

# DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE, SYMETRIE A GRUPY

## OBSAH

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| 1. Grupy, symetrie, akce                   | 1  |
| 1.1. Grupy                                 | 1  |
| 1.2. Symetrie                              | 2  |
| 1.3. Akce                                  | 3  |
| 2. Grupy symetrií rovnice $F(x) = 0$       | 6  |
| 2.1. Topologické grupy                     | 6  |
| 2.2. Vektorová pole a jejich toky          | 7  |
| 3. Diferenciální rovnice, symetrie a grupy | 11 |
| 3.1. Infinitesimální transformace          | 11 |
| 3.2. Prodloužení                           | 14 |
| 4. Lieovy algebry                          | 20 |
| Dodatek D. Homogenní lineární PDR 1. řádu  | 21 |
| Reference                                  | 25 |

## 1. GRUPY, SYMETRIE, AKCE

### 1.1. Grupy.

**1.1. Definice** (Galois, cca 1840). Buďte  $M$  libovolná množina,  $\odot : M \times M \rightarrow M$ . Dvojice  $(M, \odot)$  se nazývá *grupa*, jsou-li splněny následující podmínky:

- (1)  $(\forall x, y, z \in M)(x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z)$ ,
- (2)  $(\exists e \in M)(\forall x \in M)(e \odot x = x \odot e = x)$ ,
- (3)  $(\forall x \in M)(\exists x^{-1} \in M)(x \odot x^{-1} = x^{-1} \odot x = e)$ .

*Poznámka.* Nejmenší možná grupa obsahuje jediný prvek (jednotku) a nazývá se *triviální grupa*.

**1.2. Definice.** Grupa  $(M, \odot)$  se nazývá *Abelova*, jestliže pro každé  $x, y \in M$  platí

$$x \odot y = y \odot x.$$

**1.3. Definice.** Buďte  $\mathcal{G} = (M, \odot)$  grupa,  $N \subset M$ . Je-li  $(N, \odot|_{N \times N})$  grupa, nazývá se *podgrupou* grupy  $\mathcal{G}$ .

*Poznámka.* Buďte  $\mathcal{G} = (M, \odot)$  grupa,  $N \subset M$ . Potom  $(N, \odot|_{N \times N})$  je podgrupa grupy  $\mathcal{G}$  právě tehdy, když pro každé  $a, b \in N$  platí  $a \odot b^{-1} \in N$ .

**1.4. Definice.** Buďte  $(M, \odot)$ ,  $(N, \cdot)$  grupy,  $f : M \rightarrow N$ . Zobrazení  $f$  se nazývá *homomorfismus*, jestliže pro každé  $x, y \in M$  platí

$$f(x \odot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Je-li  $f$  navíc prosté, resp. „na“, resp. prosté a „na“, nazývá se *monomorfismus*, resp. *epimorfismus*, resp. *izomorfismus*.

**1.5. Příklad.** (1) Abelova grupa  $(\mathbb{Z}, +)$ , resp.  $(\mathbb{R}, +)$ , resp.  $(\mathbb{C}, +)$  se nazývá *aditivní grupa celých*, resp. *reálných*, resp. *komplexních čísel*.

(2) Abelova grupa  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ , resp.  $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$  se nazývá *multiplikativní grupa reálných*, resp. *komplexních čísel*.

(3) Buď  $(M, T, \oplus, \odot)$  vektorový prostor. Potom  $(M, \oplus)$  je Abelova grupa.

(4) Důležitou třídu grup tvoří grupy, jejichž prvky jsou čtvercové matice a grupovou operací je násobení matic:

- Je zřejmé, že množina všech čtvercových reálných, resp. komplexních matic  $n$ -tého řádu společně s operací násobení matic grupu netvoří. Omezíme-li se však na regulární matice, získáme takto grupu  $GL(n, \mathbb{R})$ , resp.  $GL(n, \mathbb{C})$  (anglicky *General Linear*):

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det A \neq 0\}, \quad GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} \mid \det A \neq 0\}.$$

- Podgrupou grupy  $GL(n, \mathbb{R})$ , resp.  $GL(n, \mathbb{C})$  je grupa  $SL(n, \mathbb{R})$ , resp.  $SL(n, \mathbb{C})$  (anglicky *Special Linear*) všech reálných, resp. komplexních čtvercových matic  $n$ -tého řádu s determinantem rovným jedné:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}, \quad SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}.$$

- Grupu tvoří též množina všech celočíselných čtvercových matic  $n$ -tého řádu s determinantem rovným jedné. Tato grupa se nazývá *modulární* a značí se  $SL(n, \mathbb{Z})$ :

$$SL(n, \mathbb{Z}) = \{A \in \mathbb{Z}^{n,n} \mid \det A = 1\}.$$

- Další podgrupou  $GL(n, \mathbb{R})$  je grupa  $O(n)$  všech ortogonálních matic (anglicky *Orthogonal*):

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid (Ax, Ay) = (x, y) \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Podgrupou  $O(n)$  (a tedy i  $GL(n, \mathbb{R})$ ) je grupa všech ortogonálních matic s determinantem rovným jedné  $SO(n)$  (anglicky *Special Orthogonal*):

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}.$$

- Podgrupou  $GL(n, \mathbb{C})$  je grupa  $U(n)$  všech unitárních matic (anglicky *Unitary*):

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid (Ax, Ay) = (x, y) \forall x, y \in \mathbb{C}^n\}.$$

Podgrupou  $U(n)$  (a tedy i  $GL(n, \mathbb{C})$ ) je grupa všech unitárních matic s determinantem rovným jedné  $SU(n)$  (anglicky *Special Unitary*):

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}.$$

## 1.2. Symetrie.

**1.6. Definice.** Buďte  $B$  libovolná množina,  $A \subset B$ ,  $\tau : B \rightarrow B$ .

- (1) Zobrazení  $\tau$  se nazývá *slabá symetrie* množiny  $A$ , jestliže  $\tau(A) \subset A$ .
- (2) Zobrazení  $\tau$  se nazývá *symetrie* množiny  $A$ , jestliže  $\tau(A) = A$ .

**1.7. Věta.** Buďte  $B$  libovolná množina,  $A \subset B$ ,  $\tau : B \rightarrow B$  prosté zobrazení. Nechť  $\tau$  a  $\tau^{-1}$  jsou slabé symetrie množiny  $A$ . Potom  $\tau$  a  $\tau^{-1}$  jsou symetrie množiny  $A$ .

*D ů k a z .* Platí  $\tau(A) \subset A$ ,  $\tau^{-1}(A) \subset A$ ,  $\tau \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ \tau = \text{id}$ . Odtud např.  $A = (\tau \circ \tau^{-1})(A) = \tau(\tau^{-1}(A)) \subset \tau(A)$ , tedy  $\tau(A) = A$ . Druhou část dokážeme podobně.  $\square$

**1.8. Věta.** Buďte  $B$  libovolná množina,  $A \subset B$ ,  $\tau_1, \tau_2$  (slabé) symetrie množiny  $A$ . Potom  $\tau_1 \circ \tau_2$  je (slabá) symetrie množiny  $A$ .

*D ů k a z .* Platí  $(\tau_1 \circ \tau_2)(A) = \tau_1(\tau_2(A)) \subset \tau_1(A) \subset A$ . Jsou-li  $\tau_1, \tau_2$  dokonce symetrie, můžeme psát místo obou inkluzí rovnosti.  $\square$

**1.9. Důsledek.** Buďte  $B$  libovolná množina,  $A \subset B$ . Potom množina všech invertibilních symetrií množiny  $A$  společně s operací skládání zobrazení tvoří grupu.

### 1.3. Akce.

**1.10. Úmluva.** Buď  $X$  libovolná neprázdná množina. Potom množina  $M$  všech bijekcí  $X \rightarrow X$  společně s operací  $\circ$  skládání zobrazení tvoří grupu. V dalším budeme tuto grupu značit symbolem  $\mathcal{S}(X)$ .

*Příklad.* Platí  $\mathcal{S}(\hat{n}) = S_n$  (grupa permutací).

*Poznámka.* Motivací k následující definici budiž tato úvaha: Nechť je dána libovolná neprázdná množina  $X$ . Představme si, že máme vyšetřovat nějakou podgrupu  $\mathcal{S}$  grupy  $\mathcal{S}(X)$ . Je jasné, že mnohem příjemněji se nám bude pracovat s takovou grupou, která je s  $\mathcal{S}$  izomorfní, ale jejímiž prvky jsou nějaké snáze popsatelné objekty než zobrazení, např. čísla, vektory nebo matice.

**1.11. Definice.** Buďte  $G$  grupa,  $X$  libovolná neprázdná množina. Zobrazení  $\Psi : G \times X \rightarrow X$  nazveme (*levou*) *akcí* grupy  $G$  na množině  $X$ , jsou-li splněny následující dvě podmínky:

- (1)  $\forall x \in X \forall g_1, g_2 \in G : \Psi(g_1 \cdot g_2, x) = \Psi(g_1, \Psi(g_2, x))$ ,
- (2)  $\forall x \in X : \Psi(e, x) = x$ .

**1.12. Úmluva.** Akci budeme značit symbolem  $\triangleright$ . Axiomy z předchozí definice můžeme nyní zapsat takto:

- (1)  $\forall x \in X \forall g_1, g_2 \in G : g_1 \cdot g_2 \triangleright x = g_1 \triangleright g_2 \triangleright x$ ,
- (2)  $\forall x \in X : e \triangleright x = x$ .

*Příklad.* Uvedeme tři speciální akce pro případ, kdy  $X = G$ :

- (1)  $g \triangleright x := g \cdot x$  je akce *regulární*,
- (2)  $g \triangleright x := x \cdot g^{-1}$  je akce *konjugovaná k akci regulární*,
- (3)  $g \triangleright x := g \cdot x \cdot g^{-1}$  je akce *adjungovaná*.

*Poznámka.* Buď  $\triangleright$  akce grupy  $G$  na množině  $X$ . Potom zobrazení  $f_g : X \rightarrow X$  definované vztahem  $f_g(x) := g \triangleright x$  pro všechna  $x \in X$  je pro každé  $g \in G$  bijekce, tj. platí  $(\forall g \in G)(f_g \in \mathcal{S}(X))$ .

*D ů k a z .* Buď  $g \in G$ . Předpokládejme, že existují  $x_1, x_2 \in X$  tak, že  $f_g(x_1) = f_g(x_2)$  neboli  $g \triangleright x_1 = g \triangleright x_2$ . Potom platí

$$x_1 = e \triangleright x_1 = g^{-1} \cdot g \triangleright x_1 = g^{-1} \triangleright g \triangleright x_1 = g^{-1} \triangleright g \triangleright x_2 = g^{-1} \cdot g \triangleright x_2 = e \triangleright x_2 = x_2,$$

takže zobrazení  $f_g$  je prosté. Buď  $x \in X$ . Označme  $x' := g^{-1} \triangleright x$ . Potom

$$f_g(x') = g \triangleright g^{-1} \triangleright x = g \cdot g^{-1} \triangleright x = e \triangleright x = x,$$

takže zobrazení  $f_g$  je „na“.

□

**1.13. Věta.** Buď  $\triangleright$  akce grupy  $G$  na množině  $X$ . Definujme zobrazení  $\phi : G \rightarrow \mathcal{S}(X)$  vztahem

$$[\phi(g)](x) := g \triangleright x \quad \forall g \in G \forall x \in X.$$

Potom existuje podgrupa  $\mathcal{S}$  grupy  $\mathcal{S}(X)$  tak, že  $\phi$  je epimorfismus  $G \rightarrow \mathcal{S}$ .

*D ů k a z .* Podle předchozí poznámky je  $\phi : G \rightarrow \mathcal{S}(X)$ . Dokažme, že  $\phi$  je homomorfismus  $G \rightarrow \mathcal{S}(X)$ , tj. že pro každé  $g_1, g_2 \in G$  platí  $\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$ : Pro každé  $x \in X$  je

$$\begin{aligned} [\phi(g_1 \cdot g_2)](x) &= g_1 \cdot g_2 \triangleright x = g_1 \triangleright g_2 \triangleright x = g_1 \triangleright [\phi(g_2)](x) = [\phi(g_1)]([\phi(g_2)](x)) = \\ &= [\phi(g_1) \circ \phi(g_2)](x). \end{aligned}$$

Označme  $\mathcal{S} := \phi(G)$ . Právě jsme dokázali, že pro  $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$  je  $f_1 \circ f_2 \in \mathcal{S}$ . Zbývá dokázat, že grupoid  $\mathcal{S}$  je podgrupou  $\mathcal{S}(X)$ .

- (1) Nejprve dokažme, že  $\text{id} \in \mathcal{S}$ . Pro každé  $x \in X$  platí

$$[\phi(e)](x) = e \triangleright x = x,$$

tudíž  $\phi(e) = \text{id} \in \mathcal{S}$ .

- (2) Dokažme, že  $(\forall f \in \mathcal{S})(f^{-1} \in \mathcal{S})$ . Je-li  $f \in \mathcal{S}$ , potom existuje  $g \in G$  tak, že  $f = \phi(g)$ . Označme  $f' := \phi(g^{-1})$ . Pro každé  $x \in X$  platí

$$(f \circ f')(x) = f(f'(x)) = [\phi(g) \circ \phi(g^{-1})](x) = [\phi(e)](x) = x,$$

$$(f' \circ f)(x) = f'(f(x)) = [\phi(g^{-1}) \circ \phi(g)](x) = [\phi(e)](x) = x.$$

Je tedy  $f \circ f' = f' \circ f = \text{id}$  pro každé  $f \in \mathcal{S}$ , tudíž  $f' = f^{-1} \in \mathcal{S}$ .

Z předchozího vyplývá, že pro  $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$  je  $f_1 \circ f_2^{-1} \in \mathcal{S}$ . To ovšem znamená, že grupa  $\mathcal{S}$  je podgrupou  $\mathcal{S}(X)$ .  $\square$

*Poznámka.* Buďte  $G_1, G_2$  grupy,  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  homomorfismus. Potom  $\phi(G_1)$  je grupa.

- D ů k a z .* (1) Dokážeme, že  $\phi(G_1)$  je grupoid: Jsou-li  $a_1, a_2 \in \phi(G_1)$ , potom existují  $g_1, g_2 \in G_1$  tak, že  $a_i = \phi(g_i)$ ,  $i = 1, 2$ , a platí  $a_1 \cdot a_2 = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2) = \phi(g_1 \cdot g_2)$ .
- (2) Dokážeme, že  $\phi(G_1)$  je pologrupa: Jsou-li  $a_1, a_2, a_3 \in \phi(G_1)$ , potom existují  $g_1, g_2, g_3 \in G_1$  tak, že  $a_i = \phi(g_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a platí  $a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2 \cdot g_3) = \phi(g_1 \cdot g_2 \cdot g_3) = \phi(g_1 \cdot g_2) \cdot \phi(g_3) = (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3$ .
- (3) Dokážeme, že  $\phi(G_1)$  je monoid: Je-li  $a \in \phi(G_1)$ , potom existuje  $g \in G$  tak, že  $a = \phi(g)$ . Označíme-li  $i := \phi(e)$ , můžeme psát  $a \cdot i = \phi(g) \cdot \phi(e) = \phi(g) = a$  a podobně  $i \cdot a = \phi(e) \cdot \phi(g) = \phi(g) = a$ . To ale znamená, že  $i$  je jednotkou ve  $\phi(G_1)$ .
- (4) Dokážeme, že  $\phi(G_1)$  je grupa. K tomu nyní stačí dokázat, že ke každému prvku  $a \in \phi(G_1)$  existuje ve  $\phi(G_1)$  prvek inverzní. Je-li  $a \in \phi(G_1)$ , potom existuje  $g \in G$  tak, že  $a = \phi(g)$ . Označíme-li  $a' := \phi(g^{-1})$ , můžeme psát  $a \cdot a' = \phi(g) \cdot \phi(g^{-1}) = \phi(e) = i$  a podobně  $a' \cdot a = \phi(g^{-1}) \cdot \phi(g) = \phi(e) = i$ .  $\square$

**1.14. Věta.** Buďte  $G$  grupa,  $X$  libovolná neprázdná množina,  $\mathcal{S}$  podgrupa  $\mathcal{S}(X)$ ,  $\phi : G \rightarrow \mathcal{S}$  epimorfismus. Potom zobrazení  $\triangleright : G \times X \rightarrow X$  definované vztahem

$$g \triangleright x := [\phi(g)](x) \quad \forall g \in G \forall x \in X$$

je akce grupy  $G$  na množině  $X$ .

- D ů k a z .* (1) Buďte  $g_1, g_2 \in G$ . Potom pro každé  $x \in X$  platí

$$\begin{aligned} g_1 \cdot g_2 \triangleright x &= [\phi(g_1 \cdot g_2)](x) = [\phi(g_1) \circ \phi(g_2)](x) = \\ &= [\phi(g_1)]([\phi(g_2)](x)) = [\phi(g_1)](g_2 \triangleright x) = g_1 \triangleright g_2 \triangleright x. \end{aligned}$$

- (2) Ježto je  $\mathcal{S}$  podgrupa  $\mathcal{S}(X)$ , musí platit  $\text{id} \in \mathcal{S}$ . Z předchozí poznámky a z jednoznačnosti jednotky plyne, že  $\phi(e) = \text{id}$ . Odtud pro každé  $x \in X$  dostáváme  $e \triangleright x = \phi(e)x = x$ .  $\square$

**1.15. Definice.** Buďte  $G$  grupa,  $X$  libovolná neprázdná množina. Zobrazení  $\Psi : G \times X \rightarrow X$  se nazývá *pravá akce* grupy  $G$  na množině  $X$ , jsou-li splněny následující dvě podmínky:

- (1)  $\forall x \in X \forall g_1, g_2 \in G : \Psi(g_1 \cdot g_2, x) = \Psi(g_2, \Psi(g_1, x))$ ,  
(2)  $\forall x \in X : \Psi(e, x) = x$ .

*Poznámka.* Buďte  $G = (M, \cdot)$  grupa,  $X$  libovolná neprázdná množina. Potom zobrazení  $\Psi : G \times X \rightarrow X$  je akcí grupy  $G$  na množině  $X$  právě tehdy, je-li pravou akcí grupy  $G'$  na množině  $X$ , kde  $G' = (M, \odot)$  je grupa, v níž je součin definován vztahem  $a \odot b := b \cdot a$  pro všechna  $a, b \in M$ .

- D ů k a z .* (1) ( $\Rightarrow$ ) Pro každé  $g_1, g_2 \in G$  a každé  $x \in X$  platí  $\Psi(g_1 \odot g_2, x) = \Psi(g_2 \cdot g_1, x) = \Psi(g_2, \Psi(g_1, x))$ .  
 (2) ( $\Leftarrow$ ) Pro každé  $g_1, g_2 \in G$  a každé  $x \in X$  platí  $\Psi(g_1 \cdot g_2, x) = \Psi(g_2 \odot g_1, x) = \Psi(g_1, \Psi(g_2, x))$ .  $\square$

**1.16. Úmluva.** Pravou akci budeme značit symbolem  $\triangleleft$ . Axiomy z předchozí definice můžeme nyní zapsat takto:

- (1)  $\forall x \in X \forall g_1, g_2 \in G : g_1 \cdot g_2 \triangleleft x = g_2 \triangleleft g_1 \triangleleft x$ ,  
 (2)  $\forall x \in X : e \triangleleft x = x$ .

*Příklad.* Příkladem pravé akce pro případ  $X = G$  je  $g \triangleleft x := x \cdot g$ .

*Příklad.* Připomeňme, že  $SL(2, \mathbb{R})$  značí grupu všech reálných matic 2. řádu s determinantem rovným 1. Pro každou matici  $A \in SL(2, \mathbb{R})$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

a pro každou funkci  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  definujme funkci  $A \triangleleft f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  vztahem

$$(A \triangleleft f)(x, t) := \frac{1}{\sqrt{d + cat}} \exp\left(-\frac{cx^2}{4(d + cat)}\right) f\left(\frac{x}{d + cat}, \frac{aat + b}{ca^2t + d\alpha}\right)$$

pro každé  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ . Potom  $\triangleleft$  je při každé volbě parametru  $\alpha \neq 0$  pravá akce grupy  $SL(2, \mathbb{R})$  na množině všech funkcí  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ .

**1.17. Věta.** Buď  $\triangleleft$  pravá akce grupy  $G$  na množině  $X$ . Pro každé  $g \in G$  a každé zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  definujme zobrazení  $g \triangleright f : X \rightarrow Y$  vztahem

$$(g \triangleright f)(x) := f(g \triangleleft x) \quad \forall x \in X.$$

Potom  $\triangleright$  je akce grupy  $G$  na množině všech zobrazení  $X \rightarrow Y$ .

- D ů k a z .* (1) Pro všechna  $g_1, g_2 \in G$ , všechna zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  a všechna  $x \in X$  platí  $(g_1 \cdot g_2 \triangleright f)(x) = f(g_1 \cdot g_2 \triangleleft x) = f(g_2 \triangleleft g_1 \triangleleft x) = (g_2 \triangleright f)(g_1 \triangleleft x) = (g_1 \triangleright g_2 \triangleright f)(x)$ , tudíž  $g_1 \cdot g_2 \triangleright f = g_1 \triangleright g_2 \triangleright f$ .  
 (2) Pro všechna  $g \in G$ , všechna zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  a všechna  $x \in X$  platí  $(e \triangleright f)(x) = f(e \triangleleft x) = f(x)$  neboli  $e \triangleright f = f$ .  $\square$

**1.18. Věta.** Buďte  $\triangleleft$  pravá akce grupy  $G$  na množině  $X$ ,  $\triangleright$  akce grupy  $G$  na množině  $Y$ . Pro každé  $g \in G$  a každé zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  definujme zobrazení  $g \blacktriangleright f : X \rightarrow Y$  vztahem

$$(g \blacktriangleright f)(x) := g \triangleright (f(g \triangleleft x)) \quad \forall x \in X.$$

Potom  $\blacktriangleright$  je akce grupy  $G$  na množině všech zobrazení  $X \rightarrow Y$ .

- D ů k a z .* (1) Pro všechna  $g_1, g_2 \in G$ , všechna zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  a všechna  $x \in X$  platí

$$\begin{aligned} (g_1 \cdot g_2 \blacktriangleright f)(x) &= g_1 \cdot g_2 \triangleright (f(g_1 \cdot g_2 \triangleleft x)) = g_1 \triangleright g_2 \triangleright f(g_2 \triangleleft g_1 \triangleleft x) = \\ &= g_1 \triangleright [(g_2 \blacktriangleright f)(g_1 \triangleleft x)] = (g_1 \blacktriangleright g_2 \blacktriangleright f)(x), \end{aligned}$$

tudíž  $g_1 \cdot g_2 \blacktriangleright f = g_1 \blacktriangleright g_2 \blacktriangleright f$ .

- (2) Pro všechna  $g \in G$ , všechna zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  a všechna  $x \in X$  platí

$$(e \blacktriangleright f)(x) = e \triangleright (f(e \triangleleft x)) = f(x)$$

neboli  $e \blacktriangleright f = f$ .  $\square$

*Poznámka.* Buďte  $\triangleleft$  pravá akce grupy  $G$  na množině  $X$ ,  $\triangleright$  akce grupy  $G$  na množině  $Y$ . Pro každé  $g \in G$  a každé zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  definujme zobrazení  $g \blacktriangleright f : X \rightarrow Y$  vztahem

$$(g \blacktriangleright f)(g^{-1} \triangleleft x) := g \triangleright (f(x)) \quad \forall x \in X.$$

Potom  $\blacktriangleright$  je akce grupy  $G$  na množině všech zobrazení  $X \rightarrow Y$ .

*D ů k a z .* Pro každé  $x \in X$  označme  $x' := g^{-1} \triangleleft x$ . Potom pro každé  $g \in G$  platí

$$g \triangleleft x' = g \triangleleft g^{-1} \triangleleft x = g^{-1} \cdot g \triangleleft x = e \triangleleft x = x.$$

Pro všechna  $g \in G$ , všechna zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  a všechna  $x' \in X$  platí

$$(g \blacktriangleright f)(x') = g \triangleright (f(g \triangleleft x')).$$

Tvrzení nyní plyne z předchozí věty.  $\square$

**1.19. Věta.** Buď  $\triangleright$  akce grupy  $G$  na množině  $M$ . Potom zobrazení  $\blacktriangleright : G \times 2^M \rightarrow 2^M$  definované vztahem

$$g \blacktriangleright A := \{x \in M \mid (\exists x' \in A)(g \triangleright x' = x)\} \quad \forall A \subset M$$

je akcí grupy  $G$  na potenční množině  $2^M$ .

*D ů k a z .* (1) Pro všechna  $g_1, g_2 \in G$  a všechny podmnožiny  $A \subset M$  platí

$$g_1 \cdot g_2 \blacktriangleright A = \{x \in M \mid (\exists x' \in A)(g_1 \triangleright g_2 \triangleright x' = x)\}.$$

Označíme-li  $B := \{x \in M \mid (\exists x' \in A)(g_2 \triangleright x' = x)\} = g_2 \blacktriangleright A$ , můžeme psát

$$g_1 \cdot g_2 \blacktriangleright A = \{x \in M \mid (\exists x'' \in B)(g_1 \triangleright x'' = x)\} = g_1 \blacktriangleright B = g_1 \blacktriangleright g_2 \blacktriangleright A.$$

(2) Pro každou podmnožinu  $A \subset M$  platí

$$e \blacktriangleright A = \{x \in M \mid (\exists x' \in A)(x' = x)\} = A.$$

$\square$

## 2. GRUPY SYMETRIÍ ROVNICE $F(x) = 0$

### 2.1. Topologické grupy.

*Poznámka.* Od tohoto okamžiku se budeme zajímat výhradně o akce grupy  $(\mathbb{R}^r, +)$ . Jak záhy uvidíme, dosud vybudovaný aparát by neumožňoval uspokojivě studovat toky vektorových polí. Je třeba slevit z požadavku, aby akce byla definována pro všechny prvky grupy. Východiskem je rozšíření definice akce o možnost, aby definičním oborem bylo jen jisté okolí jednotky (tj. nulového vektoru). Předmětem našeho zájmu budou zejména lokální 1-parametrické Lieovy grupy transformací, ostatní informace v tomto odstavci jsou spíš jen doplňkové.

**2.1. Definice.** *Topologickou grupou* nazveme každou trojici  $(G, \cdot, \tau)$  takovou, že  $(G, \cdot)$  je grupa,  $(G, \tau)$  je Hausdorffův topologický prostor a operace násobení a inverze jsou spojitými zobrazeními.

*Poznámka.* Topologická grupa  $(G, \cdot, \tau)$  se nazývá *Lieova grupa*, je-li topologický prostor  $(G, \tau)$  hladkou varietou a operace násobení a inverze jsou hladkými zobrazeními.

**2.2. Definice.** Buď  $r \in \mathbb{N}$ . Buďte  $V_0, V$  otevřené množiny v  $\mathbb{R}^r$  a necht'  $\mathbf{0} \in V_0 \subset V$ . Buďte  $m : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^r, i : V_0 \rightarrow V$  a necht' platí

- (1)  $m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$  pro všechna taková  $x, y, z \in V$ , pro která jsou výrazy na obou stranách rovnosti definovány;
- (2)  $m(\mathbf{0}, x) = m(x, \mathbf{0}) = x$  pro všechna  $x \in V$ ;
- (3)  $m(x, i(x)) = m(i(x), x) = \mathbf{0}$  pro všechna  $x \in V_0$ ;
- (4)  $m \in C^\infty(V \times V), i \in C^\infty(V_0)$ .

Potom čtveřici  $(V_0, V, m, i)$  nazveme *lokální  $r$ -parametrickou Lieovou grupou*.

*Poznámka.* Speciálním případem „lokální“  $r$ -parametrické Lieovy grupy je grupa  $(\mathbb{R}^r, +)$ . (Stačí v předchozí definici položit  $V_0 = V = \mathbb{R}^r, m : (x, y) \mapsto x + y, i : x \mapsto -x$ .)

*Příklad.* Poněkud „lokálnější“  $r$ -parametrickou Lieovou grupou je čtveřice  $(V_0, V, m, i)$ , kde  $V$  je libovolná koule v  $\mathbb{R}^r$  taková, že  $\mathbf{0} \in V$ ,  $V_0 \subset V$  je koule se středem v bodě  $\mathbf{0}$  a  $m : (x, y) \mapsto x + y$ ,  $i : x \mapsto -x$ .

*Příklad* (speciální případ pro  $r = 1$ ). Buďte  $a, b \in \mathbb{R}$  a nechte  $a < 0 < b$ . Označme  $\delta := \min(-a, b)$  a položme:  $V_0 = (-\delta, \delta)$ ,  $V = (a, b)$ ,  $m : (x, y) \mapsto x + y$ ,  $i : x \mapsto -x$ . Potom čtveřice  $(V_0, V, m, i)$  je lokální 1-parametrická Lieova grupa. V dalším budeme tuto grupu značit pouze  $(a, b)$ .

**2.3. Věta.** Buď  $\mathcal{L} = (V_0, V, m, i)$  lokální  $r$ -parametrická Lieova grupa. Potom existuje Lieova grupa  $\mathcal{G} = (G, \cdot, \tau)$ , okolí  $U$  jednotky  $e$  v  $\mathcal{G}$  a zobrazení  $\chi : U \rightarrow V_0$  tak, že platí

- (1)  $\chi(e) = \mathbf{0}$ ;
- (2)  $\chi(g \cdot h) = m(\chi(g), \chi(h))$  pro všechna taková  $g, h \in U$ , že  $g \cdot h \in U$ ;
- (3)  $\chi(g^{-1}) = i(\chi(g))$  pro všechna taková  $g \in U$ , že  $g^{-1} \in U$ .

*Příklad.* Uvažme lokální 1-parametrickou Lieovu grupu  $(V_0, V, m, i)$ , kde  $V_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \frac{1}{4}\}$ ,  $V = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ ,  $m : (x, y) \mapsto \frac{2xy - x - y}{xy - 1}$  a  $i : (x) \mapsto \frac{x}{2x - 1}$ . Potom (při označení z věty) je  $\mathcal{G} = (\mathbb{R}, +)$  a  $\chi : t \mapsto \frac{t}{t - 1}$ .

**2.4. Definice.** Buďte  $\mathcal{L} = (V_0, V, m, i)$  lokální  $r$ -parametrická Lieova grupa,  $M$  otevřená množina v  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \subset V \times M$  tak, že  $\{\mathbf{0}\} \times M \subset U$ . Buď  $\Psi : U \rightarrow M \in \mathcal{C}^\infty$  a nechte platit:

- (1)  $\Psi(\mathbf{0}, x) = x$  pro každé  $x \in M$ ;
- (2)  $\Psi(m(g_1, g_2), x) = \Psi(g_1, \Psi(g_2, x))$  pro všechna taková  $g_1, g_2 \in V$  a  $x \in M$ , pro která jsou výrazy na obou stranách rovnosti definovány;
- (3) je-li  $(g, x) \in U$ , pak  $(i(g), \Psi(g, x)) \in U$  a  $\Psi(i(g), \Psi(g, x)) = x$ .

Potom trojici  $(\mathcal{L}, U, \Psi)$  nazveme lokální akci lokální  $r$ -parametrické Lieovy grupy  $\mathcal{L}$  na množině  $M$  nebo lokální Lieovou  $r$ -parametrickou grupou transformací množiny  $M$ .

**2.5. Definice.** Buď  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , kde  $M$  je otevřená množina v  $\mathbb{R}^n$ . Označme  $\mathcal{S}_F = \{x \in M \mid F(x) = 0\}$ . Libovolnou lokální akci  $(\mathcal{L}, U, \Psi)$  na  $M$  nazveme *grupou symetrií* rovnice  $F(x) = 0$ , jestliže pro všechna taková  $(g, x) \in U$ , že  $x \in \mathcal{S}_F$ , platí  $\Psi(g, x) \in \mathcal{S}_F$ .

*Poznámka.* Méně přesně (zato možná názorněji) můžeme grupu symetrií rovnice  $F(x) = 0$  charakterizovat takto: Lokální akce  $(\mathcal{L}, U, \Psi)$  je grupou symetrií rovnice  $F(x) = 0$ , je-li (při označení z předchozích dvou definic) pro každé  $g \in V$  zobrazení  $x \mapsto \Psi(g, x)$  slabou symetrií množiny  $\mathcal{S}_F$ .

**2.6. Věta** (Sophus Lie). Každá lokální  $r$ -parametrická Lieova grupa transformací množiny  $\mathbb{R}$  je lokální podgrupou lokální grupy  $(\mathcal{L}, U, \Psi)$  transformací  $\mathbb{R}$ , kde  $\mathcal{L} = (\mathbb{R}^3, +)$ ,<sup>1</sup>

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, x) \in \mathbb{R}^4 \mid a_3x > -1\}$$

a

$$\Psi : x \mapsto \frac{a_1 + (1 + a_2)x}{1 + a_3x}.$$

## 2.2. Vektorová pole a jejich toky.

**2.7. Definice.** *Vektorovým polem* na jednoduše souvislé oblasti  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  nazýváme každé zobrazení  $\xi : \mathcal{O} \rightarrow V^n \in \mathcal{C}^\infty$ , kde  $V^n$  je zaměření (tj. přidružený lineární prostor) afinního prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>1</sup>Ve smyslu poznámky za definicí 2.2.

*Poznámka.* Přestože lze prostory  $\mathbb{R}^n$  a  $V^n$  z předchozí definice ztotožnit, je třeba rozlišovat mezi vektorovým polem a „obyčejným“ zobrazením z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^n$ . Vedle důvodů čistě formálních nás k tomu vede skutečnost, že každý z těchto dvou druhů zobrazení se jinak transformuje při záměně proměnných, jak uvidíme v závěru tohoto odstavce.

**2.8. Definice.** Buď  $\xi$  vektorové pole na jednoduše souvislé oblasti  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ . Jestliže existuje otevřený interval  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  a zobrazení  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathcal{O}$  tak, že pro každé  $t \in (a, b)$  platí  $\dot{\varphi}(t) = \xi(\varphi(t))$ , potom zobrazení  $\varphi$  nazveme *integrální křivkou* vektorového pole  $\xi$ .

**2.9. Definice.** Buďte  $\xi$  vektorové pole na jednoduše souvislé oblasti  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  otevřený interval obsahující 0. Zobrazení  $\Psi_\xi : (a, b) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  se nazývá *tok* vektorového pole  $\xi$ , jestliže platí

- (1)  $(\forall x \in \mathcal{O})(\Psi_\xi(0, x) = x)$ ,
- (2)  $(\forall x \in \mathcal{O})(\forall t \in (a, b)) \left( \frac{\partial \Psi_\xi}{\partial t}(t, x) = \xi(\Psi_\xi(t, x)) \right)$ .

**2.10. Definice.** Vektorové pole  $\xi$  na jednoduše souvislé oblasti  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  se nazývá *úplné*, jestliže existuje jeho tok  $\Psi_\xi$ , který je definován na množině  $\mathbb{R} \times \mathcal{O}$ .

*Příklad.* Vektorové pole  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\xi : x \mapsto x^2$  není úplné, neboť jeho tok  $\Psi_\xi : (t, x) \mapsto \frac{x}{1-tx}$  není definován např. v bodě  $(1, 1)$ .

**2.11. Věta.** Při označení z definice 2.9 pro všechna  $t, \tau \in (a, b)$  taková, že  $t + \tau \in (a, b)$ , a pro všechna  $x \in \mathcal{O}$  platí

$$\Psi_\xi(t + \tau, x) = \Psi_\xi(t, \Psi_\xi(\tau, x)).$$

*Důkaz.* Zvolme pevně  $\tau \in (a, b)$  a  $x \in \mathcal{O}$ . Jestliže pro každé  $t \in (a, b)$  takové, že  $t + \tau \in (a, b)$ , označíme

$$y_1(t) = \Psi_\xi(t, \Psi_\xi(\tau, x)), \quad y_2(t) = \Psi_\xi(t + \tau, x),$$

potom pro tato  $t$  platí

$$\dot{y}_1(t) = \xi(y_1(t)), \quad \dot{y}_2(t) = \xi(y_2(t)).$$

To znamená, že  $y_1$  a  $y_2$  jsou řešeními soustavy diferenciálních rovnic  $\dot{x} = \xi(x)$ , a protože  $y_1(0) = y_2(0)$ , je podle věty o jednoznačnosti řešení soustavy diferenciálních rovnic  $y_1 \equiv y_2$ .  $\square$

*Poznámka.* Buďte  $\xi$  vektorové pole na jednoduše souvislé oblasti  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_\xi : (a, b) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  jeho tok. Z předchozí věty vyplývá, že trojice  $((a, b), (a, b) \times \mathcal{O}, \Psi_\xi)$  je lokální akci lokální 1-parametrické grupy  $(a, b)$  na množině  $\mathcal{O}$ . O této lokální akci říkáme, že je *generována* vektorovým polem  $\xi$ . V následující poznámce si ukážeme, jak lze k dané lokální akci najít její generátor, tj. vektorové pole, které ji generuje.

*Poznámka.* Buďte  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  otevřený interval obsahující 0,  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  jednoduše souvislá oblast,  $\Psi : (a, b) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \in \mathcal{C}^\infty$  a nechte

- (1)  $(\forall x \in \mathcal{O})(\Psi(0, x) = x)$ ,
- (2)  $(\forall x \in \mathcal{O})(\forall t, \tau \in (a, b))(t + \tau \in (a, b) \Rightarrow \Psi(t + \tau, x) = \Psi(t, \Psi(\tau, x)))$ .

Definujme zobrazení  $\xi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  vztahem

$$\xi(x) := \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) \right|_{t=0} \quad \forall x \in \mathcal{O}.$$

Pro každé  $\tau \in (a, b)$  a každé  $x \in \mathcal{O}$  tedy platí

$$\xi(\Psi(\tau, x)) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, \Psi(\tau, x)) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t + \tau, x) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) \right|_{t=\tau}.$$

To znamená, že zobrazení  $\Psi$  je tokem vektorového pole  $\xi$ .

**2.12. Definice.** Budte  $\xi$  vektorové pole na jednoduše souvislé oblasti  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_\xi : (a, b) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  jeho tok. Bod  $x_0 \in \mathcal{O}$  se nazývá *invariantem* nebo *pevným bodem* toku  $\Psi_\xi$ , jestliže existuje takové číslo  $\delta \in (0, \min(-a, b))$ , že pro každé  $t \in (-\delta, \delta)$  platí  $\Psi_\xi(t, x_0) = x_0$ .

**2.13. Věta.** Budte  $\xi$  vektorové pole na jednoduše souvislé oblasti  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_\xi : (a, b) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  jeho tok,  $x_0 \in \mathcal{O}$ . Potom  $x_0$  je invariantem toku  $\Psi_\xi$  právě tehdy, když  $\xi(x_0) = 0$ .

*D ů k a z .* (1) Je-li  $x_0$  pevným bodem, potom platí

$$\xi(x_0) = \left. \frac{\partial \Psi_\xi(t, x_0)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial x_0}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

(2) Nechť  $\xi(x_0) = 0$ . Definujme zobrazení  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathcal{O}$  vztahem  $\varphi(t) = x_0$  pro všechna  $t \in (a, b)$ . Potom zobrazení  $t \mapsto \varphi(t)$  a  $t \mapsto \Psi_\xi(t, x_0)$  jsou dvěma řešeními diferenciální rovnice  $\dot{x} = \xi(x)$  splňující počáteční podmínku  $x(0) = x_0$ . Podle věty o jednoznačnosti řešení soustavy diferenciálních rovnic je tedy  $\Psi_\xi(t, x_0) = x_0$  pro všechna  $t \in (a, b)$ .  $\square$

**2.14. Definice.** Budte  $\xi$  vektorové pole na jednoduše souvislé oblasti  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_\xi : (a, b) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  jeho tok. Funkce  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá *invariantní funkcí* nebo *prvním integrálem* toku  $\Psi_\xi$ , jestliže pro každé  $x \in \mathcal{O}$  existuje takové číslo  $\delta \in (0, \min(-a, b))$ , že pro každé  $t \in (-\delta, \delta)$  platí  $f(\Psi_\xi(t, x)) = f(x)$ .

**2.15. Věta.** Budte  $\xi$  vektorové pole na jednoduše souvislé oblasti  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_\xi : (a, b) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  jeho tok,  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ . Potom  $f$  je invariantní funkcí toku  $\Psi_\xi$  právě tehdy, když platí

$$f'(x)[\xi(x)] = 0 \quad \forall x \in \mathcal{O}. \quad (1)$$

*D ů k a z .* (1) Nechť  $f$  je invariantní funkce. Potom pro libovolné  $x \in \mathcal{O}$  platí

$$f'(x)[\xi(x)] = f'(\Psi_\xi(0, x)) \left. \frac{\partial \Psi_\xi(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f(\Psi_\xi(t, x))}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

(2) Nechť pro všechna  $x \in \mathcal{O}$  platí  $f'(x)[\xi(x)] = 0$ . Potom pro každé  $x \in \mathcal{O}$  a všechna  $t \in (a, b)$  platí

$$\frac{\partial f(\Psi_\xi(t, x))}{\partial t} = f'(\Psi_\xi(t, x)) \frac{\partial \Psi_\xi(t, x)}{\partial t} = f'(\Psi_\xi(t, x))[\xi(\Psi_\xi(t, x))] = 0.$$

To ale znamená, že funkce  $t \mapsto f(\Psi_\xi(t, x))$  je na intervalu  $(a, b)$  konstantní, tedy  $f(\Psi_\xi(t, x)) = f(x)$  pro všechna  $x \in \mathcal{O}$  a všechna  $t \in (a, b)$ .  $\square$

*Poznámka.* (1) Mohlo by se zdát, že předchozí věta dává návod, jak hledat invariantní funkce toku daného vektorového pole: Stačilo by vyřešit rovnici (1) pro neznámou funkci  $f$ . Potíž je v tom, že tuto rovnici neumíme řešit jinak než nalezením prvních integrálů pole  $\xi$ . Úplně k ničemu ale uvedená věta není. V dodatku se k této větě vrátíme a uvedeme některé výsledky, z nichž alespoň vyplyne, „kolik” invariantních funkcí můžeme k danému poli najít.

(2) Přepíšeme-li si rovnici (1) „po složkách”, dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \xi^i = 0.$$

Rovnice tohoto tvaru se nazývá *homogenní lineární parciální diferenciální rovnice 1. řádu*.

**2.16. Věta.** Buď  $\mathbf{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^m \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , kde  $M$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$ , a necht pro každé  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\mathbf{F}}$  platí  $\text{h}(\mathbf{F}'(\mathbf{x})) = m$ . Buď  $((a, b), U, \Psi)$  lokální 1-parametrická grupa transformací množiny  $M$  generovaná polem  $\xi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Potom  $((a, b), U, \Psi)$  je grupou symetrií rovnice  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  právě tehdy, když pro všechna  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\mathbf{F}}$  platí  $\mathbf{F}'(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

*D ů k a z .* (1) Je-li  $((a, b), U, \Psi)$  grupa symetrií rovnice  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , potom pro každé  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\mathbf{F}}$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro všechna  $t \in (-\delta, \delta)$  platí  $\Psi(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}_{\mathbf{F}}$  neboli  $\mathbf{F}(\Psi(t, \mathbf{x})) = \mathbf{0}$ . Parciálním derivováním této rovnosti dostaneme

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\Psi(t, \mathbf{x})) \right|_{t=0} = \mathbf{F}'(\Psi(0, \mathbf{x})) \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right|_{t=0} = \mathbf{F}'(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

(2) Necht pro každé  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\mathbf{F}}$  platí  $\mathbf{F}'(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Buď  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}_{\mathbf{F}}$ . Podle předpokladu věty je  $\text{h}(\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)) = m$ , matice  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)$  má tudíž podle věty o hodnotnosti matice regulární submatice  $m$ -tého řádu. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je to submatice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x^m}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Definujme zobrazení  $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  vztahem

$$\chi^i(x^1, \dots, x^n) = \begin{cases} F^i(x^1, \dots, x^m) & \text{pro } i \in \hat{m}, \\ x^i & \text{pro } i \in \hat{n} \setminus \hat{m}. \end{cases}$$

pro každé  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ . Potom platí  $\text{h}(\chi'(\mathbf{x}_0)) = n$ , takže podle věty o inverzním zobrazení existuje takové okolí  $H_{\mathbf{x}_0}$  bodu  $\mathbf{x}_0$ , že restrikce zobrazení  $\chi$  na toto okolí je difeomorfismus a množina  $\chi(H_{\mathbf{x}_0})$  je otevřená. Na  $H_{\mathbf{x}_0}$  tedy můžeme zavést nové křivočaré souřadnice vztahem  $y^i = \chi^i(x^1, \dots, x^n)$  pro  $i \in \hat{n}$ . Označme  $\tilde{\mathbf{F}}$  vyjádření funkce  $\mathbf{F}$  v nových proměnných. Je  $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \chi^{-1}$  neboli  $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} \circ \chi$ . Víme, že pro všechna  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\mathbf{F}}$  platí

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{F}}'(\chi(\mathbf{x}))\chi'(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Jestliže pro  $\mathbf{y} \in \chi(H_{\mathbf{x}_0})$  položíme  $\tilde{\xi}(\mathbf{y}) = \chi'(\chi^{-1}(\mathbf{y}))\xi(\chi^{-1}(\mathbf{y}))$ , dostaneme

$$\tilde{\mathbf{F}}'(\mathbf{y})\tilde{\xi}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

pro každé  $\mathbf{y} \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathbf{F}}} \cap \chi(H_{\mathbf{x}_0})$ , neboť  $\chi(\mathcal{S}_{\mathbf{F}} \cap H_{\mathbf{x}_0}) = \mathcal{S}_{\tilde{\mathbf{F}}} \cap \chi(H_{\mathbf{x}_0})$ . Uvažme nyní, že pro každé  $i \in \hat{m}$  a všechna  $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n) \in \chi(H_{\mathbf{x}_0})$  platí

$$\tilde{\mathbf{F}}^i(y^1, \dots, y^n) = y^i.$$

Odtud vyplývá jednak to, že pro každé  $\mathbf{y} \in \chi(H_{\mathbf{x}_0})$  je

$$\tilde{\mathbf{F}}'(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

a dále, že pro každé  $\mathbf{y} \in \chi(H_{\mathbf{x}_0})$  je podmínka  $\mathbf{y} \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}$  ekvivalentní podmínce  $y^1 = \dots = y^m = 0$ . Na základě těchto dvou skutečností se z (2) dovídáme, že pro každé  $\mathbf{y} \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathbf{F}}} \cap \chi(H_{\mathbf{x}_0})$  a všechna  $i \in \hat{m}$  platí  $\tilde{\xi}^i(\mathbf{y}) = 0$ . To ale znamená, že je-li  $\Psi_{\tilde{\xi}}$  tok pole  $\tilde{\xi}$ , potom pro všechna  $t$ , pro která je definováno  $\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(\mathbf{x}_0))$ , a pro každé  $i \in \hat{m}$  platí  $\Psi_{\tilde{\xi}}^i(t, \chi(\mathbf{x}_0)) = 0$ . Ze spojitosti toku vyplývá existence takového  $\delta > 0$ , že pro každé  $t \in (-\delta, \delta)$  je  $\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(\mathbf{x}_0)) \in \chi(H_{\mathbf{x}_0})$ . Je tedy  $\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(\mathbf{x}_0)) \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathbf{F}}} \cap \chi(H_{\mathbf{x}_0})$  pro každé  $t \in (-\delta, \delta)$ . Nyní

je potřeba najít vztah mezi toky  $\Psi_{\tilde{\xi}}$  a  $\Psi_{\xi}$ , kde  $\Psi_{\xi}$  je tok pole  $\xi$ . Pro každé  $t \in (-\delta, \delta)$  platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \chi^{-1}(\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(x_0))) &= (\chi^{-1})'(\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(x_0))) \frac{\partial \Psi_{\tilde{\xi}}}{\partial t}(t, \chi(x_0)) = \\ &= \left( \chi' \left( \chi^{-1}(\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(x_0))) \right) \right)^{-1} \tilde{\xi}(\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(x_0))) = \\ &= \left( \chi' \left( \chi^{-1}(\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(x_0))) \right) \right)^{-1} \chi' \left( \chi^{-1}(\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(x_0))) \right) \xi(\chi^{-1}(\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(x_0)))) = \\ &= \xi(\chi^{-1}(\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(x_0)))), \end{aligned}$$

takže pro tato  $t$  je  $\Psi_{\xi}(t, x_0) = \chi^{-1}(\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(x_0)))$ . Jelikož pro každé  $t \in (-\delta, \delta)$  platí  $\chi^{-1}(\Psi_{\tilde{\xi}}(t, \chi(x_0))) \in \mathcal{S}_F \cap H_{x_0}$ , je věta dokázána.  $\square$

### 3. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE, SYMETRIE A GRUPY

#### 3.1. Infinitesimalní transformace.

*Poznámka.* Buďte  $\xi$  vektorové pole na jednoduše souvislé oblasti  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_{\xi} : (a, b) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  jeho tok. Potom pro každé  $(t, x) \in (a, b) \times \mathcal{O}$  platí

$$\Psi_{\xi}(t, x) = \Psi_{\xi}(0, x) + t \frac{\partial \Psi_{\xi}}{\partial t}(t, x) \Big|_{t=0} + O(t^2) = x + t\xi(x) + O(t^2). \quad (3)$$

Pro každé  $t \in (a, b)$  definujme vektorové pole  $\varphi_t : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  vztahem  $\varphi_t(x) = \Psi_{\xi}(t, x)$  pro všechna  $x \in \mathcal{O}$ . Podle (3) je pro každé  $t \in (a, b)$

$$\varphi_t = \text{id} + t\xi + O(t^2).$$

Difeomorfizmy  $\varphi_t$  nazýváme *infinitesimalní transformace* a vektorové pole  $\xi$  nazýváme *generátor infinitesimalních transformací*. Množina všech infinitesimalních transformací  $M := \{\varphi_t \mid t \in (a, b)\}$  společně s operací skládání  $\circ$  tvoří lokální 1-parametrickou Lieovu grupu, neboť platí:

- (1)  $\varphi_0 = \text{id}$ ;
- (2)  $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \text{id}$  pro všechna  $t \in (-\delta, \delta)$ , kde  $\delta = \min(-a, b)$ ;
- (3)  $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$  pro všechna taková  $s, t \in (a, b)$ , že  $s+t \in (a, b)$ .

Definujme zobrazení  $g : (a, b) \rightarrow M$  vztahem  $g(t) = \varphi_t$  pro všechna  $t \in (a, b)$ . Na toto zobrazení se můžeme dívat jako na křivku v  $M$ . Zkusme najít její tečný vektor v bodě 0:

$$\dot{g}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{id} + t\xi + O(t^2) - \text{id}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \xi + \frac{O(t^2)}{t} \right) = \xi.$$

Tečným vektorem (bází tečného prostoru) ke křivce  $g$  je tedy vektorové pole  $\xi$ . Tento výsledek můžeme interpretovat tak, že vektorové pole  $\xi$  je prvkem tečného prostoru k lokální 1-parametrické Lieově grupě infinitesimalních transformací  $(M, \circ)$ .

*Poznámka.* Povšimněme si jedné zajímavé souvislosti. Skutečnost, že lze (alespoň teoreticky) řešit autonomní soustavy diferenciálních rovnic, tj. na základě znalosti vektorového pole  $\xi$  najít tok  $\Psi_{\xi}$  a posléze infinitesimalní transformace  $\varphi_t$ , je speciálním případem faktu, že ze znalosti tečného prostoru (Lieovy algebry) Lieovy grupy lze zrekonstruovat část této grupy (okolí jednotky). Důležitou roli zde hraje komutativita infinitesimalních transformací. Pro všechna  $s, t \in (a, b)$  taková, že  $s+t \in (a, b)$ , totiž platí pozoruhodný vztah  $g(s+t) = g(s) \circ g(t)$ .

Nyní odvodíme „lokální verze“ vět 1.17 a 1.18.

**3.1. Příklad.** Budť  $\xi$  vektorové pole na jednoduše souvislé oblasti  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_\xi : (a, b) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  jeho tok. Pro každé  $t \in (a, b)$  definujme zobrazení (vektorové pole)  $\Psi_\xi^t : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  vztahem

$$\Psi_\xi^t(f) = x \mapsto f(\Psi_\xi(-t, x))$$

pro každé vektorové pole  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Potom množina  $\{\Psi_\xi^t \mid t \in (a, b)\}$  všech těchto vektorových polí společně s operací skládání  $\circ$  tvoří 1-parametrickou lokální Lieovu grupu, neboť pro libovolné vektorové pole  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  platí:

- (1)  $\Psi_\xi^0(f) = x \mapsto f(\Psi_\xi(0, x)) = x \mapsto f(x) = f$ ;
- (2)  $(\Psi_\xi^t \circ \Psi_\xi^{-t})(f) = \Psi_\xi^t(x \mapsto f(\Psi_\xi(t, x))) = x \mapsto f(\Psi_\xi(t, \Psi_\xi(-t, x))) = x \mapsto f(\Psi_\xi(0, x)) = x \mapsto f(x) = f$  pro všechna  $t \in (-\delta, \delta)$ , kde  $\delta = \min(-a, b)$ ;
- (3)  $(\Psi_\xi^s \circ \Psi_\xi^t)(f) = \Psi_\xi^s(x \mapsto f(\Psi_\xi(-t, x))) = x \mapsto f(\Psi_\xi(-t, \Psi_\xi(-s, x))) = x \mapsto f(\Psi_\xi(-t-s, x)) = \Psi_\xi^{s+t}(f)$  pro všechna taková  $s, t \in (a, b)$ , že  $s+t \in (a, b)$ .

Hledejme opět tečný vektor ke křivce  $t \mapsto \Psi_\xi^t$ ,  $t \in (a, b)$ . Je

$$\begin{aligned} [\Psi_\xi^t(f)](x) &= f(\Psi_\xi(-t, x)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \frac{\partial^i [f(\Psi_\xi(-t, x))]}{\partial t^i} \Big|_{t=0} = \\ &= f(\Psi_\xi(0, x)) + t \frac{\partial [f(\Psi_\xi(-t, x))]}{\partial t} \Big|_{t=0} + O(t^2) = \\ &= f(x) + t f'(\Psi_\xi(0, x)) \frac{\partial \Psi_\xi(-t, x)}{\partial t} \Big|_{t=0} + O(t^2) = \\ &= f(x) - t f'(x) \xi(x) + O(t^2). \end{aligned}$$

Tečným vektorem je tedy zobrazení  $x \mapsto -f'(x)\xi(x)$ .

**3.2. Příklad.** Budť  $\xi$ , resp.  $\eta$  vektorové pole na jednoduše souvislé oblasti  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ , resp.  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^m$ . Budť  $\Psi_\xi : (a, b) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ , resp.  $\Psi_\eta : (a, b) \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  tok pole  $\xi$ , resp.  $\eta$ . Pro každé  $t \in (a, b)$  definujme zobrazení (vektorové pole)  $\Psi_{\xi, \eta}^t : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , kde  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  je množina všech zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^m$  třídy  $\mathcal{C}^\infty$ , vztