne čtenář v odst. 6.3

Nyní uvedeme příklady, kdy rovnost ve vztahu $\mathrm{cl}(\bigcup A_\iota) \supset \bigcup \mathrm{cl}\, A_\iota$ neplatí.

Uvažujme množinu $\mathbf{R}$ reálných čísel s přirozenou topologií. Nechť $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ je systém jednobodových podmnožin množiny $\mathbf{R}$, $A_n = \{x_n\}$, kde x_n probíhá množinu racionálních čísel $\mathbf{Q}$. Platí $\mathrm{cl}(\bigcup \{x_n\}) = \mathrm{cl}\, \mathbf{Q} = \mathbf{R}$. Na druhé straně $\bigcup (\mathrm{cl}\{x_n\}) = \bigcup \{x_n\} = \mathbf{Q}$, neboť podle Věty 14. odst. 1.7 str. 8 je každá jednobodová množina v $\mathbf{R}$ uzavřená.

Analogická situace nastává v případě, kdy za systém $(A_\iota)_{\iota \in I}$ bereme všechna iracionální čísla v $\mathbf{R}$.

(b) Uvedený důkaz je nesprávný. Protíná-li každé okolí U bodu x množinu $\bigcup A_\iota$, neznamená to ještě, že existuje index ι tak, že každé okolí bodu x protíná množinu A_ι: neexistuje racionální číslo a, které by leželo v *každém* okolí bodu x.

Hausdorffovy prostory

13. *Topologií konečných doplňků* na množině X rozumíme systém τ_K podmnožin množiny X obsahující $\emptyset$, X a ty z podmnožin X, jejichž doplňky jsou konečné množiny (porov. př. (4) odst. 1.8 str. 9).

(a) Ukažte, že topologický prostor (X, τ_K) je Hausdorffův právě když X je konečná množina.

(b) Nechť X je konečná množina. Se kterou známou topologií splývá topologie τ_K?

Řešení. (a) Nechť X je konečná množina, $x, y \in X$ dva různé body. Položme $U = \{x\}$, $V = \{y\}$. Množiny $X \setminus U$, $X \setminus V$ jsou konečné, takže U je okolí bodu x a V je okolí bodu y. Platí $U \cap V = \emptyset$, takže (X, τ_K) je Hausdorffův topologický prostor.

Obráceně předpokládejme, že (X, τ_K) je Hausdorffův. Buďte x, $y \in X$ dva různé body, U okolí bodu x, V okolí bodu y. Předpokládejme, že $U \cap V = \emptyset$. Podle definice topologie τ_K $U = X \setminus A$, $V = X \setminus B$, kde A, B jsou konečné množiny. Platí tedy $U \cap V = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B) = \emptyset$, t.j. $A \cup B = X$ a X musí být konečná množina.

(b) Je-li X konečná množina, pak každá podmnožina množiny X je doplňkem konečné množiny a je tedy otevřená v topologii τ_K. To ovšem znamená, že τ_K splývá s diskrétní topologií na X.

14. Uveďte příklady topologických prostorů, které nejsou Hausdorffovy.

Řešení. Triviální topologický prostor; topologie τ na $\mathbf{R}$ tvořená množinami $\emptyset$, $(-a, a)$, $a > 0$, topologie τ_1 na $\mathbf{R}$, generovaná bází $\sigma_1 = (U_a)_{a \in \mathbf{R}}$, kde $U_a = (a, \infty)$, topologie τ_2 na $\mathbf{R}$, generovaná bází $\sigma_2 = (U_a)_{a \in \mathbf{R}}$, kde $U_a = (-\infty, a)$ (viz cv. 3); topologie konečných doplňků na nekonečné množině; topologie $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$ na množině $X = \{a, b, c\}$.

15. Podprostor Hausdorffova topologického prostoru je Hausdorffův topologický prostor. Na druhé straně topologický prostor, který není Hausdorffův, může mít topologický podprostor, který je Hausdorffův. Ukažte.

Řešení. Nechť (X, τ) je Hausdorffův prostor, (Y, τ_Y) jeho podprostor (cv. 4). Zvolme dva různé body x_1, $x_2 \in Y$. Existuje okolí U_1 bodu x_1 a okolí U_2 bodu x_2 v topologii τ tak, že $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Klademe $V_1 = U_1 \cap Y$, $V_2 = U_2 \cap Y$. Podle definice V_1, $V_2 \in \tau_Y$ a dále $V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap U_2) \cap X = \emptyset$. Topologický prostor (Y, τ_Y) je tedy Hausdorffův.

Uvažujme množinu $\mathbf{R}$ s topologií konečných doplňků τ_K a její podmnožinu $Y = \{1, 2, \dots, k\}$, kde k je nějaké přirozené číslo. Topologie indukovaná na Y je zřejmě Hausdorffova, přičemž $(\mathbf{R}, \tau_K)$ není Hausdorffův.

16. Nechť (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) jsou dva topologické prostory. Uvažujme topologický prostor (X, τ), kde $X = X_1 \times X_2$ a τ je topologie, generovaná bází $\sigma = \{U_1 \times U_2 \in X_1 \times X_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$. Předpokládejme, že topologické prostory (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) jsou Hausdorffovy. Je také (X, τ) Hausdorffův?

Řešení. Zvolme dva různé body (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in X_1 \times X_2$. Platí buď $a_1 \neq b_1$ nebo $a_2 \neq b_2$. V prvním případě okolí U_1 bodu a_1 a okolí V_1 bodu b_1 tak, že $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. Zvolme okolí U_2 bodu a_2 a okolí V_2 bodu b_2 libovolně. Pak $(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2) = \emptyset$. Analogicky vyšetříme druhý případ. Topologický prostor (X, τ) je tedy Hausdorffův.

Hromadné body

Buď X topologický prostor, A podmnožina X. Řekněme, že bod $x \in X$ je *hromadný bod* množiny A, jestliže libovolné jeho okolí obsahuje bod množiny A různý od x. Množinu hromadných bodů množiny A označujeme $\operatorname{ac} A$. Z definice vyplývá, že $\operatorname{ac} \emptyset = \emptyset$.

17. (a) Nalezněte všechny hromadné body libovolné neprázdné množiny v triviálním topologickém prostoru.

(b) Nalezněte všechny hromadné body libovolné neprázdné množiny v diskrétním topologickém prostoru.

(c) Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií. Určete hromadné body následujících množin v $\mathbf{R}$: $(0, 1]$, $[0, 1]$, $(0, 1)$, $\{\frac{1}{n} \in \mathbf{R} \mid n \in \mathbf{N}\}$, $\{0\} \cup (1, 2)$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{N}$, $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$.

Řešení. (a) Je-li X jednobodová množina, pak $\operatorname{ac} X = \emptyset$. Nechť X obsahuje alespoň dva různé body. Pak pro každou množinu $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $\{x\}$ platí $\operatorname{ac} A = X$; dále $\operatorname{ac}\{x\} = X \setminus \{x\}$.

Všimněme si, že množiny A a $\operatorname{ac} A$ nemusí mít žádný společný bod.

(b) Pro každou množinu $A \subset X$ platí $\operatorname{ac} A = \emptyset$.

(c) $\operatorname{ac}(0, 1] = \operatorname{ac}[0, 1] = \operatorname{ac}(0, 1) = [0, 1]$, $\operatorname{ac}\{\frac{1}{n} \in \mathbf{R} \mid n \in \mathbf{N}\} = \{0\}$, $\operatorname{ac}(\{0\} \cup (1, 2)) = [1, 2]$,

$\operatorname{ac}\mathbf{Q} = \mathbf{R}$, $\operatorname{ac}\mathbf{N} = \emptyset$, $\operatorname{ac}\{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$.

18. Buď X topologický prostor, $A \subset X$ množina. Rozhodněte, zda platí
(a) $\operatorname{ac} A \subset \operatorname{fr} A$,
(b) $\operatorname{fr} A \subset \operatorname{ac} A$,
(c) $\operatorname{ac} A \subset \operatorname{cl} A$,
(d) $\operatorname{cl} A \subset \operatorname{ac} A$,
(e) $\operatorname{cl} A = \operatorname{ac} A \cup A$.

Řešení. Protipříkladem dokážeme, že tvrzení (a), (b), (d) neplatí. Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií a vezměme $A = (0, 1)$. Pak $\operatorname{ac} A = [0, 1]$, $\operatorname{fr} A = \{0, 1\}$, a tedy $\operatorname{ac} A \not\subset \operatorname{fr} A$. Dále nechť $A = \mathbf{N}$. Pak z toho, že $\operatorname{ac}\mathbf{N} = \emptyset$, $\operatorname{fr}\mathbf{N} = \mathbf{N}$, $\operatorname{cl}\mathbf{N} = \mathbf{N}$ dostáváme, že $\operatorname{fr} A \not\subset \operatorname{ac} A$, $\operatorname{cl} A \not\subset \operatorname{ac} A$.

Ukážeme, že platí tvrzení (c) a (e). Nechť $x \in \operatorname{ac} A$. Pak pro každé okolí U bodu x množina $U \cap A$ obsahuje bod $y \neq x$, t.j. $U \cap A \neq \emptyset$ a tedy $x \in \operatorname{cl} A$; jinými slovy $\operatorname{ac} A \subset \operatorname{cl} A$. Dále platí $A \subset \operatorname{cl} A$, t.j. $\operatorname{ac} A \cup A \subset \operatorname{cl} A$. Dokážeme, že platí i obrácená inkluze. Nechť $x \in \operatorname{cl} A$. Padne-li bod x do A, pak také padne do množiny $A \cup \operatorname{ac} A$. Předpokládejme, že $x \notin A$. Pak $x \in \operatorname{fr} A$ a každé okolí U bodu x má neprázdný průnik s A. Existuje tedy bod $y \in U \cap A$, $y \neq x$, což znamená, že $x \in \operatorname{ac} A$. Platí tedy $\operatorname{cl} A \subset A \cup \operatorname{ac} A$ a důkaz rovnosti (e) je ukončen.

19. Ukažte, že množina A v topologickém prostoru X je uzavřená tehdy a jen tehdy, když $\operatorname{ac} A \subset A$. Uveďte příklad uzavřené množiny A, pro kterou $\operatorname{ac} A \neq A$.

Řešení. Je-li množina $A \subset X$ uzavřená, pak $A = \operatorname{cl} A$ a podle cv. 18 (c) $\operatorname{ac} A \subset A$. Obráceně platí-li $\operatorname{ac} A \subset A$, pak podle cv. 18 (e) $\operatorname{cl} A = A$.

Neprázdná podmnožina A diskrétního topologického prostoru X je uzavřená a přitom $\operatorname{ac} A = \emptyset \neq A$ (cv. 17 (b)).

20. Buď A neprázdná podmnožina Hausdorffova topologického prostoru X. Bod $x \in X$ je hromadný bod množiny A tehdy a jen tehdy, když libovolné jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A. Ukažte.

Řešení. Nechť $x \in X$ je hromadný bod A a předpokládejme, že existuje jeho okolí U takové, že $U \cap A$ je konečná množina $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Podle Věty 14. odst. 1.7 str. 8 je množina $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ uzavřená. Nechť $x \notin A$. Pak $U \cap (X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\})$ je okolí bodu x, které nemá žádný společný bod s množinou A, což je spor s předpokladem, že $x \in \operatorname{ac} A$. Nechť $x \in A$. Pak x je jeden z bodů x_1, $x_2, \ldots, x_k$, např. x_k. Platí $U \cap (A \setminus \{x\}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$. Množina $U \cap (X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\})$ je okolí bodu x, které nemá žádný společný bod s množinou $A \setminus \{x\}$, a tedy $x \notin \operatorname{ac} A$. Množina A tedy nemůže být konečná.

Obsahuje-li každé okolí bodu x nekonečně mnoho bodů množiny A, pak zřejmě $x \in \operatorname{ac} A$.

Část 2

Spojitá zobrazení

Mezi všemi zobrazeními jednoho topologického prostoru do druhého se přirozeně vyčleňuje množina těch zobrazení, která určitým způsobem odrážejí topologickou strukturu svého definičního oboru i oboru hodnot. Nejdůležitější z nich jsou zobrazení spojitá. Zavádíme je v úvodním odstavci, kde také formulujeme několik podmínek, ekvivalentních se spojitostí. Spojité bijekce, které mají spojité inverzní zobrazení, se nazývají homeomorfismy. Tato zobrazení přenášejí topologickou strukturu jednoho topologického prostoru na druhý a jsou v tomto smyslu topologickými ekvivalencemi. Patří do třídy otevřených zobrazení, která jsou také úzce svázána s topologií definičního oboru i oboru hodnot. Ve druhém odstavci studujeme situaci, kdy jsou na dané množině zadány dvě topologie. Definujeme srovnatelné topologie a ukazujeme, že tento pojem úzce souvisí se spojitostí identického zobrazení dané množiny. Poslední dva odstavce jsou věnovány problému topologizace množiny pomocí systému zobrazení. Je-li zadán systém zobrazení množiny do topologických prostorů, vzniká na této množině přirozeným způsobem (t.j. z požadavku spojitosti těchto zobrazení) tzv. iniciální topologie. V jiné situaci, kdy je zadán systém zobrazení topologických prostorů do dané množiny, vzniká na ní tzv. finální topologie. Obě tyto topologie mají efektivní aplikaci, se kterými se čtenář seznámí ve třetí kapitole.

2.1. Spojitá zobrazení, homeomorfismy

Zobrazení $f : X \to T$ topologického prostoru X do topologického prostoru Y se nazývá *spojité v bodě* $x \in X$, existuje-li ke každému okolí U bodu $f(x)$ okolí V bodu x tak, že $f(V) \subset U$. f se nazývá *spojité*, je-li spojité v každém bodě.

Věta 1. (a) *K tomu, aby zobrazení topologických prostorů* $f : X \to Y$ *bylo spojité v bodě* $x \in X$, *je nutné a stačí, aby pro každou množinu* U *patřící nějaké lokální bázi topologie v bodě* $f(x)$ *množina* $f^{-1}(U)$ *obsahovala okolí bodu* x.

(b) *Buďte* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *zobrazení topologických prostorů. Předpokládejme, že* f *je spojité v bodě* $x \in X$ *a* g *je spojité v bodě* $f(x) \in Y$. *Pak složené zobrazení* $g \circ f : X \to Z$ *je spojité v bodě* x.

Důkaz. (a) Je-li f spojité v x, pak pro libovolný element U jisté lokální báze topologie v bodě $f(x)$ existuje okolí V bodu x tak, že $f(V) \subset U$; platí tedy $V \subset f^{-1}(U)$. Obráceně předpokládejme, že pro každý element U lokální báze topologie v bodě $f(x)$ množina

$f^{-1}(U)$ obsahuje okolí bodu x. Buď W libovolné okolí bodu $f(x)$, U takový element lokální báze v bodě $f(x)$, že $U \subset W$. Pak $f^{-1}(U)$ obsahuje okolí V bodu x a pro toto okolí platí $f(V) \subset U \subset W$; f je tedy spojité v x.

(b) Buď U okolí bodu $g \circ f(x)$. Podle předpokladu existuje okolí V bodu $f(x)$ tak, že $g(V) \subset U$, a okolí W bodu x tak, že $f(W) \subset V$. Pro okolí W platí $g \circ f(W) \subset U$; $g \circ f$ je tedy spojité v bodě x.

Věta 2. *Buď $f : X \to Y$ zobrazení topologických prostorů. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *f je spojité.*

(2) *Pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí $f(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} f(A)$.*

(3) *Vzor libovolné uzavřené množiny v Y je uzavřená množina v X.*

(4) *Vzor libovolné otevřené množiny v Y je otevřená množina v X.*

(5) *Vzor libovolné otevřené množiny, patřící systému generátorů topologie Y je otevřená množina v X.*

Důkaz. 1. Ukážeme, že z podmínky (1) vyplývá podmínka (2). Buď $A \subset X$ množina, $y \in f(\operatorname{cl} A)$ libovolný bod, U jeho okolí. Existuje bod $x \in \operatorname{cl} A$ a jeho okolí V tak, že $y = f(x)$, $V \subset f^{-1}(U)$. x patří množině $\operatorname{cl} A = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A$, takže $V \cap A \neq \emptyset$ a tedy $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ a existuje bod $x' \in A \cap f^{-1}(U)$. Pro tento bod $f(x') \in f(A) \cap U$ a množina $f(A) \cap U$ je neprázdná. Znamená to, že $y \notin \operatorname{ext} f(A)$, t.j. $y \in \operatorname{int} f(A) \cup \operatorname{fr} f(A) = \operatorname{cl} f(A)$.

2. Ukážeme, že z (2) vyplývá (3). Buď $B \subset Y$ uzavřená množina, $A = f^{-1}(B)$. Podle předpokladu $f(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} f(A) = \operatorname{cl} f(f^{-1}(B)) = \operatorname{cl}(B \cap f(X)) \subset \operatorname{cl} B = B$. Odtud $\operatorname{cl} A \subset f^{-1}(f(\operatorname{cl} A)) \subset f^{-1}(B) = A \subset \operatorname{cl} A$, což je možné jen když $\operatorname{cl} A = A$. $f^{-1}(B)$ je tedy množina uzavřená.

3. Pro libovolnou množinu $B \subset Y$ platí $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$. Předpokládejme, že platí podmínka (3). Pak pro libovolnou otevřenou množinu $B \subset Y$ množina $Y \setminus B$ je uzavřená a tedy $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ je uzavřená v X; $f^{-1}(B)$ je tedy množina otevřená.

4. Z podmínky (4) evidentně vyplývá (5).

5. Předpokládejme, že je splněna podmínka (5). Buď $x \in X$ libovolný bod, U okolí bodu $f(x)$. Nechť W je element báze topologie Y takový, že $f(x) \in W \subset U$. Pak $W = V_1 \cap \cdots \cap V_k$ pro jisté množiny $V_1, \ldots, V_k$ patřící systému generátorů topologie Y. Jelikož $f^{-1}(W) = f^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_k)$, $f^{-1}(W) \subset X$ je množina otevřená. Přitom $x \in f^{-1}(W)$ a $f(f^{-1}(W)) = W \cap f(X) \subset W \subset U$, takže f je spojité v bodě x a z libovolnosti x vyplývá, že je spojité. Z podmínky (5) tedy vyplývá (1) a důkaz je ukončen.

Zobrazení $f : X \to Y$ topologických prostorů se nazývá *otevřené*, je-li obraz $f(U)$ libovolné otevřené množiny $U \subset X$ množina otevřená.

Věta 3. (a) *K tomu, aby zobrazení $f : X \to Y$ topologických prostorů bylo otevřené, stačí, aby obraz $f(U)$ libovolného elementu U báze topologie topologického prostoru X byl množina otevřená v Y.*

(b) *Kompozice dvou otevřených zobrazení je otevřená zobrazení.*

Důkaz. (a) Pro obraz sjednocení $\bigcup U_\iota$ systému množin $(U_\iota)_{\iota \in I}$ platí $f(\bigcup U_\iota) = \bigcup f(U_\iota)$; odsud ihned plyne tvrzení.

(b) Tvrzení je zřejmé.

Zobrazení topologických prostorů $f : X \to Y$ se nazývá *homeomorfismus*, je-li bijektivní a obě zobrazení f, f^{-1} jsou spojitá. Topologické prostory X, Y se nazývají *homeomorfní*, existuje-li homeomorfismus $f : X \to Y$.

Věta 4. *K tomu, aby bijekce topologických prostorů byla homeomorfismus, je nutné a stačí, aby byla spojitá a otevřená.*

Důkaz. Buď $f : X \to Y$ bijekce topologických prostorů. Je-li f homeomorfismus, pak je spojité a otevřené. Předpokládejme, že f je spojité a otevřené. Označme $g = f^{-1}$. Pro otevřenou množinu $U \subset X$ dostáváme $g^{-1}(U) = f(U)$, což je množina otevřená, takže zobrazení g musí být spojité (Věta 2. odst. 2.1 str. 18).

2.2. Srovnatelné topologie

Buď X množina, τ_1, τ_2 dvě topologie na X. Říkáme, že topologie τ_1 je *slabší* (resp. *silnější*) než τ_2 , jestliže $\tau_1 \subset \tau_2$ (resp. $\tau_1 \supset \tau_2$). Říkáme, že τ_1, τ_2 jsou *srovnatelné*, je-li jedna z nich slabší než druhá; v opačném případě říkáme, že jsou *nesrovnatelné*.

Snadno lze odvodit kriterium srovnatelnosti topologií.

Věta 5. *Buď X množina, τ_1, τ_2 dvě topologie na X, X_1 (resp. X_2) množina X s topologií τ_1 (resp. τ_2). Následující tři podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *Identické zobrazení* $\mathrm{id}_X : X_1 \to X_2$ *je spojité.*

(2) *Topologie τ_1 je silnější než τ_2.*

(3) *Libovolná množina, patřící systému generátorů topologie τ_2, je prvkem τ_1.*

Důkaz. Tvrzení vyplývá z ekvivalentních podmínek (1), (4), (5) Věty 2. odst. 2.1 str. 18.

Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení topologických prostorů. Zeslabíme-li (resp. zesílíme-li) topologii na množině Y (resp. X), spojitost f se tím nenaruší. Ukážeme to.

Věta 6. (a) *Buď X topologický prostor, Y množina, $f : X \to Y$ zobrazení. Nechť τ_1, τ_2 jsou dvě srovnatelné topologie na Y, $\tau_1 \subset \tau_2$. Pak je-li f spojité v topologii τ_2, je spojité i v topologii τ_1.*

(b) *Buď Y topologický prostor, X množina, $f : X \to Y$ zobrazení. Nechť σ_1, σ_2 jsou dvě srovnatelné topologie na X, $\sigma_1 \subset \sigma_2$. Pak je-li f spojité v topologii σ_1, je spojité i v topologii σ_2.*

Důkaz. Obě tvrzení ihned vyplývají z podmínek (1), (4) Věty 2. odst. 2.1 str. 18.

2.3. Iniciální topologie

Ukážeme, že systém zobrazení dané množiny do topologických prostorů definuje na této množině jistou topologii.

Věta 7. *Buď X množina, $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ systém topologických prostorů a předpokládejme, že ke každému $\iota \in I$ je dáno zobrazení $f_\iota : X \to Y_\iota$. Pak systém množin $f_\iota^{-1}(U_\iota)$, kde $\iota \in I$ a U_ι probíhá otevřené množiny v Y_ι, je systém generátorů topologie na X. Topologie, generovaná tímto systémem generátorů, je nejslabší ze všech topologií, pro která jsou všechna zobrazení f_ι spojitá.*

Důkaz. Systém σ všech množin tvaru $f_\iota^{-1}(U_\iota)$ pokrývá X a je tedy systémem generátorů jisté topologie na X (Věta 8. (c) odst. 1.4 str. 6). Uvažujeme-li X s touto topologií, je evidentně každé zobrazení f_ι spojité: vzory otevřených množin jsou otevřené množiny (Věta 2. odst. 2.1 str. 18). Označme τ topologii, generovanou systémem σ, a uvažujme libovolnou další topologii τ' na X takovou, že všechna zobrazení $f_\iota : X \to Y$ jsou spojitá vzhledem k τ'. Buď $V \subset X$ množina, patřící τ. V je sjednocení jistého systému konečných průniků množin ze systému σ; ze spojitosti zobrazení f_ι však vyplývá, že každá z množin systému σ je otevřená v topologii τ'. Podle definice topologie konečné průniky množin ze σ musí také patřit systému τ' a jejich sjednocením dostaneme opět elementy τ'. Tím je ukázáno, že $\tau \subset \tau'$ a důkaz je ukončen.

Buď X množina, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ systém topologických prostorů, $f_\iota : X \to Y_\iota$, $\iota \in I$, zobrazení. Nejslabší z topologií na X, pro které jsou všechna zobrazení f_ι spojitá, se nazývá *iniciální topologie*, asociovaná se systémem zobrazení $(f_\iota)_{\iota\in I}$.

Věta 8. *Buď X topologický prostor s iniciální topologií, asociovanou se systémem zobrazení $(f_\iota)_{\iota\in I}$, kde f_ι je zobrazení X do topologického prostoru Y_ι, Z topologický prostor. Zobrazení $g : Z \to X$ je spojité tehdy a jen tehdy, když pro každé $\iota \in I$ zobrazení $f_\iota \circ g : Z \to Y_\iota$ je spojité.*

Důkaz. Předpokládejme, že g je spojité. Pak $f_\iota \circ g$ je spojité pro každé ι jako kompozice spojitých zobrazení (Věta 1. (b) odst. 2.1 str. 17).

Obráceně předpokládejme, že $f_\iota \circ g$ je spojité pro každé ι. Buď $z \in Z$ libovolný bod, U okolí bodu $g(z)$. Z definice iniciální topologie vyplývá, že existuje konečná množina $J \subset I$ tak, že pro každé $\iota \in J$ lze najít otevřenou množinu $V_\iota \subset Y_\iota$ tak, že $g(z) \in \bigcap_{\iota\in J} f^{-1}(V_\iota) \subset U$. Ovšem $g^{-1}(U) \supset g^{-1}(\bigcap_{\iota\in J} f^{-1}(V_\iota)) = \bigcap_{\iota\in J} g^{-1} f_\iota^{-1}(V_\iota)$ a podle předpokladu každá z množin $g^{-1} f_\iota^{-1}(V_\iota)$ je okolí bodu z. Konečný průnik $W = \bigcap_{\iota\in J} g^{-1} f_\iota^{-1}(V_\iota)$ je tedy také okolí bodu z. Přitom $g(W) \subset U$, takže zobrazení g je spojité v bodě z. Jeho spojitost nyní vyplývá z libovolnosti bodu z.

Připomeňme si, že systém $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ podmnožin množiny Y takový, že $Y_\iota \cap Y_\kappa = \emptyset$ pro každé ι, $\kappa \in I$ a $\bigcup Y_\iota = Y$, se nazývá *rozklad* množiny Y.

Dokážeme nyní větu o *tranzitivitě* iniciální topologie.

Věta 9. *Buď X množina, $(Z_\iota)_{\iota\in I}$ systém topologických prostorů, $(Y_\kappa)_{\kappa\in K}$ systém množin. Předpokládejme, že je dán rozklad $(J_\kappa)_{\kappa\in K}$ indexové množiny I. Nechť pro každé $\kappa \in K$ je dáno zobrazení $h_\kappa : X \to Y_\kappa$ a pro každé $\kappa \in K$, $\iota \in J_\kappa$ zobrazení $g_{\iota\kappa} : Y_\kappa \to Z_\iota$. Uvažujme na každé z množin Y_κ iniciální topologii, asociovanou se systémem zobrazení $(g_{\iota\kappa})_{\iota\in J_\kappa}$. Pak iniciální topologie na X, asociovaná se systémem zobrazení $(g_{\iota\kappa} \circ h_\kappa)_{\kappa\in K, \iota\in J_\kappa}$, je totožná s iniciální topologií, asociovanou se systémem zobrazení $(h_\kappa)_{\kappa\in K}$.*

Důkaz. Ke každému $\iota \in I$ existuje jediné $\kappa \in K$ tak, že $\iota \in J_\kappa$. Označme $f_\iota = g_{\iota\kappa} \circ h_\kappa$; vzniká komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_\iota"] \arrow[dr, "h_\kappa"'] & & Z_\iota \\ & Y_\kappa \arrow[ur, "g_{\iota\kappa}"'] & \end{tikzcd}$$

Dále označme σ_1 (resp. σ_2) systém generátorů topologie na X, tvořený množinami $f_\iota^{-1}(U_\iota)$, kde U_ι probíhá otevřené množiny v Z_ι (resp. množinami $h_\kappa^{-1}(V_\kappa)$, kde V_κ probíhá otevřené množiny v Y_κ). Nechť τ_1 (resp. τ_2) je topologie, generovaná systémem generátorů σ_1 (resp. σ_2). Chceme ukázat, že $\tau_1 = \tau_2$. Pro každou otevřenou množinu $U_\iota \subset Z_\iota$ platí $f_\iota^{-1}(U_\iota) = h_\kappa^{-1}(g_{\iota\kappa}^{-1}(U_\iota))$; přitom $g_{\iota\kappa}^{-1}(U_\iota)$ je otevřená množina v Y_κ. Platí tedy $\sigma_1 \subset \sigma_2$ a $\tau_1 \subset \tau_2$.

Dokážeme, že $\tau_1 \supset \tau_2$. K tomu stačí ukázat, že každý element σ_2 patří τ_1. Buď $V_\kappa \subset Y_\kappa$ otevřená množina. V_κ se dá vyjádřit ve tvaru sjednocení konečných průniků množin tvaru $g_{\iota\kappa}^{-1}(U_\iota)$, $\iota \in J_\kappa$, kde U_ι probíhá otevřené množiny v Z_ι. $h_\kappa^{-1}(V_\kappa)$ se tedy dá vyjádřit jako sjednocení konečných průniků množin tvaru $h_\kappa^{-1} g_{\iota\kappa}^{-1}(U_\iota) = f_\iota^{-1}(U_\iota)$ a musí patřit topologii τ_1.

Celkově tedy $\tau_1 = \tau_2$, což jsme chtěli dokázat.

2.4. Finální topologie

Systém topologických prostorů spolu s jejich zobrazeními do dané množiny definuje jistou topologii na této množině. Konstrukce této topologie je obsažena v následující větě.

Věta 10. *Buď X množina, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ systém topologických prostorů a předpokládejme, že pro každé $\iota \in I$ je dáno zobrazení $f_\iota : Y_\iota \to X$. Systém všech množin $U \subset X$ takových, že $f_\iota^{-1}(U) \subset Y_\iota$ je otevřená množina pro každé $\iota \in I$, je topologie na X. Tato topologie je nejsilnější ze všech topologií, pro které jsou všechna zobrazení f_ι spojitá.*

Důkaz. Označme τ systém všech množin $U \subset X$ takových, že $f_\iota^{-1}(U) \subset Y_\iota$ je množina otevřená pro každé $\iota \in I$. Evidentně $\emptyset$, $X \in \tau$. Dále pro libovolný systém množin $(U_\kappa)_{\kappa\in K}$ v X a pro každé $\iota \in I$ platí $f_\iota^{-1}(\bigcup U_\kappa) = \bigcup f_\iota^{-1}(U_\kappa)$ a pro libovolné dvě množiny $U, V \subset X$ a libovolné $\iota \in I$ platí $f_\iota^{-1}(U \cap V) = f_\iota^{-1}(U) \cap f_\iota^{-1}(V)$. Z těchto vztahů ihned vyplývá, že τ je topologie na X. Buď τ' jiná topologie na X a předpokládejme, že každé ze zobrazení $f_\iota : Y_\iota \to X$ je vzhledem k této topologii spojité. Nechť $W \in \tau'$. Pak $f_\iota^{-1}(W) \subset Y_\iota$ je množina otevřená pro každé $\iota \in I$, W tedy musí patřit topologii τ; platí tedy $\tau' \subset \tau$ a důkaz je ukončen.

Buď X množina, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ systém topologických prostorů. Nechť je pro každé $\iota \in I$ dáno zobrazení $f_\iota : Y_\iota \to X$. Nejsilnější z topologií na X, pro které jsou všechna zobrazení f_ι spojitá, se nazývá *finální topologie* asociovaná se systémem zobrazení $(f_\iota)_{\iota\in I}$.

Věta 11. *Buď X topologický prostor s finální topologií, asociovanou se sytémem zobrazení $(f_\iota)_{\iota\in I}$, $f_\iota : Y_\iota \to X$, Z topologický prostor. K tomu, aby zobrazení $g : X \to Z$ bylo spojité, je nutné a stačí, aby pro každé $\iota \in I$ zobrazení $g \circ f_\iota : Y_\iota \to Z$ bylo spojité.*

Důkaz. Je-li g spojité, pak složené zobrazení $g \circ f_\iota$ je také spojité (Věta 1. (b) odst. 2.1 str. 17). Obráceně předpokládejme, že zobrazení $g \circ f_\iota$ je spojité pro každé $\iota \in I$. Buď $U \subset Z$ otevřená množina. Podle předpokladu množina $(g \circ f_\iota)^{-1}(U) = f_\iota^{-1}(g^{-1}(U)) \subset Y_\iota$ je otevřená pro každé $\iota \in I$ (Věta 2. odst. 2.1 str. 18). $g^{-1}(U) \subset X$ je tedy množina otevřená ve finální topologii na X a zobrazení g musí být spojité (Věta 2. odst. 2.1 str. 18).

Vlastnost *tranzitivity* finální topologie je vyjádřena touto větou.

Věta 12. *Buď X množina, $(Z_\iota)_{\iota\in I}$ systém topologických prostorů, $(Y_\kappa)_{\kappa\in K}$ systém množin. Předpokládejme, že je dán rozklad $(J_\kappa)_{\kappa\in K}$ indexové množiny I. Nechť pro každé $\kappa \in K$ je dáno zobrazení $h_\kappa : Y_\kappa \to X$ a pro každé $\kappa \in K$, $\iota \in J_\kappa$ zobrazení $g_{\kappa\iota} : Z_\iota \to Y_\kappa$. Uvažujme každé Y_κ s finální topologií, asociovanou se systémem zobrazení $(g_{\kappa\iota})_{\iota\in J_\kappa}$. Pak finální topologie, asociovaná se systémem zobrazení $(h_\kappa \circ g_{\kappa\iota})_{\kappa\in K,\iota\in J_\kappa}$, je totožná s finální topologií, asociovanou se systémem zobrazení $(h_\kappa)_{\kappa\in K}$.*

Důkaz. Pro každé $\iota \in I$ označme $f_\iota = h_\kappa \circ g_{\kappa\iota}$, kde index κ je definován z požadavku $\iota \in J_\kappa$. Dostáváme komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} Z_\iota \arrow[rr, "g_{\kappa\iota}"] \arrow[dr, "f_\iota"'] & & Y_\kappa \arrow[dl, "h_\kappa"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Označme τ_1 (resp. τ_2) finální topologii na X, asociovanou se systémem zobrazení $(f_\iota)_{\iota\in I}$ (resp. $(h_\kappa)_{\kappa\in K}$). Buď $U \subset X$ element τ_2; pak ze spojitosti složeného zobrazení $f_\iota = h_\kappa \circ g_{\kappa\iota}$ vyplývá, že $f_\kappa^{-1}(U) \subset Z_\iota$ je množina otevřená. U tedy patří τ_1 a máme $\tau_2 \subset \tau_1$. Obráceně nechť $U \in \tau_1$. Pak $f_\iota^{-1}(U) \subset Z_\iota$ je množina otevřená. Dále $f_\iota^{-1}(U) = g_{\kappa\iota}^{-1}(h_\kappa^{-1}(U))$, takže podle definice finální topologie $h_\kappa^{-1}(U) \subset Y_\kappa$ je množina otevřená a U musí být prvkem τ_2. Celkově $\tau_1 = \tau_2$, což jsme chtěli dokázat.

2.5. Příklady

(1) Každé zobrazení diskrétního topologického prostoru do libovolného topologického prostoru je spojité.

(2) Každé zobrazení libovolného topologického prostoru do triviálního topologického prostoru je spojité.

(3) Buďte X, Y množiny. Zobrazení $f : X \to Y$ tvaru $f(x) = y_0$, kde $y_0 \in Y$ je pevný bod, se nazývá *konstantní*. Každé konstantní zobrazení topologických prostorů je spojité.

(4) *Spojité reálné funkce reálné proměnné.* Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií (př. (3) odst. 1.8 str. 9). Ukážeme, že zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojité tehdy a jen tehdy, když je splněna tato podmínka: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že ze vztahu $|x - x_0| < \delta$ vyplývá $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Nechť f je spojité v x_0, nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak $I = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ je okolí bodu $f(x_0)$ a tedy existuje okolí V bodu x_0 tak, že $f(V) \subset I$. Jelikož přirozená topologie $\mathbf{R}$ je generovaná otevřenými intervaly, existuje otevřený interval $J \subset V$ obsahující x_0; možno přitom předpokládat, že $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pro jisté $\delta > 0$. Existuje tedy $\delta > 0$ tak, že z podmínky $|x - x_0| < \delta$ vyplývá $f(x) \in I$, t.j. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Obráceně předpokládejme, že je splněna výše uvedená podmínka. Nechť U je libovolné okolí bodu $f(x_0)$. Z definice přirozené topologie vyplývá, že existuje otevřený interval I obsahující $f(x_0)$ tak, že $I \subset U$; po případném zmenšení tohoto intervalu lze předpokládat, že $I = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ pro jisté $\varepsilon > 0$. Najdeme $\delta > 0$ tak, že z podmínky $|x - x_0| < \delta$ vyplývá $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, a položíme $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. J je okolí bodu x_0 a platí $f(J) \subset I \subset U$; z libovolnosti U nyní vyplývá spojitost zobrazení f v bodě x_0.

(5) Uvedeme dva příklady nespojitých zobrazení. V obou příkladech $\mathbf{R}$ označuje množinu reálných čísel s přirozenou topologií.

Funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definovaná vztahem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

není spojitá v bodě $x = 0$. Ve všech ostatních bodech je spojitá.

Funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definovaná vztahem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

není spojitá v žádném bodě. Tato funkce se nazývá *Dirichletova funkce.*

Ukážeme, že Dirichletova funkce není spojitá v žádném bodě. Nechť např. $x \in \mathbf{Q}$. Pak $f(x) = 1$ a zvolme okolí U bodu 1 ve tvaru $U = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Buď V libovolné okolí bodu x. V zřejmě obsahuje iracionální číslo y a platí $f(y) = 0 \notin U$, takže $f(V) \not\subset U$. Funkce f tedy není spojitá v bodě $x \in \mathbf{Q}$. Analogicky se vyšetří případ $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

(6) Triviální (resp. diskrétní) topologie na množině X je nejslabší (resp. nejsilnější) ze všech topologií na X. Jinými slovy $\tau_T \subset \tau \subset \tau_D$ pro libovolnou topologii τ, kde τ_T (resp. τ_D)je triviální (resp. diskrétní) topologie na X.

Pro topologii triviální τ_T, konečných doplňků τ_K, přirozenou τ, Sorgenfreyovou τ_S a diskrétní τ_D na množině reálných čísel $\mathbf{R}$ platí $\tau_T \subset \tau_K \subset \tau \subset \tau_S \subset \tau_D$.

(7) *Vzor topologie, obraz topologie.* Buď X množina, Y topologický prostor s topologií τ_Y, $f : X \to Y$ zobrazení. Iniciální topologie na X, asociovaná se systémem zobrazení $\{f\}$, se nazývá *vzor* topologie τ_Y vzhledem k zobrazení f. V tomto odstavci budeme vzor topologie τ_Y vzhledem k f označovat $f^{-1}\tau_Y$.

Podle definice iniciální topologie systém množin $f^{-1}(V)$, kde V probíhá τ, je systém generátorů topologie $f^{-1}\tau_Y$. Ze vztahů pro vzor sjednocení systému množin a vzor průniku dvou množin vzhledem k zobrazení f je ihned vidět, že tento systém generátorů splývá s toplogií $f^{-1}\tau_Y$.

Buď nyní X topologický prostor s topologií τ_X, Y množina, $f : X \to Y$ zobrazení. Finální topologie na Y, asociovaná se systémem zobrazení $\{f\}$, se nazývá *obraz* topologie τ_X vzhledem k zobrazení f. Obraz topologie τ_X vzhledem k f označujeme $f\tau_X$.

Podle definice topologie $f\tau_X$ je tvořena všemi množinami $V \subset Y$, pro které $f^{-1}(V) \in \tau_X$.

Buď X množina, Y topologický prostor s topologií τ_Y, $f : X \to Y$ zobrazení. Pak $ff^{-1}\tau_Y$ je další topologie na Y. Nechť $V \in \tau_Y$. Jelikož f je spojité vzhledem k topologii $f^{-1}\tau_Y$ na X, $f^{-1}(V) \in f^{-1}\tau_Y$ a tedy podle definice obrazu topologie $V \in ff^{-1}\tau_Y$. Platí tedy $\tau_Y \subset ff^{-1}\tau_Y$.

Podobně nechť X je topologický prostor s topologií τ_X, Y množina, $f : X \to Y$ zobrazení. Pak $f^{-1}f\tau_X$ je další topologie na X. Pro množinu $U \in f^{-1}f\tau_X$ dostáváme z definice vzoru topologie, že $U = f^{-1}(V)$ pro jisté $V \in f\tau_X$ a ze spojitosti f pak vyplývá, že $f^{-1}(V) \in \tau_X$, t.j. $f^{-1}f\tau_X \subset \tau_X$.

Nyní nechť X (resp. Y) je topologický prostor s topologií τ_X (resp. τ_Y), $f : X \to Y$ spojité zobrazení. Ukázali jsme, že platí $\tau_Y \subset ff^{-1}\tau_Y$, $f^{-1}f\tau_X \subset \tau_X$. Dále $f^{-1}\tau_Y$ je nejslabší z topologií na X, pro které je zobrazení f spojité (pro pevné τ_Y), t.j. $f^{-1}\tau_Y \subset \tau_X$. Podobně $f\tau_X$ je nejsilnější z topologií na Y, pro které je zobrazení f spojité, takže

$\tau_Y \subset f\tau_X$. Ze vztahu $f^{-1}\tau_Y \subset \tau_X$ ovšem vyplývá $ff^{-1}\tau_Y \subset f\tau_X$ a ze vztahu $\tau_Y \subset f\tau_X$ vyplývá $f^{-1}\tau_Y \subset f^{-1}f\tau_X$. Celkově tedy platí

$$\tau_Y \subset ff^{-1}\tau_Y \subset f\tau_X, \quad f^{-1}\tau_Y \subset f^{-1}f\tau_X \subset \tau_X.$$

Ukážeme, že

$$f^{-1}ff^{-1}\tau_Y = f^{-1}\tau_Y.$$

Podle definice zobrazení $f : (X, f^{-1}\tau_Y) \to (Y, \tau_Y)$, $f : (X, f^{-1}\tau_Y) \to (Y, ff^{-1}\tau_Y)$ jsou spojitá a topologie $f^{-1}ff^{-1}\tau_Y$ je nejslabší z topologií τ na X, pro které $f : (X, \tau) \to (Y, ff^{-1}\tau_Y)$ je zobrazení spojité; platí tedy $f^{-1}ff^{-1}\tau_Y \subset f^{-1}\tau_Y$. Na druhé straně jsme již ukázali, že $\tau_Y \subset ff^{-1}\tau_Y$. Zeslabíme-li topologii $ff^{-1}\tau_Y$, dostaneme spojité zobrazení $f : (X, f^{-1}ff^{-1}\tau_Y) \to (Y, \tau_Y)$. Přitom $f^{-1}\tau_Y$ je nejslabší z topologií σ, pro které $f : (X, \sigma) \to (Y, \tau_Y)$ je zobrazení spojité. Platí tedy $f^{-1}\tau_Y \subset f^{-1}ff^{-1}\tau_Y$. Spojením výše uvedených inkluzí dostáváme požadovanou rovnost.

Podobně se ukáže, že

$$ff^{-1}f\tau_X = f\tau_X.$$

Z definice vyplývá, že zobrazení $f : (X, \tau_X) \to (Y, f\tau_X)$, $f : (X, f^{-1}f\tau_X) \to (Y, f\tau_X)$ jsou spojitá a topologie $ff^{-1}f\tau_X$ je nejsilnější z topologií τ na Y, pro které $f : (X, f^{-1}f\tau_X) \to (Y, \tau)$ je zobrazení spojité; platí tedy $ff^{-1}f\tau_X \supset f\tau_X$. Na druhé straně jsme ukázali, že $f^{-1}f\tau_X \subset \tau_X$. Zesílíme-li topologii $f^{-1}f\tau_X$, dostaneme spojité zobrazení $f : (X, \tau_X) \to (Y, ff^{-1}f\tau_X)$. Přitom $f\tau_X$ je nejsilnější z topologií σ, pro které $f : (X, \tau_X) \to (Y, \sigma)$ je zobrazení spojité. Platí tedy $f\tau_X \supset ff^{-1}f\tau_X$. Spojením odvozených inkluzí dostaneme požadovanou rovnost.

Cvičení

Spojitá zobrazení

1. Buď $\mathbf{R}$ množina reálných čísel s přirozenou topologií. Ukážeme, že následující zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jsou spojitá: (a) $f(x) = x^2$, (b) $f(x) = x$.

Řešení. Využijeme př. (4) odst. 2.5 str. 22. K důkazu spojitosti v bodě x_0 k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme (a) $\delta = \sqrt{f(x_0) + \varepsilon} - |x_0|$, (b) $\delta = \varepsilon$.

2. Vyšetřete znovu spojitost zobrazení (a), (b) ze cv. 1, jestliže f je zobrazení množiny $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií do množiny $\mathbf{R}$ s topologií (a) Sorgenfreyovou, (b) konečných doplňků, (c) triviální, (d) diskrétní, (e) tvořenou množinami $\emptyset$, $\{x \in \mathbf{R} \mid x > a, a \in \mathbf{R}\}$.

Řešení. Z Věty 6. (a) odst. 2.2 str. 19 a př. (6) odst. 2.5 str. 23 dostaneme, že obě zobrazení jsou spojitá v topologii (b), (c), (e). Z Věty 2. odst. 2.1 str. 18 plyne, že tato zobrazení nejsou spojitá v žádné z topologií (a), (d).

3. Uvažujme množinu reálných čísel s přirozenou topologií a Dirichletovu funkci $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (př. (4) odst. 2.5 str. 22). Ukažte, že funkce $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definovaná vztahem $g(x) = x \cdot f(x)$, je spojitá právě v jednom bodě.

Řešení. Platí $g(x) = x$ pro x racionální a $g(x) = 0$ pro x iracionální. Nechť $x = 0$. Pak $g(x) = 0$ a pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ okolí bodu $g(0)$. Zvolme $\delta \leq \varepsilon$. Pak $g((-\delta, \delta)) \subset V$, t.j.

g je spojitá v bodě 0. Je-li $x \neq 0$ racionální, pak g není spojitá v bodě x; stačí zvolit okolí V bodu $g(x)$ tak, že $0 \notin V$. Podobně ukážeme, že g není spojitá v žádném iracionálním bodě x: zvolíme-li $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$, kde $\varepsilon < x$, pak pro žádné okolí U bodu x neplatí $g(U) \subset V$.

4. Uvažujte množinu $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a systém jejích podmnožin $\sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 5\}\}$. Dokažte, že tento systém tvoří bázi topologie, a určete tuto topologii. Nechť $f, g, h : X \to X$ jsou zobrazení, definovaná vztahy

$$\begin{array}{lllll} f(1) = 1, & f(2) = 1, & f(3) = 2, & f(4) = 4, & f(5) = 5, \\ g(1) = 3, & g(2) = 1, & g(3) = 2, & g(4) = 5, & g(5) = 1, \\ h(1) = 3, & h(2) = 2, & h(3) = 3, & h(4) = 4, & h(5) = 4. \end{array}$$

Určete, zda zobrazení f, g, h jsou spojitá; není-li některé z nich spojité, určete jeho body nespojitosti.

Řešení. Aplikujeme Větu 8. odst. 1.4 str. 6. Jelikož $\emptyset \in \sigma$, sjednocení množin ze σ je rovno X a průnik libovolných dvou množin ze σ je opět prvek σ, systém podmnožin σ je báze topologie na X. Tuto topologii dostaneme ze σ pomocí operace sjednocení. Vzniká topologie $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.

Zobrazení f je spojité, neboť vzorem každé otevřené množiny je množina otevřená. Zobrazení g není spojité: vzorem otevřené množiny $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}$ je po řadě množina $\{2, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$, která není otevřená. Body nespojitosti g nyní určíme z definice; dostaneme body 2, 3, 4, 5. Analogicky zjistíme, že zobrazení h není spojité a jeho body nespojitosti jsou 2, 4, 5.

5. Zobrazení topologických prostorů $f : X \to Y$ je homeomorfismus tehdy a jen tehdy, když je bijekce a pro každou množinu $A \subset X$ platí $f(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} f(A)$. Dokažte.

Řešení. Buď f homeomorfismus. Pak f je spojitá bijekce a tedy $f(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} f(A)$ (Věta 2. odst. 2.1 str. 18). Stačí tedy ukázat, že $\operatorname{cl} f(A) \subset f(\operatorname{cl} A)$. Ze spojitosti zobrazení f^{-1} vyplývá $f^{-1}(\operatorname{cl} f(A)) \subset \operatorname{cl} f^{-1}(f(A)) = \operatorname{cl} A$ odkud $\operatorname{cl} f(A) \subset f(\operatorname{cl} A)$.

Obráceně buď f bijekce taková, že pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí $f(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} f(A)$. Pak f je spojité (Věta 2. odst. 2.1 str. 18). Ukážeme, že f^{-1} je zobrazení spojité. Buď $A \subset X$ libovolná uzavřená množina. Pak jejím vzorem je množina $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \subset Y$. Podle předpokladu ovšem $f(A) = f(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} f(A)$, takže $f(A)$ je množina uzavřená. Nyní aplikujeme podmínku (3) Věty 2. odst. 2.1 str. 18.

6. Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií, její podmnožiny s topologií indukovanou (cv. 4, kap. 1).

Ukažte, že následující topologické prostory jsou homeomorfní:

(a) neprázdné omezené otevřené intervaly (a, b), $(c, d) \subset \mathbf{R}$,
(b) uzavřené intervaly $[a, b]$, $[c, d] \subset \mathbf{R}$, kde $a < b$, $c < d$,
(c) otevřený interval $(a, b) \subset \mathbf{R}$ (ne nutně omezený), $\mathbf{R}$,
(d) intervaly $[a, b)$, $[c, d)$, kde $a < b$, $c < d$.

Řešení. (a) Homeomorfismus intervalu (a, b) na interval (c, d) lze vybrat ve tvaru

$$f(x) = \frac{c-d}{a-b} \cdot x + \frac{ad-bc}{a-b}.$$

(b) Výše uvedené zobrazení f je homeomorfismem také v tomto případě.

(c) Zobrazení $f(x) = \operatorname{tg} x$ je homeomorfismus intervalů $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\mathbf{R}$, homeomorfismus intervalů $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(-\infty, 0)$, a homeomorfismus intervalů $(0, \frac{\pi}{2})$, $(0, \infty)$. Zbytek plyne z (a).

(d) Zobrazení f, definované v (a), je homeomorfismus také v tomto případě.

7. Množiny racionálních a iracionálních čísel nemohou být homeomorfní v žádných topologiích. Ukažte.

Řešení. Uvedené množiny mají různé mohutnosti, neexistuje tedy mezi nimi bijekce.

Uzavřená zobrazení

Zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y se nazývá *uzavřené*, jestliže pro každou uzavřenou množinu $A \subset X$ množina $f(A) \subset Y$ je uzavřená.

8. Uveďte příklad spojitého zobrazení, které (a) není otevřené, je uzavřené, (b) není uzavřené, je otevřené, (c) není otevřené ani uzavřené.

Řešení. (a) Uvažujme $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií. Zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definované vztahem $f(x) = x^2$, je spojité, je uzavřené, ale není otevřené, neboť $f((-1,1) = [0,1)$. Jiným příkladem je zobrazení $f : A \to B$, kde $A = [0,1] \cup [2,3]$, $B = [0,2]$, definované vztahem $f(x) = x$ pro $x \in [0,1]$ a $f(x) = x - 1$ pro $x \in [2,3]$, uvažujeme-li A a B jako topologické podprostory $\mathbf{R}$. Platí totiž $f([0,1]) = [0,1]$, což není množina otevřená v B. Nakonec konstantní zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojité a uzavřené a není otevřené.

(b) Zobrazení $X \to \operatorname{arc\,tg} x$ je spojité a otevřené zobrazení množiny reálných čísel, uvažované s přirozenou topologií, do sebe; toto zobrazení není uzavřené, neboť obrazem $\mathbf{R}$ je otevřený interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(c) Pro $x \le 1$ klademe $f(x) = x^2$, pro $x > 1$ klademe $f(x) = \frac{1}{x}$. Funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojitá a není ani otevřená ani uzavřená v přirozené topologii na $\mathbf{R}$.

9. Musí být zobrazení topologických prostorů, které je otevřené i uzavřené, spojité?

Řešení. Každé zobrazení f topologického prostoru X do diskrétního topologického prostoru Y je otevřené a uzavřené. Přitom f nemusí být spojité: jako příklad můžeme vzít $X = Y$ s topologií slabší než diskrétní a $f = \mathrm{id}_Y$.

10. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Bijekce f topologického prostoru X na topologický prostor Y je homeomorfismus tehdy a jen tehdy, když je spojitá a uzavřená.

Řešení. Tvrzení platí, důkaz je stejný jako důkaz Věty 4. odst. 2.1 str. 19.

Srovnání topologií

11. Uvažujme množinu ℓ^2 všech posloupností $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ reálných čísel takových, že $\sum (x_i)^2 < \infty$, spolu s její přirozenou strukturou reálného vektorového prostoru a se skalárním součinem $(x,y) = \sum x_i y_i$ (porov. cvičení ke kap. 6). Položme $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. *Silnou topologii* na ℓ^2 definujeme jako topologii, jejíž lokální báze v bodě $x_0 \in \ell^2$ je tvořena množinami $U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \ell^2 \mid \|x - x_0\| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ (tzv. *báze silných okolí* bodu x_0). *Slabou topologii* na ℓ^2 definujeme jako topologii, jejíž lokální báze v bodě x_0 je tvořena množinami $V(x_0, (a_1, \dots, a_k)) = \{x \in \ell^2 \mid \sup\{|(x - x_0, a_j)|\} < 1,\ a_j \in \ell^2,\ 1 \le j \le k\}$, ve kterých k probíhá přirozená čísla (tzv. *báze slabých okolí* bodu x_0) (porov. Věta 8. odst. 1.4 str. 6).

Ukažte, že slabá topologie na ℓ^2 je slabší než silná a že tyto topologie nejsou totožné.

Řešení. Ukážeme, že ke každému slabému okolí W libovolného bodu $x_0 \in \ell^2$ existuje element U báze silných okolí bodu x_0 tak, že $U \subset W$. Stačí vzít $W = V$, kde $V = V(x_0, (a_1, \dots, a_k))$. Označme $\mu = \sup\{\|a_1\|, \dots, \|a_k\|\}$ a položme $\varepsilon = \frac{1}{\mu}$, $U = U(x_0, \varepsilon)$. Pak z podmínky $x \in U$ plyne $|(x - x_0, a_j)| \le \|x - x_0\| \cdot \|a_j\| < (\frac{1}{\mu}) \cdot \mu = 1$ pro každé $j = 1, 2, \dots, k$, kde jsme použili Cauchyho–Bunjakovského nerovnost. Platí tedy $U \subset V$ a slabá topologie je slabší než silná.

Tyto topologie ovšem nejsou totožné. Buď $U = U(x_0, \varepsilon)$ element báze silných okolí bodu x_0, $V = V(x_0, (a_1, \dots, a_k))$ libovolný element báze slabých okolí bodu x_0. Z definice vyplývá, že V obsahuje všechny body $y \in \ell^2$, pro které $(y - x_0, a_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$. ℓ^2 je ovšem nekonečněrozměrný vektorový prostor; z toho, že jeho vektorový podprostor, generovaný vektory $a_1, \dots, a_k$, je konečněrozměrný, vyplývá, že existuje vektor $\xi \in \ell^2$, $\xi \neq 0$, tak, že $(\xi, a_j) = 0$ pro každé j. Pak ovšem $(\lambda \cdot \xi, a_j) = 0$ pro každé $\lambda \in \mathbf{R}$ a každé j. Zvolíme $\lambda = \frac{2\varepsilon}{\|\xi\|}$. Bod $y = (\frac{2\varepsilon}{\|\xi\|}) \cdot \xi + x_0$ evidentně patří množině V a $\|y - x_0\| = 2\varepsilon > \varepsilon$, takže $y \notin U$ a $V \not\subset U$. Ukázali jsme tedy, že silné okolí bodu x_0 neobsahuje slabé okolí x_0.

12. Uveďte příklady nesrovnatelných topologií.

Řešení. (1) $X = \{a, b\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$. (2) $X = \{a, b, c\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$, $\tau_2\{\emptyset, X, \{a, b\}\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$. (3) $X = \mathbf{R}$, τ_1 přirozená topologie, τ_2 topologie tvořená množinami $\emptyset$, A, kde $A \supset \mathbf{N}$, τ_3 topologie, tvořená množinami $\emptyset$, A, kde buď $A \supset \{0, 1\}$ nebo $A \not\subset \{0, 1\}$.

13. Buď X množina, τ_1, τ_2 topologie na X, $\tau_1 \subset \tau_2$. Je-li topologický prostor (X, τ_1) Hausdorffův, pak také (X, τ_2) je Hausdorffův. Ukažte.

Řešení. Tvrzení vyplývá z toho, že libovolná množina ze systému množin τ_1 patří systému τ_2.

14. Mějme dvě topologie τ_1, τ_2 na množině X. Nechť τ_1 je slabší než τ_2, nechť A je podmnožina X. Je-li A uzavřená v topologii τ_1, je uzavřená také v topologii τ_2? Nalezněte vztah mezi vnitřkem (vnějškem, hranicí, uzávěrem, množinou hromadných bodů) množiny A v topologii τ_1 a τ_2.

Řešení. Je-li A uzavřená v τ_1, je uzavřená také v τ_2.

Nechť $\operatorname{int}_{(1)} A$ (resp. $\operatorname{int}_{(2)} A$) označuje vnitřek množiny A v topologii τ_1 (resp. τ_2) a analogicky zaveďme symboly pro vnějšek, hranici, uzávěr a množinu hromadných bodů. Platí

$$\operatorname{int}_{(1)} A \subset \operatorname{int}_{(2)} A, \quad \operatorname{ext}_{(1)} A \subset \operatorname{ext}_{(2)} A, \quad \operatorname{fr}_{(1)} \supset \operatorname{fr}_{(2)} A,$$
$$\operatorname{cl}_{(1)} A \supset \operatorname{cl}_{(2)} A, \quad \operatorname{ac}_{(1)} \supset \operatorname{ac}_{(2)} A.$$

Ukážeme to. Jelikož $\operatorname{int}_{(1)} A \subset A$ a podle předpokladu $\operatorname{int}_{(1)} A \in \tau_2$, z toho, že $\operatorname{int}_{(2)} A$ je největší otevřená množina v topologii τ_2, obsažená v A, vyplývá, že $\operatorname{int}_{(1)} A \subset \operatorname{int}_{(2)} A$. Druhý vztah plyne z rovnosti $\operatorname{int}(X \setminus A) = \operatorname{ext} A$. Dále platí $\operatorname{fr}_{(1)} A = X \setminus (\operatorname{int}_{(1)} A \cup \operatorname{ext}_{(1)} A) \supset X \setminus (\operatorname{int}_{(2)} A \cup \operatorname{ext}_{(2)} A) = \operatorname{fr}_{(2)} A$. Předposlední vztah vyplývá z definice uzávěru a ze vztahu $\operatorname{fr}_{(1)} A \supset \operatorname{fr}_{(2)} A$. Nakonec poslední vztah dostaneme z definice hromadného bodu.

Iniciální a finální topologie

15. (a) Buď X množina, Y topologický prostor, $f : X \to Y$ zobrazení. Předpokládejme, že Y je Hausdorffův. Je množina X se vzorem topologie topologického prostoru Y vzhledem k zobrazení f Hausdorffův topologický prostor?

(b) Buď X topologický prostor, Y množina, $f : X \to Y$ zobrazení. Předpokládejme, že X je Hausdorffův. Je množina Y s obrazem topologie topologického prostoru X vzhledem k zobrazení f Hausdorffův topologický prostor?

Řešení. (a) X se vzorem topologie vzhledem k f obecně nemusí být Hausdorffův topologický prostor. Existují-li dva různé body $x_1, x_2 \in X$ tak, že $f(x_1) = f(x_2)$, pak X není Hausdorffův.

Předpokládejme navíc, že zobrazení f je injektivní. Pak $f(x_1) \neq f(x_2)$ a lze najít okolí V_1 (resp. V_2) bodu x_1 (resp. x_2) tak, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Pak $x_1 \in U_1 = f^{-1}(V_1)$, $x_2 \in U_2 = f^{-1}(V_2)$ a $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. V tomto případě tedy X je Hausdorffův.

(b) Na příkladě ukážeme, že množina Y s obrazem topologie X vzhledem k f nemusí být Hausdorffův topologický prostor. Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií, množinu $X = \{a, b\}$, kde $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a zobrazení $f : \mathbf{R} \to X$, definované vztahem $f(x) = a$ pro $x \leq 0$ a $f(x) = b$ pro $x > 0$. Na X vzniká topologie $f\tau\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$, která není Hausdorffova.

16. Určete, která topologie je (a) vzorem triviální topologie, (b) obrazem diskrétní topologie.

Řešení. Vzorem triviální topologie je triviální topologie. Obrazem diskrétní topologie je topologie diskrétní: Buď $f : X \to Y$ zobrazení topologického prostoru X do množiny Y, $y \in Y$ libovolný bod. Množina $f^{-1}(\{y\})$ je otevřená, takže množina $\{y\}$ musí být otevřená v obrazu topologie topologického prostoru X vzhledem k f.

17. Označme $f^{-1}\tau$ vzor topologie τ vzhledem k zobrazení f.

(a) Buď $f : X \to Y$ konstantní zobrazení množiny X do topologického prostoru Y s topologií τ. Pak $f^{-1}\tau$ je triviální topologie. Obráceně nechť Y je Hausdorffův topologický prostor a nechť $f^{-1}\tau$ je triviální topologie. Pak zobrazení f je konstantní. Ukažte.

(b) Nechť f je surjektivní zobrazení množiny X na topologický prostor Y s topologií τ. Je-li topologie $f^{-1}\tau$ diskrétní, pak τ je diskrétní. Ukažte.

(c) Uveďte příklad zobrazení f množiny X do topologického prostoru Y s topologií τ, která není diskrétní, a přitom topologie $f^{-1}\tau$ je diskrétní.

Řešení. (a) Z definice vzoru topologie ihned vyplývá, že je-li f konstantní zobrazení, pak $f^{-1}\tau$ je triviální topologie.

Na druhé straně předpokládejme, že Y je Hausdorffův topologický prostor a $f^{-1}\tau = \{\emptyset, X\}$. Nechť $V \in \tau$, $V \neq \emptyset$, Y. Pak $f^{-1}(V) \in f^{-1}\tau$, t.j. $f^{-1}(V) = X$, a tedy $f(X) = V \cap f(X)$, t.j. $V \supset f(X)$. Je-li $f(X)$ jednoprvková množina, pak f je konstantní. Předpokládejme, že $f(X)$ obsahuje dva různé body y_1, y_2. Pak tyto body mají disjunktní okolí, což není možné, neboť každé okolí y_1 je zároveň okolím $f(X)$. $f(X)$ tedy nemůže obsahovat dva různé body a f je opět konstantní.

(b) Podle předpokladu $\{x\} \in f^{-1}\tau$ pro každé $x \in X$. K bodu $x \in X$ existuje bod $y \in Y$ tak, že $x \in f^{-1}(y)$ a tedy $\{y\}$ je množina otevřená v Y. Evidentně $y = f(x)$ a ze surjektivity f vyplývá, že každá jednoprvková podmnožina Y je otevřená; Y je tedy diskrétní topologický prostor.

(c) Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií a pro každé $n \in \mathbf{N}$ položme $f(n) = n$; dostáváme zobrazení $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Pro každé n platí $f^{-1}((n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})) = \{n\}$. Vzor přirozené toppologie je tedy v tomto případě diskrétní topologie na $\mathbf{N}$.

18. Pro topologický prostor X s topologií τ a zobrazení f, g, $h : X \to X$, definovaná ve cv. 4 kap. 2, nalezněte (a) vzory topologie τ vzhledem k zobrazením f, g, h, (b) iniciální topologie na X vzhledem k systému zobrazení $\{f, g, h\}$.

Řešení. Podle cv. 4 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$. Podle definice vzoru topologie tedy $f^{-1}\tau = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, X\}$, $g^{-1}\tau = \{\emptyset, \{2, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, X\}$, $h^{-1}\tau = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 4, 5\}, X\}$.

Systémem generátorů iniciální topologie na X vzhledem k systému zobrazení $\{f, g, h\}$ je systém množin $f^{-1}\tau \cup g^{-1}\tau \cup h^{-1}\tau = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, X\}$. Bázi topologie dostaneme doplněním tohoto systému o všechny možné průniky jeho elementů, samotnou iniciální topologii pak doplněním báze o všechna možná sjednocení elementů báze.

19. Uvažujte zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definované vztahem $f(x) = x^3$ (resp. Dirichletovu funkci f (př. (5) odst. 2.5 str. 23)). Určete

(a) vzor přirozené topologie vzhledem k f,

(b) obraz přirozené topologie vzhledem k f.

Řešení. (a) Přirozená topologie (resp. topologie tvořená množinami $\emptyset, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \mathbf{R}$),
(b) Přirozená topologie (resp. topologie tvořená množinami $A \subset \mathbf{R}$ takovými, že buď $\{0,1\} \subset A$ nebo $\{0,1\} \not\subset A$).

20. Uvažujte trojprvkovou množinu $A = \{a,b,c\}$, množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií a zobrazení $f : \mathbf{R} \to A$, definované vztahem $f(x) = a$ pro $x < 0$, $f(x) = b$ pro $x > 0$ a $f(x) = c$ pro $x = 0$. Určete obraz přirozené topologie vzhledem k zobrazení f.

Řešení. Nalezneme vzory všech podmnožin množiny A vzhledem k zobrazení f. Dostaneme $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{a\}) = (-\infty,0)$, $f^{-1}(\{b\}) = (0,\infty)$, $f^{-1}(\{c\}) = \{0\}$, $f^{-1}(\{a,b\}) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f^{-1}(\{b,c\}) = [0,\infty)$, $f^{-1}(\{a,c\}) = (-\infty,0]$, $f^{-1}(A) = \mathbf{R}$. Hledaná topologie je tedy tvořena množinami $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, A.

21. Ukažte, že obraz libovolné topologie vzhledem ke konstantnímu zobrazení je topologie diskrétní.

Řešení. Je-li zobrazení $f : X \to Y$ konstantní, pak vzor libovolné množiny $V \subset Y$ je buď $\emptyset$ nebo X. Je-li τ topologie X, pak tedy $f^{-1}(V) \in \tau$ a $f\tau$ musí být diskrétní topologie.

22. Buď $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ systém topologických prostorů, $(f_\iota)_{\iota \in I}$ systém zobrazení definující finální topologii na množině X. Ukažte, že množinu $A \subset X$ je uzavřená právě tehdy, když každá z množin $f_\iota^{-1}(A)$ je uzavřená.

Řešení. Buď $A \subset X$ uzavřená. Pak podle definice finální topologie každá z množin $f_\iota^{-1}(X \setminus A)$ je otevřená. Ze vztahu $f_\iota^{-1}(X \setminus A) = X \setminus f_\iota^{-1}(A)$ tedy vyplývá, že $f_\iota^{-1}(A)$ je množina uzavřená. Opak dokážeme analogicky.

23. (a) Buď X (resp. Y) topologický prostor s topologií τ_X (resp. τ_Y), $f : X \to Y$ spojité surjektivní zobrazení. Předpokládejme, že f je buď otevřené nebo uzavřené. Ukažte, že pak $f\tau_X = \tau_Y$.
(b) Buď X topologický prostor s topologií τ, Y množina, $f : X \to Y$ surjektivní zobrazení. Musí být f otevřené nebo uzavřené vzhledem k obrazu $f\tau$ topologie τ?

Řešení. (a) Buď $U \in f\tau_X$ libovolná množina. Podle definice obrazu topologie $f^{-1}(U) \in \tau_X$. Předpokládejme, že f je otevřené. Pak $f(f^{-1}(U))$ je množina otevřená a ze surjektivity f dostáváme $f(f^{-1}(U)) = U$. Odtud $f\tau_X \subset \tau_Y$. Na druhé straně $\tau_Y \subset f\tau_X$ (př. (7) odst. 2.5 str. 23), takže celkově $f\tau_X = \tau_Y$.
Je-li f uzavřené, pak pro libovolné $V \in f\tau_X$ množina $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ je množina uzavřená a $f(f^{-1}(Y \setminus V))$ je také množina uzavřená; ovšem ze surjektivity f vyplývá $f(f^{-1}(Y \setminus V)) = Y \setminus V$, takže $V \in \tau_Y$ a tedy $f\tau_X \subset \tau_Y$. Opět podle př. (7) odst. 2.5 str. 23 $\tau_Y \subset f\tau_X$, takže celkově $f\tau_X = \tau_Y$.
(b) Na příkladě ukážeme, že f nemusí být ani otevřené ani uzavřené. Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií, tříprvkovou množinu $Y = \{a,b,c\}$ a zobrazení $f : \mathbf{R} \to Y$, definované vztahem $f(x) = a$ pro $x > 1$, $f(x) = b$ pro $x < -1$ a $f(x) = c$ pro $x \in [-1,1]$. Podle definice je f spojité vzhledem k obrazu přirozené topologie na Y. Určíme obraz přirozené topologie. Jelikož $f^{-1}(\{a\}) = (1,\infty)$, $f^{-1}(\{b\}) = (-\infty,-1)$, $f^{-1}(\{c\}) = [-1,1]$, $f^{-1}(\{a,b\}) = (1,\infty) \cup (-\infty,-1)$, $f^{-1}(\{b,c\}) = (-\infty,1]$, $f^{-1}(\{a,c\}) = [-1,\infty)$, vidíme, že je tvořen množinami $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, Y. Ovšem $f((-1,1)) = \{c\}$, takže f není otevřené, a $f([2,3]) = \{a\}$, takže f není uzavřené.

Část 3

Podprostory, součiny, faktorové prostory

Tato kapitola je věnována studiu topologií, které vznikají přirozeným způsobem na podmnožinách topologických prostorů, na součinech systémů množin, na nichž je dána topologická struktura, a na faktorových množinách topologických prostorů. Na podmnožině topologického prostoru vzniká tak vzor topologie vzhledem ke kanonickému vložení podmnožiny do tohoto topologického prostoru, tzv. topologie podprostoru; tuto topologii studujeme v odst. 3.1. Na součinu topologických prostorů vzniká iniciální topologie, asociovaná se systémem projekcí součinu na jednotlivé faktory, tzv. topologie součinu. Součin topologických prostorů lze ovšem topologizovat i jinak. Obecně silnější topologie je topologie silného součinu, kterou dostaneme, vezmeme-li za bázi všechny součiny otevřených množin z jednotlivých faktorů. Topologie součinu a topologie silného součinu je studována v odst. 3.2, 3.3 a ve cvičení. Zbývající část kapitoly je věnována ekvivalencím na topologických prostorech. Je-li dána taková ekvivalence, příslušnou faktorovou množinu lze topologizovat pomocí finální topologie, asociované s kanonickou faktorovou projekcí; docházíme tak k pojmu faktorové topologie. Důležitým speciálním případem, kterému věnujeme pozornost, je ekvivalence, asociovaná se spojitým zobrazením.

Ukazuje se, že topologie podprostoru, topologie součinu a faktorová topologie do značné míry odrážejí vlastnosti topologií, ze kterých vznikly; na druhé straně však některé vlastnosti původních topologií ztrácejí (např. faktorová topologie Hausdorffovy topologie nemusí být Hausdorffova).

3.1. Podprostory topologického prostoru

Buď A podmnožina množiny X. Zobrazení $A \ni x \to \iota(x) = x \in X$ se nazývá *kanonické vložení* A do X.

Buď A podmnožina topologického prostoru X. Vzor topologie topologického prostoru X vzhledem ke kanonickému vložení A do X se nazývá *indukovaná topologie.* Množina A s indukovanou topologií se nazývá *topologický podprostor*, nebo stručně *podprostor* topologického prostoru X.

Připomeňme si, že $V \subset A$ je otevřená v indukované topologii tehdy a jen tehdy, když existuje otevřená množina $U \subset X$ tak, že $V = A \cap U$ (porov. př. (7) odst. 2.5 str. 23, cv. 4 kap. 1).

Následující tvrzení vyjadřuje vlastnost *tranzitivity* indukované topologie.

Věta 1. *Buď A topologický podprostor topologického prostoru X, B podmnožina A. Topologie, indukovaná na B topologií A, splývá s topologií, indukovanou na B topologií X.*

Důkaz. Buď τ (resp. σ) topologie na B indukovaná topologií X (resp. A). Ukážeme, že $\sigma = \tau$. Nechť $U \in \sigma$. Existuje $V \in \tau$ tak, že $U = V \cap B$, a tedy existuje otevřená množina $W \subset X$ tak, že $V = W \cap A$, $U = W \cap A \cap B = W \cap B$; U tedy patří τ. Obráceně nechť $U \in \tau$. Pak existuje otevřená množina $W \subset X$ tak, že $U = W \cap B = W \cap A \cap B$. Klademe $V = W \cap A$; evidentně množina V patří τ a $U = V \cap B$, tkaže $U \in \sigma$. Topologie σ a τ tedy splývají.

Věta 2. (a) *Topologický podprostor oddělitelného topologického prostoru je oddělitelný.*
(b) *Topologický podprostor topologického prostoru prvního (resp. druhého) typu spočetnosti je prvního (resp. druhého) typu spočetnosti.*

Důkaz. Tvrzení vyplývají přímo z definice.

Buďte X, Y množiny, $A \subset X$ podmnožina, $f : A \to Y$, $g : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že zobrazení g je *rozšíření* zobrazení f na množinu X (resp. f je *zúžení* zobrazení g na množinu A), jestliže pro každé $x \in A$ platí $f(x) = g(x)$. V tomto případě označujeme $f = g|_A$.

Buď X množina, Y, Z množiny takové, že $Y \subset Z$, $f : X \to Y$, $g : X \to Z$ zobrazení. Řekneme, že zobrazení f (resp. g) vzniká ze zobrazení g (resp. f) *zúžením* (resp. *rozšířením*) oboru hodnot, jestliže pro každé $x \in X$ platí $f(x) = g(x)$. Pro zobrazení, vznikající zúžením ev. rozšířením oboru hodnot, nezavádíme samostatná označení, nemůžeme-li dojít k nedorozumění.

Věta 3. (a) *Zúžení spojitého zobrazení na topologický podprostor je spojité zobrazení.*
(b) *Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení topologických prostorů, $Y_1 \subset Y$ topologický podprostor takový, že $f(X) \subset Y_1$. Pak zobrazení $g : X \to Y_1$, vznikající z f zúžením oboru hodnot, je spojité.*
(c) *Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení topologických prostorů a předpokládejme, že Y je podprostor topologického prostoru Y_2. Pak zobrazení $g : X \to Y_2$, vznikající z f rozšířením oboru hodnot, je spojité.*

Důkaz. Tvrzení (a) a (b) jsou zřejmá. Tvrzení (c) vyplývá z toho, že g je kompozice f a kanonického vložení Y do Y_2 a je tedy spojité (Věta 1. (b) odst. 2.1 str. 17).

Buď X topologický prostor, Y jeho topologický podprostor. Pro množinu $A \subset Y$ označíme $\operatorname{int}_Y A$ (resp. $\operatorname{ext}_Y A$, resp. $\operatorname{fr}_Y A$, resp. $\operatorname{cl}_Y A$) vnitřek (resp. vnějšek, resp. hranici, resp. uzávěr) množiny A v Y. Při tomto označení evidentně $\operatorname{int} A = \operatorname{int}_X A$, $\operatorname{ext} A = \operatorname{ext}_X A$, $\operatorname{fr} A = \operatorname{fr}_X A$, $\operatorname{cl} A = \operatorname{cl}_X A$.

Věta 4. *Buď X topologický prostor, Y jeho topologický podprostor.*
(a) *Pro libovolnou množinu $A \subset Y$ platí*

$$\operatorname{int} A = \operatorname{int}_Y A \cap \operatorname{int} Y, \qquad \operatorname{fr}_Y A \subset (\operatorname{fr} A) \cap Y,$$
$$\operatorname{cl}_Y A = (\operatorname{cl} A) \cap Y.$$

(b) *Je-li množina $A \subset Y$ otevřená (resp. uzavřená) v X, je otevřená (resp. uzavřená) v Y.*
(c) *Je-li množina Y otevřená (resp. uzavřená) v X, pak každá množina otevřená (resp. uzavřená) v Y je otevřená (resp. uzavřená) v X.*

Důkaz. (a) Dokážeme první vztah. Nechť $x \in \operatorname{int}_Y A \cap \operatorname{int} Y$. Jelikož $x \in \operatorname{int}_Y A$, existuje okolí V bodu x v Y takové, že $V \subset A$; existuje tedy také okolí W_1 bodu x v X tak, že $V = W_1 \cap Y$. Ovšem $x \in \operatorname{int} Y$, existuje tedy okolí W_2 bodu x v X tak, že $W_2 \subset Y$. Klademe $U = W_1 \cap W_2$. U je okolí bodu x v X. Dále $U \subset W_2 \cap Y = V \subset A$. Bod x tedy leží v $\operatorname{int} A$ a platí $\operatorname{int}_Y A \cap \operatorname{int} Y \subset \operatorname{int} A$.

Obráceně ukážeme, že $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int}_Y A \cap \operatorname{int} Y$. Jelikož $A \subset Y$, platí $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} Y$ (Věta 2. (d) odst. 1.2 str. 2). Ukážeme, že $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int}_Y A$. Platí $\operatorname{int} A \subset A \subset Y$, takže $\operatorname{int} A \cap Y = \operatorname{int} A$ a $\operatorname{int} A$ musí být množina otevřená v Y. Jelikož $\operatorname{int}_Y A$ je největší otevřená množina (v topologii prostoru Y) obsažená v A a platí $\operatorname{int} A \subset A$, musí zároveň platit $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int}_Y A$, což jsme chtěli dokázat. Celkově tedy $\operatorname{int} A = \operatorname{int}_Y A \cap \operatorname{int} Y$ a první vztah je dokázán.

Dokážeme druhý vztah. Buď $x \in \operatorname{fr}_Y A$ libovolný bod, U jeho okolí v X. Pak $U \cap Y$ je okolí x v Y. Platí tedy podle předpokladu $(U \cap Y) \cap A \neq \emptyset$, t.j. $U \cap A \neq \emptyset$. Analogicky $(U \cap A) \cap (Y \backslash A) \neq \emptyset$ a tedy $U \cap (X \backslash A) \supset U \cap (Y \backslash A) \neq \emptyset$. Bod x tedy patří množině $\operatorname{fr} A$. Jelikož evidentně patří také množině Y, platí $x \in \operatorname{fr} A \cap Y$, což jsme chtěli dokázat.

Nakonec dokážeme třetí vztah. Z prvního a druhého již dokázaného vztahu vyplývá, že platí $\operatorname{cl}_Y A = \operatorname{int}_Y A \cup \operatorname{fr}_Y A \subset \operatorname{int}_Y A \cup (\operatorname{fr} A \cap Y) = (\operatorname{int}_Y A \cup \operatorname{fr} A) \cap (\operatorname{int}_Y A \cup Y) = (\operatorname{int}_Y A \cup \operatorname{fr} A) \cap Y = (\operatorname{int}_Y A \cup \operatorname{fr} A) \cap \operatorname{int} Y \cap Y = ((\operatorname{int}_Y A \cap \operatorname{int} Y) \cup (\operatorname{fr} A \cap \operatorname{int} Y)) \cap Y \subset (\operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A) \cap Y = \operatorname{cl} A \cap Y$. Obráceně opět s použitím prvního a druhého již dokázaného vztahu dostáváme $\operatorname{cl} A \cap Y = (\operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A) \cap Y = (\operatorname{int} A \cap Y) \cup (\operatorname{fr} A \cap Y) = (\operatorname{int}_Y A \cap \operatorname{int} Y \cap Y) \cup \operatorname{fr}_Y A = (\operatorname{int}_Y A \cap \operatorname{int} Y) \cup \operatorname{fr}_Y A = (\operatorname{int}_Y A \cup \operatorname{fr}_Y A) \cap (\operatorname{int} Y \cup \operatorname{fr}_Y A) = \operatorname{cl}_Y A \cap (\operatorname{int} Y \cup \operatorname{fr}_Y A) \subset \operatorname{cl}_Y A$. Tím je dokázán také třetí ze vztahů (a).

(b) První tvrzení vyplývá ze vztahu $A = Y \cap A$, druhé ze vztahu $Y \cap (X \backslash A) = (Y \cap X) \backslash (Y \cap A) = Y \backslash A$.

(c) Je-li $Y \subset X$ množina otevřená a $A \subset Y$ množina otevřená v indukované topologii, pak $A = Y \cap U$ pro jistou otevřenou množinu U v X a A je otevřená jako průnik dvou otevřených množin.

Buď $Y \subset X$ množina uzavřená a $A \subset Y$ množina uzavřená v indukované topologii. Platí tedy $\operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} Y$ (Věta 6. (c) odst. 1.3 str. 5). Zároveň $\operatorname{cl}_Y A = A = \operatorname{cl} A \cap Y$ a tedy celkově $A = \operatorname{cl} A$.

Věta 5. *Buď X topologický prostor, σ báze topologie, Y podmnožina X. Systém množin $\sigma_Y = \{W \subset Y \mid W = U \cap Y, U \in \sigma\}$ je báze indukované topologie na Y.*

Důkaz. Je zřejmé, že každá z množin patřících σ_Y je otevřená v indukované topologii. Prověříme, že σ_Y splňuje předpoklady Věty 9. odst. 1.4 str. 7. Buď $y \in Y$ libovolný bod, V jeho okolí v indukované topologii. Podle definice $V = Y \cap U$, kde U je otevřená množina v X. U je ovšem sjednocení množin ze σ, existuje tedy element $U' \in \sigma$ takový, že $U' \subset U$, $y \in U'$. Klademe $W = Y \cap U'$. Pak $W \in \sigma_Y$ a zřejmě $y \in W \subset V$.

Následující tvrzení vyjadřuje *tranzitivnost* pojmu hustá množina.

Věta 6. *Buď X topologický prostor, A, $B \subset X$ množiny takové, že $B \subset A$. Předpokládejme, že množina B je hustá v topologickém podprostoru $A \subset X$ a množina A je hustá v X. Pak B je hustá v X.*

Důkaz. Podle předpokladu platí $\operatorname{cl}_A B = A$, $\operatorname{cl} A = X$. Ze vztahu $\operatorname{cl}_A B = \operatorname{cl} B \cap A$ (Věta 4. (a) odst. 3.1 str. 32) dostáváme $A = \operatorname{cl} B \cap A$. Dále podle Věty 6. (d) odst. 1.3 str. 5 $\operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} B \cap \operatorname{cl} A$, t.j. $X \subset \operatorname{cl} B \cap X$ a musí platit $\operatorname{cl} B = X$.

3.2. Součin dvou topologických prostorů

Buďte X, Y neprázdné množiny, $X \times Y$ jejich součin. Zobrazení $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ (resp. $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$), definované vztahem $\mathrm{pr}_1(x, y) = x$ (resp. $\mathrm{pr}_2(x, y) = y$), se nazývá *první* (resp. *druhá*) *kanonická projekce* součinu $X \times Y$. Každé ze zobrazení pr_1, pr_2 je surjektivní.

Buďte nyní X, Y topologické prostory, $X \times Y$ součin množin X, Y. Iniciální topologie na $X \times Y$, asociovaná se systémem zobrazení $\{\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2\}$, se nazývá *součin* topologií topologických prostorů X, Y. Množina $X \times Y$ s touto topologií se nazývá *součin* topologických prostorů X, Y.

Součin topologií topologických prostorů je generován systémem generátorů tvaru $\mathrm{pr}_1^{-1}(U) = U \times Y$, $\mathrm{pr}_2^{-1}(V) = X \times V$, kde U (resp. V) probíhá otevřené množiny v X (resp. Y). Jelikož $\mathrm{pr}_1^{-1}(U) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(V) = U \times V$, tato topologie je generována bází, tvořenou množinami tvaru $W = U \times V$.

Věta 7. (a) *První a druhá kanonická projekce součinu topologických prostorů jsou spojitá otevřená zobrazení.*

(b) *Buďte X, Y topologické prostory. Pro každé $x \in X$ zobrazení $Y \ni y \to (x, y) \in \{x\} \times Y$ je homeomorfismus Y na topologický podprostor $\{x\} \times Y$ topologického prostoru $X \times Y$.*

(c) *Buďte X, Y, Z topologické prostory, $X \times Y$ součin topologických prostorů X, Y, $f : X \times Y \to Z$ zobrazení, spojité v bodě $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Pak zobrazení $Y \ni y \to f(x_0, y) \in Z$ je spojité v bodě y_0.*

(d) *Zobrazení $X \times Y \ni (x, y) \to (y, x) \ni Y \times X$ součinů topologických prostorů X, Y je homeomorfismus.*

Důkaz. (a) Element báze topologie součinu topologických prostorů X, Y tvaru $U \times V$, kde U (resp. V) je otevřená množina v X (resp. Y), se při první kanonické projekci zobrazí na U; pr_1 je tedy zobrazení otevřené (Věta 3. (a) odst. 2.1 str. 18). Spojitost pr_1 vyplývá z toho, že topologie součinu je iniciální topologie.

(b) Prověříme spojitost zobrazení $y \to (x_0, y)$ v bodě y_0. Buď U okolí bodu (x_0, y_0) v $\{x_0\} \times Y$. Existuje otevřená množina $V \subset X \times Y$ tak, že $V \cap (\{x_0\} \times Y) = U$. Dále existuje okolí bodu (x_0, y_0) tvaru $V_1 \times V_2$, kde V_1 (resp. V_2) je okolí x_0 (resp. y_0) a $V_1 \times V_2 \subset V$. Přitom $(V_1 \times V_2) \cap (\{x_0\} \times Y) \subset U$, takže množina V_2 se zobrazením $y \to (x_0, y)$ zobrazí na $\{x_0\} \times V_2 = (V_1 \times V_2) \cap (\{x_0\} \times Y) \subset U$. Zobrazení $y \to (x_0, y)$ je tedy spojité v bodě y_0.

Toto zobrazení je ovšem evidentně bijekce a k němu inverzní zobrazení je zúžení kanonické projekce pr_2 na topologický podprostor $\{x_0\} \times Y \subset X \times Y$; inverzní zobrazení je tedy také spojité.

(c) Zobrazení $y \to f(x_0, y)$ vzniká složením zobrazení $y \to (x_0, y)$, $(x, y) \to f(x, y)$. První z těchto zobrazení je spojité v bodě y_0 podle již dokázaného tvrzení (b), druhé je podle předpokladu spojité v (x_0, y_0). Tvrzení tedy vyplývá z Věty 1. (b) odst. 2.1 str. 17.

(d) Tvrzení ihned vyplývá z Věty 2. odst. 2.1 str. 18.

Pojem součinu topologických prostorů umožňuje zformulovat jednoduché kriterium oddělitelnosti topologického prostoru. Uvedeme toto kriterium a některé jeho důsledky.

Buď X množina a označme $\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$. Množina Δ_X se nazývá *diagonála* součinu množin $X \times X$.

Věta 8. *Topologický prostor X je Hausdorffův tehdy a jen tehdy, když diagonála Δ_X je uzavřená množina v součinu $X \times X$.*

Důkaz. Předpokládejme, že X je Hausdorffův a zvolme bod $(x,y) \in (X\times X)\backslash\Delta_X$. Platí $x \neq y$ a podle předpokladu existuje okolí U (resp. V) bodu x (resp. y) tak, že $U \cap V = \emptyset$. Pak pro okolí $U \times V$ bodu (x,y) platí $(U \times V) \cap \Delta_X = \emptyset$, t.j. $U \times V \subset (X \times X)\backslash\Delta_X$ a $(X \times X)\backslash\Delta_X$ je množina otevřená. Diagonála Δ_X je tedy uzavřená.

Obráceně je-li Δ_X množina uzavřená, k libovolným dvěma různým bodům x, $y \in X$ lze najít okolí bodu $(x,y) \in (X\times X)\setminus\Delta_X$ tvaru $U\times V$ ležící celé v $(X\times X)\backslash\Delta_X$. Množiny U, V tedy nemohou mít společný bod.

Důsledek 1. Buďte f, g spojitá zobrazení topologického prostoru X do Hausdorffova topologického prostoru Y.

(a) Množina $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subset X$ je uzavřená.

(b) Platí-li $f(x) = g(x)$ v každém bodě nějaké množiny husté v X, pak $f = g$.

(c) Funkcionální graf $\{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = y\}$ je uzavřená množina.

Důkaz. (a) Množina $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ je vzor uzavřené množiny Δ_Y vzhledem ke spojitému zobrazení $X \ni x \to (f(x), g(x)) \in Y \times Y$. Můžeme tedy aplikovat Větu 2. odst. 2.1 str. 18.

(b) Platí-li $f(x) = g(x)$ na nějaké množině $A \subset X$, pak podle již dokázané části (a) tohoto důsledku $f(x) = g(x)$ na nejmenší uzavřené množině obsahující A, t.j. na $\operatorname{cl} A$. Odtud dostáváme (b).

(c) Zobrazení $X \times Y \ni (x,y) \to y \in Y$, $X \times Y \ni (x,y) \to f(x) \in Y$ jsou spojitá, takže (c) vyplývá z (a).

Důsledek 2. Existuje-li spojité rozšíření $g : X \to Y$ zobrazení $f : A \to Y$, kde A je množina hustá v X a Y je Hausdorffův topologický prostor, pak je jediné.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z části (b) Důsledku 1.

3.3. Součin systému topologických prostorů

Součinem systému neprázdných množin $(X_\iota)_{\iota\in I}$ rozumíme množinu všech zobrazení $x : I \to \bigcup X_\iota$ takových, že $x(\iota) \in X_\iota$ pro každé $\iota \in I$. Píšeme také $x(\iota) = x_\iota$ a $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$. Součin systému množin $(X_\iota)_{\iota\in I}$ označujeme $\prod X$ nebo $\prod_\iota X_\iota$ nebo také $\prod_{\iota\in I} X_\iota$, je-li třeba explicitně vyznačit indexovou množinu. Pro libovolné $\kappa \in I$ je každému elementu $x \in \prod X_\iota$ přiřazen bod $x_\kappa \in X_\kappa$. Klademe $x_\kappa = \mathrm{pr}_\kappa(x)$ a bod x_κ nazýváme *κ-komponenta* nebo *κ-projekce* elementu $x \in \prod X_\iota$. Zobrazení $x \to \mathrm{pr}_\kappa(x)$ je surjektivní; nazývá se *κ-kanonická projekce* nebo *κ-projekce* součinu $\prod X_\iota$.

Je-li množina I konečná, $I = \{1, 2, \ldots, k\}$, pak element $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ součinu $\prod X_\iota$ označujeme také symbolem $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Dále označujeme $\prod X_\iota = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$.

Platí-li pro každé $\iota \in I$ rovnost $X_\iota = X$, kde X je nějaká množina, označujeme $\prod X_\iota = X^I$.

Mějme systém topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota\in I}$. Iniciální topologie na součinu $\prod X_\iota$, asociovaná se systémem zobrazení $(\mathrm{pr}_\iota)_{\iota\in I}$, se nazývá *součin* topologií topologických prostorů X_ι. Množina $\prod X_\iota$ s touto topologií se nazývá *součin* systému topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota\in I}$.

Z definice iniciální topologie vyplývá, že součin topologií topologických prostorů X_ι je generován systémem generátorů tvaru $\mathrm{pr}_\iota^{-1}(U_\iota)$, kde U_ι probíhá otevřené množiny v X_ι, t.j. bází, tvořenou všemi konečnými průniky množin tvaru $\mathrm{pr}_\iota^{-1}(U_\iota)$. Každý takový konečný průnik má tvar součinu $\prod U_\iota$, kde každá z množin U_ι je otevřená v X_ι a $U_\iota = X_\iota$ až na konečnou množinu indexů ι.

Věta 9. (a) *Součin $X_1 \times \cdots \times X_k$ topologických prostorů $X_1, \ldots, X_k$ je homeomorfní se součinem $(X_1 \times \cdots \times X_{k-1}) \times X_k$.*

(b) *Buď $(X_\iota)_{\iota \in I}$ systém topologických prstorů, $J \subset I$ podmnožina. Buď $z \in \prod_{\iota \in I} X_\iota$, $z = (z_\iota)_{\iota \in I}$, libovolný bod, $X_J(z)$ topologický podprostor součinu $\prod_{\iota \in I} X_\iota$, tvořený všemi body $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$ takovými, že $x_\iota = z_\iota$ pro každé $\iota \notin J$. Pak součin topologických prostorů $\prod_{\iota \in J} X_\iota$ je homeomorfní s $X_J(z)$.*

Důkaz. (a) Stačí ukázat, že zobrazení $X_1 \times \cdots \times X_k \ni (x_1, \ldots, x_k) \to ((x_1, \ldots, x_{k-1}), x_k) \in (X_1 \times \cdots \times X_{k-1}) \times X_k$ je homeomorfismus. Toto zobrazení je ovšem evidentně bijektivní a jeho spojitost a spojitost inverzního zobrazení vyplývá z Věty 2. odst. 2.1 str. 18.

(b) Uvažujme zobrazení $\prod_{\iota \in J} X_\iota \ni (x_\iota)_{\iota \in J} \to f((x)_{\iota \in J}) = (y_\iota)_{\iota \in I} \in \prod_{\iota \in I} X_\iota$, definované vztahem $y_\iota = x_\iota$ pro $\iota \in J$ a $y_\iota = z_\iota$ pro $\iota \notin J$. Pro každé $\kappa \in J$ $(\mathrm{pr}_\kappa \circ f)((x_\iota)_{\iota \in J}) = x_\kappa$, platí-li $\kappa \in J$, a $(\mathrm{pr}_\kappa \circ f)((x_\iota)_{\iota \in J} = z_\kappa$, platí-li $\kappa \notin J$; každé ze zobrazení $\mathrm{pr}_\kappa \circ f$ je tedy spojité a z Věty 8. odst. 2.3 str. 20 vyplývá, že f je spojité. Dále označme $g_z : \prod_{\iota \in J} X_\iota \to X_J(z)$ zobrazení, definované zúžením oboru hodnot f. Toto zobrazení je evidentně bijektivní a podle Věty 3. (b) odst. 3.1 str. 32 je také spojité. Inverzní zobrazení g_z^{-1} vzniká zúžením definičního oboru spojitého zobrazení $\prod_{\iota \in I} X_\iota \ni (x_\iota)_{\iota \in I} \to (x_\iota)_{\iota \in J} \in \prod_{\iota \in J} X_\iota$ na topologický podprostor $X_J(z)$ a je tedy také spojité (Věta 3. (a) odst. 3.1 str. 32). g_z je tedy homeomorfismus.

Buď f zobrazení množiny Y do součinu $\prod X_\iota$ systému množin $(X_\iota)_{\iota \in I}$. Pro každé $\iota \in I$ klademe $f_\iota = \mathrm{pr}_\iota \circ f$; f_ι je zobrazení množiny Y do X_ι nazývané *ι-složka* zobrazení f. Píšeme $f = (f_\iota)_{\iota \in I}$. Obráceně předpokládejme, že je dán systém zobrazení $(f_\iota)_{\iota \in I}$, kde f_ι je zobrazení Y do X_ι. Pak ke každému $y \in Y$ je definováno zobrazení $I \ni \kappa \to f_\kappa(y) \in \bigcup X_\iota$ takové, že $f_\kappa(y) \in X_\kappa$; toto zobrazení je elementem součinu množin $\prod X_\iota$ a je označováno $f(y)$. Výše uvedeným způsobem lze zadávat zobrazení množin do součinů množin pomocí jejich složek.

Buď $(f_\iota)_{\iota \in I}$ systém zobrazení $f_\iota : X_\iota \to Y_\iota$. Pro každé $x \in \prod X_\iota$, $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$, klademe $(\prod f_\iota)(x) = y$, kde $y = (f_\iota(x_\iota))_{\iota \in I}$. Zobrazení $\prod f_\iota : \prod X_\iota \to \prod Y_\iota$, definované tímto vztahem, se nazývá *součin* systému zobrazení $(f_\iota)_{\iota \in I}$. Je-li indexová množina konečná, $I = \{1, 2, \ldots, k\}$, součin systému zobrazení $(f_i)_{i \in I}$ označujeme $f_1 \times \cdots \times f_k$.

Věta 10. (a) *κ-projekce součinu systému topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota \in I}$ je spojité otevřené zobrazení.*

(b) *Zobrazení f topologického prostoru Y do součinu $\prod X_\iota$ systému topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota \in I}$ je spojité tehdy a jen tehdy, když každá jeho složka je spojitá.*

(c) *Buď $(f_\iota)_{\iota \in I}$ systém zobrazení topologických prostorů. Součin $\prod f_\iota$ je spojité zobrazení tehdy a jen tehdy, je-li každé ze zobrazení f_ι spojité.*

(d) *Součin konečného systému otevřených zobrazení topologických prostorů je otevřené zobrazení.*

Důkaz. (a) Spojitost pr_κ vyplývá přímo z definice součinu topologií. Ukážeme, že pr_κ je otevřené zobrazení. Element báze součinu $\prod X_\iota$ má tvar $\prod U_\iota$, kde $U_\iota \subset X_\iota$ je množina otevřená a $U_\iota = X_\iota$ pro každé $\iota \in I \backslash J$, kde $J \subset I$ je jistá konečná množina; $\mathrm{pr}_\kappa(\prod U_\iota) = U_\kappa$ je tedy vždy otevřená množina v X_κ a pr_κ musí být otevřené zobrazení (Věta 3. (a) odst. 2.1 str. 18).

(b) Tvrzení vyplývá z Věty 8. odst. 2.3 str. 20.

(c) Nechť ke každému ι z indexové množiny I je dáno zobrazení topologických prostorů $f_\iota : X_\iota \to Y_\iota$. Pak pro každé $(x_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod X_\iota (\mathrm{pr}'_\kappa \circ \prod f_\iota)((x_\lambda)_{\lambda \in I}) = \mathrm{pr}'_\kappa((f_\iota(x_\iota))_{\iota \in I}) =$

$f_\kappa(x_\kappa) = f_\kappa \circ \mathrm{pr}_\kappa((x_\iota)_{\iota\in I})$, t.j. platí $\mathrm{pr}'_\kappa \circ \prod f_\iota = f_\kappa \circ \mathrm{pr}_\kappa$ pro každé $\kappa \in I$; zde pr_κ (resp. pr'_κ) označuje κ-projekci součinu $\prod X_\iota$ (resp. $\prod Y_\iota$). Je-li tedy každé ze zobrazení f_κ spojité, pak $\mathrm{pr}'_\kappa \circ \prod f_\iota$ je spojité pro každé κ a $\prod f_\iota$ musí být spojité podle již dokázaného tvrzení (b).

Dokážeme opak. Předpokládejme, že $\prod f_\iota$ je zobrazení spojité. Pak ze vztahu $\mathrm{pr}'_\kappa \circ \prod f_\iota = f_\kappa \circ \mathrm{pr}_\kappa$ vyplývá, že $f_\kappa \circ \mathrm{pr}_\kappa$ je zobrazení spojité pro každé κ. Buď $V \subset Y$ otevřená množina. Pak s využitím surjektivity zobrazení pr_κ a vztahu (I.32) dostaneme $\mathrm{pr}_\kappa((f_\kappa \circ \mathrm{pr}_\kappa)^{-1}(V)) = \mathrm{pr}_\kappa \circ \mathrm{pr}_\kappa^{-1} \circ f_\kappa^{-1}(V) = f_\kappa^{-1}(V)$. Tato množina je ovšem otevřená podle již dokázaného tvrzení (a); nyní aplikujeme Větu 2. odst. 2.1 str. 18.

(d) Uvažujme bázi topologie součinu topologických prostorů $X_1 \times \cdots \times X_k$, tvořenou množinami $U_1 \times \cdots \times U_k$, kde $U_i \subset X_i$ je otevřená množina. Součinem $f_1 \times \cdots \times f_k$ zobrazení topologických prostorů $f_i : X_i \to Y_i$ se součin množin $U_1 \times \cdots \times U_k$ zobrazí na množinu $f_1(U_1) \times \cdots \times f_k(U_k)$; předpokládáme-li, že zobrazení f_i jsou otevřená, je množina $f_1(U_1) \times \cdots \times f_k(U_k)$ otevřená. Podle Věty 3. (a) odst. 2.1 str. 18 je tedy zobrazení $f_1 \times \cdots \times f_k$ otevřené.

Poznamenáváme, že tvrzení (d) se zřejmě nedá zobecnit na součin nekonečného systému zobrazení: za protipříklad stačí vzít systém zobrazení, která nejsou surjektivní.

Věta 11. *Buď $(X_\iota)_{\iota\in I}$ systém topologických prostorů. Pro každé $\iota \in I$ nechť $A_\iota \subset X_\iota$ je topologický podprostor. Pak topologie indukovaná na množině $\prod A_\iota$ topologií součinu $\prod X_\iota$ je totožná se součinem topologií topologických prostorů A_ι.*

Důkaz. Označme A množinu $\prod A_\iota$, A_1 (resp. A_2) množinu A s topologií podprostoru topologického prostoru $X = \prod X_\iota$ (resp. s topologií součinu systému topologických prostorů $(A_\iota)_{\iota\in I}$). Dále označme pr^X_κ (resp. pr^A_κ) κ-projekci součinu $\prod X_\iota$ (resp. $\prod A_\iota$). Ukážeme, že $\mathrm{id}_A : A_1 \to A_2$ je homeomorfismus.

Uvažujme diagram množin a jejich zobrazení

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{pr}^A_\kappa"'] & X \arrow[d, "\mathrm{pr}^X_\kappa"] \\ A \arrow[r, "\varphi_\kappa"] & X \end{tikzcd}$$

V tomto diagramu $\varphi : A \to X$, $\varphi_\kappa : A_\kappa \to X_\kappa$ jsou kanonická vložení a evidentně $\mathrm{pr}^X_\kappa \circ\varphi = \varphi_\kappa \circ \mathrm{pr}^A_\kappa$.

Položme $A = A_1$ a uvažujme X, A_κ, X_κ jako topologické prostory. Pak φ je spojité zobrazení, takže $\mathrm{pr}^X_\kappa \circ\varphi$ je také spojité a tedy $\varphi_\kappa \circ \mathrm{pr}^A_\kappa = \mathrm{pr}^X_\kappa \circ\varphi$ je také spojité. Ovšem je definována kompozice $\varphi_\kappa^{-1} \circ \varphi_\kappa \circ \mathrm{pr}^A_\kappa = \mathrm{pr}^A_\kappa = \varphi_\kappa^{-1} \circ \mathrm{pr}^X_\kappa \circ\varphi$ přičemž $\varphi_\kappa^{-1} : \varphi_\kappa(A_\kappa) \to A_\kappa$ je spojité zobrazení; $\mathrm{pr}^A_\kappa : A_1 \to A_\kappa$ je tedy spojité zobrazení. Z definice iniciální topologie tedy vyplývá, že topologie A_1 je silnější než topologie A_2, t.j. $\mathrm{id}_A : A_1 \to A_2$ je spojité zobrazení.

Položme $A = A_2$ a opět uvažujme X, A_κ, X_κ jako topologické prostory. Pak pr^A_κ je spojité zobrazení, takže $\mathrm{pr}^X_\kappa \circ\varphi = \varphi_\kappa \circ \mathrm{pr}^A_\kappa$ je spojité zobrazení a tedy φ je spojité (Věta 10. (b) odst. 3.3 str. 36). Topologie A_1 (t.j. iniciální topologie asociovaná s $\{\varphi\}$) je tedy slabší než topologie A_2 a zobrazení $\mathrm{id}_A : A_2 \to A_1$ je spojité.

Věta 12. *Buď $(X_\iota)_{\iota\in I}$ systém topologických prostorů. Předpokládejme, že pro každé $\iota \in I$ je dána neprázdná množina $A_\iota \subset X_\iota$. Pak* $\mathrm{cl} \prod A_\iota = \prod \mathrm{cl}\, A_\iota$.

Důkaz. Ukážeme, že $\operatorname{cl}\prod A_\iota \subset \prod \operatorname{cl} A_\iota$. Buď $x \in \operatorname{cl}\prod A_\iota$ bod, $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$. Předpokládejme, že existuje index $\kappa \in I$ tak, že $x_\kappa \notin \operatorname{cl} A_\kappa$. Pak $x_\kappa \in \operatorname{ext} A_\kappa$. Klademe $V_\iota = X_\iota$ pro $\iota \neq \kappa$ a $V_\kappa = \operatorname{ext} A_\kappa$. Množina $\prod V_\iota$ obsahuje bod x, patří bázi topologie $\prod X_\iota$ a nemá společný bod s množinou $\prod A_\iota$, jelikož $V_\kappa \cap A_\kappa = \emptyset$. Nemůže tedy platit $x \in \operatorname{cl}\prod A_\iota$, což je spor. Pro každé $\kappa \in I$ tedy $x_\kappa \in \operatorname{cl} A_\kappa$ odkud dostáváme, že $x \in \prod \operatorname{cl} A_\iota$.

Obráceně ukážeme, že $\prod \operatorname{cl} A_\iota \subset \operatorname{cl}\prod A_\iota$. Buď $x \in \prod \operatorname{cl} A_\iota$ bod, $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$. Pro každé $\iota \in I$ podle předpokladu platí $x_\iota \in \operatorname{cl} A_\iota$. Předpokládejme, že $x \notin \operatorname{cl}\prod A_\iota$. Pak x má okolí $V = \prod V_\iota$ takové, že $V \cap \prod A_\iota = \emptyset$, a musí existovat index $\kappa \in I$ tak, že $V_\kappa \cap A_\kappa = \emptyset$. Znamená to, že $x \notin \operatorname{cl} A_\kappa$, což je spor. Platí tedy $x \in \operatorname{cl}\prod A_\iota$, což jsme chtěli ukázat.

Důsledek 1. Buď $(X_\iota)_{\iota\in I}$ systém topologických prostorů a předpokládejme, že pro každé $\iota \in I$ je dána neprázdná množina $A_\iota \subset X_\iota$. Pak množina $\prod A_\iota \subset \prod X_\iota$ je uzavřená tehdy a jen tehdy, když každá z množin A_ι je uzavřená.

Důkaz. Tvrzení ihned vyplývá z Věty 12. odst. 3.3 str. 37.

Věta 13. *Součin $\prod X_\iota$ systému topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota\in I}$ je Hausdorffův tehdy a jen tehdy, když pro každé $\iota \in I$ topologický prostor X_ι je Hausdorffův.*

Důkaz. Pro libovolné $\kappa \in I$ klademe $J = \{\kappa\}$. Podle Věty 9. (b) odst. 3.3 str. 36 je topologický prostor X_κ homeomorfní s topologickým podprostorem $X_J(z)$ součinu $\prod X_\iota$. Je-li součin $\prod X_\iota$ Hausdorffův, je také $X_J(z)$ Hausdorffův (cv. 15 kap. 1) a s ním homeomorfní topologický prostor X_κ musí být také Hausdorffův.

Obráceně předpokládejme, že pro každé $\iota \in I$ je topologický prostor X_ι Hausdorffův. Buďte $x, y \in \prod X_\iota$ dva různé body. Pak existuje index $\kappa \in I$ tak, že $\operatorname{pr}_\kappa(x) \neq \operatorname{pr}_\kappa(y)$. Lze tedy najít okolí U bodu $\operatorname{pr}_\kappa(x)$ a okolí V bodu $\operatorname{pr}_\kappa(y)$ tak, že $U \cap V = \emptyset$. Ze spojitosti projekcí součinu vyplývá, že $\operatorname{pr}_\kappa^{-1}(U)$ je okolí bodu x a $\operatorname{pr}_\kappa^{-1}(V)$ je okolí bodu y. Přitom $\operatorname{pr}_\kappa^{-1}(U) \cap \operatorname{pr}_\kappa^{-1}(V) = \operatorname{pr}_\kappa^{-1}(U \cap V) = \emptyset$. Součin $\prod X_\iota$ je tedy Hausdorffův topologický prostor.

3.4. Ekvivalence a faktorové prostory

Buď X množina, $\mathscr{R}$ ekvivalence na X, $X/\mathscr{R}$ faktorová množina. Označme $[x]$ třídu ekvivalence podle ekvivalence $\mathscr{R}$, obsahující bod $x \in X$. Surjektivní zobrazení $\pi : X \to X/\mathscr{R}$, přiřazující bodu x jeho třídu ekvivalence $[x]$, se nazývá *faktorová projekce* množiny X na faktorovou množinu $X/\mathscr{R}$.

Buď X_1 (resp. X_2) množina, $\mathscr{R}_1$ (resp. $\mathscr{R}_2$) ekvivalence na X_1 (resp. X_2), buďte $\pi_1 : X_1 \to X_1/\mathscr{R}_1$, $\pi_2 : X_2 \to X_2/\mathscr{R}_2$ příslušné faktorové projekce. Řekneme, že zobrazení $f : X_1 \to X_2$ je *kompatibilní* s ekvivalencemi $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$, existuje-li zobrazení $g : X_1/\mathscr{R}_1 \to X_2/\mathscr{R}_2$ tak, že $\pi_2 \circ f = g \circ \pi_1$, t.j. diagram

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ X_1/\mathscr{R}_1 \arrow[r, "g"] & X_2/\mathscr{R}_2 \end{tikzcd}$$

je komutativní. Existuje-li zobrazení g, je evidentně jediné a nazývá se *faktorová projekce* zobrazení f.

Případ $X_1 = X_2 = X$, $f = \mathrm{id}_X$ (identické zobrazení množiny X na sebe) ukazuje, že pořadí ekvivalencí $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ v definici kompatibilního zobrazení nelze obecně zaměnit. Uvažujme tento případ a označme $[x]_1$ (resp. $[x]_2$) třídu ekvivalence prvku $x \in X$ podle ekvivalence $\mathscr{R}_1$ (resp. $\mathscr{R}_2$). Řekneme, že ekvivalence $\mathscr{R}_1$ (resp. $\mathscr{R}_2$) na X je *silnější* (resp. *slabší*) než $\mathscr{R}_2$ (resp. $\mathscr{R}_1$), je-li identické zobrazení id_X kompatibilní s $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$. K tomu je zřejmě nutné a stačí, aby každá třída ekvivalence $[x]_1$ ležela ve třídě ekvivalence $[x]_2$, t.j. $[x]_1 \subset [x]_2$.

Buďte $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ dvě ekvivalence na množině X. Předpokládejme, že $\mathscr{R}_1$ je silnější než $\mathscr{R}_2$. Označme $\pi_1 : X \to X/\mathscr{R}_1$, $\pi_2 : X \to X/\mathscr{R}_2$ příslušné faktorové projekce. Na faktorové množině $X/\mathscr{R}_1$ je definována ekvivalence " y_1 je ekvivalentní s y_2 tehdy a jen tehdy, když existuje reprezentant x_1 třídy y_1 a reprezentant x_2 třídy y_2 tak, že $\pi_2(x_1) = \pi_2(x_2)$" . Tato ekvivalence se nazývá *faktorová ekvivalence* ekvivalence $\mathscr{R}_2$ podle ekvivalence $\mathscr{R}_1$ a označuje se $\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1$.

Označme $\pi_3 : X/\mathscr{R}_1 \to (X/\mathscr{R}_1)/(\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1)$ faktorovou projekci. Ukážeme, že zobrazení π_1 je kompatibilní s ekvivalencemi $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1$, t.j. existuje zobrazení $\nu : X/\mathscr{R}_2 \to (X/\mathscr{R}_1)/(\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1)$ tak, že $\nu \circ \pi_2 = \pi_3 \circ \pi_1$. Jinými slovy to znamená, že existuje zobrazení ν tak, že diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & X/\mathscr{R}_1 \arrow[d] \\
X/\mathscr{R}_2 \arrow[r, "\nu"] & (X/\mathscr{R}_1)/(\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1)
\end{tikzcd}$$

komutuje. Stačí ukázat, že zobrazení $\pi_3 \circ \pi_1$ je konstantní na třídách v X podle ekvivalence $\mathscr{R}_2$. Buďte x, $x' \in X$ body, pro které $\pi_2(x) = \pi_2(x')$. $\mathscr{R}_1$ je silnější než $\mathscr{R}_2$, takže $\pi_1(x) \subset \pi_2(x)$, $\pi_1(x') \subset \pi_2(x')$ a podle definice $\pi_3\pi_1(x) = \pi_3\pi_1(x')$. Pro libovolný bod $z \in X/\mathscr{R}_2$ nyní zvolíme bod $x \in X$ tak, že $z = \pi_2(x)$ a klademe $\nu(z) = \pi_3\pi_1(x)$.

π_1 je tedy kompatibilní s $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1$ a ν je faktorová projekce π_1. Z definice ihned vyplývá, že ν je surjektivní. Dále platí-li pro nějaké x_1, $x_2 \in X$ $\pi_3\pi_1(x_1) \neq \pi_3\pi_1(x_2)$, nemůže platit $\pi_2(x_1) = \pi_2(x_2)$ a ν je injektivní. Zobrazení ν je tedy bijekce. Nazývá se *kanonické ztotožnění* faktorového prostoru $X/\mathscr{R}_2$ a faktorového prostoru $(X/\mathscr{R}_1)/(\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1)$.

Přejdeme nyní k topologickým úvahám. Buď X topologický prostor, τ jeho topologie, $\mathscr{R}$ ekvivalence na X. Finální topologie na faktorové množině $X/\mathscr{R}$, asociovaná se systémem zobrazení $\{\pi\}$, kde $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ je faktorová projekce, se nazývá *faktorová topologie* topologie τ podle ekvivalence $\mathscr{R}$. Množina $X/\mathscr{R}$ s touto topologií se nazývá *faktorový prostor* topologického prostoru X podle ekvivalence $\mathscr{R}$.

Faktorová topologie je tedy definována jako *obraz* topologie τ vzhldem k faktorové projekci π (př. (7) odst. 2.5 str. 23).

Věta 14. *Buď X_1 (resp. X_2) topologický prostor, $\mathscr{R}_1$ (resp. $\mathscr{R}_2$) ekvivalence na X_1 (resp. X_2), $f : X_1 \to X_2$ spojité zobrazení. Je-li f kompatibilní s ekvivalencemi $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$, pak jeho faktorová projekce je spojitá.*

Důkaz. Podle definice $X_1/\mathscr{R}_1$ má finální topologii, asociovanou s faktorovou projekcí $\pi_1 : X_1 \to X_1/\mathscr{R}_1$. K tomu, aby faktorová projekce g zobrazení f byla spojitá, stačí, aby zobrazení $g \circ \pi_1$ bylo spojité (Věta 11. odst. 2.4 str. 21). Ovšem $g \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$, kde $\pi_2 : X_2 \to X_2/\mathscr{R}_2$, je faktorová projekce, takže $g \circ \pi_1$ je spojité zobrazení jako kompozice dvou spojitých zobrazení (Věta 1. (b) odst. 2.1 str. 17).

Následující tvrzení vyjadřuje tranzitivitu konstrukce faktorové topologie.

Věta 15. *Buďte $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ ekvivalence na topologickém prostoru X a předpokládejme, že $\mathscr{R}_1$ je silnější než $\mathscr{R}_2$. Pak kanonická identifikace $\nu : X/\mathscr{R}_2 \to (X/\mathscr{R}_1)/(\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1)$ je homeomorfismus.*

Důkaz. Označme $\pi_1 : X \to X/\mathscr{R}_1$, $\pi_2 : X \to X/\mathscr{R}_2$ a $\pi_3 : X/\mathscr{R}_1 \to (X/\mathscr{R}_1)/(\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1)$ faktorová projekce. Pak $\nu \circ \pi_2 = \pi_3 \circ \pi_1$ a spojitost ν vyplývá ze spojitosti faktorové projekce a z Věty 11. odst. 2.4 str. 21. Zbývá tedy dokázat otevřenost ν (Věta 4. odst. 2.1 str. 19). Buď $U \subset X/\mathscr{R}_2$ otevřená množina. Z definice finální topologie vyplývá, že k tomu, aby množina $\nu(U)$ byla orevřená, stačí, aby $\pi_3^{-1}\nu(U)$ byla otevřená, a k tomu stačí, aby $\pi_1^{-1}\pi_3^{-1}\nu(U)$ byla otevřená. Ovšem podle definice $\nu(U) = \pi_3\pi_1\pi_2^{-1}(U)$, takže $\pi_1^{-1}\pi_3^{-1}\nu(U) = \pi_1^{-1}\pi_3^{-1}\pi_3\pi_1\pi_2^{-1}(U) = (\pi_3\pi_1)^{-1} \circ \nu\pi_2 \circ \pi_2^{-1}(U) = (\nu\pi_2)^{-1}(\nu(U)) = \pi_2^{-1}\nu^{-1}(\nu(U)) = \pi_2^{-1}(U)$, kde jsme využili bijektivnost ν. Ovšem množina U je podle předpokladu otevřená ve faktorové topologii na $X/\mathscr{R}_2$, takže $\pi_2^{-1}(U) \subset X$ je otevřená množina a $\pi_1^{-1}\pi_3^{-1}\nu(U)$ je otevřená množina. Otevřenost množiny $\nu(U)$ nyní vyplývá z otevřenosti zobrazení $\pi_3 \circ \pi_1$ (Věta 3. (b) odst. 2.1 str. 18).

3.5. Ekvivalence asociovaná se zobrazením

Buďte X, Y množiny, $f : X \to Y$ zobrazení. Ekvivalence $\mathscr{R}_f$ na X "x je ekvivalentní s y tehdy a jen tehdy, když $f(x) = f(y)$" se nazývá *ekvivalence, asociovaná se zobrazením f*.

Označme $\pi_f : X \to X/\mathscr{R}_f$ faktorovou projekci. Bodu $y \in X/\mathscr{R}_f$ je přiřazen bod $g(y) \in f(X)$ vztahem $g(y) = f(x)$, kde x je libovolný reprezentant třídy ekvivalence y, t.j. platí $y = [x] = \pi_f(x)$. Zobrazení g je evidentně injektivní a surjektivní, je to tedy bijekce. Dále označme $\iota : f(X) \to Y$ kanonické vložení podmnožiny $f(X) \subset Y$ do množiny Y. Evidentně platí

$$f = \iota \circ g \circ \pi_f.$$

Toto vyjádření zobrazení f se nazývá *kanonický rozklad f*.

Kanonický rozklad zobrazení f je možno vyjádřit diagramem

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_f"'] & Y \\ X/\mathscr{R}_f \arrow[r, "g"] & f(X) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Věta 16. *Je-li $f : X \to Y$ spojité zobrazení topologických prostorů, pak zobrazení $g : X/\mathscr{R}_f \to f(X)$, definované kanonickým rozkladem $f = \iota \circ g \circ \pi_f$ zobrazení f, je spojité.*

Důkaz. f je spojité a $X/\mathscr{R}_f$ má finální topologii, asociovanou se zobrazením π_f, takže zobrazení $\iota \circ g : X/\mathscr{R}_f \to Y$ musí být spojité (Věta 11. odst. 2.4 str. 21). Dále g vzniká zúžením oboru hodnot spojitého zobrazení $\iota \circ g$, takže je spojité (Věta 3. odst. 3.1 str. 32).

Buď $f : X \to Y$ zobrazení množin. *Řezem* zobrazení f nazýváme každé zobrazení $s : Z \to X$, definované na podmnožině Z množiny Y, takové, že $f \circ s = \mathrm{id}_Z$. Zobrazení $s : Z \to X$ je řez f tehdy a jen tehdy, když pro každé $z \in Z$ platí $s(z) \in f^{-1}(z)$.

Každý řez $s : Z \to X$ zobrazení f je injektivní zobrazení: platí-li pro nějaké $z_1, z_2 \in Z$ rovnost $s(z_1) = s(z_2)$, pak $f \circ s(z_1) = z_1 = f \circ s(z_2) = z_2$. Označíme-li $\bar{s} : Z \to s(Z)$ zobrazení, vznikající z s zúžením oboru hodnot, pak $\bar{s}$ je bijekce a platí $\bar{s}^{-1} = f|_{s(Z)}$.

Buď $f : X \to Y$ zobrazení topologických prostorů a uvažujme množinu $f(X)$ jako topologický podprostor Y. Řekněme, že f je *vnoření* X do Y, jestliže zobrazení $g : X \to f(X)$, vznikající z f zúžením oboru hodnot, je homeomorfismus.

Nechť je dáno zobrazení topologických prostorů $f : X \to Y$. Řez $s : Z \to X$ zobrazení f se nazývá *spojitý*, je-li zobrazení s spojité v indukované topologii na Z. Ukážeme, že spojitý řez $s : Z \to X$ spojitého zobrazení $f : X \to Y$ je vnoření Z do X. Označme $\bar{s} : Z \to s(Z)$ zobrazení, vznikající z s zúžením oboru hodnot. Pak $\bar{s}$ je evidentně bijekce. $\bar{s}$ je ovšem spojité zobrazení (Věta 3. (b) odst. 3.1 str. 32) a $\bar{s}^{-1} = f|_{s(Z)}$, t.j. $\bar{s}^{-1}$ je zúžení spojitého zobrazení na topologický podprostor a je tedy samo spojité (Věta 3. (a) odst. 3.1 str. 32); $\bar{s}$ je tedy homeomorfismus a s je vnoření.

Věta 17. *Buď $f : X \to Y$ spojité surjektivní zobrazení topologických prostorů. Předpokládejme, že ke každému bodu $y \in Y$ existuje jeho okolí V a spojitý řez $s_V : V \to X$ zobrazení f. Pak zobrazení $g : X/\mathscr{R}_f \to Y$, definované kanonickým rozkladem $f = g \circ \pi_f$ je homeomorfismus.*

Důkaz. Stačí prověřit, že g^{-1} je spojité zobrazení (Věta 16. odst. 3.5 str. 40). Buď $y \in Y$ bod, V jeho okolí a $s_V : V \to X$ spojitý řez f. Podle předpokladu $f \circ s_V = \mathrm{id}_V$ a $f = g \circ \pi_f$. Odtud na V platí $f \circ s_V = g \circ \pi_f \circ s_V = \mathrm{id}_V$, t.j. $g(\pi_f(s_V(y))) = y$ pro každé $y \in V$. Odtud $g^{-1}(y) = \pi_f(s_V(y))$, t.j. $g^{-1}|_V = \pi_f \circ s_V$ a tedy g^{-1} je spojité na V. Nyní je již zřejmé, že g^{-1} musí být spojité zobrazení.

Množina $U \subset X$, pro kterou $\pi_f^{-1}(\pi_f(U)) = U$, se nazývá *f-nasycená* nebo prostě *nasycená*.

Věta 18. *Buď $f = \iota \circ g \circ \pi_f$ kanonický rozklad spojitého zobrazení topologických prostorů $f : X \to Y$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *Zobrazení $g : X/\mathscr{R}_f \to f(X)$ je homeomorfismus.*

(2) *Pro každou f-nasycenou otevřenou množinu $U \subset X$ je množina $f(U) \subset f(X)$ otevřená v indukované topologii na $f(X)$.*

Důkaz. Buď g homeomorfismus, $U \subset X$ f-nasycená otevřená množina. Množina $\pi_f(U) \subset X/\mathscr{R}_f$ má vzor otevřenou množinu a je tedy sama otevřená ve finální topologii, asociované s π_f. Množina $g(\pi_f(U)) \subset f(X)$ je tedy otevřená a existuje otevřená množina $W \subset Y$ tak, že $\iota g \pi_f(U) = f(X) \cap W$, t.j. $f(U) = f(X) \cap W$ a $f(U)$ je otevřená množina v $f(X)$.

Obráceně předpokládejme, že je splněna podmínka (2). Chceme ukázat, že g je otevřené zobrazení (Věta 4. odst. 2.1 str. 19). Buď $V \subset X/\mathscr{R}_f$ otevřená množina. Položme $U = \pi_f^{-1}(V)$. Podle předpokladu je množina $f(U)$ otevřená v $f(X) \subset Y$, t.j. $\iota g \pi_f(U) = \iota g(V)$ je otevřená množina v $f(X)$. $g(V)$ je tedy vzor otevřené množiny $\iota g(V)$ vzhledem ke kanonickému vložení $\iota : f(X) \to Y$ a musí být otevřenou množinou v topologii podprostoru $f(X)$.

Ekvivalence $\mathscr{R}$ na topologickém prostoru X se nazývá *otevřená*, jestliže faktorová projekce $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ je otevřené zobrazení.

Věta 19. *Buď $f = \iota \circ g \circ \pi_f$ kanonický rozklad spojitého zobrazení topologických prostorů $f : X \to Y$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*
(1) *Zobrazení f je otevřené.*
(2) *Ekvivalence $\mathscr{R}_f$ je otevřená a $g : X/\mathscr{R}_f \to f(X)$ je homeomorfismus.*

Důkaz. Dokážeme, že z (1) plyne (2). Je-li f otevřené, pak $f(X) \subset Y$ musí být množina otevřená a g musí být homeomorfismus (Věta 18. odst. 3.5 str. 41). Stačí tedy dokázat, že π_f je otevřené zobrazení. Buď $U \subset X$ otevřená množina. Platí $f(U) = \iota g \pi_f(U)$, což je podle předpokladu otevřená množina. Zobrazení $\iota \circ g$ je ovšem injektivní, takže $(\iota g)^{-1}(\iota g(\pi_f(U))) = \pi_f(U)$ a tedy $g^{-1} \circ \iota^{-1}(f(U)) = \pi_f(U)$. Množina $\pi_f(U)$ je zřejmě otevřená jako vzor otevřené množiny vzhledem ke spojitému zobrazení $\iota \circ g$.

Obráceně předpokládejme, že je splněna podmínka (2). Pak $\iota : f(X) \to Y$ je otevřené zobrazení (Věta 4. (c) odst. 3.1 str. 32). f je tedy kompozice otevřených zobrazení a musí být otevřené.

3.6. Oddělitelnost faktorového prostoru

Vyšetříme podmínky oddělitelnosti faktorového prostoru topologického prostoru.

Buď $\mathscr{R}$ ekvivalence na množině X, $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ faktorová projekce. *Grafem* ekvivalence $\mathscr{R}$ nazýváme množinu $\{(x,y) \in X \times X \mid \pi(x) = \pi(y)\} \subset X \times X$. Evidentně $\{(x,y) \in X \times X \mid \pi(x) = \pi(y)\} = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/\mathscr{R}})$, kde $\Delta_{X/\mathscr{R}} \subset X/\mathscr{R} \times X/\mathscr{R}$ je diagonála.

Věta 20. *Buď $\mathscr{R}$ ekvivalence na topologickém prostoru X.*
(a) *Předpokládejme, že topologický prostor $X/\mathscr{R}$ je Hausdorffův. Pak graf ekvivalence $\mathscr{R}$ je množina uzavřená v $X \times X$.*
(b) *Předpokládejme, že graf ekvivalence $\mathscr{R}$ je množina uzavřená v $X \times X$ a ekvivalence $\mathscr{R}$ je otevřená. Pak topologický prostor $X/\mathscr{R}$ je Hausdorffův.*

Důkaz. (a) Zobrazení $\pi \times \pi : X \times X \to X/\mathscr{R} \times X/\mathscr{R}$ je spojité a z oddělitelnosti $X/\mathscr{R}$ vyplývá, že diagonála $\Delta_{X/\mathscr{R}} \subset X/\mathscr{R} \times X/\mathscr{R}$ je množina uzavřená (Věta 8. odst. 3.2 str. 34); $(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/\mathscr{R}})$ je tedy množina uzavřená (Věta 2. odst. 2.1 str. 18).

(b) Předpokládejme, že graf ekvivalence $\mathscr{R}$ je uzavřená množina. Pak $(X \times X) \setminus \{(x,y) \in X \times X \mid \pi(x) = \pi(y)\} = \{(x,y) \in X \times X \mid \pi(x) \neq \pi(y)\}$ je otevřená množina $X \times X$. Dále podle předpokladu faktorová projekce $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ je otevřené zobrazení. Zobrazení $\pi \times \pi$ je tedy otevřené (Věta 10. (d) odst. 3.3 str. 36). Množina $(\pi \times \pi)(\{x,y) \in X \times X \mid \pi(x) \neq \pi(y)\}) = \{(\pi(x),\pi(y)) \in X \times X \mid \pi(x) \neq \pi(y)\} = (X/\mathscr{R} \times X/\mathscr{R}) \setminus \Delta_{X/\mathscr{R}}$ musí tudíž být otevřená v $X/\mathscr{R} \times X/\mathscr{R}$ a $\Delta_{X/\mathscr{R}}$ musí být uzavřená množina. To ovšem znamená, že faktorový prostor $X/\mathscr{R}$ je oddělitelný (Věta 8. odst. **??** str. 34).

Věta 21. *Buď X Hausdorffův topologický prostor, $\mathscr{R}$ ekvivalence na X. Předpokládejme, že existuje spojitý řez s faktorové projekce $\pi : X \to X/\mathscr{R}$. Pak topologický prostor $X/\mathscr{R}$ je Hausdorffův a množina $s(X/\mathscr{R}) \subset X$ je uzavřená.*

Důkaz. Spojitý řez $s : X/\mathscr{R} \to s(X/\mathscr{R})$ je homeomorfismus (Věta 17. odst. 3.5 str. 41) a $s(X/\mathscr{R})$ je Hausdorffův topologický prostor jako podprostor Hausdorffova prostoru; $X/\mathscr{R}$ je tedy také Hausdorffův topologický prostor. Dále $s(X/\mathscr{R})$ je množina všech bodů $x \in X$, pro které $s \circ \pi(x) = \mathrm{id}_X(x) = x$; tato množina je uzavřená podle Důsledku 1. Věty 8. odst. 3.2 str. 35.

Uvažujme nakonec faktorový prostor podle ekvivalence, asociované se spojitým zobrazením do Hausdorffova prostoru.

Věta 22. *Faktorový prostor $X/\mathscr{R}_f$ podle ekvivalence $\mathscr{R}_f$, asociované se spojitým zobrazením f topologického prostoru X do Hausdorffova topologického prostoru Y, je Hausdorffův.*

Důkaz. Uvažujme kanonický rozklad $f = \iota \circ g \circ \pi_f$ zobrazení f. Jelikož Y je Hausdorffův, topologický podprostor $f(X) \subset Y$ je Hausdorffův. Dále $g : X/\mathscr{R} \to f(X)$ je spojitá bijekce (Věta 16. odst. 3.5 str. 40). K libovolným dvěma různým bodům y_1, $y_2 \in X/\mathscr{R}$ existuje okolí U_1 bodu $g(y_1)$ a okolí U_2 bodu $g(y_2)$ v $f(X)$ tak, že $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. $g^{-1}(U_1)$ (resp. $g^{-1}(U_2)$) je ovšem okolí bodu y_1 (resp. y_2) a platí $g^{-1}(U_1 \cap U_2) = g^{-1}(U_1) \cap g^{-1}(U_2) = \emptyset$; faktorový prostor $X/\mathscr{R}_f$ je tedy Hausdorffův.

3.7. Příklady

(1) *Euklidovy topologické prostory.* Buď $\mathbf{R}$ množina reálných čísel s přirozenou topologií, n přirozené číslo. Součin systému topologických prostorů $(\mathbf{R}_i)$, $1 \le i \le n$, kde $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}$ pro každé i, se nazývá n-rozměrný *Euklidův* (*topologický*) *prostor* a označuje se $\mathbf{R}^n$; jeho topologie se nazývá *Euklidova* nebo také *přirozená*. Za bázi Euklidovy topologie lze vzít *otevřené kvádry* $K_{a,b} = I_1 \times \cdots \times I_n$, kde $I_i = (a^i, b^i)$, $a = (a^1, \ldots, a^n)$, $b = (b^1, \ldots, b^n)$.

Indukovaná topologie na podmnožině Euklidova prostoru se také nazývá *Euklidova* nebo *přirozená*.

Pro $k \le n$ Euklidův topologický prostor $\mathbf{R}^k$ je homeomorfní s podprostorem $\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n \mid x^{k+1} = 0, \ldots, x^n = 0\}$ Euklidova prostoru $\mathbf{R}^n$; homeomorfismus $(x^1, \ldots, x^k) \to (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)$ $\mathbf{R}^k$ na tento podprostor se nazývá *kanonický*.

(2) *Poloprostorem* v n-rozměrném Euklidově prostoru $\mathbf{R}^n$ nazýváme množinu $\mathbf{R}^n_- = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n \mid x^n \le 0\} \subset \mathbf{R}^n$ s indukovanou topologií. Topologický podprostor $\partial\mathbf{R}^n_- = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n_- \mid x^n = 0\} \subset \mathbf{R}^n_-$ nazýváme *okraj* poloprostoru $\mathbf{R}^n_-$. Zřejmě $\partial\mathbf{R}^n_- = \mathrm{fr}\,\mathbf{R}^n_-$, kde hranice je uvažována v přirozené topologii $\mathbf{R}^n$.

(3) *Spojité funkce na topologickém prostoru. Funkcí* na topologickém prostoru X rozumíme obvykle zobrazení $f : X \to \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ je množina reálných čísel s přirozenou topologií.

Ukážeme, že součet $f + g$ a součin $f \cdot g$ spojitých funkcí f, $g : X \to \mathbf{R}$ je spojitá funkce. Dále ukážeme, že funkce $h(x) = 1/f(x)$, definovaná na množině $X \setminus \{x \in X \mid f(x) = 0\}$, je spojitá v topologii podprostoru.

Položme $h_1 = f + g$. Buď $x \in X$ libovolný bod, $\varepsilon > 0$. Najdeme okolí U bodu x takové, že $|h_1(y) - h_1(x)| < \varepsilon$ pro každé $y \in U$. Funkce f (resp. g) je spojitá v bodě x, takže existuje okolí U_1 (resp. U_2) bodu x tak, že $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$ (resp. $|g(y) - g(x)| < \varepsilon/2$) pro každé $y \in U_1$ (resp. $y \in U_2$). Klademe $U = U_1 \cap U_2$. U je okolí bodu x a pro každé

$y \in U$ platí $|h_1(y) - h_1(x)| = |f(y) + g(y) - f(x) - g(x)| \leq |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)| < \varepsilon$. Funkce h_1 je tedy spojitá v bodě x a její spojitost vyplývá z libovolnosti x.

Položme $h_2 = f \cdot g$. Buď $x \in X$ libovolný bod, $\varepsilon > 0$. Položme

$$\varepsilon_1 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(|f(x)| + |g(x)|)^2 + 4\varepsilon} - |f(x)| - |g(x)|\right).$$

Evidentně $\varepsilon_1 > 0$. Existuje tedy okolí U_1 (resp. U_2) bodu x tak, že $|f(y) - f(x)| < \varepsilon_1$ (resp. $|g(y) - g(x)| < \varepsilon_1$). Klademe $U = U_1 \cap U_2$. Pro každé $y \in U$ dostáváme $|h_2(y) - h_2(x)| = |(f(y) - f(x)) \cdot (g(y) - g(x)) + f(y)g(x) + f(x)g(y) - f(x)g(x) - f(x)g(x)| \leq |f(y) - f(x)| \cdot |g(y) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f(y) - f(x)| + |f(x)| \cdot |g(y) - g(x)| < \varepsilon_1^2 + (|f(x)| + |g(x)|) \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon$. Funkce h_2 je tedy spojitá v bodě x a z libovolnosti x vyplývá spojitost h_2.

K vyšetření spojitosti funkce $h = 1/f$ uvažujme nejdříve funkci $h_3(t) = 1/t$, definovanou na množině $\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Ukážeme, že tato funkce je spojitá. Podle Věty 2. odst. 2.1 str. 18 stačí ukázat, že vzor $h_3^{-1}((a,b))$ libovolného otevřeného intervalu $(a,b) \subset \mathbf{R}$ je otevřená množina. Ovšem $h_3^{-1}((a,b)) = \{t \in \mathbf{R}\backslash\{0\} \mid (1/b) < t < (1/a)\}$, což je skutečně otevřená množina v podprostoru $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ topologického prostoru $\mathbf{R}$. Funkce h_3 je tedy spojitá na $\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Pro funkci $h = 1/f$ ovšem platí $h = h_3 \circ f$; podle Věty 1. (b) odst. 2.1 str. 17 je tedy funkce h spojitá.

(4) *Spojitost sčítání a násobení reálných čísel.* Pro $(s,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ označme $\mathrm{pr}_1(s,t) = s$, $\mathrm{pr}_2(s,t) = t$; dostáváme spojité funkce $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (Věta 10. (a) odst. 3.3 str. 36). Jelikož sčítání (resp. násobení) reálných čísel je rovno funkci $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2$ (resp. $\mathrm{pr}_1 \cdot \mathrm{pr}_2$), jeho spojitost vyplývá z výše uvedeného příkladu (3).

(5) *Spojitost vektorových operací na* $\mathbf{R}^n$. *Sčítáním* na $\mathbf{R}^n$ rozumíme zobrazení $(x,y) \to x + y$ součinu $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$, definované vztahem

$$x + y = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n),$$

kde $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$. *Násobením skalárem* na $\mathbf{R}^n$ rozumíme zobrazení $(s,x) \to s \cdot x$ součinu $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$, definované vztahem

$$s \cdot x = (s \cdot x^1, \ldots, s \cdot x^n).$$

Sčítání a násobení skalárem nazýváme *vektorové operace* na $\mathbf{R}^n$.

Vektorové operace na $\mathbf{R}^n$ jsou spojité vzhledem k přirozené topologii. Spojitost sčítání se dokazuje stejně jako v případě reálných čísel (př. (4) str. 44)). Spojitost násobení skalárem vyplývá ze spojitosti násobení reálných čísel a ze spojitosti každé ze složek zobrazení $(s,x) \to s \cdot x$ (Věta 10. (b) odst. 3.3 str. 36, 1. odst. 2.1 str. 17); skutečně, i-tá složka zobrazení $(s,x) \to s \cdot x$ je zobrazení $(s,x) \to s \cdot x^i$, které je kompozicí projekce $(s,(x^1, \ldots, x^n)) \to (s, x^i)$ a násobení reálných čísel $(s, x^i) \to s \cdot x^i$.

(6) *Přirozená topologie na konečněrozměrném vektorovém prostoru.* Buď E n-rozměrný vektorový prostor nad polem reálných čísel, $(e_1, \ldots, e_n)$ jeho báze. Libovolný vektor $\xi \in E$ má jediné vyjádření ve tvaru $\xi = \xi^1(\xi) \cdot e_1 + \ldots + \xi^n(\xi) \cdot e_n$, kde $\xi^i(\xi) \in \mathbf{R}$, a zobrazení $E \ni \xi \to f(\xi) = (\xi^1(\xi), \ldots, \xi^n(\xi)) \in \mathbf{R}^n$ je lineární izomorfismus. Uvažujeme-li E se vzorem přirozené topologie $\mathbf{R}^n$ vzhledem k zobrazení f (př. (7) odst. 2.5 str. 23), pak f je homeomorfismus: f je podle definice spojité a zobrazení $f^{-1} : \mathbf{R}^n \to E$ je rovněž spojité podle Věty 8. odst. 2.3 str. 20. S takto definovanou topologií je tedy topologický prostor E homeomorfní s $\mathbf{R}^n$; odsud již vyplývá, že topologie E je nezávislá na volbě báze $(e_1, \ldots, e_n)$. Nazývá se *přirozená topologie* na vektorovém prostoru E.

Je snadné ukázat, že operace sčítání $(\xi, \zeta) \to \xi + \zeta$ a operace násobení skalárem $(s, \xi) \to s \cdot \xi$ na E jsou spojité v přirozené topologii. Zvolíme bázi $(e_1, \dots, e_n)$ vektorového prostoru E a označíme f zobrazení, zavedené výše. Pak sčítání lze rozložit na tři spojitá zobrazení podle diagramu

$$\begin{tikzcd} E \times E \arrow[r] \arrow[d, "f \times f"'] & E \\ \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \arrow[r] & \mathbf{R}^n \arrow[u, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

ve kterém dolní horizontální šipka označuje sčítání na $\mathbf{R}^n$ (viz př. (5) str. 44)). Podobně násobení skalárem lze rozložit na tři spojitá zobrazení podle diagramu

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \times E \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{R}} \times f"'] & E \\ \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \arrow[r] & \mathbf{R}^n \arrow[u, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

ve kterém dolní horizontální šipka označuje násobení skalárem na $\mathbf{R}^n$. V obou případech uplatníme Větu 1. (b) odst. 2.1 str. 17.

(7) *Přirozená topologie na množině komplexních čísel.* Buď $\mathbf{C}$ množina komplexních čísel. Vzor přirozené topologie na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ vzhledem k zobrazení $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, přiřazujícímu komplexnímu číslu z dvojici reálných čísel $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$, se nazývá *přirozená topologie* na $\mathbf{C}$. Podobně jako výše lze ukázat, že f je homeomorfismus a že sčítání a násobení komplexních čísel je vzhledem k přirozené topologii na $\mathbf{C}$ spojité.

Položíme-li $\mathbf{C}^n = \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C}$ (n součinitelů) a uvažujeme-li $\mathbf{C}$ s přirozenou topologií, pak topologie součinu na $\mathbf{C}^n$ se nazývá *přirozená topologie* na $\mathbf{C}^n$.

Množina $\mathbf{C}^n$ má přirozenou strukturu vektorového prostoru nad polem komplexních čísel $\mathbf{C}$. Podobně jako v př. (5) str. 44 lze ukázat, že vektorové operace na $\mathbf{C}^n$, t.j. sčítání a násobení skalárem, jsou v přirozené topologii $\mathbf{C}^n$ spojité.

(8) Uvažujme Euklidův topologický prostor $\mathbf{R}^{n+1}$. Pro bod $x \in \mathbf{R}^{n+1}$, $x = (x^1, \dots, x^{n+1})$, položme

$$\|x\| = \left((x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Množina $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ se nazývá *jednotková sféra* se *středem* $0 \in \mathbf{R}^{n+1}$. Bod $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ se nazývá *severní pól* jednotkové sféry S^n. Ukážeme, že množina $S^n \setminus \{N\}$, uvažovaná jako topologický podprostor $\mathbf{R}^{n+1}$, je homeomorfní s n-rozměrným Euklidovým prostorem $\mathbf{R}^n$. Pro každé $x \in S^n \setminus \{N\}$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, klademe

$$\varphi(x) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \frac{x^2}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}}\right).$$

Dále pro každé $y \in \mathbf{R}^n$, $y = (y^1, \dots, y^n)$, klademe

$$\psi(y) = \frac{1}{1 + \|y\|^2} \cdot (2y^1, 2y^2, \dots, \|y\|^2 - 1).$$

Přímým výpočtem se ukáže, že $\psi = \varphi^{-1}$, φ je tedy bijekce. Dále podle Věty 10. (b) odst. 3.3 str. 36 a Věty 2. (a) odst. 3.1 str. 32 je zobrazení φ spojité a analogicky podle Věty 10. (b) odst. 3.3 str. 36 a Věty 3. (b) odst. 3.1 str. 32 je zobrazení φ^{-1} spojité. φ je tedy homeomorfismus.

Zobrazení φ se nazývá *stereografická projekce* sféry S^n ze severního pólu.

(9) *Grupy transformací, prostory orbit.* Uvažujme množinu X a grupu G s grupovou operací $G \times G \ni (g,h) \to g \cdot h \in G$. Zobrazení $F : G \times X \to X$ se nazývá *levá akce* grupy G na množině X, jsou-li splněny tyto podmínky: (1) $F(e,x) = x$ pro každé $x \in X$, kde e je jednotkový element grupy G, (2) $F(g, F(h,x)) = F(g \cdot h, x)$ pro každé g, $h \in G$ a $x \in X$. Je-li zřejmé, o jaké zobrazení F se jedná, říkáme, že G je *grupa transformací* množiny X.

Mějme levou akci F grupy G na množině X. Pro každé $g \in G$ definujeme zobrazení $F_g : X \to X$ vztahem $F_g(x) = F(g,x)$. Z podmínky (1) vyplývá, že $F_e = \mathrm{id}_X$, z (2) vyplývá vztah $F_g \circ F_h = F_{g \cdot h}$; odtud dostáváme pro libovolné $g \in G$ vztahy $F_g \circ F_{g^{-1}} = \mathrm{id}_X$, $F_{g^{-1}} \circ F_g = \mathrm{id}_X$, takže F_g je bijekce a $(F_g)^{-1} = F_{g^{-1}}$. Zobrazení F_g se nazývá *transformace* množiny X, asociovaná s elementem $g \in G$.

Pro libovolný bod $x \in X$ množina $[x] = \{y \in X \mid y = F(g,x), g \in G\}$ se nazývá *G-orbita* nebo prostě *orbita* bodu x. Relace " body x_1, $x_2 \in X$ patří stejné G-orbitě " je ekvivalence na X; třídy ekvivalence jsou totožné s G-orbitami. Faktorová množina podle této ekvivalence se nazývá *prostor G-orbit* a označuje se X/G.

Je-li X topologický prostor, prostor G-orbit X/G má strukturu faktorového prostoru podle výše uvedené ekvivalence. Faktorový prostor X/G je Hausdorffův tehdy a jen tehdy, když diagonála $\Delta_{X/G}$ je uzavřená množina v součinu $X/G \times X/G$ (Věta 8. odst. 3.2 str. 34).

(10) Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií a zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definované vztahem $f(t) = t^2$. Vyšetříme kanonický rozklad $f = \iota \circ g \circ \pi_f$ zobrazení f.

Buď $\mathscr{R}_f$ ekvivalence na $\mathbf{R}$, asociovaná s f. Z definice vyplývá, že třída $[t]$ elementu $t \in \mathbf{R}$ je rovna podmnožině $\{-t, t\}$ pro $t \neq 0$ a třída $[0]$ elementu $0 \in \mathbf{R}$ je rovna jednoprvkové množině $\{0\}$. Tím je zároveň definována faktorová projekce $\pi_f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathscr{R}_f$ vztahem $\pi_f(t) = [t]$. Evidentně $\pi_f(t) = \pi_f(-t)$ pro každé $t \in \mathbf{R}$; vzory podmnožiny množiny $\mathbf{R}/\mathscr{R}_f$ vzhledem k π_f budou tedy nutně *symetrické* podmnožiny $\mathbf{R}$, t.j. podmnožiny, které s každým bodem t obsahují i bod $-t$. Pro libovolnou množinu $V \subset \mathbf{R}/\mathscr{R}_f$ platí $V = \bigcup_{[t] \in V} [t]$ (sjednocení elementů V); odtud dostáváme $\pi_f^{-1}(V) = \bigcup_{[t] \in V} \pi_f^{-1}([t])$. Přitom $\pi_f^{-1}([t]) = \{-t, t\}$ pro $t \neq 0$ a $\pi_f^{-1}([0]) = \{0\}$. Množina V je otevřená tehdy a jen tehdy, když sjednocení množin $\pi_f^{-1}([t])$, kde $[t]$ probíhá V, je otevřená množina v $\mathbf{R}$.

Obraz $f(\mathbf{R})$ množiny $\mathbf{R}$ vzhledem k zobrazení $f(t) = t^2$ je roven intervalu $[0, \infty)$ a podle definice $g : \mathbf{R}/\mathscr{R}_f \to [0, \infty)$ je zobrazení, definované vztahem $g([t]) = t^2$; ι je kanonické vnoření intervalu $[0, \infty)$ do $\mathbf{R}$.

Buď $U \subset \mathbf{R}$ libovolná otevřená množina. Pak $f(U) = (\{s \in \mathbf{R} \mid s = t^2, t \in U\} \cup \{s \in \mathbf{R} \mid -s = t^2, t \in U\}) \cap f(\mathbf{R}) = \{s \in \mathbf{R} \mid \sqrt{|s|} \in U\} \cap [0, \infty)$; přitom množina $\{s \in \mathbf{R} \mid \sqrt{|s|} \in U\}$ je otevřená v $\mathbf{R}$, takže $f(U)$ je množina otevřená v podprostoru $f(\mathbf{R})$. Podle Věty 18. odst. 3.5 str. 41 je tedy zobrazení g homeomorfismus.

Odsud vyplývá, že faktorový prostor $\mathbf{R}/\mathscr{R}_f$ (homeomorfní s Hausdorffovým prostorem) je Hausdorffův.

Zobrazení π_f zřejmě není otevřené; ekvivalence $\mathscr{R}_f$ tedy není otevřená.

(11) Buď Y topologický prostor s topologií π, X množina, a uvažujme množinu Y^X zobrazení X do Y s topologií bodové konvergence (př. (6) odst. 1.8 str. 10). Podle definice množina Y^X je rovna součinu $\prod Y_x$ systému množin $(Y_x)_{x \in X}$, kde $Y_x = Y$ pro každé $x \in X$. Topologie bodové konvergence na množině Y^X je totožná s topologií součinu: je generovaná množinami tvaru $W(x, U) = \{f \in Y^X \mid f(x) \in U\}$, kde U probíhá π a x probíhá X, přičemž zároveň $W(x, U) = \mathrm{pr}_x^{-1}(U)$, kde pr_x je x-projekce součinu $\prod Y_x$.

