Zápočtové příklady ZJF

Lukáš Vácha

25. ledna 2021

1 Příklad 1

Zadání 1. Kinetická energie deuteronu se v daném experimentu určuje pomocí doby letu. Jaká je energie protonu, který proletěl vzdálenost 6 m za 23,5 ns, 41 ns, 220 ns? Jaká je jeho hybnost a charakteristická vlnová délka.

$$\begin{aligned}
s &= 6\text{m} \\
t_1 &= 23,5\text{ns} \\
t_2 &= 41\text{ns} \\
t_3 &= 220\text{ns} \\
E_0(p^+) &= 938\text{MeV} \\
E &= ? \\
p &= ? \\
\lambda &= ?
\end{aligned}$$

Rešení 1. Energie:

$$\begin{aligned}
v &= \frac{s}{t} \\
E_{kin.}(nerel.) &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}E_0\frac{v^2}{c^2}
\end{aligned}$$

$$E(nerel.) = E_0 + E_{kin.} = E_0\left(1 + \frac{s^2}{t^2c^2}\right) = 938\left(1 + \frac{3600}{9t^2}\right) = \begin{cases} 1617,402 \\ 1161,200 \\ 945,7520 \end{cases} \text{MeV}$$

$$E(rel.) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}E_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2t^2}}}E_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{6^2}{9\cdot 10^{16}t^2}}}938\text{MeV} = \begin{cases} 1786,455 \\ 1074,514 \\ 941,900 \end{cases} \text{MeV}$$

Hybnost:

$$p = mv = E_0\frac{s}{tc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \begin{cases} 1520,387 \\ 524,153 \\ 85,627 \end{cases} \text{MeV/c}$$

Vlnová délka:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{pc} = \frac{2\cdot 3,142\cdot 197,3\text{MeV}\cdot\text{fm}}{pc} = \begin{cases} 0,815 \\ 2,365 \\ 14,478 \end{cases} \text{fm}$$

2 Příklad 2

Zadání 2. Neutrony jsou produkovány v reakci $d + {}^3H \rightarrow n + {}^4He$ s použitím svazku deuteronů s energií 20 MeV. Určete energii svazku, které vyletují v laboratorní soustavě pod úhlem 20°.

$$\begin{aligned} E(d) &= 20\text{MeV} \\ \vartheta &= 20° \\ E(n) &= ? \end{aligned}$$

Rešení 2. Zákon zachování hybnosti:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p}(d) &= \overrightarrow{p}(n) + \overrightarrow{p}(He) \\ p^2(d) &= p^2(n) + p^2(He) + 2p(n)p(He)\cos\vartheta \end{aligned}$$

Zákon zachování energie:

$$\begin{aligned} E(d) &= E(n) + E(He) \\ \frac{p^2(d)}{2M(d)} &= \frac{p^2(n)}{2M(n)} + \frac{p^2(He)}{2M(He)} \end{aligned}$$

Úpravou těchto 2 rovnic o neznámých p(He) a E(n) dojdeme ke kvadtarické rovnici pro E(n):

$$AE^2(n) + BE(n) + C = 0$$

s parametry:

$$A = (M(n) - M(He))^2 + 4M(n)M(He)\cos^2\vartheta$$
$$B = 2(M(He) - M(d))(M(n) - M(He))E(d) - 4M(n)M(He)E(d)\cos^2\vartheta$$
$$C = (M(He) - M(d))^2E^2(d)$$

Číselně:

$$A = 20936039,3\mathrm{MeV/c^2}$$
$$B = -469559106,7\mathrm{MeV^2/c^2}$$
$$C = 1368704016\mathrm{MeV^4/c^4}$$
$$E(n) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$E_+(n) = 18,935\mathrm{MeV}$$
$$E_-(n) = 3,589\mathrm{MeV}$$

Řešení $E_-(n)$ je nefyzikální, protože lehčí částice odnáší vždy více kinetické energie.

3 Příklad 3

Zadání 3. Jádro zlata bylo urychleno na kinetickou energii 150 GeV/nukleon. Srazilo se s jádrem zlata, které bylo v laboratorní soustavě v klidu. Jaký byl poměr mezi průměrem jádra ve směru pohybu jádra a kolmo na tento směr při pohledu z laboratorní a těžišťové soustavy. Jaká je rapidita projektilu a terče v laboratorní a těžišťové soustavě? Jaká je rapidita těžiště?

$$\frac{E_{kin.}}{A} = 150\mathrm{GeV}$$
$$E_0(Au) = A(Au)E_0(u) = A(Au) \cdot 931,5\mathrm{MeV}$$
$$\frac{d_{\rightarrow}}{d_{\perp}} = ?$$

Rešení 3. Ze speciální teorie relativity, vztah (3) v příkladu 4:

$$\beta_1 = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{E_{kin}}{E_0} + 1)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{E_{kin}}{AE_0(u)} + 1)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{150\,000\text{MeV}}{931{,}5\text{MeV}} + 1)^2}} = 0,99998$$

V laboratorní soustavě dojde k kontrakci délek ve směru pohybu.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,99998^2}} = 162,031$$

$$d_0 = d_\perp$$

$$d_\rightarrow = \frac{d_\perp}{\gamma}$$

$$\frac{d_\rightarrow}{d_\perp} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{162,031} = 0,00617 \sim 6‰$$

Za přepokladu, že zlato naráží do stejného jádra je v těžišťové soustavě:

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\mu}{m_1}\beta_1 = \frac{1}{2}\beta_1 = 0,49999$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\beta}_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,49999^2}} = 1,155$$

$$\frac{\tilde{d}_\rightarrow}{\tilde{d}_\perp} = \frac{1}{\tilde{\gamma}} = \frac{1}{1,155} = 0,866$$

Rapidity:

$$y(\beta) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

$$y(\beta_1) = 5,781$$

$$\beta_{CM} = \frac{m_1\gamma}{m_1\gamma + m_2}\beta_1 = \frac{\gamma}{\gamma+1}\beta_1 = 0,994$$

$$y(\beta_{CM}) = 2,890$$

$$y(\tilde{\beta}_1) = y(\beta_1) - y(\beta_{CM}) = 2,890 = y(\beta_{CM})$$

4 Příklad 4

Zadání 4. Pod jakým úhlem je vyzařováno Čerenkovovo záření při průletu

a) elektronu $E_0 = 0,511\text{MeV}$

b) pionu $E_0 = 134,98\text{MeV}$

c) protonu $E_0 = 938\text{MeV}$

vodou, jestliže mají kinetickou energii rovnou trojnásobku prahové kinetické energie. Jaká je jejich rychlost, hybnost a vlnová délka.

$$E_{kin.} = 3E_{Thr.}$$
$$\vartheta = ?$$

Rešení 4. Pro vodu je index lomu $n = 1,33$.

$$E_{Thr.} = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} - 1 \right) = \nu(n) E_0 \quad (1)$$

$$\nu(n) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1{,}33^2}}} - 1 = 0,516 \quad (2)$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{E_{kin}}{E_0} + 1)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(3\nu(n) + 1)^2}} = 0,92 \quad (3)$$

$$\cos\vartheta = \frac{1}{n\beta} = \frac{1}{n\sqrt{1 - \frac{1}{9\nu^2(n)}}} = 0,817 \quad (4)$$

$$\vartheta = 0,614\text{rad} = 35.18^\circ \quad (5)$$

$$v = \beta c = 0,9199c \quad (6)$$

$$p = mv = \frac{E_0 \gamma \beta}{c} = \begin{cases} 0,6195; a) \\ 163,638; b) \\ 1137,175; c) \end{cases} \text{MeV/c} \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{pc} = \frac{2 \cdot 3,142 \cdot 197,3\text{MeV} \cdot \text{fm}}{pc} = \begin{cases} 2001,067; a) \\ 7,576; b) \\ 1,090; c) \end{cases} \text{fm} \quad (8)$$

$$(9)$$

5 Příklad 5

Zadání 5. Polonium-beryliový zdroj neutronů v kterém probíhá reakce ${}^{9}Be(\alpha, n)^{12}C$ vyzařoval za 410 dní po zhotovení $0,5 \cdot 10^{6}$ neutronů za sekundu. Určete hmotnost polonia v okamžiku zhotovení zdroje, které se nacházelo ve směsi s beryliem, jestliže je výtěžek reakce (α, n) na beryliu pro částice alfa polonia $0,26 \cdot 10^{-4}$. Jaká je energie této reakce?

$$ {}^{210}_{8}4Po \rightarrow^{4}_{2} \alpha +_{8} 2^{206}Pb \tag{10} $$
$$ {}^{9}_{4}Be +^{2}_{4} \alpha \rightarrow^{12}_{6} C +^{1}_{0} n \tag{11} $$

Rešení 5. Počet vzniknuvších neutronů je:

$$ \#n = \#\alpha = \Delta N = 0,5 \cdot 10^{6} \cdot 410 \cdot 24 \cdot 3600 = 1,7712 \cdot 10^{13} $$

Výtěžnost alfa částic je:

$$ w = \frac{\Delta N}{N_0} = 0,26 \cdot 10^{-4} $$

Počet částic polonia na počátku je:

$$ N_0(Po) = \frac{\Delta N}{w} $$

Hmotnost polonia na počátku je:

$$ M(Po) = \frac{N_0(Po)}{N_A} M_1(Po) = \frac{\Delta N M_1(Po)}{w N_A} $$
$$ M(Po) = \frac{1,7712 \cdot 10^{13} \cdot 210\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}}{0,26 \cdot 10^{-4} \cdot 6,0225 \cdot 10^{23}\text{mol}^{-1}} = 237,5\mu\text{g} $$

Energie reakce:

$$ Q(10) = E_{pred} - E_{po} = 0 $$
$$ Q(11) = -2E_0 = -2 \cdot 931,5 = -1863\text{MeV} $$

6 Příklad 6

Zadání 6. Na tlustý měděný terč dopadá svazek deuteronů o energii 40 MeV. Kolik tepla musí odvádět chlazení terče za sekundu, jestliže je intenzita deuteronového svazku 300μA.

$$E(d) = 40\text{MeV} \tag{12}$$
$$I(d) = 300\mu\text{A} \tag{13}$$
$$\frac{Q}{t} = ? \tag{14}$$

Rešení 6.

$$\begin{aligned} I &= \frac{q}{t} \\ q(d) &= e \\ t &= \frac{e}{I} \end{aligned}$$

$$\frac{Q}{t} = \frac{EI}{e} = \frac{40 \cdot 300\text{MeV} \cdot \mu\text{A}}{e} = 12\text{kVA} = 12\text{kW}$$

7 Příklad 7

Zadání 7. Ve skleněné ampuli je umístěn 1 g čistého radia 226. Jaké množství radonu se nahromadí v ampuli po uplynutí sedmi let?

$$\begin{aligned} M(Ra) &= 1\text{g} \\ t &= 7\text{let} \\ T_{1/2}(Ra) &= 1600\text{let} \\ n(Ra) &= ? \end{aligned}$$

Rešení 7.

$$\begin{aligned} N(t) &= N(0)e^{-\lambda t} \\ \lambda &= \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \\ N(t) &= N(0)e^{\frac{-t \ln 2}{T_{1/2}}} \end{aligned}$$

$$n(Rn) = \frac{M(Ra)}{M_1(Ra)}\left(1 - e^{\frac{-t\ln 2}{T_{1/2}}}\right) = \frac{1\text{g}}{226\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}}\left(1 - e^{\frac{-7\ln 2}{1600}}\right)$$

$$n(Rn) = 1,33979\cdot 10^{-5}\text{mol} = 13,34\mu\text{mol}$$

$$M(Rn) = nM_1(Rn) = 1,33979\cdot 10^{-5}\cdot 222 = 0,00297\text{g} \sim 3\text{mg}$$

Jelikož vzniká izotop ^{222}Rn.

8 Příklad 8

Zadání 8. Určete kinetickou energii E_p protonu, který vzniká při rozpadu neutronu, jestliže úhel mezi vyletujícím elektronem a antineutrinem je 60° a jejich kinetické energie jsou stejné.

$$T(e^-) = T(\bar{\nu}) = T$$

$$\vartheta = 60°$$

Rešení 8. Zákon zachování hybnosti:

$$\overrightarrow{p}(p) + \overrightarrow{p}(\bar{\nu}) + \overrightarrow{p}(e^-) = \overrightarrow{0} \tag{15}$$

$$-\overrightarrow{p}(p) = \overrightarrow{p}(\bar{\nu}) + \overrightarrow{p}(e^-) \tag{16}$$

$$p^2(p) = p^2(\bar{\nu}) + p^2(e^-) + 2p(\bar{\nu})p(e^-)\cos\vartheta \tag{17}$$

$$2M(p)T(p) = 2M(\bar{\nu})T + 2M(e^-)T + 4\sqrt{M(\bar{\nu})M(e^-)}T\cos\vartheta \tag{18}$$

Zákon zachování energie:

$$T(\bar{\nu}) + T(e^-) + T(p) + E_0(\bar{\nu}) + E_0(e^-) + E_0(p) = 0$$

$$T = \frac{1}{2}(T(p) + E_0(\bar{\nu}) + E_0(e^-) + E_0(p))$$

Předpokládáme, že $E_0(\bar{\nu}) \sim 0$. Dosazením T do rovnice (18) po úpravách dostaneme:

$$T(p) = \frac{E_0(p) + E_0(e^-)}{\frac{2E_0(p)}{E_0(e^-)} - 1} = 0,256\text{MeV} = 255,709\text{keV}$$

9 Příklad 9

Zadání 9. Jakou energii musí mít lithium 6, aby prošlo nad coulombovskou bariéru jádra olova 208? Pokud dojde k pružnému rozptylu jádra s touto energií, jaká bude jeho energie po rozptylu do úhlu 56 stupňů?

Rešení 9. Výška Coulombovské bariéry:

$$V(Pb) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z(Pb)Z(Li)e^2}{r_0 A^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{4\cdot 3,142\cdot 8,854\cdot 10^{-12}}\frac{82\cdot 3\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}{1,2\cdot 10^{-15}\sqrt[3]{208}}\mathrm{eV}$$

$$V(Pb) = 49,817\mathrm{MeV}$$

Pružný rozptyl: Zákon zachování energie:

$$T_{in}(Li) = T_{out}(Li) + T_{out}(Pb)$$

Zákon zachování hybnosti:

$$p_{in}^2(Li) = p_{out}^2(Pb) + p_{out}^2(Li) + 2p_{out}(Pb)p_{out}(Li)\cos\vartheta$$

Společně rovnice vedou na kvadratickou rovnici pro $T_{out}(Li)$:

$$\begin{aligned} AT_{out}^2(Li) + BT_{out}(Li) + C = 0 \\ A = (M(Li) - M(Pb))^2 + 4M(Li)M(Pb)\cos^2\vartheta \\ B = -2T_{in}(Li)(M(Pb) - M(Li))^2 - 4M(Li)M(Pb)T_{in}(Li)\cos^2\vartheta \\ C = T_{in}^2(Li)(M(Pb) - M(Li))^2 \\ T_{out}(Li) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \end{aligned}$$

$$T_{out}(Li) = 47,982\mathrm{MeV}$$

2. řešení je rovno $T_{in}(Li)$, nastává tehdy, když se lithium s olovem nesrazí.

10 Příklad 10

Zadání 10. Synchrotron urychlující jádra helia z energie 50 MeV na 800 MeV má poloměr 50 m. Jaká musí být jeho minimální a maximální magnetická indukce? Jak je to u něj s frekvencí?

Rešení 10.

$$v = \sqrt{\frac{2Ekin.}{E_0}}c$$

$$F = qBv = \frac{mv^2}{r}$$

$$B = \frac{mv}{qr} = \frac{E_0^2 c\sqrt{2E_{kin.}}}{2c^2 er\sqrt{E_0}}\left(1 + \frac{E_{kin}}{E_0}\right)$$

$$B_{min.} = 1,231 \cdot 10^{-11}\mathrm{T} = 12,315\mathrm{pT}$$

$$B_{max.} = 5,904 \cdot 10^{-11}\mathrm{T} = 59,040\mathrm{pT}$$

Frekvence:

$$v = \omega r$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{c}{r}\sqrt{\frac{2E_{kin.}}{E_0}} = \frac{3 \cdot 10^8}{50}\sqrt{\frac{2E_{kin.}}{3727,4}}$$

$$\omega_{min.} = 982\,761\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega_{max.} = 3\,931\,047\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

$$f_{min.} = 156\mathrm{kHz}$$

$$f_{max.} = 625\mathrm{kHz}$$