Zobrazení pr_x v tomto případě přiřazuje zobrazení $f \in Y^X$ element $f(x) \in Y$; nazývá se proto *evaluace* (v bodě x) a označuje se také symbolem Ev_x. Podle definice faktorové topologie je tedy topologie bodové konvergence nejslabší ze všech topologií na množině Y^X, pro které jsou všechny evaluace spojité.

Je-li topologický prostor Y Hausdorffův, pak Y^X s topologií bodové konvergence je Hausdorffův topologický prostor (Věta 13. odst. 3.3 str. 38).

Pro libovolnou podmnožinu $Z \subset Y^X$ topologie, indukovaná na Z topologií bodové konvergence, se také nazývá *topologie bodové konvergence*.

Nechť nyní X je také topologický prostor a označme $C(X, Y)$ podmnožinu množiny Y^X, tvořenou všemi *spojitými* zobrazeními. Topologie bodové konvergence na $C(X, Y)$ splývá s iniciální topologií, asociovanou se systémem zobrazení $(\mathrm{pr}_x|_{C(X,Y)})_{x \in X}$, t.j. se systémem evaluací, zúžených na $C(X, Y)$.

Cvičení

Podprostory

1. Buď $\mathbf{R}$ množina reálných čísel, $A_0 = [0, \infty)$, $A_1 = (0, 1)$, $A_2 = [0, 1]$, $A_3 = [0, 1)$, $A_4 = (0, 1]$, $A_5 = (0, \infty)$, $A_6 = \{0\}$. Uvažujte $\mathbf{R}$ (a) s přirozenou topologií, (b) s triviální topologií, (c) s topologií, generovanou intervaly $(a, b]$, (d) s topologií konečných doplňků. Charakterizujte indukovanou topologii na A_0. Jsou v této topologii množiny A_0, A_1, …, A_6 otevřené?

Ř e š e n í . (a) Báze indukované topologie na A_0 je tvořena množinami tvaru $(a, b) \cap [0, \infty)$, kde (a, b) je otevřený interval (Věta 5. odst. 3.1 str. 33). Množiny A_0, A_1, A_3, A_5 jsou otevřené, A_2, A_4, A_6 nejsou otevřené.

(b) Otevřené množiny v indukované topologii jsou $\emptyset$ a $[0, \infty)$, t.j. indukovaná topologie je triviální. Množina A_0 je v této topologii otevřená, žádná z množin A_1, A_2, …, A_6 není otevřená.

(c) Báze indukované topologie je tvořena množinami tvaru $(a, b] \cap [0, \infty)$, kde $(a, b]$ je zleva otevřený zprava uzavřený interval (Věta 5. odst. 3.1 str. 33). Každá z množin A_1, A_2, …, A_6 je v této topologii otevřená.

(d) Topologie konečných doplňků je generována množinami tvaru $\mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, kde $a_i \in \mathbf{R}$. Indukovaná topologie na A_0 je tedy generována množinami tvaru $[0, \infty) \cap (\mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}) = [0, \infty) \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, kde $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = [0, \infty) \cap \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Topologie konečných doplňků na $\mathbf{R}$ tedy indukuje topologii konečných doplňků na A_0. V této topologii jsou množiny A_0, A_5 otevřené, množiny A_1, A_2, A_3, A_4, A_6 nejsou otevřené.

2. Buď $\mathbf{R}$ množina reálných čísel, uvažovaná (a) s přirozenou topologií, (b) s triviální topologií, (c) s topologií, generovanou intervaly $(a, b]$, (d) s topologií konečných doplňků. Určete vnitřek, vnějšek, hranici a uzávěr množin A_0, A_1, …, A_6 ze cv. 1 v $\mathbf{R}$ a v topologickém podprostoru $A = [0, \infty) \subset \mathbf{R}$.

Ř e š e n í . (a) Výsledky: $\mathrm{int}\, A_0 = (0, \infty)$, $\mathrm{ext}\, A_0 = (-\infty, 0)$, $\mathrm{fr}\, A_0 = \{0\}$, $\mathrm{cl}\, A_0 = A_0$, $\mathrm{int}_A\, A_0 = A_0$, $\mathrm{ext}_A\, A_0 = \emptyset$, $\mathrm{fr}_A\, A_0 = \emptyset$, $\mathrm{cl}_A\, A_0 = A_0$; $\mathrm{int}\, A_1 = A_1$, $\mathrm{ext}\, A_1 = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, $\mathrm{fr}\, A_1 = \{0, 1\}$,

$\operatorname{cl} A_1 = [0,1]$; $\operatorname{int}_A A_1 = A_1$, $\operatorname{ext}_A A_1 = (1,\infty)$, $\operatorname{fr}_A A_1 = \{0,1\}$, $\operatorname{cl}_A A_1 = [0,1]$; $\operatorname{int} A_2 = (0,1)$, $\operatorname{ext} A_2 = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$, $\operatorname{fr} A_2 = \{0,1\}$, $\operatorname{cl} A_2 = A_2$, $\operatorname{int}_A A_2 = [0,1)$, $\operatorname{ext}_A A_2 = (1,\infty)$, $\operatorname{fr}_A A_2 = \{1\}$, $\operatorname{cl}_A A_2 = A_2$; $\operatorname{int} A_3 = (0,1)$, $\operatorname{ext} A_3 = (-\infty,0)\cup(1,\infty)$, $\operatorname{fr} A_3 = \{0,1\}$, $\operatorname{cl} A_3 = [0,1]$, $\operatorname{int}_A A_3 = [0,1)$, $\operatorname{ext}_A A_3 = (1,\infty)$, $\operatorname{fr}_A A_3 = \{1\}$, $\operatorname{cl}_A A_3 = [0,1]$; $\operatorname{int} A_4 = (0,1)$, $\operatorname{ext} A_4 = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$, $\operatorname{fr} A_4 = \{0,1\}$, $\operatorname{cl} A_4 = [0,1]$, $\operatorname{int}_A A_4 = (0,1)$, $\operatorname{ext}_A A_4 = (1,\infty)$, $\operatorname{fr}_A A_4 = \{0,1\}$, $\operatorname{cl}_A A_4 = [0,1]$; $\operatorname{int} A_5 = A_5$, $\operatorname{ext} A_5 = (-\infty,0)$, $\operatorname{fr} A_5 = \{0\}$, $\operatorname{cl} A_5 = [0,\infty)$; $\operatorname{int}_A A_5 = A_5$, $\operatorname{ext}_A A_5 = \emptyset$, $\operatorname{fr}_A A_5 = \{0\}$, $\operatorname{cl}_A A_5 = [0,\infty)$; $\operatorname{int} A_6 = \emptyset$, $\operatorname{ext} A_6 = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\operatorname{fr} A_6 = \{0\}$, $\operatorname{cl} A_6 = \{0\}$, $\operatorname{int}_A A_6 = \emptyset$, $\operatorname{ext}_A A_6 = (0,\infty)$, $\operatorname{fr}_A A_6 = \{0\}$, $\operatorname{cl}_A A_6 = \{0\}$.

(b) Pro každou z množin A_i platí $\operatorname{int} A_i = \operatorname{ext} A_i = \emptyset$, $\operatorname{fr} A_i = \operatorname{cl} A_i = \mathbf{R}$. Pro každé A_i, kde $i = 1,2,\dots,6$, platí $\operatorname{int}_A A_i = \operatorname{ext}_A A_i = \emptyset$, $\operatorname{fr}_A A_i = \operatorname{cl}_A A_i = A$. Dále $\operatorname{int}_A A = \operatorname{cl}_A A = A$, $\operatorname{fr}_A A = \operatorname{ext}_A A = \emptyset$.

(c) Výsledky: $\operatorname{int} A_0 = (0,\infty)$, $\operatorname{ext} A_0 = (-\infty,0)$, $\operatorname{fr} A_0 = \{0\}$, $\operatorname{cl} A_0 = A_0$, $\operatorname{int}_A A_0 = A_0$, $\operatorname{ext}_A A_0 = \emptyset$, $\operatorname{fr}_A A_0 = \emptyset$, $\operatorname{cl}_A A_0 = A_0$; $\operatorname{int} A_1 = A_1$, $\operatorname{ext} A_1 = (-\infty,0] \cup (1,\infty)$, $\operatorname{fr} A_1 = \{1\}$, $\operatorname{cl} A_1 = (0,1]$, $\operatorname{int}_A A_1 = A_1$, $\operatorname{ext}_A A_1 = \{0\} \cup (1,\infty)$, $\operatorname{fr}_A A_1 = \{1\}$, $\operatorname{cl}_A A_1 = (0,1]$; $\operatorname{int} A_2 = (0,1]$, $\operatorname{ext} A_2 = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$, $\operatorname{fr} A_2 = \{0\}$, $\operatorname{cl} A_2 = A_2$, $\operatorname{int}_A A_2 = A_2$, $\operatorname{ext}_A A_2 = (1,\infty)$, $\operatorname{fr}_A A_2 = \emptyset$, $\operatorname{cl}_A A_2 = A_2$; $\operatorname{int} A_3 = (0,1)$, $\operatorname{ext} A_3 = (-\infty,0)\cup(1,\infty)$, $\operatorname{fr} A_3 = \{0,1\}$, $\operatorname{cl} A_3 = [0,1]$, $\operatorname{int}_A A_3 = A_3$, $\operatorname{ext}_A A_3 = (1,\infty)$, $\operatorname{fr}_A A_3 = \{1\}$, $\operatorname{cl}_A A_3 = [0,1]$; $\operatorname{int} A_4 = A_4$, $\operatorname{ext} A_4 = (-\infty,0] \cup (1,\infty)$, $\operatorname{fr} A_4 = \emptyset$, $\operatorname{cl} A_4 = A_4$, $\operatorname{int}_A A_4 = A_4$, $\operatorname{ext}_A A_4 = \{0\} \cup (1,\infty)$, $\operatorname{fr}_A A_4 = \emptyset$, $\operatorname{cl}_A A_4 = A_4$; $\operatorname{int} A_5 = A_5$, $\operatorname{ext} A_5 = (-\infty,0]$, $\operatorname{fr} A_5 = \emptyset$, $\operatorname{cl} A_5 = A_5$, $\operatorname{int}_A A_5 = A_5$, $\operatorname{ext}_A A_5 = \{0\}$, $\operatorname{fr}_A A_5 = \emptyset$, $\operatorname{cl}_A A_5 = A_5$; $\operatorname{int} A_6 = \emptyset$, $\operatorname{ext} A_6 = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\operatorname{fr} A_6 = A_6$, $\operatorname{cl} A_6 = A_6$, $\operatorname{int}_A A_6 = A_6$, $\operatorname{ext}_A A_6 = (0,\infty)$, $\operatorname{fr}_A A_6 = \emptyset$, $\operatorname{cl}_A A_6 = A_6$.

(d) Pro každé A_i, kde $i = 0,1,2,3,4,5$, platí $\operatorname{int} A_i = \operatorname{ext} A_i = \emptyset$, $\operatorname{fr} A_i = \operatorname{cl} A_i = \mathbf{R}$, dále $\operatorname{int} A_6 = \emptyset$, $\operatorname{ext} A_6 = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\operatorname{fr} A_6 = \{0\}$, $\operatorname{cl} A_6 = A_6$. Dále pro $i = 1,2,3,4$ platí $\operatorname{int}_A A_i = \operatorname{ext}_A A_i = \emptyset$, $\operatorname{fr}_A A_i = \operatorname{cl}_A A_i = A$. Dále $\operatorname{int}_A A = A$, $\operatorname{ext}_A A = \emptyset$, $\operatorname{fr}_A A = \emptyset$, $\operatorname{cl}_A A = A$, $\operatorname{int}_A A_5 = A_5$, $\operatorname{ext}_A A_5 = \emptyset$, $\operatorname{fr}_A A_5 = \{0\}$, $\operatorname{cl}_A A_5 = A$, $\operatorname{int}_A A_6 = \emptyset$, $\operatorname{ext}_A A_6 = (0,\infty)$, $\operatorname{fr}_A A_6 = A_6$, $\operatorname{cl}_A A_6 = A_6$.

3. Rozhodněte, zda topologie, indukovaná přirozenou topologií množiny reálných čísel $\mathbf{R}$ na podmnožině $\mathbf{Q}$ racionálních čísel je diskrétní topologie.

Řešení. Topologie, indukovaná přirozenou topologií na podmnožině $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ není diskrétní: např. podmnožina $\{1\} \subset \mathbf{Q}$ není otevřená, neboť pro libovolný otevřený interval $(a,b) \subset \mathbf{R}$ platí $\{1\} \neq (a,b) \cap \mathbf{Q}$.

Euklidův topologický prostor

4. Pro $x, y \in \mathbf{R}^n$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, položme

$$d(x,y) = \left(\left(x^1 - y^1\right)^2 + \left(x^2 - y^2\right)^2 + \ldots + (x^n - y^n)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pro libovolné $a \in \mathbf{R}^n$ a $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, klademe $B(a,r) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x,a) < r\}$. Množina $B(a,r)$ se nazývá *otevřená koule* se *středem* a a *poloměrem* r.

(a) Ukažte, že otevřené koule tvoří bázi nějaké topologie na $\mathbf{R}^n$.

(b) Ukažte, že otevřené koule tvoří bázi přirozené topologie na $\mathbf{R}^n$.

Řešení. (a) Odvodíme dvě nerovnosti. Buďte a, $b \in \mathbf{R}^n$ libovolné body, $a = (a^1, a^2, \dots, a^n)$, $b = (b^1, b^2, \dots, b^n)$. Přímým výpočtem ukážeme, že platí

$$\left(\sum a_k b_k\right)^2 = \left(\sum a_k^2\right)\left(\sum b_i^2\right) - \frac{1}{2}\sum\sum(a_i b_j - a_j b_i)^2,$$

kde se sčítá přes všechny hodnoty indexů i, j, k. Odtud dostaneme vztah

$$\left(\sum a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum a_k^2\right)\left(\sum b_i^2\right),$$

který se nazývá *Cauchyho–Bunjakovského nerovnost.* Z Cauchyho–Bunjakovského nerovnosti pak dostaneme

$$\sum (a_k+b_k)^2 = \sum (a_k^2 + 2a_kb_k + b_k^2) \leq \sum a_k^2 + \sum b_k^2$$
$$+ 2\left(\left(\sum a_k^2\right)\left(\sum b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 .$$

Platí tedy

$$\left(\sum (a_k+b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Tato nerovnost se nazývá *Minkowského nerovnost.*

Nyní prověřím, že jsou splněny podmínky Věty 8. (a) odst. 1.4 str. 6. Označme σ systém všech otevřených koulí v $\mathbf{R}^n$. Evidentně $\bigcup B(a,r) = \mathbf{R}^n$, kde $B(a,r)$ probíhá σ. Buď $B(x,r)$ libovolná otevřená koule; ukážeme, že pro každé $y \in B(x,r)$ existuje otevřená koule $B(y,\varepsilon)$ tak, že $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$. Zvolme ε tak, že $0 < \varepsilon \leq r - d(x,y)$. Pomocí Minkowského nerovnosti dostaneme, že platí $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ pro libovolné $z \in \mathbf{R}^n$. Pro každé $z \in B(y,\varepsilon)$ tedy platí $d(x,z) < d(x,y) + \varepsilon \leq r$ a tedy $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$. Nechť nyní B_1, B_2 jsou libovolné otevřené koule takové, že $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Zvolme $y \in B_1 \cap B_2$. Existují čísla ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ tak, že $B(y,\varepsilon_1) \subset B_1$, $B(y,\varepsilon_2) \subset B_2$. Vezmeme-li $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, dostaneme $B(y,\varepsilon) \subset B_1 \cap B_2$. σ je tedy báze topologie na $\mathbf{R}^n$.

(b) Podle Věty 9. odst. 1.4 str. 7 stačí dokázat, že (1) ke každému bodu $y \in B(x,r)$ existuje otevřený kvádr K obsahující y tak, že $K \subset B(x,r)$, t.j. že množina $B(x,r)$ je otevřená v přirozené topologii, a (2) ke každému bodu y z libovolného otevřeného kvádru K existuje otevřená koule $B(y,\varepsilon)$, ležící v K. Pro důkaz, že je splněna podmínka (1), stačí vzít otevřený kvádr $K = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, kde $I_i = (y^i - a, y^i + a)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$, a a je libovolné číslo splňující podmínku $0 < a < \frac{1}{\sqrt{n}}(r - d(x,y))$. Skutečně, pro libovolné $z \in K$, $z = (z^1, z^2, \ldots, z^n)$, dostaneme

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = d(x,y) + \left(\sum \left(y^i - z^i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$< d(x,y) + \left(na^2\right)^{\frac{1}{2}} = d(x,y) + \sqrt{n}\cdot a < r,$$

takže $K \subset B(x,r)$. (poznamenáváme, že v tomto výpočtu jsme

použili vztah pro délku b_n tělesové úhlopříčky n-rozměrné krychle, který má v našem případě tvar $b_n = 2a \cdot \sqrt{n}$.) Pro důkaz, že je splněna podmínka (2), uvažujme otevřený kvádr $K = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, kde $I_i = (a^i, b^i)$. Nechť $y \in K$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$. Zvolíme $\varepsilon > 0$ tak, že $\varepsilon < \min\{\min\{|y^i - a^i|, |y^i - b^i|\}\}$, kde i probíhá $1, 2, \ldots, n$. Pro bod $z \in B(y,\varepsilon)$, $z = (z^1, z^2, \ldots, z^n)$, pak platí $d(z,y) = (\sum (z^i - y^i)^2)^{1/2} < \varepsilon$, odkud $|z^i - y^i| < \varepsilon$ pro každé i a tedy $y^i - \varepsilon < z^i < y^i + \varepsilon$. Platí tedy $z^i \in I_i$ pro každé i, t.j. $B(y,\varepsilon) \subset K$, což jsme chtěli dokázat.

5. Buď $a \in \mathbf{R}^n$ bod, $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$, $r > 0$ číslo, $\rho : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ funkce, definovaná vztahem

$$\rho(x,y) = \left(\left(x^2 - y^2\right)^2 + \left(x^3 - y^3\right)^2 + \ldots + \left(x^n - y^n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Množina $C(a,r) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \rho(x,a) < r\}$ se nazývá *otevřený válec* s *osou* $o = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^i = a^i,\ 2 \leq i \leq n\}$ a *poloměrem* r.

(a) Ukažte, že otevřené válce tvoří bázi topologie na $\mathbf{R}^n$. Srovnejte tuto topologii s přirozenou topologií. Je topologie, generovaná otevřenými válci, Hausdorffova?

(b) Relace " $x \sim y$ tehdy a jen tehdy, když $x^i = y^i$ pro každé $i = 2, 3, \ldots, n$" je ekvivalence na $\mathbf{R}^n$. Uvažujeme-li $\mathbf{R}^n$ s topologií, generovanou otevřenými válci, pak faktorový prostor podle této ekvivalence je homeomorfní s Euklidovým prostorem $\mathbf{R}^{n-1}$. Ukažte.

Řešení. (a) Užijeme Větu 8. (a) odst. 1.4 str. 6. Množiny $C(a,r)$ zřejmě pokrývají $\mathbf{R}^n$. Mějme dva otevřené válce $C_1 = C(a_1,r_1)$, $C_2 = C(a_2,r_2)$ s neprázdným průnikem a bod $y \in C_1 \cap C_2$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$. Označme $a_1' = (a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^n)$, $a_2' = (a_2^2, a_2^3, \dots, a_2^n)$, kde $a_1 = (a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n)$, $a_2 = (a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^n)$, $B_1 = B(a_1', r_1)$, $B_2 = B(a_2', r_2)$ (otevřené koule v $\mathbf{R}^{n-1}$). Evidentně $y' = (y^2, y^3, \dots, y^n) \in B_1 \cap B_2$. Podle cv. 4 existuje otevřená koule $B(y',\varepsilon)$ v $\mathbf{R}^{n-1}$ taková, že $B(y',\varepsilon) \subset B_1 \cap B_2$. Zřejmě $C(y,\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x^2, x^3, \dots, x^n) \in B(y',\varepsilon)\}$ je otevřený válec v $\mathbf{R}^n$ a platí $C(y,\varepsilon) \subset C_1 \cap C_2$. Ukázali jsme tedy, že otevřené válce tvoří bázi topologie na $\mathbf{R}^n$.

Tato topologie je slabší než přirozená topologie: ke každému otevřenému válci $C(a,r)$ otevřená koule $B(a,r)$ leží v $C(a,r)$. Opak ovšem neplatí, takže tyto topologie nejsou totožné.

Topologie, generovaná otevřenými válci, není Hausdorffova: body x_1, x_2, pro které $x_1^1 \neq x_2^1$ a $x_1^i = x_2^i$ pro $i = 2, 3, \dots, n$, nelze oddělit otevřenými válci.

(b) Třída $[x]$ bodu $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ podle ekvivalence $\sim$ je množina $\{y \in \mathbf{R}^n \mid y^2 = x^2, \dots, y^n = x^n\}$. Pro libovolnou třídu $[x] \in \mathbf{R}^n/\sim$ klademe $f([x]) = (x^2, x^3, \dots, x^n)$. Tímto vztahem je zřejmě korektně definována bijekce $f : \mathbf{R}^n/\sim \to \mathbf{R}^{n-1}$. Označme π faktorovou projekci $\mathbf{R}^n$ na $\mathbf{R}^n/\sim$. Podle definice π a f platí $f \circ \pi(x^1, x^2, \dots, x^n) = (x^2, x^3, \dots, x^n)$, takže $f \circ \pi$ je spojité zobrazení v Euklidově topologii na $\mathbf{R}^{n-1}$ a v topologii, generované otevřenými válci na $\mathbf{R}^n$ (Věta 2. (5) odst. 2.1 str. 18, cv. 4 (b)); zobrazení f je tedy spojité vzhledem k faktorové topologii (Věta 11. odst. 2.4 str. 21). Zobrazení $f \circ \pi$ je ovšem otevřené (Věta 3. (a) odst. 2.1 str. 18). neboť obraz otevřeného válce je otevřená koule. Pro libovolnou otevřenou množinu $U \subset \mathbf{R}^n/\sim$ je množina $\pi^{-1}(U) \subset \mathbf{R}^n$ otevřená a ze surjektivity π vyplývá, že $f(U) = f \circ \pi(\pi^{-1}(U))$ je otevřená množina; zobrazení f je tedy otevřené. Podle Věty 4. odst. 2.1 str. 19 je tedy f homeomorfismus.

6. Je Euklidův topologický prostor $\mathbf{R}^n$ separabilní?

Řešení. Ano. Uvažujme množinu $\mathbf{Q}^n$ všech uspořádaných n-tic racionálních čísel. $\mathbf{Q}^n$ je spočetná množina a platí $\operatorname{cl} \mathbf{Q}^n = \mathbf{R}^n$: zřejmě libovolný otevřený interval $I \subset \mathbf{R}$ obsahuje racionální číslo a libovolná otevřená množina $U \subset \mathbf{R}^n$ obsahuje element množiny $\mathbf{Q}^n$.

7. Ukažte, že Euklidův topologický prostor $\mathbf{R}^n$ je druhého typu spočetnosti.

Řešení. Analogicky jako v případě $n = 1$ (př. (3) odst. 1.8 str. 9) lze ukázat, že systém všech otevřených koulí $B(x,r) \subset \mathbf{R}^n$ takových, že $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ probíhá $\mathbf{Q}^n \subset \mathbf{R}^n$ a r probíhá čísla $1/n$, kde $n \in \mathbf{N}$, tvoří bázi přirozené topologie na $\mathbf{R}^n$. Spočetnost tohoto systému plyne ze spočetnosti množiny $\mathbf{N} \times \mathbf{Q}^n$.

Spojitá zobrazení a homeomorfismy

8. Uvažujte Euklidův prostor $\mathbf{R}^2$ a jeho podmnožiny $K = (-1,1) \times (-1,1)$, $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ (otevřený čtverec a otevřený kruh) s indukovanou topologií. Zjistěte, zda jsou homeomorfní (a) K a $\mathbf{R}^2$, (b) B a $\mathbf{R}^2$, (c) K a B.

Řešení. (a) Zobrazení $f : K \to \mathbf{R}^2$, definované vztahem

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right),$$

je homeomorfismus.

(b) Zobrazení $g : B \to \mathbf{R}^2$, definované vztahem

$$g(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right),$$

je homeomorfismus.

(c) Z (a) a (b) vyplývá, že zobrazení $g^{-1} \circ f$ je homeomorfismus K a B.

9. Ukažte, že kružnice $S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ je homeomorfní s okrajem čtverce $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 = 1, -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = 1, -1 \leq x \leq 1\}$ (v přirozené topologii na $\mathbf{R}^2$).

Ř e š e n í. Nechť $m : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je funkce, definovaná vztahem

$$m(x,y) = \max(|x|, |y|).$$

Ukážeme, že tato funkce je spojitá. Buď $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ bod. Předpokládejme nejdříve, že $x_0 \neq y_0$; nechť např. $|x_0| > |y_0|$. Pak existuje okolí U bodu (x_0, y_0) takové, že pro každé $(x,y) \in U$ platí $|x| > |y|$, t.j. $U \cap \Delta_{\mathbf{R}} = \emptyset$, kde $\Delta_{\mathbf{R}} \subset \mathbf{R}^2$ je diagonála. Na U tedy $m(x,y) = |x|$, takže m je jako kompozice projekce $(x,y) \to x$ a absolutní hodnoty $x \to |x|$ funkce spojitá v bodě (x_0, y_0). Nechť nyní $y_0 = x_0$ a nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Nechť $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ je bod, pro který $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y - x_0| < \varepsilon$. Platí-li $|x| \geq |y|$, pak $|m(x,y) - m(x_0, x_0)| = |\,|x| - |x_0|\,| \leq |x - x_0| < \varepsilon$, a platí-li $|x| < |y|$, pak $|m(x,y) - m(x_0, x_0)| = |\,|y| - |x_0|\,| \leq |y - x_0| < \varepsilon$; znamená to, že funkce m je spojitá v bodě (x_0, x_0). Celkově je tedy ukázáno, že m je spojitá funkce.

Rovnice $m(x,y) = 1$ je zřejmě rovnice okraje čtverce C, t.j. platí $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid m(x,y) = 1\}$.

Pro $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ klademe

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{m(x,y)}(x,y);$$

dostáváme spojité zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^2$ (Věta 10. (b) odst. 3.3 str. 36, př. (3) odst. 3.7 str. 43). Zobrazení φ má rovnice

$$\bar{x} = \frac{x}{m(x,y)}, \quad \bar{y} = \frac{y}{m(x,y)}.$$

Pro libovolný bod $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ platí $m(\bar{x}, \bar{y}) = 1$, jak se snadno přesvědčíme přímým výpočtem, takže $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$ a $\varphi(\mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \subset C$. Zúžením oboru hodnot tedy dostáváme spojité zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to C$ (Věta 3. (b) odst. 3.1 str. 32). Snadno lze ukázat, že toto zobrazení je surjektivní. Buď $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$ libovolný bod; podle předpokladu platí $m(\bar{x}, \bar{y}) = 1$. Položme $x = \bar{x}/r$, $y = \bar{y}/r$, kde $r = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2}$. Pro bod $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ ihned dostaneme $\varphi(x,y) = (\bar{x}, \bar{y})$.

Nakonec pro $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ položme

$$\psi(x,y) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Tímto vztahem je definováno zobrazení $\psi : \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Označme stejným symbolem ψ zúžení tohoto zobrazení na množinu $C \subset \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Pro každé $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$ platí $\varphi \circ \psi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$, jak již bylo ukázáno výše, takže

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_C$$

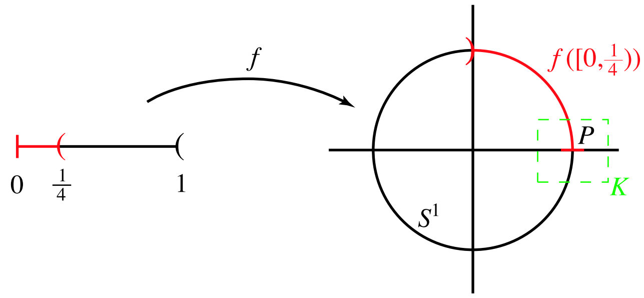
a ψ je *řez* zobrazení φ (odst. 3.5). Jelikož tento řez vzniká zúžením spojitého zobrazení na topologický podprostor, je spojitý (Věta 3. odst. 3.1 str. 32) a podle Věty 17. odst. 3.5 str. 41 $\psi : C \to \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ je vnoření (odst. 3.5); zúžením oboru hodnot tedy dostáváme homeomorfismus $\psi : C \to \psi(C)$.

Zbývá tedy prověřit, že $\psi(C) = S^1$; to ovšem ihned vyplývá z definice zobrazení ψ.

10. Uvažujte jednotkovou kružnici $S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ a interval $[0,1)$ s Euklidovou topologií. Je zobrazení $f : [0,1) \to S^1$, definované vztahem $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, homeomorfismus?

Ř e š e n í. Zobrazení f je spojitá bijekce, inverzní zobrazení f^{-1} však není spojité: interval $[0, 1/4) \subset [0, 1)$ je otevřená množina, ovšem jeho vzor $(f^{-1})^{-1}([0, \frac{1}{4})) = f([0, \frac{1}{4}))$ vzhledem k zobrazení f^{-1} není otevřená množina v S^1. Kdyby totiž existovala otevřená množina $U \subset \mathbf{R}^2$ tak, že $U \cap S^1 = f([0, 1/4))$, bod $P = f(0)$ by byl jejím vnitřním bodem a množina $f([0, \frac{1}{4}))$ by obsahovala podmmožinu tvaru $K \cap S^1$, kde K je otevřený obdélník obsahující bod P (viz obr. 1).

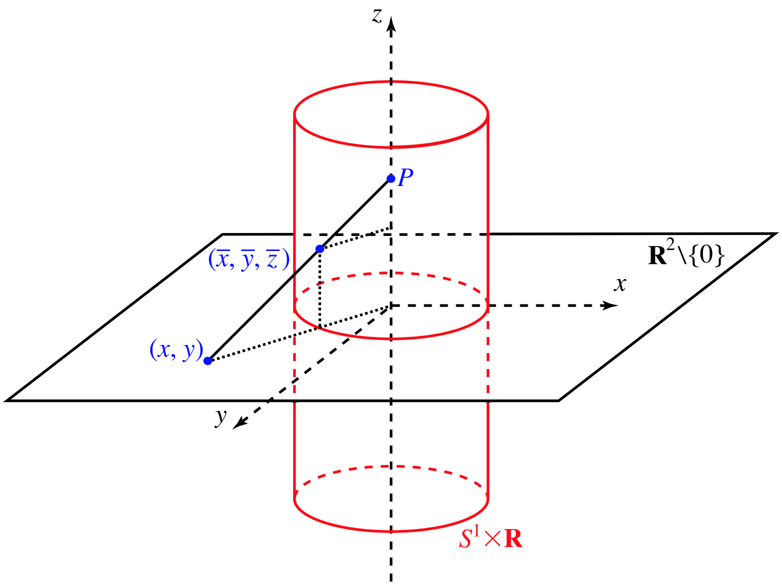
Obr. 1



11. Ukažte, že topologické prostory $\mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$, $S^1 \times \mathbf{R}$ (s Euklidovou topologií) jsou homeomorfní.

Ř e š e n í. Ztotožníme-li přirozeným způsobem množiny $\mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$, $S^1 \times \mathbf{R}$ s podmnožinami množiny $\mathbf{R}^3$, můžeme zkonstruovat jejich bijekci pomocí promítání z bodu $P = (0, 0, 1)$ (viz obr. 2).

Obr. 2



Každému $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$ přiřadíme bod $f(x, y) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S^1 \times (-\infty, 1)$ pomocí rovnic

$$\bar{x} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \bar{y} = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \bar{z} = 1 - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Snadno lze ukázat, že f je homeomorfismus. Ovšem interval $(-\infty, 1)$ je homeomorfní s $\mathbf{R}$; je-li $g : (-\infty, 1) \to \mathbf{R}$ homeomorfismus, pak $\mathrm{id}_{S^1} \times g$ je homeomorfismus $S^1 \times (-\infty, 1)$ na $S^1 \times \mathbf{R}$ a složené zobrazení $(\mathrm{id}_{S^1} \times g) \circ f$ je homeomorfismus $\mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$ na $S^1 \times \mathbf{R}$.

12. Rozhodněte, zda v následujících případech (a) – (d) je obraz přirozené topologie na $\mathbf{R}$ vzhledem k zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ totožný s topologií podprostoru Euklidova prostoru $\mathbf{R}^2$ a zda f je vnoření:

(a) $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ (*kružnice* o poloměru 1 se středem v počátku),

(b) $f(t) = (1, t)$ pro $t \in (-\infty, 0)$ a $f(t) = (\cos(2\pi t/(1+t)), \sin(2\pi t/(1+t))$ pro $t \in [0, \infty)$ (viz obr. 3),

(c) $f(t) = (a(t^2-1)/(t^2+1), at(t^2-1)/(t^2+1))$, kde $a > 0$ (*strofoida*, viz obr. 4),

(d) $f(t) = (a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos(\pi s^2/2)\,\mathrm{ds}, a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin(\pi s^2/2)\mathrm{ds})$, kde $a \neq 0$ (*klotoida*, viz obr. 5).

Řešení. (a) Označme τ_1 (resp. τ_2) přirozenou topologii na $\mathbf{R}^1$ (resp. $\mathbf{R}^2$), $f\tau_1$ (resp. τ_{S^1}) obraz topologie τ_1 vzhledem k zobrazení f (resp. přirozenou topologii na S^1).

Nejprve ukážeme, že $f\tau_1 \supset \tau_{S^1}$. Zobrazení f je evidentně spojité. Označme f' zobrazení, vznikající zúžením oboru hodnot zobrazení f na kružnici S^1 a označme $\iota : S^1 \to \mathbf{R}^2$ kanonické vložení; evidentně $f = \iota \circ f'$. Uvažujeme-li S^1 s topologií $f\tau_1$, zobrazení f' je zřejmě spojité. Podle Věty 11. odst. 2.4 str. 21 je tedy zobrazení ι spojité. Podle definice je ovšem topologie τ_{S^1} nejslabší ze všech topologií na S^1, v nichž je zobrazení ι spojité; platí tedy $\tau_{S^1} \subset f\tau_1$.

Nyní ukážeme, že $f\tau_1 \subset \tau_{S^1}$. Buď $U \in f\tau_1$ libovolná množina. Z definice finální topologie a ze surjektivnosti zobrazení f' plyne, že $U = f'(V) = f(V)$ pro jistou otevřenou množinu $V \subset \mathbf{R}$. Napišme $V = \bigcup I_t$ (sjednocení přes $t \in V$), kde $I_t \subset V$ je otevřený interval obsahující t. Evidentně $I_t = (\iota \circ f')^{-1}(W_t)$ pro jistou otevřenou množinu $W_t \subset \mathbf{R}^2$. Klademe $W = \bigcup W_t$. Pak W je otevřená množina a $f(V) = f(\bigcup(\iota \circ f')^{-1}(W_t)) = f((\iota \circ f')^{-1}(\bigcup W_t) = f(f'^{-1}(\iota^{-1}(W))) = f'(f'^{-1}(\iota^{-1}(W)))$. Ze surjektivity f' tedy dostáváme $f(V) = \iota^{-1}(W) = W \cap S^1 = U$. U je tedy element topologie τ_{S^1}, což jsme chtěli dokázat.

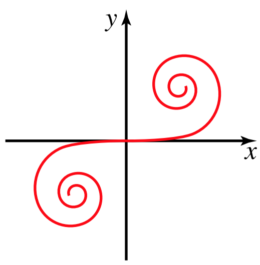
(b) Stejně jako v příkladě (a) se ukáže, že obraz $f\tau$ přirozené topologie τ na $\mathbf{R}$ vzhledem k zobrazení f je silnější než indukovaná přirozená topologie na $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}^2$. Ukážeme, že tyto topologie nejsou totožné. Z injektivnosti f vyplývá, že množina $f((-1, 1/3)) \subset f(\mathbf{R})$ je otevřená v topologii $f\tau$. Tuto množinu však nelze získat jako průnik $U \cap f(\mathbf{R})$, kde $U \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina obsahující bod $(1, 0) = f(0)$ (viz obr. 3).

f je spojité injektivní zobrazení; z výše uvedeného však vyplývá, že f není vnoření.

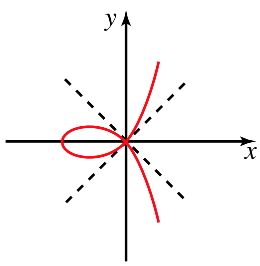
(c) Zobrazení f není injektivní, nemůže tedy být vnořením. Analogicky jako v případě (b) se ukáže, že obraz $f\tau$ přirozené topologie na $\mathbf{R}$ nesplývá s přirozenou topologií na $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}^2$.

(d) Podobně jako v (a) se ukáže, že obraz přirozené topologie vzhledem k zobrazení f je totožný s indukovanou topologií. Jelikož f je injektivní, je vnoření $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}^2$.

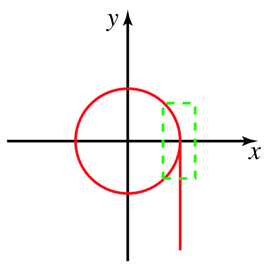
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5



13. Spojité zobrazení triviálního topologického prostoru do Hausdorffova topologického prostoru je konstantní. Ukažte.

Řešení. Buď X triviální topologický prostor, Y Hausdorffův topologický prostor, $f : X \to Y$ spojité zobrazení. Předpokládejme, že existují body $x_1, x_2 \in X$ takové, že pro body $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ platí $y_1 \neq y_2$. Z oddělitelnosti topologického prostoru Y vyplývá, že existuje okolí V bodu y_1 takové, že $y_2 \notin V$. Dále ze spojitosti f v bodě x_1 vyplývá, že existuje okolí U bodu x_1

tak, že $f(U) \subset V$. Ovšem topologický prostor X je triviální, takže $U = X$, a tedy $f(X) \subset V$, t.j. $y_2 \in V$. Nemůže tedy platit $y_1 \neq y_2$.

14. Nechť X je topologický prostor a nechť $X = A \cup B$, kde A, $B \subset X$ jsou uzavřené množiny takové, že $A \cap B \neq \emptyset$. Buďte $f : A \to Y$, $g : B \to Y$ spojitá zobrazení do topologického prostoru Y. Platí-li $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in A \cap B$, pak zobrazení $h : X \to Y$, definované vztahem $h|_A = f$, $h|_B = g$, je spojité. Dokažte.

Řešení. Buď $C \subset Y$ libovolná uzavřená množina. Pro množinu $h^{-1}(C)$ dostáváme $h^{-1}(C) = \{x \in X \mid h(x) \in C\} = \{x \in A \mid f(x) \in C\} \cup \{x \in B \mid g(x) \in C\} = f^{-1}(C) \bigcup g^{-1}(C)$. Ze spojitosti zobrazení f vyplývá, že množina $f^{-1}(C)$ je uzavřená v topologickém prostoru A. S využitím Věty 4. (a) odst. 3.1 str. 32 dostáváme $\operatorname{cl}_A f^{-1}(C) = f^{-1}(C) = A \cap \operatorname{cl} f^{-1}(C)$, takže množina $f^{-1}(C)$ je jako průnik uzavřených množin uzavřená množina v X. $h^{-1}(C)$ je tedy uzavřená množina a spojitost zobrazení h vyplývá z Věty 2. odst. 2.1 str. 18.

15. Buďte X, Y topologické prostory.

(a) Předpokládejme, že X, Y jsou homeomorfní a $h : X \to Y$ je jejich homeomorfismus. Pak pro libovolný topologický podprostor $A \subset X$ zobrazení $g : A \to g(A)$, definované vztahem $g(x) = h(x)$, je homeomorfismus.

(b) Předpokládejme, že existuje bod $y_0 \in Y$ takový, že pro žádné $x \in X$ topologické prostory $X \backslash \{x\}$, $Y \backslash \{y_0\}$ nejsou homeomorfní. Pak X, Y nejsou homeomorfní.

Dokažte.

Řešení. (a) g je bijekce a obě zobrazení g, g^{-1} jsou spojitá podle Věty 3. (a), (b) odst. 3.1 str. 32.

(b) Předpokládejme, že X, Y jsou homeomorfní a označme $f : X \to Y$ jejich homeomorfismus. Položme $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Podle (a) topologické prostory $X \backslash \{x_0\}$, $f(X \backslash \{x_0\}) = f(X) \backslash \{f(x_0)\} = Y \backslash \{y_0\}$ jsou homeomorfní, což je spor.

Součin topologických prostorů

16. Buďte X_i, $1 \leq i \leq k$, topologické prostory, τ_i jejich topologie.

(a) Ukažte, že systém množin $\prod U_i$, kde U_i probíhá τ_i, tvoří bázi nějaké topologie na součinu množin $\prod X_i$.

(b) Ukažte, že tato topologie splývá se součinem topologií τ_i.

Řešení. (a) Aplikujeme Větu 8. (a) odst. 1.4 str. 6. Označme τ_0 systém množin tvaru $\prod U_i$, kde $U_i \in \tau_i$. Zřejmě $\prod X_i \in \tau_0$. Dále uvažujme dvě množiny $U_1 \times \cdots \times U_k$, $V_1 \times \cdots \times V_k \in \tau_0$. Pro jejich průnik dostáváme $(U_1 \times \cdots \times U_k) \cap (V_1 \times \cdots \times V_k) = (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_k \cap V_k)$. Ovšem $U_i \cap V_i \in \tau_i$ pro každé i, takže tento průnik padne do τ_0. Systém množin τ_0 je tedy báze topologie.

(b) Označme pr_i i-tou projekci součinu $\prod X_i$. Nechť τ je iniciální topologie na součinu množin $\prod X_i$, asociovaná se systémem projekcí $\{\operatorname{pr}_i\}$. Systém σ množin tvaru $\operatorname{pr}_i^{-1}(U_i)$, kde $U_i \in \tau_i$, je systém generátorů topologie τ. Báze topologie τ je pak tvořena všemi konečnými průniky množin systému σ. Množina $\operatorname{pr}_i^{-1}(U_i)$ má tvar $\operatorname{pr}_i^{-1}(U_i) = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_k$. Odtud je vidět, že libovolný konečný průnik množin ze systému σ má tvar $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k$, kde $V_i \in \tau_i$. Báze topologie τ je tedy totožná se systémem τ_0 z (a).

17. Buďte X, Y topologické prostory, $f : X \times Y \to Z$ zobrazení součinu $X \times Y$ do topologického prostoru Z. Řekněme, že f je *spojité v proměnné* $x \in X$, jestliže pro každé $y \in Y$ zobrazení $X \ni x \to f(x, y) \in Z$ je spojité. Analogicky řekneme, že f je *spojité v proměnné* $y \in Y$, jestliže pro každé $x \in X$ je zobrazení $Y \ni y \to f(x, y) \in Z$ spojité. Zobrazení f, spojité v proměnné $x \in X$ i v proměnné $y \in Y$, se nazývá *spojité v obou proměnných*.

(a) Ukažte, že je-li f spojité, pak je spojité v obou proměnných.

(b) Udejte příklad zobrazení, které je spojité v obou proměnných, ale není spojité.

Řešení. (a) Buď $f : X \times Y \to Z$ spojité zobrazení, $y_0 \in Y$ bod. Zobrazení $g : X \to Z$, definované vztahem $g(x) = f(x, y_0)$, je kompozice spojitých zobrazení $X \ni x \to (x, y_0) \in X \times Y$, $X \times Y \ni (x, y) \to f(x, y) \in Z$ a je tedy spojité (porov. Věta 7. odst. 3.2 str. 34). Odsud je již vidět, že f je spojité v obou proměnných.

(b) Uvedeme příklad funkce $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spojité v obou proměnných, která není spojitá. Klademe

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dále klademe $g(x) = f(x, y_0)$, $h(y) = f(x_0, y)$, kde $(x_0, y_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je libovolný pevně zvolený bod. Pak

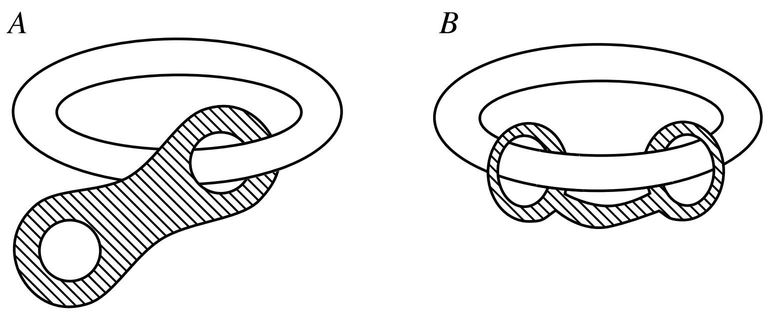
$$g(x) = \frac{xy_0}{x^2+y_0^2}, \quad h(y) = \frac{x_0 y}{x_0^2+y^2}$$

pro každé $x, y \in \mathbf{R}$. Funkce g, h jsou tedy spojité a z libovolnosti bodu (x_0, y_0) vyplývá, že funkce f je spojitá v obou proměnných.

Funkce f ovšem není spojitá v bodě $(0,0)$. Kdyby totiž byla spojitá v bodě $(0,0)$, pak funkce $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definovaná vztahem $f'(x) = f(x,x)$, by byla spojitá v bodě 0 (jako kompozice spojitých zobrazení $\mathbf{R} \ni x \to (x,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ a f); ovšem $f'(x) = 1/2$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$, takže f' není spojitá v bodě $x = 0$.

18. Uvažujte topologické podprostory A, $B \subset \mathbf{R}^3$ podle obr. 6.

Obr. 6



Rozhodněte, zda existuje spojité zobrazení $f : A \times [0,1] \to \mathbf{R}^3$, splňující tyto podmínky:

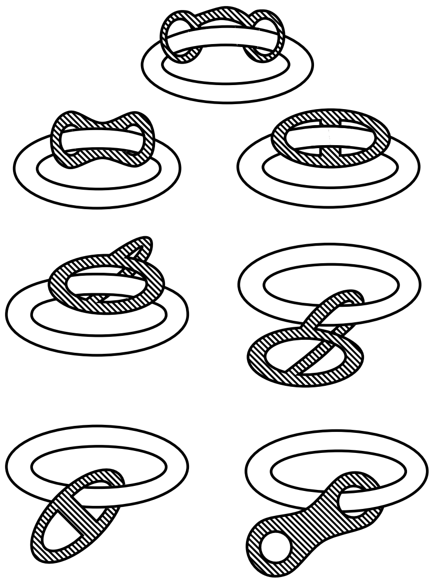
(1) $f(x, 0) = x$.

(2) Pro každé $t \in [0,1]$ zobrazení $A \ni x \to f(x,t) \in f(A \times \{t\})$ je homeomorfismus a $f(A \times \{1\}) = B$.

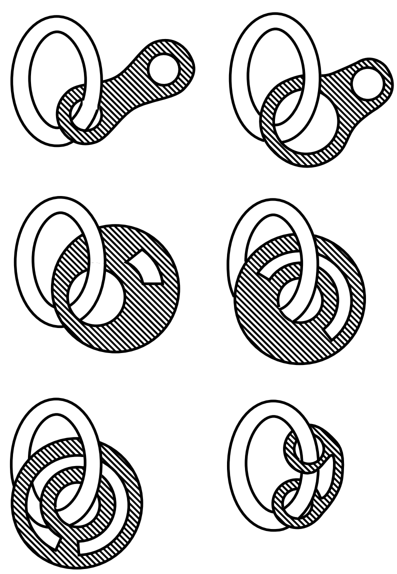
Řešení. Spojité zobrazení f s uvedenými vlastnostmi ("spojitá deformace") existuje; je to zřejmé ze dvou následujících řešení (L. Veselý, obr. 7; M. Turec, obr. 8, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 33 (1988), 176):

Úloha 18 pochází z mezinárodní matematické soutěže vysokoškolských studentů ISTAM 87 v Bělehradě.

Obr. 7



Obr. 8



Silný součin topologických prostorů

Uvažujme systém topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota\in I}$ a součin systému množin $\prod X_\iota$. Snadno lze ukázat, že systém σ množin $\prod U_\iota$, kde pro každé ι je U_ι otevřená množina v X_ι, tvoří bázi topologie na $\prod X_\iota$ (Věta 8. (a) odst. 1.4 str. 6): tyto množiny pokrývají množinu $\prod X_\iota$ a platí $(\prod U_\iota) \cap (\prod V_\iota) = \prod(U_\iota \cap V_\iota)$ pro libovolné podmnožiny U_ι, $V_\iota \subset X_\iota$, takže z podmínky $\prod U_\iota$, $\prod V_\iota \in \sigma$ vyplývá $\prod(U_\iota \cap V_\iota) \in \sigma$. Topologie, generovaná bází σ, se nazývá *silný součin* topologií topologických prostorů X_ι. Množina $\prod X_\iota$ s touto topologií se nazývá *silný součin* systému topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota\in I}$.

19. Buď $(X_\iota)_{\iota\in I}$ systém topologických prostorů. Uvažujte součin systému množin $\prod X_\iota$ jako součin topologických prostorů a jako silný součin topologických prostorů.

(a) Srovnejte součin a silný součin topologií topologických prostorů X_ι, $\iota \in I$. Kdy obě topologie splynou? Kdy je silný součin systému topologických prostorů Hausdorffův topologický prostor?

(b) Rozhodněte, zda faktorová projekce $\mathrm{pr}_\kappa : \prod X_\iota \to X_\kappa$ je zobrazení otevřené (resp. uzavřené, resp. spojité), uvažujeme-li součin množin $\prod X_\iota$ se součinem topologií topologických prostorů X_ι ev. se silným součinem topologií topologických prostorů X_ι.

Řešení. (a) Podle definice iniciální topologie součin topologií topologických prostorů X_ι je generován systémem generátorů tvaru $\mathrm{pr}_\iota^{-1}(U_\iota)$, kde U_ι probíhá otevřené množiny v X_ι. Topologie součinu je tedy generovaná bází, tvořenou množinami tvaru $\mathrm{pr}_{\iota_1}^{-1}(U_{\iota_1}) \cap \cdots \cap \mathrm{pr}_{\iota_K}^{-1}(U_{\iota_K})$ (konečné průniky), t.j. množinami $\prod V_\iota$, kde $V_\iota \subset X_\iota$ je otevřená množina a $V_\iota = X_\iota$ pro každé $\iota \in I \backslash J$, kde $J \subset I$ je konečná podmnožina.

Kažký element báze součinu topologií je tedy element báze silného součinu. Odtud vyplývá, že topologie součinu je slabší než topologie silného součinu. Dále je zřejmé, že tyto topologie splynou tehdy a jen tehdy, když systém topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota\in I}$ je konečný. Silný součin systému topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota\in I}$ je Hausdorffův topologický prostor tehdy a jen tehdy, je-li každý topologický prostor X_ι Hausdorffův. Skutečně, jsou-li topologické prostory X_ι Hausdorffovy, pak součin $\prod X_\iota$ je Hausdorffův (Věta 13. odst. 3.3 str. 38) a tehdy také silný součin $\prod X_\iota$ musí být Hausdorffův. Obráceně předpokládejme, že silný součin $\prod X_\iota$ je Hausdorffův topologický prostor. Buď $z \in \prod X_\iota$ libovolný element, $z = (z_\iota)_{\iota\in I}$. Pro libovolné $\kappa \in I$ a $x \in X_\kappa$ klademe $f_\kappa(x) =$

$(y_\iota)_{\iota\in I}$, kde $y_\iota = z_\iota$ pro $\iota \neq \kappa$ a $y_\kappa = x$. Dostáváme zobrazení $f_\kappa : X_\kappa \to \prod X_\iota$, které je evidentně spojité (Věta 2. (5) odst. 2.1 str. 18). Oddělitelnost X nyní vyplývá z injektivnosti f.

(b) Uvažujme $\prod X_\iota$ jako součin topologických prostorů. Pak κ-projekce $\mathrm{pr}_\kappa : \prod X_\iota \to X_\kappa$ je spojité otevřené zobrazení (Věta 10. odst. 3.3 str. 36). pr_κ obecně není uzavřené zobrazení: např. obrazem uzavřené množiny $\{(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid x \cdot y = 1\}$ vzhledem k projekci pr_1 je množina $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, která není uzavřená (v přirozené topologii).

Uvažujme $\prod X_\iota$ jako silný součin systému topologických prostorů. Pak pr_κ je zřejmě spojité zobrazení, neboť topologie silného součinu je silnější než topologie součinu. Buď $U = \prod U_\iota$ libovolný element báze topologie. Pak $\mathrm{pr}_\kappa(U) = U_\kappa$, takže pr_κ je otevřené zobrazení (Věta 3. (a) odst. 2.1 str. 18). Nakonec z toho, že zobrazení pr_κ nemusí být uzavřené v topologii součinu na $\prod X_\iota$, vyplývá, že nemusí být uzavřené ani v topologii silného součinu.

20. Zobrazení f topologického prostoru Y do součinu $\prod X_\iota$ systému topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota\in I}$ je spojité tehdy a jen tehdy, když každá jeho složka je spojitá (Věta 10. (b) odst. 3.3 str. 36). Platí analogické tvrzení pro silný součin?

Řešení. Buď $f : Y \to \prod X_\iota$ zobrazení, kde $\prod X_\iota$ je silný součin systému topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota\in I}$. Je-li f spojité, pak κ-složka $f_\kappa = \mathrm{pr}_\kappa \circ f$ je spojitá, jelikož κ-projekce je spojitá (cv. 19).

Nechť každá složka f_ι je spojitá, nechť $U = \prod U_\iota$ je element báze topologie silného součinu. Pak pro každé κ je $f_\kappa^{-1}(U_\kappa) \subset Y$ otevřená množina. Ovšem množina $f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcap \mathrm{pr}_\iota^{-1}(U_\iota)) = \bigcap f^{-1}\,\mathrm{pr}_\iota^{-1}(U_\iota) = \bigcap f_\iota^{-1}(U_\iota)$ obecně nemusí být otevřená množina. Ze spojitosti složek zobrazení f tedy ještě obecně nevyplývá spojitost zobrazení f (porov. cv. 21).

21. Označme $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ součin systému množin $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, kde $X_n = \mathbf{R}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, a uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií. Pro každé $t \in \mathbf{R}$ položme $f(t) = (t,t,t,\ldots)$; dostáváme zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^\mathbf{N}$.

(a) Je f spojité v topologii součinu na $\mathbf{R}^\mathbf{N}$?

(b) Je f spojité v topologii silného součinu na $\mathbf{R}^\mathbf{N}$?

Řešení. (a) n-složka zobrazení f je zobrazení $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definované vztahem $f_n(t) = t$, t.j. $f_n = \mathrm{id}_\mathbf{R}$ a f_n je spojité zobrazení. Zobrazení f je tedy spojité (Věta 10. (b) odst. 3.3 str. 36).

(b) Ukážeme, že f není spojité. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ položme $U_n = (-1/n, 1/n)$ a dále položme $U = \prod U_n$; U je element báze topologie silného součinu na množině $\mathbf{R}^\mathbf{N}$. Podobně jako ve cv. 20 dostáváme $f^{-1}(U) = \bigcap f_n^{-1}(U_n) = \bigcap U_n = \{0\}$. U tedy nemá za vzor otevřenou množinu a f nemůže být spojité.

Faktorové prostory

Všude v dalších příkladech uvažujeme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$, množinu $\mathbf{R}^n$ a podmnožiny množiny $\mathbf{R}^n$ s Euklidovou topologií.

22. Ukažte, že faktorový prostor $\mathbf{R}/\!\sim$ podle ekvivalence "$s \sim t$ tehdy a jen tehdy, když existuje celé číslo k tak, že $t = s + 2\pi k$" je homeomorfní s jednotkovou kružnicí $S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ("namotáme přímku na kružnici").

Řešení. Pro každé $z \in \mathbf{R}/\!\sim$, $z = [t]$, klademe $f(z) = (\cos t, \sin t)$, kde t je libovolný reprezentant třídy z. Dostáváme zobrazení $f : \mathbf{R}/\!\sim \to S^1$. f je evidentně bijekce. Ukážeme, že zobrazení f je spojité a otevřené, odkud vyplyne, že je homeomorfismus (Věta 4. odst. 2.1 str. 19).

Označme $g : \mathbf{R} \to S^1$ zobrazení, definované vztahem $g(t) = (\cos t, \sin t)$. g vzniká zúžením oboru hodnot spojitého zobrazení a je tedy spojité; g je evidentně otevřené zobrazení (Věta 3. (a) odst. 2.1 str. 18). Označme $\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\!\sim$ faktorovou projekci. Platí $g = f \circ \pi$, takže zobrazení f musí být spojité (Věta 11. odst. 2.4 str. 21). Dále pro libovolnou otevřenou množinu $U \subset \mathbf{R}/\!\sim$

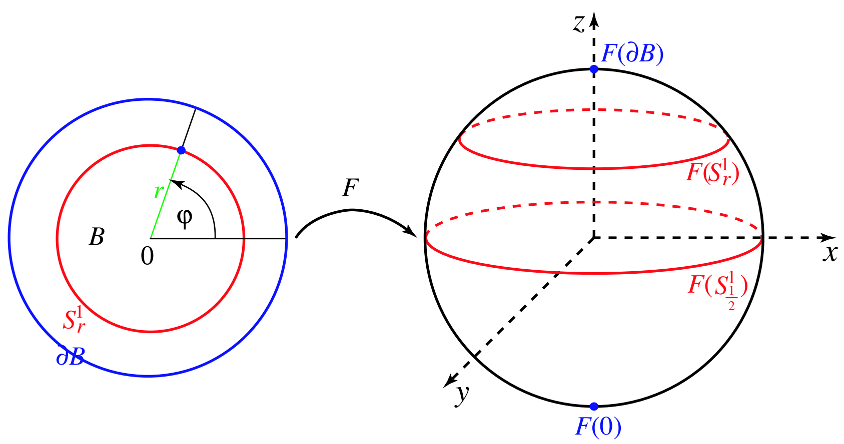
existuje otevřená množina $V \subset \mathbf{R}$ taková, že $U = \pi(V)$. Přitom $f(U) = f \circ \pi(V) = g(V)$, což je otevřená množina. (Možno použít též Větu 19. odst. 3.5 str. 42).

Vezmeme-li místo množiny $\mathbf{R}$ interval $[0, 2\pi]$ a postupujeme analogicky, dojdeme k faktorovému prostoru $[0, 2\pi]/\sim$, jehož jedinou vícebodovou třídou je dvouprvková množina $\{0, 2\pi\}$, a k homeomorfismu $f : [0, 2\pi]/\sim \to S^1$ ("ztotožnění" okrajových bodů intervalu $[0, 2\pi]$).

23. Buď B uzavřený jednotkový kruh v $\mathbf{R}^2$ se středem v počátku, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Uvažujme rozklad množiny B, sestávající ze všech jednobodových množin $\{(x, y)\}$ takových, že $x^2 + y^2 < 1$, a z množiny $\partial B = S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Označme $\sim$ ekvivalenci, definovanou tímto rozkladem. Ukažte, že faktorový prostor $B/\sim$ je homeomorfní s topologickým prostorem $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, t.j. s dvojrozměrnou sférou (okraj kruhu v $\mathbf{R}^2$ "stáhneme do bodu", t.j. ztotožníme s bodem).

Řešení. Bodu $(x, y) \in B$ přiřadíme jeho polární souřadnice r, φ tak, aby platilo $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ a bod $F(x, y) \in S^2$ vztahem $F(x, y) = (\cos\varphi \cdot \sin\pi r, \sin\varphi \cdot \sin\pi r, -\cos\pi r)$. Dostáváme zobrazení $F : B \to S^2$, pro které platí $F(0, 0) = (0, 0, -1)$, $F(\partial B) = (0, 0, 1)$, $F(S^1_{1/2}) = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z = 0\}$, kde $S^1_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ (porov. obr. 9). Hledaný homeomorfismus má tvar $B/\sim \ni [(x, y)] \to f([(x, y)]) = F(x, y) \in S^2$. Zobrazení f je zřejmě bijektivní; jeho spojitost a otevřenost dostaneme ze vztahu $F = f \circ \pi$, kde $\pi : B \to B/\sim$ je faktorová projekce, analogicky jako ve cv. 22.

Obr. 9



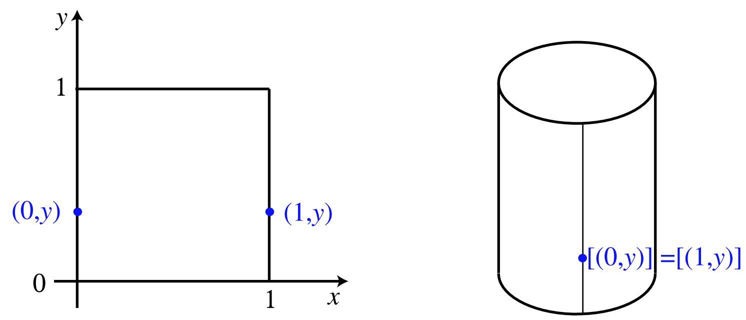
24. Buď $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ uzavřený jednotkový čtverec v rovině $\mathbf{R}^2$. Ukažte, že následující dva topologické prostory jsou homeomorfní:

(1) faktorový prostor $X/\sim$ podle ekvivalence "$(x, y) \sim (x', y')$, jestliže $(x, y) = (x', y')$ nebo $x = 0$, $x' = 1$, $y = y'$",

(2) podprostor $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ z \in [0, 1]\} \subset \mathbf{R}^3$ (*válec* o poloměru 1 a výšce 1).

Řešení. Situace je znázorněna na obr. 10; faktorizace v tomto případě znamená "slepení" levého a pravého okraje čtverce.

Obr. 10



Podobně jako ve cv. 22 lze ukázat, že zobrazení $f : X/\!\sim \to C$, definované vztahem $f([(x, y)]) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, y)$, je homeomorfismus.

25. (*Möbiova páska*) Buď $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ uzavřený jednotkový čtverec v $\mathbf{R}^2$. Ukažte, že následující dva topologické prostory jsou homeomorfní:

(1) faktorový prostor $X/\!\sim$ podle ekvivalence "$(x, y) \sim (x', y')$, jestliže $(x, y) = (x', y')$ nebo $x = 0$, $x' = 1$, $y' = 1 - y$ nebo $x = 1$, $x' = 0$, $y' = 1 - y$",

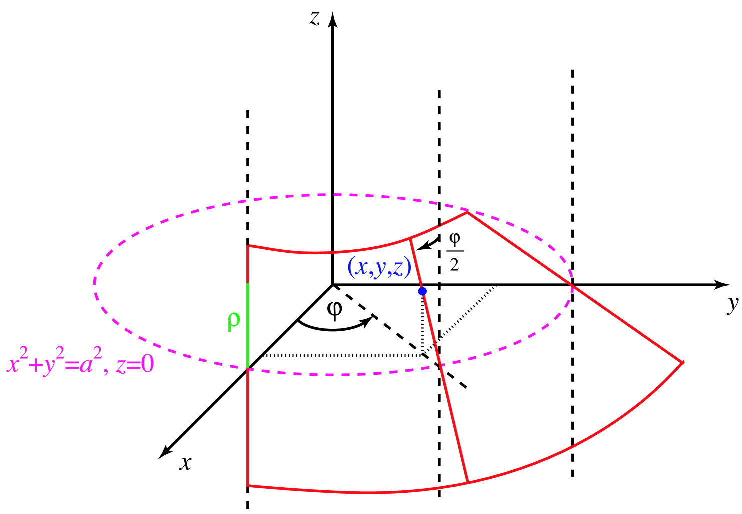
(2) topologický podprostor $M_{a,b}$ Euklidova topologického prostoru $\mathbf{R}^3$, definovaný v parametrickém tvaru pomocí rovnic

$$x = (a - \rho \sin(\varphi/2)) \cos \varphi,$$
$$y = (a - \rho \sin(\varphi/2)) \sin \varphi,$$
$$z = \rho \cos(\varphi/2),$$

kde $\rho \in [-b, b]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $a, b \in \mathbf{R}$ jsou čísla taková, že $0 < b \leq a$ (*Möbiova páska* o poloměru a a šířce $2b$).

Řešení. Množina $M_{a,b}$ vzniká rotací úsečky kolem osy z po kružnici o poloměru a se středem v počátku roviny xy; přitom při otočení o úhel φ se přímka, ve které úsečka leží, odkloní od osy z o úhel $\varphi/2$ (viz obr. 11).

Obr. 11



Vhodnější parametrizaci množiny $M_{a,b}$ dostaneme, když položíme

$$\eta = \frac{\rho}{a}.$$

Pak bude platit

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= a\,(1-\eta\sin(\varphi/2))\cos\varphi,\\ y &= a\,(1-\eta\sin(\varphi/2))\sin\varphi,\\ z &= a\eta\cos(\varphi/2), \end{aligned}$$

kde $\eta \in [-b/a, b/a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Situace ze zadání příkladu je znázorněna na obr. 12. Místo čtverce X lze uvažovat s ním homeomorfní obdénmík $X' = [-b/a, b/a] \times [0, 2\pi]$. Faktorizace v uvažovaném případě znamená přiblížení kratších stran obdélníka X' k sobě, otočení jedné z nich kolem osy obdélníka o úhel π a posléze jejich "slepení". Označme $F : X' \to \mathbf{R}^3$ zobrazení, definované rovnicemi (1). Ukážeme, že uvažovaná faktorizace obdélníka X' je totožná s faktorizací, asociovanou se zobrazením F.

Označme $\mathscr{R}_F$ ekvivalenci, asociovanou s F. Podle definice $(\eta, \varphi)\mathscr{R}_F(\eta', \varphi')$ tehdy a jen tehdy, když

$$(2)\qquad \begin{aligned} &(1-\eta\sin(\varphi/2))\cos\varphi = (1-\eta'\sin(\varphi'/2))\cos\varphi',\\ &(1-\eta\sin(\varphi/2))\sin\varphi = (1-\eta'\sin(\varphi'/2))\sin\varphi',\\ &\eta\cos(\varphi/2) = \eta'\cos(\varphi'/2). \end{aligned}$$

Předpokládejme, že máme ekvivalentní body (η, φ), $(\eta', \varphi') \in X'$. Umocněním a sečtením dostáváme z prvních dvou podmínek (2) vztah

$$(1-\eta\sin(\varphi/2))^2 = (1-\eta'\sin(\varphi'/2))^2.$$

Body (η, φ), (η', φ') tedy splňují alespoň jednu z podmínek

$$(3)\qquad 1-\eta\sin(\varphi/2) = 1-\eta'\sin(\varphi'/2),$$

$$(4)\qquad 1-\eta\sin(\varphi/2) = -1+\eta'\sin(\varphi'/2).$$

Předpokládejme, že je splněna podmínka (3). Pak $\eta\sin(\varphi/2) = \eta'\sin(\varphi'/2)$. Spolu se třetí z podmínek (2) to dává $\eta^2 = \eta'^2$, takže buď $\eta = \eta'$ nebo $\eta = -\eta'$.

Je-li splněna podmínka (3) a $\eta = \eta'$, pak třetí z podmínek (2) dává buď $\eta = \eta' = 0$ nebo $\cos(\varphi/2) = \cos(\varphi'/2)$. V prvním případě systém (2) vede na podmínky $\cos\varphi = \cos\varphi'$, $\sin\varphi = \sin\varphi'$; druhá z nich implikuje $\varphi, \varphi' \in [0, \pi]$ nebo $\varphi, \varphi' \in (\pi, 2\pi]$ a v obou z těchto případů první podmínka dává $\varphi = \varphi'$. Ve druhém případě $\cos(\varphi/2) = \cos(\varphi'/2)$ ihned dostáváme $\varphi = \varphi'$. Je-li tedy splněna podmínka (3) a platí $\eta = \eta'$, pak nutně $\varphi = \varphi'$.

Nechť je splněna podmínka (3) a platí $\eta = -\eta' \neq 0$. Pak třetí z podmínek (2) dává $\cos(\varphi/2) = -\cos(\varphi'/2)$, což je možné jen když $\varphi' = 2\pi - \varphi$. První dvě z podmínek (2) pak dostávají tvar

$$\sin(\varphi/2)\cdot\cos\varphi = 0, \qquad \sin\varphi = 0.$$

Druhá z těchto podmínek dává $\varphi = 0, \pi, 2\pi$; řešení $\varphi = 0, 2\pi$ vyhovují také první podmínce, zatímco řešení $\varphi = \pi$ první podmínce nevyhovuje. Pro $\eta = -\eta'$ tedy $\varphi = 0$, $\varphi' = 2\pi$ nebo $\varphi = 2\pi$, $\varphi' = 0$. Celkově tedy splňují-li body (η, φ), (η', φ') podmínku (3) a platí $\eta = -\eta'$, pak

$$(5)\qquad (\eta, \varphi) = (\eta, 0), \quad (\eta', \varphi') = (-\eta, 2\pi)$$

nebo

$$(6)\qquad (\eta, \varphi) = (\eta, 2\pi), \quad (\eta', \varphi') = (-\eta, 0).$$

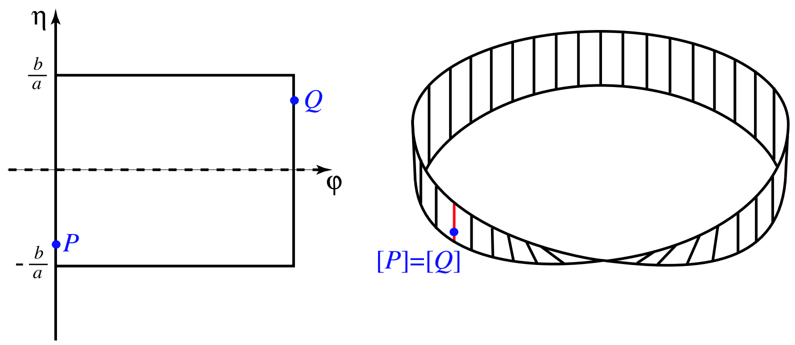
Předpokládejme, že body (η, φ), (η', φ') splňují podmínku (4)

$$\eta \sin(\varphi/2) + \eta' \sin(\varphi'/2) = 2.$$

Pak musí platit $\eta = \eta' = \sin(\varphi/2) = \sin(\varphi'/2) = 1$, t.j. $b = a$, $\varphi = \varphi' = \pi$ a tedy $(\eta, \varphi) = (\eta', \varphi') = (1, \pi)$.

Celkově dostáváme, že jsou-li body (η, φ), (η', φ') ekvivalentní, pak jsou buď totožné nebo splňují jednu z podmínek (5), (6). Jediné netriviální třídy ekvivalence $\mathscr{R}_f$ jsou tedy dvouprvkové třídy tvaru $\{(\eta, 0), (-\eta, 2\pi)\}$ pro $\eta \in [-b/a, b/a]$; znamená to ovšem, že ekvivalence $\mathscr{R}_f$ je totožná s ekvivalencí $\sim$ (porov. obr. 12).

Obr. 12



Topologické prostory $X'/\!\sim$, $M_{a,b}$ jsou tedy v bijekci. Zbývá dokázat, že jsou homeomorfní. Uvažujme faktorovou projekci $\pi_F : X' \to X'/\mathscr{R}_f$, kanonické vložení $\iota : F(X') \to \mathbf{R}^3$, kde $F(X') = M_{a,b}$, a kanonický rozklad $F = \iota \circ g \circ \pi_F$ zobrazení F. Chceme ukázat, že g je homeomorfismus. Stačí prověřit, že pro libovolnou otevřenou množinu $U \subset X'$ takovou, že $U = \pi_F^{-1}(\pi_F(U))$, je množina $F(U) \subset M_{a,b}$ otevřená (v indukované topologii). (Věta 18. odst. 3.5 str. 41).

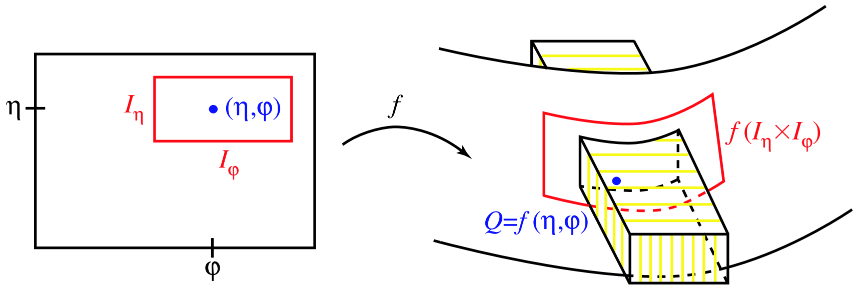
Mějme otevřenou množinu $U \subset X'$ splňující podmínku $U = \pi_F^{-1}(\pi_F(U))$. U obsahuje s každým bodem $(\eta, 0)$ (resp. $(-\eta, 2\pi)$) také bod $(-\eta, 2\pi)$ (resp. $(\eta, 0)$). Buď $Q \in F(U)$ libovolný bod, $Q = F(\eta, \varphi)$. Pak

$$F^{-1}(Q) = \begin{cases} \{(\eta, \varphi)\}, & \varphi \neq 0, 2\pi, \\ \{(\eta, 0), (-\eta, 2\pi)\}, & \varphi = 0, \\ \{(\eta, 2\pi), (-\eta, 0)\}, & \varphi = 2\pi. \end{cases}$$

Přitom z podmínky $U = \pi_F^{-1}(\pi_F(U))$ vyplývá $F^{-1}(Q) \subset U : Q \in \iota g \pi_F(U)$, takže $F^{-1}(Q) \subset \pi_F^{-1} g^{-1} \iota^{-1} \iota g \pi_F(U) = \pi_F^{-1}(\pi_F(U)) = U$, přičemž jsme využili injektivnost ι a bijektivnost g.

Nechť $\varphi \neq 0, 2\pi$ a nechť např. $\eta \in (-b/a, b/a)$. Z toho, že množina U je otevřená, vyplývá, že existuje otevřený interval I_η obsahující η a otevřený interval I_φ obsahující φ tak, že $I_\eta \times I_\varphi \subset U$. Je zřejmé, že existuje otevřený kvádr $K \subset \mathbf{R}^3$ obsahující bod $F(\eta, \varphi)$ tak, že $K \cap F(X') \subset F(I_\eta \times I_\varphi) \subset F(U)$ (obr. 13).

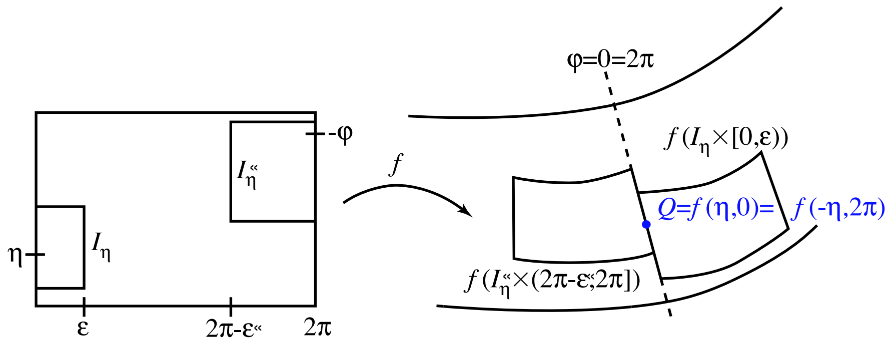
Obr. 13



Je-li např. $\eta = b/a$, místo I_η bereme zleva otevřený zprava uzavřený interval s pravým koncem b/a.

Nechť $\varphi = 0$ a nechť pro určitost $\eta \in (-b/a, b/a)$. Pak existuje otevřený interval I_η obsahující η a $\varepsilon > 0$ tak, že $I_\eta \times [0, \varepsilon) \subset U$. Zároveň existuje otevřený interval I'_η obsahující bod $-\eta$ a $\varepsilon' > 0$ tak, že $I'_\eta \times (2\pi - \varepsilon', 2\pi] \subset U$, t.j. celkově $(I_\eta \times [0, \varepsilon)) \cup (I'_\eta \times (2\pi - \varepsilon', 2\pi]) \subset U$. Opět tedy existuje otevřený kvádr $K \subset \mathbf{R}^3$ obsahující bod $F(\eta, 0) = F(-\eta, 2\pi)$ tak, že $K \cap F(X') \subset F((I_\eta \times [0, \varepsilon)) \cup (I'_\eta \times (2\pi - \varepsilon', 2\pi])) \subset F(U)$ (obr. 14).

Obr. 14



Zbývající případy se vyšetří stejně.

Ke každému $Q \in F(U)$ tedy existuje otevřený kvádr $K \subset \mathbf{R}^3$ obsahující Q tak, že $K \cap F(X') \subset F(U)$ a množina $F(U) \subset F(X') = M_{a,b}$ je otevřená v indukované topologii, což jsme chtěli dokázat. Podle Věty 18. odst. 3.5 str. 41 to ovšem znamená, že zobrazení $g : X'/{\sim} \to M_{a,b}$ je homeomorfismus.

Poznamenáváme, že z rovnic (1) lze vyloučit parametry η, φ. Předpokládejme nejdříve, že $y \neq 0$. Pak $x^2 + y^2 > 0$ a z prvních dvou rovnic snadno dostaneme vztahy

$$\text{(7)} \qquad \cos^2 \varphi = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \qquad \sin^2 \varphi = \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \qquad \sin 2\varphi = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Užitím všech tří rovnic (1) pak dostaneme

$$\text{(8)} \qquad \eta = \left(1 - \frac{x}{a} \cos \varphi - \frac{y}{a} \sin \varphi\right) \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{z}{a} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Vztahy (7), (8) umožní vyloučit parametry ze třetí z rovnic (1). Přímým výpočtem dostáváme rovnici

$$\text{(9)} \qquad y^3 + 2zy^2 + \left(x^2 + z^2 - a^2\right) y + 2xz(x - a) = 0.$$

Snadno lze ovšem ukázat, že bod $(x, 0, z)$, který má vyjádření ve tvaru (1), také splňuje rovnici (9). Möbiova páska $M_{a,b}$ tedy leží na ploše o rovnici (9).

26. (*Toroid*) Buď $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x, y \le 1\}$ uzavřený jednotkový čtverec v $\mathbf{R}^2$. Ukažte, že následující tři topologické prostory jsou homeomorfní:

(1) faktorový prostor $X/\sim$ podle ekvivalence "$(x, y) \sim (x', y')$, jestliže $(x, y) = (x', y')$ nebo $x = 0$, $x' = 1$, $y = y'$ nebo $y = 0$, $y' = 1$, $x = x'$",

(2) topologický podprostor T^2 Euklidova topologického prostoru $\mathbf{R}^3$, definovaný v parametrickém tvaru pomocí rovnic

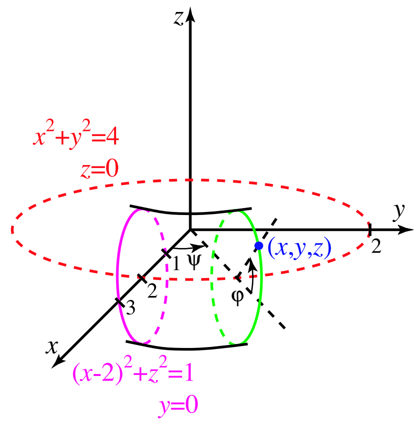
$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= (2 + \cos\varphi)\cos\psi, \\ y &= (2 + \cos\varphi)\sin\psi, \\ z &= \sin\varphi, \end{aligned}$$

kde φ, $\psi \in [0, 2\pi]$ (*toroid* s hlavní kružnicí v rovině xy o poloměru 2 a s vedlejší kružnicí o poloměru 1),

(3) součin $S^1 \times S^1$, kde S^1 je jednotková kružnice.

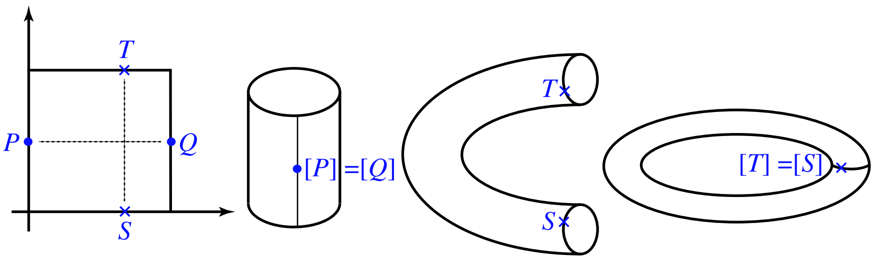
Ř e š e n í. Množina T^2 vzniká rotací kružnice o rovnici $(x - 2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, kolem osy z; střed této kružnice se přitom pohybuje v rovině xy po kružnici $x^2 + y^2 = 4$ (viz obr. 15).

Obr. 15



Situace ze zadání příkladu je znázorněna na obr. 16. Faktorizace zde znamená "slepení" levého a pravého okraje a zároveň horního a dolního okraje čtverce X.

Obr. 16



Místo čtverce X lze uvažovat s ním homeomorfní čtverec $X' = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Označme $F : X' \to \mathbf{R}^3$ zobrazení, definované rovnicemi (1). Dále označme $\mathscr{R}_F$ ekvivalenci, asociovanou s F.

Podle definice $(\varphi,\psi)\ \mathscr{R}_F\ (\varphi',\psi')$ tehdy a jen tehdy, když

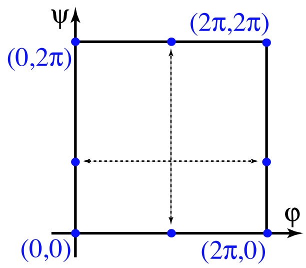
$$\begin{aligned}&(2+\cos\varphi)\cos\psi = (2+\cos\varphi')\cos\psi',\\&(2+\cos\varphi)\sin\psi = (2+\cos\varphi')\sin\psi',\\&\sin\varphi = \sin\varphi'.\end{aligned}$$

Předpokládejme, že máme ekvivalentní body (φ,ψ), $(\varphi',\psi')\in X'$. Podobně jako ve cv. 25 dostaneme kromě triviálního řešení $(\varphi,\psi)=(\varphi',\psi')$ ještě řešení

$$\begin{array}{ll}(\varphi,\psi)=(0,\psi), & (\varphi',\psi')=(2\pi,\psi),\\(\varphi,\psi)=(2\pi,\psi), & (\varphi',\psi')=(0,\psi),\\(\varphi,\psi)=(\varphi,0), & (\varphi',\psi')=(\varphi,2\pi),\\(\varphi,\psi)=(\varphi,2\pi), & (\varphi',\psi')=(\varphi,0),\\(\varphi,\psi)=(0,0), & (\varphi',\psi')=(2\pi,2\pi),\\(\varphi,\psi)=(2\pi,0), & (\varphi',\psi')=(0,2\pi),\\(\varphi,\psi)=(0,2\pi), & (\varphi',\psi')=(2\pi,0),\\(\varphi,\psi)=(2\pi,2\pi), & (\varphi',\psi')=(0,0).\end{array}$$

(jedno řešení na každém řádku). Ekvivalence $\mathscr{R}_F$ tedy definuje rozklad množiny X' na tyto třídy: $\{(\varphi,\psi)\}$, $\{(0,\psi)\},(2\pi,\psi)\}$, $\{(\varphi,0),(\varphi,2\pi)\}$, $\{(0,0),(2\pi,0),(0,2\pi),(2\pi,2\pi)\}$. Tento rozklad je znázorněn na obr. 17.

Obr. 17



Analogicky jako ve cv. 25 ukážeme, že T^2 je homeomorfní s $X'/\mathscr{R}_F$. Mějme otevřenou množinu $U\subset X'$ splňující podmínku $U=\pi_F^{-1}(\pi_F(U))$, kde $\pi_F : X'\to X'/\mathscr{R}_F$ je faktorová projekce. Buď $Q\in F(U)$ libovolný bod, $Q=F(\varphi,\psi)$. Pak

$$F^{-1}(Q)=\begin{cases}\{(\varphi,\psi)\}, & \varphi,\psi\neq 0,\ 2\pi,\\ \{(\varphi,0),(\varphi,2\pi)\}, & \varphi\neq 0,\ 2\pi,\\ \{(0,\psi),(2\pi,\psi)\}, & \psi\neq 0,\ 2\pi,\\ \{(0,0),\ (2\pi,0),\ (0,2\pi),\ (2\pi,2\pi)\}\end{cases}$$

a $F^{-1}(Q)\subset U$. Podobně jako ve cv. 25 se ukáže, že množina $F(U)$ je otevřená v indukované topologii na T^2. Z Věty 18. odst. 3.5 str. 41 nyní dostaneme, že zobrazení $g : X'/\mathscr{R}_F\to T^2$, definované kanonickým rozkladem $F=\iota\circ g\circ\pi_F$, kde $\iota : T^2\to\mathbf{R}^3$ je kanonické vložení, je homeomorfismus.

Ukážeme, že T^2 je homeomorfní se součinem $S^1\times S^1$. Bylo již ukázáno, že T^2 je homeomorfní s $X'/\mathscr{R}_F$. Podle cv. 22 je dále S^1 homeomorfní s faktorovým prostorem $[0,2\pi]/\!\sim$, kde $\sim$ je ekvivalence, jejíž jedinou víceprvkovou třídou je dvouprvková množina $\{0,2\pi\}$. Stačí tedy ukázat, že jsou homeomorfní prostory $Y=[0,2\pi]/\!\sim\times[0,2\pi]/\!\sim$ a $X'/\mathscr{R}_F$.

Faktorový prostor $[0,2\pi]/\sim$ obsahuje třídy $[\varphi]=\{\varphi\}$, $[0]=[2\pi]=\{0,2\pi\}$; součin $Y=[0,2\pi]/\sim\ \times[0,2\pi]/\sim$ tedy obsahuje uspořádané dvojice $(\{\varphi\},\{\psi\})$, $(\{\varphi\},\{0,2\pi\})$,

$(\{0,2\pi\},\{\psi\})$, $(\{0,2\pi\},\{0,2\pi\})$. Pro třídy $[\varphi]$, $[\psi]$ klademe $h([\varphi],[\psi]) = [(\varphi,\psi)]$, kde $[(\varphi,\psi)]$ je třída prvku (φ,ψ) v $X'/\mathscr{R}_F$. Snadno lze prověřit, že vzniká (korektně definované) zobrazení $h : Y \to X'/\mathscr{R}_F$. Označme $\tau : [0,2\pi] \to [0,2\pi]/\!\sim$ faktorovou projekci. Pak $h \circ (\tau \times \tau) = \pi_F$, t.j. diagram

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "\tau\times\tau"'] \arrow[dr, "\pi_F"] & \\ Y \arrow[rr, "h"] & & X'/\mathscr{R}_F \end{tikzcd}$$

komutuje. h je bijekce a z otevřenosti $\tau \times \tau$ a π_F vyplývá otevřenost h a h^{-1}. To ovšem znamená, že h je homeomorfismus.

Poznamenáváme, že parametrické rovnice toroidu (1) lze upravit na ekvivalentní neparametrickou rovnici toroidu

$$(x^2+y^2+z^2+3)^2 = 16(x^2+y^2). \tag{2}$$

27. Nechť $0 < b < a$ a uvažujme Möbiovu pásku $M_{a,b} \subset \mathbf{R}^3$ o rovnicích

$$x = a\,(1-\eta\sin(\varphi/2))\cos\varphi, \tag{1a}$$
$$y = a\,(1-\eta\sin(\varphi/2))\sin\varphi, \tag{1b}$$
$$z = a\eta\cos(\varphi/2), \tag{1c}$$

kde (η,φ) probíhá uzavřený obdélník $X = [-b/a, b/a] \times [0,2\pi]$. Označme $F : X \to \mathbf{R}^3$ zobrazení, definované rovnicemi (1a) – (1c).

(a) Označme $U = [-b/a,b/a] \times (0,2\pi)$, $U_1 = [-b/a,b/a] \times [0,\pi)$, $U_2 = [-b/a,b/a] \times (\pi,2\pi]$, $V = F(U)$, $V_1 = F(U_1)$, $V_2 = F(U_2)$. Ukažte, že zobrazení $F|_U : U \to V$, $F|_{U_1} : U_1 \to V_1$, $F|_{U_2} : U_2 \to V_2$ jsou homeomorfismy v indukovaných topologiích.

(b) Nalezněte spojité řezy $s : V \to X$, $s_1 : V_1 \to X$, $s_2 : V_2 \to X$ zobrazení F.

(c) Ukažte, že nelze najít otevřené pokrytí $(V_\iota)_{\iota\in I}$ topologického prostoru $M_{a,b}$ takové, že pro každé $\iota \in I$ existuje spojitý řez $s_\iota : V_\iota \to X$ zobrazení F.

(d) Pomocí homeomorfismů $F|_U$, $F|_{U_1}$, $F|_{U_2}$ zkonstruovaných v (a) ukažte, že zobrazení $g : X/\mathscr{R}_F \to M_{a,b}$, definované kanonickým rozkladem $F = \iota \circ g \circ \pi_F$ zobrazení F, je homeomorfismus.

Řešení. (a) Buď $(\eta,\varphi) \in X$ libovolný bod, $F(\eta,\varphi) = (x,y,z)$. Z předpokladu $0 < b < a$ vyplývá $b/a < 1$ a tedy

$$1 - \eta\sin(\varphi/2) > 0. \tag{2}$$

Z (1a) a (1b) tak dostaneme

$$x^2 + y^2 > 0, \tag{3}$$
$$a\,(1-\eta\sin(\varphi/2)) = \sqrt{x^2+y^2}, \tag{4}$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{5}$$

Uvažujeme zobrazení $F|_U : U \to V$. Z definice Möbiovy pásky vyplývá, že $V = M_{a,b} \cap (\mathbf{R}^3 \backslash \{(x',y',z') \in \mathbf{R}^3 \mid x' \geq 0,\ y' = 0\}$, takže $V \subset M_{a,b}$ je otevřená množina v přirozené topologii na $M_{a,b}$. Dále $\sin(\varphi/2) > 0$, jelikož $\varphi \in (0,2\pi)$. Platí tedy podle (5)

$$\sin(\varphi/2) = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}. \tag{6}$$

Z rovnic (1a) a (1b) již nyní snadno dostaneme vztah

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{a - \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}. \tag{7}$$

Dále dostáváme

$$\cos(\varphi/2) = \frac{\sin\varphi}{2\sin(\varphi/2)} = \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}},$$

odkud

$$\varphi = 2\arccos \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}. \tag{8}$$

Zobrazení F je spojité a tedy zúžení $F|_U$ je také spojité. Vztahy (7) a (8) ukazují, že $F|_U : U \to V$ je bijekce. Ukážeme, že zobrazení $(F|_U)^{-1}$ je spojité. Položme $G = (\eta, \varphi)$, kde η, φ uvažujeme jako funkce na množině $\mathbf{R}^3 \backslash \{(x', y', z') \in \mathbf{R}^3 \mid x' \geq 0, y' = 0\}$, definované pomocí (7), (8). Jelikož složky zobrazení G jsou spojité, samotné zobrazení G je také spojité. Ovšem $G|_V = (F|_V)^{-1}$, takže $(F|_V)^{-1}$ je spojité zobrazení, což jsme chtěli dokázat. Tím je již dokázáno, že zobrazení $F|_U : U \to V$ je homeomorfismus.

Podobně pro libovolný bod $(\eta, \varphi) \in U_1$ a jeho obraz $F(\eta, \varphi) = (x, y, z)$ platí, jelikož $\cos(\varphi/2) > 0$,

$$\cos(\varphi/2) = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}. \tag{9}$$

Z (1c) pak dostaneme

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{z}{\sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}. \tag{10}$$

Zároveň zřejmě

$$\varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{11}$$

Položíme-li $G_1 = (\eta, \varphi)$, kde η, φ uvažujeme jako funkce na otevřené množině $\mathbf{R}^3 \backslash \{(x', y', z') \in \mathbf{R}^3 \mid x' \leq 0, y' = 0\}$, definované rovnicemi (9), (10), podobně jako výše snadno vyvodíme, že $G_1|_{V_1} = (F|_{U_1})^{-1}$ a že $F|_{U_1}$ je homeomorfismus v indukovaných topologiích.

Pro libovolný bod $(\eta, \varphi) \in U_2$ a jeho obraz $F(\eta, \varphi) = (x, y, z)$ platí, jelikož $\cos(\varphi/2) < 0$.

$$\cos(\varphi/2) = -\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}. \tag{12}$$

Z (1c) dostaneme

$$\eta = -\frac{\sqrt{2}}{a} \frac{z}{\sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}. \tag{13}$$

Zároveň zřejmě

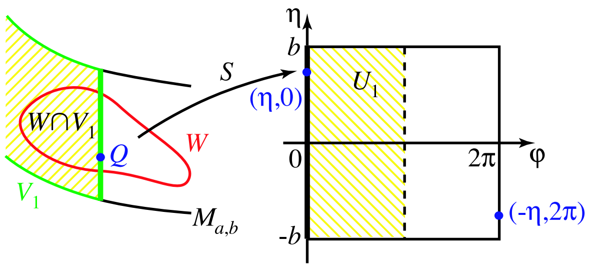
$$\varphi = 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{14}$$

Položíme $G_2 = (\eta, \varphi)$ a uvažujeme η, φ jako funkce na otevřené množině $\mathbf{R}^3 \backslash \{(x', y', z') \in \mathbf{R}^3 \mid x' \leq 0, y' = 0\}$, definované rovnicemi (13), (14). Z definice zobrazení G_2 vyplývá, že $G_2|_{V_2} = (F|_{U_2})^{-1}$, a nyní už snadno nahlédneme, že $F|_{U_2}$ je homeomorfismus v indukovaných topologiích.

(b) Klademe $s = (F|_U)^{-1}$, $s_1 = (F|_{U_1})^{-1}$, $s_2 = (F|_{U_2})^{-1}$. Řez s je definován na otevřené množině, definiční obory řezů s_1, s_2 nejsou otevřené množiny.

(c) Stačí dokázat, že existuje bod $Q \in M_{a,b}$ s vlastností, že libovolný řez zobrazení F, definovaný na okolí Q, je nespojitý. Nechť $Q = F(\eta, 0) = F(-\eta, 2\pi)$, nechť W je okolí bodu Q v přirozené topologii na $M_{a,b}$ a nechť $s : W \to X$ je řez. Pak $s^{-1}(U_1) = \{P \in W \mid s(P) \in U_1\} = W \cap V_1$ jelikož $F(s(P)) = P$. Množina $W \cap V_1$ zřejmě není otevřená v přirozené topologii na $M_{a,b}$ (viz obr. 18).

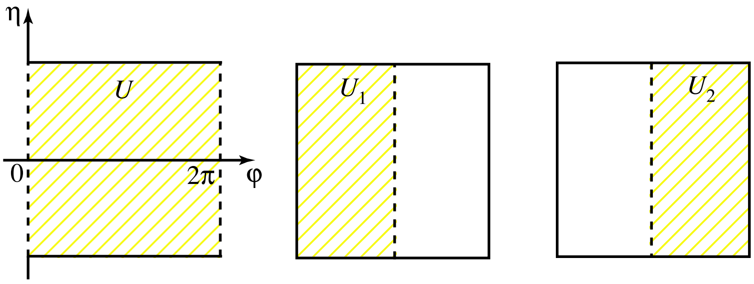
Obr. 18



(d) K důkazu, že zobrazení $g : X/\mathscr{R}_f \to M_{a,b}$ je homeomorfismus, použijeme Větu 18. odst. 3.5 str. 41. Buď $W \subset X$ F-nasycená otevřená množina. Chceme ukázat, že množina $F(W) \subset M_{a,b}$ je otevřená v přirozené topologii. K tomu stačí vyjádřit $F(W)$ jako sjednocení otevřených množin.

Uvažujme množiny U, U_1, U_2, zavedené výše. Tyto množiny jsou schematicky znázorněny na obr. 19.

Obr. 19



Množinu W lze vyjádřit ve tvaru $W = (U \cap W) \cup (U_1 \cap W) \cup (U_2 \cap W)$. Ovšem $F|_U : U \to V$ je homeomorfismus na otevřenou množinu $V \subset M_{a,b}$. Jelikož $F(W) = F(U \cap W) \cup F(U_1 \cap W) \cup F(U_2 \cap W)$ a množina $F(U \cap W)$ je otevřená, stačí dokázat, že množina $F(U_1 \cap W) \cup F(U_2 \cap W)$ je otevřená.

Množina $V_1 \cup V_2 = M_{a,b} \backslash \{(x', y', z') \in M_{a,b} \mid x' \leq 0, y' = 0\}$ je zřejmě otevřená. Z toho, že $F|_{U_1} : U_1 \to V_1$, $F|_{U_2} : U_2 \to V_2$ jsou homeomorfismy, tedy vyplývá, že množiny $F(U_1 \cap W) \subset V_1$, $F(U_2 \cap W) \subset V_2$ jsou otevřené v topologických podprostorech $M_{a,b}$ a tedy existují otevřené množiny

$\bar{V}_1$, $\bar{V}_2 \subset V_1 \cup V_2 \subset M_{a,b}$ tak, že platí

$$(15) \qquad F(U_1 \cap W) = V_1 \cap \bar{V}_1, \quad F(U_2 \cap W) = V_2 \cap \bar{V}_2.$$

Pro množiny $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$ platí

$$(16) \qquad \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \subset (V_1 \cap \bar{V}_1) \cup (V_2 \cap \bar{V}_2).$$

Skutečně, nechť $Q \in \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2$. Jelikož $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \subset V_1 \cup V_2$, buď $Q \in V_1$, t.j. $Q \in \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \cap V_1 \subset V_1 \cap \bar{V}_1$, nebo $Q \in V_2$, t.j. $Q \in \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \cap V_2 \subset V_2 \cap \bar{V}_2$.

Napišme nyní V_1, V_2 ve tvaru

$$(17) \qquad V_1 = (V \cap V_1) \cup (V_1 \cap V_2), \quad V_2 = (V \cap V_2) \cup (V_1 \cap V_2).$$

Pak

$$(18) \qquad \begin{aligned} F(U_1 \cap W) \cup F(U_2 \cap W) &= (V_1 \cap \bar{V}_1) \cup (V_2 \cap \bar{V}_2) = (V_1 \cap \bar{V}_1) \\ &\cup (V_2 \cap \bar{V}_2) \cup (\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2) = (V \cap V_1 \cap \bar{V}_1) \cup (V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_1) \\ &\cup (V \cap V_2 \cap \bar{V}_2) \cup (V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_2) \cup (\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2). \end{aligned}$$

Z F-nasycenosti množiny W ovšem vyplývá, že $V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_1 = V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_2$. Platí tedy

$$(19) \qquad V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_1 = V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_2 \subset \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2$$

a z (18) dostáváme

$$(20) \qquad F(U_1 \cap W) \cup F(U_2 \cap W) = (V \cap V_1 \cap \bar{V}_1) \cup (V \cap V_2 \cap \bar{V}_2) \cup (\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2).$$

Množiny $V \cap V_1$, $V \cap V_2$ jsou ovšem homeomorfní obrazy otevřených množin vzhledem k homeomorfismu $F|_U$. Na pravé straně (20) tedy dostáváme sjednocení otevřených množin, což jsme chtěli ukázat.

28. Nechť $0 < b < a$. *Kleinovou lahví* o poloměru hlavní kružnice a a poloměru vedlejší kružnice b rozumíme topologický podprostor $K_{a,b} \subset \mathbf{R}^4$, definovaný v parametrickém tvaru pomocí rovnic

$$x = a\left(1 - \frac{b}{a} \sin\psi \sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi, \tag{1a}$$

$$y = a\left(1 - \frac{b}{a} \sin\psi \sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi, \tag{1b}$$

$$z = b \sin\psi \cos\frac{\varphi}{2}, \tag{1c}$$

$$w = b\cos\psi, \tag{1d}$$

kde $\psi \in [-\pi, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Označme $X = [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi]$ a nechť $F : X \to \mathbf{R}^4$ je zobrazení, definované rovnicemi (1a) – (1d). Nechť $\iota : K_{a,b} \to \mathbf{R}^4$ je kanonické vložení, $\pi_F : X \to X/\mathscr{R}_F$, kde $\mathscr{R}_F$ je ekvivalence, asociovaná s F, faktorová projekce. Nechť $g : X/\mathscr{R}_F \to K_{a,b}$ je zobrazení, definované kanonickým rozkladem $F = \iota \circ g \circ \pi_F$ zobrazení F.

(a) Ukažte, že ekvivalence $\mathscr{R}_F$ je totožná s ekvivalencí "$(\psi, \varphi) \sim (\psi', \varphi')$, jestliže $(\psi, \varphi) = (\psi', \varphi')$ nebo $\varphi = 0$, $\varphi' = 2\pi$, $\psi' = -\psi$ nebo $\varphi = 2\pi$, $\varphi' = 0$, $\psi' = -\psi$ nebo $\psi = \pi$, $\psi' = -\pi$, $\varphi' = \varphi$ nebo $\psi = -\pi$, $\psi' = \pi$, $\varphi' = \varphi$".

(b) Ukažte, že g je homeomorfismus.

Řešení. (a) Určíme třídy ekvivalence $\mathscr{R}_F$. K tomu určíme všechny body (ψ, φ), $(\psi', \varphi') \in X$ takové, že $(\psi, \varphi) \neq (\psi', \varphi')$ a $F(\psi, \varphi) = F(\psi', \varphi')$. Všimněme si, že z definice F ihned vyplývají rovnosti.

$$(2) \qquad F(-\pi, \varphi) = F(\pi, \varphi), \quad F(\psi, 0) = F(-\psi, 2\pi),$$

kde $\psi \in [-\pi, \pi]$ a $\varphi \in [0, 2\pi]$ jsou libovolná čísla. V dalším ukážeme, že rovnosti (2) charakterizují všechny třídy ekvivalence $\mathscr{R}_F$; tím bude ovšem prověřeno, že ekvivalence $\mathscr{R}_F$ a $\sim$ na X jsou totožné.

Vyšetříme podmínky

$$\left(1 - \frac{b}{a}\sin\psi\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi = \left(1 - \frac{b}{a}\sin\psi'\sin\frac{\varphi'}{2}\right)\cos\varphi', \tag{3a}$$

$$\left(1 - \frac{b}{a}\sin\psi\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi = \left(1 - \frac{b}{a}\sin\psi'\sin\frac{\varphi'}{2}\right)\sin\varphi', \tag{3b}$$

$$\sin\psi\cos\frac{\varphi}{2} = \sin\psi'\cos\frac{\varphi'}{2}, \tag{3c}$$

$$\cos\psi = \cos\psi'. \tag{3d}$$

Buď $(\psi, \varphi) \in X$ pevně zvolený bod. Zajímají nás řešení (ψ', φ') systému (3a) – (3d) různá od (ψ, φ).

Rovnice (3d) má na intervalu $[-\pi, \pi]$ dvě řešení: 1. $\psi' = \psi$, 2. $\psi' = -\psi$. Ve druhém případě lze předpokládat, že $\psi \neq 0$.

1. Nechť $\psi = \psi'$. Předpokládáme-li navíc, že $\sin\psi \neq 0$, z (3c) ihned dostaneme $\varphi = \varphi'$. Pro $\sin\psi \neq 0$ tedy neexistuje řešení různé od (ψ, φ).

Předpokládejme, že $\sin\psi = 0$. Pak je podmínka (3c) splněna a podmínky (3a), (3b) dostávají tvar

$$\cos\varphi = \cos\varphi', \quad \sin\varphi = \sin\varphi'. \tag{4}$$

Platí-li $\sin\varphi \neq 0$, t.j. $\varphi \neq 0, \pi, 2\pi$, pak $\varphi, \varphi' \in (0, \pi)$ nebo $\varphi, \varphi' \in (\pi, 2\pi)$ a podmínka $\cos\varphi = \cos\varphi'$ ihned dává $\varphi = \varphi'$; v tomto případě tedy také neexistuje řešení různé od (ψ, φ). Uvažujme zbývající případ $\sin\varphi = \sin\varphi' = 0$. Tyto podmínky jsou splněny tehdy a jen tehdy, když $\varphi, \varphi' = 0, \pi, 2\pi$. Podmínka $\cos\varphi = \cos\varphi'$ vede na tato řešení: $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ ($\cos\varphi = \cos\varphi' = 1$), $\varphi = 0$, $\varphi' = 2\pi$ ($\cos\varphi = \cos\varphi' = 1$), $\varphi = \pi$, $\varphi' = \pi$ ($\cos\varphi = \cos\varphi' = -1$), $\varphi = 2\pi$, $\varphi' = 0$ ($\cos\varphi = \cos\varphi' = 1$), $\varphi = 2\pi$, $\varphi' = 2\pi$ ($\cos\varphi = \cos\varphi' = 1$). Dostáváme tedy tato *netriviální* řešení:

$$\begin{aligned}
&(\psi, \varphi) = (0, 0), && (\psi', \varphi') = (0, 2\pi),\\
&(\psi, \varphi) = (0, 2\pi), && (\psi', \varphi') = (0, 0),\\
&(\psi, \varphi) = (-\pi, 0), && (\psi', \varphi') = (-\pi, 2\pi),\\
&(\psi, \varphi) = (-\pi, 2\pi), && (\psi', \varphi') = (-\pi, 0),\\
&(\psi, \varphi) = (\pi, 0), && (\psi', \varphi') = (\pi, 2\pi),\\
&(\psi, \varphi) = (\pi, 2\pi), && (\psi', \varphi') = (\pi, 0).
\end{aligned} \tag{5}$$

(na každém řádku jedno řešení).

2. Nechť $\psi = -\psi'$, $\psi \neq 0$. Dostáváme tyto dvě možnosti: $\psi = \pi, -\pi$ a $\psi \neq \pi, -\pi$.

Nechť $\psi = \pi, -\pi$. V tomto případě je podmínka (3c) splněna a podmínky (3a), (3b) se redukují na podmínky (4). Podobně jako výše dostáváme tato řešení: $(\varphi, \varphi') = (\varphi, \varphi), (0, 0), (0, 2\pi), (\pi, \pi), (2\pi, 0), (2\pi, 2\pi)$. Vynecháním opakujících se řešení tedy dostáváme tato *netriviální* řešení:

$$\begin{aligned}
&(\psi, \varphi) = (\pi, \varphi), && (\psi', \varphi') = (-\pi, \varphi),\\
&(\psi, \varphi) = (\pi, 0), && (\psi', \varphi') = (-\pi, 2\pi),\\
&(\psi, \varphi) = (\pi, 2\pi), && (\psi', \varphi') = (-\pi, 0),\\
&(\psi, \varphi) = (-\pi, \varphi), && (\psi', \varphi') = (\pi, \varphi),\\
&(\psi, \varphi) = (-\pi, 0), && (\psi', \varphi') = (\pi, 2\pi),\\
&(\psi, \varphi) = (-\pi, 2\pi), && (\psi', \varphi') = (\pi, 0).
\end{aligned} \tag{6}$$

(na každém řádku jedno řešení).

Nechť $\psi \neq -\pi, 0, \pi$. V tomto případě (3c) dává vztah $\cos(\varphi/2) = -\cos(\varphi'/2)$ odkud (na intervalu $[0, 2\pi]$) $\varphi' = 2\pi - \varphi$. Vztahy (3a), (3b) se pak redukují na podmínky

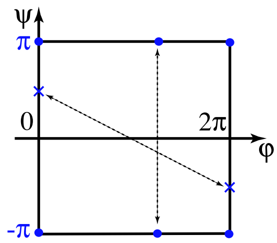
$$\sin\frac{\varphi}{2} = 0, \quad \sin\varphi = 0. \tag{7}$$

Tyto podmínky lze splnit jen pro $\varphi = 0, 2\pi$. Dostáváme tedy dvě *netriviální* řešení

$$(8)\qquad \begin{aligned} (\psi,\varphi) &= (\psi,0), \quad &(\psi',\varphi') &= (-\psi,2\pi),\\ (\psi,\varphi) &= (\psi,2\pi), \quad &(\psi',\varphi') &= (-\psi,0). \end{aligned}$$

Získaná netriviální řešení systému rovnic (3a) – (3d) jsou znázorněna na obr. 20; žádná další netriviální řešení neexistují. Obr. 20 tedy znázorňuje třídy ekvivalence $\mathscr{R}_F$, asociované se zobrazením F. Přímým porovnáním snadno nahlédneme, že tato ekvivalence je totožná s ekvivalencí $\sim$.

Obr. 20



(b) Prověříme, že jsou splněny předpoklady Věty 18. odst. 3.5 str. 41. Buď $W \subset X$ F-nasycená množina. Ukážeme, že množina $F(W) \subset K_{a,b}$ je otevřená v přirozené topologii na $K_{a,b}$. K tomu stačí vyjádřit $F(W)$ jako sjednocení otevřených množin.

Buď $(\psi,\varphi) \in X$ libovolný bod, $F(\psi,\varphi) = (x,y,z,w)$. Z předpokladu $0 < b < a$ vyplývá $b/a < 1$ a tedy

$$(9)\qquad 1 - \frac{b}{a}\sin\psi\sin\frac{\varphi}{2} > 0.$$

Odtud z (1a) a (1b) dostáváme

$$(10)\qquad x^2 + y^2 > 0,$$

$$(11)\qquad a\left(1 - \frac{b}{a}\sin\psi\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$(12)\qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Položme $U = (-\pi,\pi) \times (0,2\pi)$, $V = F(U)$. Ukážeme, že $V \subset K_{a,b}$ je otevřená množina a $F|_U : U \to V$ je homeomorfismus.

Uvažujme rovnice (1a) – (1d). Je zřejmé, že množina $\{(\psi,\varphi) \in X \mid F(\psi,\varphi) \in V\}$ je totožná s množinou bodů $(\psi,\varphi) \in X$, splňujících alespoň jednu z těchto podmínek: a) $\psi = -\pi, \pi$, b) $\varphi = 0$, c) $\varphi = 2\pi$.

Pro $\psi = -\pi, \pi$ (podmínka a)) se rovnice (1a) – (1d) redukují na rovnice

$$(13)\qquad x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = 0, \quad w = -b.$$

Označme

$$(14)\qquad Z_1 = \{(x',y',z',w') \in \mathbf{R}^4 \mid z' = 0,\ w' = -b\}.$$

Body (ψ,φ), splňující podmínku a), se zobrazením F zobrazí do množiny Z_1.

Pro $\varphi = 0$ (podmínka b)) dostávají (1a) – (1d) tvar

$$(15)\qquad x = a, \quad y = 0, \quad z = b\sin\psi, \quad w = b\cos\psi.$$

Označme

$$(16)\qquad Z_2 = \left\{(x',y',z',w') \in \mathbf{R}^4 \mid x' = a,\ y' = 0\right\}.$$

Body (ψ, φ), splňující podmínku b), se zobrazením F zobrazí do množiny Z_2.

Pro $\varphi = 2\pi$ (podmínka c)) dostávají rovnice (1a) – (1d) tvar

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = -b\sin\psi, \quad w = b\cos\psi. \tag{17}$$

Označme

$$Z_3 = \left\{(x', y', z', w') \in \mathbf{R}^4 \mid x' = a, y' = 0\right\}. \tag{18}$$

Body (ψ, φ), splňující podmínku c), se zobrazením F zobrazí do množiny Z_3. Zřejmě $Z_3 = Z_2$ a

$$V = K_{a,b} \cap \left(\mathbf{R}^4 \setminus (Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3)\right) = K_{a,b} \cap \left(\mathbf{R}^4 \setminus Z_1\right) \cap \left(\mathbf{R}^4 \setminus Z_2\right), \tag{19}$$

takže V je otevřená množina v přirozené topologii na $K_{a,b}$.

Ukážeme nyní, že $F|_U : U \to V$ je homeomorfismus. Výše bylo ukázáno, že $F|_U$ je bijekce. Stačí tedy dokázat, že zobrazení $(F|_U)^{-1}$ je spojité.

Buď $(\psi, \varphi) \in U$ libovolný bod. Platí $\sin\psi = 2\sin(\psi/2)\cos(\psi/2)$. Přitom na $(-\pi, \pi)$ je $\cos(\psi/2) > 0$, takže podle (1d)

$$\cos\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\psi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{w}{b}}. \tag{20}$$

Jelikož $\varphi \in (0, 2\pi)$ a $\sin(\varphi/2) > 0$, podmínka (11) dále dává

$$\sin\psi = \frac{a - \sqrt{x^2 + y^2}}{b\sin(\varphi/2)}. \tag{21}$$

Přitom podle (12)

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}. \tag{22}$$

Odtud

$$\sin\psi = \frac{a - \sqrt{x^2 + y^2}}{\dfrac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}} \tag{23}$$

Z (20) a (23) již ihned dostaneme

$$\psi = 2\arcsin\frac{a - \sqrt{x^2 + y^2}}{b\sqrt{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}\sqrt{1 + \dfrac{w}{b}}}. \tag{24}$$

Jelikož na $(0, 2\pi)$ platí $\sin(\varphi/2) > 0$, podobně dostaneme z (12) a (16)

$$\varphi = 2\arccos\frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}}. \tag{25}$$

Pro bod $(x, y, z, w) = F(\psi, \varphi)$, kde $(\psi, \varphi) \in U$, tedy platí vztahy (24), (25).

Uvažujme nyní ψ a φ jako funkce bodu (x, y, z, w), definované vztahy (24), (25), a položme $G = (\psi, \varphi)$. Dostáváme zobrazení G z $\mathbf{R}^4$ do $\mathbf{R}^2$, jehož definiční obor je tvořen body (x, y, z, w), splňujícími podmínky

$$1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} > 0, \quad 1 + \frac{w}{b} > 0. \tag{26}$$

Do definičního oboru tedy nepatří body, splňující podmínku $y = 0$, a body, pro které $w \leq -b$. Definiční obor G je tedy otevřená množina

$$\mathbf{R}^4 \setminus \left(\left\{ (x', y', z', w') \in \mathbf{R}^4 \mid y' = 0 \right\} \cup \left\{ (x', y', z', w') \in \mathbf{R}^4 \mid w' = -b \right\} \right). \tag{27}$$

Definiční obor G zřejmě obsahuje množinu $V = F(U)$ a z konstrukce G vyplývá, že

$$G|_V = (F|_U)^{-1}. \tag{28}$$

Zobrazení $(F|_U)^{-1}$ vzniká tedy zúžením spojitého zobrazení G na otevřenou množinu V a musí být spojité (v přirozené topologii na $K_{a,b}$).

Položme $U_1 = (0, \pi] \times (0, 2\pi)$, $V_1 = F(U_1)$. Ukážeme, že $F|_{U_1} : U_1 \to V_1$ je homeomorfismus v topologiích podprostorů na U_1 a V_1.

Nechť $(\psi, \varphi) \in U_1$ je libovolný bod, $(x, y, z, w) = F(\psi, \varphi)$. Jelikož $\psi \in (0, \pi]$, platí $\sin(\psi/2) > 0$ a tedy

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{\sin\psi}{2\sin(\psi/2)}. \tag{29}$$

Přitom podle (1d)

$$\sin\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\psi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{w}{b}}. \tag{30}$$

Dále $\sin(\varphi/2) > 0$ a ze vztahu (11) dostaneme

$$\sin\psi = \frac{a - \sqrt{x^2 + y^2}}{b\sin(\varphi/2)} = \frac{\sqrt{2}}{b}\,\frac{a - \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}}. \tag{31}$$

Z (25) nyní snadno vyvodíme, že platí

$$\psi = 2 \arccos \frac{a - \sqrt{x^2 + y^2}}{b\sqrt{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}\sqrt{1 - \dfrac{w}{b}}}. \tag{32}$$

Pro φ pak opět platí vztah (25).

Uvažujme ψ (32) a φ (25) jako funkce proměnných x, y, z, w a zobrazení $G_1 = (\psi, \varphi)$ z $\mathbf{R}^4$ do $\mathbf{R}^2$, jehož složky jsou ψ, φ. Vyšetříme definiční obor tohoto zobrazení.

Buď (x, y, z, w) bod definičního oboru G_1. Jelikož je již zaručeno, že $x^2 + y^2 > 0$, platí pro tento bod

$$1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} > 0, \tag{33}$$

$$1 - \frac{w}{b} > 0, \tag{34}$$

$$-1 \leq \frac{a - \sqrt{x^2 + y^2}}{b\sqrt{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}\sqrt{1 - \dfrac{w}{b}}} \leq 1, \tag{35}$$

$$-1 \leq \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}} \leq 1. \tag{36}$$

Uvažujme podmínku (33). Je-li $x \leq 0$, pak je tato podmínka splněna pro libovolné y; je-li $x > 0$, pak není splněna pro $y = 0$ a je splněna pro libovolné $y \neq 0$: $x/\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{x^2+y^2}/\sqrt{x^2+y^2} = 1$. Bod (x, y, z, w) tedy splňuje právě jednu z těchto dvou podmínek:

(37) $$x \leq 0,$$

(38) $$x > 0, \quad y \neq 0.$$

Podmínka (34) dává

(39) $$w < b.$$

Podmínka (35) se s využitím (34) upraví na tvar

$$\frac{\left(a - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(1 - \dfrac{w}{b}\right)} \leq 1,$$

odkud dostaneme

(40) $$w \leq b - \frac{\left(a - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}.$$

Podmínka (36) je ekvivalentní s podmínkou

$$\frac{y^2}{2\left(x^2+y^2\right)\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)} \leq 1.$$

Přitom má jmenovatel tvar

$$2x^2 + 2y^2 - 2x\sqrt{x^2+y^2} = y^2 + \left(x - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2,$$

takže podmínka (36) je splněna v důsledku platnosti (33).

Definiční obor zobrazení G_1 je tedy charakterizován jako množina bodů $(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4$, splňujících tyto podmínky:

(a) platí-li $\sqrt{x^2+y^2} = a$, pak $w < b$,

(b) platí-li $\sqrt{x^2+y^2} \neq a$, pak

$$w \leq b - \frac{\left(a - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)},$$

(c) je-li $x > 0$, pak $y \neq 0$.

Ukážeme, že definiční obor zobrazení G_1 obsahuje otevřenou množinu W_1 takovou, že $F(U_1) = V_1 \subset W_1$. Definujeme W_1 jako množinu bodů $(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4$, ležících v definičním oboru spojité funkce h, definované vztahem

(41) $$h(x, y, z, w) = w + \frac{\left(a - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)},$$

splňujících podmínku

$$h(x,y,z,w) < b. \tag{42}$$

Nechť $(\psi,\varphi) \in U_1$, $F(\psi,\varphi) = (x,y,z,w)$. Ukážeme nejdříve, že $F(\psi,\varphi) \in W_1$. Chceme ukázat, že je-li $x > 0$, pak $y \neq 0$.

Nechť v (1a) platí $x > 0$. Jelikož je splněna podmínka $(1 - (b/a)\sin\psi\sin(\varphi/2)) > 0$, znamená to, že $\cos\varphi > 0$, t.j. $\varphi \in (0,\pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$. Pro každé takové φ ovšem platí $\sin\varphi \neq 0$ a z (1b) vyplývá, že $y \neq 0$. Dále ukážeme, že je splněna podmínka (42). Přímým výpočtem dostaneme z (1a) – (1d)

$$h(x,y,z,w) = b\left(\cos\psi + \frac{1}{2}\sin^2\psi\right). \tag{43}$$

Označme $f(\psi) = \cos\psi + (1/2)\sin^2\psi$. Podmínka pro extrémy funkce f má tvar $\sin\psi \cdot (\cos\psi - 1) = 0$ a ukazuje, že extrémy funkce f nastávají v bodech $\psi = k\pi$, kde k probíhá celá čísla, přičemž extrémní hodnoty jsou rovny 1 (maximum) a -1 (minimum). Na intervalu $(0,\pi]$ maximum nenastává. Znamená to ovšem, že bod (x,y,z,w) splňuje podmínku (42).

Nyní je již zřejmé, že zobrazení $F|_{U_1} : U_1 \to V_1$ je homeomorfismus. Zobrazení $G_1 : W_1 \to \mathbf{R}^2$ je totiž spojité (v přirozené topologii na otevřené množině $W_1 \subset \mathbf{R}^4$) a jeho zúžení na V_1 je tedy také spojité v přirozené topologii na V_1. Tato topologie je ovšem totožná s topologií podprostoru topologického prostoru $K_{a,b}$. Přitom podle definice $G_1|_{V_1} = (F|_{U_1})^{-1}$ a zobrazení $(F|_{U_1})^{-1}$ je také spojité. Tím je ukončen důkaz tvrzení, že $F|_{U_1} : U_1 \to V_1$ je homeomorfismus.

Položme $U_2 = [-\pi, 0) \times (0, 2\pi)$, $V_2 = F(U_2)$. Ukážeme, že $F|_{U_2} : U_2 \to V_2$ je homeomorfismus v topologiích podprostorů. Mohli bychom postupovat podobně jako v případě zobrazení $F|_{U_1}$; místo toho však využijeme symetrie Kleinovy láhve $K_{a,b}$.

Pro každé $(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4$ splňující podmínku

$$0 < x^2 + y^2 < 4a^2 \tag{44}$$

položme

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2ax}{\sqrt{x^2+y^2}} - x, \quad \bar{y} = \frac{2ay}{\sqrt{x^2+y^2}} - y, \\ \bar{z} &= -z, \quad \bar{w} = w. \end{aligned} \tag{45}$$

Těmito vztahy je definováno zobrazení $\Psi : \{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \mid 0 < x^2 + y^2 < 4a^2\} \to \mathbf{R}^4$. Všimněme si, že definiční obor Ψ je otevřená množina obsahující $K_{a,b}$. Pro obraz bodu (x,y,z,w) ihned vyvodíme vztah

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \left(2a - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2, \tag{46}$$

odkud vyplývá, že $0 < \bar{x}^2 + \bar{y}^2 < 4a^2$, takže bod $(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{w})$ padne do definičního oboru zobrazení Ψ. Přímo prověříme, že platí

$$\Psi(\Psi(x,y,z,w)) = (x,y,z,w), \tag{47}$$

t.j. $\Psi = \Psi^{-1}$ a Ψ je homeomorfismus.

Dále pro každé $(\psi,\varphi) \in X$ klademe

$$\phi(\psi,\varphi) = (-\psi,\varphi). \tag{48}$$

ϕ je homeomorfismus X na sebe a platí $\phi^{-1} = \phi$. Dosazením z rovnic zobrazení F ve tvaru (1a) – (1d) pak dostaneme vztah

$$F \circ \phi = \Psi \circ F. \tag{49}$$

Ze vztahu (49) ovšem vyplývá

$$F|_{U_2} = \Psi|_{V_1} \circ F|_{U_1} \circ \phi|_{U_2}, \tag{50}$$

což je kompozice homeomorfismů; to dokazuje, že $F|_{U_2} : U_2 \to V_2$ je homeomorfismus.

Naším cílem je zkonstruovat otevřené pokrytí topologického prostoru X s vlastností, že zobrazení F zúžené na každý element tohoto pokrytí, je homeomorfismus. Metody, které přitom používáme, již byly podrobně ilustrovány výše, v dalším výkladu se proto omezíme na hlavní výsledky.

Položme $U_3 = (-\pi, \pi) \times [0, \pi)$, $V_3 = F(U_3)$. S využitím podmínky $\cos(\varphi/2) > 0$ lze ukázat, že pro bod $(\psi, \varphi) \in U_3$ a jeho obraz $F(\psi, \varphi) = (x, y, z, w) \in V_3$ platí

$$\begin{aligned} \psi &= 2 \arcsin \frac{a - \sqrt{x^2 + y^2}}{b\sqrt{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}\sqrt{1 + \dfrac{w}{b}}} \quad , \\ \varphi &= 2 \arccos \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}} \quad . \end{aligned} \tag{51}$$

Zobrazení $F|_{U_3} : U_3 \to V_3$ je homeomorfismus a (51) jsou rovnice inverzního homeomorfismu.

Dále položme $U_4 = (-\pi, \pi) \times (\pi, 2\pi]$, $V_4 = F(U_4)$ a pro každé $(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4$ splňující podmínku (44) položme

$$\bar{x} = \frac{2ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x, \quad \bar{y} = \frac{2ay}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{w} = w. \tag{52}$$

Tyto vztahy definují homeomorfismus $\tilde{\Psi}$, splňující podmínku $\tilde{\Psi}^{-1} = \Psi$. Přímo lze prověřit, že platí

$$F \circ \tilde{\phi} = \tilde{\Psi} \circ F, \tag{53}$$

kde $\tilde{\phi} : X \to X$ je homeomorfismus, definovaný vztahem

$$\tilde{\phi}(\psi, \varphi) = (-\psi, 2\pi - \varphi). \tag{54}$$

Z (53) pak vyplývá, že

$$F|_{U_4} = \tilde{\Psi}|_{V_3} \circ F|_{U_3} \circ \tilde{\phi}|_{U_4}, \tag{55}$$

a $F|_{U_4} : U_4 \to V_4$ je homeomorfismus.

Položme $U_5 = (0, \pi] \times [0, \pi)$, $V_5 = F(U_5)$. Chceme ukázat, že zobrazení $F|_{U_5} : U_5 \to V_5$ je homeomorfismus v topologiích podprostorů. Zřejmě $F|_{U_5}$ je spojitá bijekce; stačí tedy dokázat, že inverzní zobrazení $(F|_{U_5})^{-1}$ je spojité. V uvažovaném případě pro bod $(\psi, \varphi) \in U_5$ a jeho obraz $F(\psi, \varphi) = (x, y, z, w)$ platí vztahy (32), (25), definující inverzní homeomorfismus.

Dále položme $U_6 = (0, \pi] \times (\pi, 2\pi]$, $V_6 = F(U_6)$, $U_7 = [-\pi, 0) \times [0, \pi)$, $V_7 = F(U_7)$, $U_8 = [-\pi, 0) \times (\pi, 2\pi]$, $V_8 = F(U_8)$. Ze vztahů (49) a (53) pak vyvodíme, že

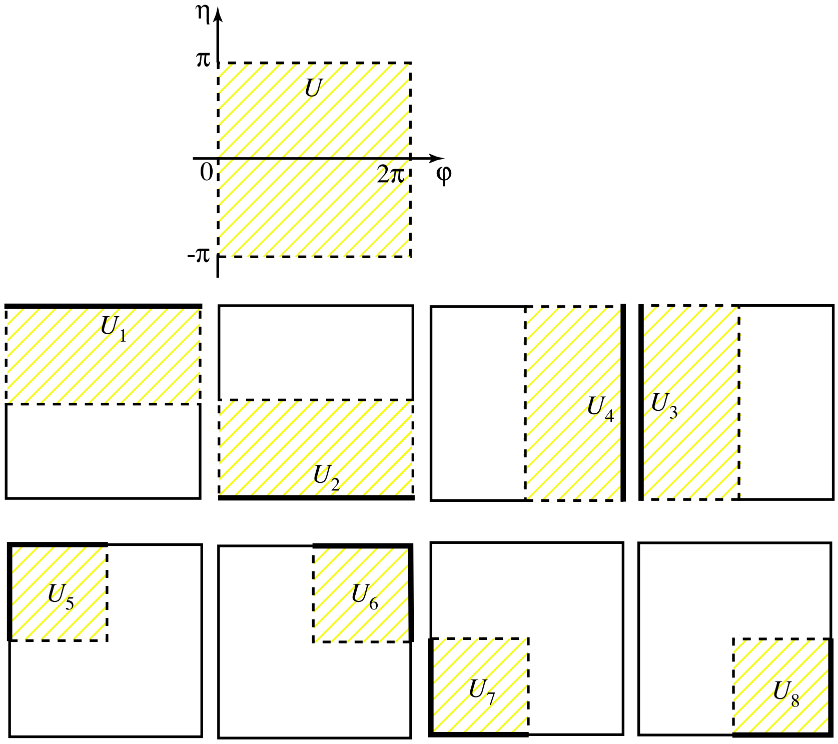
$$\begin{aligned} &F|_{U_7} = \Psi|_{V_5} \circ F|_{U_5} \circ \phi|_{U_7}, \quad F|_{U_6} = \tilde{\Psi}|_{V_7} \circ F|_{U_7} \circ \tilde{\phi}|_{U_6}, \\ &F|_{U_8} = \Psi|_{V_6} \circ F|_{U_6} \circ \phi|_{U_8}. \end{aligned} \tag{56}$$

Nyní je již zřejmé, že každé ze zobrazení $F|_{U_6} : U_6 \to V_6$, $F|_{U_7} : U_7 \to V_7$ a $F|_{U_8} : U_8 \to V_8$ je homeomorfismus.

Shrneme dosavadní výsledky. Zkonstruovali jsme otevřené pokrytí σ topologického prostoru X, tvořené množinami U, U_1, U_2, $\ldots$, U_8, takové, že pro každý element $S \in \sigma$ je zobrazení

$F|_S : S \to F(S)$ homeomorfismus v topologiích podprostorů. Dále bylo ukázáno, že množina $V = F(U)$ je otevřená. Množiny, tvořící pokrytí σ, jsou schematicky znázorněny na obr. 21.

Obr. 21



Přejdeme nyní k důkazu toho, že zobrazení $g : X/\mathscr{R}_F \to K_{a,b}$, definované kanonickým rozkladem $F = \iota \circ g \circ \pi_F$ zobrazení F, je homeomorfismus. Prověříme, že jsou splněny předpoklady Věty 18. odst. 3.5 str. 41.

Ukážeme nejdříve, že každá z množin V, $V_1 \cup V_2$, $V_3 \cup V_4$, $V_5 \cup V_6 \cup V_7 \cup V_8 \subset K_{a,b}$ je otevřená v přirozené topologii. Kromě množin Z_1 (14). Z_2 (16) a Z_3 (18) zavedeme ještě množiny

$$
\begin{aligned}
Z_4 &= \{(x', y', z', w') \in \mathbf{R}^4 \mid z' = 0,\, w' = b\}, \\
Z_5 &= \{(x', y', z', w') \in \mathbf{R}^4 \mid y' = 0,\, z' = 0\}.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Z rovnic Kleinovy láhve (1a) – (1d) ihned dostaneme, že body $(\psi, \varphi) \in X$, pro které $\psi = -\pi, \pi$ (resp. $\varphi = 0$, resp. $\varphi = 2\pi$, resp. $\psi = 0$, resp. $\varphi = \pi$), se zobrazí do Z_1 (resp. Z_2, resp. Z_3, resp. Z_4, resp. Z_5). Z toho ihned dostaneme vyjádření

$$
\begin{aligned}
V &= K_{a,b} \cap \left(\mathbf{R}^4 \setminus (Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3)\right), \\
V_1 \cup V_2 &= K_{a,b} \cap \left(\mathbf{R}^4 \setminus (Z_2 \cup Z_3 \cup Z_4)\right), \\
V_3 \cup V_4 &= K_{a,b} \cap \left(\mathbf{R}^4 \setminus (Z_1 \cup Z_5)\right), \\
V_5 \cup V_6 \cup V_7 \cup V_8 &= K_{a,b} \cap \left(\mathbf{R}^4 \setminus (Z_4 \cup Z_5)\right),
\end{aligned}
\tag{58}
$$

ze kterého již vyplývá, že uvažované množiny jsou otevřené v $K_{a,b}$.

Buď $W \subset X$ F-nasycená otevřená množina. Ukážeme, že $F(W) \subset K_{a,b}$ je otevřená množina. Množinu W lze vyjádřit ve tvaru sjednocení

$$
W = (U \cap W) \cup \left(\bigcup (U_i \cap W)\right), \tag{59}
$$

kde i probíhá množinu $\{1, 2, \dots, 8\}$. Dále označíme P_5, P_6, P_7, P_8 vrcholy čtverce X, t.j. položíme $P_5 = (\pi, 0)$, $P_6 = (\pi, 2\pi)$, $P_7 = (-\pi, 0)$, $P_8 = (-\pi, 2\pi)$. Pak můžeme psát W ve tvaru

$$\begin{aligned} W = (U \cap W) \cup (U_1 \cap W) \cup (U_2 \cap W) \cup (U_3 \cap W) \cup (U_4 \cap W) \cup \\ \cup (\{P_5, P_6, P_7, P_8\} \cap W). \end{aligned} \tag{60}$$

Odtud

$$\begin{aligned} F(W) = F(U \cap W) \cup F(U_1 \cap W) \cup F(U_2 \cap W) \cup F(U_3 \cap W) \cup \\ \cup F(U_4 \cap W) \cup F(\{P_5, P_6, P_7, P_8\} \cap W). \end{aligned} \tag{61}$$

Množina $F(U \cap W)$ je otevřená v $F(U) = V$ jako obraz otevřené množiny $U \cap W$ vzhledem k homeomorfismu $F|_U : U \to V$; množina V je ovšem otevřená v $K_{a,b}$, takže $F(U \cap W) \subset K_{a,b}$ je otevřená množina.

Ukážeme, že množina $F(U_1 \cap W) \cup F(U_2 \cap W) \subset K_{a,b}$ je otevřená. Z toho, že zobrazení $F|_{U_1} : U_1 \to V_1$ je homeomorfismus a $U_1 \cap W \subset U_1$ je otevřená množina, vyplývá, že $F(U_1 \cap W) \subset V_1$ je otevřená množina; analogicky dostaneme, že $F(U_2 \cap W) \subset V_2$ je otevřená množina. Existují tedy otevřené množiny $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2 \subset V_1 \cup V_2$ tak, že

$$F(U_1 \cap W) = V_1 \cap \bar{V}_1, \quad F(U_2 \cap W) = V_2 \cap \bar{V}_2. \tag{62}$$

Evidentně platí

$$\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \subset (V_1 \cap \bar{V}_1) \cup (V_2 \cap \bar{V}_2). \tag{63}$$

Skutečně, nechť $Q \in \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2$. Jelikož $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \subset V_1 \cup V_2$, buď $Q \in V_1$, t.j. $Q \in V_1 \cap \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \subset V_1 \cap \bar{V}_1$, nebo $Q \in V_2$, t.j. $Q \in V_2 \cap \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \subset V_2 \cap \bar{V}_2$.

Napišme množiny V_1, V_2 ve tvaru

$$V_1 = (V_1 \cap V) \cup (V_1 \cap V_2), \quad V_2 = (V_2 \cap V) \cup (V_1 \cap V_2). \tag{64}$$

Pak

$$\begin{aligned} F(U_1 \cap W) \cup F(U_2 \cap W) = (V_1 \cap \bar{V}_1) \cup (V_2 \cap \bar{V}_2) = (V_1 \cap \bar{V}_1) \cup \\ \cup (V_2 \cap \bar{V}_2) \cup (\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2) = [((V_1 \cap V) \cup (V_1 \cap V_2)) \cap \bar{V}_1] \cup \\ \cup [((V_2 \cap V) \cup (V_1 \cap V_2)) \cap \bar{V}_2] \cup (\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2) = (V_1 \cap V \cap \bar{V}_1) \cup \\ (V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_1) \cup (V_2 \cap V \cap \bar{V}_2) \cup (V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_2) \cup (\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2). \end{aligned} \tag{65}$$

Z F-nasycenosti množiny W ovšem vyplývá, že $V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_1 = V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_2$. Nechť totiž $Q \in V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_1$. Existuje $\varphi \in (0, 2\pi)$ tak, že $Q = F(\pi, \varphi) = F(-\pi, \varphi)$. Znamená to ovšem, že $Q \in F(U_2 \cap W) \cap F(U_1) = V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_2$. Ze symetrie tedy vyplývá rovnost $V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_1 = V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_2$. Odtud

$$V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_1 = V_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_2 = V_1 \cap \bar{V}_1 \cap V_2 \cap \bar{V}_2 \subset \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2. \tag{66}$$

Celkově tedy

$$F(U_1 \cap W) \cup F(U_2 \cap W) = (V_1 \cap V \cap \bar{V}_1) \cup (V_2 \cap V \cap \bar{V}_2) \cup (\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2) \tag{67}$$

Množiny $V_1 \cap V$, $V_2 \cap V$ jsou otevřené v $K_{a,b}$ jako homeomorfní obrazy otevřených množin vzhledem k zobrazení $F|_U$. Odsud je již vidět, že množina (67) je otevřená v $K_{a,b}$.

Analogicky dostaneme, že množina $F(U_3 \cap W) \cup F(U_4 \cap W)$ je otevřená.

Uvažujme nyní množinu $F(U_5 \cap W) \cup F(U_6 \cap W) \cup F(U_7 \cap W) \cup F(U_8 \cap W)$. Jelikož pro každé $i = 5, 6, 7, 8$ je $F|_{U_i} : U_i \to V_i$ homeomorfismus a $U_i \cap W \subset U_i$ je otevřená množina, existuje otevřená množina $\bar{V}_i \subset V_5 \cup V_6 \cup V_7 \cup V_8$ tak, že

$$F(U_i \cap W) = V_i \cap \bar{V}_i. \tag{68}$$

Evidentně

$$\begin{aligned}\bar V_5 \cap \bar V_6 \cap \bar V_7 \cap \bar V_8 &\subset (V_5 \cap \bar V_5) \cup (V_6 \cap \bar V_6) \cup (V_7 \cap \bar V_7) \cup (V_8 \cap \bar V_8) \\ &\subset F(W).\end{aligned} \tag{69}$$

Skutečně, nechť $Q \in \bar V_5 \cap \bar V_6 \cap \bar V_7 \cap \bar V_8$. Jelikož $\bar V_5 \cap \bar V_6 \cap \bar V_7 \cap \bar V_8 \subset V_5 \cup V_6 \cup V_7 \cap V_8$, existuje index i tak, že $Q \in V_i$. Pak ovšem $Q \in \bar V_5 \cap \bar V_6 \cap \bar V_7 \cap \bar V_8 \cap V_i \subset V_i \cap \bar V_i$, což dokazuje (69).

Zřejmě $\{P_i\} \cap W \subset U_i \cap W$ a tedy

$$F(\{P_i\} \cap W) \subset F(U_i \cap W) = V_i \cap \bar V_i \subset \bar V_i. \tag{70}$$

Z F-nasycenosti množiny W však vyplývá, že $F(\{P_5\} \cap W) = F(\{P_6\} \cap W) = F(\{P_7\} \cap W) = F(\{P_8\} \cap W)$ a tedy

$$F(\{P_5, P_6, P_7, P_8\} \cap W) = \bigcup F(\{P_i\} \cap W) \subset \bar V_5 \cap \bar V_6 \cap \bar V_7 \cap \bar V_8. \tag{71}$$

Ze vztahu (61) přidáním množiny $\bar V_5 \cap \bar V_6 \cap \bar V_7 \cap \bar V_8$ na obě strany a využitím inkluzí (69) a (71) tedy dostaneme

$$\begin{aligned}F(W) &= F(U \cap W) \cup F(U_1 \cap W) \cup F(U_2 \cap W) \cup F(U_3 \cap W) \cup F(U_4 \cap W) \\ &\quad \cup (\bar V_5 \cap \bar V_6 \cap \bar V_7 \cap \bar V_8),\end{aligned} \tag{72}$$

což je evidentně otevřená množina v přirozené topologii na $K_{a,b}$.

Tím je důkaz toho, že g je homeomorfismus, ukončen.

Nakonec ještě odvodíme rovnice Kleinovy láhve; k tomu vyloučíme parametry ψ, φ z rovnic (1a) – (1d). Jelikož $\sin(\varphi/2) \geq 0$, pro $\sin(\varphi/2)$ platí vztah (22). Z (11) pak dostaneme

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{2}}{b} \frac{a - \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}} \tag{73}$$

Jelikož podle (1c) $z \sin(\varphi/2) = b \sin\psi \cdot \cos(\varphi/2) \cdot \sin(\varphi/2) = (1/2) b \sin\psi \cdot \sin\varphi$, s použitím vztahu (12) dostáváme po jednoduché úpravě

$$z\left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right) - y\left(a - \sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0. \tag{74}$$

Ze vztahu (11) a (1c) ihned dostaneme

$$b^2 \sin^2\psi = \left(a - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2. \tag{75}$$

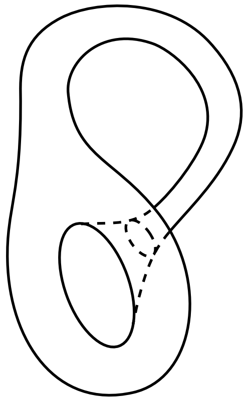
Dosazením do (75) z (1d) dostáváme rovnici

$$\left(a - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 + w^2 - b^2 = 0. \tag{76}$$

Kleinova láhev tedy leží na ploše v $\mathbf{R}^4$, charakterizované rovnicemi (74) a (76).

Kleinova láhev je rovnicemi (1a) – (1d) definována jako podmnožina Euklidova topologického prostoru $\mathbf{R}^4$. Chceme-li ji přesto znázornit jako podmnožinu $\mathbf{R}^3$ (při zachování jejích vlastností, odpovídajících "slepování" pomocí faktorizace $\mathscr{R}_F$ či $\sim$), jsme vedeni ke konstrukci, znázorněné na obr. 22. Ve skutečnosti (t.j. v $\mathbf{R}^4$) však Kleinova láhev sama sebe neprotíná.

Obr. 22



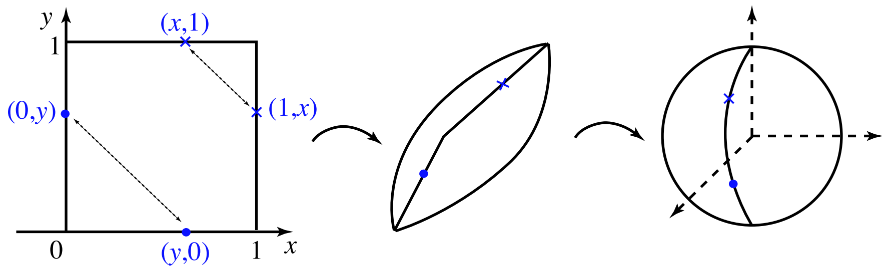
29. Buď $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x, y \le 1\}$ uzavřený jednotkový čtverec v rovině $\mathbf{R}^2$. Ukažte, že následující dva topologické prostory jsou homeomorfní:

(1) faktorový prostor $X/\!\sim$ podle ekvivalence "$(x,y) \sim (x',y')$, jestliže $(x,y) = (x',y')$ nebo $x = 0$, $x' = y$, $y' = 0$ nebo $y = 1$, $x' = 1$, $y' = x$" ,

(2) podprostor $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^3$ (jednotková sféra).

Řešení. Situace ze zadání příkladu je znázorněna na obr. 23. Faktorizace v tomto případě znamená "slepení" levého a dolního a zároveň pravého a horního okraje čtverce.

Obr. 23



1. Označme $X' = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ a uvažujme zobrazení $F : X' \to \mathbf{R}^3$, definované rovnicemi

$$x = \cos\varphi \sin\vartheta, \qquad y = \sin\varphi \sin\vartheta, \qquad z = \cos\vartheta,$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $\vartheta \in [0, \pi]$. Vyšetříme ekvivalenci $\mathscr{R}_F$, asociovanou se zobrazením F. Podle definice body (φ, ϑ), (φ', ϑ') jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, když

$$\begin{aligned}
&\cos\varphi \sin\vartheta = \cos\varphi' \sin\vartheta',\\
&\sin\varphi \sin\vartheta = \sin\varphi' \sin\vartheta',\\
&\cos\vartheta = \cos\vartheta'.
\end{aligned}$$

Stejně jako ve cv. 25 (Möbiova páska) dostaneme *netriviální řešení*

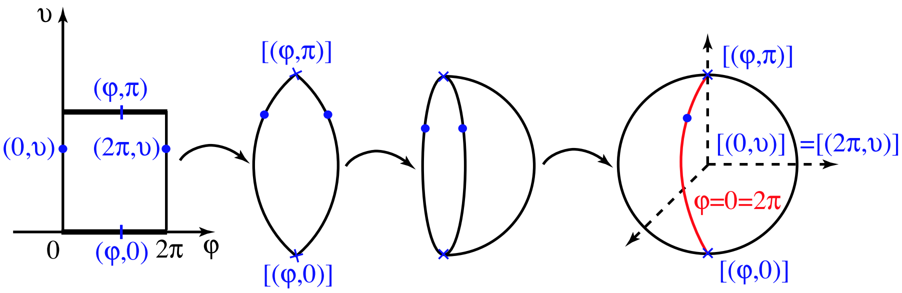
$$\begin{array}{ll}
(\varphi, \vartheta) = (0, \vartheta), & (\varphi', \vartheta') = (2\pi, \vartheta),\ \vartheta \neq 0, \pi,\\
(\varphi, \vartheta) = (2\pi, \vartheta), & (\varphi', \vartheta') = (0, \vartheta),\ \vartheta \neq 0, \pi,\\
(\varphi, \vartheta) = (\varphi, 0), & (\varphi', \vartheta') = (\varphi', 0),\\
(\varphi, \vartheta) = (\varphi, \pi), & (\varphi', \vartheta') = (\varphi', \pi).
\end{array}$$

Netriviální třídy ekvivalence $\mathscr{R}_F$ jsou tedy třídy $\{(0,\vartheta),(2\pi,\vartheta)\}$, $\{(\varphi,0)\mid\varphi\in[0,2\pi]\}$, $\{(\varphi,\pi)\mid\varphi\in[0,2\pi]\}$ (porov. obr. 24).

To ovšem znamená, že ekvivalence $\mathscr{R}_F$ není totožná s ekvivalencí $\sim$.

Analogicky jako ve cv. 25 se ukáže (s pomocí Věty 18. odst. 3.5 str. 41), že zobrazení $g: X'/\mathscr{R}_F\to S^2$, definované kanonickým rozkladem $F=\iota\circ g\circ\pi_F$, je homeomorfismus.

Obr. 24



2. Ve cv. 6 kap. 2 bylo ukázáno, že množiny $[0,\pi]$, $[0,2\pi]$ a $[0,1]$ jsou homeomorfní jako podprostory Euklidova prostoru $\mathbf{R}$. Z definice součinu topologií je zřejmé, že jsou homeomorfní rovněž topologické prostory $X=[0,1]\times[0,1]$ a $X'=[0,2\pi]\times[0,\pi]$ (jako podprostory $\mathbf{R}^2$). Označme $\mathscr{R}$ ekvivalenci na X, jejíž jediné netriviální třídy jsou $\{(0,y),(1,y)\}$, $\{(x,0)\mid x\in[0,1]\}$, $\{(x,1)\mid x\in[0,1]\}$. Pak zřejmě faktorová projekce (kanonického) homeomorfismu X na X' je homeomorfismus $X/\mathscr{R}$ na $X'/\mathscr{R}_F$.

3. Zbývá ukázat, že faktorové prostory $X/\!\sim$ a $X/\mathscr{R}$ jsou homeomorfní. Definujeme zobrazení $h: X/\!\sim\,\to X/\mathscr{R}$ vztahem

$$h([(0,0)])=[(x,0)],\quad h([(1,1)])=[(x,1)],\quad x\in[0,1],$$
$$h([(x,y)])=[(\bar{x},\bar{y})],\quad (x,y)\neq(0,0),\ (1,1),$$

kde

$$\bar{x}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{d}{b}\right), & x\geq y,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{d}{b}\right), & x<y,\end{cases}\qquad \bar{y}=\frac{\sqrt{2}}{2}r$$

a význam symbolů b, d, r je zřejmý z obr. 25.

Pro $y\leq 1-x$ dostaneme

$$b=r,\quad r=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y),\quad d=\frac{\sqrt{2}}{2}|x-y|,$$
$$\bar{x}=\frac{x}{x+y},\quad \bar{y}=\frac{1}{2}(x+y),$$

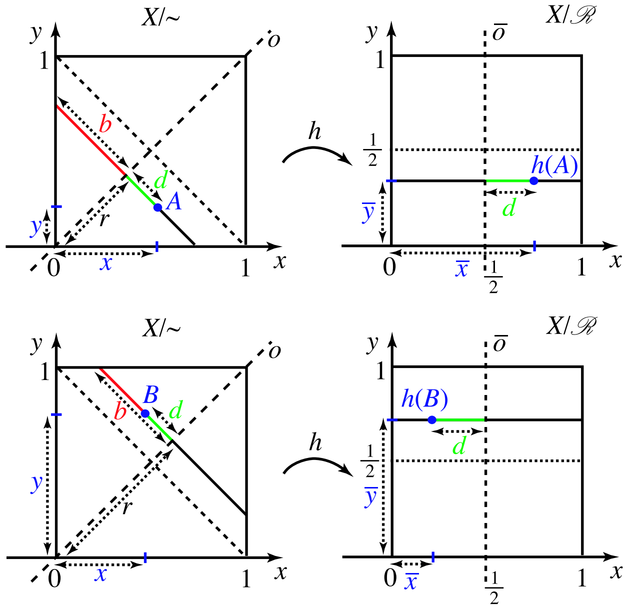
a pro $y>1-x$ dostaneme

$$b=\sqrt{2}-r,\quad r=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y),\quad d=\frac{\sqrt{2}}{2}|x-y|,$$
$$\bar{x}=\frac{1-y}{2-x-y},\quad \bar{y}=\frac{1}{2}(x+y).$$

Je třeba ovšem prověřit, že zobrazení h je definováno korektně, t.j. nezávisle na výběru reprezentantů příslušných tříd; k tomu zřejmě stačí vyšetřit obraz bodů $[(x,y)]=[(0,y)]=[(y,0)]$ a $[(x,y)]=[(1,y)]=[(y,1)]$.

Přímo z konstrukce je zřejmé, že h je spojitá a otevřená bijekce, je to tedy homeomorfismus.

Obr. 25



30. Faktorový prostor $(\mathbf{R}^3 \backslash \{0\})/\mathscr{R}$, kde $\mathscr{R}$ je ekvivalence “$x\mathscr{R}y$, jestliže existuje přímka p v $\mathbf{R}^3$ taková, že 0, x, $y \in p$” se nazývá *reálná projektivní rovina* a označuje se RP^2. RP^2 je tedy v bijekci s množinou všech přímek v $\mathbf{R}^3$, procházejících počátkem.

Ukažte, že následující topologické prostory jsou homeomorfní:

(1) RP^2.

(2) Podprostor $\sigma \subset \mathbf{R}^5$, definovaný v parametrickém tvaru rovnicemi

$$
\begin{aligned}
x &= \cos\varphi \cos(\psi/2),\\
y &= \sin\varphi \cos(\psi/2),\\
z &= \sin\psi \cos(\varphi/2),\\
w &= \cos\psi \cos(\varphi/2),\\
t &= \sin(\varphi/2) \sin(\psi/2),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

kde φ, $\psi \in [-\pi, \pi]$.

(3) Faktorový prostor $X/{\sim}$, kde X je jednotkový čtverec v $\mathbf{R}^2$ a $\sim$ je ekvivalence na X, definovaná podmínkou “$(x, y) \sim (x', y')$, jestliže buď $(x, y) = (x', y')$ nebo $y = 0$, $y' = 1$, $x' = 1 - x$ nebo $x = 0$, $x' = 1$, $y' = 1 - y$”.

(4) Faktorový prostor $B/{\sim_B}$, kde $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1$ a $\sim_B$ je ekvivalence “$P \sim_B Q$, jestliže buď $P = Q$ nebo $P, Q \in \partial B$ a $P = -Q$”, kde $\partial B = S^1$.

(5) Faktorový prostor $S^2/{\sim_{S^2}}$, kde S^2 je jednotková sféra v $\mathbf{R}^3$ a $\sim_{S^2}$ je ekvivalence “$P \sim_{S^2} Q$, jestliže $P = Q$ nebo $P = -Q$”.

Ř e š e n í. 1. Nejdříve vyšetříme ekvivalenci $\mathscr{R}_F$, asociovanou se zobrazením $F : [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}^5$, definovaným rovnicemi (1). Nechť (φ, ψ), (φ', ψ') jsou dva $\mathscr{R}_F$-ekvivalentní body.

Pak $F(\varphi,\psi)=F(\varphi',\psi')$, t.j.

$$\begin{aligned}
&\cos\varphi\cos(\psi/2)=\cos\varphi'\cos(\psi'/2),\\
&\sin\varphi\cos(\psi/2)=\sin\varphi'\cos(\psi'/2),\\
&\sin\psi\cos(\varphi/2)=\sin\psi'\cos(\varphi'/2),\\
&\cos\psi\cos(\varphi/2)=\cos\psi'\cos(\varphi'/2),\\
&\sin(\varphi/2)\sin(\psi/2)=\sin(\varphi'/2)\sin(\psi'/2).
\end{aligned}$$

Umocněním a sečtením dostaneme z prvních dvou rovnic vztah $\cos^2(\varphi/2)=\cos^2(\varphi'/2)$. Na intervalu $[-\pi,\pi]$ je $\cos(\psi/2)\geq 0$, takže musí platit $\cos(\psi/2)=\cos(\psi'/2)$.

Nechť $\cos(\psi/2)=\cos(\psi'/2)=0$. Pak ψ, $\psi'=-\pi,\pi$ a dosazením do zbývajících rovnic dostaneme (φ,ψ), (φ',ψ') ve tvaru

$$\begin{array}{ll}
(\varphi,\psi)=(\varphi,\psi), & (\varphi',\psi')=(\varphi,\psi),\\
(\varphi,\psi)=(\varphi,\pi), & (\varphi',\psi')=(-\varphi,-\pi),\\
(\varphi,\psi)=(\varphi,-\pi), & (\varphi',\psi')=(-\varphi,\pi).
\end{array}$$

Nechť $\cos(\psi/2)=\cos(\psi'/2)\neq 0$. Pak z prvních dvou rovnic plyne

$$\cos\varphi=\cos\varphi',\qquad \sin\varphi=\sin\varphi'$$

a tedy na intervalu $[-\pi,\pi]$ platí $\varphi=\varphi'$. Zbývající rovnice pak mají tvar

$$\begin{aligned}
&\sin\psi\cos(\varphi/2)=\sin\psi'\cos(\varphi/2),\\
&\cos\psi\cos(\varphi/2)=\cos\psi'\cos(\varphi/2),\\
&\sin(\varphi/2)\sin(\psi/2)=\sin(\varphi/2)\sin(\psi'/2).
\end{aligned}$$

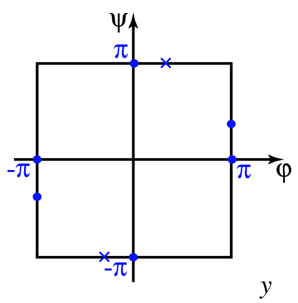
Jejich rozborem lze ukázat, že musí platit $\varphi=\varphi'$, $\psi=\psi'$.

Umocněním a sečtením druhých dvou rovnic (1) dostaneme $\cos^2(\varphi/2)=\cos^2(\varphi'/2)$ a podobně jako v předchozím případě dostaneme řešení

$$\begin{array}{ll}
(\varphi,\psi)=(\varphi,\psi), & (\varphi',\psi')=(\varphi,\psi),\\
(\varphi,\psi)=(\pi,\psi), & (\varphi',\psi')=(-\pi,-\psi),\\
(\varphi,\psi)=(-\pi,\psi), & (\varphi',\psi')=(\pi,-\psi),\\
(\varphi,\psi)=(\varphi,0), & (\varphi',\psi')=(\varphi,0).
\end{array}$$

Celkově tedy dostáváme, že ekvivalence $\mathscr{R}_F$ má třídy $\{(\varphi,\psi)\}$, $\{(\varphi,\pi),(-\varphi,-\pi)\}$, $\{(\pi,\psi),(-\pi,-\psi)\}$, $\{(\pi,\pi),(-\pi,-\pi),(-\pi,\pi),(\pi,-\pi)\}$ (srov. obr. 26).

Obr. 26



Porovnáním faktorových množin $X/\!\sim$ a $X'/\mathscr{R}_F$, kde $X' = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, nyní vidíme, že existuje kanonická (t.j. přirozená) bijekce $X/\!\sim$ na $X'/\mathscr{R}_F$. Snadno lze ovšem najít homeomorfismus X na X', jehož projekce je tato kanonická bijekce. Topologické prostory $X/\!\sim$ a $X'/\mathscr{R}_F$ jsou tedy homeomorfní podle Věty 14. odst. 3.4 str. 39.

2. Důkaz homeomorfnosti topologických prostorů $X'/\mathscr{R}_F$ a $\sigma = F(X') \subset \mathbf{R}^5$ se provádí stejným způsobem jako v případě Kleinovy láhve (cv. 28).

3. Vyloučíme parametry z rovnic (1). Postupně dostáváme

$$
\begin{aligned}
&x^2 + y^2 = \cos^2(\psi/2) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\psi),\\
&z^2 + w^2 = \cos^2(\varphi/2) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\varphi),\\
&t^2 = \sin^2(\psi/2)\sin^2(\varphi/2) = (1 - \cos^2(\psi/2))(1 - \cos^2(\varphi/2)) =\\
&\qquad = (x^2 + y^2 - 1)(z^2 + w^2 - 1).
\end{aligned}
$$

Podprostor $\sigma \subset \mathbf{R}^5$ tedy splňuje rovnice

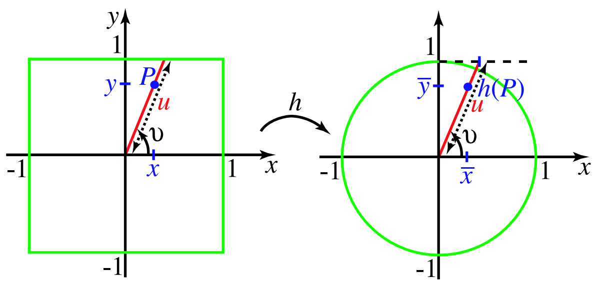
$$
\begin{aligned}
&(x^2 + y^2 - 1)(z^2 + w^2 - 1) - t^2 = 0,\\
&x^2 - (2z^2 + 2w^2 - 1)^2(x^2 + y^2) = 0,\\
&w^2 - (2x^2 + 2y^2 - 1)^2(z^2 + w^2) = 0.
\end{aligned}
$$

4. Ukážeme, že $X/\!\sim$ je homeomorfní s $B/\!\sim_B$; k tomu zřejmě stačí nalézt homeomorfismus uzavřeného čtverce X na uzavřený jednotkový kruh B, kompatibilní s ekvivalencemi $\sim$, $\sim_B$ (Věta 14. odst. 3.4 str. 39). Definujeme zobrazení $h : X' \to B$ vztahem $h((0,0)) = (0,0)$, $h((x,y)) = (\bar{x}, \bar{y})$, kde $X' = [-1,1]^2$,

$$
\bar{x} = kx, \quad \bar{y} = ky, \quad k = \frac{1}{u} = \frac{\max(|x|,|y|)}{\sqrt{x^2 + y^2}},
$$

(viz obr. 27).

Obr. 27



Zobrazení $h : X' \to B$ je bijekce; vyplývá to z toho, že zobrazení, definované rovnicemi

$$
\begin{aligned}
x &= u\bar{x} = \frac{\bar{x}}{|\bar{y}|}\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2},\\
y &= u\bar{y} = \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|}\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}
\end{aligned}
$$

na podmnožině množiny B, kde $\bar{y} \neq 0$, $\vartheta \in [\pi/4, 3\pi/4] \cup [5\pi/4, 7\pi/4]$, resp.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2},\\
y &= \frac{\bar{y}}{|\bar{x}|}\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}
\end{aligned}
$$

na podmnožině, kde $\bar{x} \neq 0$, $\vartheta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$ a podmínkou, že bod $(0,0)$ přechází do bodu $(0,0)$, je inverzní k zobrazení h. Spojitost h i h^{-1} se ověřuje přímo. Zobrazení $h : X' \to B$ je tedy homeomorfismus.

Pomocí homeomorfismu h již nyní snadno zkonstruujeme homeomorfismus X a B, kompatibilní s ekvivalencemi $\sim$, $\sim_B$.

5. Nyní ukážeme, že jsou homeomorfní topologické prostory $S^2/\sim_{S^2}$ a $X/\sim$. Pro $(x,y) \in X$ (resp. $(x,y,z) \in S^2$) klademe $\phi(x,y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (resp.$\Psi(x,y,z) = (x,y)$). Zobrazení ϕ, Ψ jsou spojitá. Dále ϕ (resp. Ψ je kompatibilní s ekvivalencemi $\sim$, $\sim_{S^2}$ (resp. $\sim_{S^2}$, $\sim$), existuje tedy spojité zobrazení $f : X/\sim \to S^2/\sim_{S^2}$ (resp. $g : S^2/\sim_{S^2} \to X/\sim$) tak, že diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & S^2 \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d] & X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & S^2 \arrow[d] \\
X/\sim \arrow[r, "f"] & S^2/\sim_{S^2} \arrow[r, "g"] & X/\sim \arrow[r, "f"] & S^2/\sim_{S^2}
\end{tikzcd}$$

ve kterém vertikální šipky označují faktorové projekce, je komutativní. Jelikož ovšem $\Psi \circ \phi = \mathrm{id}_X$, platí

$$g \circ f = \mathrm{id}\,.$$

Dále zobrazení $\phi \circ \Psi$ je kompatibilní s ekvivalencemi $\sim_{S_2}$, $\sim_{S_2}$, musí tedy platit

$$f \circ g = \mathrm{id}\,.$$

Tyto vztahy ukazují, že f je homeomorfismus.

6. Nakonec ukážeme, že jsou homeomorfní prostory $S^2/\sim_{S^2}$ a RP^2. Buď $\iota : S^2 \to \mathbf{R}^3 \backslash \{0\}$ kanonické vložení; ι je kompatibilní s ekvivalencemi $\sim_{S^2}$, $\mathscr{R}$, existuje tedy jeho spojitá projekce $f : S^2/\sim_{S^2} \to RP^2$. Dále nechť $\kappa : \mathbf{R}^3 \backslash \{0\} \to S^2$ je zobrazení, přiřazující bodu (x,y,z) průsečík polopřímky $[(0,0,0),(x,y,z))$ se sférou S^2. Zobrazení κ je spojité a je kompatibilní s ekvivalencemi $\mathscr{R}$, $\sim_{S^2}$. Označíme g jeho faktorovou projekci a dále postupujeme stejně jako v části 5 tohoto důkazu.

31. Ukažte, že faktorový prostor Euklidova prostoru $\mathbf{R}^2$ podle ekvivalence "$(x,y) \sim (x',y')$, jestliže $x = x'$" je homeomorfní s přímkou $\mathbf{R}$.

Ř e š e n í . Bijekci $\mathbf{R}^2/\sim$ a $\mathbf{R}$ dostaneme, přiřadíme-li přímce, rovnoběžné s osou y, její průsečík s osou x.

Určíme faktorovou topologii na $\mathbf{R}^2/\sim$. Podle definice je to nejsilnější ze všech topologií, v nichž je faktorové zobrazení $\pi : \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \to [(x,y)] \in \mathbf{R}^2/\sim$ spojité. Buď $U \subset \mathbf{R}^2/\sim$ množina taková, že $\pi^{-1}(U) \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina. Podle definice přirozené topologie na $\mathbf{R}^2$ platí $\pi^{-1}(U) = \bigcup_\iota \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a_\iota < x < a'_\iota, b_\iota < y < b'_\iota\}$ (sjednocení otevřených obdélníků). Podle definice ekvivalence $\sim$ ovšem $[(x,y)] = \{(x,y') \in \mathbf{R}^2 \mid y' \in \mathbf{R}\}$. Zvolíme-li $y_0 \in \mathbf{R}$ libovolně, můžeme psát $U = \pi(\pi^{-1}(U)) = \bigcup_\iota \{[(x,y)] \in \mathbf{R}^2/\sim \mid a_\iota < x < a'_\iota, b_\iota < y < b'_\iota\} = \bigcup_\iota \{[(x,y_0)] \in \mathbf{R}^2/\sim \mid a_\iota < x < a'_\iota\}$. Ve výše uvedené bijekci je tato množina v korespondenci s množinou $\bigcup_\iota (a_\iota, a'_\iota)$ (sjednocení otevřených intervalů).

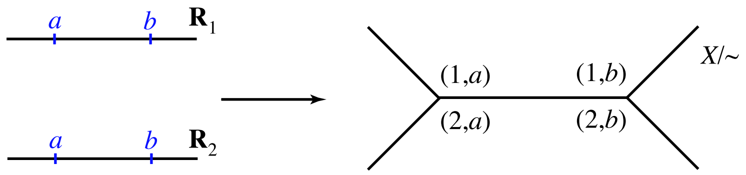
32. Uvažujme Euklidův prostor $\mathbf{R}$ a položme $\mathbf{R}_1 = \{(1,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$, $\mathbf{R}_2 = \{(2,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$. Přenesme na množiny $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ topologii pomocí bijekcí $x \to (1,x)$, $x \to (2,x)$ a položme $X = \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$ (disjunktní sjednocení dvou přímek). Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Uvažujme na X ekvivalenci $\sim$, definovanou rozkladem $\{(1,x)\}$, $x \le a$, $x \ge b$, $\{(2,x)\}$, $x \le a$, $x \ge b$, $\{(1,x),(2,x)\}$, $a < x < b$.

(a) Rozhodněte, zda faktorový prostor $X/\sim$ je Hausdorffův.

(b) Rozhodněte, zda $X/\sim$ je homeomorfní s podprostorem nějakého Euklidova prostoru $\mathbf{R}^n$.

Ř e š e n í . Výše definovaná faktorizace množiny X je znázorněna na obr. 28.

Obr. 28



(a) Faktorový prostor $X/{\sim}$ není Hausdorffův: body $(1,a)$, $(2,a)$ resp. $(1,b)$, $(2,b)$ nelze oddělit disjunktními okolími.

(b) $X/{\sim}$ není homeomorfní s podprostorem Euklidova prostoru, neboť není Hausdorffův.

33. *Otočením* v $\mathbf{R}^2$ o úhel $\varphi \in \mathbf{R}$ rozumíme homeomorfismus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definovaný rovnicemi

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ \bar{y} &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Označme symbolem $\mathbf{R}$ zároveň aditivní grupu reálných čísel. Zobrazení $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, přiřazující bodu $(\varphi,(x,y))$ bod $(\bar{x},\bar{y})$, je *levá akce* grupy $\mathbf{R}$ na $\mathbf{R}^2$ (porov. př. (9) odst. 3.7 str. 46).

(a) Ukažte, že orbita bodu $(x,y) \neq (0,0)$ je kružnice v $\mathbf{R}^2$ se středem v počátku a orbita bodu $(0,0)$ je množina $\{(0,0)\}$ ("singulární orbita").

(b) Ukažte, že faktorový topologický prostor $\mathbf{R}^2/\mathbf{R}$ je homeomorfní s intervalem $[0,\infty)$.

Řešení. (a) Z (1) ihned vyplývá, že $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = x^2 + y^2$; body (x,y), $F(\varphi,(x,y)) = (\bar{x},\bar{y})$ tedy leží na kružnici se středem v počátku.

(b) Klademe $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Ihned je vidět, že faktorový prostor $\mathbf{R}^2/\mathscr{R}_g$ je totožný s prostorem orbit levé akce F. Prověříme předpoklady Věty 17. odst. 3.5 str. 41. Zobrazení $g : \mathbf{R}^2 \to [0,\infty)$ je spojité a surjektivní. Dále pro každé $r \in [0,\infty)$ klademe $x(r) = r$, $y(r) = 0$. Zobrazení $r \to (x(r),y(r)) = (r,0)$ je spojitý řez zobrazení g. Prostory $\mathbf{R}^2/\mathbf{R}$ a $[0,\infty)$ jsou tedy homeomorfní.

34. Buď $f : X \to Y$ spojité surjektivní zobrazení topologických prostorů. Dokažte, že zobrazení $g : X/\mathscr{R}_F \to Y$, definované kanonickým rozkladem $f = g \circ \pi_f$ zobrazení f, je homeomorfismus.

Řešení. g je spojitá bijekce, stačí tedy ukázat, že zobrazení g je uzavřené (cv. 10 kap. 2). Buď $A \subset X/\mathscr{R}_f$ uzavřená množina. Pak množina $B = \pi_f^{-1}(A)$ je uzavřená, neboť π_f je spojité, a tedy $f(B) = g(A)$ je uzavřená množina, neboť f je uzavřené.

Část 4

Sítě

V elementární analýze se čtenář již setkal s pojmem konvergentní posloupnosti reálných čísel. Posloupnost $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$ se nazývá konvergentní k číslu $x \in \mathbf{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n \in \mathbf{N}$ tak, že $|x_i - x| < \varepsilon$ pro všechna $i \geq n$. Zřejmě dostaneme ekvivalentní definici, budeme-li požadovat, aby ke každému okolí U bodu x existovalo číslo $n \in \mathbf{N}$ tak, že $x_i \in U$ pro všechna $i \geq n$. Číslo x se přitom nazývá limitním bodem (limitou) posloupnosti $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$. Důsledkem této definice je tvrzení, charakterizující uzavřenou množinu v $\mathbf{R}$ jako množinu, která s každou konvergentní posloupností obsahuje zároveň její limitu.

V případě reálné přímky je tedy topologie plně charakterizována konvergentními posloupnostmi. V této kapitole se budeme zabývat problémem, zda je tomu tak i v případě obecného topologického prostoru. Půjde nám, zhruba řečeno, o konstrukci topologie na množině, na níž je (vhodným způsobem) definován pojem konvergence.

Pojem konvergentní posloupnosti lze zavést v libovolném topologickém prostoru. Mezi topologickými prostory, které nejsou prvního typu spočetnosti, však existují prostory, jejichž topologie nemůže být úplně popsána posloupnostmi. Chceme-li v těchto prostorech charakterizovat topologii pomocí konvergence, musíme pojem posloupnost nahradit obecnějším pojmem sítě, t.j. zobrazením, na jehož definičním oboru je definována struktura usměrnění. Tato kapitola je věnována základům Mooreovy–Smithovy–Kelleyho teorie sítí; řada teoretických i aplikačních aspektů této teorie doposud není rozpracována.

4.1. Sítě

Buď I neprázdná množina. Binární relace $\leq$ na I se nazývá *usměrnění* množiny I, splňuje-li tyto tři podmínky:

(1) Platí-li pro body ι, κ, $\lambda \in I$, že $\iota \leq \kappa$, $\kappa \leq \lambda$, pak $\iota \leq \lambda$.

(2) Pro každé $\iota \in I$ platí $\iota \leq \iota$.

(3) K libovolným bodům ι, $\kappa \in I$ existuje $\lambda \in I$ tak, že $\iota, \kappa \leq \lambda$. Množina I spolu s daným usměrněním se nazývá *usměrněná množina*. Splňují-li body ι, $\kappa \in I$ podmínku $\iota \leq \kappa$, píšeme také $\kappa \geq \iota$.

Buď I usměrněná množina, $\leq$ její usměrnění. Podmnožina $J \subset I$ se nazývá *kofinální*, jestliže ke každému $\iota \in I$ existuje $\kappa \in J$ tak, že $\kappa \geq \iota$. Relace $\leq$ definuje na kofinální množině J usměrnění. Skutečně, první a druhá podmínka z definice usměrnění je splněna. Dále pro libovolné κ_1, $\kappa_2 \in J$ existuje bod $\kappa \in I$ tak, že κ_1, $\kappa_2 \leq \kappa$ (podmínka (3));

k tomuto κ lze ovšem najít element $\kappa' \in J$ tak, že $\kappa' \geq \kappa$. Platí tedy κ_1, $\kappa_2 \leq \kappa'$ a $\leq$ je usměrnění na J.

Sítí v množině X budeme rozumět libovolné zobrazení $S : I \to X$, kde I je nějaká usměrněná množina. Množina I se přitom nazývá *indexová množina* sítě S, její elementy se nazývají *indexy*. Usměrnění indexové množiny I bude vždy označováno symbolem $\leq$. Síť S, pro kterou I je množina $\mathbf{N}$ celých kladných čísel s přirozeným usměrněním, se nazývá *posloupnost*.

Síť S bude také označována symbolem $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$; půjde-li o posloupnost, budeme psát $S = (x_i)_{i \in \mathbf{N}}$ nebo prostě $S = (x_i)$. V tomto označení x_ι je bod $S(\iota) \in X$, přiřazený indexu $\iota \in I$ zobrazením $S : I \to X$.

Řekneme, že síť $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$ *leží v množině* $A \subset X$, jestliže $x_\iota \in A$ pro každé $\iota \in I$. Síť S se nazývá *konstantní*, jestliže $x_\iota = x$ pro jistý bod $x \in X$ a každé $\iota \in I$.

Síť $T = (y_\kappa)_{\kappa \in K}$ se nazývá *podsíť* sítě $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$ v X, jestliže existuje zobrazení $\varphi : K \to I$, splňující tyto podnínky:

(1) $T = S \circ \varphi$, t.j. $y_\kappa = x_{\varphi(\kappa)}$ pro každé $\kappa \in K$.

(2) Ke každému $\iota_0 \in I$ existuje index $\kappa_0 \in K$ tak, že pro každé $\kappa \geq \kappa_0$ platí $\varphi(\kappa) \geq \iota_0$.

Je-li $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$ síť, $K \subset I$ kofinální množina, pak zřejmě síť $T = (x_\kappa)_{\kappa \in K}$ je podsíť sítě S: za zobrazení φ z definice podsítě vezmeme zobrazení, definované vztahem $\varphi(\kappa) = \kappa$.

4.2. Konvergentní sítě

Buď X topologický prostor, $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$ síť v množině X. Bod $x \in X$ se nazývá *limitním bodem* sítě S, jestliže ke každému jeho okolí U existuje index $\iota_0 \in I$ tak, že $x_\iota \in U$ pro všechna $\iota \geq \iota_0$. Limitní bod sítě S nazýváme také *limitou* sítě S. Je-li x limitní bod sítě S, říkáme, že S *konverguje* k bodu x. Množinu limitních bodů sítě S označujeme $\lim S$. Síť S se nazývá *konvergentní*, platí-li $\lim S \neq \emptyset$.

Libovolný limitní bod sítě $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$ označujeme symbolem $\lim_{\iota \in I} x_\iota$ nebo prostě $\lim x_\iota$.

Z definice ihned vyplývá, že každá konstantní síť $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$ v topologickém prostoru X taková, že $x_\iota = x$, konverguje k bodu x.

Ukážeme, že limitní bod sítě v topologickém prostoru je limitním bodem každé její podsítě.

Věta 1. *Buď S konvergentní síť v topologickém prostoru X, $\lim S$ množina jejích limitních bodů. Pak libovolná podsíť T sítě S konverguje v X a $\lim S \subset \lim T$.*

Důkaz. Nechť $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$, $x \in \lim S$, $T = (y_\kappa)_{\kappa \in K}$. Buď $\varphi : K \to I$ zobrazení, splňující podmínky (1), (2) z definice podsítě. Zvolme libovolné okolí U bodu x. Existuje index $\iota_0 \in I$ tak, že $x_\iota \in U$ pro každé $\iota \geq \iota_0$. Dále existuje $\kappa_0 \in K$ tak, že $\varphi(\kappa) \geq \iota_0$ pro každé $\kappa \geq \kappa_0$. Pro každé $\kappa \geq \kappa_0$ tedy $y_\kappa = x_{\varphi(\kappa)} \in U$, t.j. $x \in \lim T$.

Následující tvrzení ukazuje, jak lze pomocí konvergentních sítí zkonstruovat uzávěr podmnožiny topologického prostoru; jeho důsledek podává přímou charakteristiku uzavřených množin.

Věta 2. *Buď A neprázdná množina v topologickém prostoru X. Bod $x \in X$ patří uzávěru $\operatorname{cl} A$ množiny A tehdy a jen tehdy, když existuje síť v A konvergující k tomuto bodu.*

Důkaz. 1. Předpokládejme, že $x \in \operatorname{cl} A$. Nechť I je množina všech okolí bodu x usměrněná množinou relací $\supset$. Pro U, $V \in I$ klademe $U \leq V$ platí-li $U \supset V$. Každému $U \in I$ přiřadíme nějaký bod x_U z neprázdné množiny $U \cap A$ a položíme $S = (x_U)_{U \in I}$. Zvolíme-li U pevně, pak pro každé $V \geq U$, t.j. $V \subset U$, platí $x_V \in V \cap A \subset U$. Síť S tedy konverguje k x.

2. Předpokládejme, že existuje síť $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$ v X ležící v A, konvergující k bodu $x \in X$. Buď U libovolné okolí bodu x. Podle předpokladu existuje index $\iota_0 \in I$ tak, že $x_\iota \in U \cap A$ pro každé $\iota \geq \iota_0$. Množina $U \cap A$ je tedy neprázdná. Z libovolnosti U vyplývá, že $x \in \operatorname{cl} A$.

Důsledek. Následující podmínky jsou ekvivalentní:
(1) Množina $A \subset X$ je uzavřená.
(2) S každou sítí S ležící v množině $A \subset X$ leží v A také množina $\lim S$.

Důkaz. Nechť $A \subset X$ je uzavřená množina, nechť S je síť v X ležící v množině A. Je-li $\lim S = \emptyset$, tvrzení platí. Nechť $\lim S \neq \emptyset$; označme $\lim S = B$. V každém okolí U bodu $x \in B$ leží body sítě S, takže $U \cap A \neq \emptyset$. Odtud plyne, že $x \in \operatorname{cl} A = A$, t.j. $B \subset A$.

Obráceně nechť pro každou síť S v A platí $\lim S \subset A$. Buď $x \in \operatorname{cl} A$ bod. Podle Věty 2. odst. 4.2 str. 88 existuje síť ležící v množině A, konvergující k bodu x. Ovšem podle předpokladu $x \in A$, t.j. $\operatorname{cl} A \subset A$, odkud již vyplývá, že A je uzavřená.

Věta 3. *Předpokládejme, že síť S v topologickém prostoru X nekonverguje k bodu $x \in X$. Pak existuje podsíť T sítě S taková, že žádná podsíť sítě T nekonverguje k bodu x.*

Důkaz. Předpokládejme, že síť $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$ v X nekonverguje k bodu x. t.j. $x \notin \lim S$. Existuje tedy okolí U bodu x takové, že k libovolnému indexu $\iota \in I$ lze najít index $\varphi(\iota) \geq \iota$, splňující podmínku $x_{\varphi(\iota)} \notin U$. Výběrem takového indexu dostáváme zobrazení $I \ni \iota \to \varphi(\iota) \in I$. Toto zobrazení splňuje podmínky z definice podsítě. Prověříme podmínku (2). Buď $\iota_0 \in I$ libovolný index. Položme $\kappa_0 = \varphi(\iota_0)$. Buď $\iota \in I$ index takový, že $\iota \geq \kappa_0$. Pak $\varphi(\iota) \geq \iota \geq \kappa_0 = \varphi(\iota_0) \geq \iota_0$, což jsme chtěli ukázat.

Dále klademe $T = S \circ \varphi$, t.j. $T = (x_{\varphi(\iota)})_{\iota \in I}$. Podle definice je T podsíť sítě S a žádný z bodů $x_{\varphi(\iota)}$ neleží v okolí U. T je tedy síť v uzavřené množině $X \backslash U$ a každý její limitní bod musí patřit množině $X \backslash U$ (Věta 2. odst. 4.2 str. 88). Zároveň limitní bod každé podsítě sítě T musí patřit množině $X \backslash U$.

Přejdeme nyní k vyšetřování dvojné limity systému sítí. Zavedeme k tomu některé nové pojmy.

Buď I usměrněná množina a předpokládejme, že každému $\iota \in I$ je přiřazena usměrněná množina J_ι. Položme $K = I \times \prod_\iota J_\iota$, kde $\prod_\iota J_\iota$ je součin systému množin $(J_\iota)_{\iota \in I}$, t.j. množina všech zobrazení f, přiřazujících bodu $\iota \in I$ bod $f(\iota) \in J_\iota$. Dále pro libovolné (ι_1, f_1), $(\iota_2, f_2) \in K$ klademe $(\iota_1, f_1) \leq (\iota_2, f_2)$, jestliže platí $\iota_1 \leq \iota_2$ a $f_1(\iota) \leq f_2(\iota)$ pro každé $\iota \in I$. Ukážeme, že binární relace $\leq$ je usměrnění množiny K. Předpokládejme, že pro (ι_1, f_1), (ι_2, f_2), $(\iota_3, f_3) \in K$ platí $(\iota_1, f_1) \leq (\iota_2, f_2)$ a $(\iota_2, f_2) \leq (\iota_3, f_3)$. Pak platí $\iota_1 \leq \iota_2$, $\iota_2 \leq \iota_3$, t.j. $\iota_1 \leq \iota_3$; dále pro každé $\iota \in I$ $f_1(\iota) \leq f_2(\iota)$, $f_2(\iota) \leq f_3(\iota)$, t.j. $f_1(\iota) \leq f_3(\iota)$. Je tedy splněna podmínka (1) z definice usměrnění. Podmínka (2) je evidentně splněna. Dále k ι_1, ι_2 existuje $\kappa \in I$ tak, že ι_1, $\iota_2 \leq \kappa$; analogicky k f_1, f_2 a k libovolnému $\iota \in I$ existuje index $g(\iota) \in J_\iota$ tak, že $f_1(\iota)$, $f_2(\iota) \leq g(\iota)$. Evidentně $g \in \prod_\iota J_\iota$ a (ι_1, f_1), $(\iota_2, f_2) \leq (\kappa, g)$. Je tedy splněna také podmínka (3) z definice usměrnění a K je usměrněná množina.

Usměrnění $\leq$ množiny K se nazývá *přirozené.*

Buď I usměrněná množina, $(S_\iota)_{\iota \in I}$ systém sítí v topologickém prostoru X. Označme $S_\iota = (x_{\iota,\kappa})_{\kappa \in J_\iota}$. Položme $K = I \times \prod_\iota J_\iota$ a uvažujme množinu K s jejím přirozeným usměrněním. Síť $S = (x_{(\iota,f)})_{(\iota,f)\in K}$, definovaná vztahem $S(\iota, f) = S_\iota(f(\iota)) = x_{(\iota,f)} = x_{\iota,f(\iota)}$, se nazývá *asociovaná* se systémem sítí $(S_\iota)_{\iota\in I}$. Předpokládejme, že každá ze sítí S_ι je konvergentní, t.j. platí $\lim S_\iota \neq \emptyset$ pro každé $\iota \in I$. Síť $S' = (y_\iota)_{\iota\in I}$ se nazývá *limitní* síť systému sítí $(S_\iota)_{\iota\in I}$, jestliže $y_\iota \in \lim S_\iota$, t.j.

$$y_\iota = \lim_{\kappa\in J_\iota} x_{\iota,\kappa}$$

pro každé $\iota \in I$. Je zřejmé, že systém sítí může mít více limitních sítí.

Věta 4. *Buď I usměrněná množina, $(S_\iota)_{\iota\in I}$ systém konvergentních sítí v topologickém prostoru X. Pro asociovanou síť S a každou limitní síť S' systému sítí $(S_\iota)_{\iota\in I}$ platí* $\lim S' \subset \lim S$, *t.j. ke každému limitnímu bodu*

$$\lim_{\iota\in I} \lim_{\kappa\in J_\iota} x_{\iota,\kappa}$$

sítě S' existuje limitní bod

$$\lim_{(\iota,f)\in K} x_{(\iota,f)}$$

sítě S tak, že

$$\lim_{\iota\in I} \lim_{\kappa\in J_\iota} x_{\iota,\kappa} = \lim_{(\iota,f)\in K} x_{(\iota,f)}$$

Důkaz. Nechť $\lim S' \neq \emptyset$, $x \in \lim S'$, nechť U je libovolné okolí bodu x. Existuje index $\iota_0 \in I$ tak, že

$$y_\iota = \lim_{\kappa\in J_\iota} x_{\iota,\kappa} \in U$$

pro každé $\iota \geq \iota_0$. U je tedy okolí každého bodu y_ι, $\iota \geq \iota_0$, a jelikož $y_\iota \in \lim S_\iota$, existuje index $\kappa_\iota \in J_\iota$ tak, že pro každé $\kappa \geq \kappa_\iota$ platí $S_\iota(\kappa) \in U$. Pro $\iota \geq \iota_0$ klademe $f_0(\iota) = \kappa_\iota$. Pro $\iota \not\geq \iota_0$ vybereme libovolně prvek $\kappa_\iota \in J_\iota$ a opět klademe $f_0(\iota) = \kappa_\iota$. Nechť index $(\iota, f) \in K$ splňuje podmínku $(\iota, f) \geq (\iota_0, f_0)$. Pak $\iota \geq \iota_0$ a $f(\lambda) \geq f_0(\lambda)$ pro každé $\lambda \in I$. Pro bod $S(\iota, f) = S_\iota(f(\iota))$ tedy platí $\iota \geq \iota_0$, $f(\iota) \geq f_0(\iota) = \kappa_\iota$, takže $S_\iota(f(\iota)) \in U$ a $x \in \lim S$.

Buď $S = (x_\iota)_{\iota\in I}$ síť v množině X, $f : X \to Y$ zobrazení. *Obrazem* sítě S vzhledem k zobrazení f rozumíme síť $f(S) = f \circ S = (f(x_\iota))_{\iota\in I}$ v množině Y.

Věta 5. *Zobrazení topologických prostorů $f : X \to Y$ je spojité tehdy a jen tehdy, když platí $f(\lim S) \subset \lim f(S)$ pro každou síť S v X.*

Důkaz. 1. Předpokládejme, že f je spojité. Buď $S = (x_\iota)_{\iota\in I}$ síť v X, $x \in \lim S$ bod, U okolí bodu $f(x)$. Existuje okolí V bodu x tak, že $f(V) \subset U$. Jelikož $x \in \lim S$, existuje $\iota_0 \in I$ tak, že $x_\iota \in V$ pro každé $\iota \geq \iota_0$. Platí tedy pro každé takové ι, že $f(x_\iota) \in U$ a $f(x)$ musí být limitním bodem sítě $f(S)$.

2. Předpokládejme, že pro každou síť S v X platí $f(\lim S) \subset \lim f(S)$. Buď $A \subset X$ libovolná množina, $x \in \operatorname{cl} A$ bod. Pak podle Věty 2. odst. 4.2 str. 88 existuje síť S v A konvergující k x. Obraz $f(S)$ sítě S je evidentně síť v podprostoru $f(A) \subset Y$ a z toho, že $x \in \lim S$, podle předpokladu vyplývá, že $f(x) \in \lim f(S)$. Opět s využitím Věty 2. odst. 4.2 str. 88 dostáváme, že $f(x) \in \operatorname{cl} f(A)$. Platí tedy $f(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} f(A)$ a z libovolnosti množiny A vyplývá, že f musí být spojité zobrazení (Věta 2. odst. 2.1 str. 18).

Věta 6. *Buďte τ_1, τ_2 dvě topologie na množině X a předpokládejme, že libovolná síť v X je konvergentní v (X, τ_1) tehdy a jen tehdy, když je konvergentní v (X, τ_2). Pak $\tau_1 = \tau_2$.*

Důkaz. Podle Věty 5. odst. 4.2 str. 90 zobrazení $\mathrm{id}_X : X \to X$ je homeomorfismus (X, τ_1) na (X, τ_2).

Vyšetříme nyní podmínky oddělitelnosti topologického prostoru.

Věta 7. *Topologický prostor X je Hausdorffův tehdy a jen tehdy, když každá síť v X má nejvýše jeden limitní bod.*

Důkaz. 1. Předpokládejme, že X je Hausdorffův. Buď $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$ síť v X, x_1, $x_2 \in \lim S$ její limitní body. Zvolme okolí U_1 bodu x_1 a okolí U_2 bodu x_2. Existuje index ι_1 (resp. ι_2) tak, že $x_\iota \in U_1$ a $x_\iota \in U_2$ pro každé $\iota \geq \iota_1$, ι_2. Z definice vyplývá, že množina indexů ι je neprázdná, takže $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Body x_1, x_2 tedy nelze oddělit otevřenými množinami a z předpokladu oddělitelnosti plyne $x_1 = x_2$.

2. Předpokládejme, že X není oddělitelný. Ukážeme, že pak musí existovat síť S, která má dva různé limitní body. Buďte x_1, $x_2 \in X$ dva různé body, které nelze oddělit otevřenými množinami. Pro libovolné okolí U_1 (resp. U_2) bodu x_1 (resp. x_2) tedy platí $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Označme I množinu všech množin $W \subset X$ tavaru $W = U_1 \cap U_2$. Klademe $U_1 \cap U_2 \leq V_1 \cap V_2$, jestliže $U_1 \cap U_2 \geq V_1 \cap V_2$. Pak binární relace $\leq$ na I je usměrnění. Prověříme podmínku (3) z definice usměrnění. Pro dané $U_1 \cap U_2$, $V_1 \cap V_2 \ni I$ klademe $W_1 = U_1 \cap V_1$, $W_2 = U_2 \cap V_2$; pak $W_1 \cap W_2 \in I$ a $W_1 \cap W_2 = U_1 \cap U_2 \cap V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2$, $V_1 \cap V_2$, t.j. $U_1 \cap U_2$, $V_1 \cap V_2 \subset W_1 \cap W_2$. Klademe $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$, kde x_ι je libovolný bod množiny $\iota = U_1 \cap U_2$. Buď U_0 libovolné okolí bodu x_1, V_0 libovolné okolí x_2. Položme $\iota_0 = U_0 \cap V_0$. Pro libovolné $\iota = U \cap V \in I$ takové, že $\iota = U \cap V \geq U_0 \cap V_0 = \iota_0$ platí $x_\iota \in U \cap V \subset U_0 \cap V_0 \subset U_0$, V_0, t.j. x_1, $x_2 \in \lim S$. Jestliže tedy v X neexistuje síť, která má dva různé limitní body, X musí být Hausdorffův.

Pro libovolnou síť S v Hausdorffově topologickém prostoru je tedy množina $\lim S$ buď prázdná nebo jednoprvková. Je-li jednoprvková a obsahuje bod x, píšeme $x = \lim S$.

4.3. Třídy konvergence

Komplexem sítí na množině X rozumíme systém $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_x)_{x \in X}$, kde $\mathscr{S}_x$ je množina sítí v X. Je-li S síť v X taková, že $S \in \mathscr{S}_x$ pro nějaké $x \in X$, říkáme, že bod x je *$\mathscr{S}$-limitní bod* sítě S. Síť může mít více $\mathscr{S}$-limitních bodů. Množina $\mathscr{S}$-limitních bodů sítě S je označována $\lim_{\mathscr{S}} S$. Je-li množina $\lim_{\mathscr{S}} S$ neprázdná, říkáme, že síť S je *$\mathscr{S}$-konvergentní*.

Buď I usměrněná množina, $(S_\iota)_{\iota \in I}$ systém sítí v X, $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_x)_{x \in X}$ komplex sítí na X. Předpokládejme, že každá ze sítí S_ι je $\mathscr{S}$-konvergentní, t.j. že $\lim_{\mathscr{S}} S_\iota \neq \emptyset$ pro každé $\iota \in I$. Buď $T = (y_\iota)_{\iota \in I}$ síť v X. T se nazývá $\mathscr{S}$-limitní síť systému sítí $(S_\iota)_{\iota \in I}$, jestliže $y_\iota \in \lim_{\mathscr{S}} S_\iota$ pro každé $\iota \in I$.

Komplex sítí $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_x)_{x \in X}$ se nazývá *třída konvergence*, jestliže jsou splněny tyto podmínky:

(1) Pro každé $x \in X$ množina $\mathscr{S}_x$ obsahuje každou konstantní síť $S = (x_\kappa)_{\kappa \in K}$, kde $x_\kappa = x$.

(2) Patří-li síť S množině $\mathscr{S}_x$, pak každá podsíť sítě S patří množině $\mathscr{S}_x$.

(3) Nepatří-li síť S v X množině $\mathscr{S}_x$, pak existuje podsíť T sítě S taková, že žádná z podsítí sítě T nepatří množině $\mathscr{S}_x$.

(4) Pro libovolnou usměrněnou množinu I a libovolný systém $\mathscr{S}$-konvergentních sítí $(S_\iota)_{\iota \in I}$ v X platí $\lim_{\mathscr{S}} S' \subset \lim_{\mathscr{S}} S$, kde S' je libovolná $\mathscr{S}$-limitní síť systému sítí $(S_\iota)_{\iota \in I}$ a S je síť asociovaná se systémem sítí $(S_\iota)_{\iota \in I}$.

Buď $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_x)_{x\in X}$ třída konvergence na množině X. Pro každé $A \subset X$ označme $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A$ množinu všech bodů $x \in X$ takových, že existuje síť $S \in \mathscr{S}_x$ ležící v A. Ukážeme, že korespondence $A \to \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A$ splňuje Kuratowského axiony uzávěru (podmínky (1) – (4) Věty 5. odst. 1.3 str. 4); třídu konvergence $\mathscr{S}$ lze tedy použít na topologizaci množiny X. Všimněme si přitom, že axiomy (1) – (4) třídy konvergence odpovídají základním vlastnostem konvergentních sítí v topologických prostorech, dokázaných v předcházejících větách (Věta1. odst. 4.2 str. 88, Věta 3. odst. 4.2 str. 89, Věta 4. odst. 4.2 str. 90). Nechť $\mathscr{P}X$ označuje množinu všech podmnožin množiny X.

Věta 8. *Buď $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_x)_{x\in X}$ třída konvergence na množině X.*

(a) *Na X existuje jediná topologie τ taková, že zobrazení $\mathscr{P}X \ni A \to \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A \in \mathscr{P}X$ je topologický uzávěr asociovaný s τ.*

(b) *Síť S v X konverguje k bodu $x \in X$ v topologii τ tehdy a jen tehdy, když $S \in \mathscr{S}_x$.*

Důkaz. (a) Prověříme podmínky (1) – (4) Věty 5. odst. 1.3 str. 4.

Evidentně platí $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} \emptyset = \emptyset$. Dále pro libovolnou množinu $A \subset X$ a bod $x \in A$ existuje síť v A patřící $\mathscr{S}_x$ (konstantní síť); platí tedy $A \subset \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A$.

Dokážeme, že pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A) = \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A$. Jelikož jsme již dokázali, že $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A \subset \mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A)$, stačí ukázat, že $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A \supset \mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A)$. Buď $x \in \mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A)$ bod. Chceme najít síť $S \in \mathscr{S}_x$ ležící v A. Jelikož $x \in \mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A)$, existuje síť $T = (x_\iota)_{\iota\in I} \in \mathscr{S}_x$ ležící v $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A$. Pro každé ι platí $x_\iota \in \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A$, takže existuje síť $S_\iota : J_\iota \to X$, $S_\iota = (x_{\iota,\kappa})_{\kappa\in J_\iota} \in \mathscr{S}_x$ ležící v A. Podle definice je x $\mathscr{S}$-limitním bodem sítě S a T je $\mathscr{S}$-limitní síť systému sítí $(S_\iota)_{\iota\in I}$. Označme $K = I \times \prod_\iota J_\iota$ a uvažujme K s přirozeným usměrněním. Nechť $S = (x_{(\iota,f)})_{(\iota,f)\in K}$ je síť, asociovaná se systémem sítí $(S_\iota)_{\iota\in I}$. Jelikož $x \in \lim_{\mathscr{S}} T$, čtvrtá podmínka z definice třídy konvergence zaručuje, že $x \in \lim_{\mathscr{S}} S$. Ovšem podle definice $x_{(\iota,f)} = S_\iota(f(\iota)) = x_{\iota,f(\iota)} \in A$ pro každé $(\iota, f) \in K$. Platí tedy, že $S \in \mathscr{S}_x$ a síť S leží celá v A, t.j. $x \in \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A$.

Nakonec dokážeme, že pro libovolné množiny $A, B \subset X$ platí $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(A\cup B) = \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A \cup \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} B$. Leží-li bod $x \in X$ v $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A$, pak podle definice leží také v $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(A \cup B)$; platí tedy $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A$, $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} B \subset \mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(A\cup B)$, t.j. $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A \cup \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} B \subset \mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(A\cup B)$. Zbývá tedy dokázat, že $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(A\cup B) \subset \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A \cup \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} B$.

Buď $x \in \mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(A \cup B)$ bod. Existuje síť $S = (x_\iota)_{\iota\in I}$ v $A \cup B$ tak, že $S \in \mathscr{S}_x$, t.j. $x = \lim_{\mathscr{S}} S$. Klademe $I_A = \{\iota \in I \mid x_\iota \in A\}$, $I_B = \{\iota \in I \mid x_\iota \in B\}$; evidentně $I = I_A \cup I_B$. Ukážeme, že alespoň jedna z množin I_A, $I_B \subset I$ je kofinální. Předpokládejme, že I_A není kofinální. Existuje tedy index $\iota_0 \in I_A$ tak, že každý index $\kappa \in I$, splňující podmínku $\iota_0 \leq \kappa$, patří množině I_B. Buď $\iota \in I$ libovolný index. Podle definice usměrnění existuje index $\kappa \in I$ tak, že ι, $\iota_0 \leq \kappa$. Index κ musí ovšem patřit množině I_B a tedy množina I_B je kofinální.

Ukázali jsme, že alespoň jedna z množin I_A, I_B je kofinální. Nechť je I_A kofinální. Pak I_A je usměrněna pomocí usměrnění množiny I. Označme $\varphi_A : I_A \to I$ kanonickou injekci. Pak $I_A \ni \kappa \to S \circ \varphi_A(\kappa) \in X$ je podsíť sítě S. Z druhé podmínky z definice třídy konvergence vyplývá, že $S \circ \varphi_A \in \mathscr{S}_x$. Ovšem $S \circ \varphi_A$ leží v A, takže $x \in \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A$.

Je-li množina I_B kofinální, analogicky dostaneme, že $x \in \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} B$. V každém případě však $x \in \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A \cup \mathrm{cl}_{\mathscr{S}} B$, což jsme chtěli dokázat.

(b) Nechť τ je topologie na X taková, že $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}}$ je topologický uzávěr asociovaný s τ. Nechť $x \in X$ je bod, $S \in \mathscr{S}_x$, $S = (x_\iota)_{\iota\in I}$. Předpokládejme, že S nekonverguje k bodu x v topologii τ. Pak existuje okolí U bodu x takové, že ke každému $\iota \in I$ platí pro jistý index $\kappa \geq \iota$, že $x_\kappa \notin U$. Uvažujme takové okolí U a označme $J = \{\kappa \in I \mid x_\kappa \notin U\}$; evidentně ke každému $\iota \in I$ existuje $\kappa \in J$ tak, že $\kappa \geq \iota$, takže množina $J \subset I$ je kofinální.

Je tedy definována podsíť $T = (x_\kappa)_{\kappa\in J}$ sítě S a tato podsíť $\mathscr{S}$-konverguje k x, t.j. $T \in \mathscr{S}_x$ (podmínka (2) z definice třídy konvergence). Síť T ovšem leží v $X\backslash U$, takže $x \in \mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(X\backslash U)$ podle definice zobrazení $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}}$. Na druhé straně $x \notin X\backslash U$, takže $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}}(X\backslash U) \neq X\backslash U$ a množina $X\backslash U$ nemůže být uzavřená v topologii τ. S tedy musí konvergovat k x v topologii τ. Je tedy ukázáno, že každá síť z dané třídy konvergence $\mathscr{S}$ konverguje v topologii τ.

Buď S síť v X konvergentní k bodu $x \in X$ v topologii τ. Předpokládejme, že S není $\mathscr{S}$-konvergentní k x, t.j. $S \notin \mathscr{S}_x$.

Podle předpokladu (podmínka (3) z definice třídy konvergence) existuje podsíť $T = (y_\kappa)_{\kappa\in J}$ sítě S taková, že žádná podsíť sítě T není $\mathscr{S}$-konvergentní k bodu x. Přitom S konverguje k x v topologii τ, takže T musí také konvergovat k x v τ.

Pro každé $\kappa \in J$ klademe $K_\kappa = \{\lambda \in J \mid \lambda \geq \kappa\}$. K je kofinální množina v J: ke každému $\iota \in J$ existuje prvek $\lambda \in J$ tak, že $\lambda \geq \iota, \kappa$ (podmínka (3) z definice usměrnění) a evidentně $\lambda \in K_\kappa$. Dále klademe $A_\kappa = \{x \in X \mid x = y_\lambda,\ \lambda \in K\}$, $T_\kappa = (y_\lambda)_{\lambda\in K}$. T_κ je podsíť sítě T pro každé $\kappa \in J$. Podsíť T_κ sítě T leží v množině A_κ; jelikož x je limitním bodem T, je také limitním bodem T_κ (Věta 1. odst. 4.2 str. 88) a tedy $x \in \mathrm{cl}\, A$ (Věta 2. odst. 4.2 str. 88).

Klademe $K = J \times \prod_\kappa K_\kappa$. Uvažujme množinu K s přirozeným usměrněním. Dále uvažujme systém $(T_\kappa)_{\kappa\in J}$ sítí v X. Konstantní síť $(x_\kappa)_{\kappa\in J}$, kde $x_\kappa = x$, je limitní síť systému sítí $(T_\kappa)_{\kappa\in J}$ a bod x je $\mathscr{S}$-limitním bodem této limitní sítě (podmínka (1) z definice třídy konvergence). Označíme-li $W = (w_{(\kappa,f)})_{(\kappa,f)\in K}$ síť, asociovanou se systémem sítí $(T_\kappa)_{\kappa\in J}$, vidíme, že $x \in \lim_{\mathscr{S}} W$ (podmínka (4) z definice třídy konvergence). Podle definice ovšem $w_{(\kappa,f)} = y_{f(\kappa)}$; $f(\kappa) \in K$, t.j. $w_{(\kappa,f)} \in A_\kappa$, takže W je podsíť sítě T. Nalezli jsme tedy podsíť sítě T, která $\mathscr{S}$-konverguje k bodu x.

Je-li síť S konvergentní k x v topologii τ a přitom není $\mathscr{S}$-konvergentní k x, nemůže být splněna podmínka (3) z definice třídy konvergence. S tedy musí být $\mathscr{S}$-konvergentní k bodu x.

Tím je důkaz teorému ukončen.

4.4. Konvergence v prostorech prvního typu spočetnosti

K vyšetřování uzávěru množiny v topologickém prostoru prvního typu spočetnosti nemusíme použít všechny sítě; stačí se omezit na posloupnosti. Podobně je tomu při vyšetřování spojitosti zobrazení topologických prostorů, jehož definiční obor je topologický prostor prvního typu spočetnosti. Spřesníme to.

Věta 9. *Buď X topologický prostor prvního typu spočetnosti.*

(a) *Bod $x \in X$ leží v uzávěru $\mathrm{cl}\, A$ množiny $A \subset X$ tehdy a jen tehdy, když existuje posloupnost $S = (x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ v A taková, že $x \in \lim S$.*

(b) *Množina $A \subset X$ je uzavřená tehdy a jen tehdy, když obsahuje limitní body každé posloupnosti svých bodů.*

(c) *Zobrazení $f : X \to Y$, kde Y je topologický prostor, je spojité v bodě $x_0 \in X$ tehdy a jen tehdy, když pro každou posloupnost $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ v X konvergující k bodu x_0 posloupnost $(f(x_i))_{i\in\mathbf{N}}$ v Y konverguje k bodu $f(x_0)$.*

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $x \in \mathrm{cl}\, A$ a zvolme spočetnou lokální bázi topologie (U_i) v bodě x. Možno předpokládat, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ (Věta 10. odst. 1.5 str. 7). Pro každé i platí $U_i \cap A \neq \emptyset$ a tedy existuje bod $x_i \in U_i \cap A$. Posloupnost $S = (x_i)$ bodů množiny A konverguje k bodu x, t.j. $x \in \lim S$.

Nechť $x \in X$ a předpokládejme, že existuje posloupnost bodů v A konvergující k x. Pak nutně $x \in \operatorname{cl} A$ podle Věty 2. odst. 4.2 str. 88.

(b) Tvrzení je přímým důsledkem (a).

(c) Buď f spojité v x_0, buď (x_i) posloupnost v X konvergující k x_0. Pro libovolné okolí U bodu $f(x_0) \in Y$ je $f^{-1}(U)$ okolí bodu x_0 a tedy existuje index ι_0 tak, že $x_i \in f^{-1}(U)$ pro každé $i \geq i_0$. Pak tedy $f(x_i) \in U$ pro každé $i \geq i_0$ a $f(x_0)$ je limitní bod posloupnosti $(f(x_i))$.

Předpokládejme, že pro libovolnou posloupnost (x_i) v X konvergující k x_0 posloupnost $(f(x_i))$ konverguje k $f(x_0)$. Buď (U_i) spočetná lokální báze topologie v bodě x_0 a předpokládejme, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \ldots$ (Věta 10. odst. 1.5 str. 7 K tomu, aby zobrazení $f : X \to Y$ bylo spojité v bodě x_0 stačí, aby k libovolnému okolí V bodu $f(x_0)$ existoval index i tak, že $f(U_i) \subset V$. Předpokládejme opak, t.j. předpokládejme, že pro jisté okolí V bodu $f(x_0)$ pro každé i platí $f(U_i) \not\subset V$. Ke každému i tedy existuje bod $x_i \in U_i$ tak, že $f(x_i) \notin V$. Ovšem posloupnost (x_i) konverguje k x_0 a tedy posloupnost $(f(x_i))$ konverguje podle předpokladu k $f(x_0)$. Pro jisté i musí tedy platit $f(U_i) \subset V$, což dokazuje, že zobrazení f je spojité v bodě x_0.

Důsledek. Buďte τ_1, τ_2 dvě topologie na množině X a předpokládejme, že topologické prostory (X, τ_1), (X, τ_2) jsou prvního typu spočetnosti. Dále předpokládejme, že posloupnost (x_i) v X je konvergentní v (x, τ_1) tehdy a jen tehdy, když je konvergentní v (X, τ_2). Pak $\tau_1 = \tau_2$.

Důkaz. Podle Věty 9. (c) odst. 4.4 str. 93 je zobrazení $\mathrm{id}_X : X \to X$ homeomorfismus (X, τ_1) na (X, τ_2).

Věta 10. *Topologický prostor prvního typu spočetnosti X je oddělitelný tehdy a jen tehdy, když každá posloupnost v X má nejvýše jeden limitní bod.*

Důkaz. 1. Je-li X oddělitelný, pak podle Věty 7. odst. 4.2 str. 91 každá posloupnost v X má nejvýše jeden limitní bod.

2. Předpokládejme, že X není oddělitelný a zvolme dva různé body x_1, $x_2 \in X$, které nelze oddělit otevřenými množinami. Buď (U_i) spočetná lokální báze topologie v bodě x_1; pak (U_i) je spočetná lokální báze topologie také v bodě x_2. Možno předpokládat, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ (Věta 10. odst. 1.5 str. 7). Zvolíme libovolně bod $x_i \in U_i$; dostáváme posloupnost (x_i) v X, která podle definice konverguje jak k x_1 tak k x_2. Neexistuje-li tedy v X posloupnost, konvergující ke dvěma různým bodům, X musí být oddělitelný.

4.5. Příklady

(1) *Usměrněné množiny.* (a) Buď X libovolná neprázdná množina. Pro libovolné prvky $x, y \in X$ položme $x \leq y$. Takto je definováno usměrnění množiny X. Toto usměrnění není uspořádání: pro libovolné dva prvky $x, y \in X$ platí $y \leq x$ a $x \leq y$, z těchto podmínek však neplyne $x = y$, jak je požadováno v definici uspořádání. Libovolná neprázdná množina $A \subset X$ je kofinální v X, neboť pro libovolné $x \in X$ a libovolné $y \in A$ platí $y \geq x$.

(b) Na množině $\mathscr{P}X$ všech podmnožin množiny X definujeme relaci $\leq$ takto: $U \leq V$, jestliže $U \supset V$. Tato relace je usměrnění množiny $\mathscr{P}X$, je zároveň i uspořádáním $\mathscr{P}X$. Relace $\leq$ však není dobré uspořádání: pro množiny $\{x\}$, $\{y\} \in \mathscr{P}X$ takové, že $x \neq y$, neplatí ani jedna z inkluzí $\{x\} \subset \{y\}$, $\{y\} \subset \{x\}$. Všimněme si, že prázdná množina $\emptyset$ je kofinální v $\mathscr{P}X$: pro každé $U \in \mathscr{P}X$ platí $\emptyset \geq U$.

Jiné usměrnění množiny $\mathscr{P}X$ dostaneme, klademe-li $U \leq V$, jestliže $U \subset V$. Při tomto usměrnění množiny $\mathscr{P}X$ je zřejmě množina X kofinální.

(c) Každá úplně uspořádaná množina je usměrněná, zvolíme-li za její usměrnění její úplné uspořádání. Ukážeme to. První dvě podmínky z definice úplně uspořádané množiny a usměrněné množiny jsou totožné. Nechť dále x, y jsou libovolné dva prvky úplně uspořádané množiny X, takové, že $x \leq y$. Zvolme $z = y$. Pak $y \leq z$ podle podmínky (3) z definice uspořádání, a tedy také $x \leq z$ podle podmínky (1) z definice uspořádání. Je tedy splněna také třetí podmínka z definice usměrnění.

(d) Přirozené uspořádání množiny reálných čísel $\mathbf{R}$ je zároveň jejím usměrněním (porov. (c)). Přirozené uspořádání množiny $A \subset \mathbf{R}$ je zároveň jejím usměrněním; v obou případech hovoříme o přirozeném usměrnění.

Uvažujme $\mathbf{R}$ s přirozeným usměrněním. Zřejmě množina $\mathbf{N}$ přirozených čísel je kofinální v $\mathbf{R}$. Příklady množin, které jsou kofinální v $\mathbf{N}$ (a tedy také v $\mathbf{R}$) jsou množina sudých čísel, množina lichých čísel, množina $M = 1, 10, 10^2, 10^3, \ldots$.

(2) *Sítě.* (a) Každé zobrazení množiny reálných čísel (s přirozeným usměrněním) do libovolné množiny X je síť v X.

(b) Na množině přirozených čísel $\mathbf{N}$ definujeme usměrnění $\leq$ takto: $k \leq k$ pro každé $k \in \mathbf{N}$, $1 \leq 2 \leq 4 \leq 6 \leq 8 \leq 10 \leq \ldots$, $1 \leq 3 \leq 5 \leq 7 \leq 9 \leq 11 \leq \ldots$, $3 \leq 6$, $5 \leq 8$, $7 \leq 10$, $\ldots$ (porov. obr. 1). Zobrazení $S : \mathbf{N} \to X$ množiny $\mathbf{N}$ s tímto usměrněním do množiny X je síť v X, ale není to posloupnost v X.

Obr. 1

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & \leq & 2 & \leq & 4 & \leq & 6 & \leq & 8 & \leq & 10 & \leq & 12 & \leq & \ldots \\
 & & & & & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & \\
 & & & & & \leq & 3 & \leq & 5 & \leq & 7 & \leq & 9 & \leq & \ldots
\end{array}$$

(c) Buď X množina. K libovolné síti $S : I \to X$, jejíž definiční obor je nejvýše spočetná množina, existuje posloupnost $T : \mathbf{N} \to X$, která je podsítí sítě S.

K důkazu tohoto tvrzení stačí nalézt zobrazení φ množiny $\mathbf{N}$ s přirozeným usměrněním do usměrněné množiny I takové, že ke každému indexu $\iota_0 \in I$ existuje přirozené číslo n_0 tak, že $\varphi(n) \geq \iota_0$ pro všechna $n \geq n_0 \cdot T = S \circ \varphi$ pak bude hledaná posloupnost. Zvolme pevně index $\kappa_0 \in I$. Označme M množinu všech indexů $\iota \in I$, pro které $\iota \geq \kappa_0$. Podle předpokladu I je nejvýše spočetná množina, M je tedy také nejvýše spočetná. Označme $M = \{\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \ldots\}$. Klademe $\varphi(n) = \lambda_n$, kde $\lambda_1 = \kappa_0$, $\lambda_2 = \kappa_1$, λ_3 je libovolný index z I, pro který $\lambda_3 \geq \lambda_2, \kappa_2, \ldots, \lambda_n$ je libovolný index z I, pro který platí $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}, \kappa_{n-1}$, atd. Zřejmě platí $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$. Položme $T = S \circ \varphi$. Nechť $\iota_0 \in I$ je libovolný index. Podle definice usměrnění existuje index $\nu_0 \in I$ takový, že $\nu_0 \geq \iota_0, \kappa_0$. To ovšem znamená, že $\nu_0 \in M$, a tedy platí $\nu_0 = \kappa_i$ pro nějaké $i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Musí proto existovat $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že $\varphi(n_0) = \lambda_{n_0} \geq \kappa_i = \nu_0$, a tedy také $\varphi(n) = \lambda_n \geq \lambda_{n_0} \geq \nu_0 \geq \iota_0$ pro každé $n \geq n_0$. Posloupnost T je podle definice podsítí sítě S a důkaz je ukončen.

(d) Posloupnost může mít podsíť, která není podposloupností. Uvedeme příklad. Buď X množina. Uvažujme posloupnost $S : \mathbf{N} \to X$ a zobrazení φ množiny $\mathbf{R}$ s přirozeným usměrněním do $\mathbf{N}$, definované vztahem $\varphi(\kappa) = 1$ pro $\kappa \leq 1$ a $\varphi(\kappa) = n$ pro $\kappa \in (n-1, n]$, $n \geq 2$. Pro libovolné $n_0 \in \mathbf{N}$ zvolme $\kappa_0 \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo $\kappa_0 \geq n_0$. Pak pro každé $\kappa \geq \kappa_0$ platí $\varphi(\kappa) = n$, kde $n - 1 < \kappa \leq n$, a tedy také $\kappa_0 \leq \kappa \leq \varphi(\kappa)$. Odtud plyne $\varphi(\kappa) \geq n_0$, což znamená, že zobrazení φ splňuje podmínku (2) z definice podsítě. Zřejmě tedy $T = S \circ \varphi$ je podsíť posloupnosti S, která není podposloupnost.

(3) *Sítě v topologických prostorech.* (a) Buď X množina s diskrétní topologií. Síť $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$ v X konverguje k bodu $x \in X$ právě tehdy, když existuje $\iota_0 \in I$ tak, že $x_\iota = x$ pro každé $\iota \geq \iota_0$. Jinými slovy to znamená, že síť v diskrétním topologickém prostoru konverguje k bodu x, právě když od určitého indexuι_0 celá leží v množině $\{x\}$. Mějme nyní systém $(S_\kappa)_{\kappa \in K}$ konvergentních sítí v X. Jelikož X je Hausdorffův, existuje jediná limitní síť systému $(S_\kappa)_{\kappa \in K}$. Tato síť konverguje k bodu y tehdy a jen tehdy, když existuje $\kappa_0 \in K$ tak, že pro každé $\kappa \geq \kappa_0$ platí $\lim S_\kappa = y$.

(b) Uvažujme množinu X s triviální topologií. Každá síť S v X je konvergentní a množina limitních bodů sítě S je celá množina X. Mějme systém sítí $(S_\iota)_{\iota \in I}$ v X takový, že množiny I, X jsou alespoň dvouprvkové. Pak systém sítí $(S_\iota)_{\iota \in I}$ má více než jednu limitní síť S' a platí $\lim S' = \lim S_\iota = X$ pro každé $\iota \in I$.

(c) Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií. Každá konvergentní síť v $\mathbf{R}$ má právě jednu limitu. Síť $S : I \to \mathbf{R}$ konverguje k bodu $x \in \mathbf{R}$ právě tehdy, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index $\iota_0 \in I$ takový, že $|S(\iota) - x| < \varepsilon$ pro každé $\iota \geq \iota_0$.

(4) *Třídy konvergence.* (a) *Třída konvergence pro triviální topologii.* Buď X neprázdná množina a uvažujme komplex sítí $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_x)_{x \in X}$, kde $\mathscr{S}_x$ obsahuje všechny sítě v X. Ukážeme, že $\mathscr{S}$ je třída konvergence. Podmínky (1) – (3) z definice třídy konvergence jsou evidentně splněny. Vyšetříme podmínku (4). Buď I libovolná usměrněná množina, $(S_\iota)_{\iota \in I}$ libovolný systém sítí v X. Označme S' (resp. S) limitní (resp. asociovanou) síť systému sítí $(S_\iota)_{\iota \in I}$. Z definice komplexu sítí vyplývá, že S', $S \in \mathscr{S}_x$ pro každé $x \in X$. Dostáváme tak, že $\lim S' = \lim S = X$; podmínka (4) je tedy splněna a $\mathscr{S}$ je třída konvergence na množině X. Pro libovolnou množinu $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, zřejmě platí $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A = X$ (neboť každá konstantní síť v A $\mathscr{S}$-konverguje k libovolnému bodu $y \in X$) a pro množinu $\emptyset$ platí $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} \emptyset = \emptyset$. Odsud vyplývá, že uvažovaná třída konvergence $\mathscr{S}$ definuje na množině X triviální topologii.

(b) *Třída konvergence pro diskrétní topologii.* Buď X neprázdná množina. Uvažujme komplex sítí $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_x)_{x \in X}$ v X, definovaný následující podmínkou: síť $S : I \to X$ je elementem množiny $\mathscr{S}_x$ právě tehdy, když existuje index $\iota_0 \in I$ tak, že $S(\iota) = x$ pro všechny indexy $\iota \geq \iota_0$. Ukážeme, že $\mathscr{S}$ je třída konvergence. Podmínky (1) a (2) z definice třídy konvergence jsou evidentně splněny. Vyšetříme podmínku (3). Buď $x \in X$ libovolný bod, $S : I \to X$ síť taková, že $S \notin \mathscr{S}_x$. Množina $K = \{\iota \in I \mid S(\iota) \neq x\}$ je zřejmě kofinální v I a síť $T = S \circ \varphi$, kde $\varphi : K \to I$ je kanonické injektivní zobrazení, je podsíť sítě S taková, že žádná její podsíť není elementem $\mathscr{S}_x$. Podmínka (3) je tedy splněna. Zbývá prověřit platnost podmínky (4). Buď I libovolná usměrněná množina, $(S_\iota)_{\iota \in I}$ systém $\mathscr{S}$-konvergentních sítí. Zřejmě existuje jediná limitní síť S' systému sítí $(S_\iota)_{\iota \in I}$. Označme S asociovanou síť. Je-li $\lim_{\mathscr{S}} S' = \emptyset$, pak $\lim_{\mathscr{S}} S' \subset \lim_{\mathscr{S}} S$, t.j. podmínka (4) je splněna. Nechť tedy $\lim S' \neq \emptyset$. Pak $S' \in \mathscr{S}_x$ pro nějaké $x \in X$ a platí $\lim_{\mathscr{S}} S' = \{x\}$. Ukážeme, že $x \in \lim_{\mathscr{S}} S$. Zvolme index $\iota_0 \in I$ tak, že $S'(\iota) = x$ pro každé $\iota \geq \iota_0$. Protože zároveň $x = \lim_{\mathscr{S}} S_\iota$, existuje index $\kappa_{\iota_0} \in J_\iota$, kde J_ι je definiční obor sítě S_ι, takový, že pro každé $\kappa \geq \kappa_{\iota_0}$ platí $S_\iota(\kappa) = x$. Pro $\iota \geq \iota_0$ klademe $f_0(\iota) = \kappa_{\iota_0}$ a pro $\iota \not\geq \iota_0$ vybereme libovolně prvek $\kappa_\iota \in J_\iota$ a klademe $f_0(\iota) = \kappa_\iota$. Pak pro libovolný index $(\iota, f) \in I \times \prod J_\iota$ takový, že $(\iota, f) \geq (\iota_0, f_0)$, dostáváme $S(\iota, f) = S_\iota(f(\iota)) = x$, neboť platí $\iota \geq \iota_0$ a $f(\lambda) \geq f_0(\lambda)$ pro každé $\lambda \in I$. To ovšem znamená, že $x \in \lim_{\mathscr{S}} S$, a tedy $\lim_{\mathscr{S}} S' \subset \lim_{\mathscr{S}} S$. Uvažovaný komplex sítí $\mathscr{S}$ v X je tedy třída konvergence.

Buď nyní $A \subset X$ libovolná množina. Z definice $\mathscr{S}$-konvergentních sítí je zřejmé, že $\mathrm{cl}_{\mathscr{S}} A = A$. To ovšem znamená, že třída konvergence $\mathscr{S}$ definuje na množině X diskrétní topologii.

(c) *Třída konvergence pro přirozenou topologii.* Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ a na ní komplex sítí $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_x)_{x \in \mathbf{R}}$ takový, že platí: síť $S : I \to \mathbf{R}$ je prvkem množiny $\mathscr{S}_x$

právě tehdy, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index $\iota_0 \in I$ takový, že $|S(\iota) - x| < \varepsilon$ pro každé $\iota \geq \iota_0$. Ukážeme, že $\mathscr{S}$ je třída konvergence na $\mathbf{R}$. Pro každé $x \in \mathbf{R}$ množina $\mathscr{S}_x$ zřejmě obsahuje všechny konstantní sítě s hodnotami v x, je tedy splněna podmínka (1) z definice třídy konvergence. Dále buď $S \in \mathscr{S}_x$ libovolná síť, $T = S \circ \varphi$ její libovolná podsíť a nechť I (resp. K) označuje indexovou množinu sítě S (resp. T). Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Zvolme $\iota_0 \in I$ tak, aby platilo $|x_\iota - x| < \varepsilon$ pro každé $\iota \geq \iota_0$ (takový index existuje, neboť $S \in \mathscr{S}_x$) a index $\kappa_0 \in K$ takový, že pro každé $\kappa \geq \kappa_0$ platí $\varphi(\kappa) \geq \iota_0$ (existence bodu κ_0 plyne z definice zobrazení φ). Pak zřejmě pro každé $\kappa \geq \kappa_0$ platí $|x_{\varphi(\kappa)} - x| < \varepsilon$, t.j. $T \in \mathscr{S}_x$ a je splněna podmínka (2). Vyšetříme třetí podmínku. Buď S libovolná síť, nepatřící množině $\mathscr{S}_x$, I její indexová množina. Pro každé $\varepsilon > 0$ klademe $K_\varepsilon = \{\iota \in I \mid |S(\iota) - x| \geq \varepsilon\}$. Každá z množin K_ε je evidentně kofinální v I. Zvolme $\varepsilon_0 > 0$ libovolně. Uvažujme kanonické injektivní zobrazení $\varphi : K_{\varepsilon_0} \to I$ a síť $T_{\varepsilon_0} : K_{\varepsilon_0} \to \mathbf{R}$, $T_{\varepsilon_0} = S \circ \varphi$. T_{ε_0} je podsíť sítě S. Ukážeme, že žádná podsíť sítě T_{ε_0} není elementem množiny $\mathscr{S}_x$. Nechť $W : J \to T_{\varepsilon_0}$ je libovolná podsíť sítě T_{ε_0} W T. Z definice podsítě vyplývá, že ke každému indexu $\lambda \in J$ existuje $\lambda_0 \in J$ tak, že $\psi(\lambda_0) \in K_{\varepsilon_0}$, a tedy $|W(\lambda_0) - x| = |T_{\varepsilon_0}(\psi(\lambda_0)) - x| \geq \varepsilon_0$. Podmínka (3) je tedy splněna. Nyní vyšetříme poslední podmínku. Nejdříve dokážeme, že každá síť $S \in \mathscr{S}$ má právě jeden $\mathscr{S}$-limitní bod a platí $\lim_{\mathscr{S}} S = \{x\}$ pro $S \in \mathscr{S}_x$. Buď $S \in \mathscr{S}$ libovolná síť x, $y \in \mathbf{R}$ body takové, že $S \in \mathscr{S}_x$ a zároveň $S \in \mathscr{S}_y$. Z definice $\mathscr{S}$ vyplývá, že ke každému $\varepsilon > 0$ existují indexy ι_1, $\iota_2 \in I$ takové, že $|x_\iota - x| < \varepsilon/2$ pro všechny indexy $\iota \geq \iota_1$ a zároveň $|x_\iota - y| < \varepsilon/2$ pro všechny $\iota \geq \iota_2$. Protože množina I je usměrněná, lze nalézt číslo $\lambda_0 \in I$ takové, že $\lambda_0 \geq \iota_1, \iota_2$. Pak pro každé $\lambda \geq \lambda_0$ platí $|x_\lambda - x| < \varepsilon/2$ a zároveň $|x_\lambda - y| < \varepsilon/2$. Odtud dostáváme, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí $|x - y| = |x - x_\lambda + x_\lambda - y| \leq |x_\lambda - x| + |x_\lambda - y| < \varepsilon$, což značí, že $|x - y| = 0$, a tedy $x = y$. Nyní již můžeme přejít k důkazu platnosti podmínky (4). Z definice limitní sítě a právě dokázaného tvrzení vyplývá, že libovolný systém $(S_\iota)_{\iota \in I}$ $\mathscr{S}$-konvergentních sítí má jedinou limitní síť $S' : I \to \mathbf{R}$. Platí-li $S' \notin \mathscr{S}$, pak vztah $\lim_{\mathscr{S}} S' \subset \lim_{\mathscr{S}} S$ pro limitní síť S' a asociovanou síť S platí. Nechť tedy $S' \in \mathscr{S}$. Pak $S' \in \mathscr{S}_x$ pro nějaké $x \in \mathbf{R}$ a platí $\lim_{\mathscr{S}} S' = \{x\}$. Zcela analogicky jako v př. (4) (b) se ukáže, že $x \in \lim_{\mathscr{S}} S$. $\mathscr{S}$ je tedy třída konvergence na $\mathbf{R}$.

Zbývá vyšetřit topologii $\tau_{\mathscr{S}}$ na $\mathbf{R}$, která je definována touto třídou konvergence. Z definice $\mathscr{S}$ je zřejmé, že síť S konverguje k bodu x v topologii $\tau_{\mathscr{S}}$ právě tehdy, když konverguje k x v přirozené topologii na $\mathbf{R}$. To ovšem znamená, že množina $A \subset \mathbf{R}$ je uzavřená v topologii $\tau_{\mathscr{S}}$ právě tehdy, když je uzavřená v přirozené topologii; $\tau_{\mathscr{S}}$ je tedy totožná s přirozenou topologií.

Případ n-rozměrného Euklidova prostoru $\mathbf{R}^n$ se vyšetří analogicky.

(d) *Třída konvergence pro topologii bodové konvergence.* Buď X množina, Y topologický prostor. Na množině Y^X všech zobrazení množiny X do Y uvažujme komplex sítí $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_f)_{f \in Y^X}$ takový, že síť $S = (f_\iota)_{\iota \in I}$ je prvkem množiny $\mathscr{S}_f$ právě tehdy, když pro každé $x \in X$ síť $S_x = (f_\iota(x))_{\iota \in I}$ konverguje v Y k bodu $f(x)$. Ukážeme, že $\mathscr{S}$ je třída konvergence na Y^X. Zřejmě pro libovolnou konstantní síť $S = (f_\iota)_{\iota \in I}$ takovou, že $f_\iota = f$ pro každé $\iota \in I$, platí $S \in \mathscr{S}_f$; je tedy splněna podmínka (1) z definice třídy konvergence. Nechť $S \in \mathscr{S}_f$ je libovolná síť, $T = S \circ \varphi$ její libovolná podsíť. Pro každé $x \in X$ je síť $T_x = S_x \circ \varphi$ podsítí sítě S_x v Y, a tedy T_x konverguje k bodu $f(x)$ (Věta 1. odst. 4.2 str. 88). To ovšem znamená, že T $\mathscr{S}$-konverguje k f v Y^X, t.j. $T \in \mathscr{S}_f$ a je splněna podmínka (2). Nechť $S \notin \mathscr{S}_f$. Existuje bod $x_0 \in X$ tak, že S_{x_0} nekonverguje k bodu $f(x_0)$. Podle Věty 3. odst. 4.2 str. 89 existuje podsíť $T_{x_0} = S_{x_0} \circ \varphi$ sítě S_{x_0}, jejíž žádná podsíť nekonverguje k bodu $f(x_0)$. Klademe $T = S \circ \varphi$. Zřejmě T je podsíť sítě S. Kdyby pro nějakou podsíť $W = T \circ \psi$ sítě T platilo $W \in \mathscr{S}_f$, pak by síť $W_x = T_x \circ \psi$ konvergovala k bodu $f(x)$ pro každé $x \in X$, t.j. W_{x_0} by byla podsítí sítě T_{x_0}, konvergující k $f(x_0)$. Platí tedy $W \notin \mathscr{S}_f$ pro každou podsíť W sítě

T a podmínka (3) je splněna. Buď I libovolná usměrněná množina, $(S_\iota)_{\iota\in I}$ systém v Y^X takový, že $S_\iota \in \mathscr{S}$ pro všechna $\iota \in I$. Označme S' (resp. S) limitní (resp. asociovanou) síť. Nechť $\lim_{\mathscr{S}} S' \neq \emptyset$, t.j. $S' \in \mathscr{S}_f$ pro nějaké $f \in Y^X$. Ukážeme, že také $S \in \mathscr{S}_f$. Je-li $S' = (f_\iota)_{\iota\in I}$, pak podle definice limitní sítě platí $f_\iota \in \lim_{\mathscr{S}} S_\iota$ pro každé $\iota \in I$. Tedy pro každé $x \in X$ je $f_\iota(x) \in \lim S_{\iota,x}$, t.j. $S'_x = (f_\iota(x))_{\iota\in I}$ je limitní síť systému sítí $(S_{\iota,x})_{\iota\in I}$ v Y. Proto $f(x) \in \lim S'_x \subset \lim T_x$, kde T_x je síť asociovaná se systémem sítí $(S_{\iota,x})_{\iota\in I}$. Ovšem podle definice je $T_x(\iota, g) = S_{\iota,x}(g(\iota)) = S_\iota(g(\iota))(x) = S_x(\iota, g)$. Dostáváme tak, že pro každé $x \in X$ je $f(x) \in \lim S_x$, t.j. $f \in \lim_{\mathscr{S}} S$ a $\lim_{\mathscr{S}} S' \subset \lim_{\mathscr{S}} S$. Je-li $\lim_{\mathscr{S}} S' = \emptyset$, pak podmínka $\lim_{\mathscr{S}} S' \subset \lim_{\mathscr{S}} S$ je splněna triviálně. $\mathscr{S}$ je tedy třída konvergence na množině Y^X.

Nakonec ukážeme, že $\mathscr{S}$ definuje na Y^X topologii bodové konvergence. Zřejmě stačí ukázat, že síť $(f_\iota)_{\iota\in I}$ konverguje k zobrazení f v topologii bodové konvergence na Y^X právě tehdy, když pro každé $x \in X$ konverguje síť $(f_\iota(x))$ v Y k bodu $f(x)$. Předpokládejme tedy nejprve, že síť $(f_\iota)_{\iota\in I}$ konverguje k $f \in Y^X$ v topologii bodové konvergence. Ke každé množině $W(x, U)$, která patří systému generátorů topologie bodové konvergence a obsahuje f, tedy existuje index $\iota_0 \in I$ takový, že pro každé $\iota \geq \iota_0$ je $f_\iota \in W(x, U)$. Proto také pro každé $\iota \geq \iota_0$ je $f_\iota(x) \in U$, kde U je okolí bodu $f(x)$. Jelikož každému okolí U bodu $f(x)$ odpovídá element $W(x, U)$ systému generátorů topologie bodové konvergence na Y^X, plyne odtud, že síť $(f_\iota(x))_{\iota\in I}$ konverguje k bodu $f(x) \in Y$. Obráceně předpokládejme, že pro každé $x \in X$ konverguje síť $(f_\iota(x))_{\iota\in I}$ k bodu $f(x)$ v Y. Ke každému $x \in X$ a ke každému okolí U bodu $f(x)$ tedy existuje index $\iota_0 \in I$ takový, že $f_\iota(x) \in U$ pro každé $\iota \geq \iota_0$. To znamená, že pro každé $\iota \geq \iota_0$ platí $f_\iota \in W(x, U)$, kde $W(x, U)$ je libovolný element systému generátorů topologie bodové konvergence, obsahující zobrazení f. Ovšem libovolný element báze topologie bodové konvergence na Y^X je průnikem konečného počtu množin $W(x, U)$; k libovolné otevřené množině $V \subset Y^X$, obsahující f, lze tedy nalézt index $\lambda \in I$ takový, že pro každé $\iota \geq \lambda$ je $f_\iota \in V$. Tím je tvrzení dokázáno.

Cvičení

Sítě v topologických prostorech

1. Dokažte, že platí následující tvrzení:

(a) Buď X topologický prostor, $A \subset X$ množina. Bod $x \in X$ je hromadným bodem množiny A právě tehdy, když v množině $A \backslash \{x\}$ existuje síť konvergující k bodu x.

(b) Buď X topologický prostor prvního typu spočetnosti, $A \subset X$ množina. Bod $x \in X$ je hromadným bodem množiny A právě tehdy, když v množině $A \backslash \{x\}$ existuje posloupnost konvergující k bodu x.

Řešení. (a) Nechť x je hromadný bod množiny A. Podle definice existuje v každém okolí U bodu x bod y_U, ležící v množině $A \cap (U \backslash \{x\})$. Uvažujme množinu σ_x všech okolí bodu x s usměrněním "$U \leq V$, jestliže $U \supset V$". Pro libovolná dvě okolí U, $V \in \sigma_x$ bodu x taková, že $V \subset U$, platí $y_V \in U$. Položme $S = (y_U)_{U\in\sigma_x}$. S je síť v X, konvergující k bodu x.

Obráceně, nechť S je síť v množině $A \backslash \{x\}$, konvergující k bodu x. Pak libovolné okolí U bodu x obsahuje prvky sítě S, t.j. množina $A \backslash \{x\}$ má neprázdný průnik s libovolným okolím bodu x. To ovšem znamená, že x je hromadným bodem množiny A.

(b) Nechť $x \in X$ je hromadný bod množiny A. Prostor X je prvního typu spočetnosti, existuje tedy spočetná lokální báze topologie v bodě x; označme ji $(U_i)_{i\in\mathbf{N}}$. Podle Věty 10. odst. 1.5 str.

7 lze předpokládat, že $U_i \supset U_{i+1}$. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ existuje bod $y_n \in (U_n \backslash \{x\}) \cap A$. Klademe $S = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$. S je posloupnost ležící v množině A a konvergující k x.

Obrácené tvrzení je důsledkem tvrzení (a).

2. (a) Buď X topologický prostor. Množina $A \subset X$ je otevřená právě tehdy, když pro každou síť $S : I \to X$, konvergující k nějakému bodu množiny A, existuje index $\iota_0 \in I$ takový, že $x_\iota \in A$ pro každé $\iota \geq \iota_0$. Dokažte.

(b) Buď X topologický prostor prvního typu spočetnosti. Dokažte, že množina $A \subset X$ je otevřená právě tehdy, když pro každou posloupnost, konvergující k nějakému bodu množiny A, existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že $x_n \in A$ pro každé $n \geq n_0$.

Řešení. (a) Nechť $A \subset X$ je otevřená množina, $x \in A$ bod, $S : I \to X$ síť v X, konvergující k bodu x. K libovolnému okolí U bodu x existuje index $\iota_0 \in I$ takový, že $x_\iota \in U$ pro každé $\iota \geq \iota_0$. Ovšem množina A je otevřená, je tedy sama okolím bodu x.

Dokážeme nyní obrácené tvrzení. Předpokládejme, že množina $A \subset X$ není otevřená. Buď $x \in A$ libovolný bod. Každé okolí U bodu x má nutně neprázdný průnik s množinou $X \backslash A$. Uvažujme systém σ_x všech okolí bodu x s usměrněním, definovaným množinovou inkluzí $\subset$. Klademe $S = (y_U)_{U \in \sigma_x}$, kde $y_U \in U \cap (X \backslash A)$. Tato síť leží celá v množině $X \backslash A$ a konverguje k bodu $x \in A$. Zkonstruovali jsme tedy síť, konvergující k bodu množiny A takovou, že $x_\iota \notin A$ pro žádný index $\iota \in I$. Tím je tvrzení dokázáno.

(b) První část tvrzení je důsledkem (a). Opačné tvrzení se dokáže analogicky jako odpovídající tvrzení v části (a) tohoto důkazu; stačí zřejmě uvažovat spočetnou lokální bázi $(U_i)_{i \in \mathbf{N}}$ v bodě x splňující podmínku $U_i \supset U_{i+1}$.

3. Označme $\mathbf{Q}_-$ množinu všech záporných racionálních čísel usměrněnou přirozeným uspořádáním $\leq$ reálné přímky $\mathbf{R}$; uvažujme $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií. Položme $S = (x_i)_{i \in \mathbf{N}}$, $x_i = i$, pro každé $i \in \mathbf{Q}_-$. Dostáváme síť $S : \mathbf{Q}_- \to \mathbf{R}$.

(a) Nalezněte množinu limitních bodů sítě S.

(b) Rozhodněte, zda množina $\mathbf{Q}_- \cup \{0\}$ je uzavřená v $\mathbf{R}$ (využijme k tomu Důsledku Věty 2. odst. 4.2 str. 89).

(c) Označme $\mathbf{N}$ množinu přirozených čísel s přirozeným usměrněním a položme $\varphi(n) = -1/n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$. Rozhodněte, zda síť $T = S \circ \varphi$ je podsítí sítě S a určete množinu $\lim T$.

Řešení. (a) Topologický prostor $\mathbf{R}$ je Hausdorffův, takže množina $\lim S$ je nejvýše jednoprvková (Věta 7. odst. 4.2 str. 91 Snadno zjistíme, že $0 \in \lim S$, tedy $\lim S = \{0\}$.

(b) Množina $\mathbf{Q}_- \cup \{0\}$ není uzavřená v $\mathbf{R}$, neboť ke každému iracionálnímu číslu v $\mathbf{R}_- \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$ existuje síť ležící v $\mathbf{Q}_-$ a konvergující k tomuto číslu. Ukážeme to. Buď $y \in \mathbf{R}_-$ libovolné iracionální číslo. Zvolme lokální bázi σ_y přirozené topologie v bodě y, usměrněnou množinovou inkluzí. V každém okolí bodu y existuje racionální číslo. Položme $T = (y_U)_{U \in \sigma_y}$, kde y_U je racionální číslo ležící v $\mathbf{Q}_- \cap U$. T je síť v $\mathbf{R}$, která má požadované vlastnosti.

(c) Síť $T = S \circ \varphi$ je podsítí sítě S, neboť φ je zobrazení $\mathbf{N}$ do $\mathbf{Q}_-$ a množina $\varphi(\mathbf{N})$ je kofinální v $\mathbf{Q}_-$. Podle Věty 1. odst. 4.2 str. 88 je $\lim T = 0$.

4. Uvažujme posloupnosti $S_1 = (x_i)_{i \in \mathbf{N}}$, $S_2 = (y_i)_{i \in \mathbf{N}}$, $S_3 = (z_i)_{i \in \mathbf{N}}$, $S_4 = (w_i)_{i \in \mathbf{N}}$ bodů množiny $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, definované podmínkami

$$
\begin{aligned}
&x_1 = (1,1,1,1,\ldots),\ x_2 = (0,1/2,1/2,1/2,\ldots),\ x_3 = (0,0,1/3,\\
&1/3,1/3,\ldots),\ \ldots,\ y_1 = (1,0,0,0,\ldots),\ y_2 = (1/2,1/2,0,0,\ldots),\\
&y_3 = (1/3,1/3,1/3,0,0,\ldots),\ \ldots,\ z_1 = (1,1,0,0,\ldots),\\
&z_2 = (1/2,1/2,0,0,\ldots),\ z_3 = (1/3,1/3,0,0,\ldots),\ \ldots,\\
&w_1 = (1,1,1,1,\ldots),\ w_2 = (0,2,2,2,\ldots),\ w_3 = (0,0,3,3,\ldots),\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Rozhodněte, které z těchto posloupností jsou konvergentní, uvažujeme-li na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (a) součin přirozených topologií, (b) silný součin přirozených topologií.

Řešení. V obou uvažovaných topologiích je $\lim S_1 = \lim S_2 = \lim S_3 = (0,0,0,\ldots)$, $\lim S_4 = \emptyset$.

5. Buďte X, Y topologické prostory a uvažujme množinu Y^X s topologií bodové konvergence. Rozhodněte, zda limitou každé konvergentní posloupnosti spojitých zobrazení X do Y je spojité zobrazení $f \in Y^X$.

Řešení. Limita posloupnosti spojitých zobrazení z X do Y nemusí být spojité zobrazení. Uvedeme příklad. Uvažujme posloupnost $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ funkcí z $[0,1]$ do $\mathbf{R}$, definovaných vztahem $f_n(x) = x^n$. Každá z funkcí f_n je spojitá v přirozených topologiích na $[0,1]$ a $\mathbf{R}$. Posloupnost (f_n) konverguje v topologii bodové konvergence na $\mathbf{R}^{[0,1]}$ k funkci f, kde $f(x) = 0$ pro $0 \le x < 1$ a $f(x) = 1$ pro $x = 1$; tato funkce ovšem není spojitá.

6. Buď $X = \{a,b\}$ dvouprvková množina, $\{S_1, S_2\}$ systém sítí v X, kde $S_1 : I_1 \to X$, $S_2 : I_2 \to X$ jsou konstantní sítě, $S_1(\iota) = a$, $S_2(\kappa) = b$.

(a) Nalezněte síť S, asociovanou se systémem $\{S_1, S_2\}$.

(b) Uvažujme X s triviální topologií. Určete všechny limitní sítě systému $\{S_1, S_2\}$ a jejich limitní body. Určete množinu limitních bodů asociované sítě S.

(c) Proveďte totéž co v (b) pro případ, že X má topologii $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$.

(d) Proveďte totéž co v (b) pro případ, že X má diskrétní topologii.

Řešení. (a) Indexovou množinou sítě S bude součin $\{1,2\} \times I_1 \times I_2$ s usměrněním "$(i_1, f_1) \le (i_2, f_2)$, jestliže $i_1 \le i_2$ a $f_1(i) \le f_2(i)$ pro $i = 1,2$". Podle definice pro $S : \{1,2\} \times I_1 \times I_2 \to X$ platí $S(1,f) = S_1(f(1))$, $S(2,f) = S_2(f(2))$. Odsud $S(1,f) = a \le S(2,f) = b$ pro každé $f \in I_1 \times I_2$.

(b) v tomto případě $\lim S_1 = \lim S_2 = X = \{a,b\}$. Systém $\{S_1, S_2\}$ má limitní sítě $S'_i : \{1,2\} \to X$, $i = 1,2,3,4$, kde $S'_1(1) = S'_1(2) = a$, $S'_2(1) = a$, $S'_2(2) = b$, $S'_3(1) = b$, $S'_3(2) = a$, $S'_4(1) = b$, $S'_4(2) = b$. Zřejmě množinou limitních bodů každé sítě v X je množina X; platí to tedy také pro každou limitní síť S'_i a pro asociovanou síť.

(c) V uvažovaném případě $\lim S_1 = \{a,b\}$, $\lim S_2 = \{b\}$. Limitní sítě systému $\{S_1, S_2\}$ jsou tedy sítě $S'_1 : \{1,2\} \to X$, $S'_2 : \{1,2\} \to X$, kde $S'_1(1) = a$, $S'_1(2) = b$, $S'_2(1) = S'_2(2) = b$. Platí $\lim S'_1 = \lim S = X$, $\lim S'_2 = \{b\} \subset \lim S$.

(d) Uvažujme množinu X s diskrétní topologií. Pak $\lim S_1 = \{a\}$, $\lim S_2 = \{b\}$ a existuje jediná limitní síť $S' : \{1,2\} \to X$, $S'(1) = a$, $S'(2) = b$. Zřejmě $\lim S' = b = \lim S$.

7. V množině $X = \{a,b\}$ uvažujme systém sítí $\{S_1, S_2, S_3\}$, kde $S_1 : \{1,2\} \to X$, $S_1(1) = a$, $S_1(2) = b$, $S_2 : \{1,2,3\} \to X$, $S_2(1) = b$, $S_2(2) = a$, $S_2(3) = b$, $S_3 : \{1,2,3,4\} \to X$, $S_3(1) = b$, $S_3(2) = a$, $S_3(3) = b$, $S_3(4) = a$.

(a) Určete síť S, asociovanou se systémem sítí $\{S_1, S_2, S_3\}$.

(b) Uvažujte X s diskrétní topologií a určete všechny limitní sítě systému sítí $\{S_1, S_2, S_3\}$, jejich limitní body a limitní body sítě S.

(c) Proveďte totéž co v (b) pro případ, že na X je uvažována topologie $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}\}$.

(d) Proveďte totéž co v (b) pro případ, že na X je uvažována topologie $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$.

Řešení. (a) Indexovou množinou sítě S je množina $\{1,2,3\} \times \{1,2\} \times \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}$ s tímto usměrněním: $(1,f_1) \le (1,f_2)$, $(1,f_1) \le (2,f_2)$, $(1,f_1) \le (3,f_2)$, $(2,f_1) \le (2,f_2)$, $(2,f_1) \le (3,f_2)$, $(3,f_1) \le (3,f_2)$ v případě, že f_1, f_2 splňují podmínku $f_1(i) \le f_2(i)$ pro $i = 1,2,3$. Pak podle definice $S(1,f) = S_1(f(1))$, $S(2,f) = S_2(f(2))$, $S(3,f) = S_3(f(3))$, kde $f(1) \in \{1,2\}$, $f(2) \in \{1,2,3\}$ a $f(3) \in \{1,2,3,4\}$; síť S lze tedy znázornit takto:

$$
\begin{array}{llll}
S_1(1) & \leq S_1(2) & & \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & \\
S_2(1) & \leq S_2(2) & \leq S_2(3) & \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & \rotatebox{-90}{$\leq$} & \rotatebox{-90}{$\leq$} & \\
S_3(1) & \leq S_3(2) & \leq S_3(3) & \leq S_3(4)
\end{array}
$$

Po dosazení

$$
\begin{array}{llll}
a & \leq b & & \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & \\
b & \leq a & \leq b & \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & \rotatebox{-90}{$\leq$} & \rotatebox{-90}{$\leq$} & \\
b & \leq a & \leq b & \leq a
\end{array}
$$

(b) Je-li na X dána diskrétní topologie, existuje zřejmě jediná limitní síť S' systému sítí S_1, S_2, S_3 a platí $S'(1) = b$, $S'(2) = b$, $S'(3) = a$, t.j. $\lim S' = a$. Jelikož rovněž $\lim S = a$, platí $\lim S' = \lim S$.

(c) Uvažujme X s topologií $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$. Pak $\lim S_1 = X$, $\lim S_2 = X$, $\lim S_3 = \{a\}$. Limitní sítě daného systému sítí jsou sítě S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, definované vztahy $S'_1(1) = a$, $S'_1(2) = a$, $S'_1(3) = a$, $S'_2(1) = a$, $S'_2(2) = b$, $S'_2(3) = a$, $S'_3(1) = b$, $S'_3(2) = a$, $S'_3(3) = a$, $S'_4(1) = b$, $S'_4(2) = b$, $S'_4(3) = a$. Platí $\lim S'_1 = \lim S'_2 = \lim S'_3 = \lim S'_4 = a$, $\lim S = a$.

(d) V uvažovaném případě $\lim S_1 = \{b\}$, $\lim S_2 = \{b\}$, $\lim S_3 = X$. Limitní sítě S'_1, S'_2 jsou definovány vztahy $S'_1(1) = b$, $S'_1(2) = b$, $S'_1(3) = a$, $S'_2(1) = b$, $S'_2(2) = b$, $S'_2(3) = b$. Platí tedy $\lim S'_1 = X$, $\lim S'_2 = \{b\}$. Dále $\lim S = X$, t.j. $\lim S'_2 \subset \lim S'_1 = \lim S$.

Hromadné body sítí

Buď X topologický prostor, $S : I \to X$ síť v X. Bod $x \in X$ nazveme *hromadným bodem* sítě S, jestliže ke každému okolí U bodu x a ke každému indexu $\iota_0 \in I$ existuje $\iota \in I$ takové, že $\iota \geq \iota_0$ a $x_\iota \in U$.

8. Buď $S : I \to X$ síť v topologickém prostoru X, T její podsíť. Ukažte, že je-li bod $x \in X$ hromadným bodem sítě T, je také hromadným bodem sítě S.

Ř e š e n í . Nechť $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$, nechť $T = S \circ \varphi$, kde $\varphi : K \to I$, je podsíť sítě S. Buď x hromadný bod T, U jeho okolí. Podle definice zobrazení φ existuje k libovolnému indexu $\iota_0 \in I$ index $\kappa_0 \in K$ tak, že pro všechna $\kappa \geq \kappa_0$ platí $\varphi(\kappa) \geq \iota_0$. Podle definice hromadného bodu ovšem existuje index $\lambda \geq \kappa_0$ takový, že $x_{\varphi(\lambda)} \in U$. Odtud vyplývá, že k libovolnému indexu $\iota_0 \in I$ existuje index $\iota \geq \iota_0$ tak, že $x_\iota \in U$: stačí zvolit $\iota = \varphi(\lambda)$.

9. Buď S síť v topologickém prostoru X, x její hromadný bod. Existuje podsíť T sítě S, konvergující k x. Dokažte.

Ř e š e n í . Nechť $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$. Uvažujme množinu J všech uspořádaných dvojic (ι, U), kde $\iota \in I$, U je okolí bodu x a $x_\iota \in U$. Definujeme relaci $\leq$ na J takto: $(\iota_1, U_1) \leq (\iota_2, U_2)$, jestliže $\iota_1 \leq \iota_2$ a $U_1 \supset U_2$. Snadno prověříme, že $\leq$ je usměrněním množiny J. Klademe $\varphi((\iota, U)) = \iota$ pro všechna $(\iota, U) \in J$. Zobrazení $\varphi : J \to I$ zřejmě splňuje druhou podmínku z definice podsítě. Síť $T = S \circ \varphi$ je tedy podsíť sítě S. Buď U libovolné okolí bodu x. Existuje $\iota_0 \in I$ takové, že $x_{\iota_0} \in U$. Pro libovolné $(\iota, V) \geq (\iota_0, U) \in J$ ovšem platí $x_\iota \in V$ a $V \subset U$, t.j. $x_\iota = x_{((\varphi, V))} \in U$, a tedy $x \in \lim T$.

10. Nechť X je topologický prostor prvního typu spočetnosti. Je-li x hromadný bod posloupnosti S, pak existuje podposloupnost posloupnosti S, konvergující k bodu x. Dokažte.

Ř e š e n í . Nechť $S = (x_n)$ je posloupnost v X, nechť x je její hromadný bod. Zvolme lokální bázi $(U_i)_{i\in\mathbf{N}}$ topologie v bodě x takovou, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$. Ke každé z množin U_i existuje index $n_i \geq i$ takový, že $x_{n_i} \in U_i$. Klademe $T = (x_{n_i})_{i\in\mathbf{N}}$. T je podposloupnost posloupnosti S konvergující k bodu x.

11. V Euklidově prostoru $\mathbf{R}$ uvažujme posloupnost $S = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$. Určete hromadné body posloupnosti S a ke každému z nich nalezněte podposloupnost posloupnosti S, konvergující k tomuto bodu.

Ř e š e n í . Posloupnost S má dva hromadné body, a to 0, 1. Klademe $T_1 = (0, 0, 0, \ldots)$, $T_2 = (1, 1, 1, \ldots)$. Zřejmě T_1 (resp. T_2) je podposloupnost posloupnosti S a platí $\lim T_1 = \{0\}$ (resp. $\lim T_2 = \{1\}$).

Sekvenční a Fréchetovy prostory

Topologický prostor X se nazývá *sekvenční*, jestliže splňuje tuto podmínku: množina $A \subset X$ je uzavřená právě tehdy, když spolu s každou posloupností, která v ní leží, obsahuje také všechny její limity. X se nazývá *Fréchetův* (*topologický*) *prostor*, jestliže pro libovolnou množinu $A \subset X$ a libovolný bod $x \in \operatorname{cl} A$ existuje posloupnost S bodů množiny A konvergující k bodu x.

12. Každý topologický prostor prvního typu spočetnosti je Fréchetův. Každý Fréchetův prostor je sekvenční. Dokažte.

reseni Buď X topologický prostor prvního typu spočetnosti, $(U_i)_{i\in\mathbf{N}}$ spočetná lokální báze topologie v bodě $x \in \operatorname{cl} A$, kde $A \subset X$ je libovolná množina. Zvolme $x_i \in A \cap U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, a položme $S = (x_i)_{i\in\mathbf{N}}$. S je posloupnost ležící v A a konvergující k bodu x. X je tedy Fréchetův prostor.

Buď X Fréchetův prostor, $A \subset X$ množina. Chceme ukázat, že A je uzavřená tehdy a jen tehdy, jestliže pro libovolnou posloupnost S ležící v A platí $\lim S \subset A$.

Nechť A je uzavřená množina. Podle Věty 3. odst. 4.2 str. 89 žádná síť ležící v A nekonverguje k bodu množiny $X \setminus A$, tedy ani žádná posloupnost bodů z A nekonverguje k žádnému bodu množiny $X \setminus A$. To ovšem znamená, že limity každé posloupnosti, ležící v A, také leží v A. Obráceně nechť $A \subset X$ je množina, obsahující všechny limitní body každé posloupnosti, ležící v A. Buď $x \in \operatorname{cl} A$ libovolný bod. Podle předpokladu X je Fréchetův prostor, existuje tedy posloupnost S bodů množiny A taková, že $x \in \lim S$. Odtud plyne, že $x \in A$, t.j. $A = \operatorname{cl} A$. Tedy X je sekvenční prostor.

13. Dokažte, že zobrazení f sekvenčního prostoru X do topologického prostoru Y je spojité právě tehdy, když pro libovolnou posloupnost S v X platí $f(\lim S) \subset \lim f(S)$.

Ř e š e n í . Nutnost plyne z Věty 5. odst. 4.2 str. 90. Předpokládejme, že pro libovolnou posloupnost S v X platí $f(\lim S) \subset \lim f(S)$. Buď $B \subset Y$ libovolná uzavřená množina. Ukážeme, že také množina $f^{-1}(B)$ je uzavřená. Zvolme libovolnou posloupnost S bodů množiny $f^{-1}(B)$. Platí $f(\lim S) \subset \lim f(S) \subset B$ (Důsledek Věty 2. odst. 4.2 str. 89). Odsud vyplývá, že $\lim S \subset f^{-1}(B)$. X je ovšem sekvenční prostor, a tedy množina $f^{-1}(B)$ je uzavřená. Spojitost f vyplývá z libovolnosti množiny B.

14. Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií, bod y nepatřící $\mathbf{R}$, množinu $Y = (\mathbf{R}\setminus\mathbf{N}) \cup \{y\}$ a zobrazení $f : \mathbf{R} \to Y$, definované vztahem

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{N}, \\ y, & x \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Uvažujme Y s finální topologií asociovanou se zobrazením f (odst. 2.4, př. (7) odst. 2.5 str. 23).

(a) Ukažte, že zobrazení f je uzavřené.

(b) Charakterizujte okolí $y \in Y$.

(c) Ukažte, že topologický prostor Y není prvního typu spočetnosti.

(d) Ukažte, že topologický prostor Y je Fréchetův.

Řešení. (a) Nechť $B \subset \mathbf{R}$ je uzavřená množina. Ukážeme, že také množina $f(B)$ je uzavřená. Nejprve předpokládejme, že $B \cap \mathbf{N} = \emptyset$. Pak $f^{-1}(f(B)) = f^{-1}(f(\mathbf{R} \backslash \mathbf{N}) \cap B) = (\mathbf{R} \backslash \mathbf{N}) \cap B = B$, odkud $f^{-1}(Y \backslash f(B)) = \mathbf{R} \backslash f^{-1}(f(B)) = \mathbf{R} \backslash B$, což je množina otevřená; podle definice finální topologie je ovšem množina $Y \backslash f(B) \subset Y$ otevřená, takže $f(B)$ je množina uzavřená. Nechť nyní $B \cap \mathbf{N} \neq \emptyset$. Pak $f^{-1}(f(B)) = f^{-1}(f((B \cap \mathbf{N}) \cup (B \backslash \mathbf{N}))) = f^{-1}(f(B \cap \mathbf{N}) \cup f(B \backslash \mathbf{N})) = f^{-1}(f(B \cap \mathbf{N}) \cup f^{-1}(f(B \backslash \mathbf{N})) = \mathbf{N} \cup (B \backslash \mathbf{N}) = B \cup \{n \in \mathbf{N} \mid n \notin B\} = B \cup \mathbf{N}$. Množina $B \cup \mathbf{N}$ je uzavřená (sjednocení uzavřených množin). Odtud $f^{-1}(Y \backslash f(B)) = \mathbf{R} \backslash f^{-1}(f(B)) = \mathbf{R} \backslash (B \cup \mathbf{N})$, což je množina otevřená; množina $Y \backslash f(B)$ je tedy otevřená a $f(B)$ musí být opět uzavřená množina. Ukázali jsme tedy, že zobrazení f je uzavřené.

(b) Buď U okolí bodu $y \in Y$. Platí $U = (U \backslash \{y\}) \cup \{y\}$ a tedy $f^{-1}(U) = f^{-1}(U \backslash \{y\}) \cup f^{-1}(\{y\}) = (U \backslash \{y\}) \cup \mathbf{N}$. $f^{-1}(U)$ je tedy otevřená množina v $\mathbf{R}$ obsahující $\mathbf{N}$. Klademe $V = f^{-1}(U)$. Evidentně $(V \backslash \mathbf{N}) \cup \{y\} = (U \backslash \{y\}) \cup \{y\} = U$, kde jsme využili toho, že množina $U \backslash \{y\}$ neobsahuje elementy množiny $\mathbf{N}$. Okolí U má tedy tvar $U = (V \backslash \mathbf{N}) \cup \{y\}$, kde V je otevřená množina v $\mathbf{R}$, obsahující $\mathbf{N}$. Obráceně každá množina U tohoto tvaru je okolí bodu y.

(c) Předpokládejme, že Y je prvního typu spočetnosti. Vyberme spočetnou bázi okolí bodu y, tvořenou množinami $U_1, U_2, U_3, \ldots$. Podle (b) pro každé $i \in \mathbf{N}$ platí $U_i = (V_i \backslash \mathbf{N}) \cup \{y\}$, kde V_i je otevřená množina v $\mathbf{R}$ obsahující $\mathbf{N}$. Zvolme bod $x_i \in V_i \backslash \mathbf{N}$ takový, že $x_i > i$ a uvažujme množinu $W = \mathbf{R} \backslash \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Zřejmě $W \supset \mathbf{N}$ a W je otevřená množina. Množina $(W \backslash \mathbf{N}) \cup \{y\}$ je tedy okolí bodu y. Pro žádné $i \in \mathbf{N}$ ovšem neplatí $U_i \subset (W \backslash \mathbf{N}) \cup \{y\}$, což je spor s předpokladem, že Y má spočetnou lokální bázi v bodě y. Y tedy není prvního typu spočetnosti.

(d) Ukážeme, že Y je Fréchetův prostor. Buď $A \subset Y$ libovolná množina, $x \in \operatorname{cl} A$ bod. Zkonstruujeme posloupnost (x_i) bodů množiny A konvergující k bodu x. Zřejmě stačí vyšetřit případ $x \in \operatorname{cl} A \backslash A$; je-li totiž $x \in A$, pak $S = (x_i)$, kde $x_i = x$, je hledaná posloupnost.

Nechť $x \in \operatorname{cl} A \backslash A$ a nechť nejdříve $x = y$. Podle definice uzávěru má každé okolí bodu y neprázdný průnik s množinou A. Z (b) tedy vyplývá, že pro každou otevřenou množinu $V \subset \mathbf{R}$ takovou, že $\mathbf{N} \subset V$, platí $(V \backslash \mathbf{N}) \cap A \neq \emptyset$. Existuje tedy přirozené číslo k takové, že každá otevřená množina v $\mathbf{R}$ obsahující k má neprázdný průnik s A, t.j. $k \in \operatorname{cl}_{\mathbf{R}} A$ (kdyby takové číslo k neexistovalo, znamenalo by to, že každé $i \in \mathbf{N}$ by mělo okolí $U_i \subset \mathbf{R}$ takové, že $U_i \cap A = \emptyset$; odsud by ovšem vyplývalo, že $(\bigcup U_i) \cap A = \emptyset$, a tedy také $(\bigcup U_i \backslash \mathbf{N}) \cap A = \emptyset$, což je spor). Topologický prostor $\mathbf{R}$ je prvního typu spočetnosti, existuje tedy posloupnost $T = (y_i)$ bodů z A, konvergující k bodu k. V topologickém prostoru Y ovšem posloupnost T konverguje k y.

Zbývá vyšetřit případ $x \in \operatorname{cl} A \backslash A$, $x \neq y$. Množina $f^{-1}(\operatorname{cl} A)$ je uzavřená v $\mathbf{R}$: množina $f^{-1}(Y \backslash \operatorname{cl} A) = \mathbf{R} \backslash f^{-1}(\operatorname{cl} A)$ je totiž podle definice finální topologie otevřená. Existuje tedy posloupnost $S = (x_i)$ bodů množiny $f^{-1}(\operatorname{cl} A)$ konvergující k x v $\mathbf{R}$. Zřejmě posloupnost $(f(x_i))$ leží v $\operatorname{cl} A$. Buď U libovolné okolí bodu x v Y . Pak $f^{-1}(U) \subset \mathbf{R}$ je otevřená množina; jelikož $f^{-1}(\{x\}) = \{x\}$, $f^{-1}(U)$ je okolí bodu x v $\mathbf{R}$ a existuje index i tak, že $x_i \in f^{-1}(U)$. Bod $f(x_i)$ tedy leží v U a posloupnost $(f(x_i))$ konverguje k bodu x v topologickém prostoru Y. Ukázali jsme tedy, že Y je Fréchetův topologický prostor.

15. Uvažujme množinu $X = \{0\} \cup (\bigcup_{i \in \mathbf{N}} X_i)$, kde

$$X_i = \left\{ \frac{1}{i} \right\} \cup \left(\bigcup_{j=i^2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right\} \right).$$

Pro každé $x \in X$ definujeme systém σ_x podmnožin množiny X takto:

$$\sigma_x = \begin{cases} \{\{x\}\}, & x = \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{j}, \\ \left\{ X_i \setminus \bigcup_{j=i^2}^{k} \left\{ \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{j} \right\} \mid k = i^2,\, i^2+1,\, i^2+2, \dots \right\}, & x = \dfrac{1}{i}, \\ \{U \subset X \mid U = X \setminus (M_1 \cup M_2)\}, & x = 0, \end{cases}$$

kde M_1 je sjednocení konečného počtu množin X_i a M_2 je sjednocení konečných množin $K_{m,n}$, m, $n \in \mathbf{N}$, takových, že $K_{m,n} \subset X_{m_n} \not\subset M_1$ a $K_{m,n}$ je sjednocením konečně mnoha jednobodových množin typu $\{1/m_n + 1/j\}$.

(a) Ukažte, že pro každé $x \in X$ je σ_x lokální báze topologie na X v bodě x.
(b) Rozhodněte, zda X s touto topologií je prvního typu spočetnosti.
(c) Rozhodněte, zda X je Fréchetův prostor.
(d) Ukažte, že X je sekvenční prostor.

Ř e š e n í . (a) Prověříme podmínky (1) – (3) Věty 8. (b) odst. 1.4 str. 6

Nechť $x = \frac{1}{i} + \frac{1}{j}$. V tomto případě je systém σ_x tvořen jedinou množinou $\left\{\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right\}$ a podmínky (1) – (3) jsou zřejmě splněny.

Nechť $x = \frac{1}{i}$. Pak systém σ_x je tvořen množinami

$$U_{i,k} = \left\{\frac{1}{i}\right\} \cup \left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right\} \right), \quad k = i^2, i^2+1, i^2+2, \dots$$

Zřejmě $\frac{1}{i} \in U_{i,k}$ pro každé $k = i^2$, i^2+1, i^2+2, $\dots$, je tedy splněna podmínka (1). Buďte dále $U_{i,k}$, $U_{i,l}$ libovolné dvě množiny ze σ_x. Platí

$$\begin{aligned} U_{i,k} \cap U_{i,l} &= \left\{\frac{1}{i}\right\} \cup \left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right\} \cap \bigcup_{j=l+1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right\} \right) \\ &= \left\{\frac{1}{i}\right\} \cup \left(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right\} \right), \end{aligned}$$

kde $m = \max\{k, l\}$. Zvolme $p \geq m$. Pak pro množinu $U_{i,p}$ platí $U_{i,p} \in \sigma_x$ a $U_{i,p} \subset U_{i,k} \cap U_{i,l}$. Je tedy splněna podmínka (2). Buď nyní $U_{i,k}$ libovolná množina, $y \in U_{i,k}$ libovolný bod. Je-li $y = \frac{1}{i}$, vezměme $l \geq k$. Pak $U_{i,l} \in \sigma_y$ a $U_{i,l} \subset U_{i,k}$. Je-li $y \neq \frac{1}{i}$, pak zřejmě $y = \frac{1}{i} + \frac{1}{j}$, kde $j \geq k+1$. V tomto případě položme $V_i = \{1/i + 1/j\}$. $V_i \in \sigma_y$ a platí $V_i \subset U_{i,k}$. Je tedy splněna také podmínka (3) a σ_x je lokální báze v bodě $x = 1/i$.

Nechť konečně $x = 0$, nechť $U \in \sigma_0$ je libovolná množina. Jelikož $0 \notin M_1, M_2$, platí $0 \in X \setminus (M_1 \cup M_2)$, t.j. $0 \in U$. Je tedy splněna podmínka (1). Buďte dále U, $V \in \sigma_0$ libovolné dvě množiny, $U = X \setminus (M_1 \cup M_2)$, $V = X \setminus (\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2)$, kde M_1, M_2, $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ jsou vhodné množiny. Pak $U \cap V = X \setminus (M_1 \cup \bar{M}_1 \cup M_2 \cup \bar{M}_2)$. Klademe $W = X \setminus (\tilde{M}_1 \cup \tilde{M}_2)$. Zřejmě $W \in \sigma_0$, kde $\tilde{M}_1 = M_1 \cup \bar{M}_1$, $\tilde{M}_2 \supset M_2 \cup \bar{M}_2$. Množina W je definována korektně, neboť $\tilde{M}_1$ je sjednocení konečného počtu množin X_i a $\tilde{M}_2 \cap \tilde{M}_1 = \emptyset$. Platí $W \subset U \cap V$, je tedy splněna podmínka (2). Nechť $U = X \setminus (M_1 \cup M_2) \in \sigma_0$ je libovolná množina, $y \in U$ bod. Je-li $y = 0$, klademe $V = X \setminus (\tilde{M}_1 \cup \tilde{M}_2)$; $V \in \sigma_0$, kde $\tilde{M}_1 = M_1$ a $\tilde{M}_2 \supset M_2$, $\tilde{M}_2 \cap M_1 = \emptyset$. Pak $V \in \sigma_y$ a $V \subset U$. Je-li $y = \frac{1}{i} + \frac{1}{j}$, klademe $V = \{1/i + 1/j\}$; zřejmě $V \in \sigma_y$ a $V \subset U$. Buď $y = 1/i$. Označme k největší z čísel j takových, že $\{1/i + 1/j\} \in M_2$ a položme

$$V = X_i \setminus \left(\bigcup_{j=i^2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right\} \right).$$

Zřejmě $V \in \sigma_y$. Z podmínky $1/i \in U$ plyne $X_i \not\subset M_1$, t.j. $V \subset U$.

(b), (c) Ukážeme, že topologický prostor X není Fréchetův, a tedy ani prvního typu spočetnosti. Uvažujme množinu $A = X \backslash \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. Z definice okolí nuly vyplývá, že každé okolí $U \in \sigma_0$ má neprázdný průnik s množinou A, t.j. že $0 \in \operatorname{cl} A$. Nechť S je posloupnost bodů z A. Pak buď (1) body posloupnosti S leží v konečném počtu množin X_i, a tedy existuje okolí U bodu 0, mající prázdný průnik s S, t.j. S nekonverguje k nule, nebo (2) body posloupnosti S leží v nekonečně mnoha z množin X_i, ale pro každé i je $S \cap X_i$ konečná množina, což zase znamená, že existuje $U \in \sigma_0$ tak, že U neobsahuje body S. Celkově tedy dostáváme, že v množině A neexistuje posloupnost, která by konvergovala k bodu $0 \in \operatorname{cl} A$. To ovšem znamená, že X není Fréchetův prostor.

(d) Ukážeme, že X je sekvenční prostor. Buď $A \subset X$ libovolná množina taková, že s každou posloupností, která v ní leží, obsahuje také všechny její limity. Ukážeme, že pak $A = \operatorname{cl} A$. Nechť $x \in \operatorname{cl} A$, $x \neq 0$. Z definice topologie na X je zřejmé, že σ_x je spočetná lokální báze v bodě x. Označme U_1, U_2, U_3, $\ldots$ elementy systému σ_x a zvolme body $x_1 \in A \cap U_1$, $x_2 \in A \cap U_1 \cap U_2$, $x_3 \in A \cap U_1 \cap U_2 \cap U_3$, $\ldots$. Vzniká posloupnost (x_i), ležící v množině A, konvergující k bodu x. Podle předpokladu $x \in A$. Dostáváme tak $\operatorname{cl} A \backslash \{0\} \subset A$. Nechť nyní $x \in \operatorname{cl} A$, $x = 0$. Uvažujme posloupnost $S = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. Existuje podposloupnost $T = (x_i)$ posloupnosti S taková, že libovolné okolí libovolného bodu x_i má neprázdný průnik s množinou A (jinak by totiž muselo existovat okolí U bodu 0, patřící σ_0, takové, že $U \cap A = \emptyset$, což je spor s předpokladem $0 \in \operatorname{cl} A$). Dostáváme tedy, že posloupnost T leží v $\operatorname{cl} A$. Jelikož pro každé i je $x_i \neq 0$ a $x_i \in \operatorname{cl} A$, znamená to podle předchozího, že $x_i \in A$; T tedy leží v A. Podle předpokladu pak také $\lim T = 0 \in A$. Celkově jsme tedy dokázali, že $\operatorname{cl} A \subset A$, takže množina A je uzavřená. Podle Důsledku Věty 2. odst. 4.2 str. 89 platí, že je-li množina $A \subset X$ uzavřená, pak s každou posloupností S ležící v A obsahuje A také množinu $\lim S$. Dokázali jsme tedy, že X je sekvenční prostor.

16. Uvažujme topologický prostor X ze cv. 15 a množinu $Y = X \backslash \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ s indukovanou topologií. Rozhodněte, zda Y je sekvenční prostor.

Ř e š e n í . Uvažujme množinu $A = Y \backslash \{0\}$. Nechť S je libovolná konvergentní posloupnost ležící v A. Zřejmě v A neexistuje žádná posloupnost, která by konvergovala k bodu 0 (srov. cv. 15). Je tedy také $\lim S \subset Y$. Množina $Y \backslash \{0\}$ ovšem není uzavřená v Y, neboť $\{0\} \subset Y$ není otevřená, a tedy Y není sekvenční prostor.

Filtry

Buď X neprázdná množina. $\mathscr{P}X$ množina všech podmnožin množiny X. *Filtrem* v množině X nazýváme neprázdný systém množin $\varphi \subset \mathscr{P}X$, splňující tyto podmínky:

(1a) $\emptyset \notin \varphi$.

(1b) Pro libovolné množiny A, $B \in \varphi$ platí $A \cap B \in \varphi$.

(1c) Je-li množina A prvek systému φ a $A \subset B$, pak B je také prvek sysktému φ.

Bázi filtru v množině X nazýváme neprázdný systém množin $\beta \subset \mathscr{P}X$, splňující tyto podmínky:

(2a) $\emptyset \notin \beta$.

(2b) K libovolným množinám A, $B \in \beta$ existuje množina $W \in \beta$ tak, že $W \subset A \cap B$.

Je-li β báze filtru v množině X, pak systém všech množin $A \in \mathscr{P}X$ takových, že existuje $B \in \beta$ ležící v Y, je filtr v X. Nazývá se

filtr, *generovaný* bází β a označuje se φ_β; říkáme také, že báze filtru β *generuje* filtr φ_β.

Filtr φ' se nazývá *jemnější* než filtr φ, jestliže $\varphi' \supset \varphi$ (t.j. pro každou množinu $A \in \varphi$ platí $A \in \varphi'$). Filtr φ se nazývá *maximální filtr*, nebo také *ultrafiltr*, jestliže pro každý filtr φ' jemnější než φ platí $\varphi' = \varphi$.

17. Rozhodněte, které z následujících systémů množin jsou filtry, které jsou báze filtrů:

(a) Systém všech neprázdných podmnožin množiny X.

(b) Systém všech podmnožin množiny X, které obsahují pevně zvolený bod $x \in X$.

(c) Systém všech okolí bodu x v topologickém prostoru X.

(d) Systém všech podmnožin topologického prostoru X takových, že každá z těchto podmnožin obsahuje nějaké okolí pevně zvoleného bodu $x \in X$.

(e) Systém všech podmnožin množiny X, které obsahují pevně zvolenou množinu $A \subset X$.

(f) Systém všech okolí množiny A v topologickém prostoru X.

(g) Systém všech podmnožin topologického prostoru X, z nichž každá obsahuje nějaké okolí pevně zvolené množiny $A \subset X$.

(h) $\varphi = \{X\}$.

(i) Systém φ, tvořený doplňky všech konečných množiny v množině X.

(j) $\varphi = \{x\}$, kde $x \in X$ je pevně zvolený bod množiny X.

(k) Systémy $\varphi_1 = \{M_i \mid i \in \mathbf{N}\}$, $\varphi_2 = \{M'_i \mid i \in \mathbf{N}\}$, kde $M_i = \{x_j \mid 1 \leq j \leq i\}$, $M'_i = \{x_j \mid j \geq i\}$ a $S = (x_i)_{i \in \mathbf{N}}$ je posloupnost v množině X.

(l) Systém φ všech podmnožin V množiny X, splňujících tuto podmínku: pro pevně zadanou síť $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$ v X existuje index $\iota_0 \in I$ tak, že z podmínky $\iota \geq \iota_0$ vyplývá $x_\iota \in V$.

Řešení. (a) Uvažovaný systém není filtr ani báze filtru (pro $A, B \subset X$ nemusí platit $A \cap B \neq \emptyset$).

(b) Uvažovaný systém je ultrafiltr a tedy také filtr a báze filtru.

(c) Uvažovaný systém není filtr (nemusí platit (1c)), je to báze filtru.

(d) Uvažovaný systém je filtr a tedy také báze filtru.

(e) Uvažovaný systém je filtr a tedy také báze filtru.

(f) Uvažovaný systém není filtr (neplatí (1c)), je báze filtru.

(g) Uvažovaný systém je filtr a tedy také báze filtru.

(h) Uvažovaný systém je filtr a tedy také báze filtru.

(i) Je-li množina X konečná, pak φ není filtr a ani báze filtru (viz (a)); je-li množina X nekonečná, pak φ je filtr v X a tedy také báze filtru.

(j) Uvažovaný systém není filtr, je báze ultrafiltru.

(k) φ_1, φ_2 nejsou filtry (není splněna podmínka (1c)), jsou to báze filtrů.

(l) Uvažovaný systém je filtr a tedy také báze filtru.

18. Ukažte, že systém φ podmnožin množiny X je ultrafiltr právě tehdy, když pro každou podmnožinu A množiny X je buď $A \in \varphi$ nebo $X \setminus A \in \varphi$.

Řešení. Nechť φ je ultrafiltr v X, $A \subset X$ podmnožina. Předpokládejme, že $A \notin \varphi$. Ukážeme. že existuje množina $B \in \varphi$ taková, že $A \cap B = \emptyset$. Předpokládejme, že taková množina neexistuje, t.j. že pro každou množinu $B \in \varphi$ platí $B \cap A \neq \emptyset$. Pak systém množin $\beta = \{A \cap B \mid B \in \varphi\}$ je báze filtru v X a filtr φ_β, generovaný touto bází, je tvořen všemi množinami $U \subset X$ takovými, že $U \supset A \cap B$. To ovšem znamená, že také $A \in \varphi_\beta$, a že filtr φ_β je jemnější než filtr φ (každá z množin $B \in \varphi$ patří filtru φ_β). φ je ovšem ultrafiltr, a tedy $\varphi = \varphi_\beta$ a $A \in \varphi$, což je spor s předpokladem, že $A \notin \varphi$. Dokázali jsme tak, že pro nějakou množinu $B \in \varphi$ platí $A \cap B = \emptyset$. Odsud vyplývá, že $B \subset X \setminus A$, t.j. $X \setminus A \in \varphi$ podle podmínky (1c) z definice filtru.

Dokážeme obrácené tvrzení. Předpokládejme, že φ není ultrafiltr v X. Existuje tedy filtr φ' jemnější než φ, různý od φ. Buď $A \in \varphi'$ množina taková, že $A \notin \varphi$. Kdyby platilo $X \setminus A \in \varphi$, pak by také platilo $X \setminus A \in \varphi'$ a tedy $A \cap (X \setminus A) \in \varphi'$. Ovšem $A \cap (X \setminus A) = \emptyset \notin \varphi'$. Proto $X \setminus A \notin \varphi$. Tím je důkaz ukončen.

19. Nechť X, Y jsou množiny, $f : X \to Y$ zobrazení.

(a) Ukažte, že pro každou bázi filtru β v X je množina $f(\beta) = \{f(A) \mid A \in \beta\}$ báze filtru v Y (t.j. že obrazem báze filtru při zobrazení f je báze filtru).

(b) Rozhodněte, zda obrazem filtru v X při zobrazení f je filtr v Y.

(c) Rozhodněte, zda obrazem ultrafiltru v X při zobrazení f je ultrafiltr v Y.

Řešení. (a) $\emptyset \notin \beta$ a tedy také $\emptyset \notin f(\beta)$. Systém $f(\beta) \subset \mathscr{P}Y$ proto splňuje podmínku (2a) z definice báze filtru. Nechť $f(A), f(B) \in f(\beta)$ jsou libovolné množiny. Platí $f(A) \cap f(B) \supset f(A \cap B)$. Ovšem $A, B \in \beta$, a tedy podle (2b) existuje množina $W \in \beta$ tak, že $W \subset A \cap B$. Pak $f(W) \subset f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, t.j. $f(\beta)$ je báze filtru v Y.

(b) Obraz filtru v X nemusí být filtrem v Y, neboť systém množin $f(\varphi) = \{f(A) \mid A \in \varphi\}$, kde φ je filtr v X, nemusí splňovat ani jednu z podmínek (1b), (1c) z definice filtru. Obrazem filtru v X je ovšem báze filtru v Y, neboť systém $f(\varphi)$ zřejmě splňuje obě podmínky (2a), (2b) z definice báze filtru.

(c) Ukážeme, že obrazem ultrafiltru je ultrafiltr. K tomu využijeme cv. 18. Nechť φ je ultrafiltr v X, $A \subset Y$ libovolná množina. Platí buď $f^{-1}(A) \in \varphi$ nebo $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A) \in \varphi$. Proto také (podle (a)) $ff^{-1}(A) \in \beta_{f(\varphi)}$ nebo $ff^{-1}(Y \setminus A) \in \beta_{f(\varphi)}$, kde $\beta_{f(\varphi)}$ je báze filtru, generující filtr $f(\varphi)$. Ovšem $ff^{-1}(A) \subset A$ a $ff^{-1}(Y \setminus A) \subset Y \setminus A$ a tedy buď $A \in f(\varphi)$ nebo $Y \setminus A \in f(\varphi)$. Užitím cv. 18 dojdeme k závěru, že $f(\varphi)$ je ultrafiltr v Y.

Nechť X je topologický prostor, φ filtr v X. Bod $x \in X$ se nazývá *limita* filtru φ, jestliže každé jeho okolí patří filtru φ. Říkáme také, že filtr φ *konverguje* k bodu x a píšeme $x \in \lim \varphi$. Bod $x \in X$ se nazývá *limita* báze filtru β, jestliže $x \in \lim \varphi_\beta$; říkáme také, že báze filtru β *konverguje* k bodu x a píšeme $x \in \lim \beta$. Zřejmě $x \in \lim \beta$ právě tehdy, když každé okolí bodu x obsahuje prvek báze β. Bod $x \in X$ se nazývá *hromadný* bod filtru φ (resp. báze filtru β), jestliže x patří uzávěru každé z množin $A \in \varphi$ (resp. $A \in \beta$). Zřejmě x je hromadným bodem filtru φ (resp. báze filtru β) tehdy a jen tehdy, když každé okolí bodu x protíná každou z množin filtru φ (resp. báze filtru β).

20. Buď X topologický prostor, φ ultrafiltr v X. Bod $x \in X$ je limitou φ právě tehdy, když je hromadným bodem φ. Dokažte.

Řešení. Z definice limity a hromadného bodu vyplývá, že každý hromadný bod libovolného filtru v X je zároveň jeho hromadným bodem (srov. podmínka (1b) z definice filtru). Obráceně nechť φ je ultrafiltr v X a $x \in X$ je hromadný bod φ. Buď V libovolné okolí bodu x. Platí $V \cap B \neq \emptyset$ pro každé $B \in \varphi$. Klademe $\beta = \{V \cap B \mid B \in \varphi\}$. β je báze filtru v X, filtr φ_β, generovaný bází filtru β, je jemnější než filtr φ, a platí $V \in \varphi_\beta$. Ovšem φ je ultrafiltr, takže $\varphi = \varphi_\beta$ a tedy $V \in \varphi$. Odtud vyplývá, že $x \in \lim \varphi$.

21. Dokažte, že platí:

(a) Je-li bod $x \in X$ limitou filtru φ, pak je limitou každého filtru φ', který je jemnější než φ.

(b) Je-li bod $x \in X$ hromadným bodem filtru φ' a filtr φ' je jemnější než filtr φ, pak x je hromadným bodem filtru φ.

(c) Je-li bod $x \in X$ hromadným bodem filtru φ, pak existuje filtr φ' jemnější než φ tak, že $x \in \lim \varphi'$.

Řešení. (a) Tvrzení vyplývá přímo z definice.

(b) Tvrzení vyplývá přímo z definice.

(c) Nechť $x \in X$ je hromadný bod φ, t.j. nechť pro každé okolí V bodu x a pro každou množinu $B \in \varphi$ platí $V \cap B \neq \emptyset$. Uvažujme filtr φ_β, generovaný bází filtru β, tvořenou množinami $V \cap B$. φ_β je filtr jemnější než φ a pro každé okolí V bodu x platí $V \in \varphi_\beta$. Tedy $x \in \lim \varphi_\beta$.

22. Dokažte, že neprázdná množina U v topologickém prostoru X je otevřená tehdy a jen tehdy, když patří každému filtru, který konverguje k některému bodu $x \in U$.

Řešení. Buď $U \subset X$ neprázdná otevřená množina, $x \in U$ bod, φ filtr v X, konvergující k x; takový filtr vždy existuje, je jím např. filtr tvořený všemi množinami $A \subset X$ takovými, že ke každé množině A existuje okolí V bodu x takové, že $V \subset A$. U je okolí bodu x a $x \in \lim \varphi$, proto $U \in \varphi$.

Obráceně nechť množina $U \subset X$ patří každému filtru φ, který konverguje k některému bodu $x \in U$. Zvolme $x \in U$ libovolně a uvažujme systém všech filtrů φ v X takových, že $x \in \lim \varphi$. Každé okolí V bodu x patří φ, proto uvažovaný systém filtrů obsahuje filtr φ_β, generovaný bází filtru β, tvořené okolími bodu x. Podle předpokladu $U \in \varphi_\beta$. Odtud vyplývá, že existuje okolí V bodu x takové, že $V \subset U$. Z libovolnosti bodu x plyne otevřenost U.

Poznámka. Zřejmě platí, že množina $U \subset X$ je otevřená právě tehdy, když $U \in \bigcap \varphi_{\beta(x)}$ (průnik přes $x \in U$).

23. Buď X topologický prostor, $A \subset X$ množina. Dokažte, že $x \in \operatorname{cl} A$ právě tehdy, když existuje báze filtru β, tvořená podmnožinami množiny A, konvergující k bodu x.

Řešení. Nechť $x \in \operatorname{cl} A$. Podle definice má každé okolí bodu x neprázdný průnik s A. Označme β systém množin $U \cap A$, kde U probíhá okolí bodu x. Systém β je tvořen podmnožinami množiny A a splňuje podmínky (2a), (2b) z definice báze filtru. Zřejmě každé okolí bodu x obsahuje prvek báze filtru β, je tedy $x \in \lim \beta$.

Obráceně, buď β báze filtru, tvořená podmnožinami množiny A, konvergující k bodu x. Každé okolí bodu x tedy obsahuje prvek báze filtru β. To ovšem znamená, že pro každé okolí U bodu x je $U \cap A \neq \emptyset$, t.j. $x \in \operatorname{cl} A$.

24. Ukažte, že topologický prostor X je Hausdorffův právě tehdy, když každý filtr v X má nejvýše jednu limitu.

Řešení. Buď X Hausdorffův prostor, φ filtr v X. Nechť $x_1, x_2 \in X$ jsou body, pro které platí $x_1, x_2 \in \lim \varphi$. Z definice limity filtru vyplývá, že pro každé okolí U_1 (resp. U_2) bodu x_1 (resp. x_2) platí $U_1, U_2 \in \varphi$. Z definice filtru dostáváme, že $U_1 \cap U_2 \in \varphi$, t.j. $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. X je ovšem Hausdorffův, takže $x_1 = x_2$.

Dokážeme obrácené tvrzení. Předpokládejme, že X není Hausdorffův. Existují body $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, takové, že pro libovolné okolí U_1 bodu x_1 a libovolné okolí U_2 bodu x_2 platí $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Nechť β je systém množin tvaru $U_1 \cap U_2$, kde U_1 (resp. U_2) probíhá okolí bodu x_1 (resp. x_2). β je báze filtru v X. Zřejmě každé okolí bodu x_1 (resp. x_2) je prvkem filtru φ_β, t.j. $x_1, x_2 \in \lim \varphi_\beta$. Nalezli jsme tedy filtr v X, který má alespoň dvě limity. Tím je ovšem dokázáno, že má-li každý filtr v X nejvýše jednu limitu, pak X musí být Hausdorffův topologický prostor.

25. Zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité právě tehdy, když pro každou bázi filtru β v X platí $f(\lim \beta) \subset \lim f(\beta)$, kde $f(\beta)$ je obraz báze filtru β při zobrazení f. Dokažte.

Řešení. Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení topologických prostorů, β báze filtru v X, $x \in \lim \beta$. Každé okolí U bodu x obsahuje prvek B báze β. Buď W libovolné okolí bodu $f(x)$. Množina $f^{-1}(W)$ je otevřená a obsahuje bod x, je tedy okolím x. Existuje proto $A \in \beta$ tak, že $A \subset f^{-1}(W)$. Odtud vyplývá, že $f(A) \subset ff^{-1}(W) \subset W$, t.j. každé okolí W bodu $f(x)$ obsahuje prvek báze filtru $f(\beta)$. Platí tedy $f(x) \in \lim f(\beta)$. Tím je inkluze $f(\lim \beta) \subset \lim f(\beta)$ dokázána.

Obráceně nechť pro každou bázi filtru β v X platí $f(\lim \beta) \subset \lim f(\beta)$. K důkazu spojitosti zobrazení f stačí ukázat, že pro každou množinu $A \subset X$ platí $f(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} f(A)$. Buď tedy $A \subset X$ libovolná množina, $x \in \operatorname{cl} A$ bod. Podle cv. 23 existuje báze filtru β, tvořená podmnožinami množiny A taková, že $x \in \lim \beta$. Pro každý bod $f(x) \in f(\operatorname{cl} A)$ platí $f(x) \in f(\lim \beta)$. Podle předpokladu pak $f(x) \in \lim f(\beta)$. $f(\beta)$ je báze filtru v Y, tvořená podmnožinami množiny $f(A)$. Tedy podle cv. 23 platí $f(x) \in \operatorname{cl} f(A)$. Tím je inkluze $f(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} f(A)$ dokázána.

26. Nechť $X = \prod X_\iota$ je součin topologických prostorů, kde index ι probíhá množinu I, $\pi_\kappa : X \to X_\kappa$, $\kappa \in I$, přirozená projekce. Dokažte, že filtr φ v X konverguje k bodu x právě tehdy, když filtr φ_κ, generovaný bází filtru $\pi_\kappa(\varphi)$ v X, konverguje k bodu $\pi_\kappa(x)$ pro každé $\kappa \in I$.

Řešení. Podle cv. 19 (b) je obrazem filtru φ při zobrazení π_κ báze filtru v X_κ. Nechť φ konverguje k bodu $x \in X$. Zobrazení π_κ je spojité, a tedy podle cv. 25 platí $\pi_\kappa(\lim \varphi) \subset \lim \pi_\kappa(\varphi)$, t.j. z podmínky $x \in \lim \varphi$ vyplývá $\pi_\kappa(x) \in \lim \pi_\kappa(\varphi)$. To ovšem znamená, že filtr φ_κ, generovaný bází $\pi_\kappa(\varphi)$, konverguje k bodu $\pi_\kappa(x) \in X_\kappa$.

Obráceně, nechť $\pi_\kappa(x) \in \lim \pi_\kappa(\varphi)$ pro každé $\kappa \in I$. Podle definice limitního bodu báze filtru každé okolí bodu $\pi_\kappa(x)$ obsahuje prvek báze $\pi_\kappa(\varphi)$. Ukážeme, že každé okolí bodu x patří filtru φ. Buď $U \subset X$ libovolné okolí x. Zvolme element W báze topologie na X, $W \subset U$. Platí $W = \prod U_\kappa$, kde $U_\kappa \subset X_\kappa$ a $U_\kappa = X_\kappa$ pro všechny indexy κ až na konečně mnoho. Ovšem $x \in U$, takže $\pi_\kappa(x) \in U_\kappa$ pro všechna $\kappa \in I$. Pro každý index $\iota \in I$ takový, že $U_\iota \neq X_\iota$, existuje prvek B_ι báze filtru $\pi_\iota(\varphi)$ takový, že $B_\iota \subset U_\iota$; pro $\iota \in I$, pro která $U_\iota = X_\iota$, je $B_\iota = X_\iota$ prvek báze filtru $\pi_\iota(\varphi)$. Klademe $B = \prod B_\iota$. Zřejmě $x \in B$ a $B \subset W \subset U$. Označme A_1, A_2, …, A_n ty z množin B_ι, pro které $B_\iota \neq X_\iota$, a označme π_1, π_2, …, π_n odpovídající projekce π_ι. Platí $B = \pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(A_n)$ a $\pi_i^{-1}(A_i) \in \pi_i^{-1}\pi_i(\varphi) \subset \varphi$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Z definice filtru vyplývá, že také $B \in \varphi$ a $U \in \varphi$. To ovšem znamená, že $x \in \lim \varphi$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Podle cv. 19 (c) ultrafiltr φ v X konverguje k bodu $x \in X$ tehdy a jen tehdy, když pro každé $\iota \in I$ ultrafiltr $\pi_\iota(\varphi)$ v X konverguje k bodu $\pi_\iota(x)$.

27. Dokažte, že platí:

(a) Nechť $S : I \to X$ je síť v topologickém prostoru X. Existuje filtr φ_S v X takový, že $\lim \varphi_S = \lim S$.

(b) Nechť φ je filtr v topologickém prostoru X. Existuje síť $S_\varphi : I \to X$ taková, že $\lim S_\varphi = \lim \varphi$.

(c) Nechť S (resp. S') je síť v topologickém prostoru X a φ_S (resp. $\varphi_{S'}$ filtr v X takový, že $\lim S = \lim \varphi_S$ (resp. $\lim S' = \lim \varphi_{S'}$). Je-li síť S' podsítí sítě S, pak filtr $\varphi_{S'}$ je jemnější než filtr φ_S.

Ř e š e n í . (a) Buď $S = (x_\iota)_{\iota \in I}$ síť v X. Nechť φ_S je systém podmnožin množiny X, definovaný takto: $A \in \varphi_S$ právě tehdy, když existuje index $\iota_0 \in I$ takový, že $x_\iota \in A$ pro všechna $\iota \geq \iota_0$. φ_S je filtr v X a platí $\lim \varphi_S = \lim S$.

(b) Buď φ filtr v topologickém prostoru X. Označme I množinu všech dvojic (x, A), kde $x \in A \in \varphi$, a definujme relaci $\leq$ na I takto: $(x_1, A_1) \leq (x_2, A_2)$, jestliže $A_1 \supset A_2$. Relace $\leq$ je usměrnění na I. Klademe $x_\iota = x$ pro $\iota = (x, A) \in I$. Pak $S_\varphi = (x_\iota)_{\iota \in I}$ je síť v X. Zřejmě $\varphi = \varphi_{S\varphi}$ a $\lim S_\varphi = \lim \varphi$.

(c) Tvrzení je zřejmé.

Topologie, generovaná systémem filtrů

Komplexem filtrů v množině X budeme rozumět systém $(\varphi_x)_{x \in X}$, kde φ_x je filtr v X.

28. Nechť X je množina a $(\varphi_x)_{x \in X}$ komplex filtrů v X takový, že pro každé $x \in X$ a každé $V \in \varphi_x$ platí $x \in V$. Dokažte, že systém τ podmnožin množiny X, tvořený množinami $U \subset X$ takovými, že pro každé $x \in U$ je $U \in \varphi_x$ a množinou $\emptyset$, je topologie na X.

Ř e š e n í . Prověříme axiomy topologie. $\emptyset \in \tau$ podle definice systému τ. Z definice filtru vyplývá, že $X \in \varphi_x$ pro každé $x \in X$, a tedy také $X \in \tau$. Buďte nyní U, $V \in \tau$ libovolné dvě množiny. Je-li $U \cap V = \emptyset$, pak $U \cap V \in \tau$. Nechť $U \cap V \neq \emptyset$. Pro každé $x \in U \cap V$ je U, $V \in \varphi_x$ a tedy podle definice filtru také $U \cap V \in \varphi_x$. Proto také $U \cap V \in \tau$. Nakonec uvažujme libovolný systém množin (V_ι) v X takový, že $V_\iota \in \tau$ pro každé ι. Buď $x \in \bigcup V_\iota$ libovolný bod. Existuje index κ tak, že $x \in V$. Ovšem $V_\kappa \in \varphi_x$, a z definice filtru vyplývá, že také $\bigcup V_\iota \in \varphi_x$. Pro každé $x \in \bigcup V_\iota$ je tedy $\bigcup V_\iota \in \varphi_x$. Systém τ je tedy topologie.

29. Buď X množina $(\varphi_x)_{x \in X}$ komplex filtrů na X. Předpokládejme, že jsou splněny tyto podmínky:

(1) Pro každé $x \in X$ a každé $V \in \varphi_x$ platí $x \in V$.

(2) Pro každé $x \in X$ a každé $A \in \varphi_x$ existuje $V \in \varphi_x$ tak, že pro každé $y \in V$ platí $A \in \varphi_y$.

Ukažte, že pak na X existuje jediná topologie τ taková, že pro každý bod $x \in X$ je φ_x filtr v X, generovaný bází filtru β_x, kde β_x je lokální báze topologie τ v bodě x.

Ř e š e n í . Označme τ systém podmnožin množiny X, tvořený množinou $\emptyset$ a množinami U s vlastností, že pro každé $x \in U$ platí $U \in \varphi_x$. Podle cv. 28 je τ topologie na X. Označme β_x lokální bázi topologie τ v bodě x. Pro každé $x \in X$ je β_x báze filtru φ_{β_x} v X. Ukážeme, že $\varphi_{\beta_x} = \varphi_x$.

Buď $A \in \varphi_{\beta_x}$ libovolná množina. Existuje $U \in \beta_x$ tak, že $U \subset A$. Jelikož $U \in \tau$, platí, že pro každé $y \in U$ je $U \in \varphi_y$. Ovšem $U \ni x$, proto $U \in \varphi_x$. Dále $A \supset U$, t.j. také $A \in \varphi_x$. Je tedy $\varphi_{\beta_x} = \varphi_x$. Ukázali jsme tak, že splňuje-li komplex filtrů v X podmínku (1), pak τ je topologie na X, pro niž filtr φ_x je jemnější, než filtr φ_{β_x}, generovaný všemi okolími bodu x.

Obráceně, zvolme libovolnou množinu $A \in \varphi_x$. Položme $U = \{y \in A \mid \varphi_y \ni A\}$. Zřejmě $U \subset A$ a $U \ni x$. Buď $y \in U$ libovolný bod. y tedy leží v A a A je prvkem filtru φ_y. Podle podmínky (2) existuje množina $V \in \varphi_y$ taková, že pro každé $z \in V$ platí $A \in \varphi_z$. Z podmínky $z \in V$ tedy vyplývá $A \in \varphi_y$, t.j. $z \in U$; dostáváme tak vztah $V \subset U$. Ovšem $V \in \varphi_y$, proto také $U \in \varphi_y$. Množina U je tedy otevřená v topologii τ. Dokázali jsme tak, že libovolná množina $A \in \varphi_x$ obsahuje okolí U bodu x, $U \subset A$, což znamená, že $A \in \varphi_{\beta_x}$. Tím je vztah $\varphi_x \subset \varphi_{\beta_x}$ dokázán.

Celkově tedy platí $\varphi_x = \varphi_{\beta_x}$.

Zbývá ukázat, že τ je jediná topologie na X, která má uvedenou vlastnost. Označme β'_x bázi topologie τ', pro kterou rovněž $\varphi_x = \varphi_{\beta'_x}$, t.j. $\varphi_{\beta_x} = \varphi_{\beta'_x}$. Nechť U je otevřená množina v topologii τ, $x \in U$ libovolný bod. U je prvkem φ_{β_x} a tedy $U \in \varphi_{\beta'_x}$. Podle definice filtru $\varphi_{\beta'_x}$ existuje množina $V \in \beta'_x$ taková, že $V \subset U$. Množina U je tedy otevřená rovněž v τ', t.j. $\tau \subset \tau'$. Podobně se ukáže, že $\tau' \subset \tau$. Tím je jednoznačnost topologie dokázána.

30. Uvažujme komplex filtrů $(\varphi_x)_{x\in X}$ v množině X, definovaný takto:

(a) $\varphi_x = \{X\}$ pro každé $x \in X$.

(b) $\varphi_x = \{A \subset X \mid A \ni x\}$ pro každé $x \in X$.

(c) $\varphi_x = \{A \subset X \mid A \ni x\}$ pro každé $x \in X \backslash B$, $\varphi_x = \{X\}$ pro každé $x \in B$, kde $B \subset X$ je neprázdná množina.

Rozhodněte, zda $(\varphi_x)_{x\in X}$ generuje nějakou topologii na X, případně určete tuto topologii.

Ř e š e n í . (a) φ_x splňuje obě podmínky (1), (2) ze cv. 29. Množina $U \subset X$ taková, že pro každé $x \in U$ platí $U \in \varphi_x$, splývá s X, τ je tedy triviální topologie.

(b) Stejně jako v (a) zjistíme, že topologie, generovaná komplexem filtrů $(\varphi_x)_{x\in X}$ je diskrétní topologie.

(c) $(\varphi_x)_{x\in X}$ splňuje podmínky (1), (2) ze cv. 29. Topologie τ, generovaná tímto komplexem filtrů má lokální bázi $\beta_x = \{\{X\}\}$ v bodech $x \in B$ a $\beta_x = \{A \subset X \mid A \subset X \backslash B\}$ v bodech $x \notin B$. V této topologii je tedy množina $X \backslash B$ otevřená, množina B je uzavřená a libovolná podmnožina množiny B není ani otevřená ani uzavřená.

Část 5

Metrické prostory

Metrikou na neprázdné množině rozumíme funkci, přiřazující libovolným dvěma bodům této množiny jisté reálné číslo – jejich vzdálenost. Tato funkce přitom splňuje podmínky, známé jako axiomy metriky: je pozitivně definitní, t.j. vzdálenost dvou různých bodů je kladné číslo a vzdálenost dvou bodů, které splývají, je rovna nule; je symetrická, t.j. vzdálenost bodů x, y je stejná jako vzdálenost bodů y, x; splňuje tzv. trojuhelníkovou nerovnost, která říká, že vzdálenost dvou bodů x, z nemůže být větší než součet vzdáleností bodů x, y a y a z pro libovolný třetí bod y. Množina, na níž je dána metrika, se nazývá metrický prostor.

Pojem metriky má svůj původ ve staré geometrii. Metrické prostory v dnešní podobě jsou studovány od počátku tohoto století a patří mezi nejdůležitější a nejčastěji používané pojmy moderní matematické analýzy.

Mezi důležité vlastnosti metriky patří, že přirozeným způsobem indukuje jistou (tzv. metrickou) topologii. Teorie metrických prostorů se tak stává součástí obecné topologie, přestože pojmy metrického a topologického prostoru jsou ve svých základech zcela odlišné. Některé topologie však nelze charakterizovat pomocí metriky. Příklady tohoto typu lze nalézt nejen v obecné topologii, ale také ve funkcionální analýze (např. v teorii distribucí). Třídu topologických prostorů, jejichž topologie může být charakterizována jako metrická, budeme studovat v kap. 6.

Tato kapitola obsahuje systematický výklad základů teorie metrických prostorů s důrazem na její topologické aspekty.

5.1. Metrika

Metrikou na neprázdné množině X rozumíme funkci $d : X \times X \to \mathbf{R}$, splňující tyto podmínky:

(1) $d(x, y) > 0$ pro libovolné dva různé body x, $y \in X$ a $d(x, x) = 0$ pro libovolné $x \in X$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ pro libovolné x, $y \in X$.

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pro libovolné x, y, $z \in X$. Množina X s danou metrikou se nazývá *metrický prostor*. Bude-li nutné specifikovat o jakou metriku se jedná, označujeme tento metrický prostor symbolem (X, d). Číslo $d(x, y)$ se nazývá *vzdálenost* bodů x, $y \in X$.

Podmínka (1) (resp. (2)) se nazývá *pozitivní definitnost* (resp. *symetričnost*) metriky d; podmínka (3) se nazývá *trojuhelníková nerovnost*.

Buď X metrický prostor s metrikou d. *Otevřenou* (resp. *uzavřenou*) koulí se *středem* $x \in X$ a *poloměrem* $r > 0$ rozumíme množinu $B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ (resp.

$\bar{B}_d(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$). Nemůžeme-li dojít k nedorozumění, místo $B_d(x,r)$ (resp. $\bar{B}_d(x,r)$) píšeme $B(x,r)$ (resp. $\bar{B}(x,r)$).

Vzdáleností dvou neprázdných množin A, $B \subset X$ rozumíme číslo

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} \{d(x,y)\}.$$

Je-li množina A jednoprvková, $A = \{x\}$, označujeme $d(x,B) = d(\{x\},B)$. Existuje-li číslo

$$\delta_A = \sup\nolimits_{x,y \in A} \{d(x,y)\},$$

říkáme, že množina A je *ohraničená* a nazýváme δ_A *průměr* množiny A.

5.2. Metrická topologie

Každé metrice na neprázdné množině X lze přirozeným způsobem přiradit jistou topologii. Zavedeme tuto topologii a budeme studovat její vlastnosti.

Věta 1. *Buď X metrický prostor.*
(a) *Systém všech otevřených koulí je báze topologie na X.*
(b) *Systém všech otevřených koulí se středem v bodě $x \in X$ je lokální báze této topologie v bodě x.*

Důkaz. (a) Prověříme podmínky Věty 8. odst. 1.4 str. 6. Systém σ všech otevřených koulí pokrývá X. Uvažujme dvě otevřené koule $B(x,r)$, $B(y,s)$ a bod $z \in B(x,r) \cap B(y,s)$. Zvolme číslo t tak, aby platilo $0 < t < \min\{s - d(y,z), r - d(x,z)\}$. Pak pro libovolný bod w otevřené koule $B(z,t)$ platí $d(x,w) \leq d(x,z) + d(z,w) < d(x,z) + t < r$, $d(y,w) \leq d(y,z) + d(z,w) < d(y,z) + t < s$, t.j. $B(z,t) \subset B(x,r) \cap B(y,s)$. Systém σ je tedy báze topologie na X.
(b) Tvrzení vyplývá přímo z definice.

Topologie na metrickém prostoru X generovaná systémem všech otevřených koulí, se nazývá *metrická topologie* nebo také *topologie asociovaná s metrikou* metrického prostoru X.

Buď X množina, d_1, d_2 metriky na X. Řekneme, že metriky d_1, d_2 jsou *ekvivalentní*, jestliže topologie asociovaná s d_1 je totožná s topologií asociovanou s d_2.

Věta 2. *Metriky d_1, d_2 na množině X jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, když k libovolné otevřené kouli $B_{d_1}(x,\varepsilon)$ existuje otevřená koule $B_{d_2}(x,\delta)$ tak, že $B_{d_2}(x,\delta) \subset B_{d_1}(x,\varepsilon)$, a k libovolné otevřené kouli $B_{d_2}(x,\delta)$ existuje otevřená koule $B_{d_1}(x,\gamma)$ tak, že $B_{d_1}(x,\gamma) \subset B_{d_2}(x,\delta)$.*

Důkaz. Označme τ_1 (resp. τ_2) topologii asociovanou s metrikou d_1 (resp. d_2). Předpokládejme, že metriky d_1, d_2 jsou ekvivalentní. Pak $\tau_1 \subset \tau_2$ a tedy každá otevřená koule $B_{d_1}(x,\varepsilon)$ je otevřená v topologii τ_2. Podobně $\tau_2 \subset \tau_1$ a tedy každá otevřená koule $B_{d_2}(x,\delta)$ je otevřená v τ_1. Požadované tvrzení nyní vyplývá z Věty 1. odst. 5.2 str. 112. Obráceně předpokládejme, že k libovolné otevřené kouli $B_{d_1}(x,\varepsilon)$ existuje otevřená koule $B_{d_2}(x,\delta)$ tak, že $B_{d_2}(x,\delta) \subset B_{d_1}(x,\varepsilon)$, a k libovolné otevřené kouli $B_{d_2}(x,\delta)$ existuje otevřená koule $B_{d_1}(x,\gamma)$ tak, že $B_{d_1}(x,\gamma) \subset B_{d_2}(x,\delta)$. Buď $U \in \tau_1$ otevřená množina, $x \in U$ bod. Existuje otevřená koule $B_{d_1}(x,\varepsilon)$ ležící v U a otevřená koule $B_{d_2}(x,\delta) \subset B_{d_1}(x,\varepsilon)$, U je tedy otevřená v topologii τ_2. Odsud $\tau_1 \subset \tau_2$ a analogicky $\tau_2 \subset \tau_1$. Tím je důkaz ukončen.

Věta 3. *Buď A neprázdná množina v metrickém prostoru X s metrikou d. K tomu, aby $x \in \operatorname{cl} A$ je nutné a stačí, aby $d(x, A) = 0$.*

Důkaz. Nechť $x \in \operatorname{cl} A$. Pak $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pro každé $r > 0$, t.j. existuje $z \in A$ tak, že $d(x, z) < r$. Odtud $d(x, A) = \inf_{z \in A}\{d(x, z)\} = 0$. Obráceně platí-li $d(x, A) = 0$, platí také $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pro každé $r > 0$, t.j. $U \cap A \neq \emptyset$ pro každé okolí U bodu x. Tedy $x \in \operatorname{cl} A$.

Věta 4. (a) *Každý metrický prostor je prvního typu spočetnosti.*

(b) *Metrický prostor je druhého typu spočetnosti tehdy a jen tehdy, je-li separabilní.*

Důkaz. (a) Buď X metrický prostor, d metrika na X. Podle Věty 1. odst. 5.2 str. 112 pro libovolný bod $x \in X$ otevřené koule $B(x, r)$ tvoří lokální bázi topologie v bodě x. Vezmeme-li za r kladná racionální čísla, dostaneme spočetnou lokální bázi topologie v bodě x.

(b) Podle Věty 13. odst. 1.6 str. 8 je každý topologický prostor druhého typu spočetnosti separabilní. Stačí tedy ukázat, že každý separabilní metrický prostor má spočetnou bázi. Buď X separabilní metrický prostor, $Y \subset X$ spočetná hustá množina. Buď d metrika metrického prostoru X, σ sytém všech otevřených koulí racionálního poloměru se středy v bodech množiny Y. Systém σ je zřejmě spočetný. Ukážeme, že tvoří bázi metrické topologie na X. Buď $x \in X$ libovolný bod, U jeho okolí. Pro jisté $r > 0$ racionální existuje otevřená koule $B(x, r)$ ležící v U. Existuje $y \in Y$ tak, že $d(x, y) < r/2$. Zřejmě $B(y, r/2) \in \sigma$ a $x \in B(y, r/2) \subset U$. Z Věty 9. odst. 1.4 str. 7 plyne, že σ je báze metrické topologie, asociované s metrikou d.

Věta 5. *Každý metrický prostor je Hausdorffův.*

Důkaz. Buď X metrický prostor, d jeho metrika. Buďte x, y dva různé body. Položme $r = d(x, y)/2$. Ukážeme, že $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. Předpokládejme, že množina $B(x, r) \cap B(y, r)$ obsahuje bod z. Pak $d(x, z)$, $d(y, z) < r$, t.j. $2r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < 2r$, což je spor.

Důsledek. Buď X metrický prostor.

(a) Bod $x \in X$ leží v uzávěru množiny $A \subset X$ tehdy a jen tehdy, když existuje posloupnost $S = (x_i)$ v A taková, že $x = \lim S$.

(b) Množina $A \subset X$ je uzavřená tehdy a jen tehdy, když obsahuje limitní body všech posloupností ležících v A.

(c) Každá posloupnost v X má nejvýše jeden limitní bod.

Důkaz. Tvrzení (a), (b) vyplývají z Věty 9. odst. 4.4 str. 93 a z Věty 4. (a) odst. 5.2 str. 113. Tvrzení (c) vyplývá z Věty 10. odst. 4.4 str. 94 a z Věty 5. odst. 5.2 str. 113.

Buď X metrický prostor, d jeho metrika. Přímo z definice konvergentní posloupnosti dostáváme, že následující tři podmínky jsou ekvivalentní:

(1) Posloupnost (x_i) bodů z X konverguje k bodu $x \in X$.

(2) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index n_ε takový, že $d(x_i, x) < \varepsilon$ pro každé $i \geq n_\varepsilon$.

(3) Posloupnost $(d(x_i, x))$ reálných čísel konverguje k nule.

5.3. Spojitá zobrazení metrických prostorů

Uvažujeme-li metrické prostory s jejich metrickou topologií, má smysl hovořit o spojitosti zobrazení metrických prostorů. V tomto případě lze spojitost vyšetřovat také pomocí metriky.

Věta 6. *Buďte X_1, X_2 metrické prostory, d_1 (resp. d_2) metrika X_1 (resp. X_2), $x_0 \in X_1$ bod a $f : X_1 \to X_2$ zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *f je spojité v bodě x_0.*

(2) *Pro každou posloupnost (x_i) v X_1 konvergující k bodu x_0 posloupnost $(f(x_i))$ v X_2 konverguje k bodu $f(x_0)$.*

(3) *Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že z podmínky $d_1(x_0, x) < \delta$ vyplývá $d_2(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.*

Důkaz. Ekvivalence podmínek (1) a (2) již byla dokázána (Věta 9. odst. 4.4 str. 93). Ekvivalence podmínek (1) a (3) vyplývá z toho, že množina A v metrickém prostoru je otevřená tehdy a jen tehdy, když ke každému bodu $x \in A$ existuje otevřená koule se středem v bodě x ležící v A.

5.4. Podprostory a součiny metrických prostorů

Buď X metrický prostor, $d : X \times X \to \mathbf{R}$ jeho metrika, $A \subset X$ libovolná podmnožina. Zúžení $d_A = d|_{A \times A}$ funkce d na množinu $A \times A \subset X \times X$ je zřejmě metrika na A. Množina A s touto metrikou se nazývá *podprostor* metrického prostoru X; metrika d_A se přitom nazývá *indukovaná.*

Uvažujeme-li množinu A s indukovanou metrikou, vznikají na A dvě topologie: metrická topologie a topologie podprostoru metrického prostoru X.

Věta 7. *Buď X metrický prostor s metrikou d, $A \subset X$ podmnožina. Metrická topologie na A, asociovaná s indukovanou metrikou d_A, je totožná s topologií podprostoru metrického prostoru X.*

Důkaz. Označme σ topologii na A asociovanou s metrikou d_A a τ_A topologii podprostoru metrického prostoru X. Otevřené koule $B_{d_A}(x, r)$, kde $x \in A$, $r > 0$, tvoří bázi topologie σ (Věta 1. odst. 5.2 str. 112). Dále z definice otevřené koule vyplývá, že $B_{d_A}(x, r) = A \cap B_d(x, r)$, t.j. že koule $B_{d_A}(x, r)$ je otevřená v topologii τ_A. Platí tedy $\sigma \subset \tau_A$. Obráceně nechť $U \in \tau_A$ je otevřená množina, $x \in U$ bod. Existuje otevřená množina $V \subset X$ taková, že $U = A \cap V$. Zvolme otevřenou kouli $B_d(x, \varepsilon)$ tak, aby $B_d(x, \varepsilon) \subset V$. Pak $B_d(x, \varepsilon) \cap A = B_{d_A}(x, \varepsilon) \subset U$ odkud vyplývá, že $U \in \sigma$, takže $\tau_A \subset \sigma$. Celkově $\tau_A = \sigma$, což jsme chtěli dokázat.

Buď X_1 (resp. X_2) metrický prostor s metrikou d_1 (resp. d_2). Pro libovolné (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X_1 \times X_2$ položme

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \Big((d_1(x_1, x_2))^2 + (d_2(y_1, y_2))^2 \Big)^{\frac{1}{2}} .$$

Funkce d je metrika na součinu množin $X_1 \times X_2$; množina $X_1 \times X_2$ s touto metrikou se nazývá *součin metrických prostorů* X_1, X_2.

Věta 8. *Metrická topologie na součinu metrických prostorů X_1, X_2 je totožná se součinem metrických topologií metrických prostorů X_1, X_2.*

Důkaz. Nechť τ_d je metrická topologie na $X_1 \times X_2$ asociovaná s metrikou d, nechť τ označuje topologii součinu na $X_1 \times X_2$. Pro libovolné $(x_0, y_0) \in X_1 \times X_2$ platí $B_d((x_0, y_0), r/2) \subset B_{d_1}(x_0, r/2) \times B_{d_2}(y_0, r/2) \subset B_d((x_0, y_0), r)$, kde d_1 (resp. d_2) je metrika na X_1 (resp. X_2). Podle Věty 1. odst. 2.1 str. 17. musí být tedy obě identická zobrazení $\mathrm{id} : (X, \tau_d) \to (X, \tau)$, $\mathrm{id} : (X, \tau) \to (X, \tau_d)$ spojitá v bodě (x_0, y_0). Z libovolnosti bodu (x_0, y_0) vyplývá, že zobrazení id je homeomorfismus. Odtud $\tau_d = \tau$.

Pojem součinu (dvou) metrických prostorů se přirozeným způsobem zobecňuje na libovolný konečný systém metrických prostorů. Buďte X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, metrické prostory, nechť d_k je metrika metrického prostoru X_k. Označme $\mathrm{pr}_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k \to X_i$ i-tou kanonickou projekci součinu množin. Pro každé x, $y \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ položme

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{k} d_i(\mathrm{pr}_i\, x, \mathrm{pr}_i\, y)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Funkce d je metrika na množině $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$; množina $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ s touto metrikou se nazývá *součin metrických prostorů* $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Je zřejmé, že Věta 8. odst. 5.4 str. 114 může být přímo zobecněna na součin konečného počtu metrických prostorů. Odsud pak ihned vyplývá, že i-tá kanonická projekce $\mathrm{pr}_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k \to X_i$ je spojité otevřené zobrazení (Věta 7. (a) odst. 3.2 str. 34).

Vyšetříme nyní případ součinu spočetně mnoha metrických prostorů. Dokážeme nejdříve důležité pomocné tvrzení.

Lemma 1. *Buď X metrický prostor s metrikou d, $k > 0$ pevné reálné číslo. Pro každé x, $y \in X$ klademe*

$$\delta(x, y) = \min\{d(x, y), k\}.$$

δ je metrika na X, ekvivalentní s metrikou d.

Důkaz. Podmínky (1), (2) z definice metriky jsou evidentně splněny. Prověříme platnost podmínky (3). Buďte x, y, $z \in X$ libovolné body. Platí $\delta(x, z) \leq \min\{d(x, y) + d(y, z), k\}$. Rozlišíme dvě možnosti. Platí-li navíc $d(x, y) + d(y, z) \leq k$, pak $\min\{d(x, y) + d(y, z), k\} \leq d(x, y) + d(y, z) = \min\{d(x, y), k\} + \min\{d(y, z), k\} = \delta(x, y) + \delta(y, z)$, t.j. $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$. Platí-li $d(x, y) + d(y, z) > k$, pak $\min\{d(x, y) + d(y, z), k\} = k \leq \min\{d(x, y), k\} + \min\{d(y, z), k\} = \delta(x, y) + \delta(y, z)$, t.j. opět $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$. Podmínka (3) je tedy splněna a je dokázáno, že δ je metrika.

Pro každé r takové, že $0 < r < k$, platí $B_\delta(x, r) = B_d(x, r)$. Odsud ihned vyplývá, že množina $U \subset X$ je otevřená v (X, δ) tehdy a jen tehdy, když je otevřená v (X, d). Tím je důkaz ukončen.

Metrika δ na X se nazývá *ohraničená metrika* asociovaná s metrikou d. Tuto metriku použijeme pro konstrukci metriky na součinu spočetně mnoha metrických prostorů.

Věta 9. *Nechť $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ je spočetný systém metrických prostorů, d_i metrika na X_i, $\delta_i = \min\{d_i, 1/2^i\}$ ohraničená metrika, asociovaná s metrikou d_i, $X = \prod X_i$ součin systému množin $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$. Funkce $\rho : X \times X \to \mathbf{R}$, definovaná vztahem*

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(\mathrm{pr}_i(x), \mathrm{pr}_i(y)),$$

je metrika na X. Metrická topologie na X, asociovaná s touto metrikou, je totožná se součinem metrických topologií systému metrických prostorů $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$.

Důkaz. Pro každé x, $y \in X$ platí

$$\rho(x,y) \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

a ρ zřejmě splňuje podmínky (1) – (3) z definice metriky. Označme τ (resp. τ_ρ) topologii součinu (resp. metrickou topologii asociovanou s metrikou ρ). Podle Věty 6. odst. 5.3 str. 114 je pro každé $i \in \mathbf{N}$ zobrazení $\mathrm{pr}_i : (X,d) \to (X_i, \delta_i)$ spojité: stačí zvolit v podmínce (3) Věty 6. odst. 5.3 str. 114 $\delta = \varepsilon$. Platí tedy $\tau \subset \tau_\rho$. Dokážeme, že platí také obrácená inkluze. Buď $B_\rho(x,\varepsilon)$ libovolná koule. Zkonstruujeme množinu $V \in \tau$ takovou, že $x \in V$ a $V \subset B_\rho(x,\varepsilon)$. Zvolme n tak, aby platilo $1/2^{n-1} < \varepsilon$ a položme $V_i = B_{\delta_i}(\mathrm{pr}_i(x), \varepsilon/2^n)$, $1 \le i \le n$, $V_i = X_i$, $i \in \mathbf{N}\backslash\{1,2,\dots,n\}$. Pro libovolný bod $y \in V = \prod V_i$ platí

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &\le \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\mathrm{pr}_i(x), \mathrm{pr}_i(y)) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\\ &< n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

neboť $\delta_i(\mathrm{pr}_i(x), \mathrm{pr}_i(y)) \le 1/2^i$ pro každé $i \in \mathbf{N}$ a

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

Platí tedy $y \in B_\rho(x,\varepsilon)$ odkud $\tau_\rho \subset \tau$.

Celkem tedy $\tau_\rho = \tau$ a důkaz je ukončen.

Pod *součinem spočetného systému metrických prostorů* $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ budeme rozumět součin množin $\prod X_i$ s metrikou ρ, definovanou ve Větě 9. odst. 5.4 str. 115.

Ve Větě 8. odst. 5.4 str. 114 a Větě 9. odst. 5.4 str. 115 jsme ukázali, že na součinu $\prod X_\iota$ systému metrických prostorů $(X_\iota)_{\iota\in I}$, kde indexová množina je nejvýše spočetná, lze zavést metriku tak, že topologie součinu splývá s indukovanou metrickou topologií. Ukážeme, že toto tvrzení nelze rozšířit pro případ, že indexová množina I je nespočetná.

Věta 10. *Nechť $(X_\iota)_{\iota\in I}$ je systém metrických prostorů takový, že indexová množina I je nespočetná. Předpokládejme, že pro každé $\iota \in J$, kde $J \subset I$ je nespočetná, je množina X_ι alespoň dvouprvková. Pak součin $X = \prod X_\iota$ systému metrických prostorů $(X_\iota)_{\iota\in I}$ není prvního typu spočetnosti.*

Důkaz. Ukážeme, že součin $X' = \prod_{\iota\in J} X_\iota$ není prvního typu spočetnosti. Buď $x \in X'$ libovolný bod a předpokládejme, že existuje spočetná lokální báze topologie součinu v bodě x. Označme ji $(U_i)_{i\in\mathbf{N}}$. Pro každé $i \in \mathbf{N}$ existuje okolí W_i bodu x takové, že $W_i \subset U_i$ a $W_i = \prod_{\iota\in J} W_{i,\iota}$, kde $W_{i,\iota}$ je otevřená množina v X_ι a $W_{i,\iota} = X_\iota$ jpro každé $\iota \in J\backslash K_i$ pro jistou konečnou množinu K_i. Množina $K = \bigcup K_i$ je spočetná. Existuje tedy index $\kappa \in J$ takový, že $\kappa \notin K$. Zřejmě $W_{i,\kappa} = \mathrm{pr}_\kappa(W_i) = X_\kappa$ pro každé $i \in \mathbf{N}$. Položme $V = \prod V_\iota$, kde $V_\iota = X_\iota$ pro každé $\iota \ne \kappa$ a V_κ je okolí bodu $\mathrm{pr}_\kappa(x)$ různé od X_κ. Takové okolí existuje, neboť podle předpokladu prostor X_κ je Hausdorffův a obsahuje alespoň dva různé body. Ukážeme, že pro žádné $i \in \mathbf{N}$ neplatí $U_i \subset V$, což je spor s předpokladem, že (U_i) je lokální báze v bodě x. Nechť $U_k \subset V$. Pak také $W_K \subset V$ a tedy $\mathrm{pr}_\kappa(W_k) \subset \mathrm{pr}_\kappa(V)$. Odtud plyne, že $X_\kappa \subset V_\kappa$, kde $V_\kappa \ne X_\kappa$, což je spor.

Podle Věty 9. (b) odst. 3.3 str. 36 je X' homeomorfní s podprostorem součinu $X = \prod_{\iota\in I} X_\iota \cdot X'$ ovšem není prvního typu spočetnosti, proto ani X nemůže být prvního typu spočetnosti.

Důsledek. Nechť $(X_\iota)_{\iota\in I}$ je systém metrických prostorů takový, že indexová množina I je nespočetná. Předpokládejme, že pro každé ι z jisté nespočetné množiny $J \subset I$ je množina X_ι alespoň dvouprvková. Pak na množině $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ neexistuje metrika s vlastností, že metrická topologie asociovaná s touto metrikou je rovna topologii součinu.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z toho, že každý metrický prostor je prvního typu spočetnosti (Věta 4. (a) odst. 5.2 str. 113).

5.5. Úplné metrické prostory

Posloupnost $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ metrického prostoru X s metrikou d se nazývá *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 tak, že pro každé $i, j \geq n_0$ platí $d(x_i, x_j) < \varepsilon$. Metrický prostor X se nazývá *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost v X je konvergentní.

Věta 11. *Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.*

Důkaz. Buď (x_i) konvergentní posloupnost, $a = \lim x_i$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 tak, že pro $i \geq n_0$ platí $d(a, x_i) < \varepsilon/2$. Pro $i, j \geq n_0$ pak platí $d(x_i, x_j) \leq d(x_i, a) + d(a, x_j) < \varepsilon$.

Věta 12. (a) *Úplný podprostor metrického prostoru je uzavřená množina.*
(b) *Uzavřená množina v úplném metrickém prostoru je úplný podprostor.*

Důkaz. (a) Buď A úplný podprostor metrického prostoru X, $x \in \operatorname{cl} A$ bod. Podle Důsledku (b) Věty 5. odst. 5.2 str. 113 existuje posloupnost (x_i) v A konvergující k x. Tato posloupnost je cauchyovská (Věta 11. odst. 5.5 str. 117). Podle předpokladu posloupnost (x_i) konverguje k bodu $a \in A$; platí ovšem $x = a$ (Důsledek (a) Věty 5. odst. 5.2 str. 113) a tedy $x \in A$.
(b) Buď A uzavřená množina v úplném metrickém prostoru X, (x_i) cauchyovská posloupnost v A. Podle předpokladu (x_i) konverguje k bodu $a \in X$; z Důsledku (a) Věty 5. odst. 5.2 str. 113 vyplývá, že $a \in \operatorname{cl} A = A$ a podprostor A musí být úplný.

Důsledek. Podprostor A úplného metrického prostoru je úplný právě tehdy, když A je uzavřená množina.

Lemma 2. *Buď (x_i) cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru X, $x \in X$ bod, v jehož libovolném okolí leží nekonečně mnoho bodů posloupnosti (x_i). Pak $x = \lim x_i$.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo a uvažujme otevřenou kouli $B(x, \varepsilon)$ v X. Existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro každé $i, j \geq n_0$ platí $d(x_i, x_j) < \varepsilon/2$. Zároveň podle předpokladu existují indexy $i_1, i_2, i_3, \ldots \geq n_0$ takové, že $d(x_{i_k}, x) < \varepsilon/2$ pro každé $k \in \mathbf{N}$. Buď nyní $p \geq n_0$ libovolný index. Platí $d(x_p, x) \leq d(x_p, x_{i_k}) + d(x_{i_k}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, t.j. $x_p \in B(x, \varepsilon)$. Posloupnost (x_i) tedy konverguje k bodu x.

Pro každé $x, y \in \mathbf{R}$ položme

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Snadno je vidět, že tímto vztahem je definována metrika na množině reálných čísel $\mathbf{R}$. Tuto metriku budeme nazývat *Euklidovou* nebo také *přirozenou*; metrický prostor

$(\mathbf{R}, d)$ nazýváme (jednorozměrný) *Euklidův metrický prostor*. Součin n metrických prostorů $(\mathbf{R}, d)$ nazýváme (n-*rozměrný*) *Euklidův metrický prostor* a označujeme $\mathbf{R}^n$. Metrika na $\mathbf{R}^n$ se bude také nazývat *Euklidova* nebo *přirozená*; připomeňme si, že je definována vztahem

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \Big((x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2$$

$$+ \ldots + (x^n - y^n)^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

kde $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ (porov. odst. 5.4).

Věta 13. (a) *Metrická topologie Euklidovy metriky na množině* $\mathbf{R}$ *reálných čísel je totožná s přirozenou topologií.*

(b) *Množina* $\mathbf{R}$ *s Euklidovou metrikou je úplný metrický prostor.*

Důkaz. (a) Tvrzení je zřejmé.

(b) Dokážeme úplnost metrického prostoru $(\mathbf{R}, d)$. Buď (x_i) libovolná cauchyovská posloupnost reálných čísel. Zvolme n_0 tak, aby platilo $|x_i - x_j| < 1$ pro každé i, $j \geq n_0$. Položme $m = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1\}$. Pro $i > n_0$ platí $\big||x_{n_0}| - |x_i|\big| = \big||x_{n_0} - x_i + x_i| - |x_i|\big| \leq \big||x_{n_0} - x_i| + |x_i| - |x_i|\big| = |x_{n_0} - x_i| < 1$, t.j. $-1 < |x_{n_0}| - |x_i| < 1$. Odtud vyplývá, že $|x_i| < |x_{n_0}| + 1 \leq m$. Pro každé $i \in \mathbf{N}$ tedy platí $|x_i| \leq m$ a posloupnost (x_i) musí být omezená. Označme A množinu bodů $y \in \mathbf{R}$ takových, že v intervalu (y, ∞) leží nejvýše konečný počet bodů posloupnosti (x_i). Zřejmě $A \neq \emptyset$ (neboť posloupnost (x_i) je omezená zdola). Označme $x = \inf A$; z vlastností reálných čísel vyplývá, že bod x existuje. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a uvažujme interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Podle definice bodu x leží v tomto intervalu nekonečně mnoho bodů posloupnosti (x_i), a tedy $x = \lim x_i$ (Lemma 2. odst. 5.5 str. 117). Posloupnost (x_i) je tedy konvergentní.

Věta 14. *Součin dvou úplných metrických prostorů je úplný metrický prostor.*

Důkaz. Buď X (resp. Y) úplný metrický prostor s metrikou d_1 (resp. d_2), d metrika na součinu metrických prostorů $X \times Y$. Buď $((x_i, y_i))$ cauchyovská posloupnost v $X \times Y$. Jelikož pro každé i, j platí $d_1(x_i, y_j) \leq d((x_i, y_i), (x_j, y_j))$, $d_2(y_i, y_j) \leq d((x_i, y_i), (x_j, y_j))$, každá z posloupností (x_i), (y_i) je také cauchyovská. Podle předpokladu existují body $x = \lim x_i$, $y = \lim y_i$. Buď $\varepsilon > 0$. Existuje index n tak, že $d_1(x_i, x) < \varepsilon/\sqrt{2}$, $d_2(y_i, y) < \varepsilon/\sqrt{2}$ pro každé $i \geq n$. Pak $d((x_i, y_i), (x, y)) = ((d_1(x_i, x))^2 + (d_2(y_i, y))^2)^{1/2} < (\varepsilon^2/2 + \varepsilon^2/2)^{1/2} = \varepsilon$, takže $(x, y) = \lim(x_i, y_i)$.

Důsledek 1. Součin konečně mnoha úplných metrických prostorů je úplný metrický prostor.

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledkem Věty 14. odst. 5.5 str. 118.

Důsledek 2. Euklidův metrický prostor $\mathbf{R}^n$ je úplný.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z Důsledku 1 a Věty 13. (b) odst. 5.5 str. 118.

5.6. Stejnoměrně spojitá zobrazení

Zobrazení f metrického prostoru X s metrikou d_1 do metrického prostoru Y s metrikou d_2 se nazývá *stejnoměrně spojité*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pro každé x, $y \in X$ takové, že $d_1(x, y) < \delta$.

Stejnoměrné zobrazení je zřejmě spojité v metrických topologiích.

V následující větě používáme přirozenou metriku na množině reálných čísel $\mathbf{R}$.

Věta 15. *Buď X metrický prostor s metrikou d, $A \subset X$ neprázdná množina. Zobrazení $X \ni x \to d(x, A) \in \mathbf{R}$ je stejnoměrně spojité.*

Důkaz. Buďte $x, y \in X$ libovolné body. Pro každé $z \in A$ platí $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$, takže

$$\begin{aligned}
&d(x, A) = \inf_{z \in A}\{d(x, z)\} \le d(x, y) + d(y, z),\\
&d(x, A) - d(x, y) \le d(y, z),\\
&d(x, A) - d(x, y) \le \inf_{z \in A}\{d(y, z)\} = d(y, A).
\end{aligned}$$

Analogicky dostaneme, že platí nerovnost $d(y, A) - d(x, y) \le d(x, A)$. Odtud $|d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y)$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ nyní zvolíme $\delta = \varepsilon$ a prověříme definici stejnoměrné spojitosti.

Věta 16. *Jsou-li zobrazení $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ metrických prostorů stejnoměrně spojitá, pak složené zobrazení $g \circ f : X \to Z$ je stejnoměrně spojité.*

Důkaz. Označme d_1 (resp. d_2, resp. d_3) metriku na X (resp. Y, resp. Z). Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé x', $y' \in Y$ takové, že $d_2(x', y') < \delta$, platí $d_3(g(x'), g(y')) < \varepsilon$; dále existuje $\eta > 0$ tak, že pro každé x, $y \in X$ takové, že $d_1(x, y) < \eta$, platí $d_2(f(x), f(y)) < \delta$. Pro taková x, y tedy platí $d_3(g(f(x)), g(f(y))) < \varepsilon$.

Význam stejnoměrně spojitých zobrazení spočívá v tom, že zachovávají cauchyovské posloupnosti.

Věta 17. *Je-li $f : X \to Y$ stejnoměrně spojité zobrazení metrických prostorů, pak pro každou cauchyovskou posloupnost (x_i) v X je posloupnost $(f(x_i))$ v Y cauchyovská.*

Důkaz. Nechť d_1 (resp. d_2) je metrika X (resp. Y). Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé x, $y \in X$ takové, že $d_1(x, y) < \delta$, platí $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Zároveň existuje index n_0 takový, že pro každý index $i \ge n_0$ platí $d_1(x_i, x_{n_0}) < \delta$. To ovšem znamená, že pro každé $i \ge n_0$ platí $d_2(f(x_i), f(x_{n_0})) < \varepsilon$. Posloupnost $(f(x_i))$ je tedy cauchyovská.

Důsledek 1. Nechť $f : X \to Y$ je stejnoměrně spojité zobrazení metrických prostorů, (x_i) posloupnost v X. Konverguje-li posloupnost (x_i) k bodu $x \in X$, pak posloupnost $(f(x_i))$ konverguje k bodu $f(x) \in Y$.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z Věty 11. odst. 5.5 str. 117, Věty 17. odst. 5.6 str. 119 a z definice stejnoměrně spojitého zobrazení.

Důsledek 2. Předpokládejme, že existuje bijekce $f : X \to Y$ metrických prostorů taková, že obě zobrazení f, f^{-1} jsou stejnoměrně spojitá. Pak metrický prostor X je úplný tehdy a jen tehdy, když Y je úplný.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z Věty 17. odst. 5.6 str. 119 a Důsledku 1. této věty.

Buďte d_1, d_2 dvě metriky na množině X. Označme $X_1 = (X, d_1)$, $X_2 = (X, d_2)$. Řekneme, že metriky d_1, d_2 jsou *stejnoměrně ekvivalentní*, jestliže identické zobrazení $\mathrm{id} : X_1 \to X_2$ i k němu inverzní zobrazení $\mathrm{id} : X_2 \to X_1$ je stejnoměrně spojité.

Jsou-li metriky d_1, d_2 stejnoměrně ekvivalentní, pak posloupnost (x_i) v X je cauchyovská v X_1 tehdy a jen tehdy, je-li cauchyovská v X_2; metrický prostor X_1 je úplný tehdy a jen tehdy, je-li úplný metrický prostor X_2.

5.7. Kontrakce

Buď X_1 (resp. X_2) metrický prostor s metrikou d_1 (resp. d_2). Zobrazení $f : X_1 \to X_2$ se nazývá *kontrahující zobrazení* nebo *kontrakce*, jestliže existuje číslo k, $0 < k < 1$, tak, že pro každé x, $y \in X_1$ platí $d_2(f(x), f(y)) \leq k\, d_1(x, y)$.

Věta 18. *Kontrakce je stejnoměrně spojité zobrazení.*

Důkaz. Buď $f : X_1 \to X_2$ kontrakce, d_1 (resp. d_2) metrika X_1 (resp. X_2), $\varepsilon > 0$ libovolné. Pro každé x, $y \in X_1$ takové, že $d_1(x, y) < \delta = \varepsilon/k$, platí $d_2(f(x), f(y)) < k \cdot (\varepsilon/k) = \varepsilon$.

Věta 19. *Nechť X je úplný metrický prostor, $f : X \to X$ kontrakce. Existuje právě jeden bod $x \in X$ tak, že $f(x) = x$.*

Důkaz. Nechť d označuje metriku metrického prostoru X. Buď $k \in (0, 1)$ takové číslo, že pro každé x, $y \in X$ platí $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$. Zvolme bod $x_1 \in X$ libovolně a položme $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$. Dostáváme posloupnost (x_i) v X. Ukážeme, že tato posloupnost je cauchyovská. Označme $a = d(x_1, x_2)$. Pak $d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq k \cdot a, \dots, d(x_i, x_{i+1}) = d(f(x_{i-1}), f(x_i)) \leq k \cdot d(x_{i-1}, x_i) \leq k^{i-1} \cdot a, \dots$. Odtud dostáváme pro libovolné i, j, $j > i$,

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &\leq d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, x_{i+2}) + \dots + d(x_{j-1}, x_j) \\ &\leq k^{i-1} \cdot a + k^i \cdot a + \dots + k^{j-2} \cdot a = a \cdot (1 + k + k^2 + \dots \\ &+ k^{j-2}) - a \cdot (1 + k + k^2 + \dots + k^{i-2}) \\ &= \frac{a}{1-k}(k^{i-1} - k^{j-1}) \end{aligned}$$

(částečné součty geometrické řady). Pro $i \leq j$ dostaneme analogický výsledek, takže celkově

$$d(x_i, x_j) \leq \frac{a}{1-k} \left| k^{i-1} - k^{j-1} \right|.$$

Ovšem (k^i) je geometrická posloupnost konvergující k nule v $\mathbf{R}$. Je to tedy posloupnost cauchyovská (Věta 11. odst. 5.5 str. 117) a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index n tak, že pro každé i, $j \geq n$ platí $|k^{i-1} - k^{j-1}| < (1 - k) \cdot \varepsilon/a$. Odtud $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ a posloupnost (x_i) je cauchyovská.

Z úplnosti X vyplývá, že posloupnost (x_i) je konvergentní. Označme $x = \lim x_i$. Jelikož kontrakce f je stejnoměrně spojitá (Věta 18. odst. 5.7 str. 120), je spojitá a tedy přenáší konvergentní posloupnosti v konvergentní posloupnosti (Věta 9. (c) odst. 4.4 str. 93, Věta 4. (a) odst. 5.2 str. 113). Platí tedy $f(x) = \lim f(x_i) = \lim x_{i+1} = x$.

Zbývá dokázat, že bod x, pro který platí $f(x) = x$, je určen jednoznačně. Je-li y další bod, pro který $f(y) = y$, pak $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x,y)$. Vzhledem k podmínce $0 < k < 1$ lze tuto podmínku splnit jen když $d(x,y) = 0$, t.j. $x = y$.

Bod $x \in X$, pro který platí $f(x) = x$, se nazývá *pevný bod* kontrakce f.

5.8. Zúplnění metrického prostoru

Buď X_1 (resp. X_2) metrický prostor s metrikou d_1 (resp. d_2). Zobrazení $f : X_1 \to X_2$ se nazývá *izometrie*, jestliže $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x,y)$ pro každé x, $y \in X_1$.

Izometrie je zřejmě stejnoměrně spojité injektivní zobrazení. Je-li izometrie f navíc surjektivní, pak podle definice je f^{-1} opět izometrie. Každá surjektivní izometrie je tedy homeomorfismus.

Metrické prostory X_1, X_2 se nazývají *izometrické*, existuje-li izometrie X_1 na X_2.

Izometrie f metrického prostoru X_1 do úplného metrického prostoru X_2 taková, že $f(X_1) \subset X_2$ je hustá množina, se nazývá *zúplnění* metrického prostoru X_1.

Vyšetříme nyní problém existence zúplnění metrického prostoru. Jeho řešení je založeno na následující *Hausdorffově větě.*

Věta 20. *Každý metrický prostor je izometrický s podprostorem úplného metrického prostoru.*

Důkaz. Buď X metrický prostor s metrikou d. Uvažujme dvě cauchyovské posloupnosti $S = (x_i)$, $T = (y_i)$ v X. Pro každé i, j platí $d(x_i, y_i) \leq d(x_i, x_j) + d(x_j, y_j) + d(y_j, y_i)$, takže $d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j) \leq d(x_i, x_j) + d(y_i, y_j)$; analogicky $d(x_j, y_j) - d(x_i, y_i) \leq d(x_i, x_j) + d(y_i, y_j)$. Jedna z těchto nerovností má na levé straně výraz $|d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j)|$. Pro každé i, j tedy platí $|d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j)| \leq d(x_i, x_j) + d(y_i, y_j)$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje index n tak, že pro každé i, $j \geq n$ platí $d(x_i, x_j)$, $d(y_i, y_j) \leq \varepsilon/2$. Pro tato i, j $|d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j)| < \varepsilon$. Posloupnost $(d(x_i, y_i))$ v $\mathbf{R}$ je tedy cauchyovská a z úplnosti $\mathbf{R}$ vyplývá, že je konvergentní (Věta 13. odst. 5.5 str. 118 Klademe $d'(S,T) = \lim d(x_i, y_i)$.

Pomocí funkce d' je na množině všech cauchyovských posloupností v X definována ekvivalence “ S je ekvivalentní s T, jestliže $d'(S,T) = O$”; evidentně $d'(S,S) = 0$ a $d'(S,T) = d'(T,S)$ pro libovolné cauchyovské posloupnosti S, T; dále platí-li pro cauchyovské posloupnosti S, T, U vztahy $d'(S,T) = 0$, $d'(T,U) = 0$, dostáváme $d'(S,U) \leq d'(S,T) + d'(T,U) = 0$. Označme $[S]$ třídu cauchyovských posloupností podle této ekvivalence. Položme $d''([S],[T]) = d'(S,T)$. Číslo $d''([S],[T])$ je definováno korektně, t.j. nezávisle na volbě reprezentantů tříd $[S]$, $[T]$: je-li S' (resp. T') jiný reprezentant třídy $[S]$ (resp. $[T]$), pak $d'(S',T') \leq d'(S',S) + d'(S,T) + d'(T,T') = d'(S,T) \leq d'(S,S') + d'(S',T') + d'(T',T) = d'(S',T')$, t.j. $d'(S,T) = d'(S',T')$.

Označme $\mathscr{C}X$ množinu všech tříd cauchyovských posloupností v metrickém prostoru X. Snadno lze ukázat, že d'' je metrika na $\mathscr{C}X$. Podmínky pozitivní definitnosti a symetrie jsou evidentně splněny. Dále pro libovolné $S = (x_i)$, $T = (y_i)$, $U = (z_i)$ platí $d(x_i, y_i) \leq d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i)$ a přechodem k limitám na obou stranách nerovnosti dostaneme $d'(S,T) \leq d'(S,U) + d'(U,T)$, t.j. $d''([S],[T]) \leq d''([S],[U]) + d''([U],[T])$.

Ukážeme, že $\mathscr{C}X$ s metrikou d'' je úplný metrický prostor. Buď $[S_1]$, $[S_2]$, $[S_3]$, … libovolná posloupnost v $\mathscr{C}X$. Zvolme reprezentanta S_i třídy $[S_i]$ a označme $S_i = (x_{i,j})$. Existuje index n_i tak, že pro každé $j \geq n_i$ platí

$$(1) \qquad d(x_{i,j}, x_{i,n_i}) < \frac{1}{i}\,.$$

Klademe $S = (x_{1,n_1}, x_{2,n_2}, x_{3,n_3}, \ldots)$. Ukážeme, že je-li posloupnost $[S_1]$, $[S_2]$, $[S_3]$, … cauchyovská v $\mathscr{C}X$, pak S je cauchyovská v X a posloupnost $[S_1]$, $[S_2]$, $[S_3]$, … konverguje k $[S]$.

Nechť tedy $[S_1]$, $[S_2]$, $[S_3]$, … je cauchyovská posloupnost. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje index $m(\varepsilon) > 1/\varepsilon$ takový, že pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí $d''([S_{m(\varepsilon)}], [S_{m(\varepsilon)+k}]) < \varepsilon$, t.j. $d'(S_{m(\varepsilon)}, S_{m(\varepsilon)+k}) < \varepsilon$ pro libovolného reprezentanta S_i třídy $[S_i]$. Podle definice $d'(S_{m(\varepsilon)}, S_{m(\varepsilon)+k}) = \lim d(x_{m(\varepsilon),j}, x_{m(\varepsilon)+k,j})$ (limita pro $j \to \infty$). Existuje tedy index j_k tak, že pro každé $p \geq j_k$

$$(2) \qquad d(x_{m(\varepsilon),p}, x_{m(\varepsilon)+k,p}).$$

Buďte i, k takové indexy, že $i \geq m(\varepsilon)$, $k \geq 0$. Zvolme index p tak, aby platilo $p \geq n_i$, n_{i+k}, j_k. Pak

$$(3) \qquad \frac{1}{i} \leq \frac{1}{m(\varepsilon)} < \varepsilon, \quad \frac{1}{i+k} < \frac{1}{i} < \varepsilon$$

a tedy podle (1), (2) a (3)

$$(4) \qquad \begin{aligned} d(x_{i,n_i}, x_{i+k,n_i+k}) &\leq d(x_{i,n_i}, x_{i,p}) + d(x_{i,p}, x_{m(\varepsilon),p}) \\ &\quad + d(x_{m(\varepsilon),p}, x_{i+k,p}) + d(x_{i+k,p}, x_{i+k,n_{i+k}}) \\ &< \frac{1}{i} + \varepsilon + \varepsilon + \frac{1}{i+k} < 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Posloupnost S je tedy cauchyovská.

Nyní ukážeme, že posloupnost $[S_1$, $[S_2]$, $[S_3]$, … konverguje k $[S]$ v $\mathscr{C}X$. Podle definice pro každé $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$d''([S_i], [S]) = d'(S_i, S) = \lim_{j \to \infty} d(x_{i,j}, x_{j,n_j})$$

a dále $d(x_{i,j}, x_{j,n_j}) \leq d(x_{i,j}, x_{i,n_i}) + d(x_{i,n_i}, x_{j,n_j})$. Buď $\varepsilon > 0$. Zvolíme $i \geq m(\varepsilon)$. Pak pro libovolné $j \geq i$, n_i platí $d(x_{i,j}, x_{i,n_i}) < 1/i < \varepsilon$, $d(x_{i,n_i}, x_{j,n_j}) < 4\varepsilon$, takže

$$d(x_{i,j}, x_{j,n_j}) < 5\varepsilon.$$

Limita posloupnosti na levé straně musí ovšem ležet v intervalu $[0, 5\varepsilon]$, t.j. $\lim d(x_{i,j}, x_{j,n_j}) \leq 5\varepsilon$ (limita pro $j \to \infty$). Pro $i \geq m(\varepsilon)$ tedy platí $d''([S_i], [S]) \leq 5\varepsilon$ a z libovolnosti ε dostáváme $[S] = \lim[S_i]$ (limita pro $i \to \infty$), což jsme chtěli dokázat.

$\mathscr{C}X$ je tedy úplný metrický prostor. Pro $x \in X$ klademe $f(x) = [x]$, kde $[x]$ označuje třídu v $\mathscr{C}X$, obsahující cauchyovskou posloupnost $(x, x, x, \ldots)$. Pro libovolné body x, $y \in X$ dostáváme

$$d''(f(x), f(y)) = \lim_{j \to \infty} d(x_j, y_j) = d(x, y),$$

kde $x_j = x$, $y_j = y$. Tím je dokázáno, že zobrazení $f : X \to \mathscr{C}X$ je izometrie a důkaz je ukončen.

Poznamenáváme, že z definice metrického prostoru $\mathscr{C}X$ ihned vyplývá, že množina $f(X) \subset \mathscr{C}X$ je hustá v $\mathscr{C}X$.

Věta 21. *Ke každému metrickému prostoru existuje jeho zúplnění.*

Důkaz. Z Věty 20. odst. 5.8 str. 121 vyplývá, že existuje izometrie $f : X \to Y$, kde Y je úplný metrický prostor. Obraz $f(X)$ je množina hustá v metrickém prostoru $\operatorname{cl} f(X) \subset Y$, který je uzavřený a tudíž úplný (Věta 12. (b) odst. 5.5 str. 117).

Důsledek. Každá cauchyovská posloupnost je ohraničená množina.

Důkaz. Buď (x_i) cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru X, $f : X \to Y$ jeho zúplnění. Jelikož zobrazení f je stejnoměrně spojité, posloupnost $(f(x_i))$ v Y je cauchyovská (Věta 17. odst. 5.6 str. 119); z úplnosti Y tedy vyplývá, že tato posloupnost je konvergentní. Zvolíme-li okolí bodu $y = \lim f(x_i)$, pak v tomto okolí neleží nejvýše konečně mnoho bodů $f(x_i)$, množina bodů $f(x_i) \subset Y$ je tedy ohraničená. Označme d_1 (resp. d_2) metriku X (resp. Y). Můžeme předpokládat, že pro každé i platí $f(x_i) \in B(f(x_1), r)$ pro jistou otevřenou kouli $B(f(x_1), r)$ v Y. Pak ovšem pro každé $j = 1, 2, 3, \ldots$ platí $d_1(x_1, x_j) = d_2(f(x_1), f(x_j)) < r$ a tvrzení je dokázáno.

5.9. Uniformní metrika

Buď X množina, Y metrický prostor s metrikou d. Uvažujme ohraničenou metriku δ na Y, definovanou vztahem $\delta(y_1, y_2) = \min\{d(y_1, y_2), 1\}$. Na množině Y^X všech zobrazení $f : X \to Y$ definujeme funkci $\delta_{X,Y}$ vztahem

$$\delta_{X,Y}(f, g) = \sup_{x \in X}\{\delta(f(x), g(x))\}.$$

Číslo na pravé straně vždy existuje a platí $\delta_{X,Y}(f, g) \leq 1$ pro každé f, $g \in Y^X$. Ukážeme, že $\delta_{X,Y}$ je metrika na Y^X. Pro $f \neq g$ existuje bod $x \in X$ tak, že $f(x) \neq g(x)$, takže $\delta(f(x), g(x)) > 0$ a $\delta_{X,Y}(f, g) > 0$; podmínka pozitivní definitnosti metriky je tedy splněna. Podmínka symetrie je evidentně také splněna. Prověříme trojúhelníkovou nerovnost. Pro libovolná zobrazení f, g, $h \in Y^X$ dostáváme

$$\begin{aligned}\delta_{X,Y}(f, g) &\leq \sup_{x \in X}\{\delta(f(x), h(x)) + \delta(h(x), g(x))\}\\ &\leq \sup_{x \in X}\{\delta(f(x), h(x))\} + \sup_{x \in X}\{\delta(h(x), g(x))\}\\ &\delta_{X,Y}(f, h) + \delta_{X,Y}(h, g).\end{aligned}$$

Funkce $\delta_{X,Y}$je tedy metrika na Y^X; nazývá se *uniformní metrika* asociovaná s metrikou d. Metrická topologie asociovaná s metrikou $\delta_{X,Y}$ se nazývá *uniformní topologie.*

Věta 22. *Buď X množina, Y metrický prostor s metrikou d. Je-li Y úplný, pak také metrický prostor Y^X s uniformní metrikou asociovanou s d je úplný.*

Důkaz. Nechť δ je ohraničená metrika na Y zavedená výše. Snadno lze ukázat, že metriky d, δ jsou stejnoměrně ekvivalentní. Z úplnosti metrického prostoru (Y, d) tedy vyplývá úplnost metrického prostoru (Y, δ) (Důsledek 2. Věty 17. odst. 5.6 str. 120).

Buď (f_i) cauchyovská posloupnost bodů metrického prostoru Y^X. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index n tak, že pro každé i, $j \geq n$ platí $\delta_{X,Y}(f_i, f_j) < \varepsilon$. Pro libovolné $x \in X$ tedy $\delta(f_i(x), f_j(x)) < \varepsilon$ a posloupnost $(f_i(x))$ v Y je cauchyovská. Klademe $f(x) = \lim f_i(x)$

a ukážeme, že $f = \lim f_i$ v Y^X. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a zvolme index n tak, aby pro každé i, $j \geq n$ platilo $\delta_{X,Y}(f_i, f_j) < \varepsilon/2$. Pak pro každé $x \in X$ a i, $j \geq n$ dostaneme $\delta(f_i(x), f_j(x)) < \varepsilon/2$, a tedy také $\delta(f_i(x), f(x)) < \varepsilon/2$ pro každé $x \in X$, $i \geq n$. Odtud $\delta_{X,Y}(f_i, f) < \varepsilon/2 < \varepsilon$ pro každé $i \geq n$.

Věta 23. *Buď X topologický prostor, Y metrický prostor s metrikou d, $\delta_{X,Y}$ uniformní metrika asociovaná s d. Nechť (f_i) je konvergentní posloupnost spojitých zobrazení v metrickém prostoru $(Y^X, \delta_{X,Y})$. Pak zobrazení $f = \lim f_i$ je spojité.*

Důkaz. Buď $x_0 \in X$ bod, $\varepsilon > 0$. Existuje index k tak, že platí $\delta_{X,Y}(f_k, f) < \varepsilon/3$, t.j. $\delta(f_k(x), f(x)) < \varepsilon/3$ pro každé $x \in X$; pro $x = x_0$ tudíž $\delta(f_k(x_0), f(x_0)) < \varepsilon/3$. Podle předpokladu je zobrazení $x \to f_k(x)$ spojité, existuje tedy okolí U bodu x_0 takové, že $\delta(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon/3$ pro každé $x \in U$. Z trojúhelníkové nerovnosti pro metriku δ pak plyne $\delta(f(x), f(x_0)) \leq \delta(f(x), f_k(x)) + \delta(f_k(x), f_k(x_0)) + \delta(f_k(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$, tedy f je spojité v bodě x_0. Z libovolnosti bodu x_0 plyne spojitost f.

Označme $C(X, Y) \subset Y^X$ množinu všech *spojitých* zobrazení. Z Věty 23. odst. 5.9 str. 124 dostáváme následující charakteristiky $C(X, Y)$ jako topologického podprostoru metrického prostoru $(Y^X, \delta_{X,Y})$.

Důsledek. (a) Množina $C(X, Y) \subset Y^X$ je uzavřená v uniformní topologii.

(b) Je-li metrický prostor Y úplný, pak podprostor $C(X, Y)$ metrického prostoru Y^X s uniformní metrikou je úplný.

Důkaz. Tvrzení plynou z Důsledku (b) Věty 5. odst. 5.2 str. 113, z Věty 22. odst. 5.9 str. 123 a Věty 12. (b) odst. 5.5 str. 117.

Buď X množina, Y metrický prostor s metrikou d. Buď (f_i) posloupnost v Y^X, konvergující k zobrazení $f \in Y^X$ v uniformní topologii. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index n tak, že pro každé $i \geq n$ platí $\sup\{\delta(f_i(x), f(x))\} < \varepsilon$. Pro každé $i \geq n$ tedy $\delta(f_i(x), f(x)) < \varepsilon$ pro všechna $x \in X$. Říkáme proto také, že posloupnost (f_i) konverguje k zobrazení f *stejnoměrně* (na X). Podle Věty 23. odst. 5.9 str. 124 tedy limita stejnoměrně konvergentní posloupnosti spojitých zobrazení z topologického prostoru X do metrického prostoru Y je spojité zobrazení.

Buď $f : X \to Y$ zobrazení. Říkáme, že f je *ohraničené zobrazení*, je-li množina $f(X) \subset Y$ ohraničená. Označme $B(X, Y)$ množinu všech ohraničených zobrazení z X do Y a pro f, $g \in B(X, Y)$ položme

$$d_{X,Y}(f, g) = \sup_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\}.$$

Množina bodů $d(f(x), g(x)) \in \mathbf{R}$, kde x probíhá X, je shora ohraničená, takže číslo na pravé straně existuje. Ukážeme to. Pro libovolné $x, y \in X$ platí $d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(y), g(y)) + d(g(y), g(x)) \leq \delta_{f(X)} + \delta_{g(X)} + d(f(y), g(y))$, kde δ_A označuje průměr množiny A v Y. Na pravé straně této nerovnosti máme horní závoru uvažované množiny, takže číslo $d_{X,Y}(f, g)$ skutečně existuje. Snadno prověříme, že funkce $d_{X,Y}$ splňuje všechny podmínky z definice metriky; nazývá se *sup-metrika*.

Na množině ohraničených zobrazení $B(X, Y)$ jsou tedy definovány dvě metriky: uniformní metrika $\delta_{X,Y}$ a sup-metrika $d_{X,Y}$. Přímo z definicí je ovšem zřejmé, že

$$\delta_{X,Y} = \min\{d_{X,Y}(f, g), 1\}.$$

takže $\delta_{X,Y}$ je ohraničená metrika asociovaná s $d_{X,Y}$. To ovšem znamená, že obě metriky jsou stejnoměrně ekvivalentní. Metrická topologie metriky $d_{X,Y}$ je tedy totožná s uniformní topologií na množině $B(X, Y)$.

Konvergence v metrickém prostoru $(B(X,Y), d_{X,Y})$ se rovněž nazývá *stejnoměrná konvergence.*

Věta 24. *Buď X množina, Y metrický prostor s metrikou d. Je-li Y úplný, pak podprostor $B(X,Y)$ metrického prostoru Y^X s uniformní metrikou asociovanou s d je úplný.*

Důkaz. Předpokládejme, že metrický prostor Y je úplný. Nechť (f_i) je cauchyovská posloupnost ohraničených zobrazení v Y^X. Podle Věty 22. odst. 5.9 str. 123 existuje zobrazení $f = \lim f_i \in Y^X$. Ukážeme, že toto zobrazení je ohraničené, t.j. že $f \in B(X,Y)$.

Zvolme ε tak, že platí $0 < \varepsilon < 1$. Existuje index n tak, že pro každé $i \geq n$ platí $\delta_{X,Y}(f, f_i) < \varepsilon$, t.j. $\delta(f(x), f_i(x)) < \varepsilon$ pro každé $x \in X$, kde δ označuje ohraničenou metriku asociovanou s d. Z definice δ vyplývá, že pro každé $i \geq n$ a každé $x \in X$ platí $d(f(x), f_i(x)) < \varepsilon$.

Nechť nyní x, $y \in X$ jsou libovolné body. Zvolme index i tak, že $i \geq n$. Pak $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y)) < 2\varepsilon + \delta_{f_i(X)}$, kde $\delta_{f_i(X)}$ je průměr množiny $f_i(X)$ v Y. Podle předpokladu je $f_i(X)$ ohraničená množina. Množina bodů $d(f(x), f(y)) \in \mathbf{R}$, kde x, y probíhá X, má tedy horní závoru, což znamená, že množina $f(X) \subset Y$ je ohraničená.

Věta 25. *Uniformní topologie na množině Y^X je silnější než topologie bodové konvergence.*

Důkaz. Nechť $f \in Y^X$, $f = (f(x))_{x \in X}$, je libovolný bod, U okolí f v topologii bodové konvergence. Lze předpokládat, že U je prvek báze topologie bodové konvergence, t.j. podle př. (10) odst. 3.7 str. 46 $U = \prod U_x$ (součin přes $x \in X$), kde $f(x) \in U_x$. Označme $x_1, x_2, \ldots, x_k$ indexy, pro které $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_k} \neq Y$. Ke každému x_i, $1 \leq i \leq k$, zvolme $r_i > 0$ tak, že $B_\delta(f(x_i), r_i) \subset U_{x_i}$; takové číslo r_i vždy existuje, jelikož $B_\delta(f(x_i), r_i)$ a U_{x_i} jsou otevřené množiny v Y. Položme $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$. Pak

$$\begin{aligned}
B_{\delta_{X,Y}}(f, r) &= \{g \in Y^X \mid \delta_{X,Y}(f, g) < r\} \\
&= \{g \in Y^X \mid \sup_{x \in X}\{\delta(f(x), g(x))\} < r\} \\
&\subset \{g \in Y^X \mid \delta(f(x), g(x)) < r,\ x \in X\} \\
&\subset \{g \in Y^X \mid g(x) \in U_x,\ x \in X\} = \prod U_x = U.
\end{aligned}$$

U je tedy otevřená množina v uniformní topologii a důkaz je ukončen.

Důsledek. Nechť (f_i) je posloupnost v Y^X. Konverguje-li (f_i) k zobrazení $f \in Y^X$ stejnoměrně, pak konverguje k f bodově.

5.10. Příklady

(1) Buď X neprázdná množina. Pro x, $y \in X$ klademe $d(x,y) = 1$ platí-li $x \neq y$ a $d(x,x) = 0$. d je metrika na X, nazývaná *diskrétní matrika.* Množina X s diskrétní metrikou se nazývá *diskrétní metrický prostor.* Otevřená koule v diskrétním metrickém prostoru X se středem v bodě x a poloměrem r má tvar $B(x,r) = \{x\}$ pro $r < 1$ a $B(x,r) = X$ pro $r \geq 1$. Podle Věty 1. odst. 5.2 str. 112 a Věty 9 odst. 1.4 9. odst. 1.4 str. 7 je metrická topologie asociovaná s diskrétní metrikou totožná s diskrétní topologií na X. Snadno lze ukázat, že diskrétní metrický prostor je úplný. Buď (x_i) cauchyovská posloupnost v X. Pak pro $\varepsilon = 1/2$ existuje index n tak, že $d(x_i, x_j) < 1/2$ pro každé i, $j \geq n$. Označme $a = x_n$. Nerovnost $x_j \neq a$ platí jen pro konečně mnoho indexů j. Posloupnost (x_i) je tedy konvergentní a $\lim x_i = a$. Diskrétní metrický prostor je tedy úplný.

(2) Nechť X je metrický prostor s metrikou d_X, Y topologický prostor, $f : X \to Y$ homeomorfismus v metrické topologii na X. Pro každé y_1, $y_2 \in Y$ klademe $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$. d_Y je metrika na Y a pro otevřené koule v X a Y platí vztah $B_{d_Y}(x, r) = f(B_{d_X}(f^{-1}(x), r))$. Z Věty 9. odst. 1.4 str. 7 tak dostáváme, že topologie na Y splývá s metrickou topologií asociovanou s d_Y. Zobrazení f je přitom izometrie; je tedy stejnoměrně spojité. Z Důsledku 2.Věty 17. odst. 5.6 str. 120 vyplývá, že Y je úplný metrický prostor tehdy a jen tehdy, když X je úplný metrický prostor.

(3) *Metrika na množině komplexních čísel.* Uvažujme množinu komplexních čísel $\mathbf{C}$ s přirozenou topologií a dvourozměrný Euklidův metrický prostor $\mathbf{R}^2$ s jeho metrikou d. Buď $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2$ zobrazení, definované vztahem $f(z) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$; f je homeomorfismus (př. (5) odst. 3.7 str. 44). Pro každé x, $y \in \mathbf{C}$ klademe $d_{\mathbf{C}}(x, y) = d(f(x), f(y))$. Z definice metriky d a absolutní hodnoty komplexního čísla dostaneme, že $d_{\mathbf{C}}(x, y) = |x - y|$. $d_{\mathbf{C}}$ je metrika na $\mathbf{C}$. Z úplnosti $\mathbf{R}^2$ (Věta 14. odst. 5.5 str. 118) vyplývá úplnost $\mathbf{C}$ (viz př. (2) str. 126).

Součin metrických prostorů $\mathbf{C}^n$ je tedy také úplný metrický prostor (Věta 14. odst. 5.5 str. 118).

(4) Uvedeme následující příklady: (a) příklad podprostoru úplného metrického prostoru, který není úplný, (b) příklad metrických prostorů, které jsou homeomorfní v metrických topologiích, přičemž jeden z nich je úplný a druhý není úplný, (c) příklad ekvivalentních metrik, které nejsou stejnoměrně ekvivalentní.

Označme d Euklidovu metriku na množině reálných čísel $\mathbf{R}$ a na její libovolné podmnožině a zároveň uvažujme $\mathbf{R}$ a podmnožiny $\mathbf{R}$ s jejich Euklidovou topologií. Metrický prostor $((-1, 1), d)$ je podprostor úplného metrického prostoru $(\mathbf{R}, d)$ (Věta 13. (b) odst. 5.5 str. 118); tento podprostor není úplný, neboť množina $(-1, 1)$ není uzavřená v $\mathbf{R}$ (Věta 12. (a) odst. 5.5 str. 117).

Pro $t \in \mathbf{R}$ položme

$$f(t) = \frac{t}{1 + |t|}.$$

f je homeomorfismus Euklidova prostoru $\mathbf{R}$ a jeho podprostoru $(-1, 1)$, přičemž $\mathbf{R}$ je úplný a $(-1, 1)$ není úplný.

Pro x, $y \in \mathbf{R}$ klademe

$$d'(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

d' je metrika na $\mathbf{R}$. Ukážeme, že metriky d, d' jsou ekvivalentní. Zobrazení $f : \mathbf{R} \to (-1, 1)$ je homeomorfismus v Euklidových topologiích a dále pro libovolné x, $y \in \mathbf{R}$ platí $d'(x, y) = d(f(x), f(y))$, takže zobrazení f^{-1} je izometrie $((-1, 1), d)$ na $(\mathbf{R}, d')$; f^{-1} je tedy homeomorfismus intervalu $(-1, 1)$ s Euklidovou topologií a množiny $\mathbf{R}$ s metrickou topologií asociovanou s d'. Složené zobrazení $\mathrm{id}_{\mathbf{R}} = f^{-1} \circ f$ je tedy homeomorfismus $(\mathbf{R}, d)$ na $(\mathbf{R}, d')$, což znamená, že metriky d, d' jsou ekvivalentní.

Ukážeme, že tyto metriky nejsou stejnoměrně ekvivalentní. Stačí dokázat, že zobrazení id : $(\mathbf{R}, d') \to (\mathbf{R}, d)$ není stejnoměrně spojité. Zvolme $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ libovolné a $n > 0$ tak, aby platilo $1/n < \delta$. Pak pro $x = n + 1$, $y = n$ platí

$$d'(x, y) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n} < \delta$$

a přitom $d(x, y) = |x - y| = 1 = \varepsilon$. Zobrazení id : $(\mathbf{R}, d') \to (\mathbf{R}, d)$ tedy není stejnoměrně spojité.

(5) *Stejnoměrně ekvivalentní metriky na* $\mathbf{R}^n$. Pro x, $y \in \mathbf{R}^n$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, klademe

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

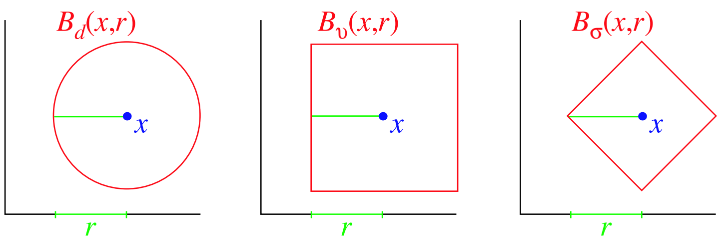
$$\vartheta(x, y) = \max_{1 \le i \le n} \{|x^i - y^i|\},$$

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|.$$

d je Euklidova metrika na $\mathbf{R}^n$ a podle Věty 8. odst. 5.4 str. 114 metrická topologie asociovaná s d je totožná s Euklidovou topologií. Snadno se přesvědčíme, že rovněž ϑ a σ jsou metriky na $\mathbf{R}^n$: podmínky (1) a (2) z definice metriky jsou zřejmě splněny; dále pro $n = 1$ platí $\vartheta(x, y) = \sigma(x, y) = |x - y| = d(x, y)$, všechny tři metriky tedy splývají. Nechť $n \ge 1$. Pak $|x^i - z^i| \le |x^i - y^i| + |y^i - z^i|$ pro každé i a tedy ϑ i σ splňují trojúhelníkovou nerovnost.

Je zřejmé, že metriky d, ϑ, σ jsou ekvivalentní; lze to snadno zjistit porovnáním otevřených koulí. Pro $n = 2$ jsou otevřené koule se středem v bodě x a poloměrem r asociované s d, ϑ a σ znázorněny na obr. 1.

Obr. 1



Ukážeme, že metriky d, ϑ, σ jsou stejnoměrně ekvivalentní. Z definice ϑ a σ plyne, že pro každé x, $y \in \mathbf{R}^n$ platí $\vartheta(x, y) \le \sigma(x, y) \le n \cdot \vartheta(x, y)$. Odtud plyne, že zobrazení id : $(\mathbf{R}^n, \sigma) \to (\mathbf{R}^n, \vartheta)$ a id : $(\mathbf{R}^n, \vartheta) \to (\mathbf{R}^n, \sigma)$ jsou stejnoměrně spojité (k libovolně zadanému $\varepsilon > 0$ stačí vzít $\delta = \varepsilon$ pro první zobrazení a $\delta = \varepsilon/n$ pro druhé). Podobně pro každé x, $y \in \mathbf{R}^n$ platí $\vartheta(x, y) \le d(x, y) \le \sqrt{n} \cdot \vartheta(x, y)$, neboť

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = a \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \ge a,$$

kde

$$a = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x^i - y^i|\}$$

a dále

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq (n \cdot a^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \cdot a.$$

Analogicky jako výše prověříme, že zobrazení id : $(\mathbf{R}^n, d) \to (\mathbf{R}^n, \vartheta)$ a id : $(\mathbf{R}^n, \vartheta) \to (\mathbf{R}^n, d)$ jsou stejnoměrně spojitá.

Stejnoměrná ekvivalence všech tří metrik d, ϑ, σ pak plyne z Věty 16. odst. 5.6 str. 119

Metrický prostor $(\mathbf{R}^n, d)$ je úplný (Věta 13. (b) odst. 5.5 str. 118, Věta 14. odst. 5.5 str. 118); s ním stejnoměrně ekvivalentní metrické prostory $(\mathbf{R}^n, \vartheta)$, $(\mathbf{R}^n, \sigma)$ jsou tedy také úplné (Důsledek 2. Věty 17. odst. 5.6 str. 120).

(6) *Uniformní metrika na množině* $\mathbf{R}^I$. Buď I množina. Uniformní metrika na $\mathbf{R}^I$ má tvar

$$\Theta(x, y) = \sup_{\iota \in I} \{\delta(x_\iota, y_\iota)\},$$

kde $\delta(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ je ohraničená metrika na $\mathbf{R}$, asociovaná s Euklidovou metrikou d a $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$, $y(y_\iota)_{\iota \in I}$. Podle Věty 13. odst. 5.5 str. 118 a Věty 22. odst. 5.9 str. 123 je metrický prostor $(\mathbf{R}^I, \Theta)$ úplný. Uniformní topologie τ_Θ (t.j. metrická topologie asociovaná s metrikou Θ) je silnější než součin topologií τ (Věta 25. odst. 5.9 str. 125); ukážeme, že je slabší než silný součin topologií τ_S na $\mathbf{R}^I$. Buď $x \in \mathbf{R}^I$, $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$, libovolný bod, $B_\Theta(x, r)$ libovolný prvek báze topologie τ_Θ v bodě x. Klademe $U_\iota = (x_\iota - r/2, x_\iota + r/2)$ pro každé $\iota \in I$ a $U = \prod U_\iota$. Pak pro každý bod $y \in U$ platí $y_\iota \in U_\iota$ a tedy $|x_\iota - y_\iota| < r/2$. Odtud plyne $\Theta(x, y) \leq r/2$, t.j. $U \subset B_\Theta(x, r)$. $B_\Theta(x, r)$ je otevřená množina v topologii τ_S, takže $\tau_\Theta \subset \tau_S$.

Celkem tedy platí $\tau \subset \tau_\Theta \subset \tau_S$.

Je-li množina I nespočetná, pak podle Věty 10. odst. 5.4 str. 116 není τ rovna metrické topologii žádné metriky na $\mathbf{R}^I$. V tomto případě tedy $\tau \neq \tau_\Theta$. Ve cvičení bude ukázáno, že také $\tau_\Theta \neq \tau_S$.

(7) Nechť $\mathbf{R}$ je množina reálných čísel s Euklidovou topologií a s Euklidovou metrikou. Zavedeme na $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ metriku Δ ekvivalentní s metrikou ρ z Věty 9. odst. 5.4 str. 115 a prodiskutujeme vztah metrik Δ, ρ a uniformní metriky Θ (př. (6) str. 128).

Pro a, $b \in \mathbf{R}$ klademe $\delta(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$; δ je ohraničená metrika, asociovaná s Euklidovou metrikou. Pro libovolné x, $y \in \mathbf{R}^\mathbf{N}$, $x = (x^1, x^2, x^3, \ldots)$, $y = (y^1, y^2, y^3, \ldots)$ klademe

$$\Delta(x, y) = \sup_{i \in \mathbf{N}} \left\{ \frac{\delta(x^i, y^i)}{i} \right\};$$

vzhledem k tomu, že $\delta(x^i, y^i)/i \leq 1$, supremum vždy existuje. Δ evidentně splňuje podmínky (1), (2) z definice metriky. Pro důkaz trojúhelníkové nerovnosti si všimněme, že pro každé i a každé x, y, $z \in \mathbf{R}^\mathbf{N}$ platí $\delta(x^i, z^i)/i \leq (\delta(x^i, y^i) + \delta(y^i, z^i))/i \leq \Delta(x, y) + \Delta(y, z)$; odtud

$$\Delta(x, z) = \sup_{i \in \mathbf{N}} \left\{ \frac{\delta(x^i, z^i)}{i} \right\} \leq \Delta(x, y) + \Delta(y, z).$$

Buď $U \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ otevřená množina v metrické topologii asociované s Δ, $x \in U$ bod. Zvolme $B(x,r)$ tak, že $B(x,r) \subset U$, a index n tak, že $1/n < r$. Uvažujme množinu $V = (x^1 - r, x^1 + r) \times \cdots \times (x^n - r, x^n + r) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots$ v $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Tato množina je průnikem množin $(x^1 - r, x^1 + r) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots, \ldots, \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R} \times (x^n - r, x^n + r) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots$ a je tedy otevřená v topologii součinu. Pro libovolné $y \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ a $i \geq n$ platí $\delta(x^i, y^i)/i \leq 1/i \leq 1/n$, takže

$$\Delta(x,y) \leq \delta(x^1, y^1), \; \frac{\delta(x^2, y^2)}{2}, \ldots, \; \frac{\delta(x^n, y^n)}{n}, \; \frac{1}{n}.$$

Pro bod $y \in V$ platí $\delta(x^1, y^1), \ldots, \delta(x^n, y^n) < r$, takže $\Delta(x,y) < r$ a tedy $y \in B(x,r)$, t.j. $V \subset B(x,r) \subset U$. U je tedy otevřená množina v topologii součinu.

Obráceně nechť $V \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ je otevřená množina v topologii součinu; můžeme předpokládat, že V má tvar prvku báze topologie součinu, t.j. $V = \prod V_i$, kde V_i je otevřená množina v $\mathbf{R}$ pro každé i a $V_j = \mathbf{R}$ pro každé $j \in \mathbf{N} \setminus I$, kde I je jistá konečná množina. Označme $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Pro každé $x \in V$ a $i \in I$ zvolme interval $(x^i - r^i, x^i + r^i) \subset V_i$ tak, že $0 < r^i \leq 1$. Položme $r = \min\{r^1, r^2/2, \ldots, r^k/k\}$. Zřejmě $x \in B(x,r)$. Dále pro libovolný bod $y \in B(x,r)$ a každé i platí $\delta(x^i, y^i)/i \leq \Delta(x,y) < r$. Pro $i = i_1, i_2, \ldots, i_k$ platí $r \leq r^i/i$, takže $\delta(x^i, y^i) < r^i \leq 1$. Odtud a z definice δ dostáváme $|x^i - y^i| < r^i$, t.j. $y^i \in (x^i - r, x^i + r) \subset V_i$ a tedy $y \in \prod V_i = V$. Dokázali jsme, že $B(x,r) \subset V$. Z libovolnosti x vyplývá, že množina V je otevřená v metrické topologii, což jsme chtěli ukázat.

Metrika Δ je tedy ekvivalentní s metrikou ρ zavedenou ve Větě 9. odst. 5.4 str. 115

Ve Větě 25. odst. 5.9 str. 125 jsme ukázali, že metrická topologie metriky Θ zavedené v př. (6) str. 128 (uniformní topologie) je silnější než topologie součinu na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Ukážeme, že topologie součinu není silnější než uniformní topologie, což znamená, že metriky Θ a Δ (resp. Δ a ρ) nejsou ekvivalentní. Je-li totiž $B_\Theta(x,r)$ otevřená koule o poloměru $r < 1$, pro každé $y \in B_\Theta(x,r)$ platí $\Theta(x,y) < r$ a tedy $\delta(x^i, y^i) < r$ pro každé $i \in \mathbf{N}$. Ovšem libovolný element V báze topologie součinu na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ je součinem množin U_i, přičemž $U_i = \mathbf{R}$ až na konečnou množinu indexů i; existuje tedy bod $y \in V$ a index $j \in \mathbf{N}$ tak, že $\delta(x^j, y^j) > r$ (a přitom $\delta(x^j, y^j) \leq 1$). Tedy $V \subset B_\Theta(x,r)$.

Z př. (6) str. 128 plyne, že uniformní topologie na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ je slabší než silný součin přirozených topologií (viz cvičení ke kap. 3). Ve cvičení k této kapitole ukážeme, že silný součin přirozených topologií na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ nesplývá s metrickou topologií žádné metriky a tedy není totožný s uniformní topologií.

(8) Uvažujme metrický prostor $(\mathbf{Q}, d_{\mathbf{Q}})$, kde $\mathbf{Q}$ je množina racionálních čísel a $d_{\mathbf{Q}}$ je metrika podprostoru Euklidova prostoru $\mathbf{R}$, t.j. $d_{\mathbf{Q}}(p,q) = |p - q|$ pro libovolná p, $q \in \mathbf{Q}$. Metrický prostor $(\mathbf{Q}, d_{\mathbf{Q}})$ není úplný: příkladem cauchyovské posloupnosti, která není konvergentní, je posloupnost (p_i), kde $p_1 = 1,4$, $p_2 = 1,41$, $p_3 = 1,414$, $p_4 = 1,4142$, $p_5 = 1,41421$, … (tato posloupnost ovšem konverguje v Euklidově prostoru $\mathbf{R}$ k číslu $\sqrt{2}$). Euklidův metrický prostor $\mathbf{R}$ je zúplněním $(\mathbf{Q}, d_{\mathbf{Q}})$ neboť kanonické vložení $\iota : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ je izometrie a platí $\operatorname{cl} \mathbf{Q} = \mathbf{R}$ (porov. Věta 21. odst. 5.8 str. 123).

Cvičení

Metrika, metrická topologie

1. Buď φ monotónně rostoucí reálná funkce, definovaná na intervalu $[0,\infty)$, taková, že $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ pro $t > 0$ a $\varphi(t+u) \le \varphi(t) + \varphi(u)$ pro každé t, $u \in [0,\infty)$. Nechť d je metrika na množině X. Ukažte, že $\varphi \circ d$ je metrika na X ekvivalentní s metrikou d. Jsou metriky $\varphi \circ d$ a d stejnoměrně ekvivalentní?

Řešení. Prověříme platnost podmínek z definice metriky pro funkci $\varphi \circ d$. Zřejmě $\varphi \circ d(x,y) \ge 0$ pro každé x, $y \in X$ a $\varphi \circ d(x,y) = 0$ tehdy a jen tehdy, když $x = y$. Podmínka symetrie je zřejmě splněna. Dále pro libovolné x, y, $z \in X$ platí $\varphi \circ d(x,z) \le \varphi(d(x,y)+d(y,z)) \le \varphi \circ d(x,z) + \varphi \circ d(z,y)$. Tedy $\varphi \circ d$ je metrika.

Označme τ_d (resp. $\tau_{\varphi\circ d}$) metrickou topologii asociovanou s d (resp. $\varphi \circ d$). Buď $\varepsilon > 0$ a zvolme $\delta < \varphi(\varepsilon)$. Pak $B_{\varphi\circ d}(x,\delta) = \{y \in X \mid \varphi \circ d(x,y) < \delta\} \subset \{y \in X \mid \varphi \circ d(x,y) < \varphi(\varepsilon)\} = B_d(x,\varepsilon)$. Obráceně, k libovolné otevřené kouli $B_{\varphi\circ d}(x,\varepsilon)$ zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo $\delta < \varphi^{-1}(\varepsilon)$. Pak pro každé $y \in B_d(x,\delta)$ platí $d(x,y) < \delta < \varphi^{-1}(\varepsilon)$ a tedy $\varphi \circ d(x,y) < \varepsilon$, t.j. $y \in B_{\varphi\circ d}(x,\varepsilon)$ a $B_d(x,\delta) \subset B_{\varphi\circ d}(x,\varepsilon)$. Celkově $\tau_d = \tau_{\varphi\circ d}$ a metriky d, $\varphi \circ d$ jsou ekvivalentní.

Metriky $\varphi \circ d$ a d jsou stejnoměrně ekvivalentní: zobrazení $\mathrm{id} : (X,d) \to (X,\varphi \circ d)$, $\mathrm{id} : (X,\varphi\circ d) \to (X,d)$ jsou stejnoměrně spojitá (k danému $\varepsilon > 0$ stačí vzít $\delta = \varphi^{-1}(\varepsilon)$ resp. $\delta = \varphi(\varepsilon)$).

2. Buď d metrika na množině X, $k > 0$ číslo. Ukažte, že $k \cdot d$ je metrika na X. Jsou metriky d a $k \cdot d$ ekvivalentní? Jsou stejnoměrně ekvivalentní?

Řešení. Klademe $\varphi(t) = k \cdot t$ a využijeme výsledků cv. 1. $k \cdot d$ je metrika na X. Metriky d, $k \cdot d$ jsou stejnoměrně ekvivalentní (a tedy také ekvivalentní).

3. Nechť d_1, d_2 jsou metriky na množině X. Ukažte, že $d_1 + d_2$ je také metrika na X. Jsou-li metriky d_1, d_2 ekvivalentní, pak také metriky d_1, $d_1 + d_2$ jsou ekvivalentní. Dokažte. Platí podobné tvrzení pro stejnoměrně ekvivalentní metriky d_1, d_2?

Řešení. Přímo lze prověřit, že $d_1 + d_2$ je metrika. Předpokládejme, že d_1, d_2 jsou ekvivalentní a označme τ (resp. σ) metrickou topologii asociovanou s d_1 (resp. $d_1 + d_2$). Z definice metriky $d_1 + d_2$ plyne $\tau \subset \sigma$. Ukážeme, že také $\sigma \subset \tau$. Buď $B_{d_1+d_2}(x,\varepsilon)$ libovolná otevřená koule. Zvolme $\delta = \varepsilon/2$. Pak množina $B = B_{d_1}(x,\delta) \cap B_{d_2}(x,\delta)$ je otevřená v topologii τ a leží v $B_{d_1+d_2}(x,\varepsilon)$. Odtud $\sigma \subset \tau$ a celkově $\sigma = \tau$, takže metriky d_1, $d_1 + d_2$ jsou ekvivalentní.

Předpokládejme, že metriky d_1, d_2 jsou stejnoměrně ekvivalentní. Pak je zřejmě zobrazení $\mathrm{id} : (X, d_1 + d_2) \to (X, d_1)$ stejnoměrně spojité. Vyšetříme stejnoměrnou spojitost zobrazení $\mathrm{id} : (X,d_1) \to (X, d_1 + d_2)$. Ze stejnoměrné spojitosti zobrazení $\mathrm{id} : (X,d_1) \to (X,d_2)$ vyplývá, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé x, $y \in X$, pro které $d_1(x,y) < \delta_1$, platí $d_2(x,y) < \varepsilon/2$. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \varepsilon/2\}$. Pak pro každé x, $y \in X$, pro které $d_1(x,y) < \delta$, platí $(d_1 + d_2)(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y) < \delta + \varepsilon/2 = \min\{\delta_1,\varepsilon/2\} + \varepsilon/2 \le \varepsilon$. Tím je dokázána stejnoměrná spojitost zobrazení $\mathrm{id} : (X,d_1) \to (X,d_1 + d_2)$. Celkově dostáváme, že metriky d_1 a $d_1 + d_2$ jsou stejnoměrně ekvivalentní.

4. Nechť X je metrický prostor s metrikou d, $f : X \to \mathbf{R}$ spojitá funkce (v metrické topologii asociované s d). Ukažte, že zobrazení $\sigma : X \times X \to \mathbf{R}$, definované vztahem $\sigma(x,y) = d(x,y) + |f(x) - f(y)|$, je metrika na X. Jsou metriky σ a d ekvivalentní? Jsou stejnoměrně ekvivalentní?

Řešení. Přímo lze ověřit, že funkce σ splňuje podmínky z definice metriky. Ukážeme, že metriky d a σ jsou ekvivalentní a jsou stejnoměrně ekvivalentní právě když je funkce f stejnoměrně spojitá.

Uvažujme kouli $B_d(x,\varepsilon)$. Pro každé $y = B_\sigma(x,\varepsilon)$ platí $\sigma(x,y) < \varepsilon$, t.j. také $d(x,y) < \varepsilon$. Odtud plyne, že $B_\sigma(x,\varepsilon) \subset B_d(x,\varepsilon)$. Obráceně, nechť $B_\sigma(x,\varepsilon)$ je libovolná otevřená koule. Zvolme δ tak, aby $\delta < \varepsilon/2$ a aby platilo $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ pro každé y takové, že $d(x,y) < \delta$; takové číslo δ existuje, neboť funkce f je spojitá (Věta 6. (c) odst. 5.3 str. 114). Pak $B_d(x,\delta) \subset B_\sigma(x,\varepsilon)$. Metriky d a σ jsou tedy ekvivalentní.

Z definice σ je zřejmé, že není-li zobrazení $f : (X,d) \to \mathbf{R}$ stejnoměrně spojité, pak také zobrazení id : $(X, d) \to (X, \sigma)$ není stejnoměrně spojité; v tomto případě tedy metriky d a σ nejsou stejnoměrně ekvivalentní.

Předpokládejme, že f je stejnoměrně spojité. Buď $\varepsilon > 0$. Zvolme δ tak, aby pro každé x, $y \in X$, pro které $d(x, y) < \delta$, platilo $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$, a položme $\lambda = \min\{\delta, \varepsilon/2\}$. Pak pro každé x, $y \in X$, pro které $d(x, y) < \lambda$, platí $\sigma(x, y) < \lambda + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$, a tedy také zobrazení id : $(X, d) \to (X, \sigma)$ je stejnoměrně spojité. Odtud dostáváme, že je-li $f : (X, d) \to \mathbf{R}$ stejnoměrně spojité, metriky d a σ jsou stejnoměrně ekvivalentní.

5. Nechť d_1, d_2 jsou dvě metriky na množině X a předpokládejme, že existují čísla k, $m > 0$ taková, že $k \cdot d_1 \leq d_2 \leq m \cdot d_1$. Pak jsou metriky d_1, d_2 stejnoměrně ekvivalentní. Dokažte.

Ř e š e n í . Tvrzení plyne přímo z definice stejnoměrně ekvivalentních metrik; pro důkaz stejnoměrné spojitosti zobrazení id : $(X, d_1) \to (X, d_2)$ (resp. id : $(X, d_2) \to (X, d_1)$) stačí k libovolně zadanému $\varepsilon > 0$ zvolit $\delta = \varepsilon/m$ (resp. $\delta = k \cdot \varepsilon$).

6. Ukažte, že zobrazení $\rho : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definované vztahem $\rho(x, y) = |x| + |y|$ pro $x \neq y$ a $\rho(x, y) = 0$ pro $x = y$, je metrika na $\mathbf{R}$. Srovnejte metrickou topologii této metriky s přirozenou topologií.

Ř e š e n í . Pro libovolné x, y, $z \in \mathbf{R}$ platí $\rho(x, z) = |x| + |z| \leq |x| + |z| + 2|y| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$; ostatní podmínky z definice metriky jsou evidentně splněny.

Označme τ_ρ (resp. τ) metrickou topologii asociovanou s ρ (resp. přirozenou topologii na $\mathbf{R}$). Pro každé x, $y \in \mathbf{R}$ platí $|x - y| \leq |x| + |y|$, a tedy zobrazení id : $(\mathbf{R}, \rho) \to (\mathbf{R}, d)$, kde d je Euklidova metrika na $\mathbf{R}$, je stejnoměrně spojité. Odtud $\tau \subset \tau_\rho$. Obráceně zvolme kouli $B_\rho(1, 3/2)$. Podle definice je $B_\rho(1, 3/2) = \{y \in \mathbf{R} \mid |y| < 1/2\} \cup \{1\}$, a tedy žádný otevřený interval obsahující bod 1 neleží v $B_\rho(1, 3/2)$. Odtud $\tau \neq \tau_\rho$.

7. Nechť (X_1, d_1), (X_2, d_2) jsou metrické prostory. Pro každé x, $y \in X_1 \times X_2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, klademe

$$\vartheta(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\},$$
$$d(x, y) = \big((d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2\big)^{\frac{1}{2}};$$

množina $X_1 \times X_2$ s metrikou d je součin metrických prostorů X_1, X_2 (odst. 5.4). Dokažte, že ϑ je metrika na $X_1 \times X_2$, ekvivalentní s metrikou d.

Ř e š e n í . Přímo lze prověřit, že ϑ splňuje podmínky z definice metriky. Dále je třeba dokázat, že metrická topologie metriky ϑ je totožná se součinem metrických topologií prostorů X_1, X_2. Báze součinu metrických topologií je tvořena množinami $B_{d_1}(x_1, r_1) \times B_{d_2}(x_2, r_2)$. Báze metrické topologie metriky ϑ je tvořena množinami $B_\vartheta(x, r) = \{(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2 \mid d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2) < r\} = B_{d_1}(x_1, r) \times B_{d_2}(x_2, r)$. Odtud již plyne, že obě topologie splývají.

8. Na množině přirozených čísel $\mathbf{N}$ uvažujme diskrétní metriku d a metriku d', definovanou vztahem

$$d'(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

Jsou tyto metriky ekvivalentní? Jsou stejnoměrně ekvivalentní?

Ř e š e n í . Snadno se předvědčíme, že d' je metrika. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ a libovolné $r < 1/n(n+1)$ je $B_{d'}(n, r) = \{n\}$; podle Věty 2. odst. 5.2 str. 112 a př. (1) str. 125 jsou metriky d, d' ekvivalentní. Uvažujme dále zobrazení id : $(\mathbf{N}, d') \to (\mathbf{N}, d)$ a položme $\varepsilon = 1/2$. Buďte x, $y \in \mathbf{N}$ libovolné body, $x \neq y$. Pak pro libovolné $\delta > 0$ z podmínky $d'(x, y) < \delta$ vyplývá $d(x, y) = 1 > \varepsilon$, uvažované zobrazení tedy není stejnoměrně spojité a metriky d, d' nejsou stejnoměrně ekvivalentní.

9. Nechť d_1 (resp. d_2) je metrika na množině X_1 (resp. X_2). Na součinu $X_1 \times X_2$ definujeme funkci σ vztahem $\sigma(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$, kde $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$. Ukažte, že σ je metrika na $X_1 \times X_2$. Srovnejte metrickou topologii asociovanou s metrikou σ se součinem metrických topologií prostorů (X_1,d_1), (X_2,d_2).

Řešení. Snadno zjistíme, že σ splňuje všechny podmínky metriky a že je stejnoměrně ekvivalentní s metrikou ϑ (cv. 7). Metrická topologie asociovaná se σ tedy splývá se součinem metrických topologií.

10. Nechť pro každé $i \in \mathbf{N}$ je (X_i,d_i) metrický prostor, nechť $\delta_i = \min\{d_i,1\}$ je ohraničená metrika asociovaná s d_i. Pro $x \in X = \prod X_i$ označme $x_i = \mathrm{pr}_i(x)$, kde pr_i je i-tá kanonická projekce. Ukažte, že funkce $\Delta : X \times X \to \mathbf{R}$, definovaná vztahem

$$\Delta(x,y) = \sup\left\{\frac{\delta_i(x_i,y_i)}{i}\right\},$$

je metrika na X. Srovnejte metriku Δ s metrikou ρ, definovanou ve Větě 9. odst. 5.4 str. 115.

Řešení. Abychom ukázali, že Δ je metrika, stačí zřejmě prověřit trojúhelníkovou nerovnost. Pro každé $i \in \mathbf{N}$ a každé x_i, y_i, $z_i \in X_i$ platí $\delta_i(x_i,z_i) \le \delta_i(x_i,y_i) + \delta_i(y_i,z_i)$. Odtud

$$\frac{1}{i}\delta(x_i,z_i) \le \frac{1}{i}\delta_i(x_i,y_i) + \frac{1}{i}\delta_i(y_i,z_i).$$

Stejná nerovnost platí pro suprema, t.j. $\Delta(x,z) \le \Delta(x,y) + \Delta(y,z)$.

Označme τ (resp. τ_Δ) součin metrických topologií prostorů (X_i,δ_i) (resp. metrickou topologii na X, asociovanou s Δ). Buď $B_\Delta(x,\varepsilon)$ libovolná otevřená koule. Zvolme n tak, aby platilo $1/n < \varepsilon$ a položme $V = B_{d_1}(x_1,\varepsilon) \times B_{d_2}(x_2,\varepsilon) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n,\varepsilon) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots$. V je okolí bodu $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots)$ v topologii τ. Buď $y \in X$ libovolný bod. Podle definice metriky δ_i platí $\delta_i(x_i,y_i)/i \le 1/n$ pro každé $i \ge n$. Proto $\Delta(x,y) \le \max\{\delta_1,(x_1,y_1),\delta_2(x_2,y_2)/2, \ldots,\delta_n(x_n,y_n)/n,1/n\}$. Platí-li $y \in V$, pak $d_i(x_i,y_i) < \varepsilon$ pro $i = 1,2,\ldots,n$, a tedy $\max\{\delta_1(x_1,y_1),\delta_2(x_2,y_2)/2,\ldots,\delta_n(x_n,y_n)/n,1/n\} < \varepsilon$. Odtud $\Delta(x,y) < \varepsilon$, t.j. $y \in B_\Delta(x,\varepsilon)$. Celkem $V \subset B_\Delta(x,\varepsilon)$, t.j. $\tau_\Delta \subset \tau$. Obráceně, buď $x \in X$ libovolný bod, U prvek báze topologie τ v bodě x. Platí $U = \prod U_i$, kde U_i je otevřená množina v metrické topologii asociované s d_i a $U_i \ne X_i$ jen pro konečně mnoho indexů i. Označme i_1, i_2, …, i_k indexy, pro které $U_i \ne X_i$. Zvolme ε_{i_1}, ε_{i_2}, …, ε_{i_k} tak, aby platilo

$$B_{d_{i_1}}(x_{i_1},\varepsilon_{i_1}) \subset U_{i_1},\ \ldots,\ B_{d_{i_k}}(x_{i_k},\varepsilon_{i_k}) \subset U_{i_k}$$

a zároveň $\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},\ldots,\varepsilon_{i_k} \le 1$. Nechť ε je nejmenší z čísel ε_{i_1}, $\varepsilon_{i_2}/2$, …, ε_{i_k}/k. Nechť $y \in B_\Delta(x,\varepsilon)$ je libovolný bod. Pak $\Delta(x,y) < \varepsilon$, t.j. $\delta_i(x_i,y_i)/i < \varepsilon$ pro každé $i \in \mathbf{N}$. Dostáváme tedy $\delta_{i_1}(x_{i_1},y_{i_1}) < i_1\varepsilon \le \varepsilon_{i_1},\ldots,\delta_{i_k}(x_{i_k},y_{i_k}) < i_k\varepsilon \le \varepsilon_{i_k}$, t.j. $d_{i_1}(x_{i_1},y_{i_1}) < \varepsilon_{i_1} \le 1,\ldots, d_{i_k}(x_{i_k},y_{i_k}) < \varepsilon_{i_k} \le 1$. Platí tedy $y_{i_1} \in U_{i_1},\ldots,y_{i_k} \in U_{i_k}$, t.j. $y \in U$. Celkem $B_\Delta(x,\varepsilon) \subset U$ a $\tau \subset \tau_\Delta$.

Ekvivalence metrik Δ a ρ nyní plyne z Věty 9. odst. 5.4 str. 115.

11. Ukažte, že na množině $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ neexistuje metrická topologie totožná se silným součinem metrických topologií Euklidových prostorů $\mathbf{R}$.

Řešení. Předpokládejme, že na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ taková metrická topologie existuje. Pak $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ má strukturu metrického prostoru a platí pro něj tvrzení, uvedené v Důsledku (b) Věty 5. odst. 5.2 str. 113. Uvažujme množinu $A = \{(x_i) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid x_i > 0,\ i \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Počátek $0 = (0,0,0,\ldots)$ je prvkem množiny $\mathrm{cl}\,A$, neboť libovolný prvek báze silného součinu topologií obsahující 0 protíná množinu A. Podle Důsledku (b) Věty 5. odst. 5.2 str. 113 existuje posloupnost bodů $a_n \in A$, konvergující k bodu 0. Označme $a_n = (x_{n,1},x_{n,2},\ldots)$. Každé z čísel $x_{n,i}$ je kladné. Uvažujme okolí bodu 0 tvaru $B = (-x_{1,1},x_{1,1}) \times \cdots \times x(-x_{n,n},x_{n,n}) \times \cdots$. V množině B neleží žádný bod a_n posloupnosti (a_n);

zřejmě totiž pro číslo $x_{n,n}$ platí $x_{n,n} \notin (-x_{n,n}, x_{n,n})$. Posloupnost (a_n) tedy nekonverguje k bodu 0 v topologii silného součinu na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Protože posloupnost (a_n) byla zvolena libovolně, dostáváme spor s předpokladem, že $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ s topologií silného součinu je metrický prostor.

12. Ukážte, že na množině $\mathbf{R}^I$, kde I je nespočetná indexová množina, neexistuje metrická topologie totožná se součinem metrických topologií Euklidových prostorů $\mathbf{R}$.

Řešení. Tvrzení je důsledkem Věty 10. odst. 5.4 str. 116.

Provedeme jiný důkaz pomocí Důsledku (b) Věty 5. odst. 5.2 str. 113. Buď $A \subset \mathbf{R}^I$ množina všech bodů (x_ι) takových, že $x_\iota = 0$ pro konečný počet indexů ι a $x_\iota = 1$ pro ostatní indexy ι. Ukážeme, že počátek $0 \in \mathbf{R}^I$ (t.j. bod $(x_\iota)_{\iota \in I}$, pro který $x_\iota = 0$) leží v množině $\operatorname{cl} A$. Buď $\prod U_\iota$ element báze topologie součinu na $\mathbf{R}^I$, obsahující bod 0. $U_\iota = \mathbf{R}$ až na konečně mnoho indexů ι, které označíme $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n$. Buď $(x_\iota)_{\iota \in I} \in A$ bod takový, že $x_\iota = 0$ pro $\iota = \iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n$, $x_\iota = 1$ pro ostatní $\iota \in I$. Zřejmě $(x_\iota)_{\iota \in I} \in A \cap \prod U_\iota$, a tedy $0 \in \operatorname{cl} A$. Dále ukážeme, že neexistuje posloupnost (a_i) bodů množiny A konvergující k 0. Nechť (a_i) je libovolná posloupnost v A. Každý bod a_i má pouze konečně mnoho komponent rovných 0. Pro pevné i označme I_i podmnožinu množiny I, sestávající z těch indexů $\iota \in I$, pro které ι-tá projekce bodu a_i je rovna 0. $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} I_n$ je spočetná množina. Jelikož I je nespočetná, existuje index $\alpha \in I$ takový, že $\alpha \notin I_i$ pro žádné i (t.j. $\alpha \notin \bigcup I_i$). Je tedy pro každý z bodů a_i posloupnosti (a_i) jeho α-tá projekce rovna 1. Buď nyní $U_\alpha = (-1, 1) \subset \mathbf{R}$ a položme $U = (\mathrm{pr}_\alpha)^{-1}(U_\alpha)$. U je otevřená množina v $\mathbf{R}^I$, je okolím bodu $0 \in \mathbf{R}^I$, ale neobsahuje žádný z bodů posloupnosti (a_i). Tedy posloupnost (a_i) nekonverguje k bodu 0.

Podle Důsledku (b) Věty 5. odst. 5.2 str. 113 není tedy součin Euklidových topologií na $\mathbf{R}^I$ roven žádné metrické topologii.

13. Pro $t \in \mathbf{R}$ klademe

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \ldots), \qquad g(t) = (t, t, t, \ldots),$$
$$h(t) = (t, \tfrac{t}{2}, \tfrac{t}{3}, \ldots).$$

Tyto vztahy definují zobrazení f, g, $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Rozhodněte, zda jsou tato zobrazení spojitá v uniformní topologii na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Řešení. Ukážeme, že zobrazení f není spojité v bodě $0 \in \mathbf{R}$. Platí $d(0, t) = |t|$ pro každé $t \in \mathbf{R}$ a $\theta(0, f(t)) = \sup\{\min\{|n \cdot t|, 1\}\}$. Zvolme $\varepsilon = 1$. Předpokládejme, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že z podmínky $|t| < \delta$ vyplývá $\theta(0, t) < 1$. Pak nutně $n \cdot \delta < 1$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, t.j. $\delta < 1/n$. Odtud plyne, že $\delta = 0$.

Zobrazení g je spojité. Pro každé s, $t \in \mathbf{R}$ platí $d(s, t) = |s - t|$ a $\theta(g(s), g(t)) = \sup\{\min\{|s - t|, 1\}\} = \min\{|s - t|, 1\}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolme $\delta = \varepsilon$. Pak pro každé s, $t \in \mathbf{R}$, pro které $|s - t| < \delta$, platí $\theta(g(s), g(t)) < \varepsilon$, tedy g je dokonce stejnoměrně spojité.

Zřejmě $\theta(h(s), h(t)) = \sup\{\min\{|s-t|, 1\}\} = \min\{|s-t|, 1\}$. Analogicky jako v případě zobrazení g se tedy ukáže, že rovněž h je stejnoměrně spojité v uniformní topologii na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

14. Rozhodněte, zda tyto posloupnosti (x_i) v $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ konvergují v uniformní topologii:
(a) $x_1 = (1, 1, 1, 1, \ldots)$, $x_2 = (0, 2, 2, 2, \ldots)$, $x_3 = (0, 0, 3, 3, \ldots)$, ...
(b) $x_1 = (1, 1, 1, 1, \ldots)$, $x_2 = (0, 1/2, 1/2, 1/2, \ldots)$, $x_3 = (0, 0, 1/3, 1/3, \ldots)$, ...
(c) $x_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$, $x_2 = (1/2, 1/2, 0, 0, \ldots)$, $x_3 = (1/3, 1/3, 1/3, 0, \ldots)$, ...
(d) $x_1 = (1, 1, 0, 0, \ldots)$, $x_2 = (1/2, 1/2, 0, 0, \ldots)$, $x_3 = (1/3, 1/3, 0, 0, \ldots)$, ...

Řešení. $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ s uniformní metrikou je úplný metrický prostor (Věta 22. odst. 5.9 str. 123). Posloupnost (x_i) v $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ tedy konverguje právě tehdy je-li cauchyovská.

(a) Platí $\theta(x_n, x_{n+1}) = 1$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, uvažovaná posloupnost tedy není cauchyovská.

(b) $\theta(x_n, x_i) = 1/n$ pro každé n a každé $i > n$. Posloupnost (b) tedy konverguje v $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ a platí

$\lim(x_i) = (0,0,0,0,\dots)$.

(c) , (d) V tomto případě posloupnost (x_i) konverguje k bodu $(0,0,0,0,\dots)$, neboť $\lim(\theta(x_i,0)) = 0$.

15. Buď X metrický prostor s metrikou d. Ukažte, že uzavřená koule $\bar{B}_d(x,r)$ je uzavřená množina v metrické topologii asociované s d. Určete vztah mezi uzavřenými množinami $\operatorname{cl} B_d(x,r)$ a $\bar{B}_d(x,r)$.

Řešení. Podle Věty 15. odst. 5.6 str. 119 je zobrazení $f : X \to [0,\infty)$, definované vztahem $f(y) = d(x,y)$, spojité. Platí $\bar{B}_d(x,r) = f^{-1}([0,r])$, $B_d(x,r) = f^{-1}([0,r))$, takže množina $\bar{B}_d(x,r)$ je uzavřená a množina $B_d(x,r)$ je otevřená. Z definice uzávěru je zřejmé, že $\operatorname{cl} B_d(x,r) \subset \bar{B}_d(x,r)$. Ukážeme, že obrácená inkluze obecně neplatí. Uvažujme diskrétní metriku d na X. Platí $B_d(x_0,1) = \{x \in X \mid d(x_0,x) < 1\} = \{x_0\}$, $\bar{B}_d(x_0,1) = \{x \in X \mid d(x_0,x) \le 1\} = X$, ale $\operatorname{cl} B_d(x_0,1) = B_d(x_0,1) = \{x_0\}$.

16. Uvažujme $\mathbf{R}^I$, kde I je nekonečná množina, s uniformní metrikou θ. Pro bod $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ a r takové, že $0 < r < 1$, položme $U(x,r) = \prod(x_\iota - r, x_\iota + r)$.

(a) Ukažte, že $U(x,r) \ne B(x,r)$.

(b) Ukažte, že množina $U(x,r)$ není otevřená v uniformní topologii.

(c) Ukažte, že každou otevřenou kouli $B_\theta(x,r)$ lze vyjádřit jako sjednocení množin $U(x,\delta)$ pro jistá $\delta > 0$.

Řešení. (a) Přímo z definice plyne, že $B_\theta(x,r) \subset U(x,r)$. Naopak pro $y \in U(x,r)$ platí $d(x_\iota,y_\iota) < r$ pro každé $\iota \in I$, kde d označuje přirozenou metriku na $\mathbf{R}$, a tedy $\sup\{d(x_\iota,y_\iota)\} \le r$, t.j. y nemusí ležet v množině $B_\theta(x,r)$.

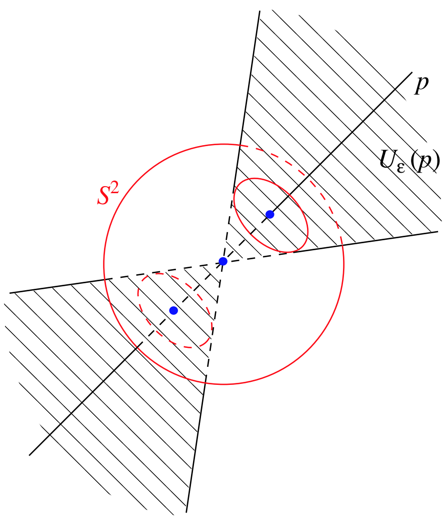
(b) Platí $U(x,r) = \bar{B}(x,r)$, t.j. $U(x,r)$ je uzavřená množina v uniformní topologii na $\mathbf{R}^I$.

(c) Snadno prověříme, že platí $B_\theta(x,r) = \bigcup_{\delta<r} U(x,\delta) = \{y \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \theta(x,y) = \delta,\ 0 < \delta < r\}$.

Je-li τ_S silný součin přirozených topologií na $\mathbf{R}^I$, z (b) plyne, že $\tau_\theta \ne \tau_S$ ($U(x,r)$ není otevřená množina v τ_θ; přitom v př. (6) odst. 5.10 str. 128 bylo ukázáno, že $\tau_\theta \subset \tau_S$).

17. V Euklidově metrickém prostoru $\mathbf{R}^3$ uvažujme množinu $\mathscr{P}$ všech přímek jdoucích počátkem. Zvolme přímku $p \in \mathscr{P}$ libovolně. Pro každé $\varepsilon > 0$ definujeme množinu $U_\varepsilon(p) \subset \mathscr{P}$ takto: množina $U_\varepsilon(p)$ je tvořena všemi přímkami $p' \in \mathscr{P}$ takovými, že jestliže $x \in p'$ a $d(x,0) = 1$, pak existuje $y \in p$ tak, že $d(y,0) = 1$, $d(x,y) < \varepsilon$ (viz obr. 2).

Obr. 2



(a) Prověřte, že pro každé $p \in \mathscr{P}$ je systém $\sigma_p = \{U_\varepsilon(p) \mid \varepsilon > 0\}$ lokální báze nějaké topologie v bodě p.

(b) Ukažte, že $\mathscr{P}$ je homeomorfní s reálnou projektivní rovinou RP^2 (cv. 30 kap. 3).

Řešení.

(a) Systém σ_p splňuje předpoklady Věty 8. (b) odst. 1.4 str. 6, je tedy lokální bází topologie na $\mathscr{P}$ v bodě p.

(b) Podle cv. 30 kap. 3 stačí ukázat, že $\mathscr{P}$ je homeomorfní s faktorovým prostorem $S^2/\!\sim$, kde S^2 je jednotková sféra v $\mathbf{R}^3$ a $\sim$ je ekvivalence "$P \sim Q$, jestliže $P = Q$ nebo $P = -Q$". Definujeme zobrazení $f : \mathscr{P} \to S^2/\!\sim$ vztahem $f(p) = [x]$, kde $[x] \in p \cap S^2/\!\sim$ a $g : S^2/\!\sim\to \mathscr{P}$ vztahem $G([x]) = p$, kde p prochází body x, $-x$, 0. Snadno se prověří, že zobrazení f, g jsou spojitá a vzájemně inverzní. Zobrazení f je tedy homeomorfismus.

18. Nechť (x_i) (resp. (y_i)) je posloupnost v metrickém prostoru X s metrikou d, konvergující k bodu x (resp. y). Pak posloupnost reálných čísel $(d(x_i, y_i))$ konverguje k bodu $d(x, y) \in \mathbf{R}$. Ukažte.

Řešení. Podle předpokladu k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje index n tak, že pro všechna $i \geq n$ platí $d(x_i, x)$, $d(y_i, y) < \varepsilon/2$. Pro $i \geq n$ tedy $d(x_i, y_i) \leq d(x_i, x) + d(x, y) + d(y, y_i) < \varepsilon + d(x, y)$ a zároveň $d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y_i) + d(y_i, y) < \varepsilon + d(x_i, y_i)$. Musí tedy platit $|d(x_i, y_i) - d(x, y)| < \varepsilon$.

Stejnoměrně spojitá zobrazení

19. Rozhodněte, které z následujících zobrazení je stejnoměrně spojité:

(a) $f : (\mathbf{R}, d) \to (\mathbf{R}, d)$, kde d je Euklidova metrika a $f(x) = kx + q$.

(b) Inverzní zobrazení k zobrazení f z (a) (pro $k \neq 0$).

(c) $f : (\mathbf{R}, d) \to (\mathbf{R}, d)$, kde d je Euklidova metrika a $f(x) = x^2$.

(d) $f : [0, 1] \to (\mathbf{R}, d)$, kde d je Euklidova metrika a $f(x) = x^2$, uvažujeme-li $[0, 1]$ jako podprostor $(\mathbf{R}, d)$.

(e) Konstantní zobrazení metrického prostoru (X, d_1) do metrického prostoru (Y, d_2).

(f) Zobrazení $f : (0, 1) \to \mathbf{R}$, kde $f(x) = \sin(1/x)$ a množiny $(0, 1) \subset \mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$ jsou uvažovány s přirozenou topologií.

Řešení.

(a) Pro $k = 0$ je f konstantní zobrazení a je zřejmě stejnoměrně spojité. Pro $k \neq 0$ je f také stejnoměrně spojité (k danému $\varepsilon > 0$ vezmeme $\delta = \varepsilon/|k|$).

(b) Platí $f^{-1}(x) = (x - q)/k$, tedy f^{-1} je stejnoměrně spojité podle (a).

(c) Zobrazení f není stejnoměrně spojité: zvolme $\varepsilon = 1$ a pro libovolné $\delta > 0$ položme $x = 1/\delta$, $y = 1/\delta + \delta/2$. Pak $|x - y| = \delta/2 < \delta$, ale $|x^2 - y^2| = (2/\delta + \delta/2)\delta/2 \geq 1 = \varepsilon$.

(d) Zobrazení f je stejnoměrně spojité: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, $\delta = \varepsilon/2$. Pak $|x - y| < \delta$ implikuje $|x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y| \leq 2|x - y| < \varepsilon$, neboť $|x + y| \leq 2$ pro každé $x, y \in [0, 1]$.

(e) Pro libovolné $x, y \in X$ platí $d_2(f(x), f(y)) = 0$, takže konstantní zobrazení je stejnoměrně spojité.

(f) Zobrazení f není stejnoměrně spojité. Buď ε libovolné, $0 < \varepsilon < 2$. Ukážeme, že k libovolnému $\delta > 0$ lze najít $x, y \in (0, 1)$ tak, že $|x - y| < \delta$ a $|\sin(1/x) - \sin(1/y)| > \varepsilon$. Pro libovolné k celé kladné klademe

$$x = \frac{2}{(4k + 3)\pi}, \qquad y = \frac{2}{(4k + 1)\pi}.$$

K libovolnému $\delta > 0$ vybereme k tak, aby platilo $|x - y| < \delta$. Pro libovolné k ovšem platí $|\sin(1/x) - \sin(1/y)| = 2 > \varepsilon$.

20. Nechť f, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jsou stejnoměrně spojité funkce vzhledem k přirozené metrice na $\mathbf{R}$. Jsou funkce $f + g$ a $f \cdot g$ stejnoměrně spojité?

Řešení. Součet stejnoměrně spojitých funkcí je stejnoměrně spojitá funkce. Ukážeme to. Označme $h = f + g$. Buď $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta_1 > 0$ (resp. $\delta_2 > 0$) tak, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ (resp. $|g(x) - g(y)| < \varepsilon/2$) pro každé x, y, pro které $|x - y| < \delta_1$ (resp. $|x - y| < \delta_2$). Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pak pro každé x, $y \in \mathbf{R}$, pro které platí $|x - y| < \delta$, je $|h(x) - h(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Součin stejnoměrně spojitých funkcí nemusí být stejnoměrně spojitá funkce; příkladem je funkce $f(x) = x \cdot x = x^2$.

21. Uveďte příklad zobrazení $f : X_1 \to X_2$, které je stejnoměrně spojité jako zobrazení metrických prostorů (X_1, d_1), (X_2, d_2) a není stejnoměrně spojité jako zobrazení metrických prostorů (X_1, d_1'), (X_2, d_2'), kde d_1, d_1' a d_2, d_2' jsou ekvivalentní metriky.

Řešení. Na množině reálných čísel $\mathbf{R}$ uvažujme přirozenou metriku $d(x, y) = |x - y|$ a metriku

$$d'(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

V př. (4) odst. 5.10 str. 126 jsme ukázali, že tyto metriky jsou ekvivalentní a že identické zobrazení $\mathrm{id} : (\mathbf{R}, d') \to (\mathbf{R}, d)$ není stejnoměrně spojité. $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ je ovšem stejnoměrně spojité jako zobrazení $(\mathbf{R}, d)$ do $(\mathbf{R}, d)$. Zobrazení $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ má tedy požadované vlastnosti.

Uvedený příklad tedy ilustruje tu skutečnost, že pojem stejnoměrně spojitého zobrazení není topologický (nezachovává se při homeomorfismech), ale metrický; podobnou vlastnost mají pojmy cauchyovská posloupnost, úplnost, kontrakce, izometrie.

Cauchyovské posloupnosti, úplné metrické prostory

22. Uveďte příklad posloupnosti, která je cauchyovská v metrice d a není cauchyovská v ekvivalentní metrice d'.

Řešení. Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s metrikou d' z cv. 21. Ukážeme, že posloupnost $\{1, 2, 3, \ldots\}$ je cauchyovská v této metrice. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, zvolme $n > 1/\varepsilon$. Pak pro libovolné $i > n$ platí

$$\begin{aligned} d'(n, i) &= \left| \frac{n}{1+n} - 1 + 1 - \frac{i}{1+i} \right| = \left| \frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+n} \right| \\ &= \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1+i} < \frac{1}{1+n} < \frac{1}{1+\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Uvažovaná posloupnost ovšem není cauchyovská v Euklidově metrice na $\mathbf{R}$: pro každé n a každé $i > n$ platí $d(n, i) = i - n \geq 1$.

23. Uveďte příklad cauchyovské posloupnosti, která není konvergentní.

Řešení. Je třeba najít metrický prostor, který není úplný, a cauchyovskou posloupnost v tomto metrickém prostoru, která není konvergentní. Uvažujme interval $(0, 1)$ jako podprostor $\mathbf{R}$ s přirozenou metrikou. Posloupnost $(1/n)_{n \in \mathbf{N}}$ je konvergentní v $\mathbf{R}$ ($\lim(1/n) = 0$); je cauchyovská a není konvergentní v $(0, 1)$.

Dalším příkladem je množina racionálních čísel $\mathbf{Q}$, uvažovaná jako podprostor $\mathbf{R}$ s přirozenou metrikou. Posloupnost $\{3; 3{,}1; 3{,}14; 3{,}141; 3{,}1415; \ldots\}$, konvergující v $\mathbf{R}$ k iracionálnímu číslu π, je cauchyovská v $\mathbf{Q}$ a není tam konvergentní.

24. (a) Nalezněte metrický prostor, který je zúplněním intervalu $(0, 1)$, uvažovaného jako podprostor $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií.

(b) Vyberme dva body neležící v $\mathbf{R}$ a označme je $-\infty$, $+\infty$. Dále označme $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

a položme

$$d^*(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|, \quad x, y \in \mathbf{R},$$

$$d^*(x,-\infty) = \left|\frac{x}{1+|x|} + 1\right|, \quad d(x,+\infty) = \left|\frac{x}{1+|x|} - 1\right|, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$d^*(-\infty,+\infty) = 2.$$

Dokažte, že d^* je metrika na $\mathbf{R}$ a že metrický prostor $(\mathbf{R}, d^*)$ je zúplněním metrického prostoru $(\mathbf{R}, d')$ z př. (4) odst. 5.10 str. 126.

Řešení.

(a) Kanonické vnoření $\iota : ((-1,1), d) \to (\mathbf{R}, d)$ je zřejmě izometrie. Zúplněním metrického prostoru $((-1,1), d)$ je tedy metrický prostor $\mathrm{cl}(-1,1)$, uvažovaný jako podprostor $(\mathbf{R}, d)$.

(b) Platnost podmínek z definice metriky se prověří standardním způsobem. Zobrazení $\mathrm{id} : (\mathbf{R}, d') \to (\mathbf{R}, d^*)$ je izometrie. Určíme uzávěr množiny $\mathbf{R}$ v metrické topologii, asociované s metrikou d. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, uvažujme kouli $B_{d^*}(-\infty, \varepsilon)$. Položme $x = -1/\varepsilon$. Zřejmě $x \in \mathbf{R}$ a

$$d^*(x,-\infty) = \left|\frac{x+|x|+1}{1+|x|}\right| = \frac{1}{1+\frac{1}{\varepsilon}} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

t.j. $x \in B_{d^*}(-\infty, \varepsilon)$ a tedy $-\infty \in \mathrm{cl}\,\mathbf{R}$. Podobně se ukáže, že $+\infty \in \mathrm{cl}\,\mathbf{R}$, odkud $\mathrm{cl}\,\mathbf{R} = \mathbf{R}$.

25. *Cantorova věta.* Metrický prostor X je úplný právě tehdy, když každá klesající posloupnost $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ neprázdných uzavřených množin v X takových, že $\lim \delta(A_i) = 0$, má neprázdný průnik, Dokažte.

Řešení. Nechť X je úplný metrický prostor, $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ posloupnost uzavřených množin taková, že (a) $A_i \neq \emptyset$ pro každé $i \in \mathbf{N}$, (b) $A_{i+1} \subset A_i$ pro každé $i \in \mathbf{N}$, (c) $\lim \delta(A_i) = 0$, kde δ označuje průměr množiny. Ke každému i zvolme bod $x_i \in A_i$. Pro posloupnost (x_i) platí, že všechny její body x_k pro $k \geq j$ leží v množině A_j. Z předpokladu (c) vyplývá, že tato posloupnost je cauchyovská, konverguje tedy k jistému bodu $x \in X$. To ovšem znamená, že $x \in \mathrm{cl}\, A_i$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$. Jelikož každá z množin A_i je uzavřená, dostáváme $\bigcap A_i \neq \emptyset$.

Obráceně předpokládejme, že X je metrický prostor splňující podmínku z Cantorovy věty. Buď (x_i) cauchyovská posloupnost v X. Pro každé i klademe $A_i = \mathrm{cl}\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots\}$. Systém množin $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ má všechny požadované vlastnosti, existuje proto prvek $x \in \bigcap A_i$. Podle Lemmatu 2. odst. 5.5 str. 117 platí $x = \lim x_i$, což dokazuje, že X je úplný metrický prostor.

Kontrakce, izometrie

26. Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s Euklidovou metrikou a interval $[0,1]$ jako podprostor $\mathbf{R}$. Rozhodněte, která z následujících zobrazení jsou izometrie:

(a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = k \cdot x$, $\quad k \neq 0, 1$.
(b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + q$.
(c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$.
(d) $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$.

Řešení. Zobrazení (b) je izometrie pro každé $q \in \mathbf{R}$, ostatní zobrazení nejsou izometrie.

27. (a) Uveďte příklady kontrakcí. (b) Uveďte příklad zobrazení metrického prostoru do sebe, které je kontrakcí a přitom nemá žádný pevný bod.

Řešení. (a) Konstantní zobrazení metrického prostoru do sebe je kontrakce. Zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definované vztahem $f(x) = k \cdot x + q$, je kontrakce pro $|k| < 1$ (v přirozené metrice). Uvažujeme-li interval $[-1/3, 1/3]$ jako podprostor $\mathbf{R}$, pak zobrazení $f : [-1/3, 1/3] \to \mathbf{R}$, definované vztahem $f(x) = x^2$, je kontrakce: pro každé $x, y \in [-1/3, 1/3]$ platí $|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq 2/3|x - y|$. Funkce $f : [a, b] \to [a, b]$, která splňuje na intervalu $[a, b]$ Lipschitzovu podmínku $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ s konstantou $k < 1$, je kontrakce. Tato podmínka je např. splněna v případě, kdy f má na intervalu $[a, b]$ derivaci f', která je ohraničená konstantou $k < 1$ (Lagrangeova věta o střední hodnotě).

28. Uvažujme zobrazení $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)$, definované vztahem

$$f^i(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^i x^k + b^i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

kde a_k^i, $b^i \in \mathbf{R}$. Je f kontrakce, uvažujeme-li na $\mathbf{R}^n$ metriku (a) ϑ, (b) σ, (c) d, kde

$$\vartheta(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x^i - y^i|\}, \quad \sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|,$$

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} ?$$

Ř e š e n í. (a) Platí

$$\vartheta(f(x), f(y)) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \sum_k a_k^i (x^k - y^k) \right| \right\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_k (|a_k^i|\, |x^k - y^k|) \right\}$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left(\sum_k |a_k^i| \right) \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \{|x^k - y^k|\} \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_k |a_k^i| \right\} \cdot \vartheta(x, y).$$

Odtud dostáváme podmínku kontraktivnosti zobrazení f ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k^i| < 1, \quad 1 \leq i \leq n.$$

(b) Analogicky jako v (a) dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k^i| < 1, \quad 1 \leq i \leq n.$$

(c) S využitím Cauchyovy–Bunjakovského nerovnosti (cv. 4 kap. 3) dostaneme analogicky jako v (a)

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_j^i)^2 < 1.$$

Bodová a stejnoměrná konvergence

29. Zformulujte definici bodově konvergentní posloupnosti zobrazení množiny X do metrického prostoru Y s metrikou d pomocí d.

Ř e š e n í. Řekneme, že posloupnost $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ zobrazení $f_n : X \to Y$ konverguje bodově k zobrazení $f : X \to Y$, jestliže pro každé $x \in X$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo $n_0(x, \varepsilon)$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Tato definice je zřejmě ekvivalentní definicí, uvedené v Př. (2) (d) odst. 4.5 str. 95.

30. Uveďte příklad posloupnosti zobrazení, která konverguje bodově, ale nekonverguje stejnoměrně.

Řešení. Nechť $X = (0,1) \subset \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}$ (s Euklidovou metrikou). Uvažujme posloupnost (f_n) v Y^X, kde $f_n(x) = x^n$. Posloupnost (f_n) zřejmě konverguje bodově na intervalu $(0,1)$ k funkci $f = 0$. Ukážeme, že (f_n) nekonverguje stejnoměrně k $f = 0$. Zvolme $\varepsilon = 1/2$. Buď $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ a každé $x \in (0,1)$ platí $|f_n(x) - f(x)| < 1/2$, t.j. $|x^n| < 1/2$. Pak také $|x^{n_0}| < 1/2$ pro každé $x \in (0,1)$. Ovšem $\lim x^{n_0} = 1$ pro $x \to 1$, což je spor. Z Důsledku Věty 25. odst. 5.9 str. 125. nyní vyplývá, že f nekonverguje stejnoměrně.

31. *Cauchyovo–Bolzanovo kriterium stejnoměrné konvergence.* Nechť X je množina, Y metrický prostor s metrikou d.

(a) Konverguje-li posloupnost zobrazení $f_n : X \to Y$ stejnoměrně, pak k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje index n tak, že pro každé i, $j \geq n$ a každé $x \in X$ platí $d(f_i(x), f_j(x)) < \varepsilon$.

(b) Předpokládejme, že metrický prostor Y je úplný a k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje index n tak, že pro každé i, $j \geq n$ a každé $x \in X$ platí $d(f_i(x), f_j(x)) < \varepsilon$. Pak posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně.

Dokažte.

Řešení. (a) Předpokládejme, že posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $i \geq n$ a každé $x \in X$ platí $d(f_i(x), f(x)) < \varepsilon/2$, kde f označuje limitu (f_n). Nechť i, $j \geq n$. Pak z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme $d(f_i(x), f_j(x)) < \varepsilon$.

(b) Z předpokladů plyne, že pro pevné $y \in X$ je posloupnost $(f_n(y))_{n \in \mathbf{N}}$ cauchyovská. Existuje tedy limita $f(y) = \lim f_n(y)$ pro $n \to \infty$. Posloupnost (f_n) tedy konverguje bodově k funkci f. Buď $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé i, $j \geq n$ a každé $x \in X$ platí $d(f_i(x), f_j(x)) < \varepsilon/2$, t.j. $\lim d(f_i(x), f_j(x)) = d(f_i(x), f(x)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ pro každé $i \in \mathbf{N}$ (limita pro $j \to \infty$). Tedy posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k f.

Část 6

Regulární, normální a parakompaktní prostory

Můžeme-li v Hausdorffově topologickém prostoru oddělit otevřenými množinami libovolnou uzavřenou množinu a bod, který v ní neleží, říkáme, že tento prostor je regulární; můžeme-li oddělit libovolné dvě disjunktní uzavřené množiny, říkáme, že je normální. Definice parakompaktního prostoru je složitější. Budeme říkat, že Hausdorffův topologický prostor je parakompaktní, jestliže ke každému jeho otevřenému pokrytí lze najít lokálně konečné otevřené zjemnění, t.j. nové otevřené pokrytí s těmito vlastnostmi: (1) Každá množina patřící novému pokrytí leží celá v nějaké množině původního pokrytí, (2) každý bod topologického prostoru má okolí, protínající se s nejvýše konečně mnoha množinami nového pokrytí. Ukazuje se, že každý parakompaktní prostor je normální a každý normální prostor je regulární.

Tato kapitola je věnována studiu výše uvedených topologických prostorů. Obsahuje mnohé fundamentální teorémy, důležité nejen v topologii, ale také v analýze a diferenciální geometrii. Uvedeme stručně hlavní výsledky.

V odst. 6.2 dokazujeme, že k libovolným dvěma disjunktním uzavřeným množinám A, B v normálním topologickém prostoru X existuje spojitá reálná funkce na X, nabývající hodnot v intervalu $[0, 1]$, rovna 0 na A a rovna 1 na B (Urysohnovo lemma). Je zde také dokázán Tietzeův teorém o tom, že topologický prostor je normální právě když má tu vlastnost, že libovolnou spojitou reálnou funkci, definovanou na jeho uzavřeném podprostoru, lze spojitě rozšířit na celý prostor. V odst. 6.4 je zaveden důležitý pojem spojitého rozkladu jednotkové funkce, kompatibilního s daným otevřeným pokrytím normálního prostoru; je zde dokázáno, že ke každému lokálně konečnému otevřenému pokrytí normálního prostoru existuje s ním kompatibilní rozklad jednotkové funkce. V odst. 6.5 se zabýváme problémem metrizovatelnosti regulárního prostoru, t.j. problémem existence metriky, jejíž metrická topologie splývá se zadanou topologií. Dokazuje Urysohnovu–Tichonovovu větu o tom, že každý regulární prostor druhého typu spočetnosti je metrizovatelný. Dále dokazujeme Nagatovo–Smirnovovo kriterium metrizovatelnosti (obecného) topologického prostoru, které říká, že topologický prostor je metrizovatelný tehdy a jen tehdy, je-li regulární a má jistou speciální (spočetně lokálně konečnou) bázi topologie. V odst. 6.6 se zabýváme parakompaktními prostory, které mají velký význam především tam, kde je třeba k libovolnému otevřenému pokrytí nalézt s ním kompatibilní rozklad jednotkové funkce. Je tomu tak např. v teorii topologických a hladkých variet, kde se rozklad jednotkové funkce používá ke konstrukci "globálních" objektů (např. zobrazení) pomocí "lokálních" údajů, definovaných na otevřených množinách daného pokrytí. Dokazujeme, že v parakompaktních prostorech požadovaný rozklad jednotkové funkce vždy existuje. Dále v odst. 6.6 uvádíme Stoneův teorém o tom, že každý metrizovatelný topologický prostor je parakompaktní.

Poznamenáváme, že při studiu literatury se čtenář může setkat s rozdílnou terminologií, než je používaná v těchto skriptech; tak např. pojem regulárního prostoru je někdy definován bez předpokladu oddělitelnosti. To může ovšem vést k rozdílným formulacím ekvivalentních tvrzení; nemá-li pak dojít k nedorozuměním, je třeba mít na zřeteli soustavu definic, kterou ten-který autor používá.

6.1. Regulární prostory

Hausdorffův topologický prostor X se nazývá *regulární*, jestliže ke každé uzavřené množině $A \subset X$ a každému bodu $x \in X$, který neleží v A, existuje okolí U množiny A a okolí V bodu x tak, že $U \cap V = \emptyset$.

Věta 1. *Buď X Hausdorffův topologický prostor. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
(1) *X je regulární.*
(2) *Každé okolí U libovolného bodu $x \in X$ obsahuje okolí V bodu x takové, že* $\operatorname{cl} V \subset U$.

Důkaz.
1. Buď X regulární prostor, $x \in X$ bod, U jeho okolí. Množina $A = X \backslash U$ je uzavřená a $x \notin A$. Existuje tedy okolí V bodu x a okolí W množiny A tak, že $V \cap W = \emptyset$. Pak $V \subset X \backslash W$, $\operatorname{cl} V \subset \operatorname{cl}(X \backslash W) = X \backslash W$, t.j. $\operatorname{cl} V \cap W = \emptyset$. Odtud $\operatorname{cl} V \cap A = \operatorname{cl} V \cap (X \backslash U) = \emptyset$, t.j. $\operatorname{cl} V \subset U$.
2. Obráceně předpokládejme, že ke každému $x \in X$ a každému okolí U bodu x existuje okolí V bodu x tak, že $\operatorname{cl} V \subset U$. Buď $A \subset X$ uzavřená množina, $y \in X$ bod neležící v A. Položme $U = X \backslash A$. U je okolí bodu y, existuje tedy okolí V bodu y takové, že $\operatorname{cl} V \subset X \backslash A$. $X \backslash \operatorname{cl} V$ je otevřená množina obsahující A přičemž platí $V \cap (X \backslash \operatorname{cl} V) = \emptyset$. Topologický prostor X je tedy regulární.

Poznamenáváme, že v první části důkazu Věty 1. odst. 6.1 str. 142 jsme nevyužili předpoklad, že X je Hausdorffův.

Věta 2. (a) *Podprostor regulárního topologického prostoru je regulární.*
(b) *Součin libovolného systému regulárních topologických prostorů je regulární.*

Důkaz.
(a) Podprostor A regulárního prostoru X je Hausdorffův (Věta 2. odst. 3.1 str. 32). Zvolme uzavřenou množinu B v A a bod $x \in A$ neležící v B. Platí $B = \operatorname{cl}_X B \cap A$ (Věta 4. (a) odst. 3.1 str. 32), a tedy $\operatorname{cl}_X B \not\ni x$. Zvolme okolí U bodu x a okolí V množiny $\operatorname{cl}_X B$ (v X) tak, že $U \cap V = \emptyset$. Pak $U \cap A$, $V \cap A$ jsou hledaná okolí bodu x a množiny B v podprostoru $A \subset X$.
(b) Buď $(X_\iota)_{\iota \in I}$ systém regulárních prostorů. Buď $x \in \prod X_\iota$ libovolný bod, U element báze topologie součinu na $\prod X_\iota$ v bodě x. Pak $U = \prod U_\iota$, kde $U_\iota \neq X_\iota$ pro nejvýše konečnou množinu indexů ι; označme tyto indexy $\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_n$. Z regularity topologických prostorů $X_{\iota_1}, X_{\iota_2}, \dots, X_{\iota_n}$ vyplývá, že každý bod $x_{\iota_i} = \operatorname{pr}_{\iota_i}(x) \in X_{\iota_i}$, kde $1 \leq i \leq n$, má okolí V_{ι_i} takové, že $\operatorname{cl} V_{\iota_i} \subset U_{\iota_i}$. Položme $V = \prod V_\iota$, kde $V_\iota = X_\iota$ pro všechna $\iota \neq \iota_1, \iota_2, \dots, \iota_n$. V je zřejmě okolí bodu x a platí $\operatorname{cl} V = \prod \operatorname{cl} V_\iota \subset \prod U_\iota = U$ (Věta 12. odst. 3.3 str. 37). Podle Věty 1. odst. 6.1 str. 142 je tedy součin $\prod X_\iota$ regulární topologický prostor.

Tvrzení, které nyní dokážeme, ukazuje, že spojitá zobrazení s hodnotami v regulárních prostorech, definovaná na hustých podmnožinách, lze spojitě rozšířit tehdy a jen tehdy, jestliže je lze spojitě rozšířit “bod po bodu”.

Věta 3. *Buď X topologický prostor, Y regulární topologický prostor, $A \subset X$ hustá množina a $f : A \to Y$ spojité zobrazení. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *Existuje spojité rozšíření zobrazení f na topologický prostor X.*

(2) *Pro každé $x \in X$ existuje spojité rozšíření zobrazení f na topologický podprostor $A \cup \{x\} \subset X$.*

Důkaz. Stačí dokázat, že z podmínky (2) vyplývá podmínka (1).

Předpokládejme, že je splněna podmínka (2). Pro každé $x \in X$ nechť $f_x : A \cup \{x\} \to Y$ je spojité rozšíření zobrazení f. Položme $g(x) = f_x(x)$. Pro $x \in A$ je $A \cup \{x\} = A$, t.j. $f_x = f$ a tedy $g(x) = f(x)$. Dostáváme tak zobrazení $g : X \to Y$, které je rozšířením f na X. Je třeba ukázat, že zobrazení g je spojité.

Buď $x_0 \in X$ libovolný bod, buď U okolí bodu $g(x_0)$. Jelikož Y je regulární, existuje okolí V bodu $g(x_0)$ tak, že $\operatorname{cl} V \subset U$ (Věta 1. odst. 6.1 str. 142). Ze spojitosti zobrazení $f_{x_0} : A \cup \{x_0\} \to Y$ vyplývá, že $f_{x_0}^{-1}(V)$ je okolí bodu x_0 v $A \cup \{x_0\}$. Existuje tedy okolí W bodu x_0 v X takové, že $(A \cup \{x_0\}) \cap W = f_{x_0}^{-1}(V)$.

Ukážeme, že $g(\operatorname{cl}(A \cap W)) \subset \operatorname{cl} V$. Nechť $x \in \operatorname{cl}(A \cap W)$. Zároveň $x \in A \cup \{x\}$, takže $x \in \operatorname{cl}(A \cap W) \cap (A \cup \{x\}) = \operatorname{cl}_{A \cup \{x\}}(A \cap W)$ (Věta 4. (a) odst. 3.1 str. 142). Bod $g(x) = f_x(x)$ tedy patří množině $f_x(\operatorname{cl}_{A \cup \{x\}}(A \cap W))$. Ovšem ze spojitosti f_x vyplývá, že $f_x(\operatorname{cl}_{A \cup \{x\}}(A \cap W)) \subset \operatorname{cl} f_x(A \cap W)$ (Věta 2. odst. 2.1 str. 18). Dále $f_x|_A = f = f_{x_0}|_A$, takže $\operatorname{cl} f_x(A \cap W) = \operatorname{cl} f_{x_0}(A \cap W) \subset \operatorname{cl} f_{x_0}((A \cup \{x_0\}) \cap W) = \operatorname{cl} f_{x_0}(f_{x_0}^{-1}(V)) = \operatorname{cl}(V \cap f_{x_0}(A \cup \{x_0\})) \subset \operatorname{cl} V$. Bod $g(x)$ tedy leží v $\operatorname{cl} V$, t.j. platí $g(\operatorname{cl}(A \cap W)) \subset \operatorname{cl} V$.

Všimněme si, že $\operatorname{cl}(A \cap W) = \operatorname{cl} W$. Skutečně, $\operatorname{cl}(A \cap W) \subset \operatorname{cl} W$ jelikož $A \cap W \subset W$. Obráceně nechť $y \in W$ je libovolný bod. Zvolme jeho okolí W_y. Pak $W_y \cap W$ je opět okolí bodu y. Množina A je hustá v X, takže $(W_y \cap W) \cap A = W_y \cap (W \cap A) \neq \emptyset$ a bod y tedy musí patřit uzávěru $\operatorname{cl}(W \cap A)$. Musí tedy platit rovnost $\operatorname{cl}(A \cap W) = \operatorname{cl} W$.

Ukážeme, že pro okolí W bodu x_0 platí $g(W) \subset U$, čímž bude dokázána spojitost zobrazení g v bodě x_0. Z již dokázaných tvrzení vyplývá, že $g(W) \subset g(\operatorname{cl} W) = g(\operatorname{cl}(A \cap W)) \subset \operatorname{cl} V \subset U$ a tím je naše tvrzení dokázáno.

6.2. Normální prostory

Hausdorffův topologický prostor X se nazývá *normální*, jestliže ke každým dvěma disjunktním uzavřeným množinám A, $B \subset X$ existuje okolí U množiny A a okolí V množiny B tak, že $U \cap V = \emptyset$.

Jelikož v Hausdorffově topologickém prostoru je jednobodová množina uzavřená (Věta 14. odst. 1.7 str. 8), normální topologický prostor je regulární.

Věta 4. *Buď X Hausdorffův topologický prostor. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *X je normální.*

(2) *Každé okolí U libovolné uzavřené množiny $A \subset X$ obsahuje okolí V množiny A takové, že $\operatorname{cl} V \subset U$.*

Důkaz. 1. Buď X normální prostor, $A \subset X$ uzavřená množina. U její okolí. Množina $B = X \backslash U$ je uzavřená a $A \cap B = \emptyset$. Existuje tedy okolí V množiny A a okolí W množiny B tak, že $V \cap W = \emptyset$. Pak $V \subset X \backslash W$, $\operatorname{cl} V \subset \operatorname{cl}(X \backslash W) = X \backslash W$, t.j. $\operatorname{cl} V \cap W = \emptyset$. Odtud $\operatorname{cl} V \cap B = \operatorname{cl} V \cap (X \backslash U) = \emptyset$, t.j. $\operatorname{cl} V \subset U$.

2. Obráceně, nechť A, B jsou dvě disjunktní uzavřené množiny v X. Položme $U = X \backslash A$. U je okolí množiny B, existuje tedy takové okolí V množiny B, že $\operatorname{cl} V \subset U$. Pak $X \backslash \operatorname{cl} V$

je otevřená množina obsahující A a platí $(X\setminus \operatorname{cl} V) \cap V = \emptyset$. X je tedy normální, neboť je podle předpokladu Hausdorffův.

Věta 5. *Uzavřený podprostor normálního prostoru je normální.*

Důkaz. Buď X normální prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor, A, $B \subset Y$ disjunktní množiny uzavřené v Y. Podle Věty 4. (c) odst. 3.1 str. 32 jsou množina A, B uzavřené v X. Vezměme disjunktní okolí U (resp. V) množiny A (resp. B). Pak $U \cap Y$, $V \cap Y$ jsou okolí A a B v Y a $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$. Y je Hausdorffův, je tedy normální.

Podprostor normálního prostoru obecně nemusí být normální (viz. cvičení ke kap. 7). Součin systému normálních prostorů nemusí být normální (cv. 4 kap. 6).

Následující dvě věty vyjasňují vztah mezi regulárními, metrickými a normálními topologickými prostory.

Věta 6. *Regulární topologický prostor druhého typu spočetnosti je normální.*

Důkaz. Buď X regulární prostor druhého typu spočetnosti, σ jeho spočetná báze, A, $B \subset X$ disjunktní uzavřené množiny. Množina $X\setminus B$ je otevřená a $A \subset X\setminus B$. Ke každému bodu $x \in A$ tedy existuje jeho okolí U_x tak, že $U_x \subset X\setminus B$, t.j. $U_x \cap B = \emptyset$. Z regularity X vyplývá, že existuje okolí V_x bodu x tak, že $\operatorname{cl} V_x \subset U$ (Věta 1. odst. 6.1 str. 142). Bez újmy na obecnosti možno předpokládat, že $V_x \in \sigma$. Pak podle předpokladu systém množin $(V_x)_{x\in A}$ je spočetný a můžeme jej uspořádat v posloupnost $(V_1, V_2, V_3, \ldots)$. Pro každé $i = 1, 2, 3, \ldots$ platí $\operatorname{cl} V_i \cap B = \emptyset$ a systém množin $(V_1, V_2, V_3, \ldots)$ pokrývá množinu A.

Analogicky sestrojíme spočetné pokrytí $(W_1, W_2, W_3, \ldots)$ množiny B takové, že $\operatorname{cl} W_i \cap A = \emptyset$ pro každé $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Položme

$$V_{(k)} = V_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{cl} W_i, \quad W_{(k)} = W_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{cl} V_i.$$

Jelikož

$$V_{(k)} = \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{cl} W_i \right) \cap V_k, \quad W_{(k)} = \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{cl} V_i \right) \cap W_k,$$

každá z množin $V_{(k)}, W_{(k)}$ je otevřená. Množina $V = \bigcup V_{(k)}$ (resp. $W = \bigcup W_{(k)}$) obsahuje A (resp. B). Zbývá tedy prověřit, že $V \cap W = \emptyset$. Předpokládejme, že existuje bod $x \in V \cap W$. Pak musí existovat indexy j, k tak, že $x \in V_{(j)} \cap W_{(k)}$. Nechť např. $j \leq k$. Pak $x \in V_j$ a zároveň

$$x \notin \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{cl} V_i,$$

t.j. $x \notin \operatorname{cl} V_j$. Dostáváme tedy spor, který ukazuje, že musí platit $V \cap W = \emptyset$.

Věta 7. *Metrický prostor je normální.*

Důkaz. Buďte A, B dvě disjunktní uzavřené množiny v metrickém prostoru X s metrikou d. Pro každé $x \in X$ klademe

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Z disjunktnosti a uzavřenosti A, B vyplývá, že $d(x,A) + d(x,B) > 0$ pro každé $x \in X$; jinak by totiž bod x ležel jak v množině A tak v množině B. Dále funkce $f : X \to \mathbf{R}$ je spojitá, jelikož funkce $x \to d(x,A)$, $x \to d(x,B)$ jsou stejnoměrně spojité (Věta 15. odst. 5.6 str. 119) a tedy také spojité. Přitom $f|_A = 0$, $f|_B = 1$. Klademe

$$U = f^{-1}\left(\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}\right)\right), \quad V = f^{-1}\left(\left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\right).$$

Pak U (resp. V) je okolí množiny B (resp. A) a platí $U \cap V = \emptyset$.

Důsledek. (a) Podprostor metrického prostoru je normální. (b) Součin spočetného systému metrických prostorů je normální.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z toho, že podprostor metrického prostoru a součin spočetného systému metrických prostorů je metrický prostor (Věta 7. odst. 5.4 str. 114, Věta 9. odst. 5.4 str. 115).

Říkáme, že spojitá reálná funkce f, definovaná na topologickém prostoru X a nabývající hodnot v intervalu $[0,1]$, *odděluje* disjunktní uzavřené množiny A, $B \subset X$, jestliže $f|_A = 0$, $f|_B = 1$.

Dokážeme nyní jeden z prvních hlubších teorémů, se kterými se čtenář setká v těchto skriptech, teorém, který se často nazývá Uryschnovo lemma. Význam Urysohnova lemmatu spočívá především v tom, že s jeho využitím se dokazují další základní výsledky, jakými jsou např. Tietzeova věta o rozšíření spojitých funkcí, věta o existenci spojitého rozkladu jednotkové funkce, kompatibilního s lokálně konečným pokrytím normálního prostoru a Urysohnova–Tichonovova věta o metrizovatelnosti regulárního prostoru druhého typu spočetnosti. Pozoruhodný je rovněž důmyslný důkaz Urysohnova lammatu.

Věta 8. (Urysohnovo lemma) *Buďte A, B disjunktní uzavřené množiny v normálním topologickém prostoru X. Existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0$ pro každé $x \in A$ a $f(x) = 1$ pro každé $x \in B$.*

Důkaz. Zvolme okolí U (resp. V) množiny A (resp. B) tak, že $U \cap V = \emptyset$. Každému racionálnímu číslu $p \in [0,1]$ přiřadíme otevřenou množinu $V_p \subset X$ tak, že jsou splněny tyto podmínky: (1) $V_0 = U$, $V_1 = X \backslash B$, (2) $\mathrm{cl}\, V_p \subset V_q$ pro každé $p < q$. Všimněme si, že pro $p = 0$, $q = 1$ je podmínka (2) splněna: zřejmě totiž $A \subset V_0 \subset X \backslash V$, t.j. $\mathrm{cl}\, V_0 \subset \mathrm{cl}(X \backslash V) = X \backslash V \subset X \backslash B = V_1$.

Uspořádejme množinu racionálních čísel z intervalu $[0,1]$ do posloupnosti $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$, přičemž $p_1 = 0$, $p_2 = 1$. To lze udělat např. postupným vyškrtáváním těch čísel z následujícího schematu, které nepatří do intervalu $[0,1]$ nebo se již nachází mezi nevyškrtnutými čísly:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \cancel{\frac{2}{1}} & \cancel{\frac{3}{1}} & \cdots \\[2ex]
\cancel{\frac{0}{2}} & \frac{1}{2} & \cancel{\frac{2}{2}} & \cancel{\frac{3}{2}} & \cdots \\[2ex]
\cancel{\frac{0}{3}} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \cancel{\frac{3}{3}} & \cdots \\[2ex]
 & \cdots & & &
\end{array}$$

Dostaneme posloupnost $(0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, \ldots)$, která zřejmě obsahuje všechna racionální čísla. Předpokládejme, že pro jisté $n > 2$ jsou již definovány množiny V_{p_1}, V_{p_2}, …, V_{p_n} tak, že je splněna podmínka (2). Označme α (resp. β) to z čísel p_1, p_2, …, p_n, které je nejblíže zleva (resp. zprava) k číslu p_{n+1}; jelikož mezi čísly p_1, p_2, …, p_n se nachází 0 a 1, α a β vždy existují. Platí $\alpha < \beta$ a tedy $\operatorname{cl} V_\alpha \subset V_\beta$. Z normálnosti X vyplývá, že existují otevřené množiny W_α, $W_\beta \subset X$ tak, že $\operatorname{cl} V_\alpha \subset W_\alpha$, $X \backslash V_\beta \subset W_\beta$ a $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$. Ovšem $W_\alpha \subset X \backslash W_\beta$, takže $\operatorname{cl} W_\alpha \subset \operatorname{cl}(X \backslash W_\beta) = X \backslash W_\beta \subset X \backslash (X \backslash V_\beta) = V_\beta$. Klademe $V_{p_{n+1}} = W_\alpha$. Množiny V_{p_1}, V_{p_2}, …, V_{p_n}, $V_{p_{n+1}}$ opět splňují podmínku (2).

Pro $x \in X$ klademe

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{p \in [0,1] \mid x \in V_p\}, & x \in X \backslash B, \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

Jelikož $A \subset V_0$, pro $x \in A$ dostáváme $f(x) = 0$ a podle definice $f(x) = 1$ pro $x \in B$. Zbývá tedy prověřit, že funkce f je spojitá. Topologie intervalu $[0, 1]$ je generovaná systémem generátorů $[0, a)$ a $(b, 1]$, kde $0 < a \leq 1$, $0 \leq b < 1$; stačí tedy ukázat, že množiny $f^{-1}([0, a))$, $f^{-1}((b, 1])$ jsou otevřené v X (Věta 2. odst. 2.1 str. 18).

Ukážeme, že $f^{-1}([0, a)) = \bigcup_{q<a} V_q$. Platí-li, že $x \in f^{-1}([0, a))$, pak $f(x) < a$ a $\inf\{p \in [0, 1] \mid x \in V_p\} < a$. Existuje tedy $q < a$ tak, že $x \in V_q$ a tedy $x \in \bigcup_{q<a} V_q$. Obráceně nechť $x \in \bigcup_{q<a} V_q$. Pak $x \in V_q$ pro jisté $q < a$ a $f(x) \leq q < a$, t.j. $x \in f^{-1}([0, a))$. Celkově tedy platí $f^{-1}([0, a)) = \bigcup_{q<a} V_q$ a tato množina je jako sjednocení otevřených množin otevřená.

Nakonec ukážeme, že $f^{-1}((b, 1]) = X \backslash (\bigcap_{q>b} \operatorname{cl} V_q)$, t.j. $f^{-1}((b, 1]) = \bigcup_{q>b}(X \backslash \operatorname{cl} V_q)$. Nechť $x \in f^{-1}((b, 1])$. Pak $b < f(x) \leq 1$. Patří-li x množině B, pak $x \in X \backslash (X \backslash B) = X \backslash V_1$. Existuje q racionální tak, že $b < q < 1$; pro takové q platí $\operatorname{cl} V_q \subset V_1$, takže $x \in X \backslash V_1 \subset X \backslash \operatorname{cl} V_q$ a tedy $x \in \bigcup_{q>b}(X \backslash \operatorname{cl} V_q)$. Nepatří-li bod x množině B, pak $x \in X \backslash B$, t.j. $f(x) = \inf\{p \in [0, 1] \mid x \in V_p\} > b$. Kdyby pro každé $q > b$ platilo, že $x \in V_q$, pak by infimum množiny $\{p \in [0, 1] \mid x \in V_p\}$ bylo rovno b; musí tedy existovat $q > b$ tak, že $x \notin V_q$. Existuje ovšem racionální číslo p tak, že $q > p > b$; jelikož $\operatorname{cl} V_p \subset V_q$, x nepatří množině $\operatorname{cl} V_p$ a tedy $x \in X \backslash \operatorname{cl} V_p$ pro jisté $p > b$. Opět tedy $x \in \bigcup_{q>b}(X \backslash \operatorname{cl} V_q)$. Celkově dostáváme $f^{-1}((b, 1]) \subset \bigcup_{q>b}(X \backslash \operatorname{cl} V_q)$. Nechť nyní $x \in \bigcup_{q>b}(X \backslash \operatorname{cl} V_q)$. Pak pro jisté $q > b$ platí $x \in X \backslash \operatorname{cl} V_q$, t.j. $x \notin \operatorname{cl} V_q$, $x \notin V_q$. Pro $q = 1$ je $x \notin V_1$, t.j. $x \in B$ a $f(x) = 1$, t.j. $x \in f^{-1}((b, 1])$. Pro $1 > q > b$ podmínka $x \notin V_q$ znamená, že $x \notin \operatorname{cl} V_p$ pro každé $p < q$, t.j. $x \notin V_p$ pro každé $p < q$. Odtud $\inf\{p \in [0, 1] \mid x \in V_p\} \geq q > b$, t.j. $f(x) > b$ a tedy $x \in f^{-1}((b, 1])$. Dostáváme inkluzi $\bigcup_{q>b}(X \backslash \operatorname{cl} V_q) \subset f^{-1}((b, 1])$. Celkově tedy $f^{-1}((b, 1]) = \bigcup_{q>b}(X \backslash \operatorname{cl} V_q) = X \backslash (\bigcap_{q>b} \operatorname{cl} V_q)$. Jelikož průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina, $f^{-1}((b, 1])$ je otevřená množina a důkaz je ukončen.

Pomocí Urysohnova lemmatu dokážeme následující tvrzení

Věta 9. (Tietzeův teorém) *Hausdorffův topologický prostor X je normální tehdy a jen tehdy, když spojitou reálnou funkci, definovanou na uzavřeném podprostoru X, lze spojitě rozšířit na X.*

Důkaz. 1. Předpokládejme nejdříve, že je dána spojitá funkce $f_0 : Y \to \mathbf{R}$, kde $Y \subset X$ je uzavřený podprostor, taková, že $|f_0(x)| < c$ pro každé $x \in Y$, kde $c > 0$ je nějaké číslo. Ukážeme, že existuje spojitá funkce $g : X \to \mathbf{R}$ taková, že jsou splněny tyto dvě podmínky: (1) $|g(x)| \leq c/3$ pro každé $x \in X$, (2) $|f_0(x) - g(x)| \leq 2c/3$ pro každé $x \in Y$.

Klademe $A = f_0^{-1}([-c,-c/3])$, $B = f_0^{-1}([c/3,c])$. Množiny A, B jsou disjunktní a uzavřené v Y, jsou tedy uzavřené v X a podle Věty 8. odst. 6.2 str. 145 existuje spojitá funkce $h : X \to [0,1]$ taková, že $h(A) = \{0\}$, $h(B) = \{1\}$. Klademe-li

$$g(x) = \tfrac{2}{3}\, c\,(h(x) - \tfrac{1}{2}),$$

dostaneme požadovanou funkci. Skutečně, $|g(x)| \le c/3$ pro každé $x \in X$. Dále pro $x \in A$ $f_0(x) \in [-c,-c/3]$, $g(x) = -c/3$, takže $|f_0(x) - g(x)| \le 2c/3$. Pro $x \in B$ $f_0(x) \in [c/3,c]$, $g(x) = c/3$, takže $|f_0(x)-g(x)| \le 2c/3$. Nakonec pro $x \in Y$, $x \notin A \cup B$, $f_0(x) \in [-c/3,c/3]$, $|g(x)| \le c/3$, takže opět $|f_0(x) - g(x)| \le 2c/3$. Funkce g má tedy vlastnosti (1), (2).

2. Buď $Y \subset X$ uzavřený podprostor, $f : Y \to J$, kde $J = [-1,1]$, spojitá funkce, $\iota_J : J \to \mathbf{R}$ kanonické vnoření.

V první části důkazu položíme $c = 1$, $f_0 = \iota_J \circ f$; existuje funkce $g_1 : X \to \mathbf{R}$ taková, že (1) $|g_1(x)| \le 1/3$ pro každé $x \in X$, (2) $|f(x) - g_1(x)| \le 2/3$ pro každé $x \in Y$.

Nyní indukcí zkonstruujeme jistou posloupnost funkcí z X do $\mathbf{R}$. Předpokládejme, že pro jisté $i \ge 1$ jsou dány funkce g_1, g_2, …, $g_i : X \to \mathbf{R}$ splňující tyto dvě podmínky:

(1) Pro každé $x \in X$ a $j = 1,2,\dots,i$

$$|g_j(x)| \le \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^{j-1}.$$

(2) Pro každé $x \in Y$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) \right| \le (\tfrac{2}{3})^i.$$

V první části důkazu klademe

$$f_0 = \iota_J \circ f - \left(\sum_{j=1}^{i} g_j \right)\Bigg|_Y, \qquad c = (\tfrac{2}{3})^i.$$

Existuje funkce $g_{i+1} : X \to \mathbf{R}$ taková, že

(1) pro každé $x \in X$

$$|g_{i+1}(x)| \le \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^i,$$

(2) pro každé $x \in Y$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{i} g_j(x) - g_{i+1}(x) \right| = \left| f(x) - \sum_{j=1}^{i+1} g_j(x) \right| \le (\tfrac{2}{3})^{i+1}.$$

Tímto postupem je definována posloupnost funkcí g_1, g_2, g_3, …, které jsou spojité a splňují podmínky (1), (2).

Pro každé $i = 1,2,3,\dots$ klademe

$$G_i(x) = \sum_{j=1}^{i} g_j(x).$$

Ukážeme, že posloupnost reálných čísel $(G_i(x))$ je pro každé $x \in X$ cauchyovská. Nechť např. $i \ge k$. Použijme vztah pro částečný součet geometrické řady

$$1 + q + q^2 + \dots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned}|G_i(x) - G_k(x)| &= \left|\sum_{j=k+1}^{i} g_j(x)\right| \leq \sum_{j=k+1}^{i} |g_j(x)| \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{i} \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^{j-1} = \tfrac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{i}(\tfrac{2}{3})^{j-1} - \sum_{j=1}^{k}(\tfrac{2}{3})^{j-1}\right) \\ &= (\tfrac{2}{3})^k - (\tfrac{2}{3})^i.\end{aligned}$$

Pro libovolná i, k dostaneme

$$|G_i(x) - G_k(x)| \leq \left|(\tfrac{2}{3})^k - (\tfrac{2}{3})^i\right|.$$

Na pravé straně vystupuje výraz $|a_k - a_i|$, kde $a_i = (2/3)^i$, t.j. (a_i) je geometrická posloupnost s kvocientem $2/3$. Jelikož (a_i) je konvergentní, posloupnost $(G_i(x))$ musí být cauchyovská.

Z úplnosti metrického prostoru $\mathbf{R}$ (Věta 13. (b) odst. 5.5 str. 118) a z toho, že interval $[-1, 1] \subset \mathbf{R}$ je uzavřená množina, vyplývá, že $[-1, 1]$ je úplný metrický prostor v indukované metrice (Věta 12. (a) odst. 5.5 str. 117). Posloupnost $(G_i(x))$ má tedy v intervalu $[-1, 1]$ limitu, kterou označíme

$$G(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x).$$

Vyšetříme vlastnosti funkce $X \ni x \to G(x) \in \mathbf{R}$.

Snadno lze ukázat, že funkce G je rozšířením funkce f na množinu X. Buď $x \in Y$ libovolný bod. Z vlastnosti (2) systému funkcí g_1, g_2, g_3, $\ldots$ vyplývá, že $|f(x) - G_i(x)| \leq (2/3)^i$ pro každé $i = 1, 2, 3, \ldots$. Z konvergence geometrické posloupnosti na pravé straně k nule tedy vyplývá konvergence levé strany k nule pro $i \to \infty$ a $f(x)$ musí být limitou posloupnosti $(G_i(x))$, t.j. $f(x) = G(x)$ pro $x \in Y$.

Zbývá ukázat, že funkce G je spojitá. Ukážeme nejdříve, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index p tak, že pro každé $i \geq p$ a každé $x \in X$ platí $|G(x) - G_i(x)| < \varepsilon$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Výše jsme ukázali, že existuje index p tak, že $|G_i(x) - G_j(x)| < \varepsilon/2$ pro každé $x \in X$ a každé i, $j \geq p$. Zvolme index k_x tak, že pro každé $k \geq k_x$ platí $|G(x) - G_k(x)| < \varepsilon/2$. Pak pro libovolné $x \in X$ a libovolný index $i \geq p$ dostáváme, s využitím libovolného indexu $k \geq p$, k_x, $|G(x) - G_i(x)| = |G(x) - G_k(x) + G_k(x) - G_i(x)| \leq |G(x) - G_k(x)| + |G_k(x) - G_i(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, což jsme chtěli ukázat.

Buď nyní $x_0 \in X$ libovolný bod, $\varepsilon > 0$. Pro každé i, j je funkce $x \to |G_i(x) - G_i(x_0)|$ spojitá v bodě x_0 jako kompozice spojitých zobrazení. Buď p index takový, že pro každé $i \geq p$ a každé $x \in X$ platí $|G(x) - G_i(x)| < \varepsilon/3$. Zvolme $i \geq p$ pevně. Existuje okolí U bodu x_0 tak, že $|G_i(x) - G_i(x_0)| < \varepsilon/3$ pro každé $x \in U$. Pro každé $x \in U$ tedy platí $|G(x) - G(x_0)| = |G(x) - G_i(x) + G_i(x) - G_i(x_0) + G_i(x_0) - G(x_0)| \leq |G(x) - G_i(x)| + |G_i(x) - G_i(x_0)| + |G_i(x_0) - G(x_0)| < \varepsilon$ a funkce G musí být spojitá v bodě x_0.

Ukázali jsme tedy, že funkce $f : Y \to [-1, 1]$ má spojité rozšíření $G : X \to [-1, 1]$.

3. Buď $f : Y \to \mathbf{R}$ spojitá funkce. Pro $t \in \mathbf{R}$ položme

$$\varphi(t) = \frac{t}{1 + |t|}.$$

φ je homeomorfismus $\mathbf{R}$ a intervalu $(-1,1)$. Podle části 2 tohoto důkazu funkce $\varphi \circ f : Y \to [-1,1]$ se dá spojitě rozšířit na funkci $G : X \to \mathbf{R}$. Množina $M = G^{-1}(\{-1,1\}) \subset X$ je uzavřená v X a má prázdný průnik s Y. Existuje tedy spojitá funkce $h : X \to [0,1]$ tak, že$h(x) = 0$ pro $x \in M$ a $h(x) = 1$ pro $x \in Y$ (Věta 8. odst. 6.2 str. 145). Funkce $H = h \cdot G$ je také spojitým rozšířením funkce $\varphi \circ f$ na X. Přitom $H(X) \subset \varphi(\mathbf{R}) = (-1,1)$. Klademe $F = \varphi^{-1} \circ H$; funkce F je spojitým rozšířením funkce f na X.

4. Předpokládejme, že pro libovolný uzavřený podprostor Y Hausdorffova topologického prostoru X a libovolnou spojitou funkci $f : Y \to \mathbf{R}$ existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbf{R}$ tak, že $F|_Y = f$. Buďte A, $B \subset X$ dvě disjunktní uzavřené množiny. Položme $f(x) = 0$ pro $x \in A$, $f(x) = 1$ pro $x \in B$; těmito vztahy je definována spojitá funkce $f : A \cup B \to \mathbf{R}$. Buď $F : X \to \mathbf{R}$ spojité rozšíření této funkce. Evidentně množina $F^{-1}((-\infty, 1/3))$ (resp. $F^{-1}((2/3, \infty)))$ je otevřená v X a je okolím množiny A (resp. B). Přitom $F^{-1}((-\infty, 1/3)) \cap F^{-1}((2/3, \infty)) = \emptyset$. Množiny A, B lze tedy oddělit otevřenými množinami a uvažovaný topologický prostor X musí být normální.

Tím je důkaz Věty 9. ukončen.

6.3. Bodově konečné a lokálně konečné systémy množin

Systém $(A_\iota)_{\iota \in I}$ podmnožin množiny X se nazývá *bodově konečný*, jestliže pro každé $x \in X$ je množina $I_x = \{\iota \in I \mid x \in A_\iota\} \subset I$ konečná. Systém $(A_\iota)_{\iota \in I}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá *lokálně konečný*, jestliže ke každému bodu $x \in X$ existuje jeho okolí U tak, že množina $K = \{\iota \in I \mid U \cap A_\iota \neq \emptyset\} \subset I$ je konečná; nazývá se *σ-lokálně konečný*, je-li spočetným sjednocením lokálně konečných systémů.

Každý lokálně konečný systém je evidentně bodově konečný. Každý podsystém lokálně konečného systému je lokálně konečný.

Dokážeme tři pomocná tvrzení o bodově konečných a lokálně konečných systémech množin.

Lemma 1. *Je-li systém $(A_\iota)_{\iota \in I}$ podmnožin topologického prostoru X lokálně konečný, pak systém $(\operatorname{cl} A_\iota)_{\iota \in I}$ je také lokálně konečný.*

Důkaz. Buď $U \subset X$ otevřená množina, $A \subset X$ libovolná množina. Platí-li $U \cap \operatorname{cl} A \neq \emptyset$, pak bod $x \in U \cap \operatorname{cl} A$ má okolí ležící v U a obsahující body A, t.j. platí $U \cap A \neq \emptyset$. Jsou-li tedy množiny U, A disjunktní, pak také U, $\operatorname{cl} A$ musí být disjunktní. Odsud již vyplývá tvrzení Lemmatu 1..

Lemma 2. *Pro libovolný lokálně konečný systém $(A_\iota)_{\iota \in I}$ podmnožin topologického prostoru X platí*

$$\operatorname{cl}\left(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota\right) = \bigcup_{\iota \in I} \operatorname{cl} A_\iota.$$

Důkaz. 1. Jelikož $A_\kappa \subset \bigcup A_\iota$ pro každé $\kappa \in I$, platí $\operatorname{cl} A_\kappa \subset \operatorname{cl}(\bigcup A_\iota)$, t.j. $\bigcup \operatorname{cl} A_\kappa \subset \operatorname{cl} \bigcup A_\iota$.

2. Nechť $x \in \operatorname{cl} \bigcup A_\iota$. Jelikož systém množin $(A_\iota)_{\iota \in I}$ je lokálně konečný, existuje okolí U bodu x tak, že množina $K = \{\kappa \in I \mid U \cap A_\kappa \neq \emptyset\}$ je konečná. Pro $\iota \notin K$ platí $U \cap A_\iota = \emptyset$,

t.j. $A_\iota \subset X \backslash U$ a tedy $\bigcup_{\iota \in I \backslash K} A_\iota \subset X \backslash U$. Odtud dostáváme, že $\mathrm{cl}(\bigcup_{\iota \in I \backslash K} A_\iota) \subset \mathrm{cl}(X \backslash U) = X \backslash U$, t.j. $x \notin \mathrm{cl}(\bigcup_{\iota \in I \backslash K} A_\iota)$. Ovšem

$$\bigcup_{\iota \in I} A_\iota = \left(\bigcup_{\iota \in I \backslash K} A_\iota \right) \cup \left(\bigcup_{\kappa \in K} A_\kappa \right),$$

$$\mathrm{cl} \left(\bigcup_{\iota \in I} A \right) = \mathrm{cl} \left(\bigcup_{\iota \in I \backslash K} A_\iota \right) \cup \mathrm{cl} \left(\bigcup_{\kappa \in K} A_\kappa \right)$$

a $x \in \mathrm{cl}(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota)$, takže x musí patřit množině $\mathrm{cl}(\bigcup_{\kappa \in K} A_\kappa)$. Ovšem množina K je konečná, takže $\mathrm{cl}(\bigcup_{\kappa \in K} A_\kappa) = \bigcup_{\kappa \in K} \mathrm{cl}\, A_\kappa \subset \bigcup_{\iota \in I} \mathrm{cl}\, A_\iota$; celkově tedy musí platit rovnost uvedená v Lemmatu 2..

Důsledek. Sjednocení lokálně konečného systému uzavřených podmnožin topologického prostoru je uzavřená podmnožina.

Důkaz. V Lemmatu 2. vezmeme $\mathrm{cl}\, A_\iota = A_\iota$ a dostaneme

$$\mathrm{cl} \left(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota \right) = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota .$$

Lemma 3. *Ke každému bodově konečnému otevřenému pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$ normálního topologického prostoru X existuje bodově konečné otevřené pokrytí $(V_\iota)_{\iota \in I}$ topologického prostoru X takové, že $\mathrm{cl}\, V_\iota \subset U_\iota$ pro každé $\iota \in I$.*

Důkaz. Buď $(U_\iota)_{\iota \in I}$ bodově konečné otevřené pokrytí normálního prostoru X a označme τ topologii X. Uvažujme množinu G zobrazení $g : I \to \tau$ splňující tyto podmínky: (1) Pro každé $\iota \in I$ je $g(\iota)$ buď U_ι nebo taková otevřená množina v U_ι, že $\mathrm{cl}\, g(\iota) \subset U_\iota$, (2) $\bigcup g(\iota) = X$. Množina G je evidentně neprázdná. Každý její prvek je bodově konečné otevřené zjemnění pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Relace "$g_1 \leq g_2$, jestliže $g_1(\iota) = g_2(\iota)$ pro každé $\iota \in I$ takové, že $g_1(\iota) \neq U_\iota$" je uspořádání na G. Ukážeme, že každá úplně uspořádaná podmnožina množiny G má maximální prvek.

Buď $G_0 \subset G$ úplně uspořádaná množina. Klademe pro každé $\iota \in I$ $g_0(\iota) = \bigcap_{g \in G_0} g(\iota)$. Platí-li pro každé $g \in G_0$ $g(\iota) = U_\iota$, pak $g_0(\iota) = U_\iota$. Nechť pro jisté $h \in G_0$ platí $h(\iota) \neq U_\iota$; pak pro každé g takové, že $h \leq g$ platí $g(\iota) = h(\iota)$ a pro každé $g \leq h$ buď $g(\iota) = U_\iota$ nebo $g(\iota) = h(\iota)$. Existuje-li tedy $h \in G_0$ tak, že $h(\iota) \neq U_\iota$, pak $g_0(\iota) = h(\iota)$. V obou případech tedy $g_0(\iota)$ je otevřená množina a funkce g_0 splňuje podmínku (1). Ukážeme, že g_0 splňuje podmínku (2) $\bigcup_{\iota \in I} g_0(\iota) = X$. Buď $x \in X$ bod. Pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$ je bodově konečné, takže množina $I_x = \{\iota \in I \mid x \in U_\iota\}$ je konečná; označme $I_x = \{\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_k\}$. Platí-li pro index ι_i $g_0(\iota_i) = U_{\iota_i}$, pak $x \in g_0(\iota_i) \subset \bigcup_{\iota \in I} g_0(\iota)$. Zbývá vyšetřit případ kdy $g_0(\iota_i) \neq U_{\iota_i}$ pro každé $i = 1, 2, \dots, k$. V tomto případě $\bigcap_{g \in G_0} g(\iota_i) \neq U_{\iota_i}$ a tedy existuje prvek $h_i \in G_0$ tak, že $h_i(\iota_i) \neq U_{\iota_i}$. Přitom G_0 je úplně uspořádaná množina, takže pro jistý prvek $h \in \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ platí $h_i \leq h$ pro každé $i = 1, 2, \dots, k$. Zobrazení h ovšem splňuje podmínku (2) $\bigcup_{\iota \in I} h(\iota) = X$ a tedy $x \in \bigcup_{\iota \in I} h(\iota)$. Jelikož $h(\iota) \subset U_\iota$, musí platit pro jistý index $i_p \in I_x$, že $x \in h(\iota_p)$. Bylo už ovšem ukázáno, že podmínka $h(\iota_p) \neq U_{\iota_p}$ má za důsledek rovnost $g_0(\iota_p) = h(\iota_p)$. Platí tedy $x \in g_0(\iota_p) \subset \bigcup_{\iota \in I} g_0(\iota)$ a je ukázáno, že funkce g_0 splňuje podmínku (2).

g_0 tedy patří množině G. Dále platí-li pro nějaké $g \in G_0$ a $\iota \in I$, že $g(\iota) \neq U_\iota$, pak $g_0(\iota) = g(\iota)$, takže $g \leq g_0$ a g_0 je maximální prvek G_0.

Podle Zornovy podmínky má tedy G maximální prvek h_0. Jelikož $h_0 \in G$, splňuje podmínky (1), (2). Klademe $V_\iota = h_0(\iota)$; $(V_\iota)_{\iota \in I}$ je bodově konečné otevřené pokrytí X. Zbývá ukázat, že $\operatorname{cl} h_0(\iota) = \operatorname{cl} V_\iota \subset U_\iota$ pro každé $\iota \in I$.

Předpokládejme, že existuje index $\iota_0 \in I$ takový, že $\operatorname{cl} h_0(\iota_0) \not\subset U_{\iota_0}$. Pak $\operatorname{cl} h_0(\iota_0) \cap (X \setminus U_{\iota_0}) \neq \emptyset$. Označme $A = X \setminus \bigcup_{\iota \in I \setminus \{\iota_0\}} h_0(\iota)$. Pak A je uzavřená množina a $A \subset h_0(\iota_0)$ jelikož $\bigcup_{\iota \in I} h_0(\iota) = X$. Podle Věty 4. odst. 6.2 str. 143 existuje okolí V množiny A tak, že $A \subset V \subset \operatorname{cl} V \subset h_0(\iota_0)$. Ovšem $\operatorname{cl} h_0(\iota_0) \not\subset U_{\iota_0}$, takže podle podmínky (1) musí být $h_0(\iota_0) = U_{\iota_0}$. Klademe $h_0'(\iota) = V$ pro $\iota = \iota_0$ a $h_0'(\iota) = h_0(\iota)$ pro $\iota \neq \iota_0$. Pak h_0' je prvek množiny G : h_0' splňuje podmínku (1) a

$$\bigcup_{\iota \in I} h_0'(\iota) = \left(\bigcup_{\iota \in I \setminus \{\iota_0\}} h_0'(\iota) \right) \cup V \supset \left(\bigcup_{\iota \in I \setminus \{\iota_0\}} h_0'(\iota) \right) \cup A$$
$$= \left(\bigcup_{\iota \in I \setminus \{\iota_0\}} h_0'(\iota) \right) \cup \left(X \setminus \bigcup_{\iota \in I \setminus \{\iota_0\}} h_0(\iota) \right) = X,$$

takže h_0' splňuje také podmínku (2). Ovšem $h_0 \leq h_0'$ a $h_0 \neq h_0'$, takže h_0 nemůže být maximální prvek G. Index $\iota_0 \in I$, pro který $\operatorname{cl} h_0(\iota_0) \not\subset U_{\iota_0}$, tedy nemůže existovat.

Tím je důkaz ukončen.

6.4. Rozklad jednotkové funkce

Nosičem funkce $f : X \to \mathbf{R}$, definované na topologickém prostoru X, nazýváme množinu $\operatorname{supp} f = \operatorname{cl}\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

Mějme systém $(f_\iota)_{\iota \in I}$ reálných funkcí na X a předpokládejme, že systém množin $(\operatorname{supp} f_\iota)_{\iota \in I}$ je lokálně konečný. Pro každé $x \in X$ označíme symbolem $\sum f_\iota(x)$ součet všech nenulových čísel $f_\iota(x)$, kde ι probíhá I; podle předpokladu o lokální konečnosti systému $(\operatorname{supp} f_\iota)_{\iota \in I}$ nejvýše konečně mnoho z těchto čísel je nenulových a tedy součet $\sum f_\iota(x)$ existuje. Funkci $x \to \sum f_\iota(x)$ nazýváme *součet* systému funkcí $(f_\iota)_{\iota \in I}$ a označujeme $\sum f_\iota$.

Je-li každá z funkcí f_ι spojitá, pak součet $\sum f_\iota$ je také funkce spojitá. Skutečně, každý bod $x \in X$ má okolí U, na kterém je součet $\sum f_\iota$ vyjádřen ve tvaru součtu konečného počtu spojitých funkcí.

Spojitým rozkladem jednotkové funkce na topologickém prostoru X rozumíme systém $(f_\iota)_{\iota \in I}$ funkcí $f_\iota : X \to \mathbf{R}$ splňující tyto podmínky:

(1) Každá z funkcí f_ι je spojitá.

(2) Každá z funkcí f_ι je nezáporná, t.j. $f_\iota(x) \geq 0$ pro každé $x \in X$.

(3) Systém nosičů $(\operatorname{supp} f_\iota)_{\iota \in I}$ je lokálně konečný.

(4) Součet systému funkcí $(f_\iota)_{\iota \in I}$ je roven jednotkové funkci, t.j. $\sum f_\iota = 1$.

Buď $(U_\iota)_{\iota \in I}$ otevřené pokrytí topologického prostoru X. Říkáme, že spojitý rozklad jednotkové funkce $(f_\iota)_{\iota \in I}$ je *kompatibilní* s pokrytím $(U_\iota)_{\iota \in I}$, jestliže pro každé $\iota \in I$ platí $\operatorname{supp} f_\iota \subset U_\iota$.

Věta 10. *Ke každému lokálně konečnému otevřenému pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$ normálního topologického prostoru X existuje spojitý rozklad jednotkové funkce na X kompatibilní s $(U_\iota)_{\iota \in I}$.*

Důkaz. Buď $(U_\iota)_{\iota\in I}$ lokálně konečné otevřené pokrytí X. Podle Lemmatu 3. odst. 6.3 str. 150 existuje otevřené pokrytí $(V_\iota)_{\iota\in I}$ topologického prostoru X takové, že $\operatorname{cl} V_\iota \subset U_\iota$ pro každé $\iota \in I$. $(V_\iota)_{\iota\in I}$ je evidentně lokálně konečné. Podle Věty 4. odst. 6.2 str. 143 ke každému $\iota \in I$ existuje otevřená množina W_ι taková, že $\operatorname{cl} V_\iota \subset W_\iota \subset \operatorname{cl} W_\iota \subset U_\iota$. Dále z Urysohnova lemmatu (Věta 8. odst. 6.2 str. 145) vyplývá, že pro každé $\iota \in I$ existuje spojité zobrazení $g_\iota : X \to [0,1]$ takové, že $g_\iota(x) = 1$ na $\operatorname{cl} V_\iota$ a $g_\iota(x) = 0$ na $X \backslash W_\iota$; pro g_ι platí $\operatorname{supp} g_\iota \subset \operatorname{cl} W_\iota \subset U_\iota$. Ovšem $(V_\iota)_{\iota\in I}$ je pokrytí X, takže pro každé $x \in X$ suma $\sum g_\iota(x)$ je definována a platí $\sum g_\iota(x) > 1$. Klademe pro každé $\iota \in I$ a každé $x \in X$

$$f_\iota(x) = \frac{g_\iota(x)}{\sum g_\kappa(x)}.$$

Každá z funkcí f_ι je evidentně spojitá a nezáporná, systém nosičů $(\operatorname{supp} f_\iota)_{\iota\in I}$ je lokálně konečný, jelikož systém $(\operatorname{supp} g_\iota)_{\iota\in I}$ je lokálně konečný, a $\sum f_\iota = 1$. $(f_\iota)_{\iota\in I}$ je tedy spojitý rozklad jednotkové funkce na X. Dále pro každé $\iota \in I$ $\operatorname{supp} f_\iota = \operatorname{supp} g_\iota \subset U_\iota$, takže $(f_\iota)_{\iota\in I}$ je kompatibilní s pokrytím $(U_\iota)_{\iota\in I}$.

Důsledek. Buď A uzavřená množina v normálním topologickém prostoru X, $(U_\iota)_{\iota\in I}$ lokálně konečné otevřené pokrytí A. Existuje systém $(f_\iota)_{\iota\in I}$ funkcí $f_\iota : X \to \mathbf{R}$ splňujících tyto podmínky:

(1) Každá z funkcí f_ι je spojitá.

(2) Každá z funkcí f_ι je nezáporná.

(3) $\operatorname{supp} f_\iota \subset U_\iota$ pro každé $\iota \in I$.

(4) Systém nosičů $(\operatorname{supp} f_\iota)_{\iota\in I}$ je lokálně konečný, $\sum f_\iota(x) = 1$ pro $x \in A$ a $\sum f_\iota(x) \leq 1$ pro $x \in X$.

Důkaz. Systém množin U_ι, $X\backslash A$ je lokálně konečné otevřené pokrytí X. Existuje tedy spojitý rozklad jednotkové funkce na X kompatibilní s tímto pokrytím; tento spojitý rozklad jednotkové funkce je tvořen funkcemi f_ι, pro které $\operatorname{supp} f_\iota \subset U_\iota$, a funkcí g, pro kterou $\operatorname{supp} g \subset X\backslash A$. Systém funkcí $(f_\iota)_{\iota\in I}$ má požadované vlastnosti (1) – (4).

6.5. Metrizovatelné normální prostory

Buď X množina, τ topologie na X, d metrika na X. Řekneme, že metrika d je *kompatibilní* s topologií τ, jestliže metrická topologie asociovaná s d splývá s τ. Topologický prostor s topologií τ se nazývá *metrizovatelný*, jestliže na něm existuje metrika, kompatibilní s τ; v tomto případě také říkáme, že topologie τ je *metrizovatelná*.

Je-li topologie τ metrizovatelná, pak existuje nekonečně mnoho (navzájem ekvivalentních) metrik kompatibilních s τ.

Jsou-li dva topologické prostory homeomorfní, pak buď oba jsou nebo oba nejsou metrizovatelné (př. (2) odst. 5.10 str. 126); metrizovatelnost topologického prostoru je tedy topologický invariant.

Bylo již ukázáno, že metrický prostor je normální (Věta 7. odst. 6.2 str. 144). Bylo také ukázáno, že metrický prostor je prvního typu spočetnosti (Věta 4. (a) odst. 5.2 str. 113). Metrizovatelné topologické prostory je tedy třeba hledat mezi normálními prostory prvního typu spočetnosti.

Každý regulární prostor druhého typu spočetnosti je normální (Věta 6. odst. 6.2 str. 144) a je také prvního typu spočetnosti; ukážeme, že je metrizovatelný. K tomu nejdříve dokážeme dvě pomocná tvrzení.

Lemma 4. *Buď X regulární topologický prostor. Předpokládejme, že X má σ-lokálně konečnou bázi topologie. Pak X je normální a každá uzavřená množina v X je průnikem spočetného systému otevřených množin.*

Důkaz. 1. Buď $W \subset X$ otevřená množina, ν σ-lokálně konečná báze X. Napišme $\nu = \bigcup \nu_i$ (sjednocení pro $i = 1, 2, 3, \ldots$), kde ν_i je lokálně konečný systém množin v X. Označme

$$\nu_i(W) = \{U \in \nu_i \mid \operatorname{cl} U \subset W\}, \quad U_i = \bigcup_{U \in \nu_i(W)} U.$$

Pak

$$\operatorname{cl} U_i = \bigcup_{U \in \nu_i(W)} \operatorname{cl} U,$$

jelikož systém $\nu_i(W)$ je lokálně konečný (Lemma 2. odst. 6.3 str. 149), t.j. $\bigcup U_i \subset \operatorname{cl} U_i \subset W$.

Na druhé straně platí $W \subset \bigcup U_i$. Skutečně, zvolme bod $x \in W$. Existuje okolí V bodu x tak, že $\operatorname{cl} V \subset W$ (Věta 1. odst. 6.1 str. 142); možno vzít V z báze ν. Pak $V \in \nu_j$ pro jisté j; pak ovšem $V \in \nu_j(W)$, takže $x \in U_j \subset \bigcup U_i$.

Platí tedy $W = \bigcup U_i = \bigcup \operatorname{cl} U_i$ pro jisté otevřené množiny $U_i \subset X$.

2. Buď $A \subset X$ uzavřená množina. Klademe $W = X \backslash A$ a napíšeme W ve tvaru $W = \bigcup \operatorname{cl} U_i$ pro jisté otevřené množiny $U_i \subset X$. Pak $A = X \backslash W = X \backslash (\bigcup \operatorname{cl} U_i) = \bigcap (X \setminus \operatorname{cl} U_i)$. Každá uzavřená množina v X je tedy průnikem spočetného systému otevřených množin.

3. Ukážeme, že X je normální. Buďte A, B disjunktní uzavřené množiny v X. Z první části důkazu vyplývá, že

$$X \backslash A = \bigcup U_i = \bigcup \operatorname{cl} U_i, \quad X \backslash B = \bigcup V_i = \bigcup \operatorname{cl} V_i$$

pro jisté otevřené množiny U_i a V_i. Klademe

$$U_i' = U_i \backslash \bigcup_{j=1}^{i} \operatorname{cl} V_j, \quad V_i' = V_i \backslash \bigcup_{j=1}^{i} \operatorname{cl} U_j.$$

Dále klademe

$$U' = \bigcup U_i', \quad V' = \bigcup V_i'.$$

U', V' jsou zřejmě otevřené množiny. Přitom U' je okolí množiny B. Nechť např. $x \in B$. Pak z disjunktnosti A, B vyplývá, že

$x \in X \backslash A = \bigcup U_i$, takže existuje k tak, že $x \in U_k$. Na druhé straně $x \notin \bigcup \operatorname{cl} V_i$, takže

$$x \notin \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{cl} V_j$$

a tedy

$$x \in U_k \backslash \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{cl} V_j = U_k',$$

t.j. $x \in \bigcup U_i' = U$. Platí tedy $B \subset U'$. Analogicky se ukáže, že $A \subset V'$.

Zbývá dokázat, že $U' \cap V' = \emptyset$. Předpokládejme, že průnik $U' \cap V'$ obsahuje bod x. Pak $x \in U'_i \cap V'_j$ pro jisté i, j. Nechť např. $i \leq j$. Pak

$$x \in U_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i} \operatorname{cl} V_k,$$

takže $x \in V_j$, což je spor. Množina $U' \cap V'$ je tedy prázdná a důkaz je ukončen.

Lemma 5. *Buď X regulární topologický prostor druhého typu spočetnosti.*

(a) *Každá otevřená množina v X je sjednocením spočetně mnoha uzavřených množin.*

(b) *Pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) > 0$ pro $x \in U$ a $f(x) = 0$ pro $x \in X \setminus U$.*

(c) *Existuje spočetný systém spojitých funkcí $f_i : X \to [0,1]$ takových, že ke každému $x_0 \in X$ a ke každému okolí U bodu x_0 existuje index k, pro který $f_k(x_0) > 0$ a $f_k(x) = 0$ pro $x \in X \setminus U$.*

Důkaz. (a) Podle Lemmatu 4. odst. 6.5 str. 153 každá uzavřená množina v X je průnikem spočetného systému otevřených množin. Buď $W \subset X$ otevřená množina. Pak $X \setminus W = \bigcap U_i$ (průnik pro $i = 1, 2, 3, \ldots$), kde U_i jsou otevřené množiny, a tedy $W = X \setminus (\bigcap U_i) = \bigcup (X \setminus U_i)$.

(b) Buď $U \subset X$ otevřená množina, $U = \bigcup A_i$, kde A_i jsou uzavřené množiny. Z normálnosti X vyplývá, že ke každému i existuje spojitá funkce $f_i : X \to [0,1]$ taková, že $f_i(x) = 1$ pro $x \in A_i$ a $f_i(x) = 0$ pro $x \in X \setminus U$ (Věta
6. odst. 6.2 str. 144, Věta 8. odst. 6.2 str. 145).

Buď $x \in X$ bod. Evidentně $0 \leq f_i(x)/2^i \leq 1/2^i$ pro každé i. Jelikož geometrická řada $\sum 1/2^i$ konverguje, podle srovnávacího kriteria pro řady s nezápornými členy konverguje také řada $\sum f_i(x)/2^i$. Klademe

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i(x).$$

Jelikož

$$0 \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} f_i(x) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^k} < 1,$$

pro limitu částečných součtů pro $k \to \infty$ musí platit $f(x) \in [0,1]$.

Ukážeme, že systém funkcí $(f_i/2^i)_{i \in \mathbf{N}}$ konverguje k funkci f stejnoměrně na X. Buď $\varepsilon > 0$. Vybereme index n tak, aby platilo

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Pak pro $i > j \geq n$ a pro libovolné $x \in X$

$$\left| \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{2^k} f_k(x) - \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} f_k(x) \right| = \frac{1}{2^{j+1}} f_{j+1}(x) + \ldots + \frac{1}{2^i} f_i(x)$$

$$\leq \frac{1}{2^{j+1}} + \ldots + \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pro $f(x)$ pak musí platit

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} f_k(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Bod x však byl volen libovolně, takže tato nerovnost dokazuje, že posloupnost funkcí

$$\left(\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{2^k} f_k \right)_{i \in \mathbf{N}}$$

konverguje k funkci f stejnoměrně. Spojitost funkce f nyní vyplývá z Věty 23. odst. 5.9 str. 124.

(c) Buď $\sigma = (U_i)_{i \in \mathbf{N}}$ spočetná báze X. Ke každému i zvolme spojitou funkci $f_i : X \to [0,1]$ takovou, že $f(x) > 0$ pro $x \in U_i$ a $f(x) = 0$ pro $x \in X \backslash U_i$; taková funkce existuje podle již dokázané částí (b) tohoto lemmatu. Prověříme, že systém $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ má požadované vlastnosti. Buď $x_0 \in X$ bod, U jeho okolí. Zvolme k tak, že $x_0 \in U_k \subset U$. Pak $f_k(x_0) > 0$ a $f_k(x) = 0$ jpro $x \in X \backslash U_k$. Ovšem $U_k \subset U$, takže $X \backslash U \subset X \backslash U_k$ a $f_k(x) = 0$ pro $x \in X \setminus U$.

Následující věta o vnoření má také samostatný význam. Připomeňme si, že zobrazení topologických prostorů $f : X \to Y$ se nazývá *vnoření*, je-li zobrazení $g : X \to f(X)$, vznikající zúžením oboru hodnot zobrazení f, homeomorfismus na topologický podprostor topologického prostoru Y.

Lemma 6. *Buď X Hausdorffův topologický prostor. Předpokládejme, že je dán systém $(f_\iota)_{\iota \in I}$ spojitých funkcí $f_\iota : X \to \mathbf{R}$ takových, že ke každému bodu $x_0 \in X$ a každému okolí U bodu x_0 existuje index $\iota \in I$ tak, že $f_\iota(x_0) > 0$ a $f_\iota(x) = 0$ pro $x \in X \backslash U$. Pak zobrazení $F : X \to \mathbf{R}^I$, definované vztahem $F(x) = (f_\iota(x))_{\iota \in I}$, je vnoření X do $\mathbf{R}^I$.*

Důkaz. Zobrazení F je spojité, jelikož každá jeho složka je podle předpokladu spojitá (Věta 10. (b) odst. 3.3 str. 36). F je injektivní; skutečně, pro libovolná x, $y \in X$, $x \neq y$, existuje index $\iota \in I$ tak, že $f_\iota(x) > 0$ a $f_\iota(y) = 0$; musí tedy platit $F(x) \neq F(y)$. F je tedy spojitá bijekce X na $F(X)$ (Věta 3. (b) odst. 3.1 str. 32). Stačí tedy dokázat, že zobrazení $F : X \to F(X)$ je otevřené (Věta 4. odst. 2.1 str. 19).

Buď $U \subset X$ otevřená množina, $y_0 \in F(U)$ bod. Najdeme okolí W bodu y_0 takové, že $W \subset F(U)$. Buď $x_0 \in U$ bod, pro který $F(x_0) = y_0$. Zvolme index κ takový, že $f_\kappa(x_0) > 0$ a $f_\kappa(x) = 0$ pro $x \in X \backslash U$. Označme $V = \mathrm{pr}_\kappa^{-1}((0,\infty))$, kde $\mathrm{pr}_\kappa : \mathbf{R}^I \to \mathbf{R}$ je kanonická projekce. Jelikož $V \subset \mathbf{R}^I$ je otevřená množina, $W = V \cap F(X)$ je otevřená množina v podprostoru $F(X) \subset \mathbf{R}^I$. Jelikož

$\mathrm{pr}_\kappa(y_0) = \mathrm{pr}_\kappa(F(x_0)) = f_\kappa(x_0) > 0$, t.j. $f_\kappa(x_0) \in (0,\infty)$, musí bod y_0 patřit množině V a tedy $y_0 \in V \cap F(X) = W$. Buď dále $y \in W$ libovolný bod. Existuje bod $x \in X$ tak, že $y = F(x)$, a pro tento bod platí $\mathrm{pr}_\kappa(y) \in (0,\infty)$, jelikož $y \in V$. Ovšem $\mathrm{pr}_\kappa(y) = \mathrm{pr}_\kappa(F(x)) = f_\kappa(x) > 0$, takže $x \in U$, t.j. $y = F(x) \in F(U)$ a tedy $W \subset F(U)$.

Věta 11. (Urysohnův–Tichonovův teorém) *Regulární topologický prostor druhého typu spočetnosti je metrizovatelný.*

Důkaz. Buď X regulární topologický prostor druhého typu spočetnosti. Podle Lemmatu 5. odst. 6.5 str. 154 existuje systém spojitých funkcí $f_i : X \to [0,1]$ takových, že ke každému $x_0 \in X$ a ke každému okolí U bodu x_0 existuje index k, pro který $f_k(x_0) > 0$ a $f(x) = 0$ pro $x \in X \backslash U$. Klademe $F(x) = (f_i(x))_{i \in \mathbf{N}}$. Pak F je vnoření X do součinu

$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (Lemma 6. odst. 6.5 str. 155). Topologie součinu na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ je však metrická (Věta 8. odst. 5.4 str. 114, Věta 9. odst. 5.4 str. 115) a tedy topologie podprostoru $F(X) \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ je metrizovatelná (Věta 7. odst. 5.4 str. 114). Topologie topologického prostoru X tedy musí být také metrizovatelná (př. (2) odst. 5.10 str. 126).

Důsledek. Topologický prostor druhého typu spočetnosti je metrizovatelný tehdy a jen tehdy, když je normální.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z Věty 7. odst. 6.2 str. 144 a z Věty 11. odst. 6.5 str. 155.

Dokážeme nyní kriterium metrizovatelnosti topologického prostoru.

Věta 12. (Nagatův–Smirnovův teorém) *Buď X topologický prostor. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
(1) *X je regulární a má σ-lokálně konečnou bázi.*
(2) *X je metrizovatelný.*

Důkaz. 1. Předpokládejme, že je splněna podmínka (1). Nechť $\nu = \bigcup \nu_i$ je σ-lokálně konečná báze X. Ke každému i a $U \in \nu_i$ zvolme spojitou funkci $f_{i,U} : X \to [0, 1/i]$ tak, že $f_{i,U}(x) > 0$ pro $x \in U$ a $f_{i,U}(x) = 0$ pro $x \in X \backslash U$ (Lemma 4. odst. 6.5 str. 153, Věta 8. odst. 6.2 str. 145). K libovolnému bodu x_0 a jeho okolí V existuje prvek $U \in \nu$ tak, že $x_0 \in U \subset V$. Pak $U \in \nu_i$ pro jisté i, takže $f_{i,U}(x_0) > 0$ a $f_{i,U}(x) = 0$ pro $x \in X \backslash V$.

Nechť I obsahuje množinu všech dvojic $\iota = (i, U) \in \mathbf{N} \times \nu$ takových, že $U \in \nu_i$. Pak $f_{i,U} = f_\iota$. Pro každé $x \in X$ klademe $F(x) = (f_\iota(x))_{\iota \in I}$. $F(x)$ je prvek součinu množin $[0, 1]^I$; dostáváme tedy zobrazení $F : X \to [0, 1]^I$. Chceme ukázat, že na množině $[0, 1]^I$ existuje metrika taková, že F je vnoření v metrické topologii, asociované s touto metrikou.

Uvažujme uniformní metriku θ na $\mathbf{R}^I$ (př. (6) odst. 6.10 str. 164). Tato metrika indukuje na $[0, 1]^I$ metriku, definovanou vztahem

$$\theta(x, y) = \sup\{|x_\iota - y_\iota| \,|\, \iota \in I\}.$$

Příslušná metrická topologie na $[0, 1]^I$ je silnější než topologie součinu (př. (6) odst. 6.10 str. 164) a zobrazení $F : X \to F(X) \subset [0, 1]^I$ je homeomorfismus v topologii, indukované na $F(X)$ topologií součinu (Lemma 6. odst. 6.5 str. 155). F je tedy bijekce a zobrazení F^{-1} je spojité také v metrické topologii na $F(X)$ asociované s θ. Ukážeme-li tedy, že F je spojité vzhledem k metrické topologii na $F(X)$ asociované s θ, bude dokázáno, že F je homeomorfismus a tedy vnoření v této topologii, t.j. X bude metrizovatelný.

Buď $x_0 \in X$ bod, buď $\varepsilon > 0$. Najdeme okolí W bodu x_0 tak, že $F(W) \subset B_\theta(F(x_0), \varepsilon) \cap F(X)$. Ke každému $i \in \mathbf{N}$ zvolme okolí U_i bodu x_0 protínající nejvýše konečně mnoho množin ze systému ν_i. Pak nejvýše konečně mnoho funkcí $f_{i,U}$, kde U probíhá ν_i, je na U_i různých od nulové funkce. Každá z funkcí $f_{i,U}$ je ovšem spojitá; můžeme tedy vybrat okolí V_i bodu x_0 ležící v množině U_i tak, že

$$|f_{i,U}(x) - f_{i,U}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro každou funkci $f_{i,U}$ různou od nulové funkce na U_i a pro každé $x \in V_i$.

Zvolme index m tak, aby platilo $1/m \le \varepsilon/2$ a položme $W = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_m$. Buď $x \in W$ libovolný bod. Platí-li pro index i nerovnost $i \le m$, pak

$$|f_{i,U}(x) - f_{i,U}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro každé $U \in \nu_i$; není-li totiž funkce $f_{i,U}$ nulová na W, pak je nenulová na V_i a výše uvedená nerovnost musí být splněna. Pro $i > m$, $U \in \nu_i$ platí

$$|f_{i,U}(x) - f_{i,U}(x_0)| \leq \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2},$$

jelikož $f_{i,U}$ zobrazuje X do $[0, 1/i]$. Skutečně, nechť $f_{i,U}(x) \geq f_{i,U}(x_0)$. Pak

$$\begin{aligned}|f_{i,U}(x) - f_{i,U}(x_0)| &= f_{i,U}(x) - f_{i,U}(x_0) \\ &\leq f_{i,U}(x) \in [0, 1/i],\end{aligned}$$

t.j. $|f_{i,U}(x) - f_{i,U}(x_0)| \leq 1/i < 1/m < \varepsilon/2$. Celkově tedy pro libovolný bod $x \in W$ $\theta(F(x_0), F(x)) = \sup\{|f_\iota(x) - f_\iota(x_0)| \mid \iota \in I\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, t.j. $F(W) \subset B_\theta(F(x_0), \varepsilon) \cap F(X)$, což jsme chtěli dokázat.

2. Předpokládejme, že X je metrizovatelný. Pak podle Lemmatu 8. odst. 6.6 str. 158 každé otevřené pokrytí X má σ-lokálně konečné zjemnění. Zvolme metriku na X kompatibilní s topologií X. Buď ν_i otevřené pokrytí X tvořené všemi otevřenými koulemi poloměru $1/i$. Buď κ_i σ-lokálně konečné zjemnění ν_i; každý prvek $U \in \kappa_i$ má průměr menší nebo roven $2/i$. Položme $\kappa = \bigcup \kappa_i$. Pro každé i je κ_i spočetné sjednocení lokálně konečných systémů otevřených množin, totéž tedy platí pro systém κ. Zbývá tedy ukázat, že κ je báze topologie topologického prostoru X.

Buď $x \in X$ libovolný bod, $r > 0$. Zvolme m tak, že $1/m < r/2$. Existuje $V \in \kappa_m$ obsahující x; pro průměr $\delta(V)$ množiny V platí $\delta(V) \leq 2/m < r$ a tedy $V \subset B(x, r)$. κ je tedy báze topologie X.

6.6. Parakompaktní prostory

Buďte $(A_\iota)_{\iota \in I}$, $(B_\kappa)_{\kappa \in K}$ dvě pokrytí množiny X. Říkáme, že pokrytí $(B_\kappa)_{\kappa \in K}$ je *zjemnění* pokrytí $(A_\iota)_{\iota \in I}$, jestliže ke každému $\kappa \in K$ existuje $\iota \in I$ tak, že $B_\kappa \subset A_\iota$.

Hausdorffův topologický prostor se nazývá *parakompaktní*, jestliže ke každému jeho otevřenému pokrytí $(A_\iota)_{\iota \in I}$ existuje lokálně konečné otevřené zjemnění $(B_\kappa)_{\kappa \in K}$ pokrytí $(A_\iota)_{\iota \in I}$.

Věta 13. *Uzavřený podprostor parakompaktního topologického prostoru je parakompaktní.*

Důkaz. Buď X parakompaktní prostor, $Y \subset X$ jeho uzavřený podprostor. Topologický prostor Y je Hausdorffův. Buď $(U_\iota)_{\iota \in I}$ otevřené pokrytí Y. Pro každé $\iota \in I$ je U_ι tvaru $U_\iota = V_\iota \cap Y$, kde V_ι je otevřená množina v X. Uvažujme otevřené pokrytí X tvořené množinami V_ι a množinou $X \backslash Y$. Podle předpokladu toto otevřené pokrytí má lokálně konečné otevřené zjemnění $(W_\kappa)_{\kappa \in K}$. Ovšem systém $(W_\kappa \cap Y)_{\kappa \in K}$ je lokálně konečné otevřené pokrytí topologického prostoru Y, které je zjemněním pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Ukážeme, že parakompaktní topologický prostor je normální. K tomu nejdříve dokážeme pomocné tvrzení.

Lemma 7. *Buďte A, B disjunktní uzavřené množiny v parakompaktním topologickém prostoru X. Předpokládejme, že ke každému $x \in A$ existuje okolí U_x bodu x a okolí V_x množiny B tak, že $U_x \cap V_x = \emptyset$. Pak existuje okolí U množiny A a okolí V množiny B tak, že $U \cap V = \emptyset$.*

Důkaz. Pokryjme X množinami $X\backslash A$, U_x, kde x probíhá A. Podle předpokladu existuje lokálně konečné otevřené zjemnění $(W_\iota)_{\iota\in I}$ tohoto pokrytí. Položme $K = \{\kappa \in I \mid W_\kappa \cap A \neq 0\}$. Pro každé $\kappa \in K$ platí $W_\kappa \cap A \neq \emptyset$ a tedy existuje bod $x \in A$ tak, že $W_\kappa \subset U_x \subset X\backslash V_x$, $\operatorname{cl} W_\kappa \subset \operatorname{cl}(X\backslash V_x) = X\backslash V_x \subset X\backslash B$; platí tedy pro každé $\kappa \in K$ $\operatorname{cl} W_\kappa \cap B = \emptyset$. Klademe

$$U = \bigcup_{\kappa\in K} W_\kappa, \quad V = X\backslash \bigcup_{\kappa\in K} \operatorname{cl} W_\kappa.$$

U je evidentně okolí A a z toho, že systém množin $(W_\kappa)_{\kappa\in K}$ je lokálně konečný, vyplývá, že $\bigcup \operatorname{cl} W_\kappa = \operatorname{cl}(\bigcup W_\kappa)$ (Lemma 2. odst. 6.3 str. 149), t.j. množina V je otevřená. Jelikož $U \cap V = \emptyset$, zbývá dokázat, že V je okolí množiny B.

Ukázali jsme, že pro každé $\kappa \in K$ platí $\operatorname{cl} W_\kappa \cap B = \emptyset$. Pak tedy $\operatorname{cl} W_\kappa \subset X\backslash B$, $\bigcup \operatorname{cl} W_\kappa \subset X\backslash B$ a tedy $X\backslash \bigcup \operatorname{cl} W_\kappa \supset X\backslash(X\backslash B) = B$. Tím je důkaz ukončen.

Věta 14. *Parakompaktní topologický prostor je normální.*

Důkaz. 1. Ukážeme nejdříve, že parakompaktní prostor je regulární. Buď $x_0 \in X$ bod, $A \subset X$ uzavřená množina neobsahující x_0. Ke každému bodu $x \in A$ zvolme okolí U_x bodu x tak, že $x_0 \notin \operatorname{cl} U_x$. Z podmínky oddělitelnosti vyplývá, že U_x existuje: zvolme okolí V bodu x_0 a okolí U_x bodu x tak, že $V \cap U_x = \emptyset$; pak $U_x \subset X\backslash V$, t.j. $\operatorname{cl} U_x \subset \operatorname{cl}(X\backslash V) = X\backslash V$, takže $x_0 \notin \operatorname{cl} U_x$. Uvažujme otevřené pokrytí topologického prostoru X množinami U_x, $X\backslash A$, kde x probíhá A. Podle předpokladu existuje lokálně konečné otevřené zjemnění $(W_\iota)_{\iota\in I}$ tohoto pokrytí. Označme $K = \{\kappa \in I \mid W_\kappa \cap A \neq \emptyset\}$. Pak $(W_\kappa)_{\kappa\in K}$ je lokálně konečné otevřené pokrytí množiny A. Dále $\operatorname{cl} W_\kappa$ nemůže obsahovat x_0: jelikož $W_\kappa \cap A \neq \emptyset$, W_κ leží v některé z množin U_x a tedy $\operatorname{cl} W_\kappa$ leží v některé z množin $\operatorname{cl} U_x$, neobsahujících x_0. Klademe $V = \bigcup W_\kappa$, kde κ probíhá K. V je evidentně okolí množiny A. Ovšem $(W_\kappa)_{\kappa\in K}$ je lokálně konečný systém množin, takže $\operatorname{cl} V = \bigcup \operatorname{cl} W_\kappa$ (Lemma 2. odst. 6.3 str. 149) a $x_0 \notin \operatorname{cl} V$. Dále klademe $U = X\backslash \operatorname{cl} V$ a dostaneme okolí U bodu x_0 a okolí V množiny A, pro které $U \cap V = \emptyset$. X je tedy regulární topologický prostor.

2. Využijeme-li již dokázanou vlastnost regularity parakompaktního prostoru, pak tvrzení Věty 14. ihned vyplyne z Lemmatu 7. odst. 6.6 str. 157.

Přejdeme k důkazu parakompaktnosti metrizovatelného topologického prostoru. Důkaz je veden ve čtyřech krocích, které formulujeme jako samostatná pomocná tvrzení.

Lemma 8. *Buď $(U_\iota)_{\iota\in I}$ otevřené pokrytí metrizovatelného topologického prostoru X. Existuje posloupnost $(\nu_i)_{i\in\mathbf{N}}$ lokálně konečných systémů otevřených množin v X taková, že $\nu = \bigcup \nu_i$ je zjemnění pokrytí $(U_\iota)_{\iota\in I}$.*

Důkaz. Buď d metrika, kompatibilní s topologií topologického prostoru X. Pro každé $i \in \mathbf{N}$ a každé $\iota \in I$ označme $F_{i,\iota} = \{x \in U_\iota \mid d(x, X\backslash U_\iota) \geq 1/2^i\}$. Množina U_ι je otevřená, takže ke každému bodu $x \in U_\iota$ existuje index j tak, že $B(x, 1/2^j) \subset U$, t.j. $d(x, X\backslash U_\iota) \geq 1/2^j$ a $x \in F_{j,\iota}$, t.j. $x \in \bigcup_i F_{i,\iota}$; platí tedy $U_\iota = \bigcup_i F_{i,\iota}$.

Zvolme na I dobré uspořádání $\leq$ a označme

$$G_{i,\iota} = \{x \in F_{i,\iota} \mid x \notin F_{i+1,\kappa}, \kappa < \iota\},$$
$$V_{i,\iota} = \left\{y \in X \mid d(y, G_{i,\iota}) < \frac{1}{2^{i+3}}\right\}.$$

Evidentně $G_{i,\iota} \subset V_{i,\iota}$. Položme $\nu_i = (V_{i,\iota})_{\iota\in I}$. Chceme ukázat, že posloupnost $(\nu_i)_{i\in\mathbf{N}}$ splňuje podmínky Lemmatu 8.

S každým bodem množiny $V_{i,\iota}$ leží v této množině jistá otevřená koule se středem v tomto bodě. Systém ν_i je tedy tvořen otevřenými množinami.

Nechť $x \in X$ je libovolný bod, nechť α je nejmenší z indexů $\iota \in I$, pro které $x \in U_\iota$. Jelikož $U_\alpha = \bigcup_j F_{j,\alpha}$, pro jistý index i platí $x \in F_{i,\alpha}$. Ovšem $x \notin U_\kappa$ pro $\kappa < \alpha$, t.j. $x \notin F_{j,\kappa}$ pro žádné $j \in \mathbf{N}$ a $\kappa < \alpha$. Podle definice $G_{i,\alpha}$ tedy $x \in G_{i,\alpha} \subset V_{i,\alpha}$. Systém $\nu = (\nu_i)_{i \in \mathbf{N}}$ tedy pokrývá X.

Ukážeme, že $V_{i,\iota} \subset U_\iota$. Buď $y \in V_{i,\iota}$ libovolný bod. Existuje $x \in G_{i,\iota}$ tak, že $d(y,x) \leq 1/2^{i+3}$, t.j. $d(y,x) < 1/2^{i+1}$. Ovšem $G_{i,\iota} \subset F_{i,\iota}$, takže $x \in F_{i,\iota}$ a tedy

$$d(y, X \backslash U_\iota) \geq d(x, X \backslash U_\iota) - d(x,y) \geq \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^{i+1}},$$

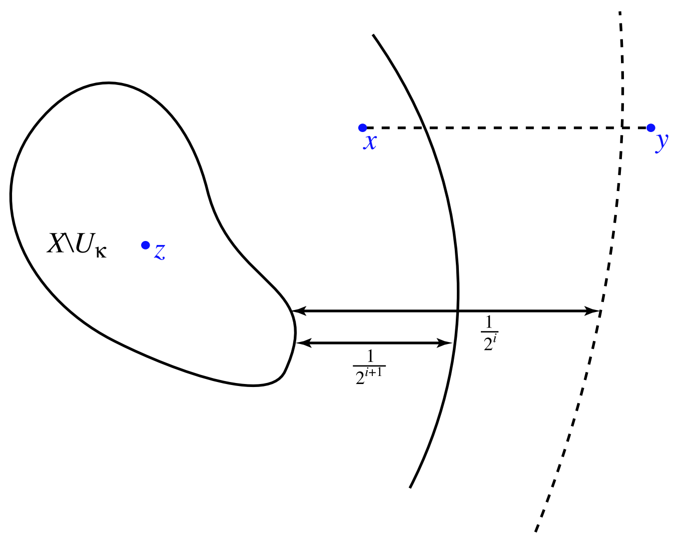
t.j. $y \in F_{i+1,\iota} \subset \bigcup_j F_{j,\iota} = U_\iota$. Platí tedy $V_{i,\iota} \subset U_\iota$, což znamená, že systém $\nu = (\nu_i)$ je zjemnění pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Zbývá tedy dokázat, že pro každé $i = 1, 2, 3, \ldots$ je systém ν_i lokálně konečný. Nechť ι, $\kappa \in I$ jsou dva různé indexy a předpokládejme, že $\kappa < \iota$. Zvolme $x \in G_{i,\iota}$, $y \in F_{i,\kappa}$. Z definice vyplývá, že $x \notin F_{i+1,\kappa}$. Odtud

$$d(x, X \backslash U_\kappa) < \frac{1}{2^{i+1}}, \quad d(y, X \backslash U_\kappa) \geq \frac{1}{2^i}$$

(porov. obr. 1).

Obr. 1



Pro libovolné $z \in X \backslash U_\kappa$ platí $d(y,z) \leq d(z,x) + d(x,y)$, odkud dostaneme, že $d(x,y) \geq (1/2^i) - (1/2^{i+1}) = 1/2^{i+1}$. Ovšem $G_{i,\kappa} \subset F_{i,\kappa}$, takže $d(G_{i,\iota}, G_{i,\kappa}) \geq 1/2^{i+1}$. Z definice množin $V_{i,\iota}$ nyní přímo vyplývá pro libovolné $x_\iota \in V_{i,\iota}$, $x_\kappa \in V_{i,\kappa}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{i+1}} &\leq d(G_{i,\iota}, G_{i,\kappa}) \leq d(G_{i,\iota}, x_\iota) + d(x_\iota, x_\kappa) \\ &\quad + d(x_\kappa, G_{i,\kappa}) < \frac{1}{2^{i+3}} + d(x_\iota, x_\kappa) + \frac{1}{2^{i+3}}, \end{aligned}$$

t.j. $d(x_\iota, x_\kappa) > 1/2^{i+2}$. Odtud dostáváme

$$d(V_{i,\iota}, V_{i,\kappa}) \geq \frac{1}{2^{i+2}}.$$

Buď $x \in X$ libovolný bod. Z výše uvedené nerovnosti vyplývá, že otevřená koule $B(x, 1/2^{i+3})$ se nemůže protínat s více než s jedním prvkem systému ν_i.

Tím je důkaz Lemmatu 8. ukončen.

Důsledek. Metrizovatelný topologický prostor má σ-lokálně konečnou bázi topologie.

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledkem definice σ-lokálně konečného systému a Lemmatu 8. odst. 6.6 str. 158, kde za $(U_\iota)_{\iota \in I}$ bereme bázi topologie.

Lemma 9. *Každé σ-lokálně konečné otevřené pokrytí libovolného topologického prostoru má lokálně konečné (ne nutně otevřené) zjemnění.*

Důkaz. Buď $(\nu_i)_{i \in \mathbf{N}}$ posloupnost lokálně konečných systémů otevřených podmnožin topologického prostoru X taková, že $\nu = \bigcup \nu_i$ je pokrytí X. Označme U_i sjednocení množin systému ν_i. Položme

$$V_i = \bigcup_{k=1}^{i} U_k, \quad V_0 = \emptyset, \quad A_i = V_i \backslash V_{i-1}.$$

Ukážeme, že množiny $W \cap A_i$, kde W probíhá ν_i a $i = 1, 2, 3, \ldots$, tvoří lokálně konečné zjemnění pokrytí ν.

Množiny A_1, A_2, A_3, ... pokrývají X. Skutečně, $A_1 = V_1$, $A_2 = V_2 \backslash V_1$ a $V_1 \subset V_2$, t.j. $A_1 \cup A_2 = V_2$; dále

$$\bigcup_{k=1}^{i} A_k = A_i \cup \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right)$$

a předpokládáme-li

$$\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k = V_{i-1},$$

dostaneme

$$\bigcup_{k=1}^{i} A_k = (V_i \backslash V_{i-1}) \cup V_{i-1} = V_i,$$

jelikož $V_{i-1} \subset V_i$. Množiny V_i ovšem pokrývají X, takže množiny A_i musí také pokrývat X.

Buď $x \in X$ libovolný bod. Existuje i tak, že $x \in A_i$. Pak ovšem $x \in V_i$ a $x \notin V_{i-1}$, t.j. $x \in U_i$ a existuje množina $W \in \nu_i$ tak, že $x \in W$. Bod x tedy patří množině $W \cap A_i$. Tím je ukázáno, že systém množin $W \cap A_i$, kde W probíhá ν_i a $i = 1, 2, 3, \ldots$, je pokrytí X. Jelikož každá z množin $W \cap A_i$ leží v některé z množin systému ν_i, množiny $W \cap A_i$ tvoří zjemnění pokrytí ν.

Ke každému $x \in X$ existuje index i tak, že $x \in V_i$. Množina V_i je otevřená a systém ν_i je lokálně konečný. Ke každému j tedy existuje okolí Z_j bodu x ležící v množině V_i, které má neprázdný průnik pouze s konečně mnoha množinami ze systému ν_j. Označme

$Z = Z_1 \cap Z_2 \cap \cdots \cap Z_i$. Průnik množiny Z s množinami z ν_j, kde $j = 1, 2, \ldots, i$, je neprázdný jen v konečně mnoha případech. Odtud $Z \cap W \cap A_j = \emptyset$ jen pro konečně mnoho množin $W \cap A_j$, $W \in \nu_j$, $j = 1, 2, 3, \ldots, i$.. Pro $j > i$ platí $Z \cap A_j \subset V_i \cap A_j = V_i \cap (V_j \backslash V_{j-1}) = (V_i \cap V_j) \backslash (V_i \cap V_{j-1}) = V_i \backslash V_i = \emptyset$, t.j. $Z \cap A_j = \emptyset$. Odtud $Z \cap W \cap A_j = \emptyset$ pro libovolné W patřící ν_j, kde $j > i$. Systém ν je tedy lokálně konečný a důkaz je ukončen.

Lemma 10. *Předpokládejme, že ke každému otevřenému pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$ regulárního topologického prostoru X existuje jeho lokálně konečné (ne nutně otevřené) zjemnění. Pak existuje lokálně konečné uzavřené zjemnění pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$.*

Důkaz. Buď $(U_\iota)_{\iota \in I}$ otevřené pokrytí regulárního prostoru X. Ke každému $x \in X$ existuje index $\kappa \in I$ tak, že $x \in U_\kappa$; z regularity X vyplývá, že existuje okolí V_x bodu x tak, že $\operatorname{cl} V_x \subset U_\kappa$ (Věta 1. odst. 6.1 str. 142). Označme ν systém všech množin V_x. ν je otevřené pokrytí X. Podle předpokladu tedy existuje lokálně konečné zjemnění μ pokrytí ν. Buď $\operatorname{cl} \mu$ systém všech uzávěrů množin z μ a $\operatorname{cl} \nu$ systém všech uzávěrů množin z ν. $\operatorname{cl} \nu$ je zjemnění pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$ a $\operatorname{cl} \mu$ je uzavřené pokrytí, které je zjemněním pokrytí $\operatorname{cl} \nu$; $\operatorname{cl} \mu$ je tedy uzavřené zjemnění pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Pokrytí $\operatorname{cl} \mu$ je ovšem lokálně konečné (Lemma 1. odst. 6.3 str. 149).

Lemma 11. *Předpokládejme, že ke každému otevřenému pokrytí Hausdorffova topologického prostoru X existuje jeho lokálně konečné uzavřené zjemnění. Pak X je parakompaktní.*

Důkaz. Buď $(U_\iota)_{\iota \in I}$ otevřené pokrytí X, ν jeho lokálně konečné zjemnění; podle předpokladu ν vždy existuje. Každému $x \in X$ přiřadíme jeho okolí W_x, jehož průnik s množinami ze systému ν je neprázdný jen v konečně mnoha případech. Označme μ systém všech množin W_x; μ je otevřené pokrytí X. Buď χ lokálně konečné uzavřené zjemnění μ. Dále označme U_A množinu ze systému $(U_\iota)_{\iota \in I}$ obsahující prvek $A \in \nu$ a C_A sjednocení všech množin $F \in \chi$, pro které $A \cap F = \emptyset$. Jelikož systém χ je lokálně konečný a je tvořen uzavřenými množinami, množina C_A je uzavřená (Důsledek Lemmatu 2. odst. 6.3 str. 150); množina $A' = U_A \cap (X \backslash C_A) = U_A \backslash C_A$ je otevřená. Chceme ukázat, že systém ν' všech množin A', kde A probíhá ν, je otevřené lokálně konečné zjemnění otevřeného pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Z definice množiny C_A dostáváme, že $A \cap C_A = \emptyset$, t.j. $A \subset X \backslash C_A$ a $A \subset U_A$, takže $A \subset A'$. ν' je tedy pokrytí X.

Dále $A' \subset U_A$, takže ν' je zjemnění pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Zbývá dokázat, že systém ν' je lokálně konečný. Každý bod $x \in X$ má okolí V, jehož průnik s množinami systému χ je neprázdný jen v konečně mnoha případech. Označme $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ tyto množiny. Každá z množin Z_i se nachází v jisté množině $W_{x_i} \in \mu$ a podle definice protíná se pouze s konečně mnoha množinami ze systému ν. Označme $A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,n_i}$ tyto množiny. Pro množinu $A \in \nu$, $A \neq A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,n_i}$, kde $i = 1, 2, \ldots, k$, množina $A' = U_A \cap (X \backslash C_A)$ má prázdný průnik s množinami $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$: platí totiž $A \cap Z_1 = \emptyset, A \cap Z_2 = \emptyset, \ldots, A \cap Z_k = \emptyset$, takže $A' \cap Z_1 = U_A \cap (X \backslash C_A) \cap Z_1 \subset U_A \cap (X \backslash Z_1) \cap Z_1 = \emptyset$, $A' \cap Z_2 = \emptyset, \ldots, A' \cap Z_k = \emptyset$, kde jsme využili toho, že $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k \subset C_A$. Pak ovšem $V \cap A' \subset (Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_k) \cap A' = \emptyset$. To dokazuje, že systém ν' je lokálně konečný.

Věta 15. (Stoneova věta) *Metrizovatelný topologický prostor je parakompaktní.*

Důkaz. Metrizovatelný topologický prostor X je Hausdorffův a je regulární (Věta 5. odst. 5.2 str. 113, Věta 7. odst. 6.2 str. 144).

Buď $(U_\iota)_{\iota\in I}$ libovolné otevřené pokrytí X. Existuje σ-lokálně spočetné zjemnění pokrytí $(U_\iota)_{\iota\in I}$ a tedy také lokálně konečné (ne nutně otevřené) zjemnění (Lemma 8. odst. 6.6 str. 158, Lemma 9. odst. 6.6 str. 160). Existuje tedy také lokálně konečné uzavřené zjemnění pokrytí $(U_\iota)_{\iota\in I}$ (Lemma 10. odst. 6.6 str. 161); tvrzení Věty 15. nyní vyplývá z Lemmatu 11. odst. 6.6 str. 161.

Důsledek. (a) Podprostor metrizovatelného topologického prostoru je parakompaktní.

(b) Součin nejvýše spočetně mnoha metrizovatelných topologických prostorů je parakompaktní.

(c) Regulární topologický prostor druhého typu spočetnosti je parakompaktní.

Důkaz. (a) Tvrzení vyplývá z toho, že podprostor metrizovatelného prostoru je metrizovatelný.

(b) Tvrzení vyplývá z Věty 8. odst. 5.4 str. 114 a Věty 9. odst. 5.4 str. 115.

(c) Tvrzení je důsledkem Věty 11. odst. 6.5 str. 155.

Přejdeme nyní ke studiu spojitých rozkladů jednotkové funkce. Ukážeme, že pro parakompaktní topologický prostor lze větu o existenci spojitého rozkladu jednotkové funkce, dokázanou pro normální prostory (Věta 10. odst. 6.4 str. 151), dále zobecnit; v již dokázaném tvaru tato věta ovšem platí také na parakompaktních prostorech (porov. Věta 14. odst. 6.6 str. 158).

Věta 16. *Ke každému otevřenému pokrytí $(U_\iota)_{\iota\in I}$ parakompaktního topologického prostoru X existuje spojitý rozklad jednotkové funkce $(f_\iota)_{\iota\in I}$ na X kompatibilní s $(U_\iota)_{\iota\in I}$.*

Důkaz. Buď $(U_\iota)_{\iota\in I}$ otevřené pokrytí parakompaktního prostoru X, $(V_\kappa)_{\kappa\in K}$ lokálně konečné otevřené zjemnění tohoto pokrytí. Existuje zobrazení $\varphi : K \to I$ takové, že $V_\kappa \subset U_{\varphi(\kappa)}$ pro každé $\kappa \in K$. Z Věty 14. odst. 6.6 str. 158 a Věty 10. odst. 6.4 str. 151). vyplývá, že existuje spojitý rozklad jednotkové funkce $(g_\kappa)_{\kappa\in K}$ kompatibilní s $(V_\kappa)_{\kappa\in K}$. Pro každé $\iota \in I$ klademe

$$f_\iota = \sum_{\varphi(\kappa)=\iota} g_\kappa .$$

Jelikož systém množin $(\operatorname{supp} g_\kappa)_{\kappa\in K}$ je lokálně konečný, součet na pravé straně je definován korektně. Ukážeme, že systém funkcí $(f_\iota)_{\iota\in I}$ je spojitý rozklad jednotkové funkce na X kompatibilní s otevřeným pokrytím $(U_\iota)_{\iota\in I}$.

Každá z funkcí f_ι je na okolí libovolného bodu $x \in X$ vyjádřena jako součet konečně mnoha spojitých funkcí; je tedy spojitá na X. Každá z těchto funkcí je nezáporná.

Ukážeme, že systém množin $(\operatorname{supp} f_\iota)_{\iota\in I}$ je lokálně konečný. Pro každé $\iota \in I$ klademe

$$B_\iota = \bigcup_{\varphi(\kappa)=\iota} \operatorname{supp} g_\kappa .$$

Z lokální konečnosti systému uzavřených množin $(\operatorname{supp} g_\kappa)_{\kappa\in K}$ vyplývá, že B_ι je uzavřená množina (Důsledek Lemmatu 6.3). 2. odst. 6.3 str. 150). Ovšem podle definice f_ι platí $f_\iota(x) = 0$ pro $x \in X \backslash B_\iota$; dostáváme tedy $\operatorname{supp} f_\iota = \operatorname{cl}\{x \in X \mid f_\iota(x) \neq 0\} \subset \operatorname{cl} B_\iota = B_\iota$ a stačí ukázat, že systém $(B_\iota)_{\iota\in I}$ je lokálně konečný. Ke každému bodu $x \in X$ existuje jeho okolí W tak, že množina $J = \{\kappa \in K \mid W \cap V_\kappa \neq \emptyset\}$ je konečná. Pro $\kappa \in K \setminus J$ platí $W \cap V_\kappa = \emptyset$. Nechť $\iota \in I \setminus \varphi(J)$. Pak každý index κ ležící ve $\varphi^{-1}(\iota)$ leží v $K \setminus J$. Platí tedy

$$W \cap B_\iota = \bigcup_{\kappa \in \varphi^{-1}(\iota)} (W \cap \operatorname{supp} g_\kappa) \subset \bigcup_{\kappa \in \varphi^{-1}(\iota)} (W \cap V_\kappa) = \emptyset.$$

Množina $\{\iota \in I \mid W \cap B_\iota \neq \emptyset\}$ je tedy podmnožinoukonečné množiny $\varphi(J) \subset I$ a musí být konečná. Systém nosičů $(\operatorname{supp} f_\iota)_{\iota \in I}$ je tedy lokálně konečný.

Nakonec pro každé $x \in X$ platí

$$1 = \sum_{\kappa \in K} g_\kappa(x) = \sum_{\iota \in I} \left(\sum_{\kappa \in \varphi^{-1}(\iota)} g_\kappa(x) \right) = \sum_{\iota \in I} f_\iota(x),$$

kde jsme využili definici funkce f_ι. Tím je ukázáno, že systém funkcí $(f_\iota)_{\iota \in I}$ je spojitý rozklad jednotkové funkce na X.

Zbývá prověřit, že tento spojitý rozklad jednotkové funkce je kompatibilní s pokrytím $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Ukázali jsme již, že $\operatorname{supp} f_\iota \subset B_\iota$ pro každé ι; ovšem $B_\iota = \bigcup \operatorname{supp} g_\kappa$, kde κ probíhá množinu $\varphi^{-1}(\iota)$, a $\operatorname{supp} g_\kappa \subset V_\kappa \subset U_\iota$ pro každé $\kappa \in \varphi^{-1}(\iota)$, takže $B_\iota \subset U_\iota$, což jsme chtěli dokázat.

6.7. Příklady

(1) Diskrétní topologický prostor je parakompaktní, neboť je metrizovatelný (Věta 15. odst. 6.6 str. 161, př. (1) odst. 5.10 str. 125).

(2) Euklidův topologický prostor $\mathbf{R}^n$ je parakompaktní, neboť je metrizovatelný (Věta 15. odst. 6.6 str. 161, odst. 5.5).

(3) Množina $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ s topologií součinu je metrizovatelný topologický prostor; je to tedy parakompaktní prostor (Věta 15. odst. 6.6 str. 161, př. (7) odst. 5.10 str. 128).

Označme τ (resp. σ) topologii součinu (resp. topologii silného součinu) na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (kap. 3, cvičení); σ je silnější než τ. Buď $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ bod, $x = (x^i)_{i \in \mathbf{N}}$, U jeho libovolné okolí v topologii σ. Existují otevřené intervaly $I^i \subset \mathbf{R}$ tak, že $x^i \in I^i$ a $x \in \prod I^i \subset U$, přičemž můžeme předpokládat, že $\prod \operatorname{cl} I^i \subset U$; součin $\prod I^i$ je prvek báze topologie silného součinu. Přitom podle cv. 14 kap. 2 a Věty 12. odst. 3.3 str. 37

$$\operatorname{cl}_\sigma \left(\prod I^i \right) \subset \operatorname{cl}_\tau \left(\prod I^i \right) = \prod \operatorname{cl} I^i \subset U.$$

$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ s topologií silného součinu je tedy regulární prostor (Věta 1. odst. 6.1 str. 142).

Otázka, zda $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ s topologií silného součinu je normální prostor, není plně vyjasněna (viz [12] str. 206).

(4) Uvedeme příklad topologického prostoru, který je regulární, ale není normální.

Nechť I je nespočetná množina. Prostor $\mathbf{N}^I$ se součinem diskrétních topologií je regulární, neboť je součinem regulárních topologických prostorů. Uvedeme Stoneův důkaz tvrzení, že tento topologický prostor není normální.

Označme A (resp. B) množinu zobrazení $x : I \to \mathbf{N}$ takových, že pro každé $n \neq 1$ (resp. $n \neq 2$) množina $\{x^{-1}(n)\}$ obsahuje nejvýše jeden prvek; zjevně $A, B \subset \mathbf{N}^I$. Množina

$A \cap B$ je tedy tvořená všemi $x = (x(\alpha))_{\alpha \in I}$ takovými, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ množina těch $\alpha \in I$, pro která $x(\alpha) = n$, obsahuje nejvýše jeden prvek. Jelikož I je nespočetná a $\mathbf{N}$ spočetná, platí $A \cap B = \emptyset$. Nechť $x \in \mathbf{N}^I$ je libovolný bod. Ke každému okolí W bodu x existuje přirozené číslo k a indexy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I$ takové, že $\{x(\alpha_1)\} \times \{x(\alpha_2)\} \times \cdots \times \{x(\alpha_k)\} \times \prod \mathbf{N}^\alpha$ (součin přes všechna $\alpha \in I$ různá od $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$), leží ve W a obsahuje x. Odtud plyne $\operatorname{cl} A = A$, $\operatorname{cl} B = B$. Předpokládejme, že topologický prostor $\mathbf{N}^I$ je normální. Nechť U, V jsou disjunktní okolí množin A, B. Označme $x_0 \in \mathbf{N}^I$ bod takový, že $x_0(\alpha) = 1$ pro každé $\alpha \in I$; zřejmě $x_0 \in A$. Existuje tedy okolí U_0 bodu x_0 takové, že $U_0 \subset U$. Platí $U_0 = \Pi\{1\}^k \times \prod \mathbf{N}^\alpha$, kde $k = 1, 2, \ldots, m_0$ pro nějaké přirozené číslo m_0 a α probíhá množinu $I \backslash \{1, 2, \ldots, m_0\}$. Klademe $x_1(1) = 1$, $x_1(2) = 2$, $\ldots$, $x_1(m_0) = m_0$, a $x_1(\alpha) = 1$ pro $\alpha \in I \backslash \{1, 2, \ldots, m_0\}$. $x_1 \in A$ a existuje přirozené číslo $m_1 > m_0$ takové, že $U_1 = \{x_1(1)\} \times \{x_1(2)\} \times \cdots \times \{x_1(m_0)\} \times \prod\{1\}^k \times \prod \mathbf{N}^\alpha$, $m_0 + 1 \leq k \leq m_1$, $\alpha \in I$, $\alpha \neq 1, 2, \ldots, m_1$, je okolí bodu x_1 ležící v U. Dostáváme tak rostoucí posloupnost přirozených čísel $m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$, posloupnost bodů x_0, x_1, x_2, $\ldots \in A$ a posloupnost otevřených množin $U_0, U_1, U_2, \ldots$ takových, že $x_i \in U_i$ a $U_i \subset U$ pro každé $i \in \mathbf{N}$; zřejmě $x_n(1) = 1$, $x_n(2) = 2$, $\ldots$, $x_n(m_{n-1}) = m_{n-1}$, $x_n(\alpha) = 1$ pro ostatní α a $U_n = \{1\} \times \{2\} \times \cdots \times \{m_{n-1}\} \times \{1\} \times \cdots \times \{1\} \times \prod \mathbf{N}^\alpha$, kde $\alpha \in I \backslash \{1, 2, \ldots, m_n\}$ a $\operatorname{pr}_{\alpha_k}(U_n) = k$ pro $1 \leq k \leq m - 1$ a $\operatorname{pr}_{\alpha_k}(U_n) = 1$ pro $m_{n-1} + 1 \leq k \leq m_n$. Buď nyní $y \in B$ bod takový, že $y(\alpha_k) = k$ pro každé $k \in \mathbf{N}$ a $y(\alpha) = 2$ pro ostatní $\alpha \in I$. Nechť V_0 je okolí bodu y takové, že $\operatorname{pr}_\alpha(V_0)$ je jednobodová množina pro konečně mnoho indexů α a $\operatorname{pr}_\alpha(V_0) = \mathbf{N}$ pro ostatní $\alpha \in I$, a že $V_0 \subset V$. Označme $P(V_0)$ množinu těch $\alpha \in I$, pro která je $\{\operatorname{pr}(V_0)\}$ jednobodová množina. Zvolme n tak, aby platilo $\alpha_k \in I \backslash P(V_0)$ pro každé $k > m_n$. Pak $U_{n+1} \cap V_0 \neq \emptyset$. Množiny U a V tedy nemohou být disjunktní, t.j. prostor $\mathbf{N}^I$ není normální.

Množina $\mathbf{N}^I$ se součinem diskrétních topologií na $\mathbf{N}$ je zároveň příkladem součinu normálních prostorů, který není normální (zřejmě množina $\mathbf{N}$ s diskrétní topologií je metrizovatelný topologický prostor a je tedy normální prostor) a příkladem součinu parakompaktních prostorů, který není parakompaktní ($\mathbf{N}$ je parakompaktní neboť je metrizovatelný).

(5) Množina $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ je množina reálných čísel s přirozenou topologií, je uzavřená; topologie podprostoru na $\mathbf{N}$ je diskrétní topologie. Nechť I je nespočetná množina. Množina $\mathbf{N}^I$ je uzavřený podprostor součinu $\mathbf{R}^I$ (Věta 12. odst. 3.3 str. 37); tento podprostor ovšem není normální (př. (4) odst. 6.10 str. 163), není tedy ani parakompaktní ani metrizovatelný. Součin $\mathbf{R}^I$ tedy nemůže být normální (Věta 5. odst. 6.2 str. 144) a tedy ani metrizovatelný (Důsledek (a) Věty 7. odst. 6.2 str. 145) ani parakompaktní (Věta 13. odst. 6.6 str. 157).

Součin $\mathbf{R}^I$ je ovšem podle Věty 2. (b) odst. 6.1 str. 142 regulární topologický prostor. Je tedy dalším příkladem regulárního topologického prostoru, který není normální.

(6) *Topologické grupy. Topologickou grupou* nazýváme množinu G, na které je dána topologie a grupová operace $G \times G \ni (x, y) \to x \cdot y \in G$ tak, že zobrazení $G \times G \ni (x, y) \to x \cdot y^{-1} \in G$ je spojité (v topologii součinu na $G \times G$).

Podgrupa H topologické grupy G, uvažovaná jako topologický podprostor G, je rovněž topologická grupa, neboť zobrazení $H \times H \ni (x, y) \to x \cdot y^{-1} \in H$ je spojité v indukované topologii (Věta 3. odst. 3.1 str. 32).

Zobrazení $G \ni y \to y^{-1} \in G$ topologické grupy G do sebe je spojité: je kompozicí spojitých zobrazení $G \ni y \to (e, y) \in G \times G$, $G \times G \ni (x, y) \to x \cdot y^{-1} \in G$. Zobrazení $G \times G \ni (x, y) \to x \cdot y \in G$ je také spojité, neboť je kompozicí spojitých zobrazení

$G \times G \ni (x, y) \to (x, y^{-1}) \in G \times G$, $G \times G \ni (x, y) \to x \cdot y^{-1} \in G$. Je zřejmé, že zobrazení $y \to y^{-1}$ je homeomorfismus.

Levou translací na grupě G o prvek $x \in G$ rozumíme zobrazení $G \ni y \to L_x(y) = x \cdot y \in G$. Toto zobrazení je kompozice spojitých zobrazení $G \ni y \to (x, y) \in G \times G$, $G \times G \ni (x, y) \to x \cdot y \in G$, je tedy spojité. Levá translace o prvek x^{-1} je inverzní zobrazení k levé translaci o prvek x; odtud ihned dostáváme, že L_x je homeomorfismus.

Je-li topologická grupa Hausdorffova, je regulární. Ukážeme to. Buď nejdříve U libovolné okolí neutrálního prvku $e \in G$. Jelikož je zobrazení $(x, y) \to x \cdot y^{-1}$ spojité v bodě (e, e), existuje okolí W bodu (e, e) zobrazující se tímto zobrazením do U. Místo W můžeme vzít nějaký prvek báze topologie součinu $V_1 \times V_2$ a také menší množinu $V \times V$, kde $V = V_1 \cap V_2$. Pro obraz $V \cdot V^{-1} = \{z = x \cdot y^{-1} \in G \mid x, y \in V\}$ pak platí $V \cdot V^{-1} \subset U$. Ukážeme, že $\operatorname{cl} V \subset U$. Buď $x \in \operatorname{cl} V$ libovolný bod. Jelikož levá translace L_x je homeomorfismus zobrazující e do x, $L_x(V)$ je okolí bodu x a tedy $L_x(V) \cap V \neq \emptyset$. Existuje prvek $y \in L_x(V) \cap V$. Jelikož $y \in L_x(V)$, existuje $z \in V$ tak, že $y = L_x(z) = x \cdot z$. Zároveň $y \in V$, takže $x = y \cdot z^{-1} \in V \cdot V^{-1} \subset U$. Znamená to ovšem, že $\operatorname{cl} V \subset U$. Nechť nyní $z \in G$ je libovolný bod, U jeho okolí. Pak $L_{z^{-1}}(U)$ je okolí bodu e a existuje okolí W bodu e tak, že $\operatorname{cl} W \subset L_{z^{-1}}(U)$. $V = L_z(W)$ je okolí bodu z a platí $L_z(W) \subset L_z(\operatorname{cl} W)$, t.j. $\operatorname{cl} V = \operatorname{cl} L_z(W) \subset L_z(\operatorname{cl} W) \subset L_z(L_{z^{-1}}(U)) = U$. Podle Věty 1. odst. 6.1 str. 142 je tedy topologická grupa G regulární.

Všimněme si, že topologie topologické grupy je plně určena lokální bází v neutrálním prvku grupy.

(7) *Topologické vektorové prostory.* Buď E vektorový prostor nad polem reálných čísel $\mathbf{R}$, uvažovaným s přirozenou topologií. Řekneme, že E je *topologický vektorový prostor*, jestliže na množině E je dána topologie Hausdorffova prostoru taková, že operace *sčítání vektorů* $E \times E \ni (\xi_1, \xi_2) \to \xi_1 + \xi_2 \in E$ a *násobení vektoru skalárem* $\mathbf{R} \times E \ni (a, \xi) \to a \cdot \xi \in E$ jsou spojité (v topologii součinu na $E \times E$ a $\mathbf{R} \times E$).

Analogicky je definován topologický vektorový prostor nad polem komplexních čísel $\mathbf{C}$.

Přímo z definice vyplývají tato tvrzení:

(a) Vektorový prostor uvažovaný s triviální topologií není topologický vektorový prostor, neboť není Hausdorffův.

(b) Vektorový prostor uvažovaný s diskrétní topologií není topologický vektorový prostor, neboť násobení vektoru skalárem není spojité zobrazení.

(c) Každý vektorový podprostor topologického vektorového prostoru, uvažovaný s indukovanou topologií, je topologický vektorový prostor (porov. Věta 2. odst. 3.1 str. 32, Věta 3. (a), (b) odst. 3.1 str. 32).

(d) Euklidův topologický prostor $\mathbf{R}^n$ uvažovaný s přirozenou strukturou reálného vektorového prostoru, je topologický vektorový prostor (př. (5) odst. 2.5 str. 23). Podobně množina uspořádaných n-tic komplexních čísel $\mathbf{C}^n$ s přirozenou topologií a přirozenou strukturou vektorového prostoru, je topologický vektorový prostor.

(e) Konečněrozměrný vektorový prostor s přirozenou topologií (př. (6) odst. 3.7 str. 44) je topologický vektorový prostor.

Buď E topologický vektorový prostor. Uvažujeme-li E s operací sčítání vektorů, je E (komutativní) topologická grupa; je tedy definován pojem (levé) *translace* o vektor $\xi \in E$ (porov. př. (6) odst. 6.10 str. 164). Lokální báze libovolného vektoru $\xi \in E$ je tvořená množinami $L_\xi(U) = \xi + U$, kde U probíhá lokální bázi topologie v bodě $0 \in E$. Pro každé $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, je zobrazení $E \ni \xi \to a \cdot \xi \in E$ lineární homeomorfismus; pro každé okolí U nulového vektoru je množina $a \cdot U = \{\xi \in E \mid \xi = a \cdot \zeta, \zeta \in U\}$ okolí nulového vektoru.

Jelikož topologický vektorový prostor E s operací sčítání vektorů je topologická grupa, je regulární (př. (6) odst. 6.10 str. 164).

(8) *Normované a lokálně konvexní vektorové prostory. Pseudonormou* na reálném vektorovém prostoru E nazýváme zobrazení $p : E \to \mathbf{R}$ splňující tyto podmínky:

(1) $p(\xi_1 + \xi_2) \leq p(\xi_1) + p(\xi_2)$ pro každé ξ_1, $\xi_2 \in E$.

(2) $p(a \cdot \xi) = |a|p(\xi)$ pro každé $a \in \mathbf{R}$ a každé $\xi \in E$. Splňuje-li pseudonorma p navíc podmínku

(3) Jediný vektor ξ, pro který $p(\xi) = 0$, je vektor $\xi = 0$, nazývá se *normou.* Vektorový prostor, na němž je dána pseudonorma (resp. norma), se nazývá *pseudonormovaný* (resp. *normovaný*) *vektorový prostor.*

Vektorový prostor E, na němž je dán systém pseudonorem $(p_\iota)_{\iota \in I}$, se nzývá *lokálně konvexní,* jestliže jediný vektor $\xi \in E$ splňující podmínku $p_\iota(\xi) = 0$ pro každé $\iota \in I$, je vektor $\xi = 0$.

Pseudonorma p na vektorovém prostoru E splňuje podmínku $p(0) = 0$ a $p(\xi) \geq 0$ pro každé $\xi \in E$. Skutečně, rovnost $p(0) = 0$ je důsledkem podmínky (2) pro $a = 0$; dále pro libovolné $\xi \in E$ platí $0 = p(0) = p(\xi + (-\xi)) \leq p(\xi) + p(-\xi) = 2p(\xi)$, t.j. $p(\xi) \geq 0$, kde jsme využili (1) a (2).

Buď E vektorový prostor, $E \ni \xi \to \|\xi\| \in \mathbf{R}$ norma na E. Pro libovolné ξ_1, $\xi_2 \in E$ klademe $d(\xi_1, \xi_2) = \|\xi_1 - \xi_2\|$. Zobrazení $E \times E \ni (\xi_1, \xi_2) \to d(\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}$ je metrika na E; tato metrika se nazývá *indukovaná* normou $\| \ \|$. Metrická topologie na E, asociovaná s touto metrikou, se nazývá *topologie, indukovaná normou* $\| \ \|$ nebo také *silná topologie* na E.

Ukážeme, že E s touto topologií je topologický vektorový prostor. Prověříme spojitost sčítání vektorů v libovolném bodě $(\xi_0, \zeta_0) \in E \times E$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolme $\xi \in B(\xi_0, \varepsilon/2)$, $\zeta \in B(\zeta_0, \varepsilon/2)$ (otevřené koule v metrice, indukované normou). Pak $d(\xi_0 + \zeta_0, \xi + \zeta) = \|\xi_0 + \zeta_0 - \xi - \zeta\| \leq \|\xi_0 - \xi\| + \|\zeta_0 - \zeta\| = d(\xi_0, \xi) + d(\zeta_0, \zeta) < \varepsilon$; sčítání vektorů je tedy spojité v bodě (ξ_0, ζ_0). Prověříme spojitost násobení vektoru skalárem $(a, \xi) \to a \cdot \xi$ v bodě (a_0, ξ_0). Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme

$$2\delta = \Big((|a_0| + \|\xi_0\|)^2 + 2\varepsilon\Big)^{\frac{1}{2}} - |a_0| - \|\xi_0\|.$$

Zvolme $a \in (a_0 - \delta, a_0 + \delta)$, $\xi \in B(\xi_0, \delta)$. Pak $d(a_0 \cdot \xi_0, a \cdot \xi) = \|a_0 \cdot \xi_0 - a \cdot \xi\| = \|a_0 \cdot (\xi - \xi_0) + (a - a_0) \cdot \xi_0 + (a - a_0) \cdot (\xi - \xi_0)\| \leq |a_0| \cdot \|\xi - \xi_0\| + |a - a_0| \cdot \|\xi_0\| + |a - a_0| \cdot \|\xi - \xi_0\| < |a_0| \cdot \delta + \|\xi_0\| \cdot \delta + \delta^2$ a po dosazení dostaneme $d(a_0 \cdot \xi_0, a \cdot \xi) < \varepsilon/2 < \varepsilon$; násobení vektoru skalárem je tedy také spojité.

Buď nyní E lokálně konvexní vektorový prostor, $(p_\iota)_{\iota \in I}$ jeho systém pseudonorem. Pro každé $\zeta \in E$, každé $\varepsilon > 0$ a libovolnou *konečnou* množinu $J \subset I$ klademe

$$U_\varepsilon(\zeta, J) = \{\xi \in E \mid p_\iota(\xi - \zeta) < \varepsilon, \iota \in J\}.$$

Zřejmě $\zeta \in U_\varepsilon(\zeta, J)$ a $U_\varepsilon(\zeta, J) = \zeta + U_\varepsilon(0, J)$. Ukážeme, že systém množin tvaru $U_\varepsilon(\zeta, J)$, kde ζ probíhá E, ε kladná čísla a J konečné podmnožiny indexové množiny I, splňuje podmínky Věty 8. (b) odst. 1.4 str. 6, t.j. že na E existuje topologie, která má v bodě ζ lokální bázi tvořenou množinami $U_\varepsilon(\zeta, J)$.

Nechť $\zeta = 0$. Zřejmě $0 \in U_\varepsilon(0, J)$. Dále $U_\varepsilon(0, J) \cap U_\lambda(0, K) = U_{\min\{\varepsilon, \lambda\}}(0, J \cup K)$. Nakonec nechť $\xi \in U_\varepsilon(0, J)$. Pro $\lambda \leq \varepsilon - \max\{p_\iota(\xi) \mid \iota \in J\}$ platí $U_\lambda(\xi, J) \subset U_\varepsilon(0, J)$: Pro libovolné $\chi \in U_\lambda(\xi, J)$ platí $p_\iota(\chi - \xi) < \lambda$ pro každé $\iota \in J$ a dále $p_\iota(\chi) = p_\iota(\chi - \xi + \xi) \leq p_\iota(\chi - \xi) + p_\iota(\xi) < \lambda + p_\iota(\xi) \leq \varepsilon$. Podmínky Věty 8. (b) odst. 1.4 str. 6 jsou tedy splněny v bodě $0 \in E$.

Nechť nyní $\zeta \in E$ je libovolný bod. Zřejmě $\zeta \in U_\varepsilon(\zeta, J)$. Dále napišme $U_\varepsilon(\zeta, J) = \zeta + U_\varepsilon(0, J)$, $U_\lambda(\zeta, K) = \zeta + U_\lambda(0, K)$. Pak $U_\varepsilon(\zeta, J) \cap U_\lambda(\zeta, K) = \zeta + U_\varepsilon(0, J) \cap U_\lambda(0, K) =$

$U_{\min\{\varepsilon,\lambda\}}(\zeta, J \cup K)$. Nakonec nechť $\xi \in U_\varepsilon(\zeta, J)$ je libovolný bod. Pak $\xi \in \zeta + U_\varepsilon(0, J)$, t.j. $\xi - \zeta \in U_\varepsilon(0, J)$ a existuje $U_\lambda(\xi - \zeta, K)$ tak, že $U_\lambda(\xi - \zeta, K) \subset U_\varepsilon(0, J)$. Pak $\xi - \zeta + U_\lambda(0, K) \subset U_\varepsilon(0, J)$, t.j. $\xi + U_\lambda(0, K) \subset \zeta + U_\varepsilon(0, J) = U_\varepsilon(\zeta, J)$. Podmínky Věty 8. (b) odst. 1.4 str. 6 jsou tedy splněny v bodě ζ.

Tím je dokázána existence požadované topologie; její jednoznačnost je jasná. Topologie na E, jež má v každém bodě $\xi \in E$ lokální bázi, tvořenou množinami $U_\varepsilon(\xi, J)$, se nazývá (*lokálně konvexní*) *topologie, indukovaná systémem pseudonorem* $(p_\iota)_{\iota \in I}$.

Ukážeme, že E s touto topologií je topologický vektorový prostor. Spojitost sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem se prověřuje analogicky jako v případě normovaného vektorového prostoru. Buď $(\xi_0, \zeta_0) \in E \times E$ bod, $U_\varepsilon(\xi_0 + \zeta_0, J)$ libovolný prvek lokální báze topologie v bodě $\xi_0 + \zeta_0$. Pro $\xi \in U_{\varepsilon/2}(\xi_0, J)$, $\zeta \in U_{\varepsilon/2}(\zeta_0, J)$ a každé $\iota \in J$ platí $p_\iota(\xi + \zeta - \xi_0 - \zeta_0) \le p_\iota(\xi - \xi_0) + p_\iota(\zeta - \zeta_0) < \varepsilon$, takže sčítání vektorů je spojité v bodě (ξ_0, ζ_0). Buď $(a_0, \xi_0) \in \mathbf{R} \times E$ libovolný bod, $U_\varepsilon(a_0 \cdot \xi_0, J)$ libovolné okolí bodu $a_0 \cdot \xi_0$. Položme pro každé $\iota \in J$

$$\begin{aligned} 2\delta_\iota &= \Big((|a_0| + p_\iota(\xi_0))^2 + 2\varepsilon \Big)^{\frac{1}{2}} - |a_0| - p_\iota(\xi_0), \\ \delta &= \min_{\iota \in J} \{\delta_\iota\}. \end{aligned}$$

Zvolme $a \in (a_0 - \delta, a_0 + \delta)$, $\xi \in U_\delta(\xi_0, J)$. Pak pro každé $\iota \in J$ dostáváme $p_\iota(a_0 \cdot \xi_0 - a \cdot \xi) = p_\iota(a_0 \cdot (\xi - \xi_0) + (a - a_0) \cdot \xi_0 + (a - a_0) \cdot (\xi - \xi_0)) \le |a_0| \cdot p_\iota(\xi - \xi_0) + |a - a_0| \cdot p_\iota(\xi_0) + |a - a_0| \cdot p_\iota(\xi - \xi_0) < |a_0| \cdot \delta + \delta \cdot p_\iota(\xi_0) + \delta^2$. Po dosazení dostaneme $p_\iota(a_0 \cdot \xi_0 - a \cdot \xi) < \varepsilon$; znamená to, že násobení skalárem je spojité.

(9) Zkonstruujeme topologický prostor X, který je normální, ale není parakompaktní. Konstrukce vychází z příkladu, uvedeného v knize E. Čech, Topologické prostory (dodatek M. Katětov, Plně normální prostory), ČSAV Praha, 1959, str. 487 (viz také J. Nagata, Modern General Topology, Amsterdam, 1984, str. 74, R. Engelking, General Topology (ruský předklad), Moskva, 1986, str. 453). Zde uváděné důkazy vlastností prostoru X zpracoval M. Kovár.

Buď Y libovolná nespočetná množina. Bez újmy na obecnosti lze na Y zvolit dobré uspořádání $\le$ takové, že v tomto dobrém uspořádání existuje největší prvek $1 \in Y$ množiny Y. Označme $0 \in Y$ nejmenší prvek množiny Y.

Na Y definujme přirozeným způsobem intervaly. Nechť M je množina bodů $x \in Y$, pro které je interval $[0, x)$ nespočetná množina. Jelikož $[0, 1) = Y \setminus \{1\}$ je nespočetná, platí $1 \in M$ a $M \ne \emptyset$. Označme symbolem ∞ nejmenší prvek množiny M. Interval $X = [0, \infty)$ je nespočetný. Dále budeme množinu X uvažovat s indukovaným uspořádáním (které je rovněž dobrým uspořádáním). Je zřejmé, že každá množina, která je v X ohraničená, je nejvýše spočetná a žádný prvek z X není v X největší. Z dobrého uspořádání množiny X pak plyne, že v X má každý prvek svého následovníka.

Položme $\tau_B = \{0\} \cup \{(x, y) \mid x, y \in X\}$. Snadno se ověří, že τ_B je báze jisté topologie na X. Nalezneme tvar lokální báze této topologie v libovolném bodě $x \in X$.

Lokální bází v bodě $0 \in X$ je zřejmě jednoprvkový systém $\tau_0 = \{\{0\}\}$. Buď $x \in X$, $x > 0$ a nechť $U \subset X$ je otevřená množina v X, obsahující bod x. Pak existuje otevřený interval $(u, v) \in \tau_B$ tak, že $x \in (u, v) \subset U$. Nechť $w \in X$ je následovník prvku x. Pak $x \in (u, w) \subset (u, v) \subset U$, avšak $(u, w) = (u, x]$. Systém $\tau_x = ((u, x])_{u \in [0, x)}$ je tedy lokální bází topologie v bodě x.

Nyní už můžeme ukázat, že X je normální. Pro body x, $y \in X$ takové, že $x < y$, jsou intervaly $[0, x]$, $(x, y]$ disjunktní okolí bodů x, y. X je tedy Hausdorffův.

Buďte A, $B \subset X$ uzavřené disjunktní množiny. Předpokládejme nejprve, že $0 \notin A, B$. Z uzavřenosti obou množin vyplývá, že pro každé $x \in A$ existuje $u_x < x$ tak, že $(u_x, x] \cap B = \emptyset$ a pro každé $y \in B$ existuje $v_y < y$ tak, že $(v_y, y] \cap A = \emptyset$. Klademe

$$U = \bigcup_{x \in A} (u_x, x], \quad V = \bigcup_{y \in B} (v_y, y].$$

Množina U (resp. V) je okolí množiny A (resp. B). Předpokládejme, že $U \cap V \neq \emptyset$. Pak existuje $c \in X$, $x \in A$, $y \in B$ tak, že $c \in (u_x, x] \cap (v_y, y]$. Kdyby $c = x$, pak by $x \in (v_y, y]$, což dává spor. Tedy $c < x$ a podobně $c < y$.

Platí-li $x \leq y$, je $x \in (c, y] \subset (v_y, y]$. Je-li naopak $x > y$,

platí $y \in (c, x] \subset (u_x, x]$. Oba případy vedou ke sporu s tím, že $(u_x, x] \cap B = \emptyset$, $(v_y, y] \cap A = \emptyset$. Tedy nutně $U \cap V = \emptyset$.

Všimněme si, že žádná z množin U, V neobsahuje bod 0.

Nechť nyní např. $0 \in A$. Pak nutně $0 \notin B$. Označme $A' = A \setminus \{0\}$. Protože $0 \notin A'$, k množinám A', B, které jsou uzavřené a disjunktní (všimněme si, že množina $\{0\}$ je otevřená), existují podle předchozího disjunktní okolí U', V, neobsahující prvek 0. Stačí položit $U = U' \cup \{0\}$. Je zřejmé, že $A \subset U$, $B \subset V$ a $U \cap V = \emptyset$. Množina U je otevřená jako sjednocení dvou otevřených množin a je tedy zřejmé, že X je normální.

Ukážeme, že X není parakompaktní. Předpokládejme, že otevřené pokrytí $([0, x))_{x \in X}$ má lokálně konečné zjemnění $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Pak ke každému $\iota \in I$ existuje $x_\iota \in X$ tak, že $U_\iota \subset [0, x_\iota)$. Tedy množina U_ι je ohraničená a proto existuje $p_\iota = \sup_X U_\iota$. Položme $P = \{p_\iota \mid \iota \in I\}$. Dokážeme, že množina P je nejvýše spočetná. Nejprve ukážeme, že pro každé $\iota \in I$ takové, že p_ι není nejmenší prvek z P, má p_ι v indukovaném uspořádání svého předchůdce v P.

Nechť $\iota \in I$ je takové, že p_ι není nejmenší z P. Pak existuje $\xi = \sup_X P_\iota$, kde jsme označili $P_\iota = \{p \in P \mid p < p_\iota\}$. Jestliže ukážeme, že $\xi \in P_\iota$, je odtud zřejmé, že ξ je hledaný předchůdce prvku p_ι v množině P.

Když $\xi = 0$, je $P_\iota = \{0\}$, protože 0 je supremum jediné množiny v X, a to právě množiny $\{0\}$. Tedy $\xi \in P_\iota$.

Nechť $\xi > 0$. Z lokální konečnosti pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$ a tvaru lokální báze v bodě ξ plyne, že existuje $r \in X$, $r < \xi$ takové, že interval $(r, \xi]$ má neprázdný průnik s U_κ jen pro konečně mnoho indexů $\kappa \in I$. Označme $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_k$ tyto indexy.

Předpokládejme, že pro nějaké $\kappa \in I$ je $p_\kappa \in (r, \xi]$. Pak $p_\kappa > r$ a z definice suprema plyne existence prvku $t \in U_\kappa$ tak, že $r < t \leq p_\kappa \leq \xi$. Pak ovšem $t \in (r, \xi] \cap U_\kappa$, odkud $\kappa \in \{\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_k\}$. Tedy v $(r, \xi]$ leží konečně mnoho prvků z P. Z definice ξ vyplývá, že průnik $P_\iota \cap (r, \xi]$ je neprázdný a na základě předchozích úvah konečný. Nechť ξ' je největší prvek z $P_\iota \cap (r, \xi]$. Zvolme $q \in P_\iota$ libovolně. Zřejmě $q \leq \xi$. Je-li $q \in (r, \xi]$, musí být $q \leq \xi'$. Když $q \in (r, \xi]$, je $q \leq r$ a protože $\xi' \in (r, \xi]$, je rovněž $q \leq \xi'$. Tedy ξ' je horní závora P_ι, t.j. $\xi' \geq \xi$. Zároveň však $\xi' \in P_\iota$ a ξ je supremum P_ι. Odtud $\xi' \leq \xi$, takže celkově $\xi = \xi' \in P_\iota$.

Tím jsme ukázali, že každý prvek z P, který není v P nejmenší, má v P svého předchůdce. Ovšem množina P je dobře uspořádaná (v indukovaném uspořádání), takže každý klesající řetězec (t.j. úplně uspořádaná podmnožina) je konečný. To znamená, že k libovolnému $p \in P$ lze přiřadit nezáporné celé číslo $\nu(p)$, udávající počet všech $q \in P$, která jsou menší než p. Zobrazení $\nu : P \to \mathbf{N} \cup \{0\}$ je zřejmě injektivní, takže množina P je nejvýše spočetná. Pro všechna $\iota \in I$ platí $U_\iota \subset [0, p_\iota]$ a $[0, p_\iota]$ je ohraničená a tedy nejvýše spočetná podmnožina množiny X. Protože $(U_\iota)_{\iota \in I}$ je pokrytí X, je systém $([0, p_\iota])_{\iota \in I}$ pokrytí X a tedy $\bigcup [0, p_\iota] = \bigcup [0, p] = X$ (sjednocení pro $\iota \in I$ resp. $p \in P$). Pak ovšem množina X je nejvýše spočetná jako nejvýše spočetné sjednocení nejvýše spočetných množin. To je spor s konstrukcí množiny X, což znamená, že otevřené pokrytí $([0,x))_{x\in X}$ nemá lokálně konečné zjemnění. Topologický prostor X tedy nemůže být parakompaktní a důkaz je ukončen.

Všimněme si, že topologický prostor X uvedený v důkazu, je prvního typu spočetnosti, není však druhého typu spočetnosti, neboť je regulární a musel by být i parakompaktní. X není metrizovatelný, neboť není parakompaktní.

(10) Existují příklady topologických prostorů, ktekré jsou parakompaktní, ale nejsou metrizovatelné (viz př. (9) odst. 7.8 str. 217).

(11) K tomu, aby lineární zobrazení topologických vektorových prostorů $f : E \to F$ bylo spojité, stačí, aby bylo spojité v bodě $0 \in E$.

Ukážeme to. Nechť f je spojité v bodě $0 \in E$. Buď $\xi \in E$ libovolný bod, V libovolné okolí bodu $f(\xi) \in F$. Pak $V_0 = -f(\xi) + V$ je okolí bodu $0 \in F$. Podle předpokladu tedy existuje okolí U_0 bodu $0 \in E$ tak, že $f(U_0) \subset V_0$. Pro okolí $U = \xi + U_0$ bodu $\xi \in E$ platí

$$f(U) = f(\xi + U_0) = f(\xi) + f(U_0) \subset f(\xi) + V_0 = V.$$

Zobrazení f je tedy spojité v bodě $\xi \in E$ a z libovolnosti ξ vyplývá, že je spojité.

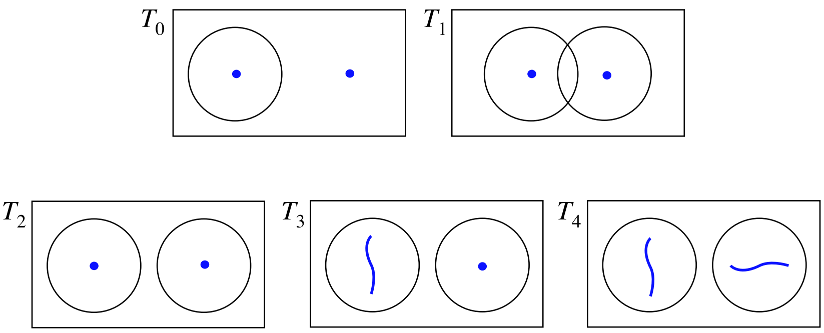
Cvičení

Oddělovací axiomy

Buď X topologický prostor. X se nazývá T_0-*prostor*, jestliže k libovolným dvěma různým bodům x, $y \in X$ existuje okolí U bodu x tak, že $y \notin U$. X se nazývá T_1-*prostor*, jestliže existuje okolí U bodu x a okolí V bodu y tak, že $y \notin U$ a $x \notin V$. Hausdorffův prostor se také nazývá T_2-*prostor*. X se nazývá T_3-*prostor*, jestliže každá uzavřená množina a libovolný bod, který v ní neleží, mají disjunktní okolí. X se nazývá T_4-*prostor*, jestliže libovolné dvě disjunktní uzavřené množiny v X mají disjunktní okolí.

Podmínky, definující T_k-prostory, kde $k = 0, 1, 2, 3, 4$, se nazývají *oddělovací axiomy*. Oddělovací axiomy jsou schematicky znázorněny na obr. 2.

Obr. 2



1. Dokažte:

(a) Topologický prostor homeomorfní s T_k-prostorem je T_k-prostor (t.j. vlastnost být T_k-prostorem je topologický invariant).

(b) Topologický prostor X je T_1-prostor právě tehdy, když každá jednobodová množina v X je uzavřená.

(c) Topologický prostor X je regulární právě tehdy, když je zároveň T_1 a T_3-prostorem. Je normální právě tehdy, když je zároveň T_1 a T_4-prostorem.

Ř e š e n í . (a) Nechť X, Y jsou homeomorfní topologické prostory, nechť X je T_k-prostor. Nechť $f : X \to Y$ je nějaký homeomorfismus.

Nechť $k = 0$. Nechť y_1, $y_2 \in Y$ jsou dva různé body. Existují x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, tak, že $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Nechť U je okolí bodu x_1 takové, že $x_2 \notin U$. Pak $f(U)$ je okolí bodu y_1 neobsahující y_2.

Nechť $k = 1$. Nechť y_1, $y_2 \in Y$ jsou dva různé body. Platí $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, kde x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Existují okolí U_1 bodu x_1 a U_2 bodu x_2 taková, že $x_2 \notin U_1$, $x_1 \notin U_2$. Pak $f(U_1)$ je okolí y_1, $f(U_2)$ je okolí y_2 přičemž $y_2 \notin f(U_1)$, $y_1 \notin f(U_2)$.

Nechť $k = 2$. Je-li U_1 (resp. U_2) okolí bodu $x_1 = f^{-1}(y_1)$ (resp. $x_2 = f^{-1}(y_2)$), přičemž $y_1 \neq y_2$ a $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, pak $f(U_1) \ni y_1$, $f(U_2) \ni y_2$ a $f(U_1) \cap f(U_2) = \emptyset$.

Nechť $k = 3$. Buď $A \subset Y$ uzavřená množina, $y \in Y$ bod neležící v A. Existuje bod $x \in X$ a množina $B \subset X$ tak, že $y = f(x)$ a $A = f(B)$. Přitom zřejmě $x \notin B$ a množina B je uzavřená, neboť f je

homeomorfismus. Jelikož X je T_3-prostor, existují otevřené množiny U, $V \subset X$ tak, že $x \in U$, $B \subset V$ a $U \cap V = \emptyset$. Pak $f(U)$, $f(V)$ jsou otevřené množiny takové, že $y \in f(U)$, $A \subset f(V)$ a $f(U) \cap f(V) = \emptyset$.

Nechť $k = 4$. Tento případ vyšetříme analogicky jako případ $k = 3$.

(b) Nechť X je T_1-prostor, $x \in X$, $y \in X \backslash \{x\}$. Předpokládejme, že X je T_1-prostor. Pak existuje okolí U_y bodu y takové, že $x \notin U_y$. Položme $U = \bigcup U_y$ (sjednocení pro $y \in X \backslash \{x\}$). Zřejmě $x \notin U$ a $y \in U$ pro každé $y \in X \backslash \{x\}$, t.j. $U = X \backslash \{x\}$. Množina U je jako sjednocení otevřených množin otevřená, takže množina $\{x\}$ je uzavřená.

Obráceně, nechť každá jednobodová množina v X je uzavřená. Nechť x, $y \in X$ jsou dva různé body. Pak $X \backslash \{x\}$ (resp. $X \backslash \{y\}$) je okolí bodu y (resp. x), přičemž $x \notin X \backslash \{x\}$ a $y \notin X \backslash \{y\}$. Tedy X je T_1-prostor.

(c) Z definic plyne, že T_2-prostor je zároveň T_1-prostor a T_1-prostor je T_0-prostor. Regulární prostor je T_2-prostor a T_3-prostor, je tedy zároveň T_1-prostor a T_3-prostor. Obráceně, mějme topologický prostor X, který je T_1-prostor a T_3-prostor. Nechť x, $y \in X$ jsou dva různé body. Podle předpokladu množiny $\{x\}$, $\{y\}$ jsou uzavřené (a disjunktní). Ovšem každá uzavřená množina a bod v ní neležící mají disjunktní okolí; to ovšem znamená, že X je T_2-prostor.

Podobně postupujeme ve zbývajících případech.

Všimněme si, že T_1, T_4-prostor je T_1, T_3-prostor, T_1, T_3-prostor je T_2-prostor, T_2-prostor je T_1-prostor a T_1-prostor je T_0-prostor; normalita je tedy nejsilnější z oddělovacích axiomů.

Dále si všimněme, že z vět, dokázaných v této kapitole, vyplývá tento řetězec implikací vlastností topologického prostoru:

metrizovatelný prostor $\Rightarrow$ parakompaktní prostor $\Rightarrow$ normální prostor $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ regulární prostor $\Rightarrow$ Hausdorffův prostor $\Rightarrow$ T_1-prostor $\Rightarrow$ T_0-prostor .

2. Uveďte příklad topologického prostoru, který (a) není T_0-prostor, (b) je T_0-prostor, ale není T_1-prostor, (c) je T_1-prostor ale není Hausdorffův, (d) je T_3-prostor, ale není regulární, (e) je Hausdorffův ale není regulární, (f) je regulární ale není normální, (g) je T_4-prostor, ale není normální.

Ř e š e n í . (a) X s triviální topologií není T_0-prostor (každý bod $x \in X$ má jediné okolí $U = X$).

(b) $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$; definovaný topologický prostor je T_0-prostor ale není T_1-prostor (bod a má okolí $\{a\}$, které neobsahuje bod b, zatímco každé okolí bodu b obsahuje bod a).

(c) Buď X libovolná nekonečná množina, τ topologie konečných doplňků na X. X je T_1-prostor (pro libovolné dva body x, $y \in X$, $x \neq y$, je množina $X \backslash \{x\}$ okolí bodu y, které neobsahuje bod x a množina $X \backslash \{y\}$ je okolí bodu x neobsahující bod y), ale není Hausdorffův (cv. 13 kap. 1).

(d) X s triviální topologií není T_1-prostor (viz (a)), ale je T_3-prostor (je-li $x \in X$ libovolný bod, pak jediná uzavřená množina neobsahující bod x je prázdná množina; přitom X je okolí bodu x takové, že $X \cap \emptyset = \emptyset$).

(e) Uvažujme množinu $\mathbf{R}$ a její podmnožinu $K = \{x \in \mathbf{R} \mid x = 1/n, n \in \mathbf{N}\}$. Definujeme topologii τ na $\mathbf{R}$ pomocí báze, tvořené všemi otevřenými intervaly (a, b) a všemi množinami tvaru $(a, b) \backslash K$. Tato topologie je silnější než přirozená topologie, prostor $(\mathbf{R}, \tau)$ je tedy Hausdorffův. Ukážeme, že $(\mathbf{R}, \tau)$ není T_3-prostor. Množina K je uzavřená a $0 \notin K$. Předpokládejme, že existují otevřené množiny U, V tak, že $0 \in U$, $K \subset V$ a $U \cap V = \emptyset$. Zvolme prvek báze topologie τ obsahující 0 a ležící v U. Tento prvek báze musí mít tvar $(a, b) \backslash K$, neboť libovolný prvek báze tvaru (a, b) obsahující 0 protíná K. Okolí V množiny K má nutně tvar $\bigcup_n (c_n, d_n)$, kde interval (c_n, d_n) je prvek báze topologie τ obsahující bod $1/n \in K$. Vyšetříme množinu $((a, b) \backslash K) \cap (c_n, d_n)$ pro $1/n \in (a, b)$. Tato množina je zřejmě neprázdná: bod $z \notin K$ takový, že $z < 1/n$ a zároveň $z > \max\{c_n, 1/n+1\}$ je prvkem $(a, b) \backslash K$ a zároveň (c_n, d_n). To ovšem znamená, že $U \cap V \neq \emptyset$, t.j. $(\mathbf{R}, \tau)$ není regulární.

(f) Ve cv. 3 dokážeme, že množina $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií τ_S je normální prostor a ve cv. 4 dokážeme, že prostor $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se součinem Sorgenfreyových topologií není normální; $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je ovšem regulární prostor (Věta 2. (b) odst. 6.1 str. 142).

(g) Triviální topologický prostor.

3. Dokažte, že množina $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií τ_S je normální topologický prostor.

Řešení. $(\mathbf{R}, \tau_S)$ je Hausdorffův prostor (př. (5) odst. 1.8 str. 10). Nechť A, $B \subset \mathbf{R}$ jsou dvě disjunktní uzavřené množiny. Zkonstruujeme jejich disjunktní okolí. Pro každé $x \in A$ je množina $\mathbf{R} \backslash B$ okolím bodu x. Existuje tedy $\varepsilon_x > 0$ takové, že okolí bodu x tvaru $[x, x + \varepsilon_x)$ leží v $\mathbf{R} \backslash B$. Podobně pro každé $y \in B$ existuje $\varepsilon_y > 0$ takové, že $[y, y + \varepsilon_y) \subset \mathbf{R} \backslash A$. Klademe

$$U = \bigcup_{x \in A} [x, x + \varepsilon_x), \qquad V = \bigcup_{y \in B} [y, y + \varepsilon_y).$$

Zřejmě U je okolí A a V je okolí B. Nechť $z \in U \cap V$; pak existují body x, y takové, že $z \in [x, x + \varepsilon_x) \cap [y, y + \varepsilon_y)$. Podle předpokladu je $x \neq y$; nechť např. $x < y$. Pak ovšem $y \in [x, x + \varepsilon_x)$, což je spor s předpokladem, že $[x, x + \varepsilon_x) \cap B = \emptyset$. Je tedy $U \cap V = \emptyset$, což dokazuje normálnost prostoru $(\mathbf{R}, \tau_S)$.

4. Zjistěte, zda množina $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se součinem Sorgenfreyových topologií τ_S je normální topologický prostor.

Řešení. Uvažujme $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se součinem Sorgenfreyových topologií a topologický prostor $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Tento podprostor je uzavřený, neboť je uzavřený v přirozené topologii, která je slabší než součin Sorgenfreyových topologií; je diskrétní; každá jednobodová množina $\{(x, -x)\} \subset Y$ je otevřená, neboť $\{(x, -x)\} = [x, x + \varepsilon_1) \times [-x, -x + \varepsilon_2) \cap Y$ pro nějaké ε_1, $\varepsilon_2 > 0$. Libovolná funkce $f : Y \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je tedy spojitá. Předpokládejme, že $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je normální. Podle Věty 9. odst. 6.2 str. 146 lze funkci f spojitě rozšířit na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$; označme $\bar{f}$ nějaké její spojité rozšíření. Uvažujme množinu $M = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, která je hustá v $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (v součinu Sorgenfreyových topologií), a zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^Y \to \mathbf{R}^M$, definované vztahem $\varphi(f) = \bar{f}|_M$. Ukážeme, že zobrazení φ je injektivní. Je-li $\varphi(f) = \varphi(g)$, t.j. $\bar{f}|_M = \bar{g}|_M$, pak $\bar{f} = \bar{g}$ podle Důsledku 1.Věty 8. odst. 3.2 str. 35, neboť prostor $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je Hausdorffův. Za předpokladu normálnosti $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ jsme tedy zkonstruovali injektivní zobrazení z množiny $\mathbf{R}^Y$ do $\mathbf{R}^M$; přitom množina $\mathbf{R}^Y$ má stejnou mohutnost jako $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (existuje zřejmá bijekce mezi množinami $\mathbf{R}$ a Y) a množina $\mathbf{R}^M$ má mohutnost menší než $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$

(množina M je spočetná). To je ovšem spor s tvrzením Cantorovy–Bernsteinovy věty, podle které by mohutnost $\mathbf{R}^Y$ měla být menší, než mohutnost $\mathbf{R}^M$. Prostor $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ se součinem Sorgenfreyových topologií tedy není normální.

Topologický prostor $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ (s uvažovanou topologií) je příkladem součinu normálních prostorů, který není normální a zároveň příkladem regulárního prostoru, který není normální.

5. Rozhodněte, zda topologický prostor (X, τ_K), kde X je množina a τ_K je topologie konečných doplňků na X, je (a) regulární, (b) normální.

Řešení. Je-li množina X nekonečná, pak (X, τ_K) není Hausdorffův, a tedy není regulární (ani normální). (X, τ_K) je T_1-prostor (cv. 2 (c)).

Nechť X je konečná množina. Pak (X, τ_K) je Hausdorffův prostor a každá množina otevřená v τ_K je zároveň uzavřená (cv. 13 kap. 1). Libovolné dvě disjunktní uzavřené množiny A, $B \subset X$ lze tedy oddělit disjunktními otevřenými množinami: za tyto otevřené množiny lze vzít množiny A, B.

6. Buď X T_1-prostor. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(1) X je normální.

(2) Pro libovolnou dvojici disjunktních uzavřených množin A, $B \subset X$ existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$.

Rozhodněte, zda platí Urysohnovo lemma (Věta 8. odst. 6.2 str. 145, předpokládáme-li, že X je T_4-prostor.

Řešení. Z podmínky (1) vyplývá podmínka (2) (Urysohnovo lemma). Obráceně, nechť platí (2). Položme $U = f^{-1}([0,1/3))$, $V = f^{-1}((2/3,1])$. U a V jsou okolí množin A a B a platí $U \cap V = \emptyset$. X tedy splňuje axiom T_4. Podle předpokladu je X T_1-prostor, je tedy podle cv. 1 (c) normální.

V důkazu Urysohnova lemmatu se nepředpokládá platnost axiomu T_2, tato věta tedy platí i v T_4-prostorech.

7. Buď X normální prostor, $A \subset X$ uzavřená množina, U její okolí a $f : U \to \mathbf{R}$ spojitá funkce. Existuje okolí V množiny A a spojitá funkce $g : X \to \mathbf{R}$ taková, že $g|_V = f|_V$. Dokažte.

Řešení. Podle Věty 4. odst. 6.2 str. 143 existuje okolí V množiny A takové, že $\operatorname{cl} V \subset U$. Pak $f|_{\operatorname{cl} V}$ je spojitá funkce, definovaná na uzavřené podmnožině normálního prostoru; existuje tedy spojité rozšíření g na celý prostor (Věta 9. odst. 6.2 str. 146). Evidentně $g|_V = f|_V$.

8. Dokažte, že platí:

(a) Je-li X regulární topologický prostor, pak libovolné dva body x, $y \in X$, $x \neq y$, mají okolí, jejichž uzávěry jsou disjunktní.

(b) Je-li X normální topologický prostor, pak libovolné dvě disjunktní uzavřené množiny v X mají okolí, jejichž uzávěry jsou disjunktní.

Platí obrácená tvrzení?

Řešení. (a) Tvrzení platí (vyplývá z Věty 1. odst. 6.1 str. 142). Obrácené tvrzení obecně neplatí. Nechť libovolné dva různé body x, y topologického prostoru X mají okolí, jejichž uzávěry jsou disjunktní. Pak X je zřejmě Hausdorffův; nemusí však splňovat axiom T_3 (porov. cv. 1 (c)). Příkladem je topologický prostor, uvedený v řešení cv. 2 (e). Označme τ_2 jeho topologii, τ_1 přirozenou topologii na $\mathbf{R}$. $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií je regulární, a tedy ke každým dvěma bodům x, $y \in \mathbf{R}$, $x \neq y$, existuje okolí U bodu x a okolí V bodu y tak, že $\operatorname{cl}_{\tau_1} U \cap \operatorname{cl}_{\tau_1} V = \emptyset$. Ovšem podle cv. 14 kap. 2 platí $\operatorname{cl}_{\tau_2} U \subset \operatorname{cl}_{\tau_1} U$ a $\operatorname{cl}_{\tau_2} V \subset \operatorname{cl}_{\tau_1} V$, t.j. $\operatorname{cl}_{\tau_2} U \cap \operatorname{cl}_{\tau_2} V \subset \operatorname{cl}_{\tau_1} U \cap \operatorname{cl}_{\tau_1} V$. Odtud $\operatorname{cl}_{\tau_2} U \cap \operatorname{cl}_{\tau_2} V = \emptyset$. V daném topologickém prostoru $(\mathbf{R}, \tau_2)$ lze tedy libovolné dva různé body oddělit okolími, jejichž uzávěry jsou disjunktní; přitom $(\mathbf{R}, \tau_2)$ nesplňuje axiom T_3 a není tedy regulární.

(b) Tvrzení je přímým důsledkem Věty 4. odst. 6.2 str. 143. Obrácené tvrzení neplatí. Předpokládejme totiž, že libovolné dvě disjunktní uzavřené množiny v topologickém prostoru X mají okolí, jejichž uzávěry jsou disjunktní. Pak X je T_4-prostor, ale nemusí být Hausdorffův. Uvažujme např. triviální topologický prostor X. X a $\emptyset$ jsou jediné dvě uzavřené množiny a jsou disjunktní. Přitom X je okolím X a $\emptyset$ je okolím $\emptyset$ a platí $\operatorname{cl} X \cap \operatorname{cl} \emptyset = X \cap \emptyset = \emptyset$. X ovšem není normální, neboť není Hausdorffův.

9. Buď X množina, τ_1, τ_2 dvě topologie na X, $\tau_1 \subset \tau_2$. Rozhodněte, zda platí některé z těchto čtrnácti tvrzení:

(a) Je-li (X, τ_1) T_k-prostor, kde $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (resp. regulární, resp. normální prostor), pak také (X, τ_2) je T_k-prostor (resp. regulární, resp. normální prostor).

(b) Je-li (X, τ_2) T_k-prostor, kde $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (resp. regulární, resp. normální prostor), pak také (X, τ_1) je T_k-prostor (resp. regulární, resp. normální prostor).

Řešení. Tvrzení (a) zřejmě platí pro T_k-prostor, kde $k = 0, 1, 2$; pro $k = 3, 4$ neplatí.

Tvrzení (b) neplatí. Uvedeme příklady. Na $\mathbf{R}$ uvažujme topologii konečných doplňků τ_K, přirozenou topologii τ, Sorgenfreyovou topologii τ_S a topologii τ', definovanou ve cv. 2 (e). Platí $\tau_K \subset \tau \subset \tau_S$ a stejné inkluze platí pro součiny těchto topologií na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Přitom $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se součinem topologií τ_K není normální, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se součinem topologií τ je normální a $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se součinem topologií τ_S není normální (cv. 4). Podobně platí $\tau_K \subset \tau \subset \tau'$; přitom $(\mathbf{R}, \tau_K)$ není regulární, $(\mathbf{R}, \tau)$ je regulární a $(\mathbf{R}, \tau')$ není regulární.

10. Užitím definice parakompaktního prostoru ukažte, že regulární topologický prostor druhého typu spočetnosti je parakompaktní.

Řešení. Buď X regulární topologický prostor druhého typu spočetnosti, σ jeho spočetná báze. Buď ν otevřené pokrytí X. Nechť $U \in \nu$ a $x \in U$ je libovolně ale pevně zvolený bod. Podle Věty 1. odst. 6.1 str. 142 existuje množina $W \in \sigma$ taková, že $x \in W$ a $\operatorname{cl} W \subset U$. Pro každé $i \in \mathbf{N}$ vybereme právě jednu množinu $U_i \in \nu$ takovou, že $\operatorname{cl} W_i \subset U_i$, kde množiny W_i, $i \in \mathbf{N}$, probíhají bázi σ. Zřejmě $(U_i)_{i \in \mathbf{N}}$ je spočetné podpokrytí pokrytí ν. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ klademe

$$V_n = U_n \setminus \operatorname{cl}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} W_i\right) = U_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \operatorname{cl} W_i\right).$$

Množiny V_n jsou otevřené. Ukážeme, že $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ je lokálně konečné zjemnění pokrytí ν. Evidentně platí, že $V_n \subset U_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ a $\bigcup_n V_n = U_1 \cup (U_2 \setminus \operatorname{cl} W_1) \cup (U_3 \setminus (\operatorname{cl} W_1 \cup \operatorname{cl} W_2)) \cup \cdots = \bigcup_n U_n = X$, neboť $\operatorname{cl} W_i \subset U_i$ pro každé $i \in \mathbf{N}$. Nechť $y \in X$ je libovolný bod. Existuje index $k \in \mathbf{N}$ a množina $W_k \in \sigma$ taková, že $y \in W_k$. Pak

$$W_k \cap V_n = W_k \cap \left(U_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \operatorname{cl} W_i\right)\right) = \emptyset$$

pro každé $n > k$. Topologický prostor X je tedy parakompaktní.

11. Buď X topologický prostor, definovaný ve cv. 15 kap. 4.

(a) Ukažte, že X je Hausdorffův.

(b) Ukažte, že X je normální.

Řešení. (a) K libovolným dvěma různým bodům x, $y \in X$ existují prvky U, V báze topologie takové, že $x \in U$, $y \in V$ a $U \cap V = \emptyset$.

(b) Každá množina ze systému $(\sigma_x)_{x \in X}$ (viz cv. 15 kap. 4) je zároveň otevřená i uzavřená. Prostor X je tedy normální (Věta 4. odst. 6.2 str. 143).

Metrizovatelné topologické prostory

12. Rozhodněte, zda jsou metrizovatelné tyto topologické prostory:
(a) $\mathbf{R}$ s topologií konečných doplňků τ_K.
(b) $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se součinem Sorgenfreyových topologií τ_S.
(c) $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií.
(d) $[0,1]^I$ jako podprostor součinu $\mathbf{R}^I$, kde $\mathbf{R}$ má přirozenou topologii.
(e) Triviální topologický prostor.
(f) $Y^{\mathbf{R}}$ s topologií bodové konvergence, je-li Y metrizovatelný topologický prostor.
(g) $C(\mathbf{N}, Y)$ s topologií bodové konvergence, je-li Y metrizovatelný topologický prostor.

Řešení. (a) Není; není prvního typu spočetnosti (př. (4) odst. 1.8 str. 9). (b) Není; není normální (cv. 4). (c) Není; plyne z Věty 8. odst. 5.4 str. 114. (d) Je-li I nespočetná množina, pak $[0,1]^I \subset \mathbf{R}^I$ není metrizovatelný (Věta 10. odst. 5.4 str. 116). V ostatních případech je metrizovatelný jako podprostor metrizovatelného topologického prostoru. (e) Není; není Hausdorffův. (f) Není (Věta 10. odst. 5.4 str. 116). (g) Je metrizovatelný jako podprostor metrizovatelného prostoru (Věta 9. odst. 5.4 str. 115); přitom zřejmě nezáleží na topologii prostoru $\mathbf{N}$.

13. Nechť X je množina, τ_1, τ_2 dvě topologie na X. Je-li X metrizovatelný v jedné z těchto topologií, je metrizovatelný v druhé?

Řešení. O metrizovatelnosti X v druhé z obou topologií nelze nic říci ani v případě, že topologie τ_1, τ_2 jsou srovnatelné. Příkladem je množina $\mathbf{R}$ s topologií konečných doplňků τ_K, přirozenou topologii τ a Sorgenfreyovou topologií τ_S. Ačkoliv $\tau_K \subset \tau \subset \tau_S$, je $(\mathbf{R}, \tau)$ metrizovatelný, zatímco $(\mathbf{R}, \tau_K)$, $(\mathbf{R}, \tau_S)$ metrizovatelné nejsou.

14. Dokažte, že metrizovatelný topologický prostor je parakompaktní (*Stoneova věta*).

Řešení. Uvedeme důkaz M. Kovára, který se liší od důkazu Stoneovy věty, podaného v odst. 6.6.

Buď X metrizovatelný topologický prostor. Zvolme na X metriku kompatibilní s topologií a položme pro všechna $x \in X$, n, $m \in \mathbf{N}$

$$B_x^{n,m} = B(x, 2^{-n}(1 - 2^{-m})), \quad B_x^{n,\infty} = B(x, 2^{-n}).$$

Snadno se ověří, že pro libovolnou podmnožinu $Y \subset X$, n, $m \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, kde $m < k$, platí

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{cl}\left(\bigcup_{t \in Y} B_t^{n,m}\right) \subset \bigcup_{t \in Y} B_t^{n,m}.$$

Předpokládejme, že množina X je dobře uspořádaná. Pro libovolná $x \in X$, n, $m \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ klademe

$$\mu(x, n, k) = \min\left\{t \in X \mid x \in B_t^{n,k}\right\},$$

$$W_x^{n,m} = B_x^{n,m+1} \setminus \operatorname{cl}\left(\bigcup_{t<x} B_t^{n,m+2}\right), \quad V_x^{n,m} = B_x^{n,m} \setminus \operatorname{cl}\left(\bigcup_{t<x} B_t^{n,m+3}\right),$$

a

$$Q_x^{n,m} = B_{\mu(x,n,m+2)}^{n,m+2} \operatorname{cl}\left(\bigcup_{t<(x,n,m+2)} B_t^{n,m+1}\right).$$

Existence prvku $\mu(x, n, k) \in X$ plyne z dobrého uspořádání množiny X a faktu, že $x \in B_x^{n,k}$. Pomocí (1) se snadno ukáže, že pro všechna $x \in X$, n, $m \in \mathbf{N}$ platí

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{cl} V_x^{n,m} \subset W_x^{n,m}.$$

Dále budeme postupovat v několika krocích, ve kterých ověříme vlastnosti výše zkonstruovaných otevřených množin $W_x^{n,m}$, $V_x^{n,m}$, $Q_x^{n,m}$.

(a) Ukážeme, že pro pevné n, $m \in \mathbf{N}$ pro libovolné $\xi \in X$ platí $\xi \in Q^{n,m}$ a pro všechna $x \in X$, $x \neq \mu(\xi, n, m+2)$ je $Q_\xi^{n,m} \cap W_x^{n,m} = \emptyset$.

Zvolme $\xi \in X$. Klademe $y = \mu(\xi, n, m+2)$. Pak $\xi \in B_y^{n,m+2}$, ale vzhledem k (1) $\xi \notin \mathrm{cl}(\bigcup_{t<y} B_t^{n,m+1})$, což dává $\xi \in Q^{n,m}$. Z definice množin $Q_\xi^{n,m}$, $W_x^{n,m}$ je zřejmé, že

pro $x \neq y$ je $Q_\xi^{n,m} \cap W_x^{n,m} = \emptyset$.

(b) Z tvrzení (a) vyplývá, že systém $(W_x^{n,m})_{x\in X}$ je lokálně konečný. Ze vztahu (2) pak vyplývá, že je lokálně konečný i systém $(\mathrm{cl}\, V_x^{n,m})_{x\in X}$.

(c) Ukážeme, že pro libovolnou otevřenou množinu $U \subset X$ a bod $\xi \in U$ existují $x \in X$, n, $m \in \mathbf{N}$ tak, že $\xi \in V_x^{n,m}$ a $W_x^{n,m} \subset U$.

Zvolme přirozené číslo n tak, že $B_\xi^{n-1,\infty} \subset U$. Označme $y = \mu(\xi, n, \infty)$. $\xi \in B_y^{n,\infty}$ a tedy existuje $m \in \mathbf{N}$ tak, že $\xi \in B_y^{n,m}$. Ovšem $\xi \notin \bigcup_{t<y} B_t^{n,\infty}$, odkud podle (1) $\xi \notin \mathrm{cl}(\bigcup_{t<y} B_t^{n,m+3})$. To znamená, že $\xi \in V_y^{n,m}$. Z inkluzí $W_y^{n,m} \subset B_y^{n,\infty}$, $y \in B_\xi^{n,\infty}$ pak dostaneme $W_y^{n,m} \subset B_y^{n,\infty} \subset B_\xi^{n-1,\infty} \subset U$.

Mějme nyní libovolné otevřené pokrytí ν topologického prostoru X. Pro libovolné n, $m \in \mathbf{N}$ označíme $X^{n,m}$ množinu bodů $t \in X$ takových, že existuje $U \in \nu$, pro které $W_t^{n,m} \subset U$. Dále klademe $K = \{(n,m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid X^{n,m} \neq \emptyset\}$. Množinu K uspořádejme v posloupnost a označme pro všechna $(n,m) \in K$, $x \in X^{n,m}$.

$$U_x^{n,m} = W_x^{n,m} \setminus \bigcup_{(i,j)<(n,m)} \bigcup_{t\in X^{i,j}} \mathrm{cl}\, V_t^{i,j}. \tag{3}$$

Prověříme, že systém $\lambda = \{U_x^{n,m} \mid (n,m) \in K, x \in X^{n,m}\}$ je otevřené lokálně konečné zjemnění pokrytí ν. Zvolme libovolně pevně bod $\xi \in X$. Označme $L(\xi)$ množinu dvojic $(i,j) \in K$ takových, že existuje $t \in X^{i,j}$, pro které $\xi \in W_t^{i,j}$. Množina $L(\xi)$ je neprázdná. Vskutku, k prvku ξ existuje otevřená množina $U \in \nu$ tak, že $\xi \in U$. Ovšem podle (c) a vztahu (2) dostáváme, že existuje $x_1 \in X$, n_1, $m_1 \in \mathbf{N}$ s vlastností $\xi \in V_{x_1}^{n_1,m_1} \subset \mathrm{cl}\, V_{x_1}^{n_1,m_1} \subset W_{x_1}^{n_1,m_1} \subset U$. Pak $x \in X^{n_1,m_1} \neq \emptyset$, $(n_1,m_1) \in K$ a protože $\xi \in W_{x_1}^{n_1,m_1}$, je $(n_1,m_1) \in L(\xi)$.

Nechť (n_0,m_0) je nejmenší prvek množiny $L(\xi)$ (v uspořádání indukovaném z K). Existuje prvek $x_0 \in X^{n_0,m_0}$ tak, že $\xi \in W_{x_0}^{n_0,m_0}$. Avšak

$$\xi \notin \bigcup_{(i,j)<(n_0,m_0)} \bigcup_{t\in X^{i,j}} \mathrm{cl}\, V_t^{i,j},$$

jinak pomocí (3) snadno odvodíme spor s tím, že (n_0,m_0) je minimální prvek množiny $L(\xi)$. Tedy $\xi \in U_{x_0}^{n_0,m_0}$ podle (3) a proto λ pokrývá X.

Klademe

$$P = V_{x_1}^{n_1,m_1} \cap \left(\bigcap_{(i,j)\leq(n_1,m_1)} Q^{i,j} \right).$$

Z (a) vyplývá, že P je okolí bodu ξ. Nechť pro nějaké $(n,m) \in K$ a $x \in X^{n,m}$ je $P \cap U_x^{n,m} \neq \emptyset$. Pak ovšem $V_{x_1}^{n_1,m_1} \cap U_x^{n,m} \neq \emptyset$, odkud podle (3) je $(n_1,m_1) \geq (n,m)$. Potom však $P \subset Q_\xi^{n,m}$ a proto $Q_\xi^{n,m} \cap W_x^{n,m} \neq \emptyset$. Z (a) opět plyne, že $x = \mu(\xi, n, m+2)$. Ukázali jsme, že pokud $P \cap U_x^{n,m} \neq \emptyset$, musí být $(n,m) \leq (n_1,m_1)$ a $x = \mu(\xi, n, m+2)$. Tedy λ je lokálně konečný systém množin. Jejich otevřenost plyne z (3) a z (b), přičemž λ zjemňuje pokrytí ν, jak je zřejmé z definice množin $X^{n,m}$.

Tím je důkaz ukončen.

Poznámka. Všimněme si, že z (b) a (c) plyne, že systémy množin $(W_x^{n,m})_{x\in X, n,m\in\mathbf{N}}$, $(V_x^{n,m})_{x\in X, n,m\in\mathbf{N}}$ jsou σ-lokálně konečné báze (metrické) topologie topologického prostoru X.

15. Topologický prostor X se nazývá *lokálně metrizovatelný*, jestliže každý bod $x \in X$ má okolí U, které je metrizovatelné jako topologický podprostor X.

Dokažte, že topologický prostor je metrizovatelný právě tehdy, když je parakompaktní a lokálně metrizovatelný (*Smirnovův metrizační teorém*).

Řešení. Je-li topologický prostor X metrizovatelný, pak je zřejmě lokálně metrizovatelný a podle Stoneovy věty (Věta 15. odst. 6.6 str. 161) parakompaktní.

Obráceně, nechť X je parakompaktní a lokálně metrizovatelný. Ukážeme, že X má bázi, která je σ-lokálně konečná. Pokryjeme X otevřenými množinami, které jsou metrizovatelné, a vybereme lokálně konečné zjemnění ν tohoto pokrytí. Podle definice každý prvek $U \in \nu$ je metrizovatelný; označme d_U metriku na U kompatibilní s topologií U. Otevřená koule $B_U(x, \varepsilon)$ (v metrice d_U), ležící v U, je otevřená podmnožina X. Pro pevné $n \in \mathbf{N}$ klademe $\nu^n = \{B_U(x, 1/n) \mid U \in \nu, x \in U\}$. Z parakompaktnosti X vyplývá, že existuje lokálně konečné zjemnění λ^n pokrytí ν^n pro každé $n \in \mathbf{N}$. Klademe $\lambda = \bigcup \lambda^n$. Pak λ je σ-lokálně konečné pokrytí X. Ukážeme, že λ je báze topologie topologického prostoru X. Buď $x \in X$ libovolný bod, V jeho okolí. Bod x je prvkem konečně mnoha množin z pokrytí ν; označme tyto množiny $U_1, U_2, \ldots, U_k$. Pak $V \cap U_i$ je okolí bodu x v množině U_i, existuje tedy $\varepsilon_i > 0$ takové, že $B_{U_i}(x, \varepsilon_i) \subset V \cap U_i$. Zvolme $n \in \mathbf{N}$ tak, aby $1/n < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k\}/2$. Systém množin λ^n pokrývá X, existuje tedy množina $W \in \lambda^n$ obsahující x. Protože λ^n je zjemnění ν^n, existuje pro nějaké $U \in \nu$ a nějaký bod $y \in U$ koule $B_U(y, 1/n)$, obsahující W. To znamená, že $x \in U$, a tedy U je některá z množin $U_1, U_2, \ldots, U_k$. Nechť např. $U = U_i$. Pak platí $B_{U_i}(y, 1/n) \subset B_{U_i}(x, \varepsilon_i)$, neboť $d(y, z) < 1/n$ implikuje $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) < 1/n + 1/n < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k\} \le \varepsilon_i$, a tedy $W \subset V$. Podle Věty 9. odst. 1.4 str. 7 je λ^n báze topologie topologického prostoru X. Tato topologie je parakompaktní, a tedy regulární. Podle Věty 12. odst. 6.5 str. 156 je prostor X metrizovatelný.

Topologické grupy

16. Ukažte, že grupa G, na níž je dána topologie, je topologickou grupou právě tehdy, když jsou spojitá zobrazení $G \ni x \to x^{-1} \in G$ a $G \times G \ni (x, y) \to x \cdot y \in G$.

Řešení. Označme e neutrální prvek grupy G a předpokládejme, že G je topologická grupa. Zobrazení $G \ni x \to (e, x) \in G \times G$ a $G \times G \ni (x, y) \to x \cdot y^{-1} \in G$ jsou spojitá, jejich kompozice $x \to x^{-1}$ je tedy také spojitá. Podobně zobrazení $(x, y) \to x \cdot y$ je spojité, neboť vzniká složením spojitých zobrazení $(x, y) \to (x, y^{-1})$, $(x, y) \to x \cdot y^{-1}$.

Obráceně, jsou-li zobrazení $x \to x^{-1}$, $(x, y) \to x \cdot y$ spojitá, pak také zobrazení $(x, y) \to x \cdot y^{-1}$ je spojité jako kompozice zobrazení $(x, y) \to (x, y^{-1})$ a $(x, y) \to x \cdot y$.

17. Buď X topologická grupa. Ukažte, že platí následující tvrzení:

(a) Zobrazení $x \to x^{-1}$ je homeomorfismus grupy G na sebe.

(b) Pro libovolné $x \in G$ jsou zobrazení $L_a : G \to G$, $R_a : G \to G$, definované vztahem $L_a(g) = a \cdot g$, $R_a(g) = g \cdot a$ (*levá* a *pravá translace* o prvek a), homeomorfismy.

(c) Pro libovolné dva body x, $y \in G$ existuje homeomorfismus $f : G \to G$ takový, že $f(x) = y$ (G je *homogenní prostor*).

Řešení. (a) Zobrazení $x \to x^{-1}$ je bijektní a spojité a je totožné se svým inverzním zobrazením.

(b) Zobrazení L_a je spojité jako kompozice spojitých zobrazení $x \to (a, x)$, $(x, y) \to x \cdot y$. Pro inverzní zobrazení platí $(L_a)^{-1} = L_b$, kde $b = a^{-1}$. Analogicky vyšetříme R_a.

(c) Zobrazení $G \ni z \to f(z) = z \cdot x^{-1} \cdot y \in G$ je hledaný homeomorfismus.

18. Buď G topologická grupa, $A \subset G$ podmnožina. Dokažte, že platí:

(a) Je-li A otevřená (resp. uzavřená), pak A^{-1} je otevřená (resp. uzavřená).

(b) Je-li A otevřená (resp. uzavřená), pak pro každé $x \in G$ je množina $x \cdot A$ a $A \cdot x$ otevřená (resp. uzavřená).

(c) Je-li A otevřená, pak pro libovolnou množinu $B \subset G$ jsou otevřené množiny $B \cdot A$ a $A \cdot B$.

Platí tvrzení (c), zaměníme-li slova "otevřená množina" za "uzavřená množina"?

Řešení. (a) Podle cv. 17 (a) jsou množiny A, A^{-1} homeomorfní.
(b) Podle cv. 17 (b) jsou množiny A, $x \cdot A = L_x(A)$, $A \cdot x = R_x(A)$ homeomorfní.
(c) Jelikož

$$A \cdot B = \bigcup_{x \in B} A \cdot x, \qquad B \cdot A = \bigcup_{x \in B} x \cdot A$$

a množiny $A \cdot x$, $x \cdot A$ jsou otevřené, jsou také množiny $A \cdot B$, $B \cdot A$ otevřené.

Tvrzení analogické s tvrzením (c) pro uzavřené množiny neplatí. Dokonce i v případě, že obě množiny A, B jsou uzavřené, nemusí být množina $A \cdot B$ uzavřená. Uvedeme příklad. Uvažujme množinu $\mathbf{R}^2$ s grupovou operací $+$, definovanou vztahem $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2)$, kde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ (operace sčítání). $\mathbf{R}^2$ s touto operací je topologická grupa. Položme

$$A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\, 0 \leq x_2 \leq 1 - \frac{1}{x_1 + 1} \right\},$$
$$B = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 = 0 \right\}.$$

Množiny A, B jsou uzavřené. Pro množinu $A + B$ dostáváme $A + B = \{x + y \in \mathbf{R}^2 \mid x \in A, y \in B\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \in [0, 1)\}$, $A + B$ tedy není uzavřená.

19. Nechť G je topologická grupa, e její neutrální prvek.
(a) Je-li U okolí e, pak U^{-1} je okolí e.
(b) Je-li U okolí e, pak existuje okolí V bodu e takové, že
$V^{-1} = V$ a $V \subset U$.
(c) Ke každému okolí U bodu e existuje okolí V bodu e takové, že $V \cdot V \subset U$.
(d) Ke každému okolí U bodu e existují okolí V_1, V_2 bodu e taková, že $V_1 \cdot V_1^{-1} \subset U$, $V_2^{-1} \cdot V_2 \subset U$.
(e) Je-li U okolí e, pak pro každé $x \in G$ je $x \cdot U \cdot x^{-1}$ okolí e.
Dokažte.

Řešení. (a) Množiny U, U^{-1} jsou homeomorfní (cv. 17 (a)) a U^{-1} obsahuje e.
(b) Klademe $V = U \cap U^{-1}$. V je otevřená množina obsahující e, $V \subset U$ a platí $V^{-1} = U^{-1} \cap U = V$.
(c) Zobrazení $G \times G \ni (x, y) \to x \cdot y \in G$ je spojité, ke každému okolí U bodu e tedy existují okolí W_1, W_2 bodu e taková, že $W_1 \cdot W_2 \subset U$. Klademe $V = W_1 \cap W_2$. Pak $V \cdot V \subset W_1 \cdot W_2 \subset U$.
(d) Důkaz je podobný jako v (c).
(e) Množina $x \cdot U \cdot x^{-1}$ je otevřená (je homeomorfní s U) a obsahuje e.

20. Dokažte, že je-li topologická grupa T_0-prostor, pak je Hausdorffův prostor.

Řešení. Nechť G je topologická grupa, x, $y \in G$ dva různé body. Existuje okolí W bodu y takové, že $x \notin W$. Přitom $W = y \cdot U$, kde U je okolí neutrálního prvku e. Tedy $x \notin y \cdot U$, t.j. $y^{-1} \cdot x \notin U$. Podle cv. 19 (d) existuje okolí V bodu e takové, že $V \cdot V^{-1} \subset U$. Množina $x \cdot V$ (resp. $y \cdot V$) je okolí bodu x (resp. y) a platí $x \cdot V \cap y \cdot V = \emptyset$. Kdyby totiž existoval bod $z \in x \cdot V \cap y \cdot V$, platilo by $x^{-1} \cdot z \in V$, $y^{-1} \cdot z \in V$, a tedy $z^{-1} \cdot x \in V^{-1}$ a $y^{-1} \cdot z \in V$. Odtud $y^{-1} \cdot z \cdot z^{-1} \cdot x \in V \cdot V^{-1} \subset U$, t.j. $y^{-1} \cdot x \in U$, což je spor s výběrem množiny U.

21. Buď G topologická grupa, H její podgrupa, uvažovaná s topologií podprostoru. Dokažte, že platí:
(a) $\operatorname{cl} H$ je podgrupa G.
(b) Je-li $\operatorname{int} H \neq \emptyset$, pak H je otevřená v G.
(c) Je-li H otevřená v G, pak je také uzavřená v G.

Řešení. (a) Z definice podgrupy je zřejmé, že stačí ukázat, že pro libovolné dva body x, $y \in \operatorname{cl} H$ platí $x \cdot y^{-1} \in \operatorname{cl} H$. Ukážeme, že libovolné okolí W bodu $x \cdot y^{-1}$ má neprázdný průnik s H. Zobrazení $(x, y) \to x \cdot y^{-1}$ je spojité, existují tedy okolí $U \ni x$, $V \ni y$ v G taková, že $U \cdot V^{-1} \subset W$. Jelikož $x \in \operatorname{cl} H$, $y \in \operatorname{cl} H$, existují body a, $b \in H$ takové, že $a \in U$, $b \in V$. To ovšem znamená, že $a \cdot b^{-1} \in U \cdot V^{-1}$. Jelikož $a \cdot b^{-1} \in H$, platí $U \cdot V^{-1} \cap H \subset W \cap H \neq \emptyset$.

(b) Nechť $x \in \operatorname{int} H$, W je okolí x takové, že $W \subset H$. $W = x \cdot U$, kde U je okolí e. Buď $y \in H$ libovolný bod. $y \cdot U$ je okolí y a platí $y \cdot U = y \cdot (x^{-1})W) = (y \cdot x^{-1}) \cdot W \subset H$, neboť $x^{-1} \in H$ a také $y \cdot x^{-1} \in H$.

(c) Buď $H \subset G$ otevřená množina. Ukážeme, že $G \backslash H = (G \backslash H) \cdot H$. Nechť $x \in G \backslash H$. Pak $x = x \cdot e \in (G \backslash H) \cdot H$, t.j. $G \backslash H \subset (G \backslash H) \cdot H$. Obráceně, nechť $x \in (G \backslash H) \cdot H$. Pak $x = y \cdot z$, kde $y \in G \backslash H$ a $z \in H$. Odtud plyne, že $y \notin H$, a tedy také $x \notin H$ (H je podgrupa), t.j. $x \in G \backslash H$. Dostali jsme tak $(G \backslash H) \cdot H \subset G \backslash H$, což dokazuje, že platí výše uvedená rovnost. Podle cv. 18 (c) je množina $(G \backslash H) \cdot H$ otevřená, což dokazuje uzavřenost H.

22. Uveďte příklady topologických grup.

Řešení. (a) Každá grupa, uvažovaná jako triviální topologický prostor, je topologická grupa.

(b) Každá grupa, uvažovaná jako diskrétní topologický prostor, je topologická grupa.

(c) (Reálný nebo komplexní) konečněrozměrný vektorový prostor s operací sčítání vektorů a s přirozenou topologií je (komutativní) topologická grupa (př. (6) odst. 3.7 str. 44).

(d) Množina $\mathbf{R} \backslash \{0\}$ s operací násobení reálných čísel (*multiplikativní grupa reálných čísel*) s přirozenou topologií je topologická grupa. Množina kladných čísel $\mathbf{R}^+$ s operací násobení a s indukovanou topologií je její podgrupa. Zobrazení $\mathbf{R} \ni t \to e^t \in \mathbf{R}^+$ je izomorfismus grup a homeomorfismus.

(e) Označme $GL_n(\mathbf{R})$ grupu čtvercových regulárních matic řádu n jejichž prvky jsou reálná čísla. Uvažujme $GL_n(\mathbf{R})$ jako topologický podprostor Euklidova prostoru $\mathbf{R}^{n^2}$. Platí $GL_n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{n^2} \backslash \{A \in \mathbf{R}^{n^2} \mid \det A = 0\}$, kde $\det A$ označujme determinant matice A. Funkce det je ovšem spojitá, takže množina bodů A, pro které $\det A = 0$, je uzavřená (Důsledek (a) Věty 8. odst. 6.2 str. **??**); $GL_n(\mathbf{R})$ je tedy otevřená množina.

Je zřejmé, že násobení matic $GL_n(\mathbf{R}) \times GL_n(\mathbf{R}) \ni (A, B) \to A \cdot B \in GL_n(\mathbf{R})$ je spojité: vzniká zúžením definičního oboru i hodnot spojitého zobrazení $\mathbf{R}^{n^2} \times \mathbf{R}^{n^2} \ni (A', B') \to A' \cdot B' \in \mathbf{R}^{n^2}$. Ukážeme, že také zobrazení $GL_n(\mathbf{R}) \ni A \to A^{-1} \in GL_n(\mathbf{R})$ je spojité. Funkce det, zúžená na topologický podprostor $GL_n(\mathbf{R})$ topologického prostoru $\mathbf{R}^{n^2}$, je spojitá a všude různá od nuly; funkce $GL_n(\mathbf{R}) \ni A \to 1/\det A \in \mathbf{R}$ je tedy také spojitá (př. (3) odst. 3.7 str. 43). Z definice inverzní matice již nyní snadno vyvodíme, že zobrazení $GL_n(\mathbf{R}) \ni A \to A^{-1} \in GL_n(\mathbf{R})$ je spojité.

$GL_n(\mathbf{R})$ s topologií podprostoru Euklidova prostoru $\mathbf{R}^{n^2}$je tedy topologická grupa; nazývá se *obecná lineární grupa řádu n.*

(f) Každá podgrupa topologické grupy (s indukovanou topologií) je topologická grupa. Uvedeme některé podgrupy obecné lineární grupy

$GL_n(\mathbf{R})$ ("maticové grupy"): *speciální lineární grupa* $SL_n(\mathbf{R}) = \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid \det A = 1\}$, *ortogonální grupa* $O_n(\mathbf{R}) = \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid A \cdot A^t = E\}$, kde A^t je transponovaná matice k matici A a E je jednotková matice, *speciální ortogonální grupa* $SO_n(\mathbf{R}) = O_n(\mathbf{R}) \cap SL_n(\mathbf{R})$.

(g) Množina komplexních čísel $S = \{z \in \mathbf{C} \mid z = x + iy, |z| = 1\}$ spolu s násobením komplexních čísel a s přirozenou topologií je topologická grupa: zobrazení $S \times S \ni (z_1, z_2) \to z_1 \cdot z_2^{-1} \in S$, kde $z^{-1} = z^*$ je komplexně sdružené číslo, vzniká zúžením definičního oboru a oboru hodnot spojitého zobrazení $(z_1, z_2) \to z_1 \cdot z_2$.

Zobrazení $\mathbf{R} \ni t \to f(t) = e^{2\pi i t} \in S$, kde $\mathbf{R}$ je uvažováno jako topologická grupa s operací sčítání (viz (c)), je homomorfismus grup a je spojité.

(h) Podobně jako v (e) lze definovat *komplexní obecnou lineálrní grupu* $GL_n(\mathbf{C})$ a její podgrupy $SL_n(\mathbf{C}) = \{A \in GL_n(\mathbf{C}) \mid \det A = 1\}$ (*komplexní speciální lineární grupa*), $U_n = \{A \in GL_n(\mathbf{C}) \mid A \cdot (A^*)^t = E\}$, kde A^* označuje matici komplexně sdruženou k A (*unitární grupa*), $SU_n =$

$\{A \in U_n \mid \det A = 1\}$ (*speciální unitární grupa*); všechny tyto grupy mají přirozenou strukturu topologických grup.

23. Rozhodněte, které z topologických grup $SL_n(\mathbf{R})$, $O_n(\mathbf{R})$, $SO_n(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}^{n^2}$, $S \subset \mathbf{C}$, $GL_n(\mathbf{C})$, $SL_n(\mathbf{C})$, U_n, $SU_n \subset \mathbf{C}^{n^2}$ jsou otevřené (resp. uzavřené).

Řešení. Platí $SL_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\{1\})$, takže tato množina je uzavřená. Dále pro $A \in \mathbf{R}^{n^2}$, $A = (a_{ij})$, klademe

$$f(A) = A \cdot A^t = \left(\sum_k a_{ik} a_{jk} \right);$$

dostáváme spojité zobrazení $f : \mathbf{R}^{n^2} \to \mathbf{R}^{n^2}$. Platí $O_n(\mathbf{R}) = f^{-1}(E)$, takže množina $O_n(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}^{n^2}$ je uzavřená. Dále uvažujeme-li funkci det zúženou na $O_n(\mathbf{R})$, platí $SO_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\{1\}) \subset O_n(\mathbf{R})$; $SO_n(\mathbf{R})$ je tedy uzavřená v $O_n(\mathbf{R})$ a tedy také v Euklidově prostoru $\mathbf{R}^{n^2}$ (Věta 4. (c) odst. 3.1 str. 32).

S je uzavřená v $\mathbf{C}$. $GL_n(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}^{n^2}$ je otevřená, $SL_n(\mathbf{C})$, U_n a SU_n jsou uzavřené množiny v $\mathbf{C}^{n^2}$.

Topologické vektorové prostory

24. Rozhodněte, zda vektorový prostor $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ s topologií τ, kde τ je (a) silný součin přirozených topologií, (b) součin přirozených topologií na množině reálných čísel $\mathbf{R}$, je topologický vektorový prostor.

Řešení. V obou případech je $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ Hausdorffův prostor. Označme π_1, (resp. π_2) první (resp. druhou) projekci součinu $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Vyšetříme spojitost zobrazení $F : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, definovaného vztahem $F = \pi_1 + \pi_2$. Analogicky označme ρ (resp. π) první (resp. druhou) projekci součinu $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$; vyšetříme spojitost zobrazení $G : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, definovaného vztahem $G = \rho \cdot \pi$. Každé ze zobrazení π_1, π_2, ρ, π je spojité (Věta 7. (a) odst. 3.2 str. 34).

(a) Uvažujme na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ silný součin přirozených topologií. Dokážeme, že pro libovolný topologický prostor X a libovolná spojitá zobrazení $f, g : X \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ jsou zobrazení $f + g$, $f \cdot g : X \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ spojitá.

Označme $h = f + g$. Buď $x \in X$ libovolný bod, $U = (h^1(x) - \varepsilon^1, h^1(x) + \varepsilon^1) \times (h^2(x) - \varepsilon^2, h^2(x) + \varepsilon^2) \times \cdots$ prvek báze topologie silného součinu v bodě $h(x)$. Existují okolí V_1, V_2 bodu x taková, že $f(V_1) \subset (f^1(x) - \varepsilon^1/2,\ f^1(x) + \varepsilon^1/2) \times (f^2(x) - \varepsilon^2/2, f^2(x) + \varepsilon^2/2) \times \cdots$ (spojitost f v bodě x), $g(V_2) \subset (g^1(x) - \varepsilon^1/2, g^1(x) + \varepsilon^1/2) \times (g^2(x) - \varepsilon^2/2, g^2(x) + \varepsilon^2/2) \times \cdots$ (spojitost g v bodě x). Buď $y \in V_1 \cap V_2$ libovolný bod. Pak pro každé i platí $|f^i(y) - f^i(x)| < \varepsilon^i/2, |g^i(x)| < \varepsilon^i/2$. Odtud $|h^i(y) - h^i(x)| < \varepsilon^i$ a tedy $h(y) \subset U$, t.j. $h(V_1 \cap V_2) \subset U$. Zobrazení h je tedy spojité v bodě x.

Označme $h = f \cdot g$. Buď $x \in X$ libovolný bod, $U = (h^1(x) - \varepsilon^1, h^1(x) + \varepsilon^1) \times (h^2(x) - \varepsilon^2, h^2(x) + \varepsilon^2) \times \cdots$ prvek báze topologie silného součinu v bodě $h(x)$. Podobně jako v př. (3) odst. 3.7 str. 43 klademe

$$\varepsilon_1^i = \frac{1}{2} \left(\left(\left(|f^i(x)| + |g^i(x)| \right)^2 + 4 \right)^{\frac{1}{2}} - |f^i(x)| - |g^i(x)| \right).$$

Existují okolí V_1, V_2 bodu x taková, že $f(V_1) \subset (f^1(x) - \varepsilon_1^1, f^1(x) + \varepsilon_1^1) \times (f^2(x) - \varepsilon_1^2, f^2(x) + \varepsilon_1^2) \times \cdots$ (spojitost f v bodě x), $g(V_2) \subset (g^1(x) - \varepsilon_1^1, g^1(x) + \varepsilon_1^1) \times (g^2(x) - \varepsilon_1^2, g^2(x) + \varepsilon_1^2) \times \cdots$ (spojitost g v bodě x). Buď $y \in V_1 \cap V_2$ libovolný bod. Pro každé $i \in \mathbf{N}$ dostaneme podobně jako v př. (3) odst. 3.7 str. 43 $|h^i(y) - h^i(x)| < (\varepsilon_1^i)^2 + (|f^i(x)| + |g^i(x)|) \cdot \varepsilon_1^i = \varepsilon$. Odtud $h(V_1 \cap V_2) \subset U$, takže funkce h je spojitá v bodě x.

Vektorový prostor $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ se silným součinem přirozených topologií je tedy topologický vektorový prostor.

(b) Jelikož topologie součinu na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ je slabší než topologie silného součinu, ze spojitosti zobrazení $f+g$, $f \cdot g$ vyšetřovaných v (a) vyplývá jejich spojitost v topologii součinu. Vektorový prostor $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ s topologií součinu přirozených topologií je tedy také topologický vektorový prostor.

Buď E reálný (resp. komplexní) vektorový prostor. Množina $A \subset E$ se nazývá *vyvážená*, jestliže pro každé $a \in \mathbf{R}$ (resp. $a \in \mathbf{C}$) takové, že $|a| \leq 1$, platí $a \cdot A \subset A$. Pro libovolnou neprázdnou množinu $B \subset E$ je množina $B' = \{\xi \in E \mid \xi = a \cdot \zeta, |a| \leq 1, \zeta \in B\}$ vyvážená; nazývá se *vyvážený obal* množiny B. Zřejmě $B \subset B'$.

25. Nechť σ_0 je lokální báze topologického vektorového prostoru E v bodě 0. Systém množin σ_0' tvořený vyváženými obaly množin ze systému σ, je lokální báze topologického vektorového prostoru v bodě 0. Ukažte.

Ř e š e n í . Ukážeme, že vyvážený obal W' okolí W nulového vektoru 0 je okolí 0. Zřejmě $0 \in W'$. Buď $\xi \in W'$ libovolný nenulový vektor. Podle definice vyváženého obalu $\xi = a \cdot \zeta$, kde $\zeta \in W$ a $|a| \leq 1$; zřejmě $a \neq 0$ a zobrazení $E \ni \eta \to a \cdot \eta \in E$ je homeomorfismus. Nechť U je okolí bodu ζ ležící ve W; pak množina $a \cdot U$ obsahuje ξ, je otevřená jako homeomorfní obraz otevřené množiny a leží ve W' jelikož W' je vyvážená množina.

Buď U libovolný prvek báze σ_0. Ukážeme, že existuje vyvážené okolí V bodu 0 tak, že $V \subset U$. Zobrazení $\mathbf{R} \times E \ni (t, \eta) \to f(t, \eta) = t \cdot \eta \in E$ je spojité v bodě $(0,0)$. Existuje tedy číslo $\varepsilon > 0$ a okolí W bodu $0 \in E$ tak, že $f([0,\varepsilon) \times W) \subset U$. Označme $V = f([0,\varepsilon) \times W)$. Množina V obsahuje nulový vektor a zřejmě otevřená, neboť je sjednocením otevřených množin $t \cdot W$, kde t probíhá interval $[0,\varepsilon)$. Ukážeme, že V je vyvážená. Nechť $\xi \in W$, $a \in [0,1]$. Pak $\xi = t \cdot \zeta = f(t,\zeta)$ pro jisté $t \in [0,\varepsilon)$ a $\zeta \in W$. Pro vektor $a \cdot \xi$ dostáváme $a \cdot \xi = at \cdot \zeta = f(at, \zeta) \in V$, jelikož $at < \varepsilon$.

Systém σ_0 je ovšem lokální báze v bodě 0, existuje tedy prvek $U_0 \in \sigma_0$ tak, že $U_0 \subset V$. Vyvážený obal U_0' množiny U_0 je otevřená množina; přitom $U_0' \subset V' = V \subset U$, což jsme chtěli ukázat.

26. Dokažte, že na jednorozměrném reálném nebo komplexním vektorovém prostoru E existuje jediná topologie, se kterou má E strukturu topologického vektorového prostoru.

Ř e š e n í . Buď $e \in E$ nenulový vektor, který vezmeme za bázi vektorového prostoru E. Nechť E má strukturu topologického vektorového prostoru. Stačí ukázat, že zobrazení $E \ni \xi \to f_e(\xi) = \xi^0 \in \mathbf{R}$, kde $\xi = \xi^0 \cdot e$, je lineární homeomorfismus. Předpokládejme, že vektorový prostor E je reálný.

Zobrazení f_e je lineární bijekce a inverzní zobrazení $f_e^{-1} : \mathbf{R} \to E$ je spojité, neboť je zúžením spojitého zobrazení $\mathbf{R} \times E \ni (a, \xi) \to a \cdot \xi \in E$. Ukážeme, že zobrazení f_e je spojité. Stačí ukázat, že je spojité v bodě $0 \in E$. Buď $\varepsilon > 0$. Nalezneme okolí V nulového vektoru $0 \in E$ takové, že $f_e(V) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$. Zvolme $c \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo $0 < c < \varepsilon$. Topologický prostor E je Hausdorffův, takže existuje okolí U bodu $0 \in E$ neobsahující bod $c \cdot e$. Dále existuje vyvážené otevřené okolí V bodu $0 \in E$ takové, že $V \subset U$ (cv. 25 kap. 6). Ukážeme, že pro každé $\xi \in V$ platí $f_e(\xi) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, t.j. $f_e(V) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$. Pro $\xi = 0$ je $f_e(\xi) = 0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Nechť $\xi = \xi^0 \cdot e \neq 0$, t.j. $\xi^0 \neq 0$. Kdyby platilo $|\xi^0| \geq c$, pak by muselo platit

$$c \cdot e = \frac{c}{|\xi^0|} \cdot |\xi^0| \cdot e = \frac{c}{|\xi^0|} \cdot \xi \in V$$

jelikož $c/|\xi^0| \leq 1$, což ovšem není možné, jelikož $c \cdot e \notin U$. Platí tedy $|\xi^0| < c$, t.j. $f_e(\xi) = \xi^0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a důkaz spojitosti lineárního zobrazení f_e v bodě 0 je ukončen.

V případě komplexního vektorového prostoru E se postupuje analogicky.

Označme $\oplus$ *přímý součet* vektorových podprostorů vektorového prostoru. Buď E topologický vektorový prostor, E_1, E_2, $\ldots$, E_n jeho vektorové podprostory takové, že $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus$

E_n. Řekneme, že E je *topologický přímý součet* podprostorů E_1, E_2, ..., E_n (uvažovaných jako topologické vektorové prostory), jestliže kanonické bijektivní zobrazení $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \to \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ součinu $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ na E je homeomorfismus.

27. Nechť E je topologický vektorový prostor, který je přímým součtem svých podprostorů E_1, E_2, ..., E_n. E je topologickým přímým součtem podprostorů E_1, E_2, ..., E_n tehdy a jen tehdy, když ze zobrazení $u_i : E \to E_i$, přiřazující vektoru $\xi \in E$ jeho komponentu $\xi_i \in E_i$, je spojité.

Řešení. Nechť E je topologický přímý součet svých podprostorů E_1, E_2, ..., E_n. Podle definice zobrazení $E \ni \xi \to (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, definované rozkladem $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, je spojité; kompozicí tohoto zobrazení s projekcí součinu $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ na E_i dostaneme zobrazení u_i, které je zřejmě spojité.

Obráceně nechť E je topologický vektorový prostor, který je přímým součtem svých vektorových podprostorů E_1, E_2, ..., E_n, t.j. $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$. Předpokládejme, že každé ze zobrazení $u_i : E \to E_i$ je spojité. Pak zobrazení $E \ni \xi \to (u_1(\xi), u_2(\xi), \dots, u_n(\xi)) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ je také spojité (Věta 10. (b) odst. 3.3 str. 36). Jelikož zobrazení $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \ni (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \to \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \in E$ je spojité jako zúžení sčítání vektorů na topologický podprostor, je toto zobrazení homeomorfismem.

28. Je-li topologický vektorový prostor E topologickým přímým součtem svých podprostorů E_1, E_2, ..., E_n, pak každý z podprostorů E_1, E_2, ..., E_n je uzavřený.

Řešení. Nechť $n = 2$, $E = E_1 \oplus E_2$. Nechť $f : E_1 \times E_2 \to E$ označuje kanonický homeomorfismus. Buď $\xi \in E$ vektor takový, že $\xi \notin E_1$. Pak $\xi = \xi_1 + \xi_2$, kde $\xi_1 \in E_1$, $\xi_2 \in E_2$, $\xi_2 \neq 0$. Platí $f(\xi_1, \xi_2) = \xi$. Z oddělitelnosti E_2 vyplývá, že existuje okolí U bodu ξ_2 v E_2, neobsahující nulový vektor $0 \in E_2$. Jelikož f je homeomorfismus, $f(E_1 \times U)$ je okolí bodu ξ, které neobsahuje body podprostoru E_1. Odtud je již vidět, že topologický podprostor $E_1 \subset E$ je uzavřený.

29. Buď E reálný (nebo komplexní) vektorový prostor, F jeho vektorový podprostor, E/F faktorový prostor (t.j. faktorový prostor podle ekvivalence "$\xi \sim \zeta$, jestliže $\xi - \zeta \in F$"). Označme $\varphi : E \to E/F$ faktorovou projekci a uvažujme E/F jako faktorový prostor topologického prostoru E. Ukažte:

(a) Zobrazení φ je otevřené.

(b) Je-li σ_0 lokální báze topologie v bodě $0 \in E$, pak systém množin $\varphi(\sigma_0) = \{V \subset E/F \mid V = \varphi(U), U \in \sigma_0\}$ je lokální báze v bodě $0 \in E/F$.

(c) E/F je topologický vektorový prostor tehdy a jen tehdy, když F je uzavřený podprostor E.

Řešení. (a) Pro libovolnou otevřenou množinu $U \subset E$ platí

$$\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U + F = \bigcup_{\zeta \in F} (\zeta + U),$$

což je jako sjednocení otevřených množin otevřená množina v E. Podle definice faktorové topologie je tedy množina $\varphi(U) \subset E/F$ otevřená.

(b) Jelikož podle (a) je pro každé $U \in \sigma_0$ množina $\varphi(U) \in \varphi(\sigma_0)$ otevřená, stačí ukázat, že pro libovolné okolí W bodu $0 \in E/F$ existuje $U \in \sigma_0$ tak, že $\varphi(U) \subset W$. Množina $\varphi^{-1}(W)$ je otevřená, jelikož φ je spojité, existuje tedy $U \in \sigma_0$ tak, že $U \subset \varphi^{-1}(W)$, t.j. $\varphi(U) \subset \varphi(\varphi^{-1}(W)) = W$ jelikož φ je surjektivní.

(c) Je-li E/F topologický vektorový prostor, pak podle definice E/F je Hausdorffův. Množina $\{0\} \in E/F$ je tedy uzavřená a její vzor $\varphi^{-1}(0) = F$ je uzavřená množina.

Předpokládejme nyní, že F je uzavřený podprostor. Ukážeme nejdříve (bez použití tohoto předpokladu), že vektorové operace v E/F jsou spojité. Označme f (rep. $\bar{f}$) sčítání vektorů na E (resp. E/F) a g (resp. $\bar{g}$) násobení vektoru skalárem na E (resp. E/F). Dostáváme diagramy (v případě, kdy E je reálný vektorový prostor)

$$
\begin{tikzcd}
E\times E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] & E \arrow[d, "\varphi"] \\
E/F\times E/F \arrow[r, "\bar{f}"] & E/F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{R}\times E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{R}}\times\varphi"'] & E \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbf{R}\times E/F \arrow[r, "\bar{g}"] & E/F
\end{tikzcd}
$$

V těchto diagramech jsou zobrazení $\varphi \times \varphi$ a $\mathrm{id}_{\mathbf{R}} \times\varphi$ otevřená (Věta 10. (d) odst. 3.3 str. 36) a surjektivní; pro otevřenou množinu $W \subset E/F$ tedy platí

$$\bar{f}^{-1}(W) = (\varphi\times\varphi)(\varphi\times\varphi)^{-1}\left(\bar{f}^{-1}(W)\right)(\varphi\times\varphi)\left(f^{-1}\left(\varphi^{-1}(W)\right)\right),$$

což je otevřená množina v $E/F \times E/F$; analogicky se ukáže, že $\bar{g}^{-1}(W)$je otevřená množina v $\mathbf{R} \times E/F$. Zobrazení $\bar{f}$, $\bar{g}$ jsou tedy spojitá.

Zbývá ukázat, že faktorový prostor E/F je Hausdorffův. Ekvivalence definující faktorový prostor E/F je otevřená, jelikož φ je otevřené zobrazení podle (a). Dále graf této ekvivalence $\{(\xi,\zeta) \in E\times E \mid \varphi(\xi)\varphi(\zeta)\} = \{(\xi,\zeta)\in E\times E \mid \xi-\zeta \in F\}$ je uzavřená množina, neboť je vzorem uzavřené množiny F vzhledem k zobrazení $E\times E \ni (\xi,\zeta) \to \xi-\zeta \in E$. Podle Věty 20. (b) odst. 3.6 str. 42 je tedy E/F Hausdorffův prostor.

30. Buď E topologický vektorový prostor, E_1, E_2 jeho vektorové podprostory, $\dim E_1 = 1$, a předpokládejme, že $E = E_1 \oplus E_2$. Označme $\varphi : E \to E/E_1$ faktorovou projekci a $u : E \to E_2$, definované vztahem $u(\xi) = \xi_2$, kde $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \in E_1$, $\xi_2 \in E_2$. Definujeme zobrazení $v : E/E_1 \to E_2$ vztahem $u = v \circ \varphi$. Dokažte, že následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:

(1) E je topologickým přímým součtem podprostorů E_1, E_2.

(2) Podprostory E_1, $E_2 \subset E$ jsou uzavřené a zobrazení v je homeomorfismus topologických vektorových prostorů.

Ř e š e n í . Předpokládejme, že $E = E_1 \oplus E_2$ je topologický přímý součet podprostorů. Pak E_1, E_2 jsou uzavřené (cv. 28). Dále u je spojité a je otevřené (cv. 29 (a)), takže v je spojité. Ovšem také φ je spojité a u je otevřené, odkud vyplývá, že v je otevřené. Zobrazení v je evidentně bijekce; je tedy homeomorfismus (Věta 4. odst. 2.1 str. 19).

Obráceně, předpokládejme, že je splněna podmínka (2). Chceme ukázat, že kanonické zobrazení $E_1 \times E_2 \ni (\xi,\zeta) \to f(\xi,\zeta) = \xi+\zeta \in E$ je homeomorfismus. f je zřejmě spojitá bijekce. Je tedy třeba dokázat, že zobrazení $f^{-1} : E \to E_1 \times E_2$ je spojité. Druhá složka tohoto zobrazení je rovna zobrazení $u = v\circ\varphi$ a je tedy podle předpokladu spojitá. Nechť u_1 označuje první složku zobrazení f^{-1}. Definujeme zobrazení $v_1 : E/E_2 \to E_1$ vztahem $u_1 = v_1 \circ \varphi_1$ ve kterém $\varphi_1 : E \to E/E_2$ je faktorová projekce. Dále označme $g : E_1 \to \mathbf{R}$ lineární homeomorfismus jednorozměrného topologického vektorového prostoru E_1 a $\mathbf{R}$ (cv. 26). Pak zobrazení $g\circ v_1 : E/E_2 \to \mathbf{R}$ je lineární izomorfismus a na základě cv. 26 opět dedukujeme, že $g \circ v_1$ je homeomorfismus. Zobrazení v_1 musí tedy být také homeomorfismus. První složka $u_1 = v_1 \circ \varphi_1$ zobrazení f^{-1} je jako kompozice spojitých zobrazení spojitá, čímž je důkaz ukončen.

Buď E topologický vektorový prostor, $S : I \to E$ síť v E. Síť S se nazývá *cauchyovská*, jestliže ke každému okolí nulového vektoru $0 \in E$ existuje index $\iota_0 \in I$ takový, že z podmínky ι_1, $\iota_2 \geq \iota_0$ vyplývá $S(\iota_1) - S(\iota_2) \in U$. Topologický vektorový prostor E se nazývá *úplný*, jestliže každá cauchyovská síť v E je konvergentní.

Podle Věty 7. odst. 4.2 str. 91 má každá konvergentní síť v E právě jednu limitu.

31. Dokažte, že každá konvergentní síť v topologickém vektorovém prostoru je cauchyovská.

Ř e š e n í . Buď $S : I \to E$ konvergentní síť v topologickém vektorovém prostoru E, $\xi \in E$ její limita. Buď U libovolné okolí nulového vektoru. Existuje okolí W nulového vektoru takové, že $W + W \subset U$ (cv. 19 (c) kap. 6). Zvolme vyvážené okolí V nulového vektoru takové, že $V \subset W$ (cv. 25); zřejmě $V + V \subset U$. Existuje index $\iota \in I$ takový, že $S(\iota) \in \xi + V$ pro každé $\iota \geq \iota_0$, t.j. $S(\iota) - \xi \in V$

pro každé $\iota \geq \iota_0$. Pro každé $\iota_1, \iota_2 \geq \iota_0$ tedy platí $S(\iota_1) - S(\iota_2) = S(\iota_1) - \xi + \xi - S(\iota_2) \in V + V \subset U$. Síť je tedy cauchyovská.

32. Buď X topologický vektorový prostor, $F \subset E$ vektorový podprostor. Dokažte:
(a) Je-li E úplný a F uzavřený, pak F je úplný.
(b) Je-li F úplný, pak je uzavřený.

Řešení. (a) Nechť jsou splněny předpoklady (a) a nechť S je libovolná cauchyovská síť v F. Existuje vektor $\xi \in E$, který je limitou sítě S. Podle Důsledku Věty 2. odst. 4.2 str. 89 $\xi \in F$, takže F je úplný.

(b) Nechť F je úplný a nechť $\xi \in \operatorname{cl} F$ je libovolný bod. Podle Věty 2. odst. 4.2 str. 88 existuje v F síť S, konvergující k bodu ξ. Síť S je tedy konvergentní (v E) a tedy cauchyovská (cv. 31). Z úplnosti F vyplývá, že $\lim S \in F$, t.j. $\xi \in F$. Platí tedy $\operatorname{cl} F \subset F$, takže F je uzavřený podprostor E.

Topologické vektorové prostory E, F se nazývají *lineárně homeomorfní*, jestliže existuje izomorfismus $f : E \to F$, který je zároveň homeomorfismem topologických prostorů.

33. Jsou-li dva topologické vektorové prostory lineárně homeomorfní, pak jsou buď oba úplné nebo ani jeden z nich není úplný.

Řešení. Buď $f : E \to F$ lineární homeomorfismus topologických vektorových prostorů, buď $S : I \to F$ libovolná cauchyovská síť. Ukážeme, že obraz $f^{-1}(S)$ sítě S při zobrazení f^{-1} je cauchyovská síť v E. Nechť U je okolí nulového vektoru v F. Pak $f^{-1}(U)$ je okolí nulového vektoru v E a existuje index $\iota \in I$ takový, že pro všechna $\iota_1, \iota_2 \geq \iota_0$ platí $f^{-1}(S(\iota_1) - S(\iota_2)) = f^{-1}(S(\iota_1)) - f^{-1}(S(\iota_2)) \in f^{-1}(U)$. Síť $f^{-1}(S) = f^{-1} \circ S$ je tedy cauchyovská.

Obraz $f(S)$ libovolné cauchyovské sítě S v E je tedy cauchyovská síť v F. Dále konverguje-li síť S k vektoru $\xi \in E$, pak síť $f(S)$ konverguje k vektoru $f(\xi) \in F$ (Věta 5. odst. 4.2 str. 90).

Odsud již vyplývá, že E je úplný tehdy a jen tehdy, je-li úplný topologický vektorový prostor F.

34. Dokažte, že normovaný prostor je úplný jako topologický vektorový prostor právě tehdy, když je úplný jako metrický prostor (v metrice indukované normou).

Řešení. Buď E normovaný prostor, d metrika na E asociovaná s normou. Ukážeme, že posloupnost $S : \mathbf{N} \to E$ je cauchyovská ve smyslu topologických vektorových prostorů právě tehdy, když je cauchyovská ve smyslu metriky d.

Nechť $S : \mathbf{N} \to E$ je posloupnost cauchyovská ve smyslu vektorových topologických prostorů. Podle definice existuje ke každému okolí U nulového vektoru index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že $S(n_1) - S(n_2) \in U$ pro všechny indexy $n_1, n_2 \geq n_0$. Zřejmě tedy lze ke každé otevřené kouli $B_d(0, \varepsilon)$ nalézt index n_0 takový, že pro všechna $n_1, n_2 \geq n_0$ platí $S(n_1) - S(n_2) \in B_d(0, \varepsilon)$, t.j. $d(S(n_1) - S(n_2), 0) = \|S(n_1) - S(n_2)\| = d(S(n_1), S(n_2)) < \varepsilon$. Posloupnost S je tedy cauchyovská ve smyslu metrických prostorů. Obráceně, je-li S posloupnost cauchyovská ve smyslu metrických prostorů, pak ke každé otevřené kouli $B_d(0, \varepsilon)$ existuje index n_0 tak, že $d(S(n_1) - S(n_2), 0) < \varepsilon$, t.j. $S(n_1) - S(n_2) \in B_d(0, \varepsilon)$ pro všechna $n_1, n_2 \geq n_0$. Ovšem otevřené koule $B_d(0, \varepsilon)$, kde ε probíhá kladná čísla, tvoří lokální bázi topologie v bodě $0 \in E$; odtud vyplývá, že S je cauchyovská ve smyslu topologických vektorových prostorů.

Je-li E úplný jako topologický vektorový prostor, je zřejmě úplný jako metrický prostor. Dokážeme obrácené tvrzení.

Nechť E je úplný jako metrický prostor. Buď $S : I \to E$ cauchyovská síť v E. Zvolme spočetnou lokální bázi $\sigma_0 = (U_i)_{i \in \mathbf{N}}$ v bodě 0 takovou, že $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ (Věta 4. odst. 5.2 str. 113, Věta 10. odst. 1.5 str. 7). Existuje index λ_1 tak, že $S(\iota) - S(\kappa) \in U_1$ pro všechna $\iota, \kappa \geq \lambda_1$. Položme $y_1 = S(\lambda_1)$. Dále existuje index ι_2 tak, že $S(\iota) - S(\kappa) \in U_2$ pro každé $\iota, \kappa > \iota_2$, a index $\lambda_2 \geq \lambda_1, \iota_2$. Klademe $y_2 = S(\lambda_2)$. Takto lze pokračovat dál. Vzniká posloupnost $(y_i)_{i \in \mathbf{N}}$, která je zřejmě cauchyovská; označme ξ její limitu. Buď U libovolné okolí nulového vektoru, W okolí nulového vektoru takové, že $W + W \subset U$ (cv. 19 (c) kap. 6). Existuje index m tak, že $U_m \subset W$ a $y_n - \xi = S(\lambda_n) - \xi \in U_m$ pro každé $n \geq m$. Pro každé $\iota \in I$, $\iota \geq \lambda_m$, tedy platí $S(\iota) - \xi = S(\iota) - S(\lambda_m) + S(\lambda_m) - \xi \in U_m + U_m \subset W + W \subset U$, t.j. síť S konverguje k bodu ξ. Topologický vektorový prostor E je tedy úplný.

35. Dokažte:

(a) Přirozená topologie na reálném nebo komplexním konečněrozměrném vektorovém prostoru je jediná topologie, která je Hausdorffova, a ve které jsou operace sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem spojité.

(b) n-rozměrný podprostor reálného (resp. komplexního) topologického vektorového prostoru je lineárně homeomorfní s vektorovým prostorem $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) s přirozenou topologií.

(c) Každý konečněrozměrný vektorový podprostor topologického vektorového prostoru je uzavřený.

Ř e š e n í . Omezíme se na případ reálného vektorového prostoru; v případě komplexního vektorového prostoru se postupuje analogicky.

(a) Budeme postupovat indukcí podle dimenze vektorového prostoru. Podle cv. 26 tvrzení (a) platí pro jednorozměrný vektorový prostor.

Buď E n-rozměrný reálný topologický vektorový prostor, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ jako báze. Uvažujme $(n-1)$-rozměrný vektorový podprostor F v E, generovaný vektory $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$. F je topologie totožná s přirozenou topologií. Zobrazení $(\xi^1, \xi^2, dots, \xi^{n-1}) \to \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \ldots + \xi^{n-1} e_{n-1}$ Euklidova topologického vektorového prostoru $\mathbf{R}^{n-1}$ na F je tedy lineární homeomorfismus. Topologický prostor $\mathbf{R}^{n-1}$ je úplný, proto také F je úplný (cv. 33) a podle cv. 32 (b) je F uzavřený podprostor topologického vektorového prostoru E.

Označme F' jednorozměrný vektorový podprostor v E, generovaný vektorem e_n. Topologický vektorový prostor F' je lineárně homeomorfní s $\mathbf{R}$, je tedy také úplný a uzavřený v E. Faktorový vektorový prostor E/F' je topologický vektorový prostor (cv. 29 (c)), přičemž $\dim E/F' = n - 1$. Podle indukčního předpokladu je rovněž tento topologický vektorový prostor lineárně homeomorfní s $\mathbf{R}^{n-1}$, což znamená, že topologické vektorové prostory F a E/F' jsou lineárně homeomorfní. Podle cv. 30 je tedy E topologickým přímým součtem svých podprostorů F a F'.

Znamená to ovšem, že zobrazení $F \times F' \ni (\xi, \zeta) \in F \oplus F' = E$ je lineární homeomorfismus. Zbývá tedy dokázat, že součin $F \times F'$ je lineárně homeomorfní s $\mathbf{R}^n$. Označme $f : F \to \mathbf{R}^{n-1}$, $g : F' \to \mathbf{R}$ lineární homeomorfismy a pro každé $(\xi, \zeta) \in F \times F'$ položme $h(\xi, \zeta) = (f(\xi), g(\zeta))$. Tímto vztahem je definováno lineární zobrazení $h : F \times F' \to \mathbf{R}^n$. Toto zobrazení je surjektivní a jeho jádro je tvořeno nulovým vektorem, je tedy také injektivní; h je tedy lineární izomorfismus. Jelikož $h = f \times g$, t.j. h je součin zobrazení f, g, zobrazení h je spojité (Věta 10. (c) odst. 3.3 str. 36); zároveň zobrazení h je otevřené (Věta 10. (d) odst. 3.3 str. 36), takže h je homeomorfismus (Věta 4. odst. 2.1 str. 19). Tím je důkaz tvrzení (a) ukončen.

(b) Buď F n-rozměrný vektorový podprostor topologického vektorového prostoru E. F je topologický vektorový prostor v indukované topologii. Zároveň má přirozenou topologii (př. (6) odst. 3.7 str. 44), ve které je lineárně homeomorfní s $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$). Z již dokázaného tvrzení (a) vyplývá, že indukovaná topologie na F je totožná s přirozenou topologií a tvrzení (b) je dokázáno.

(c) Konečněrozměrný vektorový podprostor topologického vektorového prostoru je lineárně homeomorfní s nějakým Euklidovým topologickým prostorem $\mathbf{R}^n$, je tedy úplný (cv. 33) a uzavřený (cv. 32 (b)).

Normované prostory

Buď E vektorový prostor. Metrika d na E se nazývá *normovatelná*, jestliže existuje norma $\| \ \|$ na E tak, že pro každé ξ, $\zeta \in E$ platí $d(\xi, \zeta) = \|\xi - \zeta\|$. Existuje-li taková norma, pak je jediná: pro vektor $\xi \in E$ platí $\|\xi\| = d(\xi, 0)$.

Označme $t_\zeta : E \to E$ *translaci* o vektor ζ, t.j. zobrazení, definované vztahem $t_\zeta(\xi) = \zeta + \xi$.

36. (a) Dokažte: Metrika d na normovaném prostoru je normovatelná tehdy a jen tehdy, když jsou splněny tyto dvě podmínky:

(1) $d(t_\zeta(\xi_1), t_\zeta(\xi_2)) = d(\xi_1, \zeta_2)$ pro každé ζ, ξ_1, $\xi_2 \in E$ (*invariantnost metriky vůči translacím*).

(2) $d(a \cdot \xi, a \cdot \zeta) = |a| \cdot d(\xi, \zeta)$ pro libovolné ξ, $\zeta \in E$, $a \in \mathbf{R}$ (resp. $a \in \mathbf{C}$).

(b) Uveďte příklady normovatelných a nenormovatelných metrik.

Řešení. (a) Normovatelná metrika d zřejmě splňuje podmínky (1), (2). Obráceně, máme-li metriku d splňující podmínky (1), (2), pak vztahem $\|\xi\| = d(\xi, 0)$ je definována norma taková, že $d(\xi, \zeta) = \|\xi - \zeta\|$ pro libovolné vektory ξ, ζ.

(b) Přirozená metrika na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) je normovatelná.

Nechť E je n-rozměrný reálný vektorový prostor, $f : E \to \mathbf{R}^n$ lineární izomorfismus. Nechť d označuje přirozenou metriku na $\mathbf{R}^n$. Pro $\xi, \zeta \in E$ položme $\rho(\xi, \zeta) = d(f(\xi), f(\zeta))$. Snadno zjistíme, že ρ splňuje axiomy metriky na E. Tato metrika splňuje podmínky (1), (2) uvedené výše a je tedy normovatelná.

Diskrétní metrika na vektorovém prostoru je příkladem metriky, která není normovatelná.

Další příklad nenormovatelné metriky dostaneme, položíme-li

$$d(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\xi^i - \zeta^i|}{1 + |\xi^i - \zeta^i|},$$

kde $\xi = (\xi^i)$, $\zeta = (\zeta^i)$ jsou vektory z $\mathbf{R}^n$: zřejmě pro $\xi = (1, 0, \ldots, 0)$ a $a \in \mathbf{R}$, $|a| \neq 1$, je $d(a \cdot \xi, 0) \neq |a| \cdot d(\xi, 0)$. Při ověřování podmínek z definice metriky je třeba využít nerovnost

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|},$$

kde α, $\beta \in \mathbf{R}$ (resp. α, $\beta \in \mathbf{C}$) jsou libovolná čísla.

Nechť $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ jsou dvě normy na vektorovém prostoru E. Řekneme, že norma $\| \ \|_1$ je *slabší* než norma $\| \ \|_2$, jestliže topologie, indukovaná normou $\| \ \|_1$ je slabší, než topologie, indukovaná normou $\| \ \|_2$; v tomto případě také říkáme, že norma $\| \ \|_2$ je *silnější* než norma $\| \ \|_1$. Normy $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ se nazývají *ekvivalentní*, jestliže tyto topologie splývají.

37. Buďte $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ dvě normy na vektorovém prostoru E. Dokažte:

(a) Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(1) $\| \ \|_1$ je slabší než $\| \ \|_2$.

(2) Existuje číslo $k > 0$ takové, že pro každé $\xi \in E$ platí $\|\xi\|_1 \leq k.\ \|\xi\|_2$.

(b) Následující tři podmínky jsou ekvivalentní:

(1) Normy $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ jsou ekvivalentní.

(2) Existují čísla k_1, $k_2 > 0$ taková, že pro každé $\xi \in E$ platí $\|\xi\|_1 \leq k_1.\ \|\xi\|_2 \leq k_2 \cdot \|\xi\|_1$.

(3) Metriky indukované normami $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ jsou ekvivalentní.

(c) Je-li vektorový prostor E konečněrozměrný, pak normy $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ jsou ekvivalentní.

Uveďte příklady norem na konečněrozměrném vektorovém prostoru a tyto normy srovnejte.

Řešení. (a) Označme τ_1 (resp. τ_2) topologii, indukovanou normou $\| \ \|_1$ (resp. $\| \ \|_2$). Předpokládejme, že $\| \ \|_1$ je slabší než $\| \ \|_2$. Pak identické zobrazení id_E z (E, τ_2) do (E, τ_1) je spojité. Z jeho spojitosti v bodě 0 vyplývá, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé ξ, pro které $\|\xi\|_2 < \delta$, platí $\|\xi\|_1 < \varepsilon$. Buď $\xi \in E$ libovolný nenulový vektor. Položme $\varepsilon = 1$, $\xi_0 = (\delta/2\|\xi\|_2) \cdot \xi$. Pak $\|\xi_0\|_2 < \delta$, a tedy $\|\xi_0\|_1 = (\delta/2) \cdot (\|\xi\|_1/\|\xi\|_2) < 1$. Odtud $\|\xi\|_1 < (2/\delta) \cdot \|\xi\|_2$. Je-li $\xi = 0$, pak $\|\xi\|_1 = \|\xi\|_2 = 0$. Celkem

$$\|\xi\|_1 \leq \frac{2}{\delta} \|\xi\|_2$$

pro každé $\xi \in E$, což jsme chtěli ukázat.

Obráceně, nechť je splněna podmínka (2). Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a položme $\delta = \varepsilon/k$. Pak pro každé $\xi \in E$ takové, že $\|\xi\|_2 < \delta$, platí $\|\xi\|_1 < k \cdot \delta = \varepsilon$, a tedy identické zobrazení id_E z (E, τ_1) do (E, τ_2) je spojité. To ovšem znamená, že norma $\| \ \|_1$ je slabší než $\| \ \|_2$.

(b) Ekvivalence podmínek (1), (2) je důsledkem tvrzení (a). Ekvivalence podmínek (1) a (3) plyne z definice ekvivalentních norem a ekvivalentních metrik.

(c) Nechť E je konečněrozměrný vektorový prostor. Pak E má jedinou topologii, se kterou je topologickým vektorovým prostorem. (cv. 35). Každá norma na E tedy indukuje tuto topologii.

Uvedeme příklady norem na $\mathbf{C}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x^i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_{\max} \max_{1 \le i \le n} |x^i|.$$

V těchto výrazech $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Snadno lze ukázat, že pro každé $x \in \mathbf{C}^n$ platí

$$\|x\|_{\max} \le \|x\|_2 \le \sqrt{n} \cdot \|x_{\max}\|, \quad \|x\|_{\max} \le \|x\|_1 \le n \cdot \|x\|_{\max}.$$

Podobné příklady lze uvést pro $\mathbf{R}^n$.

38. Buď E metrizovatelný topologický vektorový prostor, d_1, d_2 dvě metriky na E. Označme τ_1 (resp. τ_2) topologii, indukovanou metrikou d_1 (resp. d_2). Rozhodněte, zda je pravdivé toto tvrzení: τ_1 je slabší právě tehdy, když existuje číslo $k > 0$ takové, že pro každé x, $y \in E$ platí $d_1(x, y) \le k \cdot d_2(x, y)$.

Ř e š e n í. 1. Uvedené tvrzení není pravdivé. Uvedeme příklad. Položme $E = \mathbf{R}$ a uvažujme na $\mathbf{R}$ metriky $d_1(x, y) = |x - y|$, $d_2(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Metrická topologie, indukovaná metrikou d_1, splývá s metrickou topologií, indukovanou d_2 a je totožná s přirozenou topologií na $\mathbf{R}$; $\mathbf{R}$ je tedy topologický vektorový prostor v obou metrikách. Předpokládejme, že existuje $k > 0$ tak, že pro každé x, $y \in \mathbf{R}$ platí $d_1(x, y) \le k \cdot d_2(x, y)$, t.j. $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|/|x - y| \ge 1/k$. Pro $y = 0$ ovšem platí

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 0,$$

což je spor. Všimněme si, že metrika d_2 není normovatelná (cv. 36).

2. Jsou-li metriky d_1, d_2 normovatelné, pak tvrzení platí (cv. 36, 37).

39. Ukažte, že norma $\| \ \|$ na vektorovém prostoru E je spojitá v topologii, indukované touto normou.

Ř e š e n í. Buď $\xi \in E$ libovolný bod, $(\|\xi\| - \varepsilon, \|\xi\| + \varepsilon)$ okolí bodu $\|\xi\| \in \mathbf{R}$. Pak $B(\xi, \varepsilon) = \{\zeta \in E \mid \|\xi - \zeta\| < \varepsilon\}$ je okolí bodu ξ takové, že pro každé $\eta \in B(\xi, \varepsilon)$ je $\|\eta\| \in (\|\xi\| - \varepsilon, \|\xi\| + \varepsilon)$. Skutečně, $|\,\|\xi\| - \|\eta\|\,| = |\,\|\xi - \eta + \eta\| - \|\eta\|\,| \le |\,\|\xi - \eta\| + \|\eta\| - \|\eta\|\,| = \|\xi - \eta\| < \varepsilon$.

40. Rozhodněte, zda topologie silného součinu $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ je indukovaná nějakou normou.

Ř e š e n í. Kdyby existovala norma, indukující topologii silného součinu, byla by tato topologie metrizovatelná; topologie silného součinu na $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ však není metrizovatelná, neboť ani topologie silného součinu na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ není metrizovatelná (cv. 11 kap. 5) a $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ (s topologií silného součinu) je homeomorfní s $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (se součinem topologií silných součinů).

41. Uvažujme množinu $\ell^2 = \{x \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid x = (x^1, x^2, x^3, \ldots), \sum |x^i|^2 < \infty\}$. Ukažte, že ℓ^2 je vektorový podprostor vektorového prostoru $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ a že vztahy

$$\|x\|_{\sup} = \sup\nolimits_{1 < i < \infty} |x^i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

definující normy na ℓ^2. Srovnejte topologie, indukované těmito normami. Srovnejte tyto topologie se součinem přirozených topologií a se silným součinem přirozených topologií na $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.

Rozhodněte, zda zobrazení f, g, definované vztahem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|, \quad g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}|x^i|$$

jsou normy na vektorovém prostoru x ℓ^2.

Řešení. Pro libovolné vektory $x = (x^1, x^2, x^3, \dots)$, $y = (y^1, y^2, y^3, \dots)$ z ℓ^2 a libovolné komplexní číslo a platí

$$|x^i + y^i|^2 \le 2(|x^i|^2 + |y^i|^2), \ \sum_{i=1}^{\infty} |a \cdot x^i|^2 = |a|^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^2.$$

Množina ℓ^2 je tedy uzavřená vzhledem ke sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem a ℓ^2 je vektorový podprostor $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.

Zřejmě každý prvek množiny ℓ^2 představuje ohraničenou posloupnost. Pro každé $x = (x^1, x^2, x^3, \dots) \in \ell^2$ existuje $k > 0$ tak, že $|x^i| < k$ pro všechna i; znamená to, že existuje číslo $\sup |x^i|$. Zobrazení $\| \, \|_{\sup}$, $\| \, \|_2$ splňují všechny podmínky z definice normy; trojúhelníkovou nerovnost pro normu $\| \, \|_2$ dostaneme z Minkowského nerovnosti (cv. 4 kap. 3) limitním přechodem pro $n \to \infty$.

Pro každé $x \in \ell^2$

$$\|x\|_2 = \sup |x^j| \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x^i|^2}{(\sup |x^j|)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \ge \sup |x^j| = \|x\|_{\sup}.$$

Topologie, indukovaná normou $\| \, \|_{\sup}$ je tedy slabší než topologie, indukovaná normou $\| \, \|_2$. Ukážeme, že tyto topologie nejsou ekvivalentní. Předpokládejme, že existuje $a > 0$ takové, že $\|x\|_{\sup} \ge a \cdot \|x\|_2$ pro každé $x \in \ell^2$. Volme postupně x tak, že $x^1 = 1$, $x^i = 0$ pro $i > 1$; $x^1 = x^2 = 1$, $x^i = 0$ pro $i > 2$; ...; $x^i = 1$ pro $i \le n$, $x^i = 0$ pro $i > n$; .... Dostaneme nerovnost $1 \ge a \cdot \sqrt{n}$, platnou pro každé $n \in \mathbf{N}$. Tuto nerovnost lze splnit jen pro $a = 0$ což je spor, který dokazuje, že uvažované normy nejsou ekvivalentní.

Označme τ součin přirozených topologií na $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ a τ' topologii, indukovanou na $\ell^2 \subset \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Dále označme τ_2 (resp. $\tau_{\sup}$) topologii na ℓ^2, indukovanou normou $\| \, \|_2$ (resp. $\| \, \|_{\sup}$). Zvolme libovolný prvek báze topologie $\tau_{\sup}$, $B_{\sup}(x, \varepsilon) = \{y \in \ell^2 \mid \sup |x^i - y^i| < \varepsilon\}$. Zřejmě pro každé $y \in B_{\sup}(x, \varepsilon)$ a $i \in \mathbf{N}$ platí $y^i \in B_d(x^i, \varepsilon)$, kde d je přirozená metrika na $\mathbf{C}$, a tedy

$$B_{\sup}(x, \varepsilon) = (\prod_{n \in \mathbf{N}} B_d(x^n, \varepsilon)) \cap \ell^2.$$

Zřejmě neexistuje prvek báze topologie τ' ležící v $B_{\sup}(x, \varepsilon)$, t.j. τ' není silnější než $\tau_{\sup}$ ani s $\tau_{\sup}$ nesplývá. Je-li naopak B prvek báze topologie τ tvaru

$$B = (B_d(x^1, \varepsilon^1) \times B_d(x^2, \varepsilon^2) \times \dots \times B_d(x^n, \varepsilon^n) \times \mathbf{C}^{\mathbf{N} \setminus \{1,2,\dots,n\}}) \cap \ell^2,$$

kde $B_d(x^i, \varepsilon^i)$ jsou otevřené koule v přirozené topologii na $\mathbf{C}$, pak ke každému bodu $y \in B$ existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, že $B_{\sup}(y, \varepsilon) \sup(y, \varepsilon) \subset B$; stačí zvolit za ε nejmenší z čísel $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \dots, \bar{\varepsilon}_n$ takových, že $B_d(y^i, \bar{\varepsilon}^i) \subset B_d(x^i, \varepsilon^i)$. Množina B je proto otevřená v topologii $\tau_{\sup}$. Topologie τ' a $\tau_{\sup}$ jsou tedy srovnatelné a platí $\tau' \subset \tau_{\sup}$. Celkově $\tau' \subset \tau_{\sup} \subset \tau_2$.

Označme τ_S topologii na množině ℓ^2, indukovanou silným součinem topologií na $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Zvolme libovolný prvek $B_2(x, \varepsilon)$ báze topologie τ_2 a libovolný bod $y \in B_2(x, \varepsilon)$. Existuje $\bar{\varepsilon} > 0$ takové, že $B_2(y, \bar{\varepsilon}) \subset B_2(x, \varepsilon)$. Položme pro každé $n \in \mathbf{N}$ $\delta^n = \bar{\varepsilon}/n\sqrt{2}$. Zřejmě

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\delta^n)^2 = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \bar{\varepsilon}^2.$$

Množina $(\prod B_d(y^n, \delta^n)^2) \cap \ell^2$ je tedy okolí bodu y v topologii τ_S, ležící v $B_2(y, \bar{\varepsilon})$, t.j. také v $B_2(x, \varepsilon)$. Obráceně, nechť

$$B = \left(\prod_{n \in \mathbf{N}} B_d(x^n, 1/n) \right) \cap \ell^2$$

je prvek báze topologie τ_S v bodě $x \in \ell^2$. Zřejmě neexistuje prvek $B_2(x, \varepsilon)$ báze topologie τ_2, ležící v B; muselo by totiž platit $|x^n - y^n| < \varepsilon \leq 1/n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, t.j. $\varepsilon = 0$. Dokázali jsme tedy, že $\tau_2 \subset \tau_S$. Celkově $\tau' \subset \tau_{\sup} \subset \tau_2 \subset \tau_S$.

Zobrazení g je norma na ℓ^2. Pro každé $x \in \ell^2$ a každé $i \in \mathbf{N}$ platí $|x^i| \leq c$ pro jisté $c > 0$ a tedy řada $c \cdot \sum 1/2^i$ majorizuje řadu $\sum |x^i|/2^i$. Řada $c \cdot \sum 1/2^i$ ovšem konverguje, tedy také řada $\sum |x^i|/2^i$ konverguje. Dosazením do podmínek, definujících normu, se přesvědčíme, že g je norma na ℓ^2.

Funkce f ovšem není definována na celém ℓ^2. Uvažujme např. vektor $x = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$ z $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Platí $\sum |x^i|^2 = \sum 1/i^2 < \infty$ a tedy $x \in \ell^2$. Ovšem řada $\sum 1/i$ diverguje (harmonická řada) a tedy $f(x)$ není definováno. f tedy není norma na ℓ^2.

42. Označme $\mathscr{L}^2([a,b])$ množinu komplexních funkcí reálné proměnné, kvadraticky integrovatelných na intervalu $[a,b]$, t.j. takových, že existuje integrál $\int_a^b |f(t)|^2 dt \in \mathbf{R}$. $\mathscr{L}^2([a,b])$ má přirozenou strukturu vektorového prostoru nad $\mathbf{C}$ a množina $\mathscr{L}^2_0([a,b])$ tvořená funkcemi $f \in \mathscr{L}^2([a,b])$. Označme $L^2([a,b])$ faktorový prostor $\mathscr{L}^2([a,b])/\mathscr{L}^2_0([a,b])$. Pro každé $f \in \mathscr{L}^2_0([a,b])$ klademe

$$p(f) = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zjistěte, zda funkce p je norma na $\mathscr{L}^2([a,b])$ (resp. $\mathscr{L}^2([a,b])$).

Ř e š e n í . $\mathscr{L}^2_0([a,b])$ je vektorový podprostor vektorového prostoru $\mathscr{L}^2([a,b])$, jelikož sjednocení dvou množin nulové míry je množina nulové míry.

Ukážeme, že funkce $p : \mathscr{L}^2([a,b]) \to \mathbf{R}$ není norma. Nejdříve dokážeme dvě nerovnosti. Pro libovolné funkce $f, g \in \mathscr{L}^2([a,b])$ platí $|f(t) \cdot g(t)| \leq |f(t)|^2/2 + |g(t)|^2/2$, a tedy funkce $f \cdot g$ je kvadraticky integrovatelná. Dále platí

$$\left(\int_a^b |f(t) \cdot g(t)| dt \right)^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |g(t)|^2 dt \\ - \tfrac{1}{2} \int_a^b \int_a^b |f(s)g(t) - f(t)g(s)|^2 ds dt,$$

jak snadno prověříme přímým výpočtem. Odtud dostáváme *Cauchyho–Bunjakovského nerovnost*

$$\left(\int_a^b |f(t) \cdot g(t)| dt \right)^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |g(t)|^2 dt.$$

Potom

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^2 dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt + \int_a^b |g(t)|^2 dt$$

$$+ 2\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt + \int_a^b |g(t)|^2 dt$$

$$+ 2\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

odkud plyne *Minkowského nerovnost*

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Z Minkowského nerovnosti plyne pro libovolné $f, g \in \mathscr{L}^2([a,b])$ nerovnost $p(f+g) \leq p(f)+p(g)$. Dále zřejmě pro každé $a \in \mathbf{C}$ platí $p(a \cdot f) = |a| \cdot p(f)$. Platí-li $p(f) = 0$, pak podle definice je funkce f rovna nule skoro všude, t.j. $f \in \mathscr{L}_0^2([a,b])$.

Z podmínky $p(f) = 0$ tedy nevyplývá $f = 0$, což znamená, že funkce p není norma.

Na druhé straně pro libovolné $f \in \mathscr{L}^2([a,b])$, $f_0 \in \mathscr{L}_0^2([a,b])$ platí $p(f+f_0) = p(f)$; funkce p je tedy konstantní na třídách ekvivalence, definovaných podprostorem $\mathscr{L}_0^2([a,b])$. Lze ji tedy chápat jako funkci z $\mathscr{L}^2([a,b])$ do $\mathbf{R}$ (jde fakticky o faktorovou projekci funkce p); tato funkce splňuje všechny podmínky normy. Vektorový prostor tříd kvadraticky integrovatelných funkcí je tedy normovaný prostor.

Unitární prostory

Buď E komplexní vektorový prostor. Označme a^* číslo komplexně sdružené k číslu $a \in \mathbf{C}$. *Skalárním součinem* na E rozumíme zobrazení $E \times E \ni (\xi, \zeta) \to (\xi|\zeta) \in \mathbf{C}$ splňující tyto podmínky:

(1) $(\xi_1 + \xi_2|\zeta) = (\xi_1|\zeta) + (\xi_2|\zeta)$ pro každé ζ, ξ_1, $\xi_2 \in E$.

(2) $(a \cdot \xi|\zeta) = a \cdot (\xi|\zeta)$ pro každé $a \in \mathbf{C}$, ξ, $\zeta \in E$.

(3) $(\xi|\zeta)^* = (\zeta|\xi)$ pro každé ξ, $\zeta \in E$.

(4) $(\xi|\xi) \geq 0$ pro každé $\xi \in E$ a z podmínky $(\xi|\xi) = 0$ vyplývá $\xi = 0$. Komplexní vektorový prostor, na kterém je definován skalární součin, se nazývá (komplexní) *unitární prostor*.

Skalární součin na reálném vektorovém prostoru E je definován analogicky; je tedy zobrazení $E \times E \ni (\xi, \zeta) \to (\xi|\zeta) \in \mathbf{R}$ splňující podmínky (1) – (4). Analogicky je také definován (reálný) unitární prostor. Konečněrozměrný reálný unitární prostor se někdy nazývá *Euklidův prostor*.

43. Buď E komplexní unitární prostor.

(a) Dokažte, že pro každé ζ, ξ_1, $\xi_2 \in E$ a každé $a \in \mathbf{C}$ platí

$$(\zeta|\xi_1 + \xi_2) = (\zeta|\xi_1) + (\zeta|\xi_2),\ (\xi_1|a \cdot \xi_2) = a^* \cdot (\xi_1|\xi_2).$$

(b) Dokažte, že pro každé ξ, $\zeta \in E$ platí *Schwartzova nerovnost*

$$|(\xi|\zeta)| \leq \sqrt{(\xi|\xi)} \cdot \sqrt{(\zeta|\zeta)}.$$

Vyjasněte, kdy v této nerovnosti nastává rovnost.

(c) Dokažte, že zobrazení $\|\|: E \to \mathbf{R}$, definované vztahem $\|\xi\| = \sqrt{(\xi|\xi)}$, je norma na E.

Ř e š e n í . (a) Uvedené vztahy jsou přímým důsledkem podmínek (1) – (3) z definice skalárního součinu.

(b) Podle podmínky (4) z definice skalárního součinu platí pro libovolné vektory ξ, $\zeta \in E$ a libovolná čísla $a \in \mathbf{C}$, $b \in \mathbf{R}$ nerovnost $(\xi - ab\zeta, \xi - ab\zeta) \geq 0$, t.j.

$$(\xi|\xi) - ab(\zeta|\xi) - a^*b(\xi|\zeta) + |a|^2b^2(\zeta|\zeta) \geq 0.$$

Předpokládejme, že $(\xi|\zeta)$, $(\zeta|\zeta) \neq 0$ a položme

$$a = \frac{|(\xi|\zeta)|}{(\xi|\zeta)}, \quad b = \frac{|(\xi|\zeta)|}{(\zeta|\zeta)}. \tag{1}$$

Číslo a zřejmě splňuje podmínku $|a| = 1$. Pak ovšem

$$(\xi|\xi) - \frac{|(\xi|\zeta)|^2}{(\zeta|\zeta)} - \frac{|(\xi|\zeta)|^2}{(\zeta|\zeta)} + \frac{|(\xi|\zeta)|^2}{(\zeta|\zeta)} \geq 0,$$

odkud již vyplývá požadovaná nerovnost. Platí-li $(\xi|\zeta) = 0$ nebo $(\zeta|\zeta) = 0$, pak je tato nerovnost také splněna.

Je-li alespoň jeden z vektorů ξ, ζ nulový, pak evidentně platí $|(\xi|\zeta)| = \sqrt{(\xi|\xi)} \cdot \sqrt{(\zeta|\zeta)}$. Ukážeme, že pro nenulové vektory ξ, ζ tato rovnost platí právě tehdy, když jsou lineárně závislé. Předpokládejme, že pro ξ, $\zeta \neq 0$ platí $|(\xi|\zeta)| = \sqrt{(\xi|\xi)} \cdot \sqrt{(\zeta|\zeta)}$. Pak také $(\xi|\xi) \cdot (\zeta|\zeta) - |(\xi|\zeta)|^2 = 0$, a tedy $(\xi|\xi) - ab(\zeta|\xi) - a^*b(\xi|\zeta) + |a|^2b^2(\zeta|\zeta) = (\xi - ab\zeta, \xi - ab\zeta) = 0$, kde čísla a, b jsou definovaná vztahem (1). Podle podmínky (4) z definice skalárního součinu platí $\xi = ab\zeta$, t.j. vektory ξ, ζ jsou lineárně závislé. Obrácené tvrzení dokážeme přímým výpočtem.

(c) S využitím Schwartzovy nerovnosti dostaneme pro libovolné vektory ξ, $\zeta \in E$ $\|\xi + \zeta\|^2 = (\xi + \zeta|\xi + \zeta) = \|\xi\|^2 + 2\operatorname{Re}(\xi|\zeta) + \|\zeta\|^2 \leq \|\xi\|^2 + 2|(\xi|\zeta)| + \|\zeta\|^2 \leq \|\xi\|^2 + 2\|\xi\| \cdot \|\zeta\| + \|\xi\|^2 = (\|\xi\| + \|\zeta\|)^2$, kde $\operatorname{Re} z$ označuje reálnou část komplexního čísla z. Odtud již vyplývá, že $\|\xi + \zeta\| \leq \|\xi\| + \|\zeta\|$. Ostatní podmínky z definice normy se prověří přímým výpočtem. Zobrazení $\|\ \|$ je tedy norma na E.

Z cv. 43 (c) vyplývá, že unitární prostor má přirozenou strukturu normovaného prostoru. Norma $\|\ \|$ na unitárním prostoru E, definovaná ve cv. 43 (c), se nazývá *indukovaná* skalárním součinem na E. Metrika (resp. topologie) indukovaná touto normou, se nazývá *indukovaná metrika* (resp. *indukovaná topologie*) na unitárním prostoru E.

44. (a) Dokažte, že skalární součin je spojité zobrazení v silné topologii.

(b) Dokažte, že norma $\|\ \|$ na vektorovém prostoru E je indukovaná nějakým skalárním součinem tehdy a jen tehdy, když pro každé ξ, $\zeta \in E$ platí *rovnoběžníková rovnost*

$$\|\xi + \zeta\|^2 + \|\xi - \zeta\|^2 = 2(\|\xi\|^2 + \|\zeta\|^2).$$

Ř e š e n í . (a) Nechť E je unitární prostor, ξ_1, $\xi_2 \in E$ dva vektory a $a = (\xi_1|\xi_2)$ jejich skalární součin. Buď $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že existují otevřené koule $B_1(\xi_1, \bar\varepsilon_1)$, $B_2(\xi_2, \bar\varepsilon_2)$ v metrice, indukované skalárním součinem, takové, že pro každé $\eta \in B_1(\xi_1, \bar\varepsilon_1)$ a $\zeta \in B_2(\xi_2, \bar\varepsilon_2)$ platí $(\eta, \zeta) \in B_d(a, \varepsilon)$, kde d označuje přirozenou metriku na $\mathbf{C}$. Položme

$$\bar\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2\|\xi_2\|}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\|\xi_1\| \cdot \|\xi_2\| + \varepsilon}\right), \quad \bar\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2\|\xi_1\|}.$$

Pak pro $\eta \in B_1(\xi_1, \bar\varepsilon_1)$, $\zeta \in B_2(\xi_2, \bar\varepsilon_2)$ a $x = (\eta|\zeta)$ platí $d(x, a) = |x - a| = |(\xi_1|\xi_2) - (\eta|\zeta)| = |(\xi_1|\xi_2 - \zeta) + (\xi_1 - \eta|\xi_2) + (\xi_1 - \eta|\zeta - \xi_2)| \leq |(\xi_1|\xi_2 - \zeta)| + |(\xi_1 - \eta|\xi_2)| + |(\xi_1 - \eta|\zeta - \xi_2)| \leq$

$\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2-\zeta\|+\|\xi_1-\eta\|\cdot\|\xi_2\|+\|\xi_1-\eta\|\cdot\|\zeta-\xi_2\|$ podle Schwartzovy nerovnosti. Ovšem $\|\xi_2-\zeta\|<\bar{\varepsilon}_2$, $\|\xi_1-\eta\|<\bar{\varepsilon}_1$, a tedy

$$\begin{aligned} d(x,a) < {} & \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{2\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|+\varepsilon}\right)+\frac{\varepsilon^2}{4\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|} \\ & \cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{2\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|+\varepsilon}\right)=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2(2\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|+\varepsilon)} \\ & +\frac{\varepsilon^2}{4\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|}-\frac{\varepsilon^3}{4\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|(2\|\xi_1\|\cdot\|\xi_2\|+\varepsilon}=\varepsilon \end{aligned}$$

odkud vyplývá, že $(\eta|\zeta)\in B_d(a,\varepsilon)$.

Všimněme si, že ze spojitosti skalárního součinu vyplývá, že pro libovolné dvě konvergentní posloupnosti $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\zeta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vektorů z E platí $\lim(\xi_n|\zeta_n)=(\lim\xi_n|\lim\zeta_n)$.

(b) Buď E libovolný prostor, jehož norma $\|\ \|$ je indukována skalárním součinem $(\ |\ )$. Pak pro libovolné ξ, $\zeta\in E$ platí $\|\xi+\zeta\|^2+\|\xi-\zeta\|^2=(\xi+\zeta|\xi+\zeta)+(\xi-\zeta|\xi-\zeta)=2(\xi|\xi)+2(\zeta|\zeta)=2(\|\xi\|^2+\|\zeta\|^2)$.

Obráceně, nechť E je komplexní vektorový prostor s normou $\|\ \|$ splňující rovnoběžníkovou rovnost. Klademe pro každé ξ, $\zeta\in E$

(1) $$(\xi|\zeta)=\tfrac{1}{4}(\|\xi+\zeta\|^2-\|\xi-\zeta\|^2+i\|\xi+i\zeta\|^2-i\|\xi-i\|^2).$$

kde i označuje imaginární jednotku. Prověříme, že zobrazení $E\times E\ni(\xi,\zeta)\to(\xi|\zeta)\in\mathbf{C}$ je skalární součin a že tento skalární součin indukuje danou normu na E.

Dokážeme platnost podmínky (1) z definice skalárního součinu. Buďte ξ_1, ξ_2, $\eta\in E$ libovolné vektory. Podle předpokladu platí rovnoběžníkova rovnost, ze které dostaneme

$$\begin{aligned} &\|(\xi+\eta)+\xi_2\|^2=-\|(\xi_1+\eta)-\xi_2\|^2+2\|\xi_1+\eta\|^2+2\|\xi_2\|^2,\\ &\|\xi_1+(\xi_2-\eta)\|^2=-\|(\xi_2-\eta)-\xi_1\|^2+2\|\xi_2-\eta\|^2+2\|\xi\|^2, \end{aligned}$$

t.j.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((\xi_1+\xi_2|\eta)-(\xi_1|\eta)-(\xi_2|\eta)) &= \tfrac{1}{4}(\|\xi_1+\xi_2+\eta\|^2 \\ & -\|\xi_1+\xi_2-\eta\|^2-\|\xi+\eta\|^2+\|\xi_1-\eta\|^2-\|\xi_2+\eta\|^2 \\ & +\|\xi_2-\eta\|^2)=\tfrac{1}{4}(\|\xi_1+\eta\|^2+2\|\xi_2\|^2-\|\xi_2-\eta\|^2-2\|\xi_1\|^2 \\ & +\|\xi_1-\eta\|^2-\|\xi_2+\eta\|^2)=0. \end{aligned}$$

Podobně dostaneme

$$\operatorname{Im}((\xi_1\xi_2,\eta)-(\xi_1,\eta)-(\xi_2,\eta))=0.$$

Dokážeme platnost podmínky (2). Pro každé $a\in\mathbf{C}$ klademe $\varphi(a)=(a\cdot\xi_1|\xi_2)-a\cdot(\xi_1|\xi_2)$, kde ξ_1, ξ_2 jsou libovolné pevně zvolené vektory. Zřejmě $\varphi(0)=0$, $\varphi(-1)=0$ a tedy pro každé celé $a\in\mathbf{Z}$ dostaneme $\varphi(a)=\operatorname{sign}a\cdot(|a|\xi_1|\xi_2)-a(\xi_1|\xi_2)=\operatorname{sign}a\cdot(\xi_1+\xi_1+\ldots+\xi_1|\xi_2)-a\cdot(\xi_1|\xi_2)=\operatorname{sign}a\cdot((\xi_1|\xi_2)+(\xi_1|\xi_2)+\ldots+(\xi_1|\xi_2))-a\cdot(\xi_1|\xi_2)=\operatorname{sign}a\cdot|a|\cdot(\xi_1|\xi_2)-a\cdot(\xi_1|\xi_2)=0$, kde součty obsahují $|a|$ sčítanců a $\operatorname{sign}a$ označuje znaménko čísla $a\in\mathbf{Z}$. Pro libovolná celá čísla p, q, $q\neq0$, odtud dostaneme

$$\begin{aligned} &\varphi(\tfrac{p}{q}\xi_1|\xi_2)-\tfrac{p}{q}(\xi_1|\xi_2)=p(\tfrac{1}{q}\xi_1|\xi_2)-\tfrac{p}{q}(\xi_1|\xi_2)\\ &\quad=\tfrac{p}{q}\cdot q\cdot(\tfrac{1}{q}\xi_1|\xi_2)-\tfrac{p}{q}(\xi_1|\xi_2)=\tfrac{p}{q}(\xi_1|\xi_2)-\tfrac{p}{q}(\xi_1|\xi_2)=0. \end{aligned}$$

Pro každé racionální číslo a tedy $\varphi(a)=0$ a ze spojitosti funkce φ dostáváme, že $\varphi(a)=0$ pro každé $a\in\mathbf{R}$ (Důsledek 1. Věty 8. odst. 3.2 str. 35). Ze vztahu $\varphi(i)=0$ dostaneme pro libovolné $z\in\mathbf{C}$, $z=a+ib$, kde a, $b\in\mathbf{R}$, že musí platit $\varphi(z)=0$, což jsme chtěli dokázat.

Platnost podmínky (3) se prověří přímým výpočtem.

Nakonec pro každé $\xi \in E$ platí

$$\begin{aligned}(\xi|\xi) = \tfrac{1}{4}\left(\|2\xi\|^2 + i\|\xi + i\xi\|^2 - i\|\xi - i\xi\|^2\right) = \|\xi\|^2 \\ + \tfrac{1}{4}\left(i\|\xi + i\xi\|^2 - i\|(-i)(\xi + i\xi)\|^2\right) = \|\xi\|^2.\end{aligned}$$

Je tedy splněna také podmínka (4) z definice skalárního součinu.

Vztah $(\xi|\xi) = \|\xi\|$ zároveň ukazuje, že skalární součin (1) indukuje normu $\| \ \|$. Tím je důkaz ukončen.

Vztah (1), definující skalární součin pomocí normy na E, splňující rovnoběžníkovou rovnost, se nazývá *polarizační rovnost*.

Pro reálný vektorový prostor se tvrzení (b) dokazuje analogicky; *polarizační rovnost* má v tomto případě tvar

$$(2) \qquad (\xi|\zeta) = \tfrac{1}{4}\left(\|\xi + \zeta\|^2 - \|\xi - \zeta\|^2\right).$$

45. Dokažte, že platí *Gramova–Schmidtova věta*:

Buď E unitární prostor, $A \subset E$ nejvýše spočetná lineárně nezávislá množina. Existuje množina $A' \subset E$ splňující tyto čtyři podmínky:

(1) A' je podmnožina lineárního obalu množiny A.

(2) A' má stejnou mohutnost jako A.

(3) Pro libovolné dva různé vektory ξ, $\zeta \in A'$ platí $(\xi|\zeta) = 0$.

(4) Pro každé $\xi \in A'$ platí $\|\xi\| = 1$.

Řešení. Označme $A = (\eta_i)_{i \in \mathbf{N}}$. Vektory η_i jsou lineárně nezávislé a tedy $\eta_i \neq 0$ pro každé i. Klademe $\xi_1 = \eta_1/\|\eta_1\|$; zřejmě $\|\xi_1\| = 1$. Jelikož vektory η_1, η_2 jsou loneárně nezávislé, jsou také vektory ξ_1, η_2 lineárně nezávislé, t.j. $\eta_2 - (\eta_2|\xi_1) \cdot \xi_1 \neq 0$. Klademe

$$\xi_2 = \frac{\eta_2 - (\eta_2|\xi_1) \cdot \xi_1}{\|\eta_2 - (\eta_2|\xi_1) \cdot \xi_1\|};$$

zřejmě $\|\xi_2\| = 1$ a $(\xi_1|\xi_2) = 0$. Dále klademe

$$\xi_3 = \frac{\eta_3 - (\eta_3|\xi_1) \cdot \xi_1 - (\eta_3|\xi_2) \cdot \xi_2}{\|\eta_3 - (\eta_3|\xi_1) \cdot \xi_1 - (\eta_3, \xi_2)\xi_2\|}$$

atd. Množina $A' = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, dots\}$, kterou takto zkonstruujeme, má požadované vlastnosti.

Buď E unitární prostor. Pro každé $\xi \in E$ klademe $p_\xi(\zeta) = |(\xi|\zeta)|$. Zobrazení $\zeta \to p_\xi(\zeta)$ je pseudonorma na E. Vektorový prostor E se systémem pseudonorem $(p_\xi)_{\xi \in E}$ je lokálně konvexní vektorový prostor (př. (8) odst. 6.10 str. 166). Jeho topologie se nazývá *slabá topologie* na unitárním prostoru E.

46. Ukažte, že slabá topologie na unitárním prostoru E je slabší než silná topologie a že tyto dvě topologie jsou totožné tehdy a jen tehdy, když vektorový prostor E je konečněrozměrný.

Řešení. Označme τ_S (resp. τ_W) silnou (resp. slabou) topologii na E. Každému $\eta \in E$, $\varepsilon > 0$ a libovolné konečné množině $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \subset E$ je přiřazen prvek báze slabé topologie

$$U_\varepsilon(\eta, \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}) = \{\zeta \in E \mid p_{\xi_i}(\eta - \zeta) < \varepsilon, \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Položme

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1 \leq i \leq n} \|\xi_i\|}.$$

Pak $B(\eta, \bar{\varepsilon}) = \{\zeta \in E \mid \|\zeta - \eta\| < \bar{\varepsilon}\}$ leží v $U_\varepsilon(\eta, \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\})$: Pro vektor $\zeta \in B(\eta, \bar{\varepsilon})$ totiž podle Schwartzovy nerovnosti platí $|(\xi_i|\eta - \zeta)| \leq \|\xi_i\| \cdot \|\eta - \zeta\| \leq \|\xi_i\| \cdot \bar{\varepsilon} < \varepsilon$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a tedy vektor ζ patří množině $U_\varepsilon(\eta, \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\})$. Odtud $\tau_W \subset \tau_S$.

Předpokládejme, že vektorový prostor E je nekonečněrozmšrný a že platí $\tau_S \subset \tau_W$. Podle Gramovy–Schmidtovy věty (cv. 45) k libovolné konečné množině vektorů $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \subset E$ existuje nenulový vektor $\xi \in E$ takový, že $(\xi_i|\xi) = 0$ pro každé i; kdyby takový vektor neexistoval, vektorový prostor E by byl konečněrozměrný. Zvolme prvek báze silné topologie v bodě 0, $B(0, \varepsilon)$. Podle předpokladu existuje okolí $U_{\bar{\varepsilon}}(0, \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\})$ nulového vektoru v slabé topologii, ležící v $B(0, \varepsilon)$. Pro každé $a \in \mathbf{C}$ platí $(a \cdot \xi|\xi_i) = 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, m$, což znamená, že $a \cdot \xi \in U_{\bar{\varepsilon}}(0, \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\})$. Přitom pro a takové, že $|a| > \varepsilon / \|\xi\|$ je $a \cdot \xi \notin B(0, \varepsilon)$, což je spor. To dokazuje, že v případě nekonečnerozměrného vektorového prostoru E $\tau_S \not\subset \tau_W$.

Je-li vektorový prostor E konečněrozměrný, pak topologie τ_S, τ_W splývají (cv. 35); výše uvedená úvaha ukazuje, že splývají-li τ_S a τ_W, E nemůže být nekonečněrozměrný.

47. Rozhodněte, které z normovaných prostorů ve cv. 41, 42, 37 jsou unitární a určete příslušný skalární součin.

Řešení. Stačí zjistit, které z uvedených norem splňují rovnoběžníkovou rovnost (cv. 44 (b)).

ℓ^2 s normou $\| \ \|_2$ je unitární, s normou $\| \ \|_{\sup}$ nebo $\| \ \|_1$ nebo g není unitární.

$L^2([a, b])$ s normou $\|f\|_2 = (\int_a^b |f(t)|^2 dt)^{1/2}$ je unitární.

$\mathbf{C}^n$ s normou $\| \ \|_2$ je unitární, s normou $\| \ \|_{\max}$ nebo s normou $\| \ \|_1$ není unitární.

V unitárním prostoru $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$, resp. ℓ^2, resp. $L^2([a, b])$) má skalární součin tvar $(\xi|\zeta) = \sum \xi^i \zeta^i$ (resp. $(\xi|\zeta) = \sum \xi^i (\zeta^i)^*$, resp. $(\xi|\zeta) = \sum \xi^i (\zeta^i)^*$ (součet pro $i = 1, 2, 3, \ldots$), resp. $(f|g) = \int_a^b f(t) g^*(t) dt$).

Část 7

Kompaktní a lokálně kompaktní prostory

Budeme říkat, že topologický prostor X je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí má konečné podpokrytí. Množina $A \subset X$ se nazývá kompaktní, je-li kompaktní jako podprostor topologického prostoru X. "Kompaktnost" tedy znamená "konečnost v topologickém smyslu" a patří mezi nejsilnější vlastnosti topologického prostoru. Topologický prostor X se nazývá lokálně kompaktní, má-li každý jeho bod okolí, jehož uzávěr je kompaktní množina.

Mezi nejdůležitější příklady kompaktních množin, známé z klasické analýzy, patří uzavřený interval $[a, b]$ v množině reálných čísel $\mathbf{R}$ (Heineho–Borelova–Lebesgueova věta) a ohraničená uzavřená podmnožina Euklidova topologického prostoru $\mathbf{R}^n$. Topologický prostor $\mathbf{R}^n$ není kompaktní, je však lokálně kompaktní.

Známé je také klasické tvrzení o tom, že spojitá reálná funkce, definovaná na uzavřeném intervalu, nabývá svého minima a maxima (Weierstrassova věta); toto tvrzení platí také pro spojité reálné funkce na libovolném kompaktním prostoru X.

V této kapitole studujeme základní vlastnosti kompaktních a lokálně kompaktních topologických prostorů (odst. 7.1 – 7.4). Mezi hlubší výsledky patří Tichonovova věta o součinu topologických prostorů, která tvrdí, že součin neprázdných topologických prostorů je kompaktní tehdy a jen tehdy, je-li každý z těchto prostorů kompaktní (odst. 7.2). V odst. 7.5 zavádíme pojem σ-kompaktního prostoru, který využíváme ve formulaci postačující podmínky parakompaktnosti lokálně kompaktního prostoru.

Ve druhé části kapitoly (odst. 7.6, 7.7) se zabýváme problémem kompaktifikace, t.j. problémem existence vnoření $f : X \to Y$ (nekompaktního) topologického prostoru X do nějakého kompaktního topologického prostoru Y, takového, že $f(X) \subset Y$ je hustá množina. Ukazuje se, že každý topologický prostor má kompaktifikaci, např. tzv. Alexandrovu (jednobodovou) kompaktifikaci. Je-li topologický prostor X Hausdorffův, vzniká otázka existence jeho vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru (oddělitelná kompaktifikace). Třída Hausdorffových prostorů, které lze takto kompaktifikovat, je charakterizována jako tzv. úplně regulární prostory. Úplně regulární prostor lze ovšem kompaktifikovat mnoha způsoby; kromě Alexandrovy kompaktifikace, která je "minimální", studujeme také Čechovu–Stoneovu "maximální" kompaktifikaci.

7.1. Kompaktní prostory

Topologický prostor se nazývá *k*ompaktní, jestliže z každého jeho otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Uvedeme kriterium kompaktnosti topologického prostoru. Řekneme, že systém σ

podmnožin množiny X je *c*entrovaný, jestliže průnik libovolného konečného podsystému systému σ je neprázdný.

Věta 1. *Topologický prostor X je kompaktní tehdy a jen tehdy, když každý centrovaný systém uzavřených podmnožin množiny X má neprázdný průnik.*

Důkaz. 1. Buď X kompaktní prostor. Nechť $(A_\iota)_{\iota\in I}$ je libovolný centrovaný systém uzavřených množin v X. Pro každé $\iota \in I$ klademe $U_\iota = X\backslash A_\iota$. Podle předpokladu pro libovolnou konečnou podmnožinu $J \subset I$ platí $\bigcap_{\iota\in J} A_\iota \neq \emptyset$. Pak ovšem $\bigcup_{\iota\in J} U_\iota = \bigcup_{\iota\in J}(X\backslash A_\iota) = X\backslash\bigcap_{\iota\in J} A_\iota \neq X$, takže systém $(U_\iota)_{\iota\in J}$ nepokrývá X. Systém $(U_\iota)_{\iota\in I}$ také nepokrývá X, jinak by totiž X nebyl kompaktní. Máme tedy $X \neq \bigcup_{\iota\in I} U_\iota = \bigcup_{\iota\in I}(X\backslash A_\iota) = X\backslash\bigcap_{\iota\in I} A_\iota$, takže $\bigcap_{\iota\in I} A_\iota \neq \emptyset$, což jsme chtěli dokázat.

2. Předpokládejme, že každý centrovaný systém uzavřených podmnožin množiny X má neprázdný průnik. Buď $(U_\kappa)_{\kappa\in K}$ libovolné otevřené pokrytí X. Klademe $A_\kappa = X\backslash U_\kappa$. Pak $\bigcap_{\kappa\in K} A_\kappa = X\backslash\bigcup_{\kappa\in K} U_\kappa = \emptyset$, takže podle předpokladu systém $(A_\kappa)_{\kappa\in K}$ nemůže být centrovaný. Existuje tedy konečná množina $J \subset K$ tak, že $\bigcap_{\kappa\in J} A_\kappa = \emptyset$. Pak ovšem $\bigcup_{\kappa\in J} U_\kappa = \bigcup_{\kappa\in J}(X\backslash A_\kappa) = X\backslash\bigcap_{\kappa\in J} A_\kappa = X$ a tedy $(U_\kappa)_{\kappa\in J}$ je konečné podpokrytí $(U_\kappa)_{\kappa\in K}$. Topologický prostor X je tedy kompaktní.

Věta 2. *Topologický podprostor Y topologického prostoru X je kompaktní tehdy a jen tehdy, když jeho pokrytí množinami otevřenými v X obsahuje konečné podpokrytí.*

Důkaz. 1. Předpokládejme, že $Y \subset X$ je kompaktní topologický podprostor. Buď $(U_\iota)_{\iota\in I}$ pokrytí Y množinami otevřenými v X. Pak $(V_\iota)_{\iota\in I}$, kde $V_\iota = U_\iota \cap Y$, je otevřené pokrytí Y a existuje konečná množina $J \subset I$ tak, že $\bigcup_{\iota\in J} V_\iota = Y$. Evidentně $\bigcup_{\iota\in J} U_\iota \supset Y$.

2. Předpokládejme, že každé pokrytí množiny Y otevřenými množinami v X obsahuje konečné podpokrytí. Buď $(V_\iota)_{\iota\in I}$ libovolné otevřené pokrytí množiny Y. Pro každé $\iota \in I$ tedy existuje množina U_ι otevřená v X tak, že $V_\iota = U_\iota \cap Y$. Evidentně $Y = \bigcup_{\iota\in I} V_\iota = \bigcup_{\iota\in I}(U_\iota \cap Y) \subset \bigcup_{\iota\in I} U_\iota$. Podle předpokladu tedy existuje konečná množina $J \subset I$ taková, že $\bigcup_{\iota\in J} U_\iota \supset Y$. Pak $\bigcup_{\iota\in J} V_\iota = \bigcup_{\iota\in I}(U_\iota \cap Y) = (\bigcup_{\iota\in J} U_\iota) \cap Y = Y$. Topologický prostor Y je tedy kompaktní.

Podmnožina topologického prostoru X se nazývá *k*ompaktní, je-li kompaktní jako topologický podprostor topologického prostoru X.

Věta 3. (a) *Sjednocení dvou kompaktních množin je kompaktní množina.*

(b) *Je-li množina A kompaktní a U otevřená, pak množina $A\backslash U$ je kompaktní.*

(c) *Předpokládejme, že pro množiny A, B platí $A \subset B$ a množina* $\operatorname{cl} B$ *je kompaktní. Pak* $\operatorname{cl} A$ *je kompaktní.*

(d) *Průnik libovolného systému kompaktních uzavřených množin je kompaktní uzavřená množina.*

(e) *K tomu, aby podmnožina topologického prostoru X byla kompaktní je nutné a stačí, aby byla kompaktní v nějakém topologickém podprostoru X.*

Důkaz. (a) Buďte A, B kompaktní množiny, $(U_\iota)_{\iota\in I}$ otevřené pokrytí množiny $A \cup B$. Podle předpokladu existuje konečná množina $J \subset I$ a konečná množina $K \subset I$ tak, že $(U_\iota)_{\iota\in J}$ je pokrytí množiny A a $(U_\iota)_{\iota\in K}$ je pokrytí množiny B. Pak $(U_\iota)_{\iota\in J\cup K}$ je konečné podpokrytí $(U_\iota)_{\iota\in I}$.

(b) Buď $(U_\iota)_{\iota\in I}$ otevřené pokrytí množiny $A\backslash U$. Pak množiny U_ι, U pokrývají A a z kompaktnosti A vyplývá, že pro jisté indexy $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_k$ množiny $U_{\iota_1}, U_{\iota_2}, \ldots, U_{\iota_k}, U$ pokrývají A. Množiny $U_{\iota_1}, U_{\iota_2}, \ldots, U_{\iota_k}$ musí tedy pokrývat množinu $A\backslash U$.

(c) Buď X topologický prostor, $A, B \subset X$ množiny takové, že $A \subset B$ a $\operatorname{cl} B$ je kompaktní. Buď $(U_\iota)_{\iota\in I}$ otevřené pokrytí množiny $\operatorname{cl} A$. Pak množiny U_ι, $X\backslash \operatorname{cl} A$ tvoří otevřené pokrytí X a tedy také otevřené pokrytí $\mathrm{cl}\,B$. Z kompaktnosti $\mathrm{cl}\,B$ vyplývá, že pro jisté $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_k$ množiny $U_{\iota_1}, U_{\iota_2}, U_{\iota_k}, X \setminus \mathrm{cl}\,A$ pokrývají $\mathrm{cl}\,B$. Ovšem z podmínky $A \subset B$ vyplývá $\mathrm{cl}\,A \subset \mathrm{cl}\,B$ a tedy množiny $U_{\iota_1}, U_{\iota_2}, \ldots, U_{\iota_k}$ musí pokrývat $\mathrm{cl}\,A$.

(d) Buď $(A_\iota)_{\iota\in I}$ systém kompaktních uzavřených podmnožin topologického prostoru X. $\bigcap A_\iota$ je uzavřená množina. Stačí tedy dokázat její kompaktnost. Zvolme $\kappa \in I$; pak $\bigcap A_\iota \subset A_\kappa$. Buď $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ otevřené pokrytí množiny $\bigcap A_\iota$. Pak množiny U_λ, $X \setminus \bigcap A_\iota$ pokrývají X. Pokrývají tedy také kompaktní množinu A_κ a musí existovat indexy $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in L$ tak, že množiny $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_k}, X \setminus A_\iota$ pokrývají A_κ. Systém množin U_{λ_1}, $U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_k}$ je tedy pokrytí množiny $\bigcap A_\iota$.

(e) Tvrzení vyplývá přímo z definice indukované topologie.

Věta 4. *Uzavřená podmnožina kompaktního topologického prostoru je kompaktní.*

Důkaz. Buď X kompaktní topologický prostor, $A \subset X$ uzavřená množina, $(U_\iota)_{\iota\in I}$ pokrytí množiny A otevařenými množinami. Otevřené množiny U_ι, $X \setminus A$ pokrývají X. Z kompaktnosti X vyplývá, že pro jisté indexy $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_k$ množiny $U_{\iota_1}, U_{\iota_2}, \ldots, U_{\iota_k}$, $X \setminus A$ pokrývají X. Množiny $U_{\iota_1}, U_{\iota_2}, \ldots, U_{\iota_k}$ tedy pokrývají A a množina A musí být kompaktní (Věta 2. odst. 7.1 str. 196).

Věta 5. *Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení topologických prostorů, $A \subset X$ podmnožina. Je-li A kompaktní, pak také množina $f(A) \subset Y$ je kompaktní.*

Důkaz. Buď $(V_\iota)_{\iota\in I}$ otevřené pokrytí množiny $f(A)$. Pak $(f^{-1}(V_\iota))_{\iota\in I}$ je otevřené pokrytí množiny A (Věta 2. odst. 2.1 str. 18). Z kompaktnosti množiny A vyplývá, že pro jisté indexy $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_k \in I$ množiny $f^{-1}(V_{\iota_1}), f^{-1}(V_{\iota_2}), \ldots, f^{-1}(V_{\iota_k})$ pokrývají A. Množiny $V_{\iota_1}, V_{\iota_2}, \ldots, V_{\iota_k}$ tedy pokrývají množinu $f(A)$.

Důsledek 1. Faktorový prostor kompaktního prostoru je kompaktní.

Důkaz. Tvrzení vyplývá ze surjektivnosti faktorové projekce.

Důsledek 2. Kompaktní topologický prostor není homeomorfní s nekompaktním topologickým prostorem.

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledkem Věty 5. odst. 7.1 str. 197.

7.2. Součin kompaktních prostorů

Věta, kterou nyní dokážeme, patří k základním výsledkům obecné topologie.

Věta 6. *[Tichonovův teorém] Buď $(X_\iota)_{\iota\in I}$ systém topologických prostorů takový, že $X_\iota \neq \emptyset$ pro každé $\iota \in I$. Pak součin $\prod X_\iota$ je kompaktní tehdy a jen tehdy, když topologický prostor X_ι je kompaktní.*

Důkaz. 1. Je-li součin $X = \prod X_\iota$ kompaktní, pak kompaktnost X_ι vyplývá ze spojitosti a surjektivnosti projekce pr_ι (Věta 5. odst. 7.1 str. 196, Věta 10. (a) odst. 3.3 str. 36).

2. Předpokládejme, že každý z topologických prostorů X_ι je kompaktní. Chceme ukázat, že pro libovolný centrovaný systém $(A_\kappa)_{\kappa\in K}$ uzavřených podmnožin topologického prostoru $X = \prod X_\iota$ je průnik $\bigcap A_\kappa$ neprázdný (Věta 1. odst. 7.1 str. 196).

Označme σ systém všech centrovaných systémů podmnožin množiny X.σ má konečný charakter: Konečný podsystém centrovaného systému je podle definice centrovaný a platí-li pro nějaký systém podmnožin množiny X, že každý jeho konečný podsystém je centrovaný, pak tento systém je také centrovaný. Z axiomu výběru (viz odst. III, Tukeyho podmínka) tedy vyplývá, že každý centrovaný systém množin je obsažen v jistém maximálním centrovaném systému.

Buď $(A_\kappa)_{\kappa\in K}$ libovolný centrovaný systém uzavřených množin v X. $(A_\kappa)_{\kappa\in K}$ je podsystém maximálního centrovaného systému $(A_\kappa)_{\kappa\in L}$ (ne nutně uzavřených) podmnožin množiny X. Abychom ukázali, že $\bigcap_{\kappa\in K} A_\kappa \neq \emptyset$, stačí ukázat, že existuje bod $x \in X$ tak, že $x \in \operatorname{cl} A_\kappa$ pro každé $\kappa \in L$. Potom totiž $\bigcap_{\kappa\in K} A_\kappa = \bigcap_{\kappa\in K} \operatorname{cl} A_\kappa \supset \bigcap_{\kappa\in L} \operatorname{cl} A_\kappa \neq \emptyset$.

Uvažujme systém množin $(A_\kappa)_{\kappa\in L}$. Jelikož je tento systém maximální (v σ), a pro libovolné $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_k \in L$ přidáním množiny $A_{\kappa_1} \cap A_{\kappa_2} \cap \cdots \cap A_{\kappa_k}$ k tomuto systému opět vznikne centrovaný systém, musí množina $A_{\kappa_1} \cap A_{\kappa_2} \cap \cdots \cap A_{\kappa_k}$ patřit systému $(A_\kappa)_{\kappa\in L}$. Podobně je-li $B \subset X$ množina taková, že $B \cap A_\kappa \neq \emptyset$ pro každé $\kappa \in L$, přidáním B k systému $(A_\kappa)_{\kappa\in L}$ vznikne centrovaný systém a tedy B patří systému $(A_\kappa)_{\kappa\in L}$. Nakonec si všimněme, že systém množin $(\operatorname{cl}\operatorname{pr}_\iota(A_\kappa))_{\kappa\in L}$ v X_ι je také centrovaný pro každé $\iota \in I$: máme pro libovolné $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_k \in L$ inkluze $\operatorname{cl}\operatorname{pr}_\iota(A_{\kappa_1}) \cap \operatorname{cl}\operatorname{pr}_\iota(A_{\kappa_2}) \cap \cdots \cap \operatorname{cl}\operatorname{pr}_\iota(A_{\kappa_k}) \supset \operatorname{pr}_\iota(A_{\kappa_1}) \cap \operatorname{pr}_\iota(A_{\kappa_2}) \cap \cdots \cap \operatorname{pr}_\iota(A_{\kappa_k}) \supset \operatorname{pr}_\iota(A_{\kappa_1} \cap A_{\kappa_2} \cap \cdots \cap A_{\kappa_k}) \neq \emptyset$ jelikož $A_{\kappa_1} \cap A_{\kappa_2} \cap \cdots \cap A_{\kappa_k} \neq \emptyset$. Z kompaktnosti X_ι tedy vyplývá, že $\bigcap_{\kappa\in L} \operatorname{cl}\operatorname{pr}_\iota(A_\kappa) \neq \emptyset$ a tedy existuje bod $x_\iota \in \bigcap_{\kappa\in L} \operatorname{cl}\operatorname{pr}_\iota(A_\kappa)$.

Klademe $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$. Ukážeme, že $x \in \operatorname{cl} A_\kappa$ pro každé $\kappa \in L$.

Buď W_ι okolí bodu x_ι v X_ι. Pro každé $\kappa \in L$ platí $x_\iota \in \operatorname{cl}\operatorname{pr}_\iota(A_\kappa)$. Okolí W_ι bodu x_ι musí tedy mít s množinou $\operatorname{cl}\operatorname{pr}_\iota(A_\kappa)$ neprázdný průnik. Odtud $\emptyset \neq W_\iota \cap \operatorname{pr}_\iota(A_\kappa) = \operatorname{pr}_\iota(\operatorname{pr}_\iota^{-1}(W_\iota) \cap A_\kappa)$, t.j. $\operatorname{pr}_\iota^{-1}(W_\iota) \cap A_\kappa \neq \emptyset$. Tento vztah platí pro každé κ, takže $\operatorname{pr}_\iota^{-1}(W_\iota)$ musí patřit systému $(A_\kappa)_{\kappa\in L}$.

Konečné průniky množin typu $\operatorname{pr}_\iota^{-1}(W_\iota)$ ovšem definují bázi topologie součinu $X = \prod X_\iota$. Jak jsme již ukázali, tyto průniky také patří systému $(A_\kappa)_{\kappa\in L}$.

Každý prvek báze, obsahující bod $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ tedy patří systému $(A_\kappa)_{\kappa\in L}$. Ovšem tento systém je centrovaný; pro libovolný prvek báze U obsahující bod x tedy platí $A_\kappa \cap U \neq \emptyset$. Odtud vyplývá, že $x \in \operatorname{cl} A_\kappa$, což jsme chtěli dokázat.

7.3. Kompaktní Hausdorffovy prostory

V tomto odstavci studujeme kompaktní Hausdorffovy prostory, jejich podmnožiny a zobrazení.

Věta 7. (a) *Kompaktní množina v Hausdorffově topologickém prostoru je uzavřená.*

(b) *Průnik libovolného systému kompaktních množin v Hausdorffově topologickém prostoru je kompaktní množina.*

Důkaz. (a) Buď X Hausdorffův prostor, $A \subset X$ kompaktní množina. Platí-li $X \backslash A = \emptyset$, pak $A = X$ a tedy A je uzavřená. Nechť $X \backslash A \neq \emptyset$. Buď $x \in X \backslash A$ libovolný bod. Ke každému $y \in A$ existuje okolí U_y bodu x a okolí V_y bodu y tak, že $U_y \cap V_y = \emptyset$. Množiny V_y pokrývají A a z kompaktnosti množiny A vyplývá, že existuje konečný systém množin $\{V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_k}\}$ pokrývající A. Klademe $U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_k}$. Zřejmě U je okolí bodu x. Dále pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ platí $U \cap V_{y_k} \subset U_{y_k} \cap V_{y_k} = \emptyset$, t.j. $U \cap A = \emptyset$. Tedy $U \subset X \backslash A$ a z libovolnosti bodu x vyplývá, že množina $X \backslash A$ je otevřená; A je tedy uzavřená.

(b) Tvrzení plyne z již dokázaného tvrzení (a) a z Věty 3. odst. 7.1 str. 196.

Věta 8. *Buď X Hausdorffův prostor, $A \subset X$ kompaktní množina, $x \in X \backslash A$ bod. Existuje okolí U množiny A a okolí V bodu x tak, že $U \cap V = \emptyset$.*

Důkaz. Ke každému bodu $y \in A$ existuje okolí U_y bodu y a okolí V_y bodu x tak, že $U_y \cap V_y = \emptyset$. $(U_y)_{y \in A}$ je otevřené pokrytí množiny A. Z kompaktnosti A tedy vyplývá, že pro jisté body $y_1, y_2, \ldots, y_k \in A$ množiny $U_{y_1}, U_{y_2}, \ldots, U_{y_k}$ pokrývají A. Klademe $U = U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \cdots \cup U_{y_k}$, $V = V_{y_1} \cap V_{y_2} \cap \cdots \cap V_{y_k}$.

Věta 9. *Kompaktní Hausdorffův prostor je parakompaktní.*

Důsledek. Kompaktní Hausdorffův prostor je normální.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z toho, že parakompaktní prostor je normální (Věta 14. odst. 6.6 str. 158).

Věta 10. *Spojité bijektivní zobrazení kompaktního topologického prostoru na Hausdorffův prostor je homeomorfismus.*

Důkaz. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení, splňující předpoklady Věty 10.. Stačí dokázat, že f je otevřené (Věta 4. odst. 2.1 str. 19). Buď $U \subset X$ otevřená množina. Pak $X \backslash U$ je uzavřená množina a tedy množina kompaktní (Věta 4. odst. 7.1 str. 197); $f(X \backslash U)$ je tedy kompaktní množina (Věta 5. odst. 7.1 str. 197). Ovšem z oddělitelnosti topologického prostoru Y vyplývá, že $f(X \backslash U)$ je uzavřená množina (Věta 7. (a) odst. 7.3 str. 198). Dále z bijektivnosti zobrazení f vyplývá, že $f(X \backslash U) = Y \backslash f(U)$, takže $f(U) \subset Y$ je otevřená množina. Zobrazení f je tedy otevřené.

Důsledek. Buď X množina, τ_1, τ_2 dvě topologie na X. Předpokládejme, že topologické prostory $X_1 = (X, \tau_1)$, $X_2 = (X, \tau_2)$ jsou Hausdorffovy a kompaktní a že topologie τ_1, τ_2 jsou srovnatelné. Pak $\tau_1 = \tau_2$.

Důkaz. Nechť je např. topologie τ_2 silnější než τ_1. Pak zobrazení $\mathrm{id}_X : X_2 \to X_1$ je spojité a bijektivní. Je to tedy homeomorfismus, odkud vyplývá, že $\tau_1 = \tau_2$.

Věta 11. *Součin parakompaktního a kompaktního Hausdorffova topologického prostoru je parakompaktní.*

Důkaz. Buď X parakompaktní a Y kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Jelikož součin $X \times Y$ je Hausdorffův (Věta 13. odst. 3.3 str. 38), je třeba dokázat, že libovolné otevřené pokrytí topologického prostoru $X \times Y$ má lokálně konečné zjemnění.

Ke každému $(x, y) \in X \times Y$ existuje okolí $U_{(x,y)}$ bodu $x \in X$ a okolí $V_{(x,y)}$ bodu $y \in Y$ tak, že $U_{(x,y)} \times V_{(x,y)}$ je podmnožina některé z množin pokrytí σ. Pro každé x tvoří množiny $V_{(x,y)}$, kde y probíhá Y, otevřené pokrytí Y. Podle předpokladu existují tedy body $y_1, y_2, \ldots, y_{k(x)} \in Y$ tak, že množiny $V_{(x,y_1)}, V_{(x,y_2)}, \ldots, V_{(x,y_{k(x)})}$ pokrývají Y. Položme $U_x = U_{(x,y_1)} \cap U_{(x,y_2)} \cap \cdots \cap U_{(x,y_{k(x)})}$. U_x je okolí bodu x a každá z množin $U_x \times V_{(x,y_1)}, U_x \times V_{(x,y_2)}, \ldots, U_x \times V_{(x,y_{k(x)})}$ je podmnožinou některé z množin pokrytí σ. Systém $(U_x)_{x \in X}$ je otevřené pokrytí X; existuje tedy jeho lokálně konečné zjemnění $(P_\iota)_{\iota \in I}$. Pro každé $\iota \in I$ vyberme bod $x(\iota)$ tak, že $P_\iota \subset U_{x(\iota)}$ a položme $Q_{\iota,i} = P_\iota \times V_{(x(\iota),i)}$, $1 \le i \le k(x(\iota))$. Ukážeme, že množiny $Q_{\iota,i}$ tvoří lokálně konečné zjemnění pokrytí σ.

Množiny $Q_{\iota,i}$ jsou otevřené a evidentně pokrývají $X \times Y$: pro libovolné $(x, y) \in X \times Y$ bod x leží v jistém P_κ, $\kappa \in I$, jelikož $(P_\iota)_{\iota \in I}$ je pokrytí X, a bod y padne do některé z množin $V_{(x(\kappa),y_1)}, V_{(x(\kappa),y_2)}, \ldots, V_{(x(\kappa),y_k(x(\kappa)))}$ pokrývajících Y. Dále $Q_{\iota,i} \subset U_{x(\iota)} \times V_{(x(\iota),i)}$, takže $Q_{\iota,i}$ je podmnožina některé z množin pokrytí σ; pokrytí $X \times Y$ množinami $Q_{\iota,i}$ je tedy zjemnění σ. Nakonec k libovolnému bodu (x, y) bod x má okolí W, jehož průnik s množinami P_ι je neprázdný jen pro konečně mnoho indexů ι. Jelikož $(W \times Y) \cap Q_{\iota,i} = (W \cap P_\iota) \times (Y \cap V_{(x(\iota),i)}) = (W \cap P_\iota) \times V_{(x(\iota),i)}$, průnik okolí $W \times Y$ bodu (x, y) s množinami $Q_{\iota,i}$ je neprázdný jen pro konečně mnoho indexů ι, i.

Tím je důkaz ukončen.

V následující větě uvažujeme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií.

Věta 12. *Uzavřený interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$ je kompaktní.*

Důkaz. Buď $[a, b] \subset \mathbf{R}$ uzavřený interval, $a < b$, σ jeho otevřené pokrytí. Uvažujme množinu A_σ bodů $x \in \mathbf{R}$, pro které (1) $a \le x \le b$, (2) interval $[a, x]$ lze pokrýt konečným počtem množin ze systému σ. Zřejmě $A_\sigma \neq \emptyset$: vybereme $U \in \sigma$ tak, že $a \in U$, a číslo $c \in U$ tak, že $a \le c \le b$ a $[a, b] \subset U$; pak $[a, c) \subset A_\sigma$. Množina A je shora ohraničená (číslem b), existuje tedy $\alpha = \sup A_\sigma$ (viz odst. IV), přičemž $a < \alpha \le b$. Stačí tedy ukázat, že interval $[a, \alpha]$ lze pokrýt konečným počtem množin ze systému σ a že $\alpha = b$.

Platí $\alpha \le b$. Existuje tedy otevřená množina $U \in \sigma$ taková, že $\alpha \in U$. Musí tedy existovat číslo $\delta > 0$ tak, že $(\alpha - \delta, \alpha] \subset U$. Ovšem $\alpha = \sup A_\sigma$, takže v intervalu $(\alpha - \delta, \alpha]$ existuje bod $x \in A_\sigma$. Interval $[a, x]$ lze podle definice množiny A_σ pokrýt konečným počtem množin ze σ, interval $(\alpha - \delta, \alpha]$ je pokryt jedinou množinou $U \in \sigma$, tedy interval $[a, \alpha]$ lze pokrýt konečným počtem množin systému σ.

Předpokládejme, že $\alpha < b$. Pak existuje bod $y \in \mathbf{R}$ tak, že $\alpha < y < b$ a interval $[\alpha, y]$ je pokryt jedinou množinou $U \in \sigma$. Tedy $y \in A_\sigma$. Ovšem $y > \alpha$, což je spor s předpokladem, že $\alpha = \sup A_\sigma$. Musí tedy platit $\alpha = b$.

Důsledek 1. Množina $A \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní tehdy a jen tehdy, když je uzavřená a ohraničená.

Důkaz. 1. Buď A kompaktní. $\mathbf{R}^n$ je Hausdorffův topologický prostor, takže množina A je uzavřená (Věta 7. (a) odst. 7.3 str. 198). Z kompaktnosti A dále plyne, že množinu A lze pokrýt konečným počtem otevřených kvádrů a tedy také konečným počtem uzavřených kvádrů. Množina A tedy celá leží v nějakém uzavřeném kvádru a musí být ohraničená.

2. Nechť A je uzavřená a ohraničená. Existuje uzavřený kvádr $K \subset \mathbf{R}^n$ tak, že $A \subset K$. K je ovšem kompaktní množina (Věta 12. odst. 7.3 str. 200, Věta 6. odst. 7.2 str. 197) a A je uzavřená v topologickém podprostoru $K \subset \mathbf{R}^n$ (Věta 4. (b) odst. 3.1 str. 32). Podle Věty 4. odst. 7.1 str. 197 a Věty 3. (e) odst. 7.1 str. 196 je A kompaktní v $\mathbf{R}^n$.

Důsledek 2. Buď X kompaktní topologický prostor, $f : X \to \mathbf{R}$ spojitá funkce. Existuje bod $x_1 \in X$ tak, že $f(x_1) \ge f(x)$ pro každé $x \in X$, a bod $x_2 \in X$ tak, že $f(x_2) \le f(x)$ pro každé $x \in X$.

Důkaz. Podle Věty 5. odst. 7.1 str. 197 je množina $f(X) \subset \mathbf{R}$ kompaktní, je tedy uzavřená a ohraničená (Důsledek 1. Věty 12. odst. 7.3 str. 200). Označme $c = \sup f(X)$. Libovolné okolí bodu $c \in \mathbf{R}$ má neprázdný průnik s množinou $f(X)$; znamená to, že $c \in \operatorname{cl} f(X)$. Ovšem $\operatorname{cl} f(X) = f(X)$, takže existuje bod $x_1 \in X$ tak, že $f(x_1) = c$.

Stejně se dokáže existence bodu x_2.

7.4. Lokálně kompaktní prostory

Topologický prostor se nazývá *l*okálně kompaktní, jestliže každý jeho bod má okolí, jehož uzávěr je kompaktní množina.

Každý kompaktní prostor je lokálně kompaktní.

Věta 13. *Buď X Hausdorffův topologický prostor. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *X je lokálně kompaktní.*

(2) *Ke každému bodu $x \in X$ a ke každému okolí U bodu x existuje okolí V bodu x takové, že $\mathrm{cl}\, V$ je kompaktní množina a platí $\mathrm{cl}\, V \subset U$.*

Důkaz. 1 Předpokládejme, že X je lokálně kompaktní. Buď $x \in X$ bod, U jeho okolí. Podle předpokladu existuje okolí V_x bodu x tak, že $\mathrm{cl}\, V_x$ je kompaktní množina. Položme $A = \mathrm{cl}\, V_x \backslash U$; A je kompaktní množina (Věta 3. (b) odst. 7.1 str. 196). Zvolme okolí Z množiny A a okolí W bodu x tak, že $Z \cap W = \emptyset$ (Věta 8. odst. 7.3 str. 199). Položme $V = W \cap V_x$. V je okolí bodu x. Přitom $V \subset V_x$, takže $\mathrm{cl}\, V \subset \mathrm{cl}\, V_x$ je jako uzavřená podmnožina kompaktní množiny kompaktní (Věta 4. odst. 7.1 str. 197). Zbývá dokázat, že $\mathrm{cl}\, V \subset U$. Platí $V \subset W$, takže $\mathrm{cl}\, V \subset \mathrm{cl}\, W$; dále $W \cap Z = \emptyset$ a množiny Z, W jsou otevřené, takže $\mathrm{cl}\, W \cap Z = \emptyset$. Odtud ovšem dostáváme, že $\mathrm{cl}\, V \cap Z = \emptyset$, t.j. $\mathrm{cl}\, V \cap A = \emptyset$, jelikož Z je okolí A. Množina $\mathrm{cl}\, V$ tedy leží v $\mathrm{cl}\, V_x$ a neprotíná A. Ze vztahu $A = \mathrm{cl}\, V_x \backslash U$ tedy vyplývá, že $\mathrm{cl}\, V \subset U$, což jsme chtěli dokázat.

2. Je-li splněna podmínka (2), X je evidentně lokálně kompaktní.

Důsledek 1. V lokálně kompaktním Hausdorffově prostoru existuje báze topologie σ taková, že pro každé $U \in \sigma$ je množina $\mathrm{cl}\, U$ kompaktní.

Důkaz. Za σ vezmeme systém množin V z podmínky (2) Věty 13. odst. 7.4 str. 201; σ je báze topologie (Věta 9. odst. 1.4 str. 7).

Důsledek 2. Libovolné otevřené pokrytí lokálně kompaktního Hausdorffova prostoru má zjemnění, tvořené otevřenými množinami, jejichž uzávěry jsou kompaktní množiny.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé.

Věta 14. *Homeomorfní obraz lokálně kompaktního topologického prostoru je lokálně kompaktní prostor.*

Důkaz. Buď X lokálně kompaktní prostor, $f : X \to Y$ homeomorfismus. Buď $y \in Y$ bod a položme $x = f^{-1}(y)$. Nechť U je okolí bodu x takové, že $\mathrm{cl}\, U$ je kompaktní. Pak $V = f(U)$ je okolí bodu y takové, že $\mathrm{cl}\, V$ je kompaktní (Věta 5. odst. 7.1 str. 197).

Podmnožina topologického prostoru X se nazývá *lokálně kompaktní*, jestliže je lokálně kompaktní jako topologický podprostor X.

Věta 15. (a) *Uzavřená podmnožina lokálně kompaktního prostoru je lokálně kompaktní.*

(b) *Otevřená podmnožina lokálně kompaktního Hausdorffova prostoru je lokálně kompaktní.*

(c) *Podmnožina Y lokálně kompaktního Hausdorffova prostoru X je lokálně kompaktní tehdy a jen tehdy, když $Y = A \cap U$, kde $A \subset X$ (resp. $U \subset X$) je uzavřená množina (resp. otevřená množina).*

Důkaz. (a) Buď A uzavřená podmnožina lokálně kompaktního topologického prostoru X. Je-li A prázdná, pak je kompaktní a tedy lokálně kompaktní. Nechť $A \neq \emptyset$. K libovolnému $x \in A$ existuje okolí U bodu x takové, že $\mathrm{cl}\, U$ je kompaktní množina. Množina $U \cap A$ je okolí bodu x v A; ukážeme, že $\mathrm{cl}_A(U \cap A)$ je kompaktní množina v A. Stačí ukázat, že tato množina je kompaktní v X (Věta 3. (e) odst. 7.1 str. 196). Platí $\mathrm{cl}_A(U \cap A) = \mathrm{cl}(U \cap A) \cap A$ (Věta 4. (a) odst. 3.1 str. 32), takže $\mathrm{cl}_A(U \cap A)$ je jako průnik dvou uzavřených množin uzavřená množina. Dále $\mathrm{cl}(U \cap A) \subset \mathrm{cl}\, U$, t.j. $\mathrm{cl}(U \cap A) \cap A \subset \mathrm{cl}\, U$, takže $\mathrm{cl}_A(U \cap A)$ je podmnožina kompaktní množiny; je to tedy množina kompaktní (Věta 4. odst. 7.1 str. 197), což jsme chtěli dokázat.

(b) Buď U otevřená podmnožina lokálně kompaktního prostoru X, $x \in U$ bod. Existuje okolí V bodu x takové, že $\mathrm{cl}\, V$ je kompaktní množina a $\mathrm{cl}\, V \subset U$ (Věta 13. odst. 7.4 str. 201); U je tedy lokálně kompaktní.

(c) Buď $Y \subset X$ lokálně kompaktní podmnožina. Najdeme uzavřenou množinu $A \subset X$ a otevřenou množinu $U \subset X$ tak, že $Y = A \cap U$.

Y možno uvažovat jako lokálně kompaktní podmnožinu lokálně kompaktního Hausdorffova prostoru $Z = \mathrm{cl}\, Y$ (viz již dokázané tvrzení (a) a Věta 2. (a) odst. 3.1 str. 32). Ukážeme nejdříve, že Y je otevřená podmnožina Z.

Buď $y \in Y$ libovolný bod. Podle předpokladu existuje okolí V bodu y v Y tak, že $\mathrm{cl}_Y V$ je kompaktní množina v Y. $\mathrm{cl}_Y V$ je tedy kompaktní v Z (Věta 3. (e) odst. 7.1 str. 196) a z oddělitelnosti Z vyplývá, že je to množina uzavřená v Z (Věta 7. (a) odst. 7.3 str. 198). Dále $V \subset \mathrm{cl}_Y V = \mathrm{cl}_Z V \cap Y$ a tedy $\mathrm{cl}_Z V \subset \mathrm{cl}_Z \mathrm{cl}_Y V = \mathrm{cl}_Y V = \mathrm{cl}_Z V \cap Y \subset Y$. Buď $W \subset Z$ otevřená množina taková, že $V = W \cap Y$. Z toho, že Y je množina hustá v Z, vyplývá, že $\mathrm{cl}_Z W = \mathrm{cl}_Z(W \cap Y)$ (Věta 12. odst. 1.6 str. 8). Spojením výše uvedených vztahů dostáváme $W \subset \mathrm{cl}_Z W = \mathrm{cl}_Z(W \cap Y) = \mathrm{cl}_Z V \subset Y$. Bod y byl ovšem zvolen libovolně a W je jeho okolí ležící v Y, takže množina $Y \subset Z$ je otevřená.

Z toho ovšem vyplývá, že existuje otevřená množina $U \subset Y$ tak, že $Y = U \cap Z = U \cap \mathrm{cl}\, Y$, což jsme chtěli dokázat.

Dokážeme nyní, že množina $Y = A \cap U$, kde $A \subset X$ je uzavřená množina a $U \subset X$ je otevřená množina, je lokálně kompaktní. Podle již dokázaného tvrzení (a) A je lokálně kompaktní; z oddělitelnosti X vyplývá, že A je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický podprostor topologického prostoru X. Dále $A \cap U$ je otevřená množina v A, takže podle (b) $A \cap U$ je lokálně kompaktní podmnožina A. $A \cap U$ je tedy lokálně kompaktní topologický podprostor X, což jsme chtěli dokázat.

Věta 16. *Buď A kompaktní množina v lokálně kompaktním prostoru X. Existuje okolí U množiny A takové, že $\mathrm{cl}\, U$ je množina kompaktní.*

Důkaz. Ke každému $x \in A$ označme U_x okolí bodu x takové, že $\mathrm{cl}\, U_x$ je kompaktní množina. Systém $(U_x)_{x \in X}$ je otevřené pokrytí množiny A a z kompaktnosti A vyplývá, že pro jistá $x_1, x_2, \dots, x_k \in A$ množiny $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_k}$ pokrývají A. Klademe $U = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_k}$. Pak $\mathrm{cl}\, U$ je sjednocení množin $\mathrm{cl}\, U_{x_i}$ (Věta 4 (d) odst. 1.3) a z kompaktnosti těchto množin vyplývá kompaktnost množiny $\mathrm{cl}\, U$ (Věta 3. (a) odst. 7.1 str. 196).

Věta 17. *Buď $(X_\iota)_{\iota \in I}$ systém neprázdných topologických prostorů. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *Součin $\prod X_\iota$ je lokálně kompaktní.*

(2) *Existuje konečná množina $J \subset I$ taková, že pro $\iota \in J$ je topologický prostor X_ι lokálně kompaktní a pro $\iota \in I \backslash J$ je X_ι kompaktní.*

Důkaz. 1. Předpokládejme, že součin $\prod X_\iota$ je lokálně kompaktní. Pro libovolný bod $y \in \prod X_\iota$, $y = (y_\iota)$, libovolné $\kappa \in I$ a libovolné $x_\kappa \in X_\kappa$ klademe $f(x_\kappa) = (x'_\iota)$, kde $x'_\iota = y_\iota$ pro $\iota \neq \kappa$ a $x'_\kappa = x_\kappa$. f je homeomorfismus X_κ na uzavřený podprostor součinu $\prod X_\iota$ (Věta 9. (b) odst. 3.3 str 36, Důsledek 1. Věty 12. odst. 3.4 str. 38); X_κ je tedy lokálně kompaktní topologický prostor (Věta 14. odst. 7.4 str. 201). Buď U okolí bodu y takové, že $\operatorname{cl} U$ je kompaktní množina. Z definice topologie součinu vyplývá, že U obsahuje okolí bodu y tvaru $\operatorname{pr}_{\iota_1}^{-1}(U_{\iota_1}) \cap \operatorname{pr}_{\iota_2}^{-1}(U_{\iota_2}) \cap \dots \cap \operatorname{pr}_{\iota_k}^{-1}(U_{\iota_k})$, kde $U_{\iota_i} \subset X_{\iota_i}$ jsou otevřené množiny. Klademe $J = \{\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_k\}$. Pak pro libovolné $\iota \in I \backslash J$ množina $\operatorname{pr}_\iota(\operatorname{cl} U)$ je kompaktní. Ovšem $\operatorname{pr}_\iota(\operatorname{cl} U) \supset \operatorname{pr}_\iota(U) = X_\iota$, takže $\operatorname{pr}_\iota(\operatorname{cl} U) = X_\iota$ a podmínka (2) je splněna.

2. Předpokládejme, že je splněna podmínka (2). Buď $x = (x_\iota)$ libovolný bod součinu $\prod X_\iota$. Pro každé $\iota \in J$ nechť U_ι je okolí bodu $x_\iota \in X_\iota$ takové, že $\operatorname{cl} U_\iota$ je kompaktní množina. Pro $\iota \in I \backslash J$ položme$U_\iota = X_\iota$. Pak $\prod U_\iota$ je okolí bodu x; podle Věty 6. odst. 7.2 str. 197 je topologický prostor $\prod \operatorname{cl} U_\iota$ kompaktní. Ovšem $\operatorname{cl} \prod U_\iota = \prod \operatorname{cl} U_\iota$ (Věta 12. odst. 3.3 str. 37 takže množina ΠU_ι je okolí bodu x, které má kompaktní uzávěr. Podmínka (1) je tedy splněna.

7.5. σ-kompaktní prostory

Topologický prostor, jenž je sjednocením posloupnosti kompaktních množin, se nazývá σ-*k*ompaktní.

Věta 18. *Lokálně kompaktní topologický prostor druhého typu spočetnosti je σ-kompaktní.*

Důkaz. Buď X lokálně kompaktní topologický prostor druhého typu spočetnosti, ν jeho spočetná báze. Podle předpokladu ke každému bodu $x \in X$ existuje jeho okolí V_x tak, že $\operatorname{cl} V_x$ je kompaktní množina. Dále existuje okolí U_x bodu x tak, že $U_x \in \nu$, $U_x \subset V_x$. Pak ovšem $\operatorname{cl} U_x$ je kompaktní množina (Věta 4. odst. 7.1 str. 197, Věta 4. (b) odst. 3.1 str. 32 Evidentně $X = \bigcup U_x$, t.j. $X = \bigcup \operatorname{cl} U_x$ a ze spočetnosti báze ν vyplývá, že toto sjednocení je spočetné.

Přejdem k formulaci postačující podmínky parakompaktnosti lokálně kompaktního Hausdorffova prostoru. K tomu ukážeme, že každý σ-kompaktní lokálně kompaktní topologický prostor je sjednocením jisté rostoucí posloupnosti otevřených množin.

Lemma 1. *Buď X lokálně kompaktní σ-kompaktní topologický prostor. Existuje posloupnost $(U_i)_{i \in \mathbf{N}}$ otevřených množin x X taková, že pro každé i je množina $\operatorname{cl} U_i$ kompaktní, $\operatorname{cl} U_i \subset U_{i+1}$, a $\bigcup U_i = X$.*

Důkaz. Buď $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ posloupnost kompaktních podmnožin množiny X taková, že $X = \bigcup A_i$. Podle Důsledku 1. Věty 13. odst. 7.4 str. 201 a Věty 4. (d) odst. 1.3 str. 4 a Věty 3. (a) odst. 7.1 str. 196 má množina A_1 okolí U_1 takové, že množina $\operatorname{cl} U_1$ je kompaktní. Pak množina $A_2 \cup \operatorname{cl} U_1$ je kompaktní a má tedy okolí U_2 takové, že $\operatorname{cl} U_2$ je kompaktní množina. Dále postupujeme indukcí a pro libovolné $i > 2$ definujeme U_i jako takové okolí kompaktní množiny $A_i \cup \operatorname{cl} U_{i-1}$, že $\operatorname{cl} U_i$ je kompaktní množina. Posloupnost $(U_i)_{i \in \mathbf{N}}$ má požadované vlastnosti.

Věta 19. *Lokálně kompaktní σ-kompaktní Hausdorffův topologický prostor je parakompaktní.*

Důkaz. Buď $(U_i)_{i\in\mathbf{N}}$ posloupnost otevřených množin v lokálně kompaktním σ-kompaktním topologickém prostoru X taková,, že pro každé i je množina $\operatorname{cl} U_i$ kompaktní, $\operatorname{cl} U_i \subset U_{i+1}$ a $X = \bigcup U_i$ (Lemma 1. odst. 7.5 str. 203). Položme $U_0 = \emptyset$, $U_{-1} = \emptyset$. Dále pro každé $i \in \mathbf{N}$ položme $A_i = (\operatorname{cl} U_i)\backslash U_{i-1}$. A_i je kompaktní množina (Věta 3. (b) odst. 7.1 str. 196). Nahrazením množiny $\operatorname{cl} U_i$ množinou větší a množinou U_{i-1} množinou menší dostaneme, že $A_i \subset U_{i+1}\backslash \operatorname{cl} U_{i-2}$; množina U_{i+1} $\operatorname{cl} U_{i-1}$ je otevřená. Snadno je vidět, že množiny A_1, A_2, A_3, … pokrývají X. Skutečně, k libovolnému bodu x existuje množina U_i tak, že $x \in U_i$. Je-li k nejmenší z čísel i, pro které $x \in U_i$, pak $x \notin U_{k-1}$ a tedy $x \in A_k$, t.j. $x \in \bigcup A_i$.

Buď ν libovolné otevřené pokrytí X. Každý bod $x \in A_i$ má okolí $W_{i,x}$ ležící v některé z množin systému ν a zároveň v množině $U_{i+1}\backslash \operatorname{cl} U_{i-2}$. Z kompaktnosti A_i vyplývá, že pro jisté body x_1, x_2, …, $x_{k(i)}$ množiny W_{i,x_1}, W_{i,x_2}, …, $W_{i,x_{k(i)}}$ pokrývají A_i. Systém všech množin $W_{i,x_1}, W_{i,x_2}, \ldots, W_{i,x_{k(i)}}$; kde i probíhá množinu $\mathbf{N}$, je tedy otevřené pokrytí množiny X, které je zjemněním otevřeného pokrytí ν.

Zbývá ukázat, že pokrytí X množinami W_{i,x_j}, $1 \le j \le k(i)$, je lokálně konečné. Buď $x_0 \in X$ libovolný bod, n nejmenší z indexů i, pro které $x_0 \in U_i$. Pak tedy $x_0 \notin U_{n-1}$, t.j. $x_0 \notin \operatorname{cl} U_{n-2}$. Klademe $V = U_n \cap (X\backslash \operatorname{cl} U_{n-2}) = U_n\backslash \operatorname{cl} U_{n-2}$. V je evidentně okolí bodu x_0. Jelikož pro libovolné i platí $W_{i,x_j} \subset U_{i+1}\backslash \operatorname{cl} U_{i-2}$, platí také inkluze $W_{i,x_j} \cap V \subset (U_{i+1}\backslash \operatorname{cl} U_{i-2}) \cap (U_n\backslash \operatorname{cl} U_{n-2})$. Vezměme $i \le n-3$. Pak $U_i \subset \operatorname{cl} U_{i+1} \subset \operatorname{cl} U_{n-2}$ a tedy $(U_{i+1}\backslash \operatorname{cl} U_{i-2}) \cap (U_n\backslash \operatorname{cl} U_{n-2}) \subset (\operatorname{cl} U_{i+1}\backslash \operatorname{cl} U_{i-2}) \cap (U_n\backslash \operatorname{cl} U_{i+1}) = \emptyset$. Podobně vezměme $i-2 \ge n$. Pak $\operatorname{cl} U_n \subset U_{n+1} \subset U_{i-1} \subset \operatorname{cl} U_{i-1} \subset U_{i-2}$ a tedy $(U_{i+1}\backslash \operatorname{cl} U_{i-2}) \cap (U_n\backslash \operatorname{cl} U_{n-2}) \subset (U_{i+1}\backslash \operatorname{cl} U_{i-2}) \cap (\operatorname{cl} U_n\backslash \operatorname{cl} U_{n-2}) = \emptyset$ neboť $\operatorname{cl} U_n \subset \operatorname{cl} U_{i-2}$. $W_{i,x_j} \cap V$ je tedy prázdná množina pro každé i, pro které $i \le n-3$ nebo $i-2 \ge n$. Průnik $W_{i,x_j} \cap V$ může tedy být neprázdný jen pro i splňující podmínku $n-2 \le i \le n+1$, t.j. jen pro konečný počet množin W_{i,x_j}.

Je-li tedy topologický prostor X Hausdorffův, je také parakompaktní a důkaz je ukončen.

Důsledek. Lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor druhého typu spočetnosti je parakompaktní.

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledkem Věty 18. odst. 7.5 str. 203 a Věty 19. odst. 7.5 str. 203.

7.6. Úplně regulární prostory

V tomto odstavci $[0,1]^J$ označuje množinu zobrazení f množiny J do intervalu $[0,1] \subset \mathbf{R}$, uvažovaného s přirozenou topologií; množina $[0,1]^J$ je přitom uvažována s topologií součinu, se kterou je kompaktním topologickým prostorem (porov. př. (10) odst. 3.7 str. 46, Věta 12. odst. 7.3 str. 200, Věta 6. odst. 7.2 str. 197). Budeme se zabývat problémem existence vnoření daného topologického prostoru do (kompaktního) prostoru tvaru $[0,1]^J$.

Hausdorffův topologický prostor X se nazývá *ú*plně regulární nebo také *T*ichonovův, jestliže ke každé uzavřené množině $A \subset X$ a každému bodu $x \in X\backslash A$ existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f|_A = 0$ a $f(x) = 1$.

Věta 20. (a) *Úplně regulární topologický prostor je regulární.*
(b) *Normální topologický prostor je úplně regulární.*

Důkaz. (a) Při označení z definice úplně regulárního prostoru otevřené množiny $f^{-1}([0,1/2)) \supset A$, $f^{-1}((0/2,0]) \ni x$.
(b) Tvrzení vyplývá z Urysohnova lemmatu (Věta 8. odst. 6.2 str. 145).

Věta 21. (a) *Topologický podprostor úplně regulárního prostoru je úplně regulární.*
(b) *Součin systému úplně regulárních prostorů je úplně regulární prostor.*

Důkaz. (a) Buď Y topologický podprostor úplně regulárního topologického prostoru X, $A \subset Y$ uzavřená množina, $y \in Y \backslash A$ bod. Platí $A = \operatorname{cl} A \cap Y$, kde $\operatorname{cl} A$ je uzávěr množiny A v X, odkud vyplývá, že $y \notin \operatorname{cl} A$. Podle předpokladu existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f|_{\operatorname{cl} A} = 0$ a $f(y) = 1$. Funkce $g : Y \to [0,1]$, definovaná vztahem $g = f|_Y$, je spojitá a splňuje podmínky $g|_A = 1$, $g(y) = 0$.
(b) Buď $(X_\iota)_{\iota\in I}$ systém úplně regulárních topologických prostorů, $A \subset \Pi X_\iota$ uzavřená množina, $x \in \prod X_\iota$ bod, neležící v A, $x = (x_\iota)$. Množina $\prod X_\iota \backslash A$ je otevřená; zvolme prvek báze topologie $\prod U_\iota$ obsahující x a ležící v množině $\prod X_\iota \backslash A$. Podle definice topologie součinu $U_\iota = X_\iota$ pro každé $\iota \in I \backslash J$, kde $J = \{\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_k\}$ je jistá konečná množina. Buď $f_i : X_{\iota_i} \to [0,1]$ spojitá funkce taková, že $f_i|_{X_{\iota_i} \backslash U_{\iota_i}} = 0$, $f_i(x_{\iota_i}) = 1$, kde $i = 1, 2, \ldots, k$. Položme $\varphi_i = f_i \circ \operatorname{pr}_{\iota_i}$. φ_i je spojité zobrazení z X do $[0,1]$. Klademe pro každé $y \in X$ $f(y) = \varphi_1(y) \cdot \varphi_2(y) \ldots \varphi_k(y)$ (součin v $\mathbf{R}$). f je spojité zobrazení X do $[0,1]$. Padne-li bod $y = (y_\iota)$ do množiny A, pak nepatří množině ΠU_ι. Existuje tedy index i tak, že $y_{\iota_i} \in U_{\iota_i}$, t.j. $y_{\iota_i} \in X_{\iota_i} \backslash U_{\iota_i}$ a $f_i(y_{\iota_i}) = 0$, t.j. $f(y) = 0$. Pro $y = x$ platí $f(x) = f_i(x_{\iota_i}) \cdot f_2(x_{\iota_2}) \ldots f_k(x_{\iota_k}) = 1$.

Teorém, který nyní dokážeme, podává charakteristiku úplně regulárních prostorů jako těch topologických prostorů, které lze vnořit do kompaktních prostorů tvaru $[0,1]^J$.

Věta 22. *Topologický prostor X je úplně regulární tehdy a jen tehdy, když pro jistou množinu J existuje jeho vnoření do topologického prostoru $[0,1]^J$.*

Důkaz. 1. Buď X úplně regulární prostor, J libovolná množina parametrizující množinu všech spojitých funkcí f z X do $[0,1]$. Buď $x_0 \in X$ bod, U jeho okolí. Podle předpokladu existuje spojitá funkce $g : X \to [0,1]$ taková, že $g|_{X \backslash U} = 0$ a $g(x_0) = 1$. Podle věty o vnoření (Lemma 6. odst. 6.5 str. 155) je vztahem $f(x) = (f_\iota(x))_{\iota\in J}$ definované vnoření X do $\mathbf{R}^J$. Ovšem $f(X) \subset [0,1]^J$ a zúžením oboru hodnot f na $[0,1]^J$ evidentně opět dostaneme vnoření X do $[0,1]^J$. To dokazuje první část tvrzení.
(2) Předpokládejme, že pro jistou množinu J existuje vnoření $f : X \to [0,1]^J$. Snadno je vidět, že topologický prostor $[0,1]^J$ je úplně regulární: $\mathbf{R}$ je normální (Věta 7. odst. 6.2 str. 144), je tedy úplně regulární (Věta 20. (b) odst. 7.6 str. 204); dále součin $\mathbf{R}^J$ je úplně regulární (Věta 21. (b) odst. 7.6 str. 205) a jeho topologický podprostor je také úplně regulární (Věta 21. (a) odst. 7.6 str. 205). Podle stejného tvrzení musí tedy být topologický podprostor $f(X) \subset [0,1]^J$ také úplně regulární. Topologický prostor, homeomorfní s úplně regulárním prostorem, je ovšem úplně regulární.

Důsledek. Buď X topologický prostor. Následující tři podmínky jsou ekvivalentní:
(1) X je úplně regulární.
(2) X je homeomorfní s podprostorem kompaktíhjo Hausdorffova prostoru.
(3) X je homeomorfní s podprostorem normálního prostoru.

Důkaz. Z Věty 22. odst. 7.6 str. 205 vyplývá, že stačí ukázat, že topologický prostor $[0,1]^J$ je Hausdorffův, kompaktní a normální. Jeho oddělitelnost vyplývá z Věty 13. odst.

3.3 str. 38 a kompaktnost z Věty 12. odst. 7.3 str. 200 a Věty 6. odst. 7.2 str. 197. Jeho normálnost vyplývá z Důsledku Věty 9. odst. 7.3 str. 199.

7.7. Kompaktifikace topologického prostoru

*K*ompaktifikací topologického prostoru X rozumíme vnoření $f : X \to Y$ topologického prostoru X do kompaktního topologického prostoru Y takové, že množina $f(X) \subset Y$ je hustá v Y. Nemůže-li dojít k nedorozumění, nazýváme *k*ompaktifikací topologického prostoru X také samotný topologický prostor Y.

Je-li f vnoření topologického prostoru X do kompaktního topologického prostoru Y', pak $Y = \operatorname{cl} f(X)$ je uzavřený podprostor Y'; tento podprostor je ovšem kompaktní (Věta 4. odst. 7.1 str. 197), takže zobrazení $g : X \to Y$, které dostaneme z f zúžením oboru hodnot, je kompaktifikace topologického prostoru X. Tato kompaktifikace se nazývá *a*sociovaná s vnořením f.

Každý kompaktní topologický prostor X má kompaktifikaci f; za f lze vzít např. identické zobrazení $\mathrm{id}_X : X \to X$.

Kompaktifikace $f : X \to Y$ se nazývá *o*ddělitelná, je-li Y Hausdorffův topologický prostor.

Ukážeme nejdříve, že každý (nekompaktní) topologický prostor má kompaktifikaci.

Buď X nekompaktní topologický prostor. Zvolme bod nepatřící množině X a označme jej ∞; můžeme například vzít $\infty = X$. Položme $X^* = X \cup \{\infty\}$. Buď τ topologie topologického prostoru X. Označme τ^* systém všech podmnožin U množiny X^* splňujících jednu z těchto dvou podmínek:

(1) U je podmnožina množiny X, t.j. $\infty \notin U$, a $U \in \tau$.

(2) U je podmnožina množiny X^* obsahující bod ∞ a U má tvar $U = (\backslash A) \cup \{\infty\}$, kde A je kompaktní uzavřená podmnožina množiny X.

Lemma 2. *τ^* je topologie na X^*.*

Důkaz. Z podmínky (1) vyplývá, že $\emptyset \in \tau^*$. Dále $X^* = (X\backslash\emptyset) \cup \{\infty\}$ a množina $\emptyset$ je kompaktní a uzavřená v X, takže $X^* \in \tau^*$.

Buď $(U_\iota)_{\iota\in I}$ systém podmnožin množiny X^*, patřících systému τ^*. Ukážeme, že $U = \bigcup U_\iota \in \tau^*$. Označme $J = \{\iota \in I \mid U_\iota \not\ni \infty\}$, $K = \{\iota \in I \mid U_\iota \ni \infty\}$. Pro každé $\iota \in K$ má U_ι tvar $U_\iota = (X\backslash A_\iota) \cup \{\infty\}$ pro jistou kompaktní uzavřenou množinu $A_\iota \subset X$. Platí $U = V \cup W$, kde

$$\begin{aligned} V &= \bigcup_{\iota\in J} U_\iota, \\ W &= \bigcup_{\iota\in K} U_\iota = \bigcup_{\iota\in K} ((X\backslash A_\iota) \cup \{\infty\}) = (\bigcup_{\iota\in K} (X\backslash A_\iota)) \cup \{\infty\} \\ &= (X\backslash(\bigcap_{\iota\in K} A_\iota)) \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Evidentně $V \in \tau$ a podle Věty 3. (d) odst. 7.1 str. 196 je množina $A = \bigcap A_\iota$, kde ι probíhá K, kompaktní a uzavřená. Pro U tedy dostáváme vyjádření $U = (v \cup (X\backslash A)) \cup \{\infty\} = (X\backslash(A\backslash V)) \cup \{\infty\}$. Množina $A\backslash V$ je ovšem kompaktní (Věta 3. (b) odst. 7.1 str. **??**). Dále $A\backslash V = A \cap (X\backslash V)$, takže množina $A\backslash V$ je také uzavřená. Množina U tedy splňuje podmínku (2), t.j. patří systému τ^*.

Nakonec ukážeme, že pro libovolné dvě množiny U, $V \in \tau^*$ platí $U \cap V \in \tau^*$. Splňují-li obě množiny U, V podmínku (1), pak $U \cap V \in \tau$, t.j. $U \cap V \in \tau^*$. Splňuje-li U podmínku (1) a V podmínku (2), t.j. $V = (X \backslash A) \cup \{\infty\}$ pro jistou kompaktní uzavřenou množinu $A \subset X$, pak $U \cap V = U \cap (X \backslash A) \in \tau$, t.j. opět $U \cap V \in \tau^*$. Nakonec splňují-li obě množiny U, V podmínku (2), t.j. $U = (X \backslash A) \cup \{\infty\}$, $V = (X \backslash B) \cup \{\infty\}$ pro jisté kompaktní uzavřené množiny A, $B \subset X$, dostáváme $U \cap V = ((X \backslash A) \cap (X \backslash B)) \cup \{\infty\} = (X \backslash (A \cup B)) \cup \{\infty\}$. Přitom $A \cup B$ je kompaktní množina (Věta 3. (a) odst. 7.1 str. 196) a uzavřená množina, takže $U \cap V$ opět splňuje podmínku (2) a $U \cap V \in \tau^*$.

Věta 23. *Buď X nekompaktní topologický prostor s topologií τ.*
(a) *Množina X^* s topologií τ^* je kompaktní topologický prostor.*
(b) *Kanonické vložení X do X^* je kompaktifikace topologického prostoru X.*

Důkaz. 1. Ukážeme, že topologický prostor X^* je kompaktní. Buď $(U_\iota)_{\iota \in I}$ otevřené pokrytí X^*. Existuje index $\iota_0 \in I$ tak, že $\infty \in U_{\iota_0}$. Pak podle definice množina $X^* \backslash U_{\iota_0}$ je kompaktní (a uzavřená) v X. Systém $(U_\iota)_{\iota \in I}$ovšem pokrývá $X^* \backslash U_{\iota_0}$. Existují tedy indexy ι_1, $\iota_2, \dots, \iota_k \in I$ tak, že množiny $U_{\iota_1}, U_{\iota_2}, \dots, U_{\iota_k}$ pokrývají $X^* \backslash U_{\iota_0}$. Pak $\{U_{\iota_0}, U_{\iota_1}, \dots, U_{\iota_k}\}$ je konečné podpokrytí pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

2. Označme $\iota : X \to X^*$ kanonické vložení. Platí $\iota(X) = X$. Ukážeme, že množina X je hustá v X. Každé okolí U bodu ∞ má tvar $U = (X \backslash A) \cup \{\infty\}$, kde $A \subset X$ je kompaktní množina, t.j. $A \neq X$; platí tedy $U \cap X \neq \emptyset$, t.j. $\infty \in \operatorname{cl} X$ a $X^* \operatorname{cl} X$. Množina X je tedy hustá v X.

Zbývá prověřit, že ι je homeomorfismus X na $\iota(X) \subset X^*$. Z definice topologie τ^* ihned vyplývá, že vzor libovolné otevřené množiny $U \subset X^*$ je otevřená množina v X; ι je tedy spojité zobrazení (Věta 2. odst. 2.1 str. 18). Dále ι je zřejmě otevřené zobrazení, je to tedy homeomorfismus X na $\iota(X)$ (Věta 3., Věta 4. odst. 2.1 str. 18).

Kompaktifikace $\iota : X \to X^*$ (kanonické vložení nekompaktního topologického prostoru X do X^*) se nazývá *A*lexandrovova nebo také *j*ednobodová kompaktifikace.

Následující teorém podává nutné a postačující podmínky oddělitelnosti Alexandrovy kompaktifikace (*A*lexandrovův teorém).

Věta 24. *Buď X nekompaktní topologický prostor, X^* jeho Alexandrovova kompaktifikace. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
(1) *X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor.*
(2) *X^* je Hausdorffův topologický prostor.*

Důkaz. 1. Předpokládejme, že X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor. Zvolme dva různé body x, $y \in X^*$. Patří-li x, y množině X, existuje okolí U bodu x a okolí V bodu y v X tak, že $U \cap V = \emptyset$; tato okolí jsou ovšem otevřené množiny v X^*. Nechť nyní $x \in X$, $y = \infty$. Buď U takové okolí bodu x, že $\operatorname{cl} U$ je kompaktní množina. Klademe $V = (X \backslash \operatorname{cl} U) \cup \{\infty\}$. V je okolí bodu ∞ a $U \cap V = \emptyset$.

2. Je-li topologický prostor X^* Hausdorffův, pak X je také Hausdorffův. Dále jednobodová množina $\{\infty\}$ je uzavřená v X^*, takže $X = X^* \backslash \{\infty\}$ je otevřená množina v X^* a podle Věty 15. (b) odst. 7.4 str. 201 je tato množina lokálně kompaktní.

Podmínky existence *o*ddělitelné kompaktifikace nekompaktního topologického prostoru vyjasňuje tato věta.

Věta 25. *Topologický prostor má oddělitelnou kompaktifikaci tehdy a jen tehdy, když je úplně regulární.*

Důkaz. Tvrzení představuje jinou formulaci Důsledku Věty 22. odst. 7.6 str. 205.

Uvedeme některé důsledky Věty 24. a Věty 25..

Důsledek 1. K tomu, aby nekompaktní úplně regulární prostor měl oddělitelnou Alexandrovovu kompaktifikaci, je nutné a stačí, aby byl lokálně kompaktní.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z Věty 24..

Důsledek 2. Lokálně kompaktní Hausdorffův prostor je úplně regulární.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z Věty 24. a Věty 25..

Důsledek 3. Buď $f : X \to Y$ oddělitelná kompaktifikace nekompaktního topologického prostoru X. Je-li X lokálně kompaktní, pak množina $f(X) \subset Y$ je otevřená.

Důkaz. Podle Věty 14. odst. 7.4 str. 201 je homeomorfní obraz $f(X)$ lokálně kompaktního prostoru X lokálně kompaktní podprostor Y. Z Věty 15. (c) odst. 7.4 str. 201 vyplývá, že $f(X) = A \cap U$, kde A (resp. U) je uzavřená (resp. otevřená) podmnožina množiny Y. Odtud $\operatorname{cl} f(X) = Y \subset \operatorname{cl} A$, t.j. $Y = \operatorname{cl} A = A$ a tedy $f(X) = Y \cap U = U$.

Oddělitelná Alexandrovova kompaktifikace topologického prostoru X je "minimální" ze všech oddělitelných kompaktifikací X ve smyslu následujícího tvrzení.

Důsledek 4. Nechť $f : X \to Y$ je oddělitelná kompaktifikace nekompaktního topologického prostoru X, $\iota : X \to X^*$ jeho Alexandrovova kompaktifikace. Předpokládejme, že X^* je Hausdorffův. Existuje jediné spojité surjektivní zobrazení $g : Y \to X^*$ tak, že diagram

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota"'] & X^* \end{tikzcd}$$

komutuje.

Důkaz. Pro každé $y \in Y$ klademe

$$g(y) = \begin{cases} \iota \circ f^{-1}(y), & y \in f(X), \\ \infty, & y \in Y \backslash f(X). \end{cases}$$

Ukážeme, že zobrazení $g : Y \to X^*$, definované tímto vztahem, splňuje podmínky uvedené v Důsledku 4..

Dokážeme spojitost g. Buď $U \subset X^*$ otevřená množina ležící v X. Pak $g^{-1}(U) = g^{-1}\iota(\iota^{-1}(U)) = f(\iota^{-1}(U))$ je otevřená množina v podprostoru $f(X) \subset Y$. Ovšem $f(X)$ je otevřená množina v Y (Důsledek 3. Věty 25. odst. 7.7 str. 208), takže $g^{-1}(U)$ musí být otevřená v Y (Věta 4. (c) odst. 3.1 str. 32). Buď nyní $U \subset X^*$ otevřená množina tvaru $U = (X \backslash A) \cup \{\infty\}$, kde A je kompaktní podmnožina X (Věta 7. (a) odst. 7.3 str. 198). Pak $g^{-1}(U) = g^{-1}(X \backslash A) \cup g^{-1}(\{\infty\}) = g^{-1}(X \backslash A) \cup (Y \backslash f(X)) = Y \backslash (f(X) \backslash g^{-1}(X \backslash A)) = Y \backslash (f(X) \backslash (g^{-1}(X) \backslash g^{-1}(A)) = Y \backslash g^{-1}(A) = Y \backslash g^{-1}\iota(\iota^{-1}(A)) = Y \backslash f\iota^{-1}(A)$. Jelikož $f^{-1}(A)$ je kompaktní v $f(X)$, podle Věty 3. (e) odst. 7.1 str. 196 je $f\iota^{-1}(U)$ kompaktní rovněž v Y. Topologický prostor Y je ovšem Hausdorffův, takže $f\iota^{-1}(A)$ je uzavřená množina (Věta 7. (a) odst. 7.3 str. 198). Odtud již vyplývá, že množina $g^{-1}(U)$ je otevřená.

Zobrazení g je evidentně surjektivní. Jeho jednoznačnost vyplývá z toho, že g je spojité rozšíření zobrazení $\iota \circ f^{-1}$, definovaného na hustém podprostoru Y (Důsledek 1. Věty 8. odst. 3.2 str. 35

Buď X úplně regulární topologický prostor. Buď J libovolná množina parametrizující množinu všech *ohraničených* spojitých funkcí $f : X \to \mathbf{R}$; označme $(f_\iota)_{\iota\in J}$ systém ohraničených spojitých funkcí $f : X \to \mathbf{R}$. Ke každému $\iota \in J$ zvolme uzavřený interval $I_\iota \subset \mathbf{R}$ tak, že $f_\iota(X) \subset I_\iota$. Pro každé $x \in X$ položme $c_X(x) = (f_\iota(x))_{\iota\in J}$. Podle Tichonovovy věty (Věta 6. odst. 7.2 str. 197) je součin $\prod I_\iota$ kompaktní topologický prostor. Z úplné regularity X pak vyplývá, že zobrazení $c_X : X \to \prod I_\iota$ je vnoření (Lemma 6. odst. 6.5 str. 155). Klademe $\beta X = \operatorname{cl} c_X(X)$ (uzávěr v topologii součinu na $\prod I_\iota$). Topologický prostor βX se nazývá *β-obal* úplně regulárního topologického prostoru X. β-obal βX je jako uzavřený podprostor kompaktního prostoru kompaktní (Věta 4. odst. 7.1 str. 197) a jako podprostor Hausdorffova prostoru Hausdorffův (Věta 13. odst. 3.3 str. 38). Kompaktifikace topologického prostoru X asociovaná s vnořením c_X, se nazývá *Čechova–Stoneova kompaktifikace*. Zúžíme-li obor hodnot vnoření c_X můžeme Čechovu–Stoneovu kompaktifikaci úplně regulárního prostoru X označit jako zobrazení $c_X : X \to \beta X$.

Je-li topologický prostor X kompaktní, pak $c_X(X) \subset \prod I_\iota$ je kompaktní množina (Věta 5. odst. 7.1 str. 197), a tedy uzavřená množina (Věta 4. odst. 7.1 str. 197). V tomto případě $\beta X = c_X(X)$.

Uvedeme některé základní vlastnosti Čechovy–Stoneovy kompaktifikace.

Věta 26. *Buď X úplně regulární topologický prostor, $c_X : X \to \beta X$ jeho Čechova–Stoneova kompaktifikace, $f : X \to \mathbf{R}$ spojitá ohraničená funkce. Existuje jediná spojitá funkce $\bar{f} : \beta X \to \mathbf{R}$ taková, že $f = \bar{f} \circ c_X$.*

Důkaz. Při označení z definice Čechovy–Stoneovy kompaktifikace nechť ψ je kanonické vnoření topologického podprostoru βX do $\prod I_\iota$. Pro $x \in X$ evidentně $\psi(c_X(x)) = c_X(x)$. Buď $f : X \to \mathbf{R}$ spojitá ohraničená funkce. Existuje index $\kappa \in J$ tak, že $f = f_\kappa$. Klademe $\bar{f} = \mathrm{pr}_\kappa \circ\psi$, kde pr_κ je kanonická projekce součinu $\prod I_\iota$ na I_κ. Pak $\bar{f} \circ c_X = \mathrm{pr}_\kappa \circ\psi \circ c_X$ a tedy pro libovolné $x \in X$ platí $\bar{f}(c_X(x)) = \mathrm{pr}_\kappa \circ\psi(c_X(x)) = \mathrm{pr}_\kappa((f_\iota(x))_{\iota\in J}) = f_\kappa(x) = f(x)$; to ovšem znamená, že $\bar{f} \circ c_X = f$ a je dokázána existence funkce $\bar{f}$.

Jednoznačnost funkce $\bar{f}$ vyplývá z Důsledku 1. (b) Věty 8. odst. 3.2 str. 35.

Věta 27. *Buď c_X (resp. c_Y) Čechova–Stoneova kompaktifikace úplně regulárního topologického prostoru X (resp. Y), $f : X \to Y$ spojité zobrazení. Existuje právě jedno spojité zobrazení $\beta f : \beta X \to \beta Y$ takové, že $\beta f(c_X(x)) = c_Y(f(x))$ pro každé $x \in X$.*

Důkaz. Buď $(g_\iota)_{\iota\in I}$ systém všech spojitých ohraničených reálných funkcí, definovaných na Y. Pro každé $\iota \in I$ je $f_\iota = g_\iota \circ f$ spojitá ohraničená reálná funkce na X. Označme $\bar{f}_\iota : \beta X \to \mathbf{R}$ spojitou funkci takovou, že $f_\iota = \bar{f}_\iota \circ c_X$ (Věta 26. odst. 7.7 str. 209). Klademe pro každé $y \in \beta X$

$$\beta f(y) = \left(\bar{f}_\iota(y)\right)_{\iota\in I} .$$

Pro každé $x \in X$ platí $\beta f(c_X(x)) = (\bar{f}_\iota \circ c_X(x))_{\iota\in I} = (f_\iota(x))_{\iota\in I} = (g_\iota \circ f(x))_{\iota\in I} = c_Y(f(x))$. Prověříme spojitost funkce βf. Označme $I_\iota \subset \mathbf{R}$ takový uzavřený interval, že $g_\iota(Y) \subset I_\iota$; pak podle definice $\beta Y \subset \prod I_\iota$. Pro každé $\lambda \in I$ platí $\mathrm{pr}_\lambda \circ\beta f = \bar{f}_\lambda$, kde $\bar{f}_\lambda$ je spojitá funkce a $\mathrm{pr}_\lambda : \prod I_\iota \to I_\lambda$ je kanonická projekce. Zobrazení βf uvažované z βX do $\prod I_\iota$ je tedy spojité (Věta 10. (b) odst. 3.3 str. 36); zúžením jeho oboru hodnot $\prod I_\iota$ na βY dostáváme spojité zobrazení $\beta f : \beta X \to \beta Y$.

Jednoznačnost zobrazení βf vyplývá z Důsledku 1. (b) Věty 8. odst. 3.2 str. 35.

V důkazu Věty 27. jsme použili Větu 26.; důsledek Věty 27., který nyní uvedeme, je zobecněním Věty 26..

Důsledek 1. Buď c_X Čechova–Stoneova kompaktifikace úplně regulárního topologického prostoru X, Y kompaktní Hausdorffův prostor a $f : X \to Y$ spojité zobrazení. Existuje právě jedno spojité zobrazení $F : \beta X \to Y$ takové, že $F \circ c_X = f$.

Důkaz. Kompaktní Hausdorffův prostor je úplně regulární (Důsledek 2. Věty 25. odst. 7.7 str. 208); z kompaktnosti Y však vyplývá, že $c_Y : Y \to \beta Y$ je homeomorfismus. Klademe $F = c_Y^{-1} \circ \beta f$.

Ukážeme, že Čechova–Stoneova kompaktifikace úplně regulárního topologického prostoru X je "maximální" ze všech oddělitelných kompaktifikací X.

Důsledek 2. Nechť $f : X \to Y$ je oddělitelná kompaktifikace úplně regulárního prostoru X, $x_X : X \to \beta X$ jeho Čechova–Stoneova kompaktifikace. Existuje jediné surjektivní zobrazení $F : \beta X \to Y$ tak, že diagram

$$\begin{tikzcd} & \beta X \arrow[d, "F"] \\ X \arrow[ur, "c_X"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

komutuje.

Důkaz. Vezmeme-li v Důsledku 1. za F oddělitelnou kompaktifikaci X, vidíme, že zbývá ukázat, že F je surjektivní zobrazení. Vztah $F \circ c_X = f$ dává inkluzi $f(X) = F(c_X(X)) \subset F(\beta X) \subset Y$; ovšem f je kompaktifikace, takže $\operatorname{cl} f(X) = Y$ a tedy $\operatorname{cl} F(\beta X) = Y$. Ovšem $F(\beta X)$ je kompaktní množina (Věta 5. odst. 7.1 str. 197) a tedy uzavřená množina (Věta 7. (a) odst. 7.3 str. 198), takže $\operatorname{cl} F(\beta X) = F(\beta X) = Y$.

7.8. Příklady

(1) Triviální topologický prostor je kompaktní. Diskrétní topologický prostor X je kompaktní právě tehdy, když X je konečná množina. Podmnožina A diskrétního topologického prostoru je kompaktní právě tehdy, když je konečná. Diskrétní topologický prostor je lokálně kompaktní.

(2) Množina reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií není kompaktní: příkladem otevřeného pokrytí $\mathbf{R}$, z něhož nelze vybrat konečné podpokrytí, je pokrytí intervaly $(-n, n)$, kde n probíhá množinu přirozených čísel $\mathbf{N}$. $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií je lokálně kompaktní, neboť každý bod $x \in \mathbf{R}$ leží v nějakém otevřeném intervalu (a, b) takovém, že $\operatorname{cl}(a, b) = [a, b]$ je kompaktní interval (Věta 12. odst. 7.4 str. 200).

Euklidův topologický prostor $\mathbf{R}^n$ není kompaktní (součin nekompaktních topologických prostorů), je však lokálně kompaktní jako součin konečně mnoha lokálně kompaktních prostorů. Každá otevřená a každá uzavřená podmnožina $\mathbf{R}^n$ je lokálně kompaktní (Věta 15. (a), (b) odst. 7.4 str. 201). Podmnožina $\mathbf{R}^n$ je kompaktní tehdy a jen tehdy, je-li uzavřená a ohraničená (Důsledek 1. Věty 12. odst. 7.3 str. 200).

(3) *Kompaktní metrické prostory.* Nechť X je metrický prostor s metrikou d. Buď $\varepsilon > 0$. Řekneme, že množina $A \subset X$ je *ε-síť* v metrickém prostoru X, jestliže je konečná a $d(x, A) < \varepsilon$ pro každé $x \in X$. Metrický prostor X se nazývá *totálně ohraničený*, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje v X ε-síť. Metrika d se nazývá *totálně ohraničená*, jestliže metrický prostor X je totálně ohraničený.

Ukážeme, že kompaktní metrický prostor má následující vlastnosti: (a) je totálně ohraničený, (b) je úplný, (c) je separabilní, (d) je druhého typu spočetnosti.

(a) Předpokládejme, že metrika d metrického prostoru X není totálně ohraničená. Nechť $\varepsilon > 0$ je takové, že v X neexistuje ε-síť. Pak k libovolné konečné posloupnosti bodů $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ existuje bod x_{k+1} tak, že $d(x_i, x_{k+1}) \geq \varepsilon$ pro každé $i \leq k$. Začneme-li tedy od libovolného bodu $x_1 \in X$, můžeme indukcí definovat posloupnost $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$ bodů X takovou, že $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ pro $i \neq j$. Uvažujeme množinu $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subset X$. Podle Věty 9. (a) odst. 4.4 str. 93 je A uzavřená v X. Topologický podprostor $A \subset X$ je diskrétní; jelikož množina A není konečná, není kompaktní (viz př. (1) odst. 7.8 str. 210). Na základě Věty 4. odst. 7.1 str. 197 odtud dostaneme, že X nemůže být kompaktní. Kompaktní metrický prostor tedy musí být totálně ohraničený.

(b) Tvrzení je přímým důsledkem Věty 1. odst. 7.1 str. 196 a Cantorovy věty (cv. 25. kap. 5).

(c) Buď X kompaktní metrický prostor s metrikou d. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ systém otevřených koulí $(B(x, 1/n))_{x \in X}$ pokrývá X. Nechť $(B(x_i^n, 1/n))_{1 \leq i \leq k(n)}$ je konečné podpokrytí tohoto pokrytí. Klademe $M = \{x \in X \mid x = x_i, j = 1, 2, 3, \ldots, 1 \leq i \leq k(j)\}$. Množina M je spočetná. Ukážeme, že $\operatorname{cl} M = X$. Buď $x \in X$ libovolný bod, $B(x, \varepsilon)$ libovolná otevřená koule se středem x. Zvolme n tak, že $1/n < \varepsilon$. Pro každé m systém $(B(x_i^m, 1/m))_{1 \leq i \leq k(m)}$ pokrývá X, existuje tedy $i \in \mathbf{N}$, $1 \leq i \leq k(n)$, takové, že $x \in B(x_i^n, 1/n)$. To ovšem znamená, že $d(x, x_i^n) < 1/n$, t.j. $d(x, x_i^n) < \varepsilon$ a platí $x_i^n \in B(x, \varepsilon)$. Odtud vyplývá, že pro každé $\varepsilon > 0$ je $B(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ a tedy $x \in \operatorname{cl} M$. Separabilita kompaktního metrického prostoru je dokázána.

(d) Tvrzení je důsledkem Věty 4. (b) odst. 5.2 str. 113 a již dokázané vlastnosti (c).

(4) *Kompaktně-otevřená topologie.* Nechť X, Y jsou topologické prostory, nechť Y^X je množina všech zobrazení $f : X \to Y$. Pro libovolnou kompaktní množinu $K \subset X$ a libovolnou otevřenou množinu $U \subset Y$ klademe $W(K, U)\{f \in Y^X \mid f(K) \subset U\}$. Systém množin $W(K, U)$ pokrývá Y^X, je tedy systémem generátorů nějaké topologie na množině Y^X. Tato topologie se nazývá *kompaktně-otevřená topologie* na Y^X.

Z definice je zřejmé, že kompaktně-otevřená topologie je silnější než topologie bodové konvergence (př. (6) odst. 1.8 str. 10, př. (11) odst. 3.7 str. 47). Zobrazení $\mathrm{Ev}_x : Y^X \to Y$ (*evaluace* v bodě $x \in X$) je spojité v topologii bodové konvergence, je tedy také spojité v kompaktně-otevřené topologii. Je-li topologický prostor Y Hausdorffův, pak Y^X s kompaktně-otevřenou topologií je také Hausdorffův, neboť množina Y^X s topologií bodové konvergence (t.j. topologií součinu) je Hausdorffův prostor.

Topologie, indukovaná na libovolné podmnožině $A \subset Y^X$ kompaktně-otevřenou topologií, se také nazývá *kompaktně-otevřená*.

Nechť Y je regulární topologický prostor. Ukážeme, že pak množina $C(X, Y) \subset Y^X$ všech *spojitých* zobrazení $f : X \to Y$ je regulární topologický prostor v kompaktně-otevřené topologii.

Jelikož $C(X, Y)$ je jako podprostor Hausdorffova prostoru Hausdorffův, stačí ukázat, že k libovolnému bodu $f \in C(X, Y)$ a k libovolnému okolí $W(K, U)$ bodu f existuje otevřená množina $V \subset U$ tak, že $f \in W(K, V) \cap C(X, Y) \subset \operatorname{cl}_{C(X,Y)}(W(K, V) \cap C(X, Y)) \subset W(K, U) \cap C(X, Y)$, kde $\operatorname{cl}_{C(X,Y)}$ je topologický uzávěr v podprostoru $C(X, Y) \subset Y^X$.

Z kompaktnosti množiny f(K) (Věta 5. odst. 7.1 str. 197) a z regularity Y snadno vyvodíme na základě Věty 1. odst. 6.1 str. 142, že existuje otevřená množina $V \subset U$ taková, že $f(K) \subset V \subset \operatorname{cl} V \subset U$. Klademe $W(K, \operatorname{cl} V) = \{g \in Y^X \mid g(K) \subset \operatorname{cl} V\}$. Pak

$$W(K, \operatorname{cl} V) = \bigcap_{x \in K} W(x, \operatorname{cl} V)$$

je uzavřená množina, jelikož každá z množin $W(x, \operatorname{cl} V) Y^X \backslash W(x, Y \backslash \operatorname{cl} V)$ je evidentně uzavřená. Jinými slovy $\operatorname{cl} W(x, \operatorname{cl} V) = W(x, \operatorname{cl} V)$ a tedy $f \in W(K, V) \cap C(X, Y) \subset \operatorname{cl}_{C(X,Y)}(W(K, V) \cap C(X, Y)) = \operatorname{cl}(W(K, V) \cap C(X, Y)) \cap C(X, Y) \subset \operatorname{cl} W(K, V) \cap C(X, Y) \subset \operatorname{cl} W(K, \operatorname{cl} V) \cap C(X, Y) = W(K, \operatorname{cl} V) \cap C(X, Y) \subset W(K, U) \cap C(X, Y)$.

(5) *T*opologické variety s okrajem. Nechť $\mathbf{R}^n_- = \{y \in \mathbf{R}^n \mid y = (y^1, y^2, \ldots, y^n), y^n \leq 0\}$ je *poloprostor* v $\mathbf{R}^n$ (př. (2) odst. 3.7 str. 43) n-*r*ozměrným souřadnicovým systémem v bodě x topologického prostoru X rozumíme dvojici (U, φ), kde U je okolí x a φ je homeomorfismus U na otevřenou množinu $V \subset \mathbf{R}^n_-$. Říkáme, že topologický prostor X je *l*okálně homeomorfní s poloprostorem $\mathbf{R}^n_-$, jestliže v každém bodě $x \in X$ existuje n-rozměrný souřadnicový systém. Hausdorffův topologický prostor druhého typu spočetnosti, lokálně homeomorfní s $\mathbf{R}^n_-$, se nazývá n-*r*ozměrná topologická varieta s okrajem. Číslo n se přitom nazývá *d*imenze n-rozměrné topologické variety s okrajem.

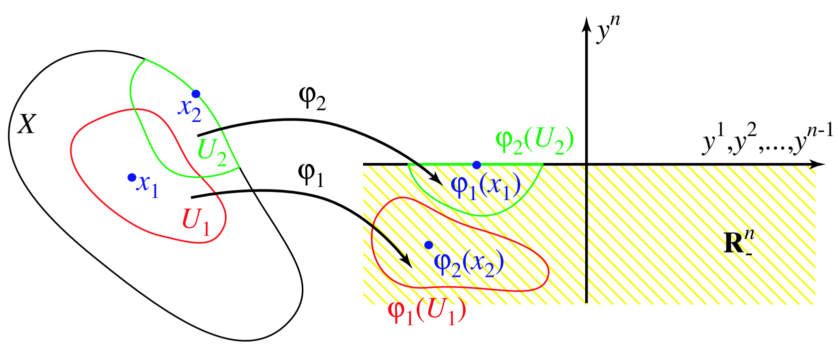
Je-li zřejmé, o jaké n se jedná, hovoříme o *s*ouřadnicovém systému a *t*opologické varietě s okrajem.

Buď X n-rozměrná topologická varieta s okrajem. Bod $x \in X$ se nazývá *v*nitřní, jestliže existuje souřadnicový systém (U, φ) v x takový, že $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n_-$ je otevřená množina v $\mathbf{R}^n$; x se nazývá *o*krajový bod, není-li vnitřním bodem. Označíme-li $\partial \mathbf{R}^n_-$ *o*kraj poloprostoru $\mathbf{R}^n_-$, t.j. množinu $\{y \in \mathbf{R}^n \mid y(y^1, y^2, \ldots, y^n), y^n = 0\}$, pak bod $x \in X$ je vnitřní tehdy a jen tehdy, když existuje souřadnicový systém (U, φ) v x takový, že $\varphi(U) \cap \partial \mathbf{R}^n_- = \emptyset$. Množina všech okrajových bodů $x \in X$ se nazývá *okraj* variety s okrajem X a označuje se ∂X. Platí-li $\partial X = \emptyset$, říkáme, že X je topologická varieta *b*ez okraje, nebo prostě *t*opologická varieta.

Ve výše uvedených definicích je použita zaužívaná terminologie, která není přesná (topologická varieta s okrajem, topologická varieta bez okraje, topologická varieta).

Na obr. 1 je znázorněn souřadnicový systém $(U_1 \varphi_1)$ ve vnitřním bodě $x_1 \in X$ a souřadnicový systém $U_2, \varphi_2)$ v okrajovém bodě x_2 topologické vaariety s okrajem X.

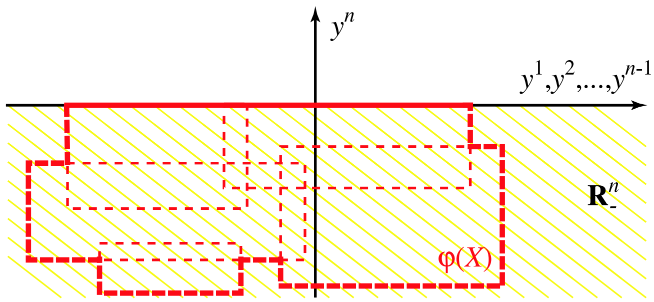
Obr. 1



Souřadnicový systém (U, φ) v bodě x topologického prostoru X se nazývá *globální*, platí-li $U = X$.

Na kompaktním topologickém prostoru X neexistuje globální souřadnicový systém. Dokážeme to sporem. Předpokládejme, že máme globální souřadnicový systém (X, φ). Pak množina $\varphi(X) \subset \mathbf{R}^n_-$ je kompaktní (Věta 5. odst. 7.2 str. 197) a zároveň podle definice otevřená. Je tedy sjednocením množin tvaru $K_y \cap \mathbf{R}^n_-$, kde K_y je vhodný otevřený kvádr v $\mathbf{R}^n$ obsahující bod $y \in \varphi(X)$ takový, že $K_y \cap \mathbf{R}^n_- \subset \varphi(X)$. Z kompaktnosti $\varphi(X)$ tedy vyplývá, že $\varphi(X) = (K_1 \cap \mathbf{R}^n_-) \cup (K_2 \cap \mathbf{R}^n_-) \cup \dots \cup (K_m \cap \mathbf{R}^n_-) = (K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m) \cap \mathbf{R}^n_-$ pro vhodné otevřené kvádry $K_1, K_2, \dots, K_m$ v $\mathbf{R}^n$. Z tohoto vyjádření množiny $\varphi(X)$ ovšem vyplývá, že tato množina není uzavřená (viz obr. 2).

Obr. 2



Každá n-rozměrná topologická varieta s okrajem X je lokálně kompaktní. Dokážeme to. Buď $x \in X$ bod, (U, φ) souřadnicový systém v bodě x. Množina $\varphi(U)$ je podle definice okolí bodu $\varphi(x)$ v $\mathbf{R}^n_-$. $\mathbf{R}^n_-$ je ovšem uzavřená podmnožina lokálně kompaktního Hausdorffova prostoru $\mathbf{R}^n$, takže je s indukovanou topologií sama lokálně kompaktní Hausdorffův prostor (Věta 15. (a) odst. 7.4 str. 201, Věta 2 (a) odst. 3.1). 2. (a) odst. 3.1 str. 32). Existuje tedy okolí V bodu $\varphi(x)$ v $\mathbf{R}^n_-$ takové, že $\operatorname{cl} V$ je kompaktní množina ležící ve $\varphi(U)$. Pro okolí $\varphi^{-1}(V)$ bodu x platí $\varphi^{-1}(V) \subset U$ a $\operatorname{cl} \varphi^{-1}(V) = \varphi^{-1}(\operatorname{cl} V) \subset U$.

Z lokální kompaktnosti topologické variety s okrajem X vyplývá, že X je metrizovatelný topologický prostor (Důsledek Věty 19. odst. 7.5 str. 204, Věta 14. odst. 6.6 str. 158, Důsledek Věty 11. odst. 6.5 str. 156). Poloprostor $\mathbf{R}^n_-$ je n-rozměrná topologická varieta s okrajem; její okraj splývá s okrajem $\partial \mathbf{R}^n_-$ *poloprostoru* $\mathbf{R}^n_-$.

Euklidův topologický prostor $\mathbf{R}^n$ je homeomorfní s otevřenou podmnožinou $\{y \in \mathbf{R}^n_- \mid y = (y^1, y^2, \dots, y^n), y^n < 0\} \subset \mathbf{R}^n_-$; za požadovaný homeomorfismus můžeme např. vzít zobrazení $(y^1, y^2, \dots, y^n) \to (y^1, y^2, \dots, y^{n-1}, -e^{y^n})$. $\mathbf{R}^n$ je tedy n-rozměrná topologická varieta bez okraje.

(6) Každou kompaktní n-rozměrnou topologickou varietu bez okraje lze vnořit do $\mathbf{R}^m$ pro jisté $m \geq n$. Dokážeme to.

Buď X kompaktní n-rozměrná topologická varieta bez okraje. Existují otevřené množiny $U_i \subset X$ a vnoření $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$, kde $1 \leq i \leq k$, tak, že systém množin $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ pokrývá X. Topologický prostor X je parakompaktní, existuje tedy rozklad $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k\}$ jednotkové funkce, kompaktibilní s pokrytím $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ (Věta 14. odst. 6.6 str. 158). Pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ definujeme zobrazení $h_i : X \to \mathbf{R}^n$ vztahem

$$h_i(x) = \begin{cases} \chi_i(x) \cdot \varphi_i(x), & x \in U_i, \\ 0, & x \in X \setminus \operatorname{supp} \chi_i. \end{cases}$$

Zobrazení h_i je definováno korektně, neboť $\operatorname{supp}\chi_i \subset U_i$ a $h_i(x) = 0$ pro $x \notin \operatorname{supp}\chi_i \cdot h_i$ je spojité, naboť jeho zúžení na otevřené množiny U_i, $X\setminus \operatorname{supp}\chi_i$ je spojité. Pro $x \in X$ klademe

$$f(x) = (\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \chi_k(x), h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x)).$$

Tímto vztahem je definováno spojité zobrazení $f : X \to \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{kn}$ (Věta 10. (b) odst. 3.3 str. 36). Ukážeme, že f je injektivní. Předpokládejme, že $f(x) = f(y)$ pro x, $y \in X$. Pak $\chi_i(x) = \chi_i(y)$ a $h_i(x) = h_i(y)$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$. Ovšem $\sum \chi_i(x) = 1$, a tedy existuje index j tak, že $\chi_j(x) > 0$, t.j. rovněž $\chi_j(y) > 0$. Odtud vyplývá, že $\varphi_j(x) = \varphi_j(y)$. Podle předpokladu je zobrazení φ_j injektivní, takže platí $x = y$, což jsme chtěli ukázat.

Topologický prostor X je podle předpokladu kompaktní a topologický podprostor $f(X) \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{kn}$ je Hausdorffův; zúžením oboru hodnot spojitého injektivního zobrazení f dostaneme homeomorfismus $f : X \to f(X) \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{kn}$ (Věta 10. odst. 7.3 str. 199). Tím je důkaz tvrzení ukončen.

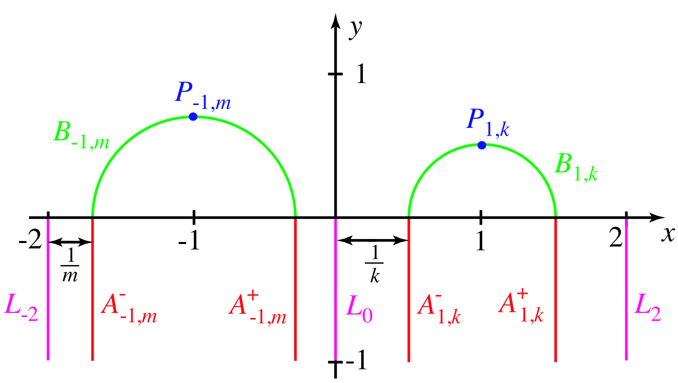
Dokázané tvrzení znamená, že každou kompaktní topologickou varietu bez okraje lze "realizovat" jako vhodný topologický podprostor jistého Euklidova topologického prostoru. Podobné tvrzení lze dokázat bez předpokladu kompaktnosti jinými metodami (algebraická topologie).

(7) Příkladem úplně regulárního topologického prostoru, který není normální, je součin $\mathbf{R}^I$, kde I je nespočetná množina. V tomto případě totiž $\mathbf{R}$ (s přirozenou topologií) je úplně regulární, jelikož je metrizovatelný (Věta 15. odst. 6.6 str. 161, Věta 14. odst. 6.6 str. 158, Věta 20 (b) odst. 7.6), 20. (b) odst. 7.6 str. 204), a tedy $\mathbf{R}^I$ je úplně regulární (Věta 21. odst. 7.6 str. 205); na druhé straně $\mathbf{R}^I$ není normální (př. (5) odst. 6.10 str. 164).

(8) Uvedeme příklad topologického prostoru, který je regulární, ale není úplně regulární (J. Thomas, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 181–182).

V několika krocích zkonstruujeme jistou podmnožinu X množiny $\mathbf{R}^2$. Pro každé sudé číslo m klademe $L_m = \{m\} \times [-1, 0]$. Dále pro každé liché číslo n a každé přirozené $k \geq 2$ klademe $A^+_{n,k} = \{n + 1 - 1/k\} \times [-1, 0]$, $A^-_{n,k} = \{n - 1 + 1/k\} \times [-1, 0]$, $B_{n,k} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - n)^2 + y^2 = (1 - 1/k)^2, y \geq 0\}$, $C_{n,k} = A^-_{n,k} \cup B_{n,k} \cup A^+_{n,k}$. Konstrukce množin L_m a $C_{n,k}$ je znázorněna na obr. 3.

Obr. 3



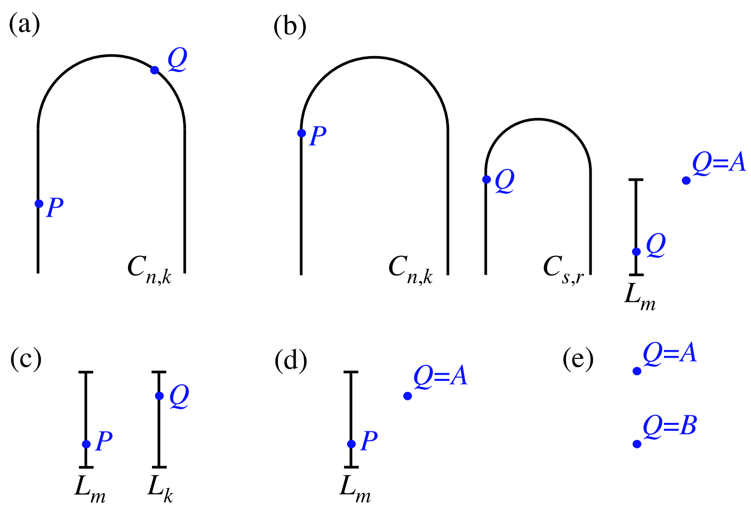
"Nejvýše položený bod" množiny $C_{n,k}$ označíme $P_{n,k}$ a nazveme *vrchol* (množiny $C_{n,k}$); zřejmě $P_{n,k} = (n, 1 - 1/k)$. Dále zvolíme body A, $B \in \mathbf{R}^2$ tak, aby neležely v žádné z množin $C_{n,k}$, L_m; vezmeme např. $A = (0,2)$, $B = (0,3)$. Nakonec položíme

$$X = \Big(\bigcup L_m\Big) \cup \Big(\bigcup C_{n,k}\Big) \cup \{A\} \cup \{B\}$$

(sjednocení přes všechna m sudá a všechna n lichá, $k \geq 2$ přirozená).

Na X zavedeme topologii pomocí jisté báze. Budeme říkat, že otevřená úsečka $(a,b) \times \{y_0\}$ v $\mathbf{R}^2$, rovnoběžná s osou x, je *základní*, jestliže neobsahuje žádný z bodů $P_{n,k}$, A, B. Buď $U \subset X$ podmnožina. U se nazývá *prvního druhu*, jestliže $U = X \cap q$, kde q je nějaká základní úsečka. U se nazývá *druhého druhu*, jestliže $U = C_{n,k} \backslash M$ pro jisté n, k, kde $M \subset C_{n,k}$ je nejvýše konečná množina (M může být prázdná). U se nazývá *třetího druhu*, jestliže existuje m sudé tak, že $U = \{A\} \cup \{(x,y) \in X \mid x < m\}$. Nakonec U se nazývá *čtvrtého druhu*, jestliže existuje m sudé tak, že $U = \{B\} \cup \{(x,y) \in X \mid x > m\}$. Snadno lze ukázat, že systém σ tvořený množinami prvního, druhého, třetího a čtvrtého druhu, je báze topologie na X. Tento systém zřejmě pokrývá množinu X. Přímo lze ověřit, že splňuje předpoklady Věty 8. (a) odst. 1.4 str. 6. σ je tedy báze topologie na X, kterou označíme τ. Ukážeme, že X s topologií τ je Hausdorffův prostor. Buďte P, $Q \in X$ dva různé body. Rozlišíme několik možností: (a) $P \in C_{n,k}$, $P \neq P_{n,k}$, $Q \in C_{n,k}$; v tomto případě množina $\{P\}$ je prvního druhu a je tedy otevřená; $C_{n,k} \backslash \{P\} \ni Q$ je druhého druhu a je tedy také otevřená; body P, Q lze tedy oddělit otevřenými množinami; (b) $P \in C_{n,k}$, $Q \notin C_{n,k}$; pak buď $Q \in C_{s,r}$ pro $(s,r) \neq (n,k)$, nebo $Q \in L_m$, nebo $Q = A$ nebo $Q = B$; ve všech případech má bod Q okolí, disjunktní s $C_{n,k}$; (c) $P \in L_m$, $Q \in L_k$; v tomto případě mají P, Q distjunktní okolí prvního druhu; (d) $P \in L_m$, $Q = A, B$; v tomto případě lze oddělit body P, Q množinami prvního a třetího (resp. prvního a čtvrtého) druhu; (e) $P = A$, $Q = B$; v tomto případě lze oddělit body P, Q množinami třetího a čtvrtého druhu. Schematicky jsou možnosti (a) – (e) znázorněny na obr. 4.

Obr. 4



Ukážeme, že topologický prostor X je regulární. Stačí ukázat, že k libovolně zvolenému bodu $P \in X$ a jeho okolí U existuje takové okolí V bodu P, že $\operatorname{cl} V \subset U$ (Věta 1. odst. 6.1 str. 142). Rozlišíme několik možností: (a) $P \in C_{n,k}$, $P \neq P_{n,k}$. V tomto případě je množina

$\{P\}$ uzavřená i otevřená, takže $\mathrm{cl}\{P\} = \{P\} \subset U$. (b) $P = P_{n,k}$. V tomto případě okolí U bodu P obsahuje prvek báze $C_{n,k} \backslash M$, kde $M \subset C_{n,k}$ je nejvýše konečná množina. Ovšem doplněk množiny $C_{n,k} \backslash M$ v X je otevřená množina, takže $\mathrm{cl}(C_{n,k} \backslash M) = C_{n,k} \backslash M \subset U$. (c) $P \in L_m$. Pak U obsahuje množinu $X \cap q$, kde q je základní úsečka v $\mathbf{R}^2$, jdoucí bodem x. Zřejmě doplněk $X \backslash (X \cap q)$ je otevřená množina, takže $\mathrm{cl}(X \cap q) = X \cap q \subset U$. (d) $P \in \{A, B\}$. Nechť např. $P = A$. Pak U obsahuje množinu tvaru $\{A\} \cup \{(x,y) \in X \mid x < m\}$ a tedy $A \in \{A\} \cup \{(x,y) \in X \mid x < m-2\} \subset \mathrm{cl}(\{A\} \cup \{(x,y) \in X \mid x < m-2\}) = \{(x,y) \in X \mid x \leq m-2\} \subset \{A\} \cup \{(x,y) \in X \mid x < m\} \subset U$. Tím je dokázána regularita X.

Ukážeme, že X není úplně regulární. Buď $f : X \to \mathbf{R}$ spojitá funkce. Ke každému bodu $t \in \mathbf{R}$ existuje spočetný systém otevřených množin $(U_i)_{i \in \mathbf{N}}$ takový, že $\{t\} = \bigcap U_i$; možno např. vzít $U_i = (t - 1/i, t + 1/i)$. Pak ovšem $f^{-1}(t) = f^{-1}(\bigcap U_i) = \bigcap f^{-1}(U_i)$ a ze spojitosti funkce f vyplývá, že množina $f^{-1}(t) \subset X$ je průnikem spočetného systému otevřených množin.

Položme

$$S_{n,k} = \{P \in C_{n,k} \mid f(P) \neq f(P_{n,k})\}, \quad S = \bigcup_{n,k} S_{n,k}.$$

Množina $f^{-1}(f(P_{n,k}))$ musí být průnikem spočetného systému otevřených množin obsahujících $P_{n,k}$. Jelikož každé okolí bodu $P_{n,k}$ obsahuje množinu tvaru $C_{n,k} \backslash K$, kde $K \subset C_{n,k}$ je konečná množina, platí $f^{-1}(f(p_{n,k})) \supset \bigcap (C_{n,k} \backslash K_i)$ pro jisté konečné množiny $K_i \subset C_{n,k}$ neobsahující $P_{n,k}$ (sjednocení přes $i \in \mathbf{N}$). Odtud $S_{n,k} = C_{n,k} \backslash f^{-1}(f(P_{n,k})) \subset C_{n,k} \backslash (\bigcap (C_{n,k} \backslash K_i)) = C_{n,k} \backslash (C_{n,k} \backslash \bigcup K_i) = \bigcup K_i$. Množina $S_{n,k}$ je tedy nejvýše spočetná odkud vyplývá, že množina S je nejvýše spočetná.

Zkonstruovali jsme tedy nejvýše spočetnou podmnožinu množiny $\bigcup C_{n,k}$. Označme I_0 množinu bodů $t \in [-1, 0]$ takových, že existuje $x \in \mathbf{R}$ tak, že $(x,t) \in S$. Jelikož S je nejvýše spočetná, množina I_0 nemůže být nespočetná. Existuje tedy prvek $a \in [-1, 0] \backslash I_0$. Pak pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $(x,a) \notin S$. Bod (x,a) tedy nepatří žádné z množin $S_{n,k}$. Padne-li tedy bod (x,a) do množiny $\bigcup C_{n,k}$, musí platit $f(x,a) = f(P_{s,r})$ pro jisté r, s.

Nepadne-li bod (x,a) do množiny $\bigcup C_{n,k}$ (a padne do množiny X), pak existuje index m tak, že $(x,a) \in L_m$. Buď U okolí bodu $f(x,a)$. Pak $f^{-1}(U)$ je okolí bodu (x,a), existuje tedy základní úsečka q tak, že $(x,a) \in q$ a $X \cap q \subset f^{-1}(U)$. Existují tedy přirozená čísla k_1, k_2 tak, že $f^{-1}(U)$ obsahuje všechny body $u \in C_{m-1,k} \cap q$, kde $k > k_1$, a všechny body $v \in C_{m+1,k} \cap q$, kde $k > k_2$. Přitom $f(u) = f(P_{m-1,k})$, $f(v) = f(P_{m+1,k})$ a tedy množina U obsahuje všechny body $f(P_{m-1,k})$, kde $k > k_1$, a všechny body $f(P_{m+1,k})$, kde $k > k_2$. Znamená to, že posloupnost $(f(P_{m-1,k}))_{k \in \mathbf{N}}$ (resp. posloupnost $(f(P_{m+1,k}))_{k \in \mathbf{N}}$) konverguje v $\mathbf{R}$ k bodu $f(x,a)$, t.j.

$$f(x,a) = \lim_{k \to \infty} f(P_{m-1,k}) = \lim_{k \to \infty} f(P_{m+1,k}).$$

Označíme-li $z_m = (x,a) = (m,a)$, dává tato rovnost vztah $f(z_m) = f(z_{m+2})$.

Klademe $f(z_m) = \gamma$ pro libovolné m. Ukážeme, že v bodě $A \in X$ platí $f(A) = \gamma$. Předpokládejme, že $f(A) \neq \gamma$. Pak existuje otevřený interval J obsahující $f(A)$ a neobsahující γ; ze spojitosti f ovšem vyplývá, že $f^{-1}(J)$ je otevřená množina obsahující bod A, v každém případě tedy $f^{-1}(J)$ obsahuje alespoň jeden z bodů z_m; to je ovšem spor s tím, jak jsou konstruována okolí bodu A (množiny třetího druhu). Skutečně tedy platí $f(A) = \gamma$ a analogicky ukážeme, že $f(B) = \gamma$.

Topologický prostor X je ovšem Hausdorffův, takže množiny $\{A\}$, $\{B\} \subset X$ jsou uzavřené; přitom pro libovolnou spojitou funkci $f : X \to \mathbf{R}$ platí $f(A) = f(B)$, takže X není úplně regulární.

Poznamenáváme, že v tomto příkladě jsme se bohužel nevyhnuli označování dvou různých (standardních) pojmů stejným (rovněž standardním) symbolem (a,b); ponecháváme na čtenáři, aby uvážil, kde je tímto symbolem označována uspořádaná dvojice a kde otevřený interval.

(9) Topologický prostor $[0,1]^I$, kde I je nespočetná množina, je příkladem parakompaktního prostoru, který není metrizovatelný. $[0,1]^I$ je totiž Hausdorffův (Věta 13. odst. 3.3 str. 38) a kompaktní (Věta 6. odst. 7.2 str. 197), odkud již vyplývá jeho parakompaktnost (Věta 9. odst. 7.3 str. 199). Podle Věty 10. odst. 5.5 str. 116 není ovšem tento topologický prostor metrizovatelný.

(10) Uvedeme příklad podprostoru normálního topologického prostoru, který není normální. Nechť $\mathbf{R}_S$ označuje množinu reálných čísel se Sorgenfreyovou topologií (př. (5) odst. 1.8 str. 10). $\mathbf{R}_S$ je normální topologický prostor (cv. 3 kap. 6), součin $\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S$ je tedy úplně regulární (Věta 20. (b) odst. 7.6 str. 204, Věta 21. (b) odst. 7.6 str. 205) a je definována Čechova-Stoneova kompaktifikace $c : \mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S \to \beta(\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S)$. Topologický prostor $\beta(\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S)$ je normální (Důsledek Věty 9. odst. 7.3 str. 199). Topologický podprostor $c(\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S) \subset \beta(\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S)$ ovšem není normální (cv. 4 kap. 6).

(11) Uvedeme příklady oddělitelné kompaktifikace intervalu $(0,1) \subset \mathbf{R}$ uvažovaného s přirozenou topologií.

Zobrazení $\iota : (0,1) \to (0,1] = (0,1) \cup \{1\}$, kde $\iota(t)$ a množina $(0,1) \cup \{1\}$ je uvažovaná s topologií τ^* z Lemmatu 2. odst. 7.7 str. 206 (Alexandrova kompaktifikace) je evidentně kompaktifikace intervalu $(0,1)$; tato kompaktifikace je oddělitelná podle Alexandrovy věty (Věta 24. odst. 7.7 str. 207).

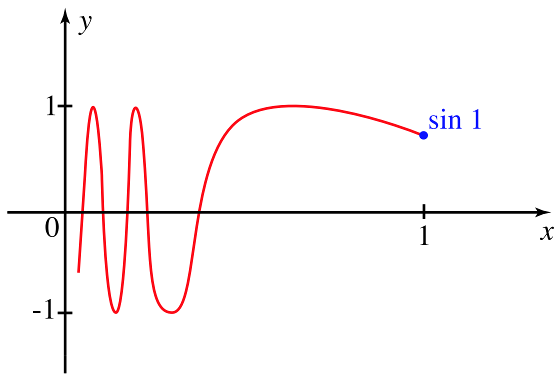
Kompaktifikace intervalu $(0,1)$, asociovaná s kanonickým vnořením $\iota : (0,1) \to \mathbf{R}$, je oddělitelná.

Zobrazení $f : (0,1) \to [-1,1] \times [-1,1]$, definované vztahem

$$f(t) = (t, \sin(1/t)),$$

je zřejmě vnoření (*topologická sinusoida*), kompaktifikace, asociovaná s tímto vnořením, je oddělitelná (porov. obr. 5).

Obr. 5



Zobrazení $g : (0,1) \to [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$, definované vztahem

$$g(t) = (t, \sin(1/t), \cos(1/t)),$$

je zřejmě vnoření; kompaktifikace, asociovaná s tímto vnořením, je oddělitelná.

Zobrazení $f : (0,1) \to S^1$, kde $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ je jednotková kružnice, definované vztahem

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$

je vnoření (cv. 10 kap. 3) a platí $\operatorname{cl} f((0,1)) = S^1$; f je tedy kompaktifikace intervalu $(0,1)$. Tato kompaktifikace je zřejmě oddělitelná. Topologický prostor S^1 (s přirozenou topologií) je homeomorfní s intervalem $(0,1]$ s topologií τ^* (viz výše), t.j. s Alexandrovou kompaktifikaci intervalu $(0,1)$: položíme-li $h(t) = f(t)$ pro $t \in (0,1)$ a $h(1) = (1,0)$, dostaneme homeomorfismus $h : (0,1] \to S^1$.

Cvičení

Kompaktní topologické prostory

1. Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií. Ukažte, užitím definice kompaktního prostoru, že (a) intervaly $(0,1]$, $[0,1)$ a $(0,1)$ nejsou kompaktní, (b) množina $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbf{N}\}$ je kompaktní.

Řešení.

(a) Stačí najít otevřené pokrytí, z něhož nelze vybrat konečné podpokrytí.

(b) Buď σ libovolné otevřené pokrytí X. Existuje množina $U \in \sigma$ taková, že $0 \in U$. Množina U obsahuje všechny body $1/n$ až na konečně mnoho. Pro každý bod $x \in X$, který neleží v U, zvolme prvek $U_x \in \sigma$, obsahující x. Pak množiny U, U_x tvoří konečné podpokrytí σ.

2. Uvažujme množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií. Rozhodněte, které z následujících množin jsou kompaktní: (a) $\mathbf{R}$, (b) $[0,1)$, $(0,1]$, $(0,1)$, (c) $[0,1]$.

Řešení. Nechť $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{R}_S$) je množina reálných čísel s přirozenou (resp. Sorgenfreyovou) topologií. Jelikož zobrazení $\mathrm{id}_{\mathbf{R}} : \mathbf{R}_S \to \mathbf{R}$ je spojité (př. (6) odst. 2.5 str. 23), množiny $\mathbf{R}$, $[0,1)$, $(0,1]$, $(0,1)$ nejsou kompaktní v $\mathbf{R}_S$. Ukážeme, že ani interval $[0,1]$ není kompaktní. Systém množin $\{1\}$, $[a_k, b_k)$, kde k probíhá $\mathbf{N}$, $a_k = b_{k-1}$ pro $k \in \mathbf{N}$ a $b_k = 1 - 1/(k+1)$ pro $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, tvoří pokrytí intervalu $[0,1]$, z něhož nelze vybrat konečné podpokrytí.

3. Rozhodněte, zda množina racionálních čísel $\mathbf{Q}$ je kompaktní (a) v přirozené topologii, (b) v Sorgenfreyově topologii, (c) v topologii konečných doplňků, (d) v triviální topologii na $\mathbf{R}$.

Řešení. Systém množin $(\{x\})_{x \in \mathbf{Q}}$ je otevřené pokrytí $\mathbf{Q}$ v topologii, indukovanou přirozenou a také Sorgenfreyovou topologií. Z tohoto pokrytí ovšem nelze vybrat konečné podpokrytí, takže v uvedených případech $\mathbf{Q}$ není kompaktní. V topologiích (c), (d) je $\mathbf{Q}$ kompaktní.

4. Charakterizujte kompaktní množiny v topologii konečných doplňků na množině X. Pomocí Věty 7. (a) odst. 7.3 str. 198 ukažte, že je-li X s touto topologií Hausdorffův prostor, pak je množina X konečná.

Řešení. Libovolná podmnožina $A \subset X$ je kompaktní: Je-li $A = \emptyset$, pak A je kompaktní (v libovolné topologii). Nechť $A \neq \emptyset$, nachť $(U_\iota)_{\iota \in I}$ je libovolné otevřené pokrytí množiny A. Zvolme index $\iota_0 \in I$ libovolně. Pak U_{ι_0} je pokrytí množiny $A \backslash \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ pro jistou konečnou množinu $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Každý z bodů x_i leží v některé z množin U_{ι_i} patřících systému $(U_\iota)_{\iota \in I}$, množiny U_{ι_0}, U_{ι_1}, $\ldots$, U_{ι_k} tedy tvoří konečné podpokrytí pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$. To ovšem znamená, že A je kompaktní (Věta 2. odst. 7.1 str. 196).

Je-li topologický prostror X Hausdorffův, pak každá kompaktní podmnožina X je uzavřená (Věta 7. (a) odst. 7.3 str. 198) a z definice topologie konečných doplňků vyplývá, že každá podmnožina množiny X je konečná; množina X je tedy také konečná.

5. Nechť Y je nekonečná množina, a, b dva různé body nenáležící množině Y. Položme $X = Y \cup \{a, b\}$ a označme τ systém podmnožin množiny X tvořený prázdnou množinou, všemi podmnožinami množiny Y, množinou X a těmi podmnožinami množiny X, jejichž doplňky jsou konečné množiny. Ukažte, že τ je topologie na X. Jsou množiny $A = Y \cup \{a\}$, $B = Y \cup \{b\}$, $A \cap B$ kompaktní v topologickém prostoru X?

Řešení. Standardním způsobem se ověří, že jsou splněny axiomy topologie.

Ukážeme, že množina A je kompaktní. Buď σ otevřené pokrytí A. Existuje množina $U \in \tau$ taková, že $a \in U$, $A \cap A \in \sigma$. Podle definice topologie τ to ovšem znamená, že doplněk množiny U v X je konečná množina, t.j. $U = X \backslash \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ pro jisté $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$. Ke každému z bodů x_i vybereme prvek V_i pokrytí σ, obsahující x_i. Systém množin $U \cap A$, V_1, V_2, $\dots$, V_k je konečné podpokrytí pokrytí σ.

Stejně se dokáže kompaktnost množiny B.

Množina $A \cap B$ není kompaktní. Platí totiž $A \cap B = Y$. Množina Y je podle předpokladu nekonečná a topologie τ indukuje na Y diskrétní topologii. Odtud již plyne, že Y není kompaktní.

6. Rozhodněte, zda jsou následující množiny kompaktní v přirozené topologii:
(a) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 y^2 \le r^2,\ r > 0,\ (x, y) \ne (0, 0)\}$.
(b) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \le 0\}$.
(c) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 1/x,\ 0 < x \le 1\}$.
(d) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \sin(1/x),\ 0 < x \le 1\}$.
(e) $S^1 \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^3$.
(f) $S^1 \times S^1 \subset \mathbf{R}^4$.

Řešení. Žádná z množin (a) – (e) není kompaktní: množiny (a), (d) nejsou uzavřené, (b), (c), (e) nejsou omezené. Množina (f) je kompaktní (součin kompaktních množin).

7. Zformulujte definici kompaktního topologického prostoru pomocí pojmu zjemnění pokrytí a ukažte ekvivalenci vaší definice se známou definicí.

Řešení. Ukážeme, že topologický prostor X je kompaktní tehdy a jen tehdy, když každé otevřené pokrytí X má konečné zjemnění.

Buď $\sigma = (V_\iota)_{\iota \in I}$ otevřené pokrytí X, $\nu\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ jeho konečné zjemnění. Ke každému $k = 1, 2, \dots, n$ existuje index $\iota \in I$ takový, že $A_k \subset V_\iota$. Vybereme množiny $V_k \in \sigma$ tak, aby platilo $A_k \subset V_k$ pro každé k. Pak systém $(V_k)_{1 \le k \le n}$ je konečné podpokrytí pokrytí σ. Obráceně tvrzení je zřejmé, jelikož každé podpokrytí daného pokrytí je rovněž jeho zjemněním.

8. Je-li topologický prostor X kompaktní v topologii τ, pak je X kompaktní rovněž v každé topologii slabší než τ. Dokažte.

Platí, že X je kompaktní v topologii silnější než τ?

Řešení. Je-li X' množina X s topologií τ' slabší než τ, pak zobrazení $\mathrm{id}_X : X \to X'$ je spojité a tedy X' je kompaktní (Věta 5. odst. 7.1 str. 197). Druhé tvrzení obecně neplatí (triviální a diskrétní topologie na nekonečné množině).

9. (a) Uveďte příklad topologického prostoru a jeho podmnožiny, která je kompaktní, ale není uzavřená.

(b) Je každá uzavřená podmnožina Hausdorffova prostoru kompaktní?

(c) Platí, že podprostor A kompaktního Hausdorffova prostoru X je kompaktní právě tehdy, když je množina A uzavřená v X?

Řešení. (a) Příklady je nutno volit z topologických prostorů, které nejsou Hausdorffovy (Věta 7. (a) odst. 7.3 str. 198).

Je-li $X \neq \emptyset$ triviální topologický prostor, $x \in X$ bod, pak množina $\{x\} \subset X$ je kompaktní neboť je konečná, není však uzavřená v X.

Nechť $X = \{0,1\}$, $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$. Uvažujme množinu $\{0\} \subset X$. Tato množina je konečná a tedy kompaktní, není však uzavřená.

(b) Uzavřená podmnožina Hausdorffova prostoru nemusí být kompaktní ($\mathbf{R}$ jako podmnožina $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií; posloupnost bodů nekonečné množiny s diskrétní topologií).

(c) Tvrzení platí (Věta 4. odst. 7.1 str. 197, Věta 7. (a) odst. 7.3 str. 198).

10. Libovolné dvě disjunktní kompaktní množiny v Hausdorffově prostoru mají disjunktní okolí. Dokažte.

Řešení. Nechť A, B jsou kompaktní podmnožiny Hausdorffova topologického prostoru X. Podle Věty 8. odst. 7.3 str. 199 existuje ke každému bodu $x \in A$ okolí U_x bodu x a okolí V_x množiny B tak, že $U_x \cap V_x = \emptyset$. Systém množin $(U_x)_{x \in A}$ je otevřené pokrytí množiny A. Z kompaktnosti A vyplývá, že existuje jeho konečné podpokrytí $(U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_k})$. Klademe

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}, \qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Zřejmě U, V jsou hledaná disjunktní okolí množin A, B.

11. Dokažte, že spojité zobrazení kompaktního topologického prostoru do Hausdorffova prostoru je uzavřené.

Řešení. Buď X kompaktní, Y Hausdorffův prostor, $f : X \to Y$ spojité zobrazení, $A \subset X$ uzavřená množina. Podle Věty 4. odst. 7.1 str. 197 je A kompaktní, takže $f(A) \subset Y$ je také kompaktní (Věta 5. odst. 7.1 str. 197). Kompaktní množina v Hausdorffově prostoru je ovšem uzavřená (Věta 7. odst. 7.3 str. 198).

12. (a) Buď X kompaktní prostor, Y Hausdorffův prostor a $f : X \to Y$ spojité zobrazení. Nechť $\mathscr{R}_f$ je ekvivalence na X, asociovaná se zobrazením f, $\pi_f : X \to X/\mathscr{R}_f$ faktorová projekce. Zobrazení $g : X/\mathscr{R}_f \to f(X)$, definované kanonickým rozkladem $f\iota \circ g \circ \pi_f$ zobrazení f, je homeomorfismus. Dokažte.

(b) S využitím tvrzení (a) vyřešte cv. 25 kap. 3 (*Möbilova páska*) a cv. 28 kap. 3(*Kleinova láhev*).

Řešení. (a) Tvrzení ihned vyplývá z Věty 16. odst. 3.5 str. 40 a Věty 10. odst. 7.3 str. 199.

(b) V obou případech jsou splněny předpoklady tvrzení (a).

13. Rozhodněte, zda jsou následující topologické prostory, uvažované s přirozenou topologií, homeomorfní:

(a) Intervaly $[a,b]$, (a,b) v $\mathbf{R}$.
(b) Intervaly $[a,b]$, $[a,b)$ v $\mathbf{R}$.
(c) Sféra S^2 v $\mathbf{R}^3$ a rovina $\mathbf{R}^2$.
(d) Sféra S^2 v $\mathbf{R}^3$ a otevřená koule v $\mathbf{R}^3$.
(e) Interval $(0,1]$ v $\mathbf{R}$ a kružnice S^1 v $\mathbf{R}^2$.

Řešení. Žádné z uvedených topologických prostorů nejsou homeomorfní (Důsledek 2. Věty 5. odst. 7.1 str. 197).

14. Buď $C([a,b])$ vektorový prostor spojitých komplexních funkcí, definovaných na intervalu

$[a, b] \subset \mathbf{R}$.

(a) Dokažte, že uniformní topologie na $C([a, b])$ je normovatelná.

(b) Ukažte, že vztahy

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\mathrm{dt}, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$$

definují normy na $C([a, b])$. Srovnejte topologie, asociované s těmito normami, s uniformní topologií.

Řešení. (a) Z Důsledku 2. Věty 12. odst. 7.3 str. 200 vyplývá, že každá funkce $f \in C([a, b])$ je ohraničená; $C([a, b])$ je tedy podmnožina metrického prostoru $B([a, b], \mathbf{C})$ ohraničených komplexních funkcí, definovaných na intervalu $[a, b]$ (porov. odst. 5.9). Uniformní topologie na $C([a, b])$ je indukována metrikou

$$d_{\max}(f, g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Tato metrika splňuje podmínky normovatelnosti; příslušnou normu označujeme $\| \ \|_{\max}$.

(b) Ukážeme, že z podmínky $\|f\|_1 = 0$ vyplývá $f = 0$; ostatní podmínky z definice normy jsou zřejmě splněny. Je-li $f \neq 0$, existuje bod $t_0 \in [a, b]$ takový, že $f(t_0) \neq 0$. Ze spojitosti f plyne existence intervalu, obsahujícího t_0, na kterém $|f(t)| > 0$; to ovšem znamená, že $\|f\|_1 > 0$ a $\| \ \|_1$ je norma na $C([a, b])$.

Podobně se dokáže (s využitím Minkowského nerovnosti), že $\| \ \|_2$ je také norma na $C([a, b])$.

Označme τ (resp. τ_1, resp. τ_2) uniformní topologii (resp. topologii asociovanou s $\| \ \|_1$, resp. topologii asociovanou s $\| \ \|_2$). Ukážeme, že platí $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \tau$, přičemž $\tau_1 \neq \tau_2$, $\tau_2 \neq \tau$.

Normy $\| \ \|_{\max}$, $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ nejsou ekvivalentní. Zřejmě platí $\| \ \|_1 \leq (b-a)$. $\| \ \|_{\max}$, $\| \ \|_2 \leq (b-a)^{1/2}$. $\| \ \|_{\max}$. Dokážeme to. Uvažujme např. interval $[a, b] = [0, 1]$ a položme $f_n(t) = 1-t/n$ pro $n \in (0, 1]$, $0 \leq t \leq n$ a $f_n(t) = 0$ pro $n \in (0, 1]$, $n \leq t \leq 1$. Zřejmě $f_n \in C([a, b])$ pro každé $n \in (0, 1]$ a platí

$$\|f_n\|_{\max} = 1, \quad \|f_n\|_1 = \frac{n}{2}, \quad \|f_n\|_2 = \left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|_{\max}}{\|f_n\|_1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|_{\max}}{\|f_n\|_2} = 0.$$

Z Cauchyho–Bujakovského nerovnosti v intevrálním tvaru (cv. 42 kap. 6) dostaneme, položíme-li $g = 1$, že $\|f\|_1 \leq (b-a)^{1/2}\|f\|_2$ pro každé $f \in C([a, b])$. Neexistuje ovšem číslo $k > 0$ takové, že $\|f_1\| > k \ \|f\|_2$ pro každé $f \in C([a, b)$ (pro funkce f_n máme $\|f_n\|_2 \backslash \|f_n\|_1 \to 0$ pro $n \to \infty$). Pro topologie τ, τ_1, τ_2 tedy platí $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \tau$.

15. Buď X kompaktní Hausdorffův prostor. Je-li každý bod $x \in X$ hromadný bod prostoru X, pak množina X je nespočetná. Dokažte.

Ukažte, že každý uzavřený interval v $\mathbf{R}$ je nespočetný.

Řešení. 1. Buď X kompaktní Hausdorffův prostor. Ukážeme, že ke každé otevřené množině $U \subset X$, $U \neq \emptyset$, a ke každému bodu $x \in X$ existuje neprázdná otevřená množina $V \subset U$ taková, že $\mathrm{cl}\, V \not\ni x$. Jestliže $x \notin \mathrm{cl}\, U$, pak zřejmě tvrzení platí. Nechť $x \in \mathrm{cl}\, U$. Zvolme bod $y \in U$, $y \neq x$ libovolně. Takový bod zřejmě existuje, neboť x je hromadným bodem X a $U \neq \emptyset$. Označme W_1 (resp. W_2) okolí bodu x (resp. y) taková, že $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, že $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, a položme $V = U \cap W_2$. Pak $V \subset U$, V je otevřená množina a $x \notin \mathrm{cl}\, V$.

2. Buď X kompaktní Hausdorffův prostor. Ukážeme, že neexistuje surjektivní zobrazení množiny přirozených čísel $\mathbf{N}$ na X. Buď f takové zobrazení. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ klademe $x_n = f(n)$. Výše bylo ukázáno, že existuje otevřená množina $V_1 \subset X$ tak, že $x_1 \notin \mathrm{cl}\, V_1$. Dále existuje otevřená množina $V_2 \subset X$ tak, že $V_2 \subset V_1$ a $\mathrm{cl}\, V_2 \not\ni x_2$. Ke každému n můžeme najít množinu $V_n \subset X$ tak,

že $V_n \subset V_{n-1}$ a $\operatorname{cl} V_n \not\ni x_n$. Množiny $\operatorname{cl} V_k$, $k \in \mathbf{N}$, tvoří centrovaný systém. Podle Věty 1. odst. 7.1 str. 196 existuje bod $x \in \bigcap \operatorname{cl} V_k$. Ovšem $x \neq x_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, neboť $x \in \operatorname{cl} V_n$ a $x \notin \operatorname{cl} V_n$. Dostali jsme tedy spor se surjektivností f, což dokazuje nespočetnost X.

3. Interval $[a, b]$, kde a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$, je kompaktní (Věta 12. odst. 7.3 str. 200) Hausdorffův prostor (Věta 2. odst. 3.1 str. 32) a platí $\operatorname{cl}[a, b] = [a, b]$. Odtud vyplývá, že množina $[a, b]$ je nespočetná.

16. (a) Ukažte, že kompaktní Hausdorffův prostor je regulární.
(b) Ukažte, že kompaktní Hausdorffův prostor je normální.

Řešení. (a) Buď X kompaktní Hausdorffův prostor, $x \in X$ bod, $A \subset X$ uzavřená množina neobsahující x. Ke každému bodu $a \in A$ existuje okolí U_a bodu a a okolí V_a bodu x tak, že $U_a \cap V_a = \emptyset$. Množiny U_a, kde a probíhá A, tvoří otevřené pokrytí množiny A. Množina A je ovšem jako uzavřená podmnožina kompaktního prostoru kompaktní (Věta 4. odst. 7.1 str. 197). Pro jistou konečnou množinu $\{a_1, a_2, \ldots, s_k\} \subset A$ tedy množiny U_{a_i} pokrývají A. Položme

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i}, \quad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{a_i}.$$

U je okolí množiny A a V je okolí bodu x, přičemž $U \cap V = \emptyset$; kdyby totiž existoval bod $y \in U \cap V$, pro jisté i by muselo platit $y \in V_{a_i}$, $y \in U_{a_i}$, což by byl spor s konstrukcí množin U_{a_i}, V_{a_i}. Tím je regulárnost X dokázána.

(b) Postupujeme analogicky jako v případě (a) s tím, že bod x nahradíme uzavřenou množinou B a využijeme regulárnosti X.

17. Dokažte, že ortogonální grupa $O_n(\mathbf{R})$, uvažovaná jako podprostor Euklidova topologického prostoru $\mathbf{R}^{n^2}$, je kompaktní topologická grupa.

Řešení. Bylo již ukázáno, že $O_n(\mathbf{R})$ je topologická grupa (cv. 22 kap. 6) a uzavřená podmnožina $\mathbf{R}^{n^2}$ (cv. 23 kap. 6). Ukážeme, že množina $O_n(\mathbf{R})$ je ohraničená. Nechť $A \in O_n(\mathbf{R})$, $A = (a_{jk})$, nechť $E = (\delta_{jk})$ je jednotková matice. Podmínka $A \cdot A^t = E$ má tvar

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i,\ j \leq n$$

odtud dostáváme pro $i = j$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1, \quad 1 \leq i \leq n,$$

a tedy $|a_{ik}| \leq 1$ pro $1 \leq i$, $k \leq n$. Množina $0_n(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}^{n^2}$ je tedy ohraničená. Kompaktnost $O_n(\mathbf{R})$ nyní vyplývá z Důsledku 1. Věty 12. odst. 7.3 str. 200.

Sítě a filtry v kompaktním prostoru

18. Dokažte, že platí tato tvrzení:
(a) Topologický prostor X je kompaktní tehdy a jen tehdy, když každá síť v X má hromadný bod.
(b) Topologický prostor X je kompaktní tehdy a jen tehdy, když každá síť v X má konvergentní podsíť.

Řešení. (a) Buď $S : I \to X$ síť v kompaktním topologickém prostoru X. Pro každé $\iota \in I$ označme A_ι množinu všech bodů $S(\kappa) \in X$, pro které $\kappa \geq \iota$. Systém množin $(A_\iota)_{\iota \in I}$ je centrovaný a systém množin $(\operatorname{cl} A_\iota)_{\iota\in I}$ je také centrovaný. Z kompaktnosti X vyplývá, že existuje bod $x \in \bigcap \operatorname{cl} A_\iota$. Předpokládejme, že x není hromadným bodem sítě S. Pak existuje okolí U bodu x a index $\kappa \in I$ tak, že pro žádné $\iota \geq \kappa$ neleží x_ι v U. To ovšem znamená, že $A_\kappa \cap U = \emptyset$, a tedy $x \notin \operatorname{cl} A_\kappa$, což je spor se skutečností, že $x \in A_\iota$ pro všechna $\iota \in I$. Bod x je tedy hromadný bod sítě S.

Obráceně předpokládejme, že v topologickém prostoru X má každá síť hromadný bod. Buď σ libovolný centrovaný systém uzavřených množin v X. Definujeme systém $\nu = (B_\iota)_{\iota\in I}$ jako systém všech konečných průniků množin systému σ. Systém ν je centrovaný a každá z množin systému ν leží v některé z množin systému σ, přičemž každá z množin systému σ je prvkem systému ν. Stačí tedy ukázat, že $\bigcap B_\iota \neq \emptyset$. Systém ν je uzavřený vzhledem ke konečným průnikům, proto lze na ν definovat usměrnění pomocí množinové inkluze $\subset$. Pro každé $\iota \in I$ vybereme z množiny B_ι bod x_{B_ι}. Dostáváme tak síť $S = (x_{B_\iota})_{B_\iota\in\nu}$ v X. Podle předpokladu má tato síť hromadný bod; označme jej x. Z definice hromadného bodu vyplývá, že pro každé okolí U bodu x a pro libovolné $B_\iota \in \nu$ existuje $B_\kappa \subset B_\iota$ tak, že $B_\kappa \cap U \neq \emptyset$, t.j. že pro každé okolí U bodu x a pro libovolné $B_\iota \in \nu$ je $B_\iota \cap U \neq \emptyset$. To ovšem znamená, že $x \in \operatorname{cl} B_\iota = B_\iota$ pro všechny množiny $B_\iota \in \nu$, t.j. že $x \in \bigcap B$. Kompaktnost prostoru X nyní vyplývá z Věty 1. odst. 7.1 str. 196.

(b) Tvrzení je důsledkem již dokázaného tvrzení (a) a cv. 8, 9 kap. 4.

19. Dokažte *Bolzanovu–Weierstrassovu* větu: Nechť X je topologický prostor prvního typu spočetnosti. Je-li X kompaktní, pak každá posloupnost v X má konvergentní podposloupnost.

Řešení. Podle cv. 18 (a) má každá posloupnost v kompaktním prostoru hromadný bod. Jelikož X je prvního typu spočetnosti, podle cv. 10 kap. 4 má každá posloupnost v X konvergentní podposloupnost.

20. Dokažte, že následující tři podmínky jsou ekvivalentní:

(1) Topologický prostor X je kompaktní.

(2) Každý filtr v topologickém prostoru X má hromadný bod.

(3) Každý ultrafiltr v topologickém prostoru X je konvergentní.

Řešení. Buď X kompaktní topologický prostor, φ libovolný filtr v X. Označme $\varphi = (A_\iota)_{\iota\in I}$. Z definice filtru vyplývá, že systém množin $(A_\iota)_{\iota\in I}$ je centrovaný; systém množin $(\operatorname{cl} A_\iota)_{\iota\in I}$ je tedy také centorvaný. Platí tedy $\bigcap \operatorname{cl} A_\iota \neq \emptyset$, což znamená, že existuje bod $x \in X$ tak, že $x \in \operatorname{cl} A_\iota$ pro každé $\iota \in I$, t.j. x je hromadným bodem filtru φ.

Předpokládejme, že X je topologický prostor, v němž má libovolný filtr hromadný bod. Ukážeme, že X je kompaktní. Buď σ libovolný centrovaný systém uzavřených množin v X. Uvažujme systém množin ν v X, tvořený všemi konečnými průniky množin ze σ. ν je zřejmě báze filtru v X. Podle předpokladu má filtr φ_ν hromadný bod. Označme jej x. Pak ovšem pro každou množinu $B \in \varphi_\nu$ platí $x \in \operatorname{cl} B = B$, t.j. $x \in \bigcap B$ (průnik množin $B \in \varphi_\nu$) a tedy také $x \in \bigcap \tilde{B}$ (průnik množin $\tilde{B} \in \nu$). Jelikož každá z množin systému σ je prvkem systému ν, dostáváme $x \in bigcapA$ (průnik množin $A \in \sigma$), t.j. systém σ má neprázdný průnik. Podle Věty 1. odst. 7.1 str. 196 je X kompaktní topologický prostor.

Zbývá dokázat ekvivalentní tvrzení (2) a (3). Nechť X je topologický prostor takový, že každý filtr v X má hromadný bod. Pak také každý ultrafiltr je konvergentní, neboť pro ultrafiltr pojmy "limita" a "hromadný bod" splývají (porov. cv. 20 kap. 4). Obráceně nechť každý ultrafiltr v X je konvergentní. Buď φ libovolný filtr v X. Existuje ultrafiltr φ' jemnější než φ; předpokládejme, že x je jeho limita. Pak x je hromadný bod filtru φ a tvrzení je dokázáno.

Poznámka. V analogii s cv. 18 si lze položit otázku, zda platí tato dvě tvrzení:

(a) Topologický prostor prvního typu spočetnosti v němž každá posloupnost má konvergentní podposloupnost, je kompaktní.

(b) Topologický prostor prvního typu spočetnosti v němž každá posloupnost má hromadný bod, je kompaktní.

Žádné z těchto tvrzení obecně neplatí (viz teorie sekvenčně kompaktních a spočetně kompaktních topologických prostorů [8]).

Topologický prostor se nazývá *s*ekvenčně kompaktní, jestliže každá posloupnost jeho bodů má konvergentní podposloupnost. Topologický prostor se nazývá *s*početně kompaktní, jestliže každé jeho spočetné otevřené pokrytí obsahuje konečné podpokrytí. Lze ukázat, že topologický prostor X je spočetně kompaktní tehdy a jen tehdy, když každá posloupnost v X má hromadný bod.

V topologických prostorech prvního typu spočetnosti pojmy sekvenční kompaktnost a spočetná kompaktnost splývají. V metrizovatelných topologických prostorech tyto pojmy splývají s pojmem kompaktnost (srov. cv. 29).

Součin kompaktních prostorů

21. Nechť X je kompaktní topologický prostor, Y topologický prostor, $y_0 \in Y$ bod, U okolí množiny $X \times \{y_0\}$ v $X \times Y$. Existuje otevřená množina $V \subset Y$ obsahující bod y_0 taková, že $X \times V \subset U$. Ukažte.

Řešení. Zvolme bod $x \in X$. Zřejmě $(x, y_0) \in U$ a tedy existuje prvek W_x báze topologie součinu takový, že $(x, y_0) \in W_x \subset U$. W_x má tvar $M_x \times L_x$, kde M_x (resp. L_x) je okolí bodu x (resp. y_0). Množiny M_x tvoří otevřené pokrytí X. Z kompaktnosti X plyne existence konečného podpokrytí $\{M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n}\}$ tohoto pokrytí. Klademe

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} L_{x_i}.$$

Množina V má požadované vlastnosti.

22. Ukažte, že součin konečného systému kompaktních topologických prostorů je kompaktní topologický prostor.

Řešení. Stačí dokázat tvrzení pro součin dvou topologických prostorů. Provedeme přímý důkaz. Buďte X, Y kompaktní topologické prostory, σ otevřené pokrytí součinu $X \times Y$, $x \in X$ bod. σ je otevřené pokrytí podprostoru $\{x\} \times Y$, který je homeomorfní s kompaktním prostorem Y. Existuje tedy konečné podpokrytí σ_x podprostoru $\{x\} \times Y$. Podle cv. 21 lze najít okolí U_x bodu x takové, že σ_x pokrývá množinu $U_x \times Y$. Systém $(U_x)_{x \in X}$ je otevřené pokrytí X. Nechť $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}\}$ je jeho konečné podpokrytí. Každá z množin $U_{x_k} \times Y$ je pokryta konečným systémem množin ze systému σ, tedy součin $X \times Y$ je pokryt konečným systémem množin ze σ.

23. Dokažte pomocí teorie filtrů Tichonovovu větu: Nechť $(X_\iota)_{\iota \in I}$ je systém kompaktních topologických prostorů. Pak součin $X = \prod X_\iota$ je kompaktní topologický prostor.

Řešení. Nechť φ je ultrafiltr v X. Podle cv. 19 (c) kap. 4 je $\pi_\iota(\varphi)$, kde $\pi_\iota : X \to X_\iota$ je projekce, ultrafiltr v X_ι pro každé $\iota \in I$. X_ι je podle předpokladu kompaktní topologický prostor, t.j. $\lim \pi_\iota(\varphi) \neq \emptyset$ (srov. cv. 20). To ovšem znamená, že $\lim \varphi \neq \emptyset$ (cv. 26 kap. 4). X je tedy kompaktní (cv. 20).

24. Buďte X, Y topologické prostory a uvažujme množinu Y^X s topologií bodové konvergence.

(a) Je-li Y kompaktní, je uzavřený podprostor $F \subset Y^X$ kompaktní?

(b) Je-li Y Hausdorffův, pak kompaktní podprostor $F \subset Y^X$ je uzavřená množina. Platí toto tvrzení i pro kompaktně-otevřenou topologii na Y^X?

Řešení. (a) Tvrzení platí. Je-li Y kompaktní, pak také Y^X je kompaktní podle Tichonovovy věty (Věta 6. odst. 7.2 str. 197, cv. 23) a tedy F je kompaktní podle Věty 4. odst. 7.1 str. 197.

(b) Tvrzení platí. Je-li Y Hausdorffův, pak také Y^X s topologií bodové konvergence je Hausdorffův prostor (Věta 13. odst. 3.3 str. 38). Kompaktně otevřená topologie je ovšem silnější než topologie bodové konvergence (př. (4) odst. 7.8 str. 211), takže Y^X s touto topologií je také Hausdorffův. Množina $F \subset Y^X$ kompaktní v kompaktně-otevřené topologii je tedy uzavřená.

Kompaktní metrické prostory

25. Metrický prostor, v němž každá uzavřená koule je kompaktní, je úplný. Dokažte.

Řešení. Buď X metrický prostor, v němž každá uzavřená koule je kompaktní. Nechť (x_i) je libobolná cauchyovská posloupnost v X. Posloupnost (x_i) je ohraničená (Důsledek Věty 21. odst. 5.8 str. 123), leží tedy celá v nějaké uzavřené kouli B. B je ovšem podle předpokladu kompaktní prostor prvního typu spočetnosti a podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty (cv. 19) má posloupnost (x_i) v B konvergentní podposloupnost. Označme x limitu této podposloupnosti. V libovolném okolí U bodu x leží nekonečně mnoho bodů posloupnosti (x_i). Podle Lematu 2. odst. 5.5 str. 117 tedy $x = \lim x_i$. Topologický prostor X je tedy úplný.

26. Buď X nekompaktní metrický prostor s metrikou d. Ke každé kompaktní množině $A \subset X$ a libovolné otevřené mmožině U obsahující A existuje číslo $r > 0$ takové, že $B_d(A, r) \subset U$. Dokažte.

Řešení. Buď A kompaktní množina v X, U její okolí různé od X. Pro každé $x \in X$ klademe $f(x) = d(x, X \backslash U)$. Reálná funkce $f : X \to \mathbf{R}$ je nezáporná na množině A (t.j. $f(x) > 0$ pro každé $x \in A$). Podle Věty 15. odst. 5.6 str. 119 je funkce $f|_A$ spojitá a podle Důsledku 2. Věty 12. odst. 7.3 str. 200 je tato funkce ohraničená. Existuje tedy číslo $r > 0$ takové, že $f(x) \geq r$ pro všechna $x \in A$. Zřejmě pak

$$B_d(A, r) = \bigcup_{x \in A} B_d(x, r) \subset U.$$

Nechť nyní $U = X$. Jelikož A je kompaktní a X není kompaktní, existuje bod $x \in X \backslash A$. X je Hausdorffův prostor, proto množina $V = X \backslash \{x\}$ je otevřená. V je okolí množiny A, $V \neq X$, a tedy podle výše dokázaného existuje $r > 0$ takové, že $B_d(A, r) subset V$. Je proto také $B_d(A, r) \subset U = X$. Tím je důkaz ukončen.

Buď σ otevřené pokrytí metrického prostoru X, $\lambda > 0$ reálné číslo. Řekneme, že λ je *L*ebesgueovo číslo pokrytí σ, jestliže ke každé množině $A \subset X$ takové, že $\delta(A) < \lambda$, existuje množina $U \in \sigma$ taková, že $A \subset U$ (zde $\delta(A)$ označuje průměr množiny A).

27. Buď X metrický prostor, σ jeho otevřené pokrytí, $\lambda > 0$. Dokažte, že platí tato tvrzení:

(a) Je-li λ Lebesgueovo číslo pokrytí σ, pak pokrytí X otevřenými koulemi $B(x, \lambda/2)$, kde x probíhá X, je zjemnění pokrytí σ.

(b) Je-li pokrytí $(B(x, \lambda))_{x \in X}$ metrického prostoru X zjemněním pokrytí σ, pak λ je Lebesgueovo číslo pokrytí σ.

Řešení. (a) Předpokládejme, že otevřené pokrytí σ metrického prostoru X má Lebesgueovo číslo λ. Pak ke každé množině $B(x, \lambda/2)$ existuje $U \in \sigma$ tak, že $B(x, \lambda/2) \subset U$, neboť $\delta(B(x, \lambda/2))_{x \in X}$ je zjemněním pokrytí σ.

(b) Předpokládejme, že otevřené pokrytí $(B(x, \lambda))_{x \in X}$ topologického prostoru X je zjemnění pokrytí σ. Buď $A \subset X$ množina taková, že $\delta(A) < \lambda$, $x \in A$ libovolný bod. Zřejmě $A \subset B(x, \lambda)$. Existuje $U \in \sigma$ tak, že $B(x, \lambda) \subset U$, t.j. také $A \subset U$. Pokrytí σ má tedy Lebesgueovo číslo λ.

28. (a) Dokažte *L*ebesgueovu větu o pokrytí kompaktního metrického prostoru: Ke každému otevřenému pokrytí σ kompaktního metrického prostoru existuje Lebesgueovo číslo pokrytí σ.

(b) Dokažte, že každý kompaktní topologický prostor prvního typu spočetnosti je sekvenčně kompaktní. Zobecněte Lebesgueovu větu (a) na případ sekvenčně kompaktních metrických prostorů.

Řešení. (a) Buď X kompaktní metrický prostor, σ jeho otevřené pokrytí. Ke každému $x \in X$ zvolme $\varepsilon_x > 0$ takové, že otevřená koule $B(x, 2\varepsilon_x)$ leží v některé z množin pokrytí σ. Uvažujme otevřené pokrytí $(B(x, \varepsilon_x))_{x \in X}$ topologického prostoru X. X je kompaktní, existuje tedy konečná množina $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset X$ taková, že

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon_{x_i}).$$

Položme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \dots, \varepsilon_{x_k}\}$ a uvažujme systém množin $\beta = (B(x, \varepsilon))_{x \in X}$. β je otevřené pokrytí X. Dále ke každému bodu $x \in X$ existuje otevřená koule $B(x_i, \varepsilon_{x_i})$ tak, že $x \in B(x_i, \varepsilon_{x_i})$, a tedy pro otevřenou kouli $B(x, \varepsilon)$ platí $B(x, \varepsilon) \subset B(x_i, 2\varepsilon_{x_i})$. To ovšem znamená, že existuje $U \in \sigma$ tak, že $B(x, \varepsilon) \subset U$. Systém β je tedy zjemnění pokrytí σ. Podle cv. 27 (b) má pokrytí σ Lebesgueovo číslo ε, což bylo třeba dokázat.

(b) Kompaktní topologický prostor prvního typu spočetnosti je sekvenčně kompaktní podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty (cv. 19). Ukážeme, že každé otevřené pokrytí sekvenčně kompaktního prostoru má Lebesgueovo číslo.

Předpokládejme, že otevřené pokrytí σ sekvenčně kompaktního metrického prostoru nemá Lebesgueovo číslo. Neexistuje tedy číslo $\lambda > 0$ takové, že každá množina $A \subset X$, pro kterou $\delta(A) < \lambda$, leží v některé z množin pokrytí σ. To ovšem znamená, že pro přirozené číslo $n \in \mathbf{N}$ lze nalézt množinu B_n takovou, že $\delta(B_n) < 1/n$, a přitom B_n neleží v žádné z množin pokrytí σ. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ zvolme bod $x_n \in B_n$ a uvažujme posloupnost $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Ukážeme, že tato posloupnost nemá žádnou konvergentní podposloupnost. Nechť (x_{n_i}) je podposloupnost, konvergující k nějakému bodu $x \in X$. Pak existuje $U \in \sigma$ tak, že $x \in U$, a protože množina U je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $B(x, \varepsilon) \subset U$. Bod x je limitou posloupnosti (x_{n_i}), lze tedy vybrat $k \in \mathbf{N}$ tak, aby platilo $d(x, x_{n_k}) < \varepsilon/2$ a zároveň $1/n_k < \varepsilon/2$. Ovšem $x_{n_k} \in B_{n_k}$ a zároveň $x_{n_k} \in B(x, \varepsilon/2)$, proto $B_{n_k} \subset B(x, \varepsilon)$. Odtud vyplývá, že $B_{n_k} \subset U$, což je spor s konstrukcí množiny B_{n_k}. Nalezli jsme tedy posloupnost (x_i), která nemá žádnou konvergentní podposloupnost; proto X není sekvenčně kompaktní prostor. Tím je důkaz ukončen.

29. Buď X metrický prostor. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:
(1) X je kompaktní.
(2) Každá nekonečná množina v X má hromadný bod.
(3) Každá posloupnost v X má hromadný bod.
(4) Každá posloupnost v X má konvergentní podposloupnost.

Ř e š e n í . 1. Nechť X je kompaktní topologický prostor. Ukážeme, že každá nekonečná množina v X má hromadný bod (dokážeme tedy, že implikace (1) $\Rightarrow$ (2) platí dokonce i pro nemetrizovatelné topologické prostory).

Buď $A \subset X$ množina, která nemá žádný hromadný bod, t.j. $\operatorname{ac} A = \emptyset$. Pak $\operatorname{ac} A \subset A$ a podle cv. 19 kap. 1 je množina A uzavřená. Podle Věty 4. odst. 7.1 str. 197 je A kompaktní. Buď $x \in A$ libovolný bod. Protože $x \notin \operatorname{ac} A$, existuje okolí U_x bodu x takové, že $U_x \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. Systém množin $(U_x)_{x \in X}$ je pokrytí A a z kompaktnosti A vyplývá, že má konečné podpokrytí, řekněme $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}\}$. Každá z množin U_{x_i} však obsahuje jediný bod množiny A, a to bod x_i. Je tedy $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. t.j. množina A je konečná. Tím je dokázáno, že z podmínky (1) vyplývá podmínka (2).

2. Ukážeme, že pro libovolný Hausdorffův prostor z podmínky (2) vyplývá podmínka (3).

Buď X Hausdorffův prostor v němž každá nekonečná množina má hromadný bod. Buď (x_i) libovolná posloupnost v X. Uvažujme množinu $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Je-li A konečná, pak existuje bod $x \in A$ takový, že $x = x_i$ pro všechny indexy i až na konečně mnoho indexů. Každé okolí bodu x tedy obsahuje všechny body posloupnosti (x_i) až na konečně mnoho bodů. To ovšem znamená, že x je hromadným bodem posloupnosti (x_i). Je-li množina A nekonečná, pak má podle předpokladu hromadný bod. Ukážeme, že každý bod $x \in \operatorname{ac} A$ je hromadný bod posloupnosti (x_i). Buď U okolí bodu x. Topologický prostor X je podle předpokladu Hausdorffův, proto v U leží nekonečně mnoho bodů množiny A (cv. 20 kap. 1), tedy také nekonečně mnoho bodů posloupnosti (x_i). Odtud vyplývá, že x je hromadným bodem posloupnosti (x_i).

3. Ze cv. 10 kap. 4 vyplývá, že podmínka (4) je důsledkem podmínky (3).

4. Dokážeme, že z podmínky (4) vyplývá podmínka (1). Předpokládejme, že libovolná posloupnost v metrickém prostoru X má konvergentní podposloupnost.

Nejprve ukážeme, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ lze z pokrytí $(B(x,\varepsilon))_{x\in X}$ metrického prostoru X vybrat konečné podpokrytí $\{B(x_1,\varepsilon), B(x_2,\varepsilon), \dots, B(x_k,\varepsilon)\}$.

Předpokládejme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že X nelze pokrýt konečně mnoha otevřenými koulemi $B(x,\varepsilon)$. Zkonstruujeme posloupnost, která nemá konvergentní podposloupnost. Buď $x_1 \in X$ libovolný bod. Zřejmě $B(x_1,\varepsilon) \neq X$, a tedy existuje bod $x_2 \in X$, $x_2 \notin B(x_1,\varepsilon)$. Ovšem $B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon) \neq X$, a tedy existuje bod $x_3 \in X$, $x_3 \notin B(x_1,\varepsilon)$, $B(x_2,\varepsilon)$. Takto lze postupovat dále. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ lze nalézt bod $x_{n+1} \notin B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n,\varepsilon)$, neboť otevřené koule $B(x_i,\varepsilon)$ nepokrývají X. Přitom zřejmě $d(x_{n+1},x_i) \geq \varepsilon$ pro $1 \leq i \leq n$. Vzniká posloupnost $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$, která nemá žádnou konvergentní podposloupnost, což je spor s výchozím předpokladem.

Nyní ukážeme, že X je kompaktní. Buď σ libovolné otevřené pokrytí X. Protože X splňuje podmínku (4), existuje podle cv. 28 (b) Lebesgueovo číslo pokrytí σ. Zvolme $\varepsilon = \lambda/3$ a konečné pokrytí $\{B(x_1,\lambda/3), B(x_2,\lambda/3), \dots, B(x_n,\lambda/3)\}$ topologického prostoru X. Pro každé $i = 1,2,\dots,n$ platí $\delta(B(x_i,\lambda/3)) < 2\lambda/3 < \lambda$, a tedy existuje $U_i \in \sigma$ tak, že $B(x_i,\lambda/3) \subset U_i$. Systém množin $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ je hledané konečné podpokrytí σ.

Tím je důkaz ukončen.

Poznámka. Topologický prostor X splňující podmínku (2), se nazývá BW-kompaktní. Výše dokázané tvrzení znamená, že v metrickém prostoru pojmy "kompaktnost", "BW-kompaktnost", "spočetná kompaktnost" a "sekvenční kompaktnost" splývají.

30. Ukažte, že každé spojité zobrazení $f : X \to Y$ kompaktního metrického prostoru X do metrického prostoru Y je stejnoměrně spojité.

Ř e š e n í . Označme d_X (resp. d_Y) metriku na X (resp. Y). Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo, zvolme $\delta > 0$ tak, aby bylo Lebesgueovým číslem otevřeného pokrytí $(f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))_{y\in Y}$ metrického prostoru X (srov. cv. 28 (a)). Pro libovolné body x_1, $x_2 \in X$ takové, že $d_X(x_1,x_2) < \delta$, tedy existuje $y \in Y$ tak, že x_1, $x_2 \in f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))$, t.j. $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Zobrazení f je tedy stejnoměrně spojité.

31. Metrický prostor je kompaktní tehdy a jen tehdy, když je úplný a totálně ohraničený. Dokažte.

Ř e š e n í . Kompaktní topologický prostor je úplný a totálně ohraničený podle př. (3) (a), (b) odst. 7.8 str. 211.

Mějme úplný, totálně ohraničený topologický prostor X. Pro každé $i \in \mathbf{N}$ uvažujme v X $(1/2i)$-síť $\{x_1^i, x_2^i, \dots, x_{k(i)}^i\}$. Pro $j = 1,2,\dots,k(i)$ položme $B_j^i = B(x_j^i, 1/2i)$. Zřejmě

$$X = \bigcup_{j=1}^{k(i)} B_j^i$$

a $\delta(B_j^i) < 1/i$. Buď $A \subset X$ libovolná nekonečná množina. Ukážeme, že A má hromadný bod, t.j. ac $A \neq \emptyset$. Množina A je nekonečná a množiny B_j^1 pokrývají X, existuje tedy $n \leq k(1)$ tak, že množina $A_1 = A \cap B_n^1$ je nekonečná. Pro množinu A_1 tak platí $A \supset A_1$, $\delta(A_1) \leq 1$. Analogicky získáme množinu $A_2 = A_1 \cap B_m^2$ pro jisté m; rovněž A_2 je nekonečná a platí $A \supset A_1 \supset A_2$, $\delta(A_2) \leq 1/2$. Indukcí lze takto definovat posloupnost $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ nekonečných množin A_i takových, že $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots, \delta(A_i) \leq 1/i$ pro každé $i \in \mathbf{N}$. Posloupnost $(\operatorname{cl} A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ zřejmě vyhovuje předpokladům Cantorovy věty (cv. 25 kap. 5) a z úplnosti X vyplývá, že

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{cl} A_n \neq \emptyset.$$

Buď $x \in \bigcap \operatorname{cl} A_n$ libovolný bod. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $x \in \operatorname{cl} A_n$ a tedy každé okolí bodu x má neprázdný průnik s A_n. Buď V libovolné okolí x. Pak pro jisté $i \in \mathbf{N}$ platí $B(x, 1/i) \subset V$. Dále rovněž $B(x, 1/3i)$ je okolí bodu x, proto $B(x, 1/3i) \cap A_{3i} = B(x, 1/3i) \cap A \cap B_n^{3i} \neq \emptyset$, t.j. také $B(x, 1/3i) \cap B(x_n^{3i}, 1/6i) \neq \emptyset$. Pro každý bod $y \in B(x_n^{3i}, 1/6i)$ tak dostáváme $d(x, y) \leq d(x, x_n^{3i}) + d(x_n^{3i}, y) \leq d(x, z) + d(z, x_n^{3i}) + d(x_n^{3i}, y)$, kde $z \in B(x, 1/3i) \cap B(x_n^{3i}, 1/6i)$, t.j. $d(x, y) < (1/3i) + (1/6i) + (1/6i) < 1/i$. Odtud vyplývá, že $B(x_n^{3i}, 1/6i) \subset B(x, 1/i) \subset V$, a tedy $A \cap V \supset A \cap B_n^{3i} = A_{3i}$. Množina $A \cap V$ je tak zřejmě nekonečná. Dokázali jsme tedy, že v libovolném okolí bodu x leží nekonečně mnoho bodů množiny A; x je tedy hromadným bodem A. Podle cv. 29 je metrický prostor X kompaktní.

32. Dokažte, že zúplnění X' metrického prostoru X je kompaktní tehdy a jen tehdy, když X je totálně ohraničený.

Ř e š e n í . Předpokládejme, že metrický prostor X' je kompaktní. Pak podle cv. 31 je X' totálně ohraničený. Ukážeme, že každý podprostor totálně ohraničeného prostoru je totálně ohraničený; tím bude ukázáno, že X je totálně ohraničený.

Buď Y totálně ohraničený metrický prostor, d jeho metrika, $A \subset Y$ podprostor. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ zvolme $(\varepsilon/2)$-síť $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ v Y. Nech+t $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_p}\}$ je množina všech bodů z B, jejichž vzdálenost od A je menší než $\varepsilon/2$, a nechť $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ jsou libovolné body z A, pro něž $d(x'_j, x_{n_j}) < \varepsilon/2$. Ukážeme, že $B' = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_p\}$ je ε-síť v A. Buď $x \in A$ libovolný bod. Existuje $i \leq k$ tak, že $d(x, x_i) < \varepsilon/2$. Tedy $x_i = x_{n_j}$ pro nějaké $j \leq p$. Dostáváme tak $d(x, x'_j) \leq d(x, x_{n_j}) + d(x, x_{n_j}) < \varepsilon$.

Obráceně předpokládejme, že metrický prostor X je totálně ohraničený a uvažujme jeho zúplnění X'. Stačí ukázat, že X' je totálně ohraničený; pak totiž X' je kompaktní podle cv. 31. Buď $\varepsilon > 0$, A libovlná $(\varepsilon/2)$-síť v X. Nechť $z \in X' = \operatorname{cl} X$ je libovolný bod. Každé okolí $B(z, \varepsilon/2)$ bodu z má neprázdný průnik s množinou X; buď x bod tohoto průniku. Existuje $x_k \in A$ tak, že $d(x, x_k) < \varepsilon/2$. Pak ovšem $d(z, x_k) \leq d(x, z) + d(x, x_k) < \varepsilon$. Odtud vyplývá, že A je ε-síť v X' a X' je totálně ohraničený.

33. Rozhodněte, zda je pravdivé toto tvrzení: Kompaktní topologický prostor je metrizovatelný právě tehdy, když je Hausdorffův a druhého typu spočetnosti.

Ř e š e n í . Ukážeme, že uvedené tvrzení platí. Je-li X kompaktní metrizovatelný prostor, pak je zřejmě Hausdorffův (Věta 5 odst. 5.2) 5. odst. 5.2 str. 113) a druhého typu spočetnosti (př. (3) odst. 7.8 str. 211). Obráceně nechť X je kompaktní Hausdorffův prostor druhého typu spočetnosti. Pak podle Důsledku Věty 9. odst. 7.4 str. 199 je X normální prostor druhého typu spočetnosti; je tedy metrizovatelný podle Urysohnovy–Tichonovovy věty (Věta 11. odst. 6.5 str. 155).

Lokálně kompaktní topologické prostory

34. Zjistěte, zda následující topologické prostory jsou lokálně kompaktní:
(a) Neprázdná množina X s topologií konečných doplňků.
(b) Množina racionálních čísel $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ s přirozenou topologií.
(c) Součin $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Ř e š e n í . (a) X je kompaktní a tedy také lokálně kompaktní.
(b) $\mathbf{Q}$ není lokálně kompaktní. Ukážeme to.

Buď $x \in \mathbf{Q}$ libovolný bod a předpokládejme, že existuje okolí V bodu x v $\mathbf{Q}$ takové, že $\operatorname{cl}_{\mathbf{Q}} V$ je kompaktní v $\mathbf{Q}$. Pak ovšem $\operatorname{cl}_{\mathbf{Q}} V$ je kompaktní i v $\mathbf{R}$, je to tedy uzavřená a ohraničená množina v $\mathbf{R}$. Existuje množina $U \subset \mathbf{R}$ taková, že $\operatorname{cl}_{\mathbf{Q}} V = \operatorname{cl} U$. To je ovšem spor, neboť $\operatorname{cl}_{\mathbf{Q}} V \subset \mathbf{Q}$, ale v uzávěru libovolné podmnožiny $\mathbf{R}$ leží i iracionální čísla.

Jiné řešení: Množina $\mathbf{Q}$ není lokálně kompaktní, neboť ji nelze vyjádřit jako průnik otevřené a uzavřené množiny v $\mathbf{R}$; platí totiž $\operatorname{cl} \mathbf{Q} = \mathbf{R}$, takže každá uzavřená množina, obsahující $\mathbf{Q}$ obsahuje zároveň $\mathbf{R}$ a je tedy totožná s $\mathbf{R}$ (Věta 15. odst. 7.4 str. 201).

(c) Tvrzení neplatí (Věta 17. odst. 7.4 str. 202). Tvrzení dokážeme také přímo. Buď $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ libovolný bod. Nechť existuje okolí U bodu x takové, že $\operatorname{cl} U$ je kompaktní. Pak existuje prvek báze topologie V obsahující x takový, že $V \subset U$. To ovšem znamená, že $\operatorname{cl} V \subset \operatorname{cl} U$. Podle Věty 3. (c) odst. 7.1 str. 196 je množina $\operatorname{cl} V$ kompaktní v $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Ovšem V obsahuje nekonečně mnoho součinitelů rovných $\mathbf{R}$, a tedy jeho uzávěr nemůže být kompaktní podle Tichonovovy věty (Věta 6. odst. 7.2 str. 197). Součin přirozených topologií na $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ tedy není lokálně kompaktní.

35. Dokažte *R*ieszovu větu: Reálný (ev. komplexní) topologický vektorový prostor je lokálně kompaktní právě tehdy, když má konečnou dimenzi.

Řešení. Nechť E je lokálně kompaktní topologický vektorový prostor, U okolí nuly takové, že $\operatorname{cl} U$ je kompaktní. Pak množina $2U$ je rovněž okolí nuly a množina $2 \operatorname{cl} U$ je kompaktní, neboť zobrazení $E \ni \xi \to 2\xi \in E$ je homeomorfismus (srov. př. (8) odst. 6.10 str. 166). Pro každé $\xi \in 2 \cdot \operatorname{cl} U$ je $\xi + U$ okolí bodu ξ a systém množin $\xi + U$, kde ξ probíhá $2 \cdot \operatorname{cl} U$, je otevřené pokrytí množiny $2 \cdot \operatorname{cl} U$. Označme $\{\xi_1 + U, \xi_2 + U, \ldots, \xi_k + U\}$ konečné podpokrytí tohoto pokrytí a F lineární obal množiny vektorů $\{xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$. F je k-rozměrný vektorový prostor a $F + U = \{\xi + \eta \mid \xi \in F, \eta \in U\}$ pokrývá množinu $2 \cdot \operatorname{cl} U$. Platí tedy $F + \operatorname{cl} U \supset 2 \cdot \operatorname{cl} U$. S využitím vztahu $F + F = F$ odtud dostaneme $F + \operatorname{cl} U \supset F + 2 \cdot \operatorname{cl} U$, $F + 2 \cdot \operatorname{cl} U = F + F + 2 \cdot \operatorname{cl} U = 2(F + \operatorname{cl} U) \supset 2(F + 2 \cdot \operatorname{cl} U) \supset F + 4 \cdot \operatorname{cl} U$, a dále indukcí $F + \operatorname{cl} U \supset F + 2^n \cdot \operatorname{cl} U$ pro každé $n \in \mathbf{N}$. Zřejmě $2^{n-1} \cdot \operatorname{cl} U \subset 2^n \cdot \operatorname{cl} U \subset E$ pro každé $n \in \mathbf{N}$. Ukážeme, že $\bigcup 2^n \cdot \operatorname{cl} U = E$. Buď $\xi \in E$ libovolný vektor. Množina $a \cdot U$, kde $a \neq 0$, tvoří lokální bázi topologie v bodě 0, proto existuje $b \in \mathbf{R}$ (resp. $b \in \mathbf{C}$) a $\eta \in U$ takové, že $\xi = b\eta$. Zvolme n tak, aby platilo $b < 2^n$. Pak $\xi \in 2^n \cdot U$. Odsud vyplývá, že $F + \operatorname{cl} U \supset F + E$, t.j. $F + \operatorname{cl} U = E$. Ukážeme, že $F = E$. Buď $\xi \in E$ libovolný vektor nepatřící podprostoru F. F má konečnou dimenzi, a tedy indukovaná topologie na F splývá s přirozenou topologií (cv. 35 kap. 6). To znamená, že F je úplný, a tedy uzavřený v E (cv. 32 (b) kap. 6). Označme W_ξ okolí bodu ξ takové, že $W_\xi \subset E \setminus F$. Existuje vyvážené okolí W nulového vektoru takové, že $\xi + W \subset W_\xi$. Kdyby nyní platilo $\xi \in F + W$, muselo by platit $\xi = \eta + \xi_0$, kde $\xi \in F$ a $\xi_0 \in W$, t.j. $\xi = \xi_0 = \eta \in F$. Ovšem $\xi - \xi_0 \in \xi + W$, t.j. platilo by $(\xi + W) \cap F \neq \emptyset$, což je spor. Tedy $\xi \notin F + W$ a dále pro každé $a \neq 0 a \cdot F + a \cdot W = F + a \cdot W \not\ni a \cdot \xi$. Množina $\operatorname{cl} U$ je kompaktní a systém množin $a \cdot W$, kde a probíhá kladná čísla, pokrývá množinu $\operatorname{cl} U$. Označme $\{a_1 \cdot W, a_2 \cdot W, \ldots, a_m \cdot W\}$, kde $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m$, jeho konečné podpokrytí. Zřejmě $\operatorname{cl} U \subset a_m \cdot W$, t.j. $F + \operatorname{cl} U \not\ni a_m \cdot \xi$, a dostáváme spor s předpokladem, že $F + \operatorname{cl} U = E$. Dokázali jsme tedy, že $E = F$, t.j. že E má konečnou dimenzi.

Obráceně, je-li E n-rozměrný reálný (resp. komplexní) topologický vektorový prostor, je zřejmě lokálně kompaktní, neboť topologie na E je vzorem lokálně kompaktní přirozené topologie na $\mathbf{R}^n$ (cv. 35 kap. 3).

36. Dokažte, že lokálně kompaktní Hausdorffův prostor je regulární (bez využití Důsledku 2. Věty 25. odst. 7.7 str. 208 nebo Věty 13. odst. 7.4 str. 201).

Řešení. Buď X lokálně kompaktní Hausdorffův prostor. Je-li X kompaktní, pak je normální (Důsledek Věty 9. odst. 7.3 str. 199) a tedy regulární. Není-li X kompaktní, je podprostorem kompaktního Hausdorffova prostoru X^* (Věta 23. odst. 7.7 str. 207) a je tedy regulární jako podprostor regulárního topologického prostoru (Věta 2. (a) odst. 6.1 str. 142).

Uvedeme další důkaz, založený na Větě 1. odst. 6.1 str. 142. Buď X lokálně kompaktní Hausdorffův prostor, $x \in X$ bod. Existuje okolí U bodu x takové, že $\operatorname{cl} U$ je kompaktní; z oddělitelnosti X vyplývá, že $\operatorname{cl} U$ je regulární (Důsledek Věty 9. odst. 7.3 str. 199). Buď V libovolné okolí bodu x v X. Ukážeme, že existuje okolí W bodu x tak, že $\operatorname{cl} W \subset V$. $V \cap U$ je okolí bodu x v regulárním topologickém prostoru $\operatorname{cl} U$ (Věta 4. (b) odst. 3.1 str. 32). Existuje tedy okolí $\bar{W}$ bodu x v $\operatorname{cl} U$ takové, že $\operatorname{cl}_{\operatorname{cl} U} \bar{W} \subset V \cap U$ (Věta 1. odst. 6.1 str. 142). Existuje okolí W bodu x v X takové, že $\bar{W} = W \cap \operatorname{cl} U$. Uvažujme množinu $W \cap U$. Tato množina je zřejmě okolí bodu x v X a platí $W \cap U \subset \bar{W}$. Pak ovšem $\operatorname{cl}(W \cap U) = \operatorname{cl}((W \cap U) \cap \operatorname{cl} U) = \operatorname{cl}((W \cap \operatorname{cl} U) \cap U) = \operatorname{cl}(\bar{W} \cap U) =$

$\mathrm{cl}\,\bar{W} \cap \mathrm{cl}\,U = \mathrm{cl}_{\mathrm{cl}\,U}\,\bar{W} \subset V \cap U \subset V$ (využili jsme Větu 4. (a) odst. 3.1 str. 32). Množina $W \cap U$ je tedy hledané okolí bodu x. Podle Věty 1. odst. 6.1 str. 142 je topologický prostor X regulární.

37. Buď X lokálně kompaktní Hausdorffův prostor, $U \subset X$ otevřená množina. Dokažte, že pro libovolnou kompaktní množinu $A \subset U$ existuje kompaktní množina $B \subset X$ tak, že $A \subset \mathrm{int}\,B \subset U$.

Řešení. Buď $x \in A$ libovolný bod. U je okolí bodu x, a tedy podle Věty 13. odst. 7.4 str. 201 existuje okolí V_x bodu x takové, že $\mathrm{cl}\,V_x$ je kompaktní množina a $\mathrm{cl}\,V_x \subset U$. Systém množin $(V_x)_{x \in A}$ je otevřené pokrytí množiny A a z kompaktnosti A vyplývá, že existuje jeho konečné podpokrytí $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_k}\}$. Klademe

$$V = \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i}, \qquad B = \mathrm{cl}\,V.$$

Množina B je sjednocením konečného počtu kompaktních množin $\mathrm{cl}\,V_{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, a tedy kompaktní (Věta 3. (a) odst. 7.1 str. 196). Dále zřejmě $A \subset V$, a tedy také $A \subset B$. Jelikož $\mathrm{cl}\,V_{x_i} \subset U$, dostáváme $B \subset U$. Množina B má všechny požadované vlastnosti.

38. (a) Je obraz $f(X)$ lokálně kompaktního topologického prostoru při spojitém zobrazení $f : X \to Y$ lokálně kompaktní topologický prostor?

(b) Nechť $f : X \to Y$ je spojité otevřené zobrazení lokálně kompaktního prostoru X do Hausdorffova prostoru Y. Pak $f(X)$ je lokálně kompaktní podprostor Y. Dokažte.

Řešení. (a) $f(X)$ nemusí být lokálně kompaktní. Uvedeme příklad. Nechť $\mathbf{Q}_1$ (resp. $\mathbf{Q}_2$) je množina racionálních čísel s diskrétní (resp. přirozenou) topologií. Pak zobrazení $\mathrm{id} : \mathbf{Q}_1 \to \mathbf{Q}_2$ je spojité, $\mathbf{Q}_1$ je lokálně kompaktní (př. (1) odst. 7.8 str. 210) a $\mathbf{Q}_2$ není lokálně kompaktní (cv. 34 (b) kap. 7).

(b) Buď $y \in f(X)$ libovolný bod. Uvažujme bod $x \in X$, pro který $y = f(x)$. X je lokálně kompaktní, proto existuje okolí U bodu x takové, že $\mathrm{cl}\,U$ je kompaktní. Ze spojitosti f vyplývá, že množina $f(\mathrm{cl}\,U)$ obsahující y, je kompaktní (Věta 5. odst. 7.1 str. 197), a že platí $f(\mathrm{cl}\,U) \subset \mathrm{cl}\,f(U)$ (Věta 2. odst. 2.1 str. 18). Jelikož topologický prostor $f(X)$ je Hausdorffův, množina $f(\mathrm{cl}\,U)$ je uzavřená (Věta 7. odst. 7.3 str. 198). Ovšem $U \subset \mathrm{cl}\,U$, t.j. $f(U) \subset f(\mathrm{cl}\,U)$ a tedy $\mathrm{cl}\,f(U) \subset f(\mathrm{cl}\,U)$. Dostáváme tak, že $f(\mathrm{cl}\,U) = \mathrm{cl}\,f(U)$. Podle předpokladu je ovšem zobrazení f otevřené, $f(U)$ je tedy okolí bodu y v $f(X)$, pro které $\mathrm{cl}\,f(U)$ je kompaktní.

39. Ukažte, že v lokálně kompaktním topologickém prostoru druhého typu spočetnosti existuje spočetná báze topologie tvořená množinami, jejichž uzávěry jsou kompaktní.

Řešení. Buď $(W_i)_{i \in \mathbf{N}}$ spočetná báze topologie lokálně kompaktního prostoru druhého typu spočetnosti X. Buď $x \in X$ libovolný bod. x má okolí U takové, že množina $\mathrm{cl}\,U$ je kompaktní. Zároveň existuje index $k \in \mathbf{N}$ tak, že $x \in W_k \subset U$. Odtud $\mathrm{cl}\,W_k \subset \mathrm{cl}\,U$, a tedy množina $\mathrm{cl}\,W_k$ je kompaktní podle Věty 3. (c) odst. 7.1 str. 196. Označme i_j j-tý z indexů i, pro které jsou množiny $\mathrm{cl}\,W_i$ kompaktní, a položme $V_j = W_{i_j}$. Ukážeme, že systém $(V_j)_{j \in \mathbf{N}}$ je báze topologie topologického prostoru X. Protože každá z množin V_j je otevřená, stačí ukázat, že k libovolnému bodu $x \in X$ a libovolnému jeho okolí U existuje prvek V_k systému $(V_j)_{j \in \mathbf{N}}$ obsahující x a ležící v U (Věta 9. odst. 1.4 str. 7). Nechť $x \in X$ je libovolný bod, U jeho okolí. Existuje okolí V bodu x takové, že $\mathrm{cl}\,V$ je kompaktní. Množina $U \cap V$ je okolí x, existuje tedy $I \in I$ tak, že $W_i \subset U \cap V$. Odtud dostáváme, že $\mathrm{cl}\,W_i \subset \mathrm{cl}(U \cap V) \subset (\mathrm{cl}\,U) \cap (\mathrm{cl}\,V)$, t.j. $\mathrm{cl}\,W_i \subset \mathrm{cl}\,V$, a z Věty 3. (e) odst. 7.1 str. 196 vyplývá, že $\mathrm{cl}\,W_i$ je kompaktní. Musí tedy platit $W_i = V_k$ pro jisté $k \in \mathbf{N}$. Systém množin $(V_j)_{j \in \mathbf{N}}$ je tedy spočetná báze topologie taková, že $\mathrm{cl}\,V_j$ je kompaktní množina pro každé j.

40. Uvažujme topologický prostor Y^X zobrazení množiny X do topologického prostoru Y s topologií bodové konvergence.

(a) Nalezněte nutné a postačující podmínky kompaktnosti Y^X.

(b) Nalezněte nutné a postačující podmínky lokální kompaktnosti Y^X.

Ř e š e n í . (a) Y^X s topologií bodové konvergence je kompaktní tehdy a jen tehdy, když Y je kompaktní (Věta 6. odst. 7.2 str. 197).

(b) Y^X s topologií bodové konvergence je lokálně kompaktní tehdy a jen tehdy, když je splněna jedna z následujících podmínek: (1) Y je kompaktní; (2) Y je lokálně kompaktní a množina X je konečná. Tvrzení ihned vyplývá z Věty 17. odst. 7.4 str. 202.

41. Buď X lokálně kompaktní Hausdorffův prostor, Y topologický prostor, $C(X,Y)$ množina spojitých zobrazení z X do Y s kompaktně-otevřenou topologií. Pro $(x,f) \in X \times C(X,Y)$ klademe $\mathrm{Ev}(x,f) = f(x)$. Je zobrazení $\mathrm{Ev} : X \times C(X,Y) \to Y$ spojité?

Ř e š e n í . Ukážeme, že Ev je spojité. Buď $(x,f) \in X \times C(X,Y)$ libovolný bod, V okolí bodu $f(x)$. Ze spojitosti f vyplývá, že existuje okolí U bodu x tak, že $f(U) \subset V$. Množinu U lze přitom vybrat tak, že $\mathrm{cl}\, U$ je kompaktní a $f(\mathrm{cl}\, U) \subset V$ (Důsledek 1. Věty 13. odst. 7.4 str. 201). Nechť $W(\mathrm{cl}\, U, V) = \{g \in C(X,Y) \mid g(\mathrm{cl}\, U) \subset V\}$; množina $W(\mathrm{cl}\, U, V)$ je otevřená v $C(X,Y)$. Pro libovolný bod $(x',f') \in U \times W(\mathrm{cl}\, U, V)$ platí $\mathrm{Ev}(x',f') = f'(x') \in V$, a tedy $\mathrm{Ev}(U \times W(\mathrm{cl}\, U, V)) \subset V$.

42. Buď X lokálně kompaktní Hausdorffův prostor, Y topologický prostor, $C(X,Y)$ množina spojitých zobrazení z X do Y s kompaktně-otevřenou topologií. Buď Z topologický prostor, $F : X \times Z \to Y$ zobrazení. Definujeme zobrazení $\varphi : Z \to C(X,Y)$ vztahem $\varphi(z) = F_z$, kde $F_z(x) = F(x,z)$ pro každé $x \in X$. Dokažte, že zobrazení F je spojité tehdy a jen tehdy, když je zobrazení φ spojité.

Ř e š e n í . Nechť F je spojité. Buď $z_0 \in Z$ bod, $W(K,U) \subset C(X,Y)$ prvek systému generátorů kompaktně-otevřené topologie, obsahující bod $\varphi(z_0)$. Ukážeme, že existuje okolí V bodu z_0 v Z takové, že $\varphi(V) \subset W(K,U)$. Podle Věty 5. odst. 2.2 str. 19 odtud již vyplyne spojitost zobrazení φ.

Podle předpokladu $F_{z_0}(x) = F(x,z_0) \in U$ pro každé $x \in K$, t.j. $F(K \times \{z_0\}) \subset U$. Ze spojitosti F vyplývá, že $F^{-1}(U)$ je otevřená množina, obsahující množinu $K \times \{z_0\}$. Zřejmě množina $F^{-1}(U) \subset K \times Z$ je otevřená v $K \times Z$ a obsahuje $K \times \{z_0\}$. Podle cv. 21 existuje otevřená množina $V \subset Z$ obsahující bod z_0 taková, že $K \times V \subset (F^{-1}(U) \cap K \times Z)$, a tedy $K \times V \subset F^{-1}(U)$. Pak pro každé $x \in K$ a $z \in V$ platí $F(x,z) \in U$. Tedy $F_z \in W(K,U)$ pro všechna $z \in V$, t.j. $\varphi(V) \subset W(K,U)$.

Poznamenáváme, že k důkazu spojitosti φ jsme nepoužili topologie topologického prostoru X.

Obráceně předpokládejme, že zobrazení φ je spojité. Dostáváme komutativní diagram

$$\begin{tikzcd}
X \times Z \arrow[rr, "\mathrm{id}_X \times \varphi"] \arrow[dr, "F"'] & & X \times C(X,Y) \arrow[dl, "Ev"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Zobrazení Ev je spojité podle cv. 41 a $\mathrm{id}_X \times \varphi$ je spojité podle Věty 10. (b) odst. 3.3 str. 36. Je tedy F spojité (Věta 1. (b) odst. 2.1 str. 17).

Parakompaktní topologické prostory

43. Lze v definici parakompaktního topologického prostoru nahradit požadavek existence lokálně konečného zjemnění požadavkem existence lokálně konečného podpokrytí?

Ř e š e n í . Nelze. Uvedeme příklad. Uvažujme množinu přirozených čísel $\mathbf{N}$ s diskrétní topologií. Vznikající topologický prostor je parakompaktní, neboť je metrizovatelný (př. (1) odst. 5.10 str.

125). Přitom např. pokrytí $(\{1, 2, \ldots, i\})_{i\in\mathbf{N}}$ neobsahuje žádné lokálně konečné podpokrytí, má však lokálně konečné zjemnění $(\{i\})_{i\in\mathbf{N}}$.

44. Dokažte tato tvrzení:
(a) Lindelöfův lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor je parakompaktní.
(b) Lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor druhého typu spočetnosti je parakompaktní.
(c) σ-kompaktní lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor je parakompaktní.

Řešení. (a) (M. Kovár) Buď X Lindelöfův lokálně kompaktní Hausdorffův prostor, σ jeho otevřené pokrytí. Podle Důsledku **??** Věty 13. odst. 7.4 str. **??** existuje zjemnění σ' pokrytí σ, tvořené otevřenými množinami, jejichž uzávěry jsou kompaktní. X je podle předpokladu Lindelöfův prostor, z pokrytí σ' lze tedy vybrat spočetné podpokrytí $(U_i)_{i\in\mathbf{N}}$.

Položme $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Ke každému $n \in \mathbf{N}_0$ sestrojíme otevřené pokrytí $(V_i^n)_{i\in\mathbf{N}_0}$ takové, že $V_i^n \subset U_i$ a množina $\operatorname{cl} V_i^n$ je kompaktní. Klademe $k_0 = 1$ a dále $V_i^0 = U_i$ pro $i \in \mathbf{N}$. Pokrytí $(V_i^0)_{i\in\mathbf{N}}$ má požadované vlastnosti. Množina $\operatorname{cl} V_{k_0}$ je kompaktní, existuje tedy číslo $k_1 \in \mathbf{N}$, $k_1 > k_0$, tak, že

$$\operatorname{cl} V_{k_0}^0 \subset \bigcup_{j=1}^{k_1} V_j^0.$$

Dále budeme postupovat indukcí. Nechť je již definováno číslo $k_n \in \mathbf{N}$, $k_n > k_{n-1}$, a systém $(V_i^n)_{i\in\mathbf{N}}$ otevřených množin požadovaných vlastností. Množina $\operatorname{cl}(V_1^n \cup V_2^n \cup \cdots \cup V_{k_n}^n) = \operatorname{cl} V_1^n \cup \operatorname{cl} V_2^n \cup \cdots \cup \operatorname{cl} V_{k_n}^n$ je kompaktní, existuje tedy přirozené číslo $k_{n+1} > k_n$ takové, že

$$\operatorname{cl} \bigcup_{j=1}^{k_n} V_j^n \subset \bigcup_{j=1}^{k_{n+1}} V_j^n.$$

Klademe

$$V_j^{n+1} = \begin{cases} V_j^n, & j \le k_{n+1}, \\ U_j \setminus \operatorname{cl}(V_1^n \cup V_2^n \cup \cdots \cup V_{k_n}^n), & J > k_{n+1}. \end{cases}$$

Každá z množin V_j^{n+1} je otevřená. Dále $V_j^{n+1} \subset U_j$ a jelikož $\operatorname{cl} V_j^{n+1}$ je uzavřená podmnožina kompaktního prostoru $\operatorname{cl} U_j$, je kompaktní v $\operatorname{cl} U_j$ a tedy i v X. Ukážeme, že systém $(V_j^{n+1})_{j\in\mathbf{N}}$ je pokrytí X. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\bigcup_{j\in\mathbf{N}} V_j^{n+1} &= \left(\bigcup_{j=1}^{k_{n+1}} V_j^{n+1}\right) \cup \left(\bigcup_{j=k_{n+1}+1}^{\infty} V_j^{n+1}\right) = \\
&= \left(\bigcup_{j=1}^{k_{n+1}} V_j^{n}\right) \cup \left(\bigcup_{j=k_{n+1}+1}^{\infty} \left(U_j \setminus \operatorname{cl}(V_1^n \cup V_2^n \cup \cdots \cup V_{k_n}^n)\right)\right) = \\
&= \left(\bigcup_{j=1}^{k_{n+1}} V_j^{n}\right) \cup \left(\left(\bigcup_{j=k_{n+1}+1}^{\infty} U_j\right) \setminus \operatorname{cl}(V_1^n \cup V_2^n \cup \cdots \cup V_{k_n}^n)\right) = \\
&= \left(\bigcup_{j=1}^{k_{n+1}} V_j^{n}\right) \cup \left(\bigcup_{j=k_{n+1}+1}^{\infty} U_j\right) = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} U_j = X,
\end{aligned}$$

neboť podle předpokladu

$$\operatorname{cl}(V_1^n \cup V_2^n \cup \cdots \cup V_{k_n}^n) \subset \bigcup_{j=1}^{k_{n+1}} V_j^n.$$

Systém množin $(V_j^{n+1})_{j\in\mathbf{N}}$ má tedy všechny požadované vlastnosti.

Pomocí systému množin $(V_i^n)_{i\in\mathbf{N}}$, kde $n \in \mathbf{N}_0$, nyní sestrojíme nové pokrytí topologického prostoru X. Položme $W_1 = V_1^0 = U_1$. Ke každému číslu $j \in \mathbf{N}$ zřejmě existuje $n \in \mathbf{N}_0$ tak, že $k_n < j \le k_{n+1}$. Klademe $W_j = V_j^n$. Dostáváme tak systém otevřených množin $(W_i)_{i\in\mathbf{N}}$ takový, že $W_i \subset U_i$ pro každé $i \in \mathbf{N}$. $(W_i)_{i\in\mathbf{N}}$ je zjemnění pokrytí σ, a tedy i σ. Ukážeme, že $(W_i)_{i\in\mathbf{N}}$ je pokrytí X. Evidentně

$$\bigcup_{i=1}^{k_0} W_i = \bigcup_{i=1}^{k_0} U_i,$$

neboť $k_0 = 1$ a $W_1 = U_1$. Předpokládejme, že pro jisté $n \in \mathbf{N}_0$ platí

$$\bigcup_{j=1}^{k_n} W_j = \bigcup_{j=1}^{k_n} U_j.$$

Pak

$$\begin{aligned}\bigcup_{j=1}^{k_{n+1}} W_j &= \left(\bigcup_{j=1}^{k_n} W_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} W_j\right) = \left(\bigcup_{j=1}^{k_n} U_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} V_j\right) = \\ &= \left(\bigcup_{j=1}^{k_n} U_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \left(U_j \setminus \mathrm{cl}(V_1^{n-1} \cup V_2^{n-1} \cup \cdots \cup V_{k_{n-1}}^{n-1})\right)\right) = \\ &= \left(\bigcup_{j=1}^{k_n} U_j\right) \cup \left(\left(\bigcup_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} U_j\right) \setminus \mathrm{cl}(V_1^{n-1} \cup V_2^{n-1} \cup \cdots \cup V_{k_{n-1}}^{n-1})\right) = \\ &= \bigcup_{j=1}^{k_{n+1}} U_j.\end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\bigcup_{j=1}^{k_n} W_j = \bigcup_{j=1}^{k_n} U_j,$$

systém množin $(W_j)_{j\in\mathbf{N}}$ je tedy pokrytí X. Nakonec ukážeme, že toto pokrytí je lokálně konečné. Zvolme $j \in \mathbf{N}$ libovolně. Existuje $n \in \mathbf{N}_0$ tak, že $j \le k_n$. Nechť $i > k_{n+1}$. Určíme $W_i \cap W_j$. Protože $i > k_{n+1}$, existuje $m \in \mathbf{N}$ tak, že $k_m < i \le k_{m+1}$. Posloupnost čísel k_0, k_1, k_2, … je rostoucí, platí tedy $k_{n+1} \le k_m$. Odtud vyplývá, že $j \le k_n \le k_{m-1}$. Dostáváme tak $W_i = V_i^m = U_i \setminus \mathrm{cl}\, V_1^{m-1} \cup V_2^{m-1} \cup \cdots \cup V_{k_{m-1}}^{m-1}) = U_i \setminus \mathrm{cl}(V_1^{m-2} \cup V_2^{m-2} \cup \cdots \cup V_{k_{m-1}}^{m-2})$; ovšem $k_{m-2} < j \le k_{m-1}$, t.j. $W_j = V_j^{m-2} \subset V_1^{m-2} \cup V_2^{m-2} \cup \cdots \cup V_{k_{m-1}}^{m-2}$. Odtud $W_i = U_i \setminus \mathrm{cl}(V_1^{m-2} \cup V_2^{m-2} \cup \cdots \cup V_{k_{m-1}}^{m-2}) \subset U_i \setminus W_j \subset X \setminus W_j$, takže $W_i \cap W_j = \emptyset$. Ukázali jsme tedy, že pro každé $j \le k_n$ je $W_i \cap W_j = \emptyset$ pro všechna $i > k_{n+1}$. Existuje však jen konečně mnoho čísel i takových, že $i \le k_{n+1}$, t.j. $W_i \cap W_j \ne \emptyset$ nejvýše pro konečný počet indexů $i \in \mathbf{N}$. $(W_i)_{i\in\mathbf{N}}$ je tedy lokálně konečný systém množin a důkaz parakompaktnosti topologického prostoru X je ukončen.

(b) Topologický prostor druhého typu spočetnosti je zřejmě Lindelöfův, takže tvrzení (b) vyplývá z (a).

Uvedeme jiný důkaz tvrzení (b) pomocí příme konstrukce lokálně konečného zjemnění otevřeného pokrytí lokálně kompaktního Hausdorffova prostoru druhého typu spočetnosti X; tato konstrukce je odlišná od konstrukce, uvedené v části (a) tohoto cvičení.

V X existuje báze topologie $(U_i)_{i\in\mathbf{N}}$ taková, že pro každé i je množina $\mathrm{cl}\, U_i$ kompaktní (cv. 39). Pomocí této báze sestrojíme posloupnost kompaktních množin $(K_i)_{i\in\mathbf{N}}$ takovou, že $K_i \subset \mathrm{int}\, K_{i+1}$

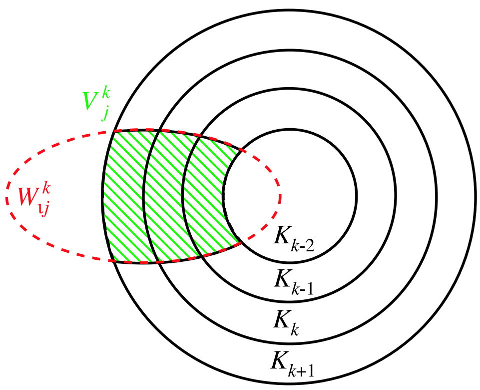
pro každé $i \in \mathbf{N}$ a $\bigcup K_i = X$. Klademe $K_1 = \operatorname{cl} U_1 \cdot K_1$ je kompaktní, existuje tedy konečný podsystém $\{U_i, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\}$ systém $(U_i)_{i\in\mathbf{N}}$ pokrývající K_1, t.j. $K_1 \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}$. Položme $K_2 = \operatorname{cl}(U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}) = \operatorname{cl} U_{i_1} \cup \operatorname{cl} U_{i_2} \cup \dots \cup \operatorname{cl} U_{i_k}$. K_2 je kompaktní množina a platí $K_1 \subset \operatorname{int} K_2$. Dále postupujeme analogicky. Dostaneme systém množin $(K_i)_{i\in\mathbf{N}}$, který má požadované vlastnosti.

Buď $(W_\iota)_{\iota\in I}$ otevřené pokrytí X. Ukážeme, že $(W_\iota)_{\iota\in I}$ má lokálně konečné otevřené zjemnění. Položme $A_1 = K_1$, $A_i = K_i \setminus \operatorname{int} K_{i-1}$ pro $i = 2, 3, \dots$. Systém množin $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ pokrývá X. Jelikož $\operatorname{int} K_{i-1} \subset K_i$, platí $A_i \subset K_i$ a z uzavřenosti množiny A_i v K_i vyplývá, že množina A_i je kompaktní (v K_i a tedy v X). Pro každé $i \in \mathbf{N}$ tedy existuje konečný podsystém $W^i_{\iota_1}, W^i_{\iota_2}, \dots, W^i_{\iota_{k(i)}}$ pokrývající množinu A_i. Klademe

$$V_j^k = \begin{cases} W^k_{\iota_j} \cap \operatorname{int} K_{k+1}, & k = 1, 2 \\ W^k_{\iota_j} \cap \operatorname{int}(K_{k+1} \setminus K_{k-2}), & k = 3, 4, \dots \end{cases}$$

Konstrukce množin V_j^k je znázorněna na obr. 6.

Obr. 6



Ukážeme, že systém množin (V_j^i), $i = 1, 2, 3, \dots$, $j = 1, 2, \dots, k(i)$, je lokálně konečné otevřené zjemnění pokrytí $(W_\iota)_{\iota\in I}$. Položme $K_{-1} = \emptyset$, $K_0 = \emptyset$; pak $V_j^i = W^i_{\iota\in j} \cap \operatorname{int}(K_{i+1} \setminus K_{i-2})$ pro každé $i = 1, 2, 3, \dots$. Každá z množin V_j^i je otevřená a tyto množiny pokrývají X. Dále $V_j^i \subset W^i_{\iota_j}$, takže systém (V_j^i) je zjemnění systému $(W_\iota)_{\iota\in I}$. Nakonec pro libovolné i, j, k, m platí $V_j^i \cap V_m^k \subset (K_{i+1} \setminus K_{i-2}) \cap (K_{k+1} \setminus K_{k-2})$. Zvolíme-li pevně indexy k, m, dostaneme pro každé $i \le k - 3$ a každé $i \ge k + 3 (K_{i+1} \setminus K_{i-2}) \cap (K_{k+1} \setminus K_{k-2}) = \emptyset$ jelikož pro $i \le k - 3$ platí $K_{i+1} \subset K_{k-2}$ a pro $i \ge k+3$ platí $K_{k+1} \subset K_{i-2}$. Průnik $V_j^i \cap V_m^k$ může tedy být různý od prázdné množiny jen pro $k - 2 < i < k + 3$. Je tedy zřejmé, že množina V_m^k má neprázdný průnik nejvýše s konečným počtem množin systému (V_j^i). Odsud již vyplývá, že systém množin (V_j^i) je lokálně konečný.

Nyní je již evidentní, že lokálně kompaktní Hausdorffův prostor druhého typu spočetnosti je parakompaktní.

(c) (M. Kovár) Uvedeme řešení odlišné od důkazu Věty 19. odst. 7.5 str. 203. Stačí ukázat, že každý σ-kompaktní topologický prostor X je Lindelöfův; tvrzení pak vyplyne z (a). Napišme $X = \bigcup X_i$ (sjednocení pro $i \in \mathbf{N}$), kde X_i je kompaktní množina v X. Buď σ otevřené pokrytí X. Ke každému $i \in \mathbf{N}$ existuje konečný podsystém σ_i systému σ, pokrývající X_i. Pak $\bigcup \sigma_i$ (sjednocení pro $i \in \mathbf{N}$) je spočetné podpokrytí σ.

45. Užitím definice dokažte následující tvrzení:

(a) Diskrétní topologický prostor je parakompaktní.

(b) Množina reálných čísel s přirozenou topologií je parakompaktní prostor.

Ř e š e n í . (a) Libovolné otevřené pokrytí diskrétního topologického prostoru X má zjemnění $(\{x\})_{x \in X}$; tento systém množin je lokálně konečné pokrytí X. Jelikož diskrétní topologie je Hausdorffova, X je parakompaktní.

(b) Buď $(U_\iota)_{\iota \in I}$ libovolné otevřené pokrytí množiny $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií. $\mathbf{R}$ lze vyjádřit jako sjednocení uzavřených intervalů $[n, n+1]$, kde n probíhá množinu celých čísel $\mathbf{Z}$. Pro každé $n \in \mathbf{Z}$ uvažujme otevřený interval $(n-1, n+2)$ a položme $W_{n,\iota} = (n-1, n+2) \cap U_\iota$. Zřejmě pro každé n pevné je systém množin $(W_{n,\iota})_{\iota \in I}$ pokrytím intervalu $[n, n+1]$ a $(W_{n,\iota})_{\iota \in I, n \in \mathbf{Z}}$ je zjemnění pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Interval $[n, n+1]$ je ovšem kompaktní, existuje tedy konečné podpokrytí $\{W_{n,\iota_1}, W_{n,\iota_2}, \ldots, W_{n,\iota_{m(n)}}\}$ pokrytí $(W_{n,\iota})_{\iota \in I}$. Klademe $\sigma = (W_{n,\iota_k})$, kde $n \in \mathbf{Z}$, $k = 1, 2, \ldots, m(n)$. σ je otevřené pokrytí $\mathbf{R}$ a je zároveň sjemněním pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Dále pro libovolný bod $x \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{Z}$ a interval $(n, n+1)$ obsahující x. Přitom $(n, n+1) \cap W_{p,\iota_k} \neq \emptyset$ pouze pro $p = n-1$, n , $n+1$. Pro každé p je ovšem systém množin (W_{p,ι_k}) konečný, odkud vyplývá, že pokrytí σ je lokálně konečné. Jelikož $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií je Hausdorffův prostor, $\mathbf{R}$ musí být parakompaktní.

46. Je množina racionálních čísel s přirozenou topologií parakompaktní topologický prostor?

Ř e š e n í . Množina racionálních čísel $\mathbf{Q}$ s přirozenou topologií je podprostor metrizovatelného prostoru a je tedy sama metrizovatelný topologický prostor. Parakompaktnost $\mathbf{Q}$ tedy vyplývá ze Stoneovy věty (Věta 15. odst. 6.6 str. 161).

47. Uvažujme interval $I = [0, 1]$ s přirozenou topologií τ. Označme I_0 množinu všech iracionálních čísel z I a τ_0 systém podmnožin množiny I, tvořený prázdnou množinou a množinami tvaru $U \cup A$, kde $U \in \tau$ a $A \subset I_0$. Ukažte, že τ_0 je topologie na I. Srovnejte topologie τ a τ_0. Je topologický prostor (I, τ_0) Hausdorffův? Je parakompaktní?

Ř e š e n í . Ukážeme, že τ_0 je topologie na I. Zřejmě $\emptyset \in \tau_0$ a $I \in \tau_0$. Nechť V_1, $V_2 \in \tau_0$ jsou libovolné množiny. Platí $V_1 = U_1 \cup A_1$, $V_2 = U_2 \cup A_2$, kde U_1, $U_2 \in \tau$ a A_1, $A_2 \subset I_0$. Pak $V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap U_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (U_1 \cap A_2) \cup (U_2 \cap A_1)$; ovšem $U_1 \cap U_2 \in \tau$, $A_1 \cap A_2$, $U_1 \cap A_2$, $U_2 \cap A_1 \subset I_0$, takže $V_1 \cap V_2 \in \tau_0$. Nechť $(V_\iota)_{\iota \in I}$ je systém množin patřících τ_0. Pak pro každé ι platí $V_\iota = U_\iota \cap A_\iota$, kde $U_\iota \in \tau$ a $A_\iota \subset I_0$. Odtud $\bigcup V_\iota = (\bigcup U_\iota) \cup (\bigcup A_\iota)$, což je zřejmě prvek systému τ_0.

Je zřejmé, že topologie τ_0 je silnější než τ a že tyto topologie nesplývají. Jelikož topologie τ je Hausdorffova, je také topologie τ_0 Hausdorffova.

Ukážeme, že topologický prostor (I, τ_0) je parakompaktní. Buď $(V_\iota)_{\iota \in I}$ otevřené pokrytí intervalu I v topologii τ_0. Pro každé $\iota \in I$ $V_\iota = U_\iota \cup A_\iota$, kde $U_\iota \in \tau$ a $A_\iota \subset I_0$. Množina $\bigcup U_\iota$ je otevřená v přirozené topologii, je tedy parakompaktní jako podprostor $\mathbf{R}$ (Věta 15. (b) odst. 7.4 str. 201). Systém $(U_\iota)_{\iota \in I}$ je otevřené pokrytí podprostoru $\bigcup U_\iota$; existuje tedy lokálně konečné otevřené zjemnění $(W_\lambda)_{\lambda \in L}$ pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Označme σ systém množin, tvořený množinami W_λ a množinami $\{x\}$, kde x probíhá $I \setminus \bigcup U_\iota$. Evidentně $I \setminus \bigcup U_\iota \subset I_0$. σ je zřejmě otevřené pokrytí intervalu I v topologii τ_0. Buď nyní $x \in I$ libovolný bod. Nepatří-li x I_0, existuje množina $W \subset \bigcup U_\iota$, otevřená v topologii τ a tedy také v τ_0, obsahující bod x, mající bod x, mající neprázdný průnik s nejvýše konečným počtem množin W_ι ze σ. Dále $W \cap \{x\} = \emptyset$ pro každé $x \in I \setminus \bigcup U_\iota$, a tedy W je okolí bodu x v topologii τ_0 na I, které má neprázdný průnik s nejvýše konečně mnoha prvky pokrytí σ. Nechť $x \in I_0$. Pak buď $x \in \bigcup U_\iota$, a tedy podobně jako v předchozím případě x má okolí, které protíná nejvýše konečný počet množin pokrytí σ, nebo $x \notin \bigcup U_\iota$, a pak $\{x\} = \emptyset \bigcup \{x\}$ je okolí bodu x, které protíná právě jeden prvek pokrytí σ, a to množinu $\{x\}$. Pokrytí σ je tedy lokálně konečné. Z jeho konstrukce vyplývá, že σ je zjemnění pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Tím je parakompaktnost topologického prostoru (I, τ_0) dokázána.

48. Dokažte, že regulární Lindelöfův topologický prostor je parakompaktní.

Ř e š e n í . Buď X regulární Lindelöfův topologický prostor, σ jeho otevřené pokrytí. Podle Věty 1. odst. 6.1 str. 142 ke každému bodu $x \in X$ existují množiny U_x, V_x takové, že $x \in U_x \subset \operatorname{cl} U_x \subset V_x$ a V_x leží v některé z množin pokrytí σ. Systém množin $(U_x)_{x \in X}$ je otevřené pokrytí X. Označme

$(U_{x_i})_{i\in\mathbf{N}}$ jeho spočetné podpokrytí a položme $W_i = V_{x_i}\backslash(\operatorname{cl} U_{x_1} \cup \operatorname{cl} U_{x_2} \cup \cdots \cup \operatorname{cl} U_{x_{i-1}}$ pro každé $i = 1, 2, 3, \ldots$. Systém množin $(W_i)_{i\in\mathbf{N}}$ je otevřené pokrytí topologického prostoru X: pro libovolný bod $x \in X$ uvažujme nejmenší z čísel i, pro které $x \in V_{x_i}$; pak $x \notin V_{x_j}$ pro žádné $j < i$, a tedy $x \in W_i$. Dále $(W_i)_{i\in\mathbf{N}}$ je evidentně lokálně konečné zjemnění pokrytí σ, neboť $U_{x_j} \cap W_i = emptyset$ pro všechna $i > j$. Prostor X je regulární, a tedy také Hausdorffův; z výše uvedeného již vyplývá, že ja parakompaktní.

49. Ukažte, že množina reálných čísel $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií τ_S je parakompaktní topologický prostor. Je tento topologický prostor metrizovatelný?

Řešení. Ve cv. 3 kap. 6 bylo ukázáno, že $(\mathbf{R}, \tau_S)$ je normální topologický prostor. Ukážeme, že $(\mathbf{R}, \tau_S)$ je Lindelöfův prostor; jeho parakompaktnost pak bude důsledkem cv. 48.

Buď $(U_\iota)_{\iota\in I}$ otevřené pokrytí $\mathbf{R}$ v topologii τ_S. Označme τ přirozenou topologii na $\mathbf{R}$ a $V_\iota = \operatorname{int}_\tau U_\iota$ pro každé $\iota \in I$. Ukážeme, že množina $M = \mathbf{R}\backslash \bigcup V_\iota$ je nejvýše spočetná. Ke každému bodu $x \in M$ existuje index $\kappa(x) \in I$ a reálné číslo $a(x) > x$ takové, že pro libovolné dva různé body x, $y \in M$ platí $[x, a(x)) \cap [y, y(y)) = \emptyset$. Ovšem libovolná množina polouzavřených navzájem disjunktních intervalů je zřejmě nejvýše spočetná, proto také množina M je nejvýše spočetná. Systém $(U_{\kappa(x)})_{x\in M}$

je tedy spočetný podsystém pokrytí $(U_\iota)_{\iota\in I}$, pokrývající množinu M. Dále množina $\mathbf{R}\backslash M$ je otevřená v přirozené topologii τ na $\mathbf{R}$ a $(V_\iota)_{\iota\in I}$ je její otevřené pokrytí. Topologický prostor $\mathbf{R}\backslash M$ (s indukovanou topologií) je Lindelöfův, existuje tedy spočetné podpokrytí $(V_{\iota_i})_{i\in\mathbf{N}}$ pokrytí $(V_\iota)_{\iota\in I}$. Pak systém $(U_{\iota_i})_{i\in\mathbf{N}}$ je spočetný podsystém otevřeného pokrytí $(U_\iota)_{\iota\in I}$, pokrývající množinu $\mathbf{R}\backslash M$ v topologii τ_S. Systém $(U_{\kappa(x)})_{x\in M} \cup (U_{\iota_i})_{i\in\mathbf{N}}$ je tedy spočetným podpokrytím otevřeného pokrytí $(U_\iota)_{\iota\in I}$ prostoru $(\mathbf{R}, \tau_S)$. Prostor $(\mathbf{R}, \tau_S)$ je tedy regulární Lindelöfův prostor a ze cv. 48 vyplývá, že je parakompaktní.

Topologický prostor $(\mathbf{R}, \tau_S)$ není metrizovatelný: v př. (5) odst. 1.8 str. 10 jsme ukázali, že $(\mathbf{R}, \tau_S)$ je separabilní a není druhého typu spočetnosti; podle Věty 4. (b) odst. 5.2 str. 113 tedy není metrizovatelný.

Topologické variety

50. Předpokládejme, že každý bod x topologického prostoru X má okolí, homeomorfní s Euklidovým topologickým prostorem $\mathbf{R}^n$.

(a) Je topologický prostor X druhého typu spočetnosti?

(b) Je X Hausdorffův topologický prostor?

(c) Kritizujte následující "důkaz", že X je Hausdorffův prostor: Nechť x_1, x_2 jsou dva různé body z X, U_1 (resp. U_2) okolí bodu x_1 (resp. x_2) homeomorfní s $\mathbf{R}^n$; označme $\varphi_1 : U_1 \to \mathbf{R}^n$ (resp. $\varphi_2 : U_2 \to \mathbf{R}^n$) příslušný homeomorfismus. Topologický prostor $\mathbf{R}^n$ je Hausdorffův, existuje tedy okolí V_1 bodu $\varphi_1(x_1)$ a okolí V_2 bodu $\varphi_2(x_2)$ tak, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Pak $\varphi_1^{-1}(V_1)$, $\varphi_2^{-1}(V_2)$ jsou disjunktní okolí bodů x_1, x_2.

(d) Ukažte, že X je T_1-prostor.

Řešení. (a) Množina reálných čísel $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií je zřejmě příkladem topologického prostoru, jehož každý bod x má okolí, homeomorfní s Euklidovým prostorem $\mathbf{R}$ (např. interval $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$); přitom $(\mathbf{R}, \tau_S)$ není druhého typu spočetnosti (př. (5) odst. 1.8 str. 10). paritem[(b)] Topologický prostor X nemusí být Hausdorffův. Uvedeme příklad. Uvažujme faktorový prostor $(\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2)/\!\sim$, definovaný ve cv. 32 kap. 3. Tento topologický prostor není Hausdorffův, jak bylo ukázáno ve cv. 32 kap. 3. Přitom ovšem každý bod $x \in (\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2)/\!\sim$ má okolí homeomorfní s $\mathbf{R}$, neboť má evidentně okolí, homeomorfní s otevřeným intervalem v $\mathbf{R}$ (srov. obr. 28 kap. 3).

(c) Nemusí platit $\varphi_1^{-1}(V_1) \cap \varphi_2^{-1}(V_2) = \emptyset$.

(d) Nechť x_1, $x_2 \in X$ jsou dva libovolné různé body, nechť U_i je okolí bodu x_i a $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$ homeomorfismus, kde $i = 1, 2$. Platí-li $x_1 \notin U_2$, $x_2 \notin U_1$, není co dokazovat. Nechť např. x_1,

$x_2 \in U_1$. V tomto případě lze body $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_1(x_2) \in \mathbf{R}^n$ oddělit otevřenými množinami V_1, V_2; body x_1, x_2 jsou pak odděleny otevřenými množinami $\varphi_1^{-1}(V_1)$, $\varphi_1^{-1}(V_2)$. X je tedy T_1-prostor.

51. (a) Ukažte, že v definici n-rozměrné topologické variety bez okraje lze požadavek, aby každý její bod měl okolí homeomorfní s podmnožinou poloprostoru $\mathbf{R}^n_-$, otevřenou v $\mathbf{R}^n$, nahradit ekvivalentním požadavkem, aby každý její bod měl okolí, homeomorfní s $\mathbf{R}^n$, nebo ekvivalentním požadavkem, aby každý její bod měl okolí, homeomorfní s otevřenou množinou v $\mathbf{R}^n$.

(b) Buďte X, Y n-rozměrné topologické variety bez okraje. Ukažte, že pro libovolné body $x \in X$, $y \in Y$ existuje okolí U bodu x, okolí V bodu y a homeomorfismus $f : U \to V$.

(c) Dokažte, že každá otevřená podmnožina n-rozměrné variety bez okraje je n-rozměrná topologická varieta bez okraje. Platí analogické tvrzení i pro topologické variety s okrajem?

Řešení. (a) Nejdříve ukážeme, že otevřená koule $B(y,r) \subset \mathbf{R}^n$, kde $r > 0$, je homeomorfní s $\mathbf{R}^n$. Označme $t_x : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ translaci, definovanou vztahem $t_x(y) = y - x$. Dále pro každé $z \in B(0,r)$, $z = (z^1, z^2, \dots, z^n)$, položme

$$f(z) = \frac{rz}{\sqrt{r^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - \dots - (z^n)^2}}$$

a pro ka6d0 $x \in \mathbf{R}^n$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, položme

$$g(x) = \frac{rx}{\sqrt{r^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}}.$$

Dostáváme spojitá zobrazení $f : B(0,r) \to \mathbf{R}^n$, $g : \mathbf{R}^n \to B(0,r)$, která jsou navzájem inverzní; zobrazení f je tedy homeomorfismus. Složené zobrazení $f \circ t_y$ je pak homeomorfismus $B(y,r)$ na $\mathbf{R}^n$.

Odsud již ihned dostaneme tvrzení (a).

(b) Podle (a) existuje okolí U bodu x a homeomorfismus $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$, dále existuje okolí V bodu y a homeomorfismus $\psi : V \to \mathbf{R}^n$. Klademe $f = \psi^{-1} \circ \varphi$.

52. Buď $n \geq 2$, buď X n-rozměrná topologická varieta s okrajem $\partial X \neq \emptyset$. Pak okraj ∂X s topologií podprostoru topologického prostoru X je $(n-1)$-rozměrná topologická varieta bez okraje.

Řešení. Množina $\partial X \subset X$ s indukovanou topologií je Hausdorffův prostor druhého typu spočetnosti. Zbývá tedy ukázat, že ke každému bodu $x \in \partial X$ existuje $(n-1)$-rozměrný souřadnicový systém (V, ψ) na ∂X v bodě x takový, že $\psi(V) \subset \mathbf{R}^{n-1}$ (porov. cv. 51).

Jelikož X je n-rozměrná topologická varieta s okrajem, existuje n-rozměrný souřadnicový systém (U, φ), $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, v bodě $x \in \partial X$. Bez újmy na obecnosti možno předpokládat, že $\varphi(U) = V' \times (-a, 0]$ pro jistý otevřený kvádr $V' \subset \mathbf{R}^{n-1}$ a jisté $a > 0$. Pak $U \cap \partial X = \{x \in U \mid x^n(x) = 0\} = \{x \in U \mid x \in \varphi^{-1}(V' \times \{0\}) = \varphi^{-1}(V' \times \{0\})$. Klademe $V = U \cap \partial X$, $\psi = (y^1, y^2, \dots, y^{n-1})$, kde $y^i = x^i|_V$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$. V je otevřená množina v ∂X a ψ je zobrazení V do $\mathbf{R}^{n-1}$. Pro libovolný bod $\bar{x} \in V' \times \{0\}$, $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^{n-1}, 0)$, platí $\psi\varphi^{-1}(\bar{x}) = (y^1(\varphi^{-1}(\bar{x})), y^2(\varphi^{-1}(\bar{x})), \dots, y^{n-1}(\varphi^{-1}(\bar{x}))) = (x^1(\varphi^{-1}(\bar{x})), x^2(\varphi^{-1}(\bar{x})), \dots, x^{n-1}(\varphi^{-1}(\bar{x}))) = (x^{-1}, x^{-2}, \dots, x^{-n-1})$. Označíme-li π kanonickou projekci $\mathbf{R}^n_-$ na $\mathbf{R}^{n-1}$, definovanou vztahem $\pi(x^{-1}, x^{-2}, \dots, x^{-n}) = (x^{-1}, x^{-2}, \dots, x^{-n-1})$, bude platit

$$\psi\varphi^{-1} = \pi|_{V' \times \{0\}}.$$

Nyní dostáváme $\psi(V) = \psi\varphi^{-1}(\varphi(V)) = \pi(V' \times \{0\}) = V'$, což je otevřená množina v $\mathbf{R}^{n-1}$. Zobrazení $\psi : V \to V'$ je zřejmě spojitá bijekce. Všimněme si, že inverzní zobrazení $\psi^{-1} : V' \to V$ vzniká zúžením oboru hodnot kompozice spojitých zobrazení $V' \ni (y^1, y^2, \dots, y^{n-1}) \to (y^1, y^2, \dots, y^{n-1}, 0) \in V' \times (-a, 0]$, $V' \times (-a, 0] \ni (y^1, y^2, \dots, y^n) \to \varphi^{-1}(y^1, y^2, \dots, y^n) \in U$ z U na $V \subset U$; zobrazení ψ^{-1} je tedy spojité. Odtud již vyplývá, že $\psi : V \to V'$ je homeomorfismus.

53. Označme $\mathbf{R}_- = \mathbf{R}^1_-$, $\mathbf{R}^n_{(k)-} = \{x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n \mid x^i \le 0, k \le i \le n\}$.

(a) Ukažte, že součin $\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}_-$ je dvourozměrná topologická varieta s okrajem.

(b) Dokažte, že součin konečného systému topologických variet s okrajem je topologická varieta s okrajem. Určete dimenzi této topologické variety s okrajem.

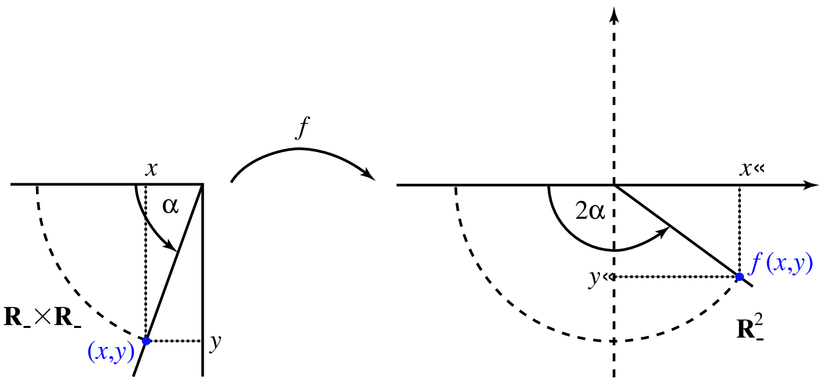
(c) Dokažte, že $\mathbf{R}^n_{(k)-}$ s přirozenou topologií je n-rozměrná topologická varieta s okrajem. Určete její okraj.

Řešení. (a) $\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}_-$ je Hausdorffův prostor druhého typu spočetnosti. Ukážeme, že $\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}_-$ je homeomorfní s $\mathbf{R}^2_-$. Pro $(x,y) \in \mathbf{R}_- \times \mathbf{R}_-$ klademe

$$f(x,y) = \begin{cases} (0,0), & (x,y) = (0,0), \\ \left(-\dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), & x^2 + y^2 \ne 0. \end{cases}$$

Tím vztahem je definováno zobrazení $f : \mathbf{R}_- \times \mathbf{R}_- \to \mathbf{R}^2_-$ (porov. obr. 7).

Obr. 7



Ukážeme, že f je homeomorfismus. Zobrazení f je zřejmě spojité v každém bodě $(x,y) \ne (0,0)$. Snadno lze dokázat spojitost f v bodě $(0,0)$. Buď U okolí bodu $(0,0)$ v $\mathbf{R}^2_-$. Možno předpokládat, že $U = B((0,0),\varepsilon) \cap \mathbf{R}^2_-$ pro jisté $\varepsilon > 0$. Položme $V = B((0,0),\varepsilon) \cap (\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}_-)$. Nechť $(x,y) \in V$. Platí-li $(x,y) = (0,0)$, pak $f(x,y) = (0,0) \in U$. Nechť $(x,y) \in V$, $(x,y) \ne (0,0)$. Jelikož $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$, pro bod $f(x,y) \in \mathbf{R}^2_-$ dostaneme

$$\frac{\left(x^2 - y^2\right)^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = x^2 + y^2 < \varepsilon^2,$$

takže opět $f(x,y) \in U$. To dokazuje spojitost f v bodě $(0,0)$. Zobrazení f je tedy spojité. f je ovšem bijektivní a zobrazení $g : \mathbf{R}^2_- \to \mathbf{R}_- \times \mathbf{R}_-$, definované vztahem

$$g(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r(r-x)}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r(r+x)} \right), \quad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

je inverzní k zobrazení f. Ze spojitosti g vyplývá, že f je homeomorfismus.

(b) Tvrzení dokážeme nejprve pro dvě topologické variety s okrajem. Nechť X (resp. Y) je n-rozměrná (resp. m-rozměrná) topologická varieta s okrajem. Položme $Z = X \times Y$. Z je Hausdorffův prostor druhého typu spočetnosti. Buď $(x,y) \in Z$ libovolný bod. Existuje okolí U (resp. V) bodu x (resp. y) a homeomorfismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n_-$ (resp. $\psi : V \to \psi(V) \subset \mathbf{R}^m_-$). Klademe $W = U \times V$, $\chi = \varphi \times \psi$. W je okolí bodu (x,y) a χ je homeomorfismus W na otevřenou množinu $\varphi(U) \times \psi(V) \subset \mathbf{R}^n_- \times \mathbf{R}^m_-$. Ovšem $\mathbf{R}^n_- = \mathbf{R}^n_- \times \mathbf{R}_-$, $\mathbf{R}^m_- = \mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}_-$, takže součin $\mathbf{R}^n_- \times \mathbf{R}^m_-$ je homeomorfní se součinem $\mathbf{R}^{n+m-2} \times \mathbf{R}_{-} \times \mathbf{R}_{-}$ a tady podle (a) se součinem $\mathbf{R}^{n+m-2} \times \mathbf{R}^2_{-}$. Tento součin je ovšem roven součinu $\mathbf{R}^{n+m-1} \times \mathbf{R}_{-} = \mathbf{R}^{n+m}_{-}$. Je tedy zřejmé, že W je homeomorfní s otevřenou množinou v $\mathbf{R}^{n+m}_{-}$, což jsme chtěli dokázat.

Indukcí se ukáže, že součin konečného systému (X_i) topologických variet s okrajem je topologická varieta s okrajem, jejíž dimenze je rovna součtu dimenzí variet X_i.

(c) Zřejmě $\mathbf{R}^n_{(k)-}$ je homeomorfní s topologickým prostorem $\mathbf{R}^{k-1}$ $\mathbf{R}^{n-k+1}_{-}$, což je podle (b) topologická varieta s okrajem. Její dimenze je rovna n. Platí $\mathbf{R}^n_{(k)-} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ $\mathbf{R}^n$ $x^k = x^{k+1} = \dots = x^n = 0$.

54. Určete, které z níže uvedených podprostorů Euklidova prostoru jsou topologické variety s okrajem. Určete jejich dimenzi a okraj.

(a) Otevřená množina $U \subset \mathbf{R}^n$.

(b) Uzavřená množina $A \subset \mathbf{R}^n$.

(c) $X = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 2\}$.

(d) $\mathbf{Q}^n \subset \mathbf{R}^n$.

(e) $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ (uzavřený jednotkový kruh).

(f) $S^n = \{(x^1, x^2, dots, x^{n+1}) \subset \mathbf{R}^{n+1} \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = 1\}$ (jednotková sféra v $\mathbf{R}^{n+1}$).

(g) Toroid v $\mathbf{R}^3$.

(h) Válec v $\mathbf{R}^3$.

(i) $[0,1]^n \subset \mathbf{R}^n$.

(j) $\mathrm{fr}[0,1]^2 \subset \mathbf{R}^2$.

(k) Möbiova páska v $\mathbf{R}^3$.

(l) Kleinova láhev v $\mathbf{R}^4$.

(m) Reálná projektivní rovina RP^2 v $\mathbf{R}^5$.

(n) $B_0 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y > 0, x^2 + y^2 = 1\}$.

Řešení. (a) $\mathbf{R}^n$ je topologická varieta bez okraje; U je tedy topologická varieta bez okraje (cv. 51 (c)).

(b) Uzavřená množina $\mathbf{R}^2_{-} \cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0, y > 0\} \subset \mathbf{R}^2$ není topologická varieta s okrajem; uzavřená množina $\mathbf{R}^2_{-}$ je topologická varieta s okrajem (př. (5) odst. 7.8 str. 212).

(c) Kdyby množina X měla strukturu topologické variety s okrajem, pak by muselo platit $\dim X = 2$, jelikož $X \backslash \{(0,0)\}$ je otevřená množina v $\mathbf{R}^2$. Ovšem bod $(0,0) \in X$ nemá okolí, homeomorfní s otevřenou množinou v $\mathbf{R}^2_{-}$; X tedy nemá strukturu topologické variety s okrajem.

(d) $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ není lokálně kompaktní prostor (cv. 34 (b)) a tedy ani $\mathbf{Q}^n$ není lokálně kompaktní (Věta 17. odst. 7.4 str. 202); $\mathbf{Q}^n$ tedy nemůže být topologickou varietou s okrajem (př. (5) odst. 7.8 str. 212).

(e) Ukážeme, že B je dvourozměrná topologická varieta s okrajem. Uvažujme otevřené pokrytí B množinami $U_1 = \{(x,y) \in B \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $U_2 = \{(x,y) \in B \mid y > 0\}$, $U_3 = \{(x,y) \in B \mid y < 0\}$, $U_4 = \{(x,y) \in B \mid x > 0\}$, $U_5 = \{(x,y) \in B \mid x < 0\}$. Množina U_1 je otevřená v $\mathbf{R}^2$ a je tedy homeomorfní s otevřenou množinou v $\mathbf{R}^2_{-}$. U_2 je homeomorfní s množinou $V = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in (0,1]\}$ (srov. obr. 8) a V je homeomorfní s množinou $W = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in (-1,0]\}$, která je otevřená v $\mathbf{R}^2_{-}$; za homeomorfismus $\varphi : U_2 \to V$ možno např. vzít zobrazení, definované vztahem $\varphi(x,y) = (ux, uy)$, kde $u = (x^2+y^2)^{1/2}/y$ (inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : V \to U_2$ je pak definováno vztahem $\varphi^{-1}(x,y) = (kx, ky)$, kde $k = y/(x^2+y^2)^{1/2}$). Zřejmě také U_3, U_4, U_5 s topologií podprostoru prostoru X jsou homeomorfní s W. Každý bod $(x,y) \in B$ má tedy okolí, homeomorfní s otevřenou množinou v $\mathbf{R}^2_{-}$. Jelikož B je Hausdorffův prostor druhého typu spočetnosti, B je topologická varieta s okrajem. Platí $\dim B = 2$, $\partial B = S^1$.

(f) Ukážeme, že $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ je n-rozměrná topologická varieta bez okraje. S^n je zřejmě Hausdorffův prostor druhého typu spočetnosti. Zbývá tedy prověřit, že S^n je lokálně homeomorfní s $\mathbf{R}^n_{-}$. Podle př. (8) odst. 3.7 str. 45 je dvojice $(S^n \backslash \{N\}, \varphi)$, kde N je severní pól sféry S^n a φ je *s*tereografická projekce sféry S^n ze *s*everního pólu N na $\mathbf{R}^n$, souřadnicový systém na

S^n. Analogicky se ukáže, že dvojice $(S^n \backslash \{S\}, \psi)$, kde $S = (0, 0, \ldots, 0, -1) \in S^n$ je *jižní pól* a $\psi : S^n \backslash \{S\} \to \mathbf{R}^n$ je *stereografická projekce z jižního pólu* S na $\mathbf{R}^n$, definované vztahem

$$\psi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \left(\frac{x^1}{1 + x^{n+1}}, \frac{x^2}{1 + x^{n+1}}, \ldots, \frac{x^n}{1 + x^{n+1}} \right),$$

je souřadnicový systém na S^n. Jelikož množiny $S^n \backslash \{N\}$, $S^n \backslash \{S\}$ pokrývají sféru S^n, je S^n topologická varieta bez okraje a $\dim S^n = n$.

(g) Podle cv. 26 kap. 3 je toroid T^2 homeomorfní s topologickým prostorem $S^1 \times S^1 \subset \mathbf{R}^4$. Jelikož S^1 je topologická varieta bez okraje (cv. 54 (f)), součin $S^1 \times S^1$ je topologická varieta s okrajem (cv. 53 (b)). Každý bod $S^1 \times S^1$ je ovšem vnitřní, takže $S^1 \times S^1$ je topologická varieta bez okraje.

(h) Válec je homeomorfní s topologickým prostorem $S^1 \times [0, 1]$, což je dvourozměrná varieta s okrajem (cv. 53 (b)). Okraj válce je množina $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0, 1\}$.

(i) $[0, 1] \subset \mathbf{R}$ je jednorozměrná topologická varieta s okrajem $\partial[0, 1] = \{0, 1\}$. Podle cv. 53 (b) je tedy součin $[0, 1]^n \subset \mathbf{R}^n$ n-rozměrná topologická varieta s okrajem $\partial[0, 1]^n = \mathrm{fr}[0, 1]^n$.

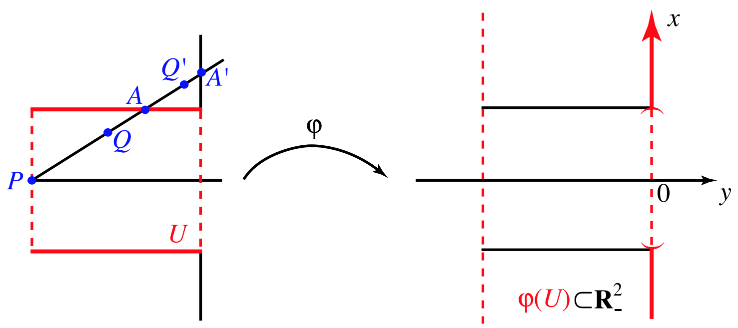
(j) $\mathrm{fr}[0, 1]^2$ je homeomorfní s kružnicí $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ (cv. 9 kap. 3), je to tedy podle (f) jednorozměrná topologická varieta bez okraje.

(k) Uvažujme Möbiovu pásku $M_{a,b}$ o poloměru a šířce $2b$ (cv. 27 kap. 3) a položme $U = [-b/a, b/a] \times (0, 2\pi)$, $V = F(U)$, kde F je zobrazení, definující $M_{a,b}$ v parametrickém tvaru. Pak

$$V = M_{a,b} \cap \left(\mathbf{R}^3 \backslash \left\{ (x', y', z') \in \mathbf{R}^3 \mid x' \leq 0, y' = 0 \right\} \right),$$

V je tedy otevřená množina v $M_{a,b}$. Ve cv. 27 (a) kap. 3 bylo ukázáno, že zobrazení $F|_U : U \to V$ je homeomorfismus. Zřejmě existuje homeomorfismus φ množiny U na otevřenou množinu $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^2_-$; φ lze např. zkonstruovat podle obr. 8 "protínáním" z bodu P a následnou translací v $\mathbf{R}^2$. Položíme-li pak $\psi = \varphi \circ (F|_U)^{-1}$, dostaneme 2-rozměrný souřadnicový systém na $M_{a,b}$.

Obr. 8



Podobně zkonstruujeme další 2-rozměrný souřadnicový systém (V', ψ') na $M_{a,b}$. Klademe

$$V' = M_{a,b} \cap (\mathbf{R}^3 \backslash \{(x', y', z') \in \mathbf{R}^3 \mid x' \geq 0, y' = 0\}.$$

Dále rozšíříme zobrazení F, definované vztahy (1a) – (1c) cv. 27 kap. 3 na množinu $[-b/a, b/a] \times \mathbf{R}$ a položíme $U' = [-b/a, b/a] \times (\pi, 3\pi)$. Zřejmě $V' = F(U')$ a $F|_{U'} \to V'$ je homeomorfismus a existuje homeomorfismus φ' množiny U' na otevřenou podmnožinu $\mathbf{R}^2_-$. Klademe $\psi' = \varphi' \circ (F|_{U'})^{-1}$.

Jelikož topologický prostor $M_{a,b}$ je Hausdorffův prostor druhého typu spočetnosti a množiny V, V' pokrývají $M_{a,b}$, je Möbiova páska $M_{a,b}$ topologická varieta s okrajem, přičemž $\dim M_{a,b} = 2$.

Přitom $F(\{-b/a, b/a\} \times [0, 2\pi]) = \partial M_{a,b}$.

(l) V případě Kleinovy láhve $K_{a,b}$(cv. 28 kap. 3) postupujeme podobně jako v části (k) tohoto cvičení. Využijeme k tomu otevřené pokrytí V, $V_1 \cup V_2$, $V_3 \cup V_4$, $V_5 \cup V_6 \cup V_7 \cup V_8$ Kleinovy láhve

$K_{a,b}$ a periodicity parametrického vyjádření (1a) – (1d) Kleinovy láhve ze cv. 28 kap. 3.

(m) Ukážeme, že reálná projektivní rovina RP^2 (cv. 30 kap. 3) je dvojrozměrná topologická varieta bez okraje. Uvedeme důkaz, který je založen na existenci homeomorfismu RP^2 a $S^2/\sim$, kde $\sim$ je ekvivalence na sféře S^2 "$x \sim y$, jestliže $x = y$ nebo $x = -y$". Pro libovolný bod $y \in S^2$ označme p_y přímku v $\mathbf{R}^3$ procházející počátkem $0 \in \mathbf{R}^3$ a bodem y.

Buď $x \in S^2$ bod. Označme U_x množinu všech bodů $y \in S^2$ takových, že úhel, který svírá přímkap_x s přímkou p_{y2}je menší než $\pi/2$. Množiny U_x pokrývají S^2 a jsou otevřené. Označme $\pi : S^2 \to S^2/\sim$ faktorovou projekci. Množiny $\pi(U_x)$ pokrývají faktorový prostor $S^2/\sim$ a jsou otevřené, jelikož pro každé $x \in S^2$ je množina $\pi^{-1}(\pi(U_x)) \subset S^2$ (doplněk jisté kružnice v množině S^2) otevřená. Z definice množin U_x vyplývá, že pro každé x existuje homeomorfismus $\psi_x : U_x \to \mathbf{R}^2$. Přitom $\pi|_{U_x}$ je spojitá bijekce. Klademe

$$\varphi_x = \psi_x \circ (\pi|_{U_x})^{-1} .$$

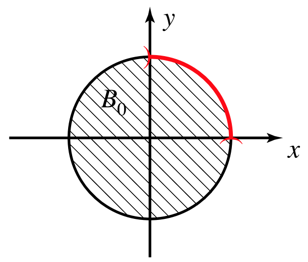
Snadno lze ukázat, že zobrazení $\pi|_{U_x} : U_x \to \pi(U_x) \subset S^2/\sim$ je homeomorfismus. $\pi|_{U_x}$ je evidentně spojitá bijekce; stačí tedy ukázat, že $\pi|_{U_x}$ je otevřené zobrazení (Věta 4. odst. 2.1 str. 19). Buď $W \subset U_x$ otevřená množina. Pak W je otevřená v S^2 a $\pi|_{U_x}(W) = (W)$ a $\pi^{-1}(\pi(W)) = W \cup (-W) \subset S^2$ je otevřená množina. Podle definice finální topologie je tedy množina $\pi(W)$ otevřená. Zobrazení $\varphi_x : \pi(U_x) \to \mathbf{R}^2$ je tedy homeomorfismus.

Zbývá tedy ověřit, že RP^2 je Hausdorffův prostor druhého typu spočetnosti; RP^2 je ovšem homeomorfní s podprostorem $\mathbf{R}^5$ (cv. 30 kap. 3).

RP^2 je tedy dvojrozměrná topologická varieta a $\partial RP^2 = \emptyset$.

(n) $B_0 \subset B$ je zřejmě otevřená množina. Podle (e) je B dvojrozměrná topologická varieta s okrajem, B_0 je tedy rovněž dvojrozměrná topologická varieta s okrajem (cv. 51 (c)). Zřejmě $\operatorname{fr} B_0 = S^1$, přičemž $\partial B_0 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x, y > 0$, t.j. $B_0 \subset \operatorname{fr} B_0$, $B_0 \neq \operatorname{fr} B_0$, kde $\operatorname{fr} B_0$ uvažujeme v topologickém prostoru $\mathbf{R}^2$. Situace z tohoto cvičení je znázorněna na obr. 9.

Obr. 9



Kompaktifikace topologického prostoru

55. (a) Buď X lokálně kompaktní nekompaktní Hausdorffův prostor, $f : X \to Y$ jeho oddělitelná kompaktifikace, $\iota : X \to X^*$ jeho Alexandrova kompaktifikace, $g : Y \to X^*$ jednoznačně určené zobrazení, definované v Důsledku 4. Věty 25. odst. 7.7 str. 208. Dokažte, že topologický prostor X^* je homeomorfní s faktorovým prostorem $Y/\mathscr{R}_g$, kde $\mathscr{R}_g$ je ekvivalence asociovaná se zobrazením g.

(b) Nechť X je úplně regulární prostor, $f : X \to Y$ nějaká jeho oddělitelná kompaktifikace, $c_X : X \to \beta X$ jeho Čechova-Stoneova kompaktifikace, $F : \beta X \to Y$ jednoznačně určené zobrazení, definované v Důsledku 2. Věty 27. odst. 7.7 str. 210. Dokažte, že Y je homeomorfní s faktorovým prostorem $\beta X/\mathscr{R}_F$, kde $\mathscr{R}_F$ je ekvivalence asociovaná se zobrazením F.

Řešení. (a) Podle Důsledku 4. Věty 25. odst. 7.7 str. 208 je zobrazení g spojité surjektivní zobrazení kompaktního prostoru Y na Hausdorffův prostor X^*, a je tedy uzavřené (cv. 11). Podle cv. 34 kap. 3 je X^* homeomorfní s faktorovým prostorem $Y/\mathscr{R}_g$.

Všimněme si, že faktorový prostor $Y/\mathscr{R}_g$ má jedinou netriviální třídu $[y]$; je tvořená body $y \in Y$, pro které $g(y) = \alpha$.

(b) Tvrzení (b) se dokáže stejně jako (a).

56. (a) Buď X (resp. Y) nekompaktní topologický prostor, X^* (resp. Y^*) jeho Alexandrova kompaktifikace. Dokažte, že topologické prostory X, Y jsou homeomorfní tehdy a jen tehdy, když existuje homeomorfismus $h : X^* \to Y^*$ takový, že $h(\infty) = \infty$.

(b) Buď X nekompaktní topologický prostor, $f : X \to Y$ jeho kompaktifikace taková, že množina $Y \backslash f(X)$ je jednoprvková, $\iota : X \to X^*$ Alexandrova kompaktifikace X. Dokažte, že topologické prostory X^*, Y jsou homeomorfní.

Řešení. (a) Předpokládejme, že existuje homeomorfismus $g : X \to Y$. Definujeme bijekci $h : X^* \to Y^*$ podmínkou $h|_X = g$, $h(\infty) = \infty$. Podle definice je množina X otevřená v X^*, takže zobrazení h je spojité na X. Prověříme spojitost h v bodě ∞. Buď $V = (Y \backslash A) \cup \{\infty\}$ okolí bodu $\alpha \in Y$. Pak $h^{-1}(V) = (X \backslash g^{-1}(A)) \cup \{\infty\}$, což je zřejmě okolí bodu $\infty \in X$. Zobrazení h je tedy spojité. Je zřejmé, že také zobrazení h^{-1} je spojité, takže h je homeomorfismus.

Opačné tvrzení je evidentní.

(b) Klademe $g = f \circ \iota^{-1}$; g je homeomorfismus $\iota(X)$ na $f(X)$. Podobně jako v (a) zkonstruujeme homeomorfismus $h : X^* \to Y$.

57. Buď X topologický prostor, $f : X \to Y$ jeho kompaktifikace taková, že každou spojitou ohraničenou funkci $f : X \to \mathbf{R}$ lze jednoznačně rozšířit na spojitou funkci $\bar{f} : Y \to \mathbf{R}$. Pak každé spojité zobrazení $g : X \to Z$, kde Z je kompaktní Hausdorffův prostor, lze rozšířit na spojité zobrazení $\bar{g} : Y \to Z$. Dokažte.

Řešení. Topologický prostor Z je úplně regulární, existuje tedy jeho vnoření do $[0,1]^J$ pro jistou množinu J; Z lze považovat ze podprostor $[0,1]^J$. Pak g bude spojité zobrazení X do $[0,1]^J$ a každá jeho složka $g_\iota : X \to [0,1]$ bude spojitá ohraničená reálná funkce. Podle předpokladu lze g_ι rozšířit spojitou funkci $\bar{g}_\iota : Y \to \mathbf{R}$. Klademe $G = (\bar{g}_\iota)_{\iota \in J}$. Zobrazení $G : Y \to \mathbf{R}^J$ je zřejmě spojité (Věta 10. (b) odst. 3.3 str. 36). Ukážeme, že $G(Y) \subset Z$. Platí $g(X) \subset Z$ a $G(f(X)) = g(X)$. Množina Z je kompaktní a tedy uzavřená v $[0,1]^J$. Proto $\operatorname{cl} G \circ f(X) = \operatorname{cl} g(X) \subset Z$. Zobrazení G je ovšem spojité. S využitím Věty 2. odst. 2.1 str. 18 nyní dostáváme $G(Y) = G(\operatorname{cl} f(X)) \subset \operatorname{cl} G \circ f(X) \subset Z$, což jsme chtěli ukázat. Jednoznačnost zobrazení G vyplývá z jednoznačnosti komponent $\bar{g}$.

58. Buď X úplně regulární prostor, $c_X : X \to \beta X$ jeho Čechova–Stoneova kompaktifikace. Je-li $f : X \to Y$ oddělitelná kompaktifikace X taková, že každou spojitou ohraničenou reálnou funkci na X lze jednoznačně rozšířit na spojitou reálnou funkci na Y, pak existuje homeomorfismus $h : Y \to \beta X$ takový, že $h \circ f = c_X$. Dokažte.

Řešení. βX je kompaktní Hausdorffův prostor, lze tedy podle cv. 57 zobrazení f jednoznačně rozšířit na spojité zobrazení $F : Y \to \beta X$. Podobně zobrazení c_X lze jednoznačně rozšířit na spojité zobrazení $G : \beta X \to Y$. Zobrazení $F \circ G : \beta X \to \beta Y$ splňuje podmínku $F \circ G \circ c_X = c_X$, $F \circ G$ je tedy spojité rozšíření identického zobrazení $\mathrm{id} : c_X(X) \to c_X(X)$. Množina $c_X(X)$ je ovšem hustá v βX a βX je Hausdorffův prostor, takže podle Důsledku 2. Věty 8. odst. 3.2 str. 35 musí platit $F \circ G = \mathrm{id}_{\beta X}$. Analogicky se ukáže, že $G \circ F = \mathrm{id}_Y$. Zobrazení F je tedy homeomorfismus Y na βX splňující podmínku $F \circ f = c_X$.

59. Nechť X, Y jsou homeomorfní úplně regulární topologické prostory, $\varphi : X \to Y$ jejich homeomorfismus. Dokažte, že existuje homeomorfismus $h : \beta X \to \beta Y$ takový, že $h \circ c_X = c_Y \circ \varphi$.

Řešení. Tvrzení vyplývá ze cv. 58: Položme $f : c_Y \circ \varphi$. Pak $f : X \to \beta Y$ je kompaktifikace X. Je-li $g : X \to \mathbf{R}$ spojitá ohraničená funkce, pak $g \circ \varphi$ je spojitá ohraničená funkce na Y a lze ji tedy jednoznačně rozšířit na spojitou funkci na βX. Podle cv. 58 pak existuje homeomorfismus $h : \beta X \to \beta Y$ takový, že $h \circ c_X = f = c_Y \circ \varphi$.

Jiné řešení dostaneme z Věty 27. odst. 7.7 str. 209 a Důsledku 2. Věty 8. odst. 3.2 str. 35.

60. (a) Dokažte, že Alexandrovova kompaktifikace množiny reálných čísel $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií je homeomorfní s kružnicí S^1.

(b) Dokažte, že Alexandrovova kompaktifikace Euklidova topologického prostoru $\mathbf{R}^n$ je homeomorfní se sférou S^n.

(c) Dokažte, že Alexandrovova kompaktifikace množiny komplexních čísel $\mathbf{C}$ s přirozenou topologií je homeomorfní se sférou S^2 (*R*iemannova sféra).

(d) Je Alexandrovova kompaktifikace intervalu $(0,1]$ homeomorfní s intervalem $[0,1]$?

(e) Dokažte, že topologický prostor $\mathbf{R}^*$, definovaný ve cv. 24 (b) kap. 5, je kompaktifikace $\mathbf{R}$.

Řešení. (a) V př. (11) odst. 7.8 str. 217 bylo ukázáno, že Alexandrovova kompaktifikace intervalu $(0,1)$ je homeomorfní s kružnicí S^1. Ovšem $(0,1)$ je homeomorfní s $\mathbf{R}$ (cv. 6 (a) kap. 2), a tedy $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ je homeomorfní s $(0,1)\cup\{\infty\}$ podle cv. 56 (a).

Jiné řešení: viz (b).

(b) Podel cv. 8 odst. 3.7 je stereografická projekce $\varphi : S^n\backslash\{N\} \to \mathbf{R}^n$ sféry S^n bez severního pólu N na $\mathbf{R}^n$ homeomorfismus, a tedy vnoření do $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ s topologií Alexandrovovy kompaktifikace. Ovšem $\operatorname{cl}\varphi(S^n\backslash\{N\}) = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$, t.j. φ je kompaktifikace množiny $S^n\backslash\{N\}$ a množina $(\mathbf{R}^n \cup \{\infty\})\backslash\varphi(S^n\backslash\{N\})$ je jednoprvková. Dále kanonické vnoření $\iota : S^n\backslash\{N\} \to S^n$ je zřejmě rovněž kompaktifikace množiny $S^n\backslash\{N\}$ taková, že $S^n\backslash\iota(S^n\backslash\{N\}) = \{N\}$ je jednoprvková množina. Odtud a ze cv. 56 (b) vyplývá, že topologické prostory $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ a S^n jsou homeomorfní.

(c) Tvrzení vyplývá z definice přirozené topologie na množině $\mathbf{C}$ (př. (7) odst. 3.7 str. 45) a z části (b) tohoto cvičení.

(d) Alexandrovova kompaktifikace intervalu $(0,1]$ je homeomorfní s intervalem $[0,1]$: Kanonické vnoření $\iota : (0,1] \to [0,1]$ je zřejmě kompaktifikace, a tedy interval $[0,1]$ je homeomorfní s Alexandrovovou kompaktifikací $(0,1]\cup\{\infty\}$ intervalu $(0,1)$ podle cv. 56 (b). Za homeomorfismus $h : (0,1]\cup\{\infty\} \to [0,1]$ lze vzít zobrazení, definované podmínkou $h|_{(0,1]} = \iota$, $h(\infty) = 0$.

(e) Podle cv. 24 (b) kap. 5 je $\mathbf{R}^*$ úplný metrický prostor, který je zúplněním metrického prostoru $\mathbf{R}$ s metrikou d^*, definovanou vztahem

$$d^*(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|, \quad x,y \in \mathbf{R}$$

(viz také př. (4) odst. 5.10 str. 126). Podle cv. 32 je $\mathbf{R}^*$ kompaktní právě tehdy, když metrický prostor $\mathbf{R}$ s metrikou d^* je totálně ohraničený. Přitom $\mathbf{R}$ je izometrický s podprostorem $(-1,1)$ Euklidova metrického prostoru $\mathbf{R}$ (př. (4) odst. 5.10 str. 126), stačí tedy ukázat, že interval $(-1,1)$ je totálně ohraničený v přirozené metrice na $\mathbf{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, zvolme $n \in \mathbf{N}$ tak, aby platilo $1/n < \varepsilon$. Pak množina $\{-(n-1)/n, -(n-2)/n, \dots, -2/n, -1/n, 0, 1/n, 2/n, \dots, (n-2)/n, (n-1)/n\}$ je ε-síť v metrickém prostoru $(-1,1)$, tento metrický prostor je tedy totálně ohraničený.

Odsud ovšem vyplývá, že topologický prostor $\mathbf{R}^*$ je kompaktní a zbývá ukázat, že $\mathbf{R}^*$ je kompaktifikace Euklidova prostoru $\mathbf{R}$. Z definice zúplnění metrického prostoru vyplývá, že $\mathbf{R}^*$ je kompaktifikace metrického prostoru $\mathbf{R}$ s metrikou d^*. Ovšem metrika d^* na $\mathbf{R}$ je ekvivalentní s Euklidovou metrikou (př. (4) odst. 5.10 str. 126); odtud již vyplývá, že $\mathbf{R}^*$ je kompaktifikace $\mathbf{R}$.

61. (a) Dokažte, že Alexandrovova kompaktifikace $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}\cup\{\infty\}$ množiny přirozených čísel $\mathbf{N}$ s přirozenou topologií je homeomorfní s podprostorem $A = \{0\}\cup\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ v $\mathbf{R}$.

(b) Dokažte, že zobrazení $d : \mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, definované vztahem $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ pro $x, y \in \mathbf{N}$, $d(x,\infty) = d(\infty,x) = 1/x$ pro $x \in \mathbf{N}$, $d(\infty,\infty) = 0$, je metrika na množině $\mathbf{N}^*$. Srovnejte topologii asociovanou s touto metrikou s topologií Alexandrovy kompaktifikace na $\mathbf{N}^*$.

Řešení. (a) Definujeme zobrazení $F : \mathbf{N}^* \to A$ vztahem $F(x) = 1/x$ pro $x \in \mathbf{N}$, $F(\infty) = 0$. F je zřejmě spojitá otevřená bijekce, t.j. homeomorfismus (všimněme si, že množina $U \subset \mathbf{N}^*$ je otevřená právě tehdy, když buď U je podmnožina $\mathbf{N}$, nebo $U = (\mathbf{N}\backslash K) \cup \{\infty\}$, kde $K \subset \mathbf{N}$ je konečná množina).

(b) d splňuje podmínky (1) – (3) z definice metriky (odst. 5.1), $\mathbf{N}^*$ s touto metrikou je tedy metrický prostor. Ovšem zobrazení $F : \mathbf{N}^* \to A$ je zřejmě izometrie metrického prostoru $(\mathbf{N}^*, d)$ na podprostor A Euklidova metrického prostoru $\mathbf{R}$. Odtud vyplývá, že metrická topologie metriky d na $\mathbf{N}^*$ splývá s topologií Alexandrovovy kompaktifikace.

62. Buď $g : (0,1) \to \mathbf{R}$ spojitá ohraničená funkce. Za jakých podmínek existuje spojité rozšíření funkce g na topologický prostor X, kde (a) X je Alexandrovova kompaktifikace intervalu $(0,1)$, (b) X je kompaktifikace $[0,1]$ intervalu $(0,1)$, (c) X je kompaktifikace $\operatorname{cl} f((0,1)) \subset [-1,1]^2$ intervalu $(0,1)$, kde $f : (0,1) \to [-1,1]^2$ je zobrazení, definované vztahem $f(t) = (t, \sin(1/t))$ (srov. př. (11) odst. 7.8 str. 217)?

Řešení. (a) Ukážeme, že spojitá ohraničená funkce $g : (0,1) \to \mathbf{R}$ má spojité rozšíření G na Alexandrovovu kompaktifikaci intervalu $(0,1)$ právě tehdy, když existují limity

$$(1) \qquad \lim_{t\to 0_+} g(t), \qquad \lim_{t\to 0_-} g(t)$$

a jsou si rovny. Podle př. (11) odst. 7.8 str. 217 lze místo Alexandrovovy kompaktifikace uvažovat kompaktifikaci $f : (0,1) \to S^1$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

Je-li G spojité rozšíření funkce g na S^1, pak podle definice platí $g(t) = G(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ pro $t \in (0,1)$. Odtud

$$\lim_{t\to 0_+} g(t) = G(1,0), \qquad \lim_{t\to 0_-} g(t) = G(1,0)$$

a tedy tvrzení platí. Obráceně existují-li limity (1) a jsou si rovny, klademe

$$G(z) = \begin{cases} gf^{-1}(z), & z \in S^1\backslash\{(1,0)\}, \\ \lim\limits_{t\to 0_+} g(t), & z = (1,0). \end{cases}$$

Pak $G : S^1 \to \mathbf{R}$ je spojitá funkce a platí $g = G \circ f$.

(b) Ukážeme, že spojitá ohraničená funkce $g : (0,1) \to \mathbf{R}$ má spojité rozšíření na kompaktifikaci $[0,1]$ intervalu $(0,1)$ právě tehdy, když existují limity (1) (nemusí si být rovny).

Buď $\iota : (0,1) \to [0,1]$ kanonické vnoření. Nechť $G : [0,1] \to \mathbf{R}$ je spojité rozšíření g. Pak $g(t) = G(\iota(t))$ pro každé $t \in (0,1$ a ze spojitosti G vyplývá, že

$$G(0) = \lim_{x\to 0_+} G(x), \qquad G(1) = \lim_{x\to 1_-} G(x).$$

Odtud dostáváme, že existují limity (1). Obráceně, předpokládejme, že tyto limity existují. Položme

$$G(t) = \begin{cases} g(t), & t \in (0,1), \\ \lim\limits_{x\to 0_+} g(x), & t = 0, \\ \lim\limits_{x\to 0_-} g(x), & t = 1. \end{cases}$$

Pak $G : [0,1] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkce splňující podmínku $g = G \cdot \iota$.

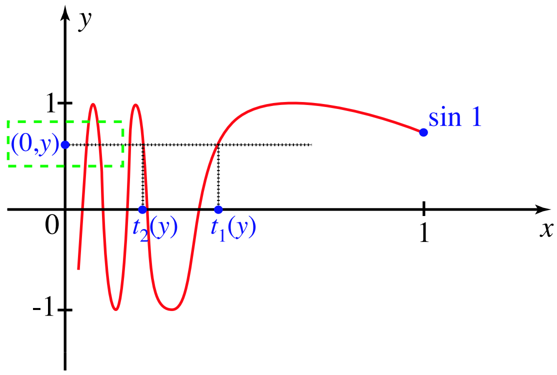
(c) Ukážeme, že spojitá funkce $g : (0,1) \to \mathbf{R}$ má spojité rozšíření na kompaktifikaci $\operatorname{cl} f((0,1))$ intervalu $(0,1)$ právě tehdy, když pro každé $y \in [-1,1]$ existuje limita

$$(2) \qquad \lim_{i\to\infty} g(t_i(y)),$$

kde $t_1(y) > t_2(y) > t_3(Y) > \dots$ jsou řešení rovnice $\sin(1/t) = y$.

Nechť G je spojité rozšíření funkce g. Platí $\operatorname{cl} f((0,1)) = f((0,1)) \cup (\{0\} \times [-1,1])$. Buď $y \in [-1,1]$ libovolný bod. Zřejmě v každém okolí bodu $(0,y)$ leží všechny body posloupnosti $((t_i(y),y))_{i\in\mathbf{N}}$ až na konečně mnoho, t.j. posloupnosti $((t_i(y),y))_{i\in\mathbf{N}}$ konverguje k bodu $(0,y)$ (srov. obr. 10).

Obr. 10



Ze spojitosti G vyplývá, že pro každé $y \in [-1,1]$ platí

$$\lim_{i\to\infty} G(t_i(y),y) = G(0,y).$$

Ovšem $t_i(y) \in (0,1)$ a $g(t) = G(t, \sin(1/t))$ pro $t \in (0,1)$, takže

$$\lim_{i\to\infty} g(t_i(y)) = \lim_{i\to\infty} G(t_i(y),y).$$

Obráceně předpokládejme, že pro každé $y \in [-1,1]$ existuje limita (2). Položme

$$G(z) = \begin{cases} g \circ f^{-1}, & z \in f((0,1)), \\ \lim\limits_{i\to\infty} g(t_i(y)), & z = (0,y), y \in [-1,1]. \end{cases}$$

Pak $G : \operatorname{cl} f((0,1)) \to \mathbf{R}$ je spojitá funkce a platí $g = G \circ f$.

Řekneme, že kompaktifikace $f : X \to Y$ topologického prostoru X je *metrizovatelná*, jestliže topologický prostor Y je metrizovatelný.

63. (a) Může mít topologický prostor, který není metrizovatelný, metrizovatelnou kompaktifikaci?

(b) Dokažte, že metrizovatelný topologický prostor má metrizovatelnou kompaktifikaci právě tehdy, když je separabilní.

(c) Nechť $f : X \to Y$ je metrizovatelná kompaktifikace metrického prostoru X. Je zobrazení f izometrie?

Řešení. (a) Nemůže, jelikož by byl podprostorem metrizovatelného topologického prostoru.

(b) Předpokládejme, že topologický prostor X má metrizovatelnou kompaktifikaci $f : X \to Y$. Pak Y je Hausdorffův topologický prostor druhého typu spočetnosti (cv. 33) a jeho podprostor $f(X)$ je rovněž Hausdorffův prostor druhého typu spočetnosti, který je metrizovatelný. Podle Věty 4. (b) odst. 5.2 str. 113 je $f(X)$ separabilní.

Obráceně, buď X separabilní metrizovatelný topologický prostor. Pak X je druhého typu spočetnosti (Věta 4. (b) odst. 5.2 str. 113) a je normální (Věta 7. odst. 6.2 str. 144), takže je také regulární. Podle Lemmatu 5. (c) odst. 6.5 str. 154 existuje spočetný systém spojitých funkcí $f_i : X \to [0,1]$ takových, že ke každému $x_0 \in X$ a ke každému okolí U bodu x_0 lze najít index k, pro který $f_k(x_0) > 0$ a $f_k(x) = 0$ pro $x \in X \setminus U$. Funkce f_i jsou ovšem spojité rovněž jako zobrazení X do $\mathbf{R}$ (Věta 3 (c) odst. 3.1). Jsou tedy splněny předpoklady Lemmatu 6. odst. 6.5 str. 155, odkud vyplývá, že zobrazení $F : X \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, definované vztahem $F = (f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ je vnoření. Ovšem $F(X) \subset [0,1]^{\mathbf{N}}$ a z Věty 3. (b) odst. 3.1 str. 32 a Věty 4. (b) odst. 3.1 str. 32 vyplývá, že rovněž zobrazení $\bar{F} : X \to [0,1]^{\mathbf{N}}$, vznikající z F zúžením oboru hodnot, je vnoření. Ukázali jsme tak, že každý separabilní metrizovatelný topologický prostor lze vnořit do topologického prostoru $[0,1]^{\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Kompaktifikace topologického prostoru X asociovaná se zobrazením $\bar{F}$ je metrizovatelná, neboť topologický prostor $\operatorname{cl}\bar{F}(X)$ je metrizovatelný jako podprostor metrizovatelného prostoru $[0,1]^{\mathbf{N}}$ (Věta 7. odst. 5.4 str. 114, Věta 9. odst. 5.4 str. 115). Tím je důkaz ukončen.

(c) f může nebo nemusí být izometrie. Uvedeme příklady. Kompaktifikace $\iota : (0,1) \to [0,1]$ (kanonické vnoření) je zároveň zúplněním metrického prostoru $(0,1)$, a je tedy izometrie (srov. cv. 24 (a) kap. 5). Kompaktifikace $f : (0,1) \to S^1$, definovaná vztahem $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, není izometrie: např. pro body $t_1 = 1/3$, $t_2 = 2/3$ plat9 $d(t_1,t_2) = 1/3$ (vzdálenost v $(0,1)$), ale $d'(f(t_1), f(t_2)) = \sqrt{3}$ (vzdálenost na S^1 indukovaná z $\mathbf{R}^2$); tedy $d(t_1,t_2) \neq d'(f(t_1), f(t_2))$.

64. (a) Nechť $(g_\kappa)_{\kappa\in K}$ je systém všech spojitých funkcí, definovaných na úplně regulárním prostoru X a nabývajících hodnot v intervalu $[0,1]$. Ukažte, že zobrazení $c'_X : X \to [0,1]^K$, definované vztahem $c'_X(x) = (g_\kappa(x))_{\kappa\in K}$, je vnoření a že existuje homeomorfismus h topologického prostoru $\beta' X = \operatorname{cl} c'_X(X)$ na β-obal βX takový, že platí $h \circ c'_X = c_X$, kde c_X je Čechova–Stoneova kompaktifikace.

(b) Je-li X nekompaktní normální prostor prvního typu spočetnosti, pak βX není prvního typu spočetnosti. Ukažte.

(c) Je-li β-obal βX úplně regulárního prostoru X metrizovatelný, pak $\beta X = c_X(X)$, t.j. X je kompaktní.

Řešení. (a) Z úplné regularity X a z kompaktnosti součinu $[0,1]^K$ (Věta 6. odst. 7.2 str. 197) vyplývá, že zobrazení c'_X je vnoření (Lemma 6. odst. 6.5 str. 155.

Abychom ukázali, že existuje homeomorfismus h požadovaných vlastností, stačí ukázat, že libovolnou spojitou ohraničenou funkci $f : X \to \mathbf{R}$ lze jednoznačně rozšířit na spojitou funkci $\bar{f} : \beta' X \to \mathbf{R}$ (cv. 58).

Buď $f : X \to \mathbf{R}$ spojitá ohraničená funkce. Platí-li $f(X) \subset [0,1]$, pak funkci $\bar{f}$ zkonstruujeme stejně jako v důkazu Věty 26. odst. 7.7 str. 209. Nechť $f(X) \not\subset [0,1]$ a neboť $f(X) \subset [a,b]$ pro jistá $a, b \in \mathbf{R}$. Existuje homeomorfismus $\varphi : [a,b] \to [0,1]$; klademe $g = \varphi \circ f$ a dostaneme spojitou funkci g na X takovou, že $g(X) \subset [0,1]$. Existuje tedy jediná spojitá funkce $\bar{g} : \beta' X \to \mathbf{R}$, pro kterou $\bar{g} \circ c'_X = g$. Pak $\bar{f} = \varphi^{-1} \circ \bar{g}$ je spojitá funkce na $\beta' X$ a platí $\bar{f} \circ c'_X = \varphi^{-1} \circ \bar{g} \circ c'_X = f$, takže $\bar{f}$ je spojité rozšíření funkce f na $\beta' X$. Toto spojité rozšíření je ovšem jediné (Důsledek 1. (b) Věty 8. odst. 3.2 str. 35).

(b) Stačí dokázat, že $\beta' X$ není prvního typu spočetnosti. K tomu stačí najít bod $y \in \beta' X \setminus c'_X(X)$, ke kterému nekonverguje žádná posloupnost bodů množiny $c'_X(X)$ (Věta 9. (a) odst. 4.4 str. 93).

Předpokládejme, že $\beta' X$ je prvního typu spočetnosti. Jelikož X je nekompaktní, existuje bod $y \in \beta' X \setminus c'_X(X)$ a musí existovat posloupnost $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ v $c'_X(X)$ konvergující k bodu y (Věta 9. (c) odst. 4.4 str. 93). Jelikož tato posloupnost nemůže být konstantní (jinak by její limita ležela v $c'_X(X)$), můžeme předpokládat, že je tvořena navzájem různými body (Věta 1. odst. 4.2 str. 88, Věta 7. odst. 4.2 str. 91). Ke každému $i \in \mathbf{N}$ tedy existuje bod $x_i \in X$ tak, že

$$y_i = (g_\kappa(x_i))_{\kappa\in K},$$

kde g_κ probíhá všechny spojité funkce na X s hodnotami v $[0,1]$. Označme $\operatorname{pr}_\kappa : [0,1]^K \to [0,1]$ κ-projekce součinu $[0,1]^K$. Zúžení zobrazení pr_κ na podprostor $\beta' X$ je spojité zobrazení; posloupnost $(g_\kappa(x_i))_{i\in\mathbf{N}} = (\operatorname{pr}_\kappa(y_i))_{i\in\mathbf{N}}$ bodů intervalu $[0,1]$ tedy konverguje k bodu $\operatorname{pr}_\kappa(y) \in [0,1]$ (Věta 9. (c) odst. 4.4 str. 93).

Jinými slovy to znamená, že pro každou spojitou funkci $g : X \to [0,1]$ posloupnost $(g(x_i))_{i\in\mathbf{N}}$ v $[0,1]$ konverguje k nějakému bodu $z_g \in [0,1]$.

Posloupnost $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ ovšem nemůže být konvergentní. Kdyby totiž tato posloupnost konvergovala k bodu $x \in X$, pak by pro každé $\kappa \in K$ posloupnost $(g_\kappa(x_i))_{i\in\mathbf{N}}$ konvergovala k bodu $g_\kappa(x)$ a posloupnost $(y_i)_{i\in\mathbf{N}} = ((g_\kappa(x_i))_{\kappa\in K})_{i\in\mathbf{N}}$ bodů $c'_X(X)$ by konvergovala k bodu $(g_\kappa(x))_{\kappa\in K} \in c'_X(X)$. Posloupnost $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ však konverguje k bodu $y \notin c'_X(X)$, takže dostáváme spor, jelikož topologický prostor $\beta' X$ je Hausdorffův (Věta 7. odst. 4.2 str. 91).

Nyní ukážeme, že posloupnost $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ nemá žádnou konvergentní podposloupnost. Předpokládejme, že podposloupnost $(x_{i_k})_{k\in\mathbf{N}}$ konverguje k bodu $a \in X$. Pak pro každé $\kappa \in K$ posloupnost $(g_\kappa(x_{i_k}))_{k\in\mathbf{N}}$ konverguje k bodu $g_\kappa(a)$ v $[0,1]$ (Věta 6. odst. 5.3 str. 114). Jelikož $(g_\kappa(x_i))_{i\in\mathbf{N}}$ konverguje k z_{g_κ} a prostor $[0,1]$ je Hausdorffův, t.j. limita je určená jednoznačně, musí platit

$$g_\kappa(a) = z_{g_\kappa} = \lim_{k\to\infty} g_\kappa(x_{i_k}) = \lim_{i\to\infty} g_\kappa(x_i)$$

(Věta 7. odst. 4.2 str. 91, Věta 1. odst. 4.2 str. 88). Posloupnost $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ tedy konverguje k bodu $(g_\kappa(a))_{\kappa\in K} \in c'_X(X)$, což je spor, jelikož $y \notin c'_X(X)$.

Nyní ukážeme, že množina $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subset X$ je uzavřená. Posloupnost $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ nemá žádnou konvergentní podposloupnost a podle cv. 10 kap. 4 nemá žádný hromadný bod. Ke každému bodu $x \notin A$ tedy existuje jeho okolí U_x, ve kterém leží nejvýše konečně mnoho bodů posloupnosti $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$. Vybereme takové okolí U_x a označme M_x nejvýše konečnou množinu bodů posloupnosti $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ ležících v U_x. Z oddělitelnosti X vyplývá, že množina M_x je uzavřená (Věta 14. odst. 1.7 str. 8). Množina $U_x \backslash M_x$ je tedy otevřená a je okolím bodu x; jelikož tato množina neobsahuje body množiny A, množina A musí být uzavřená.

Pro každé $i \in \mathbf{N}$ klademe $u_i = x_{2i-1}$, $v_i = x_{2i}$. Dostáváme podposloupnosti $(u_i)_{i\in\mathbf{N}}$, $(v_i)_{i\in\mathbf{N}}$, které nejsou konvergentní a nemají konvergentní podposloupnosti. Podobně jaké výše odtud dostaneme, že množiny $B_1 = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}$, $B_2 = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ jsou uzavřené. Navíc platí $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, jelikož posloupnost $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ je tvořená navzájem různými body. Z normálnosti topologického prostoru X tedy vyplývá, že existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f|_{B_1} = 0$, $f|_{B_2} = 1$. Existuje ovšem číslo $z_f = \lim f(x_i)$ a podle Věty 1. odst. 4.2 str. 88 musí platit

$$\lim_{i\to\infty} f(u_i) = \lim_{i\to\infty} f(v_i) = z_f.$$

Ovšem funkce f je konstantní na B_1 a také na B_2, přičemž $\lim f(u_i) = 0$, $\lim f(v_i) = 1$, což je spor. Nemůže tedy existovat posloupnost $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$, konvergující k bodu y.

(c) Buď X úplně regulární prostor. Předpokládejme, že βX je metrizovatelný. Pak X je také metrizovatelný jako topologický prostor homeomorfní s metrizovatelným prostorem $c_X(X)$, X je tedy normální prostor prvního typu spočetnosti (Věta 7. odst. 6.2 str. 144, Věta 4. odst. 5.2 str. 113). Z (a) a (b) ovšem vyplývá, že X musí být kompaktní. Odtud $c_X(X) = \beta X$, což jsme chtěli dokázat.

Část 8

Souvislé a lokálně souvislé prostory

Topologický prostor, který lze vyjádřit jako sjednocení dvou nebo více neprázdných disjunktních otevřených množin, se nazývá nesouvislý. Příkladem nesouvislého topologického prostoru je sjednocení dvou neprázných otevřených koulí v Euklidově topologickém prostoru $\mathbf{R}^n$; jiným příkladem, který již méně koresponduje s naší intuitivní představou o "nesouvislosti", je libovolný diskrétní topologický prostor či reálná přímka $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií.

Topologický prostor, který není nesouvislý, se nazývá souvislý. Základním příkladem souvislého prostoru je libovolný interval $I \subset \mathbf{R}$ s přirozenou topologií.

Nesouvislost či souvislost topologického prostoru patří k jeho základním charakteristikám a je topologickým invariantem.

Pro ilustraci významu pojmu souvislosti uvedeme alespoň dvě známá tvrzení z klasické analýzy. Mějme dva disjunktní netriviální intervaly $[a, b]$, $[c, d] \subset \mathbf{R}$. Je-li $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ spojitá funkce, pak pro libovolné číslo $p \in \mathbf{R}$ ležící mezi čísly $f(a)$, $f(b)$, existuje bod $c \in [a, b]$ takový, že $f(c) = p$ (Darbouxův teorém); vezmeme-li však místo $[a, b]$ nesouvislý prostor $[a, b] \cup [c, d]$, výše uvedené tvrzení zřejmě neplatí. Podobně diferenciální rovnice $df/dt = 0$ má na intervalu $[a, b]$ pouze konstantní řešení, na nesouvislém topologickém prostoru $[a, b] \cup [c, d]$ má však také nekonstantní řešení.

Kromě pojmu souvislosti topologického prostoru diskutujeme v této kapitole důležitý pojem lokální souvislosti. V závěru kapitoly studujeme tzv. obloukově souvislé topologické prostory; m.j. ukazujeme, že každý obloukově souvislý topologický prostor je souvislý, obrácené tvrzení však neplatí.

8.1. Souvislé prostory

Topologický prostor X se nazývá *n*esouvislý, jestliže existují dvě neprázdné otevřené podmnožiny U, $V \subset X$ tak, že $U \cap V = \emptyset$ a $X = U \cup V$. Topologický prostor, který není souvislý, se nazývá *s*ouvislý.

Věta 1. *Topologický prostor X je souvislý tehdy a jen tehdy, když neobsahuje otevřenou a uzavřenou podmnožinu $A \subset X$ různou od $\emptyset$ a X.*

Důkaz. Tvrzení vyplývá z toho, že pro libovolnou podmnožinu $A \subset X$ platí $X = A \cup (X \backslash A)$.

Podmnožina topologického prostoru X se nazývá *souvislá*, je-li souvislá jako topologický podprostor X.

Věta 2. *K tomu, aby podmnožina A topologického prostoru X byla souvislá, je nutné a stačí, aby pro libovolné otevřené množiny U, $V \subset X$ takové, že $A \subset U \cup V$ a $A \cap U$, $A \cap V \neq \emptyset$, množina $A \cap U \cap V$ byla neprázdná.*

Důkaz. 1. Předpokládejme, že A je souvislá. Nechť U, $V \subset X$ jsou otevřené množiny takové, že $A \subset U \cup V$ a $A \cap U$, $A \cap V \neq \emptyset$. Pak $A = A \cap (U \cup V) = (A \cap U) \cup (A \cap V)$. Jelikož A je souvislý topologický prostor, otevřené množiny $A \cap U$, $A \cap V$ nemohou být disjunktní; musí tedy platit $A \cap U \cap A \cap V = A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

2. Zvolme dvě neprázdné otevřené množiny B, $C \subset A$ takové, že $B \cup C = A$. Existují otevřené množiny U, $V \subset X$ takové, že $B = A \cap U$ a $C = A \cap V$. Evidentně $A \subset U \cup V$ a $A \cap V \neq \emptyset$. Podle předpokladu tedy $A \cap U \cap V = A \cap U \cap A \cap V = B \cap C \neq \emptyset$, takže B, C nemohou být disjunktní.

Věta 3. (a) *Buď A souvislá množina v topologickém prostoru X. Množina $B \subset X$ taková, že $A \subset B \subset \operatorname{cl} A$, je souvislá.*

(b) *Sjednocení systému souvislých množin, jehož průnik je neprázdný, je souvislá množina.*

Důkaz. (a) Předpokládejte, že množina B není souvislá. Pak existují neprázdné disjunktní otevřené množiny U, $V \subset B$ tak, že $B = U \cup V$. Množiny $A \cap U$, $A \cap V$ jsou otevřené v A a platí $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A \cap (U \cup V) = A \cap B = A$. Ovšem $A \cap U$, $A \cap V$ jsou disjunktní množiny a množina A je souvislá, takže jedna z těchto množin musí být prázdná. Nechť např. $A \cap U = \emptyset$. Pak $A = A \cap V$, t.j. $A \subset V$ a tedy $\operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} V$. Ovšem $U \cap V = \emptyset$, takže $U \cap \operatorname{cl} V = \emptyset$ a tedy $U \cap B \subset U \cap \operatorname{cl} A \subset U \cap \operatorname{cl} V = \emptyset$. To je spor s předpokladem, že množina B není souvislá.

(b) Buď $(A_\iota)_{\iota \in I}$ systém souvislých podmnožin topologického prostoru X takový, že $\bigcap A_\iota \neq \emptyset$. Chceme ukázat, že množina $A = \bigcup A_\iota$ je souvislá. Předpokládejme opak. Pak v X existují otevřené množiny U, V takové, že $A \cap U$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \subset U \cup V$ a $A \cap U \cap V = \emptyset$ (Věta 2. odst. 8.1 str. 250). Zvolme bod $x \in \bigcap A_\iota$. x patří některé z množin U, V. Nechť např. $x \in U$. Na druhé straně pro jistý index $\kappa \in I$ platí $V \cap A_\kappa \neq \emptyset$. Pak ovšem $A_\kappa \subset U \cup V$, $A_\kappa \cap U \cap V \subset A \cap U \cap V = \emptyset$. Přitom množina $U \cap A_\kappa$ obsahuje x a je tedy neprázdná. Celkově dostáváme $(A_\kappa \cap U) \cap (A_\kappa \cap V) = \emptyset$ a tedy množina A_κ nemůže být souvislá (Věta 2. odst. 8.1 str. 250). Dostáváme spor, který znamená, že množina A je souvislá.

Důsledek. (a) Uzávěr souvislé množiny je souvislá množina.

(b) Existuje-li v topologickém prostoru X hustá souvislá množina, pak X je souvislý.

Důkaz. Tvrzení přímo vyplývají z Věty 3. (a).

Buď X topologický prostor, $x \in X$ bod. Z Věty 3. (b) vyplývá, že sjednocení všech souvislých podmnožin množiny X obsahujících bod x je souvislá množina. Tato souvislá množina se nazývá *souvislá komponenta bodu* x. Je-li topologický prostor X souvislý, je souvislou komponentou libovolného ze svých bodů.

Věta 4. *Souvislá komponenta bodu x topologického prostoru X je uzavřená množina.*

Důkaz. Podle definice souvislá komponenta A bodu x je největší souvislá množina v X obsahující bod x. Ovšem $\operatorname{cl} A$ je také souvislá množina (Důsledek (a) Věty 3. odst. 8.1 str. 250) a $A \subset \operatorname{cl} A$, takže musí platit $A = \operatorname{cl} A$.

Věta 5. *Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení topologických prostorů. Obraz $f(A)$ souvislé množiny $A \subset X$ je souvislá množina.*

Důkaz. Ukážeme, že není-li $f(A)$ souvislá množina, A také není souvislá. Předpokládejme, že $f(A) = U \cup V$, kde U, $V \subset f(A)$ jsou jisté neprázdné dusjunktní otevřené množiny. Existují tedy otevřené množiny U', $V' \subset Y$ tak, že $U = f(A) \cap U'$, $V = f(A) \cap V'$. Klademe $U'' = A \cap f^{-1}(U')$, $V'' = A \cap f^{-1}(V')$. Množiny U'', $V'' \subset A$ jsou otevřené. Jelikož $f(U'') = f(A \cap f^{-1}(U')) = f(A) \cap U' = U$, $f(V'') = V$, množiny U'', V'' jsou neprázdné. Dále $U'' \cup V'' \subset A$; ukážeme-li, že $U'' \cup V'' \supset A$, bude platit $U'' \cup V'' = A$ a tedy množina A nebude souvislá.

Máme $U'' \cup V'' = (A \cap f^{-1}(U')) \cup (A \cap f^{-1}(V')) = A \cap (f^{-1}(U') \cup f^{-1}(V')) = A \cap f^{-1}(U' \cup V') \supset A \cap f^{-1}(U \cup V) = A \cap f^{-1}(f(A)) = A$, t.j. $A \subset U'' \cup V''$, což jsme chtěli dokázat.

Důsledek. Faktorový prostor souvislého topologického prostoru je souvislý.

Důkaz. Tvrzení vyplývá ze spojitosti faktorové projekce a z Věty 5. odst. 8.1 str. 251.

Věta 6. *Buď X topologický prostor, $\mathscr{R}$ ekvivalence na X, $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ faktorová projekce. Nechť $A \subset X/\mathscr{R}$ je souvislá otevřená nebo uzavřená množina taková, že každá třída ekvivalence $\mathscr{R}$ ležící v $\pi^{-1}(A)$ je souvislá podmnožina X. Pak množina $\pi^{-1}(A)$ je souvislá.*

Důkaz. 1. Předpokládejme, že A je otevřená a že $\pi^{-1}(A)$ není souvislá. Pak existují neprázdné disjunktní otevřené množiny U, $V \subset \pi^{-1}(A)$ takové, že $U \cup V = \pi^{-1}(A)$. Množiny U, V jsou otevřené v X, jelikož množina $\pi^{-1}(A)$ je otevřená (Věta 4.(c) odst. 3.1 str. 32).

Buď $x \in \pi^{-1}(A)$ libovolný bod. Platí $[x] \subset \pi^{-1}(A)$, kde $[x]$ je třída prvku x, t.j. $[x] = [x] \cap (U \cup V) = ([x] \cap U) \cup ([x] \cap V)$, přičemž $([x] \cap U) \cap ([x] \cap V) \subset U \cap V = \emptyset$. Ovšem množina $[x]$ je podle předpokladu souvislá, musí tedy být jedna z množin $[x] \cap U$, $[x] \cap V$ prázdná. Platí-li tedy, že $x \in U$, zároveň platí $[x] \subset U$, což znamená, že $U = \pi^{-1}(\pi(U))$. Analogicky $V = \pi^{-1}(\pi(V))$. Z definice faktorové topologie tedy vyplývá, že množiny $\pi(U)$, $\pi(V) \subset X/\mathscr{R}$ jsou otevřené. Tyto množiny jsou ovšem disjunktní, jelikož U, V jsou disjunktní. Nakonec $\pi(U) \cup \pi(V) = A$, takže dostáváme spor, jelikož množina A je souvislá. Ukázali jsme tedy, že množina $\pi^{-1}(A)$ musí být souvislá.

2. Předpokládejme, že A je uzavřená a že $\pi^{-1}(A)$ není souvislá. Pak existují ne-prázdné disjunktní otevřené množiny U, $V \subset \pi^{-1}(A)$ takové, že $U \cup V = \pi^{-1}(A)$. Pro jisté otevřené množiny U', $V' \subset X$ platí $U = \pi^{-1}(A) \cap U'$, $V = \pi^{-1}(A) \cap V'$. Klademe

$$U'' = U' \cup \pi^{-1}(X/\mathscr{R} \setminus A), V'' = V' \cup \pi^{-1}(X/\mathscr{R} \setminus A).$$

Množiny U'', V'' jsou zřejmě otevřené a z jejich definice ihned dostaneme, že

$$U = \pi^{-1}(A) \cap U'', \quad V = \pi^{-1}(A) \cap V''.$$

Z podmínek $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = \pi^{-1}(A)$ dále vyvodíme, že platí

$$\pi^{-1}(A) \cap U'' \cap V'' = \emptyset, \quad \pi^{-1}(A) \subset U'' \cup V''. \tag{1}$$

Ukážeme, že množiny U'', V'' splňují podmínky

$$U'' = \pi^{-1}(\pi(U'')), \quad V'' = \pi^{-1}(\pi(V'')). \tag{2}$$

Nechť $x \in U''$. Platí-li $x \in \pi^{-1}(X/\mathscr{R}\setminus A)$, pak $[x] \subset \pi^{-1}(X/\mathscr{R}\setminus A) \subset U''$. Nechť $x \notin \pi^{-1}(X/\mathscr{R}\setminus A)$. Pak $\pi(x) = [x] \in A$ a tedy $x \in \pi^{-1}(A)$, t.j. $[x] \subset \pi^{-1}(A)$. Množina $[x]$ je ovšem podle předpokladu souvislá. Jelikož $[x] = [x] \cap (U'' \cup V'') = ([x] \cap U'') \cup ([x] \cap V'')$ a $[x] \cap U'' \neq \emptyset$, musí platit $[x] \cap V'' = \emptyset$, což dokazuje vztah $U'' = \pi^{-1}(\pi(U''))$. Druhá z podmínek (2) se dokáže stejně.

Z definice faktorové topologie nyní vyplývá, že množiny $\pi(U'')$, $\pi(V'') \subset X/\mathscr{R}$ jsou otevřené. Podmínka (1) tedy znamená, že $\pi(U'') \cap A$, $\pi(V'') \cap A$ jsou disjunktní otevřené podmnožiny A. Přitom pro jejich sjednocení dostáváme $(\pi(U'') \cap A) \cup (\pi(V'') \cap A) = A$ což je spor s předpokladem, že množina A je souvislá. To dokazuje, že množina $\pi^{-1}(A)$ nemůže být nesouvislá.

Důsledek 1. Buď X topologický prostor, $\mathscr{R}$ ekvivalence na X. Předpokládejme, že faktorový prostor $X/\mathscr{R}$ je souvislý a každá třída ekvivalence $\mathscr{R}$ je souvislá podmnožina X. Pak topologický prostor X je souvislý.

Důkaz. Ve Větě 6. vezmeme $A = X/\mathscr{R}$.

*S*ouvislou komponentou topologického prostoru X rozumíme souvislou komponentu libovolného bodu $x \in X$. Topologický prostor X se nazývá *úplně* nesouvislý, jestliže pro každé $x \in X$ je souvislá komponenta bodu x rovna jednoprvkové množině $\{x\}$.

Z Věty 3. (b) odst. 8.1 str. 250 vyplývá, že relace "$x \sim y$, jestliže existuje souvislá množina A obsahující body x, y" je ekvivalence na topologickém prostoru X a že třídy této ekvivalence jsou totožné se souvislými komponentami topologického prostoru X.

Důsledek 2. Buď X topologický prostor. Faktorový prostor $X/\sim$ podle ekvivalence "$x \sim y$, jestliže existuje souvislá množina $A \subset X$ taková, že $x, y \in A$" je úplně nesouvislý.

Důkaz. Z Věty 4. odst. 8.1 str. 250 vyplývá, že stačí ukázat, že každá uzavřená množina $A \subset X/\sim$ obsahující alespoň dva různé body, je nesouvislá.

Nechť $\pi : X \to X/\sim$ je faktorová projekce. Kdyby uzavřená množina $A \subset X/\sim$ obsahující dva různé body $[x]$, $[y]$ byla souvislá, její vzor $\pi^{-1}(A) \subset X$ by byl souvislá množina v X (Věta 6. odst. 8.1 str. 251); množina $\pi^{-1}(A)$ ovšem není souvislá, jelikož obsahuje dvě různé souvislé komponenty $[x]$, $[y]$ topologického prostoru X.

Věta 7. *Množina reálných čísel* $\mathbf{R}$ *s přirozenou topologií je souvislý topologický prostor.*

Důkaz. Předpokládejme, že existují otevřené množiny $U, V \subset \mathbf{R}$ takové, že $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = \mathbf{R}$. Ukážeme, že buď $U = \emptyset$ nebo $V = \emptyset$. Předpokládejme, že U, $V \neq \emptyset$. Zvolme $x \in U$, $y \in V$, $x < y$. Pak množina $U \cap [x, y]$ je ohraničená, existuje tedy číslo $z = \sup(U \cap [x, y])$. Nechť $z \in A$. Pak existuje interval $[z, z+h]$, kde $h > 0$, takový, že $[z, z+h] \subset [x, y]$ a zároveň $[z, z+h] \subset U$, neboť množina U je otevřená. Odtud $[z, z+h] \subset A \cap [x, y]$, což je spor s předpokladem, že z je supremum množiny $A \cap [x, y]$. Platí tedy, že $z \notin U$. Ovšem $\mathbf{R} = U \cup V$ a $U \cap V = \emptyset$, takže $z \in V$. Existuje tedy $h > 0$ takové, že $[z-h, z] \subset [x, y]$, a z otevřenosti množiny V plyne, že lze vzít $[z-h, z] \subset V$. Pak ovšem $[z-h, z] \subset V \cap [x, y]$. Jelikož z je supremum množiny $A \cap [x, y]$, interval $[z-h, z]$ obsahuje nějaký bod množiny U, což je spor s předpokladem, že $U \cap V = \emptyset$. Musí tedy platit buď $U = \emptyset$ nebo $V = \emptyset$.

Důsledek 1. Libovolný interval v $\mathbf{R}$ je souvislá množina.

Důkaz. Otevřený interval (a, b) je homeomorfní s $\mathbf{R}$, je tedy souvislý podle Věty 5. odst. 8.1 str. 251. Uzavřený interval $[a, b]$ je uzávěrem otevřeného intervalu, je tedy souvislý podle Důsledku (a) Věty 3. odst. 8.1 str. 250. Interval $[a, b)$ lze napsat ve tvaru $[a, b) = [a, c] \cup (a, b)$ pro jisté $c \in (a, b)$; tento interval je tedy souvislý podle Věty 3. (b) odst. 8.1 str. 250.

Důsledek 2. Euklidův topologický prostor $\mathbf{R}^n$ je souvislý.

Důkaz. Pro každé $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$, označme p_x přímku v $\mathbf{R}^n$ jdoucí počátkem $0 \in \mathbf{R}^n$ a bodem x. Pak

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} p_x, \qquad \bigcap_{x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} p_x = \{0\} \neq \emptyset.$$

Přitom pro každé $x \neq 0$ je topologický podprostor $p_x \subset \mathbf{R}^n$ homeomorfní s $\mathbf{R}$. Tvrzení tedy vyplývá z Věty 3. (b) odst. 8.1 str. 250.

Věta 8. *Buď $(x_\iota)_{\iota \in I}$ systém neprázdných topologických prostorů.*

(a) *Součin $\prod X_\iota$ je souvislý tehdy a jen tehdy, když každý z topologických prostorů X_ι je souvislý.*

(b) *Souvislá komponenta bodu $x \in \prod X_\iota$, $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$, je součinem souvislých komponent bodů $x_\iota \in X_\iota$.*

Důkaz. 1. Označme $X = \prod X_\iota$ a předpokládejme, že X je souvislý topologický prostor. Jelikož pro každé ι je ι-projekce $\mathrm{pr}_\iota : X \to X_\iota$ spojité surjektivní zobrazení, topologický prostor X_ι musí být souvislý podle Věty 5. odst. 8.1 str. 251. Tím je dokázána první část tvrzení (a).

2. Při důkazu opačného tvrzení postupujeme v několika krocích. Ukážeme nejdříve, že součin $X \times Y$ dvou souvislých topologických prostorů X, Y je souvislý topologický prostor. Pro libovolný bod $(x, y) \in X \times Y$ je topologický prostor X (resp. Y) homeomorfní s $X \times \{y\}$ (resp. $\{x\} \times Y$) (Věta 9. (b) odst. 3.3 str. 36). Topologické prostory $X \times \{y\}$, $\{x\} \times Y$ musí tedy být souvislé (Věta 5. odst. 8.1 str. 251). Dále platí $(X \times \{y\}) \cap (\{x\} \times Y) = \{(x, y)\} \neq \emptyset$, takže topologický prostor $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$ musí být souvislý (Věta 3. (b) odst. 8.1 str. 250). Ovšem

$$\bigcap_{x \in X} ((X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)) = X \times \{y\} \neq \emptyset,$$

takže na základě analogické úvahy dostáváme, že topologický prostor

$$\bigcup_{x \in X} ((X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)) = X \times Y$$

musí být souvislý.

Z výše dokázaného tvrzení a z Věty 9. (a) odst. 3.3 str. 36 ihned vyplývá, že pro libovolné souvislé topologické prostory $X_1, X_2, \ldots, X_k$ je součin $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ souvislý topologický prostor.

Nakonec uvažujme systém neprázdných souvislých topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota \in I}$, kde I je libovolná indexová množina, a položme $X = \prod X_\iota$. Zvolme pevně bod $z \in X$, $z = (z_\iota)_{\iota \in I}$. Pro libovolnou konečnou množinu $J \subset I$, $J = \{\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_k\}$, označme X_J topologický podprostor X tvořený všemi body $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$ takovými, že $x_\iota = z_\iota$ pro každé $\iota \neq \iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_k$. Topologický prostor $X_J \subset X$ je homeomorfní se součinem $X_{\iota_1} \times X_{\iota_2} \times \cdots \times X_{\iota_k}$ (Věta 9. (b) odst. 3.3 str. 36). Z výše dokázaného tvrzení tedy

vyplývá, že X_J je souvislý topologický prostor. Jelikož každý z topologických prostorů X_J obsahuje bod z, t.j. $\bigcap_J X_J \neq \emptyset$, abychom ukázali, že X je souvislý, stačí dokázat, že $\mathrm{cl}(\bigcup_J X_J) = X$ (Věta
3., Věta 3. (a) odst. 8.1 str. 250).

Buď $x \in X$ libovolný bod, $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$. Ukážeme, že pro libovolný prvek U báze topologie součinu obsahující bod x platí

$$U \cap \left(\bigcup_J X_J \right) \neq \emptyset.$$

U má tvar $U = \prod U_\iota$, kde každá z množin $U_\iota \subset X_\iota$ je otevřená a $U_\iota = X_\iota$ pro všechna $\iota \in I \backslash J$, kde $J = \{\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_k\}$ je jistá konečná množina. Položme $y_\iota = x_\iota$ pro $\iota = \kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_k$, $y_\iota = z_\iota$ pro ostatní indexy ι, $y = (y_\iota)_{\iota \in I}$. Jelikož $y \in X_J$, bod y patří množině $\bigcup_J X_J$. Dále $y \in U$, jelikož $x \in U$ a $y_\iota = x_\iota \in U_\iota$ pro $\iota = \kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_k$. Skutečně tedy $U \cap (\bigcup_J X_J) \neq \emptyset$. Znamená to ovšem, že bod x patří množině $\mathrm{cl}(\bigcup_J X_J)$ a z libovolnosti x vyplývá, že $\mathrm{cl}(\bigcup_J X_J) = X$, což jsme chtěli dokázat.

Tím je ukončen důkaz části (a) Věty 8..

3. Dokážeme tvrzení (b). Buď $x \in \prod X_\iota$ bod, $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$, buď A souvislá množina obsahující x. Pak $\mathrm{pr}_\iota(A) \subset X_\iota$ je souvislá množina (Věta 5. odst. 8.1 str. 251) a $x_\iota \in \mathrm{pr}_\iota(A)$. Ovšem $A \subset \prod \mathrm{pr}_\iota(A)$, přičemž podle již dokázaného tvrzení (a) $\prod \mathrm{pr}_\iota(A)$ je souvislá množina. Je-li tedy A souvislá komponenta bodu x, musí platit $A = \prod \mathrm{pr}_\iota(A)$. Z tohoto vztahu ovšem vyplývá, že $\mathrm{pr}_\iota(A) \subset X_\iota$ je největší souvislá množina obsahující x_ι, t.j. souvislá komponenta bodu x.

8.2. Lokálně souvislé prostory

Buď X topologický prostor. *S*ouvislou komponentou množiny $A \subset X$ rozumíme souvislou komponentu libovolného bodu $x \in A$ v topologickém podprostoru A topologického prostoru X.

Topologický prostor se nazývá *l*okálně souvislý, má-li každý jeho bod lokální bázi tvořenou souvislými množinami.

Věta 9. *K tomu, aby topologický prostor X byl lokálně souvislý je nutné a stačí, aby pro libovolnou otevřenou množinu $U \subset X$ každá souvislá komponenta množiny U byla otevřená množina v X.*

Důkaz. Předpokládejme, že X je lokálně souvislý. Buď $U \subset X$ otevřená množina, V její souvislá komponenta a $x \in V$ bod. Podle předpokladu existuje souvislé okolí W bodu x tak, že $W \subset U$ a z definice souvislé komponenty vyplývá, že $W \subset V$. V je tedy otevřená množina v X.

Obráceně, předpokládejme, že pro libovolnou otevřenou množinu $U \subset X$ každá souvislá komponenta množiny U v X je otevřená v X. Buď $x \in X$ bod, W jeho okolí. Souvislá komponenta množiny W v X obsahující x je podle předpokladu otevřená v X. Systém všech souvislých okolí bodu x je tedy lokální báze topologie v bodě x.

Důsledek. Každá souvislá komponenta lokálně souvislého topologického prostoru X je otevřená podmnožina X.

Důkaz. Ve Větě 9. odst. 8.2 str. 254 vezmeme $U = X$.

Z Věty 4. odst. 8.1 str. 250 a Věty 9. odst. 8.2 str. 254 vyplývá, že souvislé komponenty lokálně souvislého topologického prostoru jsou otevřené a uzavřené množiny.

Homeomorfní obraz lokálně souvislého prostoru je lokálně souvislý prostor. Spojitý obraz lokálně souvislého prostoru již nemusí být lokálně souvislý (př. (7) odst. 8.4 str. 259). Následující tvrzení však ukazuje, že je tomu tak v případě faktorové projekce; jeho důkaz neprochází pro obecná spojitá surjektivní zobrazení.

Věta 10. *Faktorový prostor lokálně souvislého topologického prostoru je lokálně souvislý.*

Důkaz. Buď X lokálně souvislý topologický prostor, $\mathscr{R}$ ekvivalence na X, $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ faktorová projekce. Buď $U \subset X/\mathscr{R}$ otevřená množina, A souvislá komponenta množiny U. Buď $x \in \pi^{-1}(A)$ libovolný bod, V_x souvislá komponenta bodu x v $\pi^{-1}(U)$. Jelikož $\pi^{-1}(U)$ je otevřená množina, množina V_x je také otevřená (Věta 9. odst. 8.2 str. 254). Množina $\pi(V_x) \subset U$ je souvislá (Věta 5. odst. 8.1 str. 251) a obsahuje bod $\pi(x)$. Podle definice souvislé komponenty tedy $\pi(V_x) \subset A$ odkud $V_x \subset \pi^{-1}(A)$, t.j. $\pi^{-1}(A) = \bigcup V_x$ (sjednocení pro $x \in \pi^{-1}(A)$). Znamená to ovšem, že $\pi^{-1}(A)$ je otevřená množina v X a z definice faktorové topologie vyplývá, že množina $A \subset X/\mathscr{R}$ je otevřená. Podle Věty 9. odst. 8.2 str. 254 je tedy faktorový prostor $X/\mathscr{R}$ lokálně souvislý.

Věta 11. *Buď $(X_\iota)_{\iota \in I}$ systém topologických prostorů. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *Součin $\prod X_\iota$ je lokálně souvislý topologický prostor.*

(2) *Pro každé $\iota \in I$ je topologický prostor X_ι lokálně souvislý a existuje konečná množina $J \subset I$ tak, že pro každé $\kappa \in I \setminus J$ je topologický prostor X_κ souvislý.*

Důkaz. 1. Předpokládejme, že je splněna podmínka (1). Buď $X = \prod X_\iota$. Nechť $x \in X$ je libovolný bod, $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$. Nechť V je souvislé okolí bodu x. Jelikož V obsahuje prvek báze součinu, existuje konečná množina $J \subset I$ tak, že $\mathrm{pr}_\iota(V) = X_\iota$ pro každé $\iota \in I \setminus J$. Ze spojitosti ι-projekce pr_ι tedy vyplývá, že pro každé $\iota \in I \setminus J$ je X_ι souvislý topologický prostor.

Dále je třeba dokázat, že každý z topologických prostorů X_ι je lokálně souvislý. Zvolme $\iota \in I$ a uvažujme ekvivalenci $\sim$ na X asociovanou se zobrazením pr_ι. Dostáváme komutativní diagram Obr. 1

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\mathrm{pr}_\iota"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X_\iota \\ & X/\sim \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

ve kterém π je faktorová projekce a g je zobrazení, definované kanonickým rozkladem $\mathrm{pr}_\iota = g \circ \pi$ zobrazení pr_ι. Zobrazení pr_ι je ovšem otevřené, takže g je homeomorfismus (Věta 18. odst. 3.5 str. 41) a topologický prostor X_ι musí být souvislý podle Věty 10. odst. 8.2 str. 255.

2. Předpokládejme, že je splněna podmínka (2). Nechť $J \subset I$ je konečná množina taková, že pro $\iota \in J$ topologický prostor X_ι není souvislý. Nechť $x \in X$ je libovolný bod, $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$, nechť $U = \prod U_\iota$ je prvek báze topologie součinu v bodě x. Nechť $K \subset I$ je konečná množina indexů ι, pro které $U_\iota \neq X_\iota$. Klademe

$$V_\iota = \begin{cases} X_\iota, & \iota \notin J \cup K, \\ W_\iota, & \iota \in J \cup K, \end{cases}$$

kde W_ι je nějaké souvislé okolí bodu $x_\iota \in X_\iota$ obsažené v U_ι; podle předpokladu takové okolí W_ι existuje. Dále klademe $V = \prod V_\iota$. V je souvislé okolí bodu x (Věta 8. odst. 8.1 str. 253) takové, že $V \subset U$.

8.3. Obloukově souvislé prostory

*O*bloukem v topologickém prostoru X spojujícím body x, $y \in X$ rozumíme spojité zobrazení f uzavřeného intervalu $[a, b] \subset \mathbf{R}$ do X takové, že $f(a) = x$, $f(b) = y$. Topologický prostor X se nazývá *o*bloukově souvislý, jestliže každé dva body x, $y \in X$ lze spojit obloukem, t.j. existuje oblouk $f : [a, b] \to X$ takový, že $f(a) = x$, $f(b) = y$.

Věta 12. *Obloukově souvislý prostor je souvislý.*

Důkaz. Buď X obloukově souvislý prostor. Předpokládejme, že X není souvislý. Existují tedy otevřené množiny U, $V \subset X$ takové, že $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$. Buď $f : [a, b] \to X$ libovolný oblouk. Jelikož interval $[a, b]$ je souvislý (Důsledek 1. Věty 7. odst. 8.2 str. 252), množina $f([a, b]) \subset X$ je souvislá (Věta 5. odst. 8.1 str. 251). Zobrazení $f : [a, b] \to f([a, b]) \subset X$ vznikající zúžením oboru hodnot, je spojité. Dále $U \cup V = X$, takže $f([a, b]) = (f([a, b]) \cap U) \cup (f([a, b]) \cap V)$ a přitom $f([a, b]) \cap U \cap f([a, b]) \cap V = \emptyset$. Ze souvislosti topologického prostoru $f([a, b])$ tedy vyplývá, že jedna z množin $f([a, b]) \cap U$, $f([a, b]) \cap V$ musí být prázdná. Znamená to tedy, že množina $f([a, b])$ leží buď v U nebo ve V a tedy žádné dva body $x \in U$, $y \in V$ nelze spojit obloukem. To je ovšem spor s předpokladem, že X je obloukově souvislý. Tento spor ukazuje, že X musí být souvislý.

Podmnožina topologického prostoru X se nazývá *o*bloukově souvislá, je-li obloukově souvislá jako topologický podprostor X.

Věta 13. *Sjednocení systému obloukově souvislých množin, jehož průnik je neprázdný, je obloukově souvislá množina.*

Důkaz. Buď $(A_\iota)_{\iota \in I}$ systém obloukově souvislých podmnožin topologického prostoru X takový, že $\bigcap A_\iota \neq \emptyset$. Buďte x, $y \in \bigcup A_\iota$, $z \in \bigcap A_\iota$ libovolné body. Pak body x, z a body y, z lze spojit obloukem v některé z množin A_ι; z těchto dvou oblouků již snadno zkonstruujeme oblouk v podprostoru $\bigcup A_\iota \subset X$ spojující body x, y.

Věta 14. *Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení topologických prostorů. Obraz $f(A)$ obloukově souvislé množiny $A \subset X$ je obloukově souvislá množina.*

Důkaz. Buďte y_1, $y_2 \in f(A)$ libovolné body. Existují body x_1, $x_2 \in A$ tak, že $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, a oblouk $\zeta : [a, b] \to A$ spojující body x_1, x_2. Klademe $\zeta' = f \circ \zeta$.

Důsledek. Faktorový prostor obloukově souvislého topologického prostoru je obloukově souvislý topologický prostor.

Důkaz. Tvrzení vyplývá ze spojitosti faktorové projekce a z Věty 14. odst. 8.3 str. 256.

Z Věty 13. odst. 8.3 str. 256 vyplývá, že sjednocení všech obloukově souvislých podmnožin topologického prostoru X, obsahujících bod $x \in X$, je obloukově souvislá množina. Tato obloukově souvislá množina se nazývá *o*bloukově souvislá komponenta bodu x. Je zřejmé, že každá obloukově souvislá podmnožina topologického prostoru X leží v obloukově souvislé komponentě nějakého bodu $x \in X$.

Topologický prostor X se nazývá *l*okálně obloukově souvislý, má-li každý jeho bod lokální bázi tvořenou obloukově souvislými množinami.

*O*bloukově souvislou komponentou množiny $A \subset X$ rozumíme obloukově souvislou komponentu libovolného bodu $x \in A$ v topologickém podprostoru A topologického prostoru X.

Věta 15. *K tomu, aby topologický prostor X byl lokálně obloukově souvislý je nutné a stačí, aby pro libovolnou otevřenou množinu $U \subset X$ každá obloukově souvislá komponenta množiny U byla otevřená množina v X.*

Důkaz. Věta 15. se dokazuje podobně jako Věta 9. odst. 8.2 str. 254.

Věta 16. *Buď X topologický prostor, $A \subset X$ podmožina.*

(a) *Každá obloukově souvislá komponenta množiny A leží v některé souvislé komponentě množiny A.*

(b) *Je-li A lokálně obloukově souvislá, pak každá souvislá komponenta množiny A leží v nějaké obloukově souvislé komponentě množiny A.*

Důkaz. (a) Buď $x \in A$ bod, B_x (resp. C_x) obloukově souvislá (resp. souvislá) komponenta množiny A obsahující x. Jelikož množina B_x je souvislá (Věta 12. odst. 8.3 str. 256), platí $B_x \subset C_x$.

(b) Předpokládejte, že A je lokálně obloukově souvislá množina. Buď $x \in A$ bod, B_x (resp. C_x) obloukově souvislá (resp. souvislá) komponenta množiny A obsahující x. Chceme dokázat, že $C_x \subset B_x$. Předpokládejme opak, t.j. $C_x \not\subset B_x$. Pak existuje bod $y \in C_x$, $y \notin B_x$; označme B_y obloukově souvislou komponentu množiny A obsahující tento bod. Zřejmě B_x, $B_y \subset C_x$ (Věta 12. odst. 8.3 str. 256). Klademe

$$Q = \bigcup_{y \in C_x \setminus B_x} B_y.$$

Množina Q je otevřená. Zřejmě $C_x = B_x \cup (C_x \setminus B_x) = C_x \cup Q$. C_x je tedy sjednocením dvou disjunktích otevřených množin. Dostáváme spor se souvislostí množiny C_x, což znamená, že musí platit $C_x \subset B_x$ a důkaz je ukončen.

Důsledek. Je-li topologický prostor X lokálně obloukově souvislý, pak pro každé $x \in X$ obloukově souvislá komponenta bodu x je totožná se souvislou komponentou bodu x.

Důkaz. Ve Větě 16. vezmeme $A = X$.

8.4. Příklady

(1) Triviální topologický prostor je souvislý, lokálně souvislý, obloukově souvislý.

(2) Nechť X je množina obsahující alespoň dva různé prvky. Pak X s diskrétní topologií je nesouvislý, lokálně souvislý prostor. Souvislá komponenta bodu $x \in X$ je množina $\{x\}$; každá souvislá komponenta topologického prostoru X je tedy zároveň otevřená i uzavřená. Topologický prostor X je úplně nesouvislý.

(3) Množina reálných čísel $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií je nesouvislý topologický prostor, neboť každý prvek báze je množina, která je zároveň otevřená i uzavřená. Tento topologický prostor je úplně nesouvislý: souvislá komponenta bodu x je množina $\{x\}$. Souvislá komponenta bodu x tedy není otevřená množina. Odtud vyplývá, že $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií není lokálně souvislý prostor (Věta 9. odst. 8.2 str. 254).

(4) Uvedeme příklad topologického prostoru, který je souvislý, ale není lokálně souvislý ani obloukově souvislý.

Označme $M = \{q \in \mathbf{R} \mid q = 1/n,\, n \in \mathbf{N}\}$, $P = (0,1) \in \mathbf{R}^2$ a uvažujme množinu $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup (M \times [0,1]) \cup \{P\}$ s topologií podprostoru Euklidova prostoru $\mathbf{R}^2$.

Ukážeme, že X je souvislý. Množina $X \backslash \{P\}$ je zřejmě obloukově souvislá a tedy souvislá (Věta 12. odst. 8.3 str. 256). Je tedy souvislá také množina $\mathrm{cl}(X \backslash \{P\})$ (Věta 3. (a0 odst. 8.1 str. 250); tato množina je ovšem totožná s X.

Ukážeme, že X není lokálně souvislý. Označme B otevřenou kouli v Euklidově metrice na $\mathbf{R}^2$ se středem v bodě P a poloměrem $r = 1/4$. Pak $X \cap B$ je otevřená množina v X. Souvislá komponenta množiny $X \cap B$ obsahující bod P je množina $\{P\}$, která není otevřená v X. X tedy nemůže být lokálně souvislý (Věta 9. odst. 8.2 str. 254).

Ukážeme, že X není obloukově souvislý. Předpokládejme opak a uvažujme oblouk $f : [0,1] \to X$ takový, že $f(0) = P$. Vyšetříme množinu $f^{-1}(P)$. Zobrazení f je spojité a množina $\{P\} \subset X$ je uzavřená, jelikož X je Hausdorffův, množina $f^{-1}(P) \subset [0,1]$ je tedy také uzavřená. Ukážeme, že tato množina je rovněž otevřená. Uvažujme opět otevřenou kouli B. Ze spojitosti f vyplývá, že ke každému bodu $x \in f^{-1}(P)$ existuje otevřený interval I_x se středem v x takový, že $f(I_x) \subset B \cap X$. Množina I_x je souvislá (Důsledek 1. Věty 7. odst. 8.1 str. 252), tedy také $f(I_x)$ je souvislá (Věta 5. odst. 8.1 str. 251). Odsud vyplývá, že $f(I_x) = P$ pro každé $x \in f^{-1}(P)$, t.j. že $I_x \subset f^{-1}(P)$. Tím je dokázána otevřenost množiny $f^{-1}(P)$. Tato množina je však zároveň uzavřená; jelikož je neprázdná a prostor $[0,1]$ je souvislý, musí platit $f^{-1}(P) = [0,1]$ (Věta 1. odst. 8.1 str. 249). Pro bod $Q \in X$ různý od P tedy neexistuje oblouk $f : [0,1] \to X$ takový, že $f(P) = 0$, $f(Q) = 1$.

(5) Podmnožina $A \subset \mathbf{R}$ je souvislá tehdy a jen tehdy, když A je interval. Dokážeme to.

Buď $A \subset \mathbf{R}$ souvislá množina. Je-li A prázdná nebo jednoprvková, pak tvrzení platí. Nechť A je alespoň dvouprvková. Uvažujme x, $y \in A$, $x < y$. Ukážeme, že pro každé $z \in [x,y]$ platí $z \in A$, t.j. že množina A s libovolnými dvěma svými body x, y obsahuje rovněž interval $[x,y]$. Předpokládejme, že existuje $z \in [x,y]$ tak, že $z \notin A$. Označme $B_1 = (-\infty, z) \cap A$, $B_2 = (z, \infty) \cap A$. Množina B_1, B_2 jsou neprázdné, otevřené v A a disjunktní. Ovšem $B_1 \cup B_2 = (\mathbf{R} \backslash \{z\}) \cap A = A$, což je spor se souvislostí množiny A. Je tedy $z \in A$ pro každé $z \in [x,y]$. Zbývá ukázat, že A je interval. Položme $p = \inf A$, $q = \sup A$. Buď $r \in (p,q)$ libovolný bod. Jelikož $p < r$, existuje $x \in A$ tak, že $x \leq r$. Podobně existuje $y \in A$ tak, že $r \leq y$. Množina A je alespoň dvoubodová, lze tedy vybrat x, y tak, že $x \neq y$. Pak ovšem $r \in A$. Z libovolnosti r nyní vyplývá, že $(p,q) \subset A$. Je-li $\inf A$, $\sup A$ prvkem množiny A, dostáváme $A = [p,q]$. Analogicky vyšetříme další možnosti; každá z nich ukazuje, že A je interval.

Obrácené tvrzení, a totiž že interval je souvislý, již bylo dokázáno (Důsledek 1. Věty 7. odst. 8.1 str. 252).

(6) Euklidův topologický prostor $\mathbf{R}^n$ je souvislý (Důsledek 2. Věty 7. odst. 8.1 str. 253). $\mathbf{R}^n$ je lokálně souvislý: každý bod $x \in \mathbf{R}^n$ má lokální bázi tvořenou otevřenými kvádry, což jsou souvislé množiny. $\mathbf{R}^n$ je obloukově souvislý: pro libovolné dva body x,

$y \in \mathbf{R}^n$ je zobrazení $[0,1] \ni t \to f(t) = (1-t)x + ty \in \mathbf{R}^n$ oblouk v $\mathbf{R}^n$ spojující body x, y.

Množina $A \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá *konvexní*, jestliže pro libovolné dva body $x, y \in A$ množina $\{z \in \mathbf{R}^n \mid z = tx + (1-t)y, 0 \leq t \leq 1\}$ leží v A. Z definice vyplává, že každá konvexní množina je obloukově souvislá a tedy souvislá.

(7) Spojitý obraz lokálně souvislého prostoru nemusí být lokálně souvislý; za příklad můžeme vzít identické zobrazení $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ množiny $\mathbf{R}$ s diskrétní topologií do množiny $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií (srov. př. (2) odst. 8.4 str. 257, (3) odst. 8.4 str. 258).

(8) Parakompaktní variety. Parakompaktní topologický prostor lokálně homeomorfní s $\mathbf{R}^n_-$, se nazývá n-rozměrná parakompaktní varieta s okrajem.

Každá topologická varieta s okrajem (př. (5) odst. 7.8 str. 212) je zřejmě parakompaktní varieta s okrajem. Obrácené tvrzení neplatí: $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií není topologická varieta s okrajem (není druhého typu spočetnosti), je ovšem parakompaktní varieta s okrajem, neboť je parakompaktní a každý bod $x \in \mathbf{R}$ má okolí $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, které je okolím bodu x rovněž v přirozené topologii.

Z definice je zřejmé, že parakompaktní varieta s okrajem je lokálně kompaktní topologický prostor. Ze Smirnovoy věty (cv. 15 kap. 6) vyplývá, že parakompaktní varieta s okrajem je metrizovatelný prostor.

Ukážeme, že parakompaktní varieta s okrajem je topologická varieta s okrajem právě tehdy, když má nejvýše spočetně mnoho souvislých komponent.

Zřejmě je-li parakompaktní varieta s okrajem topologickou varietou s okrajem, pak je druhého typu spočetnosti. To ovšem znamená, že nemůže být sjednocením více než spočetně mnoha disjunktních otevřených množin.

Obráceně předpokládejme, že parakompaktní varieta s okrajem X má nejvýše spočetně mnoho souvislých komponent. Ukážeme, že pak je druhého typu spočetnosti. K tomu zřejmě stačí ukázat, že každá souvislá komponenta $Y \subset X$ je druhého typu spočetnosti. Množina $Y \subset X$ je uzavřená (Věta 4. odst. 8.1 str. 250) a je tedy parakompaktní (Věta 13. odst. 6.6 str. 157) a lokálně kompaktní (Věta 15. (a) odst. 7.4 str. 201). Existuje tedy báze topologie topologického prostoru Y tvořená množinami, jejichž uzávěry jsou kompaktní (Důsledek 1. Věty 13. odst. 7.4 str. 201). Užitím pakrakompaktnosti Y a Věty 3. (c) odst. 7.1 str. 196 snadno zkonstruujeme pomocí této báze lokálně konečné otevřené pokrytí $(U_\iota)_{\iota \in I}$ topologického prostoru Y takové, že pro každé $\iota \in I$ je množina $\mathrm{cl}\, U_\iota$ kompaktní.

Nechť V_1 je libovolná z množin U_ι. Označme V_2 sjednocení všech množin ze systému $(U_\iota)_{\iota \in I}$, které protínají množinu V_1. Tak postupujeme dále a za V_{n+1} vezmeme sjednocení všech množin systému $(U_\iota)_{\iota \in I}$, které protínají množinu V_n. Každá z množin $\mathrm{cl}\, V_i$ je kompaktní, neboť je sjednocením konečného počtu kompaktních množin (Věta 3. (a) odst. 7.1 str. 196). Dále každá z množin $\mathrm{cl}\, V_i$ je podprostorem metrizovatelného prostoru Y a je tedy také metrizovatelným prostorem; $\mathrm{cl}\, V_i$ je tedy topologický prostor druhého typu spočetnosti (cv. 33 kap. 7). Dále platí $\bigcup V_i = Y$. Skutečně, kdyby existoval bod $x \in Y \setminus V_i$, existovala by také množina U_κ patřící systému $(U_\iota)_{\iota \in I}$, obsahující x, která by měla prázdný průnik s každou z množin V_i; označíme-li W sjednocení množin U_κ, dostaneme $Y = W \cup (\bigcup V_i)$, přičemž $W \cap (\bigcup V_i) = \emptyset$, což by byl spor se souvislostí topologického prostoru Y. Odtud vyplývá, že Y je spočetným sjednocením topologických prostorů druhého typu spočetnosti V_i, je tedy prostorem druhého typu spočetnosti. Tím je důkaz ukončen.

Cvičení

Souvislé topologické prostory

1. Dokažte, že platí tato tvrzení:

(a) Topologický prostor X je souvislý právě tehdy, když jej nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných disjunktních uzavřených množin.

(b) Topologický prostor X je souvislý právě tehdy, když každé spojité zobrazení $f : X \to Y$ topologického prostoru X do diskrétního dvoubodového prostoru $Y = \{1, 2\}$ je konstantní, t.j. buď $f(X) \subset \{1\}$ nebo $f(X) \subset \{2\}$.

Řešení. (a) Dokážeme, že X je nesouvislý právě tehdy, když existují neprázdné disjunktní uzavřené množiny A, $B \subset X$ takové, že $A \cup B$. Podle předpokladu existují neprázdné disjunktní otevřené množiny A, B tak, že $X = A \cup B$. Ovšem $A = X \backslash B$, $B = X \backslash A$, takže A, B jsou zároveň uzavřené. Obráceně, platí-li $X = A \cup B$ pro disjunktní uzavřené množiny A, B, pak $X = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$, takže X je nesouvislý.

(b) Buď X souvislý topologický prostor, $f : X \to \{1, 2\}$ spojité zobrazení. Pak $f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2)$ a množiny $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ jsou disjunktní a otevřené. Ze souvislosti X vyplývá, že jedna z nich je prázdná, t.j. f je konstantní.

Obrácené tvrzení vyplývá z toho, že je-li X nesouvislý, $X = A \cup B$, kde A, B jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny, pak zobrazení $f : X \to \{1, 2\}$, definované vztahem $f(A) = \{1\}$, $f(B) = \{2\}$, je spojité.

2. Nechť τ_1, τ_2 jsou dvě srovnatelné topologie na množině X. Je-li topologický prostor X souvislý (resp. nesouvislý) v jedné z těchto topologií, lze říci něco o jeho souvislosti ve druhé topologii?

Řešení. Nechť $\tau_1 \subset \tau_2$. Pak identické zobrazení id_X je spojité, uvažujeme-li jeho definiční obor (resp. obor hodnot) s topologií τ_2 (resp. τ_1). je-li tedy X souvislý v topologii τ_2, je souvislý také v τ_1 (Věta 5. odst. 8.1 str. 251). Je-li X nesouvislý v τ_1, je nesouvislý rovněž v τ_2.

3. Buď X topologický prostor. Rozhodněte, zda jsou pravdivá tato dvě tvrzení:

(a) Je-li X souvislý, pak pro každou neprázdnou podmnožinu $A \subset X$, $A \neq X$, platí $\mathrm{fr}\, A \neq \emptyset$.

(b) Jestliže pro každou neprázdnou podmnožinu $A \subset X$, $A \neq X$, platí $\mathrm{fr}\, A \neq \emptyset$, pak je X souvislý.

Řešení. Obě tvrzení platí. (a) Buď A neprázdná množina v X, $A \neq X$, taková, že $\mathrm{fr}\, A = \emptyset$. Jelikož $\mathrm{fr}\, A = \mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}(X \emptyset A)$ a platí $\mathrm{cl}\, A \cup \mathrm{cl}(X \backslash A) = X$, je X nesouvislý topologický prostor (cv. 1 (a)). (b) Buď X nesouvislý topologický prostor. Existuje neprázdná množina $A \subset X$, $A \neq X$, která je zároveň otevřená i uzavřená (Věta 1. odst. 8.1 str. 249). Pak ovšem $\mathrm{fr}\, A = \mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}(X \backslash A) = A \cap (X \backslash A) = \emptyset$.

4. *D*arbouxova věta. Buď X souvislý topolgický prostor, $f : X \to \mathbf{R}$ spojitá funkce, x_1, $x_2 \in X$ libovolné body. Předpokládejme, že pro číslo $x \in \mathbf{R}$ platí $f(x_1) \leq c \leq f(x_2)$. Pak existuje bod $x \in X$ tak, že $f(x) = c$. Dokažte.

Řešení. Podle Věty 5. odst. 8.1 str. 251 je $f(X) \subset \mathbf{R}$ souvislá množina. Je to tedy interval (př. (5) odst. 8.4 str. 258); ovšem tento interval obsahuje body $f(x_1)$, $f(x_2)$. Ke každému číslu c ležícímu mezi $f(x_1)$, $f(x_2)$ tedy existuje bod $x \in X$ tak, že $c = f(x)$.

5. Rozhodněte, které z níže uvedených topologických prostorů jsou souvislé a které nesouvislé.

U nesouvislých prostorů určete jejich souvislé komponenty.

(a) Množina $\mathbf{R}$ s topologií konečných doplňků.

(b) Množina X s topologií konečných doplňků.

(c) Graf G_f Dirichletovy funkce f uvažovaný jako podprostor Euklidova prostoru $\mathbf{R}^2$.

(d) Graf G_f Dirichletovy funkce f s finální topologií.

(e) Množina $X = \{1,2,3,4,5\}$ s topologií, generovanou bází $\sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,5\}\}$ (prov. cv. 4 kap. 2).

(f) Množina racionálních čísel $\mathbf{Q}$ s přirozenou topologií.

(g) Množina iracionálních čísel s přirozenou topologií.

(h) Množina přirozených čísel $\mathbf{N}$ s přirozenou topologií.

(i) Konečněrozměrný reálný vektorový prostor s přirozenou topologií.

(j) Množina komplexních čísel $\mathbf{C}$ s přirozenou topologií.

(k) Topologický prostor $\mathrm{cl}\, f((0,1)) \subset [-1,1]^2$ vznikající kompaktifikací $f(t) = (t, \sin(1/t))$ intervalu $(0,1) \subset \mathbf{R}$.

(l) Topologický prostor $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ s metrickou topologií, definovanou metrikou d^* ze cv. 24 (b) kap. 5.

(m) Topologický prostor X, definovaný ve cv. 15 kap. 4.

(n) Podmnožina $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$ Euklidova prostoru $\mathbf{R}^2$.

(o) Sféra $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

(p) Otevřená koule v $\mathbf{R}^n$.

(q) Toroid.

(r) Möbiova páska.

(s) Kleinova láhev.

(t) Reálná projektivní rovina RP^2.

(u) $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ s přirozenou topologií.

Řešení. (a) Je souvislý podle cv. 2 (topologie konečných doplňků je slabší než přirozená topologie).

(b) Je-li množina X konečná, pak topologie konečných doplňků na X splývá s diskrétní topologií (cv. 13 (b) kap. 1), t.j. X je úplně nesouvislý prostor (srov. př. (2) odst. 8.4 str. 257). Je-li množina X nekonečná, pak X je souvislý: pro libovolnou dvojici neprázdných otevřených množin $U = X \backslash K_1$, $V = X \backslash K_2 \subset X$, kde K_1, K_2 jsou konečné množiny, platí $U \cup V = X \backslash (K_1 \cup K_2) \neq X$.

(c) Není souvislý: Platí $G_f = M_1 \cup M_2$, kde $M_1 = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{Q}\}$ a $M_2 = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}\}$; přitom množiny M_1, M_2 jsou zřejmě neprázdné, disjunktní a otevřené. Souvislá komponenta libovolného bodu $(x, f(x)) \in G_f$ je množina $\{(x, f(x))\}$: vyplývá to z toho, že mezi libovonými dvěma body $x, y \in \mathbf{Q}$ (resp. x, $y \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$) leží iracionální (resp. racionální) číslo, a tedy body $(x, f(x))$, $(y, f(y))$ lze oddělit otevřenými množinami, jejichž sjednocením je G_f; je-li $x \in \mathbf{Q}$ a $y \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$, pak za takové množiny lze vzít M_1 a M_2.

(d) Uvažujeme-li na G_f finální topologii vzhledem k zobrazení f, pak topologický prostor G_f je souvislý (je spojitým obrazem souvislého prostoru $\mathbf{R}$).

(e) X je souvislý prostor: žádná otevřená neprázdná podmnožina X různá od X není uzavřená.

(f) $\mathbf{Q}$ není souvislý: zvolme $x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$; pak $((-\infty, x) \cap \mathbf{Q}) \cup ((x, \infty) \cap \mathbf{Q})$ je vyjádření $\mathbf{Q}$ ve tvaru sjednocení dvou neprázdných disjunktních otevřených množin. $\mathbf{Q}$ je úplně nesouvislý (porov. (c)).

(g) Je to úplně nesouvislý prostor (důkaz analogický jako v (f)).

(h) $\mathbf{N}$ je úplně nesouvislý: přirozená topologie na $\mathbf{N}$ splývá s diskrétní topologií.

(i) Je souvislý (je homeomorfní s Euklidovým topologickým prostorem, porov. př. (6) odst. 3.7 str. 44).

(j) Je souvislý (je homeomorfní s $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, porov. př. (7) odst. 3.7 str. 45).

(k) Je souvislý: zobrazení f je spojité, tedy $f((0,1))$ je souvislý; podle Důsledku (a) Věty 3. odst. 8.1 str. 250 je rovněž $\mathrm{cl}\, f((0,1))$ souvislý.

(l) Podle cv. 24 (b) kap. 5 je $(\mathbf{R}^*, d^*) = \mathrm{cl}\, \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ je Euklidův metrický prostor. $\mathbf{R}^*$ je tedy souvislý podle Důsledku (a) Věty 3. odst. 8.1 str. 250.

(m) Není souvislý: každá z množin systému $(\sigma_x)_{x\in X}$ je zároveň otevřená i uzavřená. X je úplně nesouvislý.

(n) X není souvislý: množiny $M_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ a $M_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}$ jsou disjunktní neprázdné otevřené podmnožiny X takové, že $X = M_1 \cup M_2$. M_1, M_2 jsou zároveň souvislé komponenty X (obě jsou obloukově souvislé).

(c) Je souvislá: je homeomorfní s Alexandrovovou kompaktifikací $\mathbf{R}^n$, která je souvislá jako uzávěr souvislého prostoru $\mathbf{R}^n$.

(p) Je souvislá, neboť je to konvexní množina (srov. př. (6) odst. 8.4 str. 258 a Věta 12. odst. 8.3 str. 256).

(q) Je souvislý (součin souvislých prostorů).

(r) Je souvislá: je faktorovým prostorem souvislého prostoru $[0,1]^2$.

(s) Je souvislá (srov. (r)).

(t) Je souvislá (srov. (r)).

(u) Je souvislá, neboť je obloukově souvislá: libovolné dva body P, Q lze spojit lomenou čarou.

6. (a) Je spojitým obrazem nesouvislého prostoru nesouvislý prostor?

(b) Je vzorem nesouvislého prostoru při spojitém zobrazení nesouvislý prostor?

Řešení. (a) Spojitým obrazem nesouvislého topologického prostoru může být souvislý i nesouvislý topologický prostor. Kanonickou projekcí nesouvislého podprostoru $([0,1]\times\{0\})\cup([0,1]\times\{1\}) \subset \mathbf{R}^2$ na $\mathbf{R}$ je souvislý podprostor $[0,1] \subset \mathbf{R}$; promítneme-li tento nesouvislý prostor na $\mathbf{R}$ druhou kanonickou projekcí, dostaneme nesouvislý prostor $\{0,1\}$.

(b) Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení, $A \subset Y$ nesouvislý podprostor. Existuje neprázdná podmnožina $B \subset A$, $B \neq A$, která je otevřená i uzavřená v A. Pak $f^{-1}(B)$ je uzavřená i otevřená množina v $f^{-1}(A) \subset X$, $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ a $f^{-1}(B) = f^{-1}(A)$, t.j. $f^{-1}(A)$ je nesouvislý.

7. Ukažte, že obecná lineární grupa $GL_n(\mathbf{R})$ je nesouvislý topologický prostor.

Řešení. $GL_n(\mathbf{R})$ je sjednocení dvou disjunktních otevřených množin $GL_n^+(\mathbf{R}) = \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid \det A > 0\}$, $GL_n^-(\mathbf{R}) = \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid \det A < 0\}$.

8. Rozhodněte, zda jsou homeomorfní tyto topologické prostory:

(a) $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}^n$ pro $n > 1$.

(b) $\mathbf{R}$ a $S^1 \subset \mathbf{R}^2$.

(c) Intervaly (a,b), $[a,b] \subset \mathbf{R}$.

(d) Intervaly $(a,b]$, $(a,b) \subset \mathbf{R}$.

(e) Intervaly $(a,b]$, $[a,b] \subset \mathbf{R}$.

(f) $\mathbf{R}$ s uzavřený interval v $\mathbf{R}$.

(g) Uzavřený interval v $\mathbf{R}$ a kružnice S^1 v $\mathbf{R}^2$.

Řešení. Žádné z uvedených dvojic topologických prostorů nejsou homeomorfní. Dokážeme to s použitím cv. 15 (b) kap. 3.

(a) Množina $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ je souvislá (cv. 5 (u)), zatímco množina $\mathbf{R}\backslash\{x\}$ je nesouvislá pro každé $x \in \mathbf{R}$.

(b) Množina $S^1\backslash\{N\}$, kde N je severní pól, je souvislá (je homeomorfní s $\mathbf{R}$, viz př. (8) odst. 3.7 str. 45), zatímco $\mathbf{R}\backslash\{x\}$ je nesouvislá množina pro každé $x \in \mathbf{R}$.

(c) Množina $[a,b]\backslash\{b\} = [a,b)$ je souvislá, zatímco $(a,b)\backslash\{x\}$ je nesouvislá pro každé $x \in (a,b)$.

(d) Množina $(a,b]\backslash\{b\} = (a,b)$ je souvislá, zatímco $(a,b)\backslash\{x\}$ je nesouvislá pro každé $x \in (a,b)$.

(e) Předpokládejme, že intervaly $(a,b]$, $[a,b]$ jsou homeomorfní a označme $h : (a,b] \to [a,b]$ nějaký jejich homeomorfismus. Pak $f = h|_{(a,b)}$ je homeomorfismus (a,b) na $h(a,b) \subset [a,b]$ (cv. 15 (a) kap. 3). Množina $h((a,b))$ je souvislá (Věta 5. odst. 8.1 str. 251), je to tedy interval (př. (5) odst. 8.4 str. 258). Podle (c) a (d) musí tento interval být otevřený, t.j. $h((a,b)) = (c,d) \subset [a,b]$. Ovšem h je bijekce, proto $h((a,b]) = h((a,b)) \cup h(\{b\}) = (c,d) \cup \{h(b)\} \neq [a,b]$, neboť množina

$\{h(b)\}$ je jednoprvková. To je ovšem spor s předpokladem, že $h((a,b]) = [a,b]$. Odtud vyplývá, že intervaly $(a,b]$, $[a,b] \subset \mathbf{R}$ nejsou homeomorfní.

Jiný důkaz tohoto tvrzení využívá Důsledek 2. Věty 5. odst. 8.1 str. 197: $(a,b]$ není kompaktní, zatímco $[a,b]$ je kompaktní, takže topologické prostory $(a,b]$, $[a,b]$ nemohou být homeomorfní.

(f) $\mathbf{R}$ je homeomorfní s otevřeným intervalem v $\mathbf{R}$, otevřený interval není homeomorfní s uzavřeným intervalem (srov. (c)).

(g) Předpokládejme, že existuje homeomorfismus $h : S^1 \to [a,b]$. Pak jeho zúžení f na podprostor $S^1 \backslash \{N\}$, kde N je severní pól, je homeomorfismus $S^1 \backslash \{N\}$ na $[a,b] \backslash h(\{N\})$. Ovšem $S^1 \backslash \{N\}$ je souvislý, a tedy $h(N) = a$ nebo $h(N) = b$. Dostáváme tak, že existuje homeomorfismus $S^1 \backslash \{N\}$ a intervalu $[a,b)$, t.j. homeomorfismus (a,b) a $[a,b)$, což je spor (srov. (d)).

9. Dokažte, že souvislý úplně regulární topologický prostor, který má alespoň dva prvky, je nespočetný.

Řešení. Buď X souvislý úplně regulární prostor obsahující alespoň dva různé body x_1, x_2. Podle definice existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x_1) = 0$ a $f(x_2) = 1$. Podle Darbouxovy věty (cv. 4) ke každému číslu $c \in (0,1)$ existuje $x \in X$ tak, že $f(x) = c$. Platí tedy $f(X) = [0,1]$, t.j. f je surjektivní. Odtud vyplývá, že mohutnost množiny X není menší než mohutnost množiny $[0,1]$, která je nespočetná (cv. 15 kap. 7).

10. (a) Buď X souvislý topologický prostor, $f : X \to Y$ jeho kompaktifikace. Ukažte, že Y je souvislý topologický prostor.

(b) Je-li β-obal úplně regulárního prostoru X souvislý, pak každá oddělitelná kompaktifikace topologického prostoru X je souvislý topologický prostor. Ukažte.

(c) Úplně regulární topologický prostor je souvislý tehdy a jen tehdy, když jeho β-obal je souvislý. Ukažte.

Řešení. (a) Platí $Y = \operatorname{cl} f(X)$, takže tvrzení vyplývá z Důsledku (a) Věty 3. odst. 8.1 str. 250.

(b) Tvrzení vyplývá z Důsledku Věty 5. odst. 8.1 str. 251 a ze cv. 55 (b) kap. 7.

(c) Je-li X souvislý úplně regulární prostor, pak βX je souvislý podle (a). Obráceně, ukážeme, že je-li β-obal βX úplně regulárního prostoru X souvislý, pak X je souvislý. Předpokládejme, že X není souvislý, t.j. že existují neprázdné disjunktní otevřené množiny A, $B \subset X$ tak, že $X = A \cup B$. Definujeme funkci $f : X \to [0,1]$ vztahem $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$. f je zřejmě spojitá. Podle Důsledku 1. Věty 27. odst. 8.1 str. 210 existuje spojitá funkce $F : \beta X \to [0,1]$ tak, že $f = F \circ c_X$, kde c_X je Čechova–Stoneova kompaktifikace X. Zřejmě $F(c_X(A)) = \{0\}$, $F(c_X(B)) = \{1\}$. Dostáváme tak s pomocí Věty 2. odst. 2.1 str. 18 $F(\operatorname{cl} c_X(A)) \subset \operatorname{cl} F(c_X(A)) = \{0\}$, t.j. $F(\operatorname{cl} c_X(A)) = \{0\}$ a analogicky $F(\operatorname{cl} c_X(B)) = \{1\}$. Odtud vyplývá, že $\operatorname{cl} c_X(A) \cap \operatorname{cl} c_X(B) = \emptyset$. Ovšem $\beta X = \operatorname{cl} c_X(X) = \operatorname{cl}(C_X(A \cup B)) = \operatorname{cl}(c_X(A) \cup c_X(B)) = \operatorname{cl} c_X(A) \cup \operatorname{cl} c_X(B)$. βX jsme tak vyjádřili ve tvaru sjednocení dvou neprázdných disjunktních uzavřených množin. Podle cv. 1 (a) je βX nesouvislý.

11. Rozhodněte, zda sjednocení souřadnicových os v $\mathbf{R}^2$ je topologická varieta s okrajem. Je toto sjednocení parakompaktní varieta s okrajem?

Řešení. Označme $X = (\mathbf{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbf{R})$. X není parakompaktní (a tedy ani topologická) varieta s okrajem. Ukážeme, že X není lokálně homeomorfní s $\mathbf{R}^n_-$ pro žádné n. Nechť $n = 1$. Předpokládejme, že v bodě $(0,0) \in X$ existuje souřadnicový systém (U, φ). Množina U je otevřená v X, existují tedy čísla a, $b > 0$ tak, že množina $V = ((-a,a) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times (-b,b))$ leží v U. Tato množina je souvislá (Věta 3. (b) odst. 8.1 str. 250), $\varphi(V) \subset \mathbf{R}_-$ je interval (př. (5) odst. 8.4 str. 258). Množiny V a $\varphi(V)$ ovšem nemohou být homeomorfní: množina $V \backslash \{(0,0)\}$ je nesouvislá, má čtyři komponenty, zatímco (V) x pro každé x (V) je nesouvislá množina mající pouze dvě souvislé komponenty. To je ovšem spor s předpokladem, že (U, φ) je souřadnicový systém v bodě $(0,0) \in X$. Nechť $n > 1$. Pak množina $\varphi(V) \backslash \{x\} \subset \mathbf{R}^n_-$ je souvislá pro každé $x \in \varphi(V)$, není tedy homeomorfní s množinou $V\setminus\{(0,0)\}$. Tedy ani v tomto případě (U,φ) není souřadnicový systém v bodě $(0,0)$.

12. Buď f zobrazení souvislého topologického prostoru X s topologií τ do množiny Y. Je-li obraz $f\tau$ topologie τ diskrétní topologie, pak f je konstantní. Dokažte.

Řešení. Buď $y \in Y$ bod, ležící v množině $f(X) \subset Y$. Platí $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\{y\} \cup (Y\setminus\{y\})) = f^{-1}(\{y\}) \cup f^{-1}(y\setminus\{y\})$. Přitom $f^{-1}(\{y\})$, $f^{-1}(Y\setminus\{y\})$ jsou otevřené množiny v X, jelikož $\{y\}$, $Y\setminus\{y\} \in f\tau$. Z toho, že Y je souvislý, vyplývá, že jedna z těchto množin musí být prázdná. Podle předpokladu $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, takže $f^{-1}(Y\setminus\{y\}) = \emptyset$ a tedy $X = f^{-1}(\{y\})$, t.j. $\{y\} = f(X)$.

Lokálně souvislé prostory

13. Rozhodněte, zda je pravdivé toto tvrzení: Jestliže souvislé komponenty topologického prostoru X jsou otevřené a zároveň uzavřené, pak X je lokálně souvislý.

Řešení. Tvrzení neplatí; kdyby platilo, pak by každý souvislý prostor musel být lokálně souvislý, což odporuje př. (4) odst. 8.4 str. 258.

14. Předpokládejme, že na množině X jsou dány topologie τ_1 a τ_2 přičemž $\tau_1 \subset \tau_2$. Nechť X je lokálně souvislý v jedné z těchto topologií. Co lze usoudit o lokální souvislosti X ve druhé topologii?

Řešení. Obecně nelze říci nic. Uvedeme příklad. Na množině $\mathbf{R}$ uvažujme topologii diskrétní τ_D, Sorgenfreyovou τ_S a přirozenou τ. Platí $\tau \subset \tau_S \subset \tau_D$ a přitom $(\mathbf{R},\tau)$ a $(\mathbf{R},\tau_D)$ jsou lokálně souvislé, zatímco $(\mathbf{R},\tau_S)$ není lokálně souvislý (srov. př. (6) odst. 8.4 str. 258, (2) odst. 8.4 str. 257, (3) odst. 8.4 str. 258).

15. Nechť X je lokálně souvislý topologický prostor s topologií τ, Y množina, $f : X \to Y$ zobrazení. Uvažujme množinu Y s obrazem topologie $f\tau$. Je topologický prostor Y lokálně souvislý?

Řešení. Y je lokálně souvislý; tvrzení se dokáže podobně jako Věta 10. odst. 8.2 str. 255.

Buď $U \subset Y$ otevřená množina, A souvislá komponenta množiny U. Je-li $f^{-1}(A) = \emptyset$, pak podle definice obrazu topologie je množina $A \subset Y$ otevřená. Nechť $f^{-1}(A) \neq \emptyset$. Buď $x \in f^{-1}(A)$ bod, V_x souvislá komponenta bodu x v $f^{-1}(U)$. Podle Věty 9. odst. 8.2 str. 254 je V_x otevřená množina, neboť $f^{-1}(U)$ je otevřená. Množina $f(V_x)$ je souvislá (Věta 5. odst. 8.1 str. 251) a obsahuje bod $f(x)$. Podle definice souvislé komponenty tedy $f(V_x) \subset A$, odkud $V_x \subset f^{-1}(A)$. Tedy $f^{-1}(A) = \bigcup V_x$ (sjednocení přes $x \in f^{-1}(A)$). To ovšem znamená, že $f^{-1}(A)$ je otevřená množina a podle definice topologie $f\tau$ je A otevřená množina. Podle Věty 9. odst. 8.2 str. 254 je tedy prostor Y lokálně souvislý.

16. Rozhodněte, které z topologických prostorů (a) – (u) ze cv. 5 jsou lokálně souvislé.

Řešení. (a) Je lokálně souvislý: libovolná otevřená množina U v tomto topologickém prostoru má tvar $U = \mathbf{R}\setminus K$, kde K je konečná množina. U je zřejmě nekonečná. Analogicky jako ve cv. 5 (a) odtud dostaneme, že U je souvislá.

(b) Je lokálně souvislý: Je-li X konečná množina, pak topologie konečných doplňků na X splývá s diskrétní topologií, které je lokálně souvislá (př. (2) odst. 8.4 str. 257). Je-li X nekonečná množina, pak každá otevřená podmnožina $U \subset X$ je souvislá (srov. (a)).

(c) Není lokálně souvislý: souvislá komponenta libovolného bodu $(x, f(x))$ je množina $\{(x, f(x))\}$, která není otevřená (srov. Důsledek Věty 9. odst. 8.2 str. **??**).

(d) Je lokálně souvislý (srov. cv. 15).

(e) Je lokálně souvislý: lokální báze v bodě 1 (resp. 2, resp. 3, resp. 4, resp. 5) je tvořena množinou $\{1\}$ (resp. $\{1,2\}$, resp. $\{1,2,3\}$, resp. $\{1,2,4\}$, resp. $\{1,5\}$), která je souvislá.

(f) Není lokálně souvislý: souvislá komponenta bodu x je množina $\{x\}$, která není otevřená (srov. Důsledek Věty 9. odst. 8.2 str. **??**).

(g) Není lokálně souvislý (srov. (f)).

(h) Je lokálně souvislý: daná topologie splývá s diskrétní topologií, která je lokálně souvislá (př. (2) odst. 8.4 str. 257).

(i) Je lokálně souvislý (je homeomorfní s Euklidovým topologickým prostorem).

(j) Je lokálně souvislý (srov. (i)).

(k) Není lokálně souvislý: Buď $P \in \{0\} \times [-1,1]$ libovolný bod, $B(P, 1/4)$ otevřená koule v $\mathbf{R}^2$ se středem v P. Pak souvislá komponenta množiny $B(P, 1/4)$ obsahující P je množina $B(P, 1/4) \cap (\{0\} \times [-1,1])$, která není otevřená (srov. Věta 9. odst. 8.2 str. 254).

(l) Je lokálně souvislý, neboť je homeomorfní s uzavřeným intervalem $[-1,1] \subset \mathbf{R}$, který je lokálně souvislý: zobrazení $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, definované vztahem $f(t) = t/(1-|t|)$ pro $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = \infty$ pro $t = 1$, $f(t) = -\infty$ pro $t = -1$, je zřejmě homeomorfismus.

(m) Není lokálně souvislý (ze stejných důvodů jako (f)).

(n) Je lokálně souvislý podle Věty 9. odst. 8.2 str. 254.

(o) Je lokálně souvislý podle Věty 2. odst. 8.2 str. 254: Je-li $U \subset S^n$ neprázdná otevřená množina různá od S^n, pak je homeomorfní s otevřenou množinou $V \subset \mathbf{R}^n$ a tedy každá její souvislá komponenta je otevřená v S^n; je-li $U = S^n$, pak U je souvislá a otevřená v S^n.

(p) Je lokálně souvislá (Věta 9. odst. 8.2 str. 254).

(q) Je lokálně souvislý (je homeomorfní se součinem dvou souvislých lokálně souvislých prostorů S^1; viz Věta 11. odst. 8.2 str. 255 a (p)).

(r), (s), (t) Jsou lokálně souvislé: jsou homeomorfní s faktorovým prostorem topologického prostoru $[0,1]^2 \subset \mathbf{R}^2$, který je lokálně souvislý jako součin dvou souvislých lokálně souvislých prostorů (Věta 11. odst. 8.2 str. 255, Věta 10. odst. 8.2 str. 255).

(u) Je lokálně souvislý podle Věty 9. odst. 8.2 str. 254 ($\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ je otevřená podmnožina $\mathbf{R}^n$, t.j. každá otevřená podmnožina $U \subset \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ je také otevřená v $\mathbf{R}^n$).

Obloukově souvislé prostory

17. Je uzávěr obloukově souvislého topologického prostoru obloukově souvislý?

Řešení. Nemusí být obloukově souvislý. Uvažujme topologický prostor X z př. (4) odst. 8.4 str. 258. $X \setminus \{P\}$ je obloukově souvislý, přitom $X = \mathrm{cl}(X \setminus \{P\})$ není obloukově souvislý.

18. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení: Nechť τ_1, τ_2 jsou dvě toplogie na množině X, $\tau_1 \subset \tau_2$. Je-li (X, τ_2) obloukově souvislý prostor, pak také (X, τ_1) je obloukově souvislý.

Řešení. Tvrzení platí: (X, τ_1) je spojitým obrazem obloukově souvislého prostoru (X, τ_2) při zobrazení id_X (Věta 14. odst. 8.3 str. 256).

19. Ukažte, že topologický prostor $X = \mathrm{cl}\, f((0,1))$, kde $f : (0,1) \to [-1,1]^2$ je zobrazení, definované vztahem $f(t) = (t, \sin(1\backslash t))$, je souvislý, ale není obloukově souvislý.

Řešení. Souvislost tohoto prostoru již byla dokázána ve cv. (k). Dokážene, že X není obloukově souvislý. Buď $P \in \{0\} \times [-1,1]$ libovolný bod. Předpokládejme, že existuje oblouk $g : [a,b] \to X$ tak, že $g(a) = P$. Vyšetříme množinu $M = g^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$, která obsahuje bod a. M je uzavřená množina, neboť je vzorem uzavřené množiny $\{0\} \times [-1,1]$ při spojitém zobrazení g. Buď $x \in M$ libovolný bod. Uvažujme Otevřenou kouli B se středem v bodě $g(x)$ a poloměrem $r = 1/4$. Ze spojitosti g vyplývá, že existuje otevřený interval I_x v $[a,b]$ se středem v bodě x takový, že $g(I_x) \subset B \cap X$. Množina I_x je souvislá podle Důsledku 1. Věty 7. odst. 8.1 str. 252, tedy také $g(I_x)$ je souvislá podle Věty 5. odst. 8.1 str. 251. Odtud vyplývá, že $g(I_x) \subset B \cap (\{0\} \times [-1,1])$, t.j., že $I_x \subset g^{-1}(B \cap (\{0\} \times [-1,1])) \subset M$. Množina M je tedy otevřená. Interval $[a,b]$ je souvislý a $M \subset [a,b]$ je neprázdná podmnožina, která je uzavřená a zároveň otevřená. To ovšem znamená, že $M = [a,b]$. Odtud vyplývá, že žádný bod $Q \in X \setminus (\{0\} \times [-1,1])$ nelze spojit obloukem s bodem P. Topologický prostor X tedy není obloukově souvislý.

20. Dokažte, že každá otevřená souvislá podmnožina Euklidova prostoru $\mathbf{R}^n$ je obloukově souvislá.

Ř e š e n í . Buď $U \subset \mathbf{R}^n$ otevřená podmnožina. U je zřejmě lokálně obloukově souvislý prostor: každý bod $x \in U$ má lokální bázi tvořenou otevřenými koulemi, což jsou konvexní a tedy obloukově souvislé množiny (př. (6) odst. 8.4 str. 258). Jelikož U je souvislá, je podle Důsledku Věty 16. odst. 8.3 str. **??** také obloukově souvislá.

Uvedeme jiné řešení. Buď $x \in U$ bod. Označme A podmnožinu množiny U, tvořenou všemi body z U, které lze spolit obloukem s bodem x. Ukážeme, že množina A je otevřená v U. Buď $q \in A$ libovolný bod. U je otevřená množina, existuje tedy otevřená koule $B(q,\epsilon)$ ležící v U. $B(q,\epsilon)$ je ovšem obloukově souvislá množina, proto $B(q,\epsilon) \subset A$. Odtud již vyplývá otevřenost množiny A. Nyní ukážene, že A je uzavřená v U. Položme $V = U \setminus A$; množina V je tvořena všemi body $y \in U$, které nelze spojit obloukem s bodem x. Nechť $p \in V$ je libovolný bod. Jelikož U je otevřená, existuje $\delta > 0$ a otevřená koule $B(p,\delta)$ ležící v U. Ovšem $B(p,\delta)$ je obloukově souvislá množina, platí tedy $B(p,\delta) \subset U$. Kdyby totiž existoval bod $y \in B(p,\delta)$ neležící ve V, pak by platilo $y \in A$, t.j. existoval by oblouk spojující body y a x a tedy také oblouk spojující body p a x, což je spor s konstrukcí množiny V. Ukázali jsme, že množina V obsahuje s každým svým bodem nějaké jeho okolí, je tedy otevřená v U. Odtud ovšem vyplývá, že A je neprázdná otevřená a současně uzavřená podmnožina souvislého prostoru U. Platí tedy $A = U$ a U je obloukově souvislý topologický prostor.

21. Rozhodněte, zda jsou obloukově souvislé tyto topologické prostory:
(a) $S^1 \subset \mathbf{R}^2$.
(b) $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$.
(c) Graf G_f Dirichletovy funkce f s finální topologií.
(d) Uzavřený čtverec $[0,1]^2 \subset \mathbf{R}^2$.
(e) $\mathbf{R}$ s topologií konečných doplňků.
(f) Toroid.
(g) Kleinova láhev.
(h) Möbiova páska.
(i) Reálná projektivní rovina RP^2.

Ř e š e n í . Všechny uvedené topologické prostory jsou obloukově souvislé.

(a) S^1 je spojitým obrazem obloukově souvislé množiny $[0,1)$ při zobrazení $f : [0,1) \to \mathbf{R}^2$, definované vztahem $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ (srov. cv. 10 kap. 3, Věta 14. odst. 8.3 str. 256).

(b) Označme N (resp. S) severní (resp. jižní) pól sféry S^n a uvažujme stereografickou projekci φ (resp. ψ) ze severního (resp. jižního) pólu. Zobrazení φ (resp. ψ) je homeomorfismus $S^n \setminus \{N\}$ (resp. $S^n \setminus \{S\}$) na $\mathbf{R}^n$. Podprostory $S^n \setminus \{N\}$, $S^n \setminus \{S\} \subset S^n$ jsou tedy obloukově souvislé. Podle Věty 13. odst. 8.3 str. 256 je také S^n obloukově souvislý prostor.

(c) G_f s finální topologií je spojitým obrazem obloukově souvislého prostoru $\mathbf{R}$ (srov. Věta 14. odst. 8.3 str. 256).

(d) $[0,1]^2 \subset \mathbf{R}^2$ je konvexní množina (srov. př. (6) odst. 8.4 str. 258).

(e) Topologie konečných doplňků na $\mathbf{R}$ je slabší než přirozená topologie, která je obloukově souvislá; $\mathbf{R}$ s topologií konečných doplňků je tedy obloukově souvislý podle cv. 18.

(f), (g), (h), (i) Jde o faktorové prostory obloukově souvislého prostoru $[0,1]^2 \subset \mathbf{R}^2$ (srov. Důsledek Věty 14. odst. 8.3 str. 256).

22. Je každý lokálně obloukově souvislý topologický prostor lokálně souvislý?

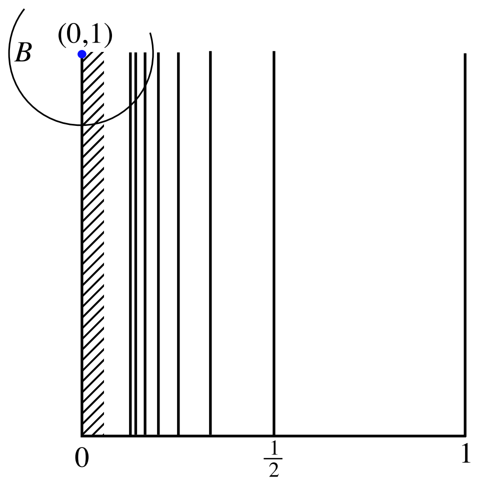
Ř e š e n í . Ano. Tvrzení vyplývá z definice a z Věty 12. odst. 8.3 str. 256.

23. (a) Uveďte příklad lokálně obloukově souvislého prostoru, který není obloukově souvislý.
(b) Uveďte příklad obloukově souvislého prostoru, který není lokálně obloukově souvislý.

Řešení. (a) Stačí vzít disjunktní sjednocení dvou lokálně obloukově souvislých prostorů, které jsou zároveň obloukově souvislé, např. sjednocení dvou disjunktních neprázdných otevřených koulí v $\mathbf{R}^n$.

(b) Položme $X = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup (M \times [0,1])$, kde $M = \{q \in \mathbf{R} \mid q = 1/n, n \in \mathbf{N}\}$ (porov. s př. (4) odst. 8.4 str. 258). X je zřejmě obloukově souvislý podprostor Euklidova prostoru $\mathbf{R}^2$. X ovšem není lokálně obloukově souvislý: Uvažujme např. otevřenou množinu $U = B \cap X$, kde B je otevřená koule v $\mathbf{R}^2$ se středem $(0,1)$ a poloměrem $1/4$. Souvislá komponenta množiny U obsahující bod $(0,1)$ zřejmě není otevřená v X (viz obr. 1), t.j. X není lokálně souvislý. Podle cv. 22 není ani lokálně obloukově souvislý.

Obr. 2



24. Dokažte, že součin systému topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota \in I}$ je obloukově souvislý právě tehdy, ktyž každý z topologických prostorů X_ι je obloukově souvislý.

Řešení. Je-li součin $X = \prod X_\iota$ obloukově souvislý, pak každý z topologických prostorů X_ι musí být obloukově souvislý jako spojitý obraz X při faktorové projekci $\mathrm{pr}_\iota : X \to X_\iota$ (Věta 14. odst. 8.3 str. 256). Obráceně předpokládejme, že pro každé $\iota \in I$ je topologický prostor X_ι obloukově souvislý. Nechť $x, y \in X$ jsou libovolné dva body. Ke každému $\iota \in I$ existuje oblouk $f_\iota : [0,1] \to X_\iota$ takový, že $f_\iota(0) = \mathrm{pr}_\iota(x)$, $f_\iota(1) = \mathrm{pr}_\iota(y)$. Klademe $f = (f_\iota)_{\iota \in I}$. Dostáváme spojité zobrazení $f : [0,1] \to X$ (Věta 10. (b) odst. 3.3 str. 36) a platí $f(0) = x$, $f(1) = y$.

25. Dokažte, že součin systému topologických prostorů $(X_\iota)_{\iota \in I}$ je lokálně obloukově souvislý tehdy a jen tehdy, když každý z topologických prostorů X_ι je lokálně obloukově souvislý a existuje konečná množina $J \subset I$ tak, že X_κ je obloukově souvislý pro každé $\kappa \in I \setminus J$.

Řešení. Důkaz je analogický důkazu Věty 11. odst. 8.2 str. 255 (využijeme cv. 24).

Literatura

[1] J. Adámek, V. Koubek, J. Reiterman, Základy obecné topologie, SNTL Praha, 1977
[2] N. Bourbaki, Obščaja topologia, Osnovnyje struktury, Nauka, Moskva, 1968; Ispoľzovanie vesčestvennych čisel v obščej topologii, Nauka, Moskva, 1975 (překlad z francouzštiny)
[3] N. Bourbaki, Topologičeskije vektornyje prostranstva, Izdatěľstvo inostrannoj literatury, Moskva, 1959
[4] E. Čech, Topological Spaces, Academia, Praha 1974
[5] J. Dieudonné, Grundzűge der modernen Analysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972 (překlad z francouzštiny)
[6] R. Engelking, General Topology, PWN, Warszawa, 1977
[7] M. Hejný, I. Kulich, J. Tvarožek, Čo je topológia?, Alfa, Bratislava, 1983
[8] J. Chvalina, Obecná topologie, skriptum PřF UJEP Brno, UJEP Brno, 1984
[9] J. L. Kelley, Obščaja topologia, Nauka, Moskva, 1968 (překlad z angličtiny)
[10] O. Krupková, Topologie a geometrie v příkladech, pomocný učební text, Přírodovědecká fakulta UJEP Brno, 1984
[11] A. S. Miščenko, J. P. Solovjov, A. T. Fomenko, Sbornik zadač po differenciaľnoj geometrii i topologii, Izdatěľstvo MGU, Moskva, 1981
[12] J. R. Munkres, Topology, A First Course, Prentice Hall, New Jersey, 1975
[13] A. Pultr, Úvod do topologie a geometrie I, skriptum MFF UK Praha, SPN, Praha, 1982
[14] A. Robertson, V. Robertson, Topologičeskije vektornyje prostranstva, Mir, Moskva, 1967 (překlad z angličtiny)
[15] N. S. Sinkujov, T. I. Matvějenko, Topologia, Višča škola, Kijev, 1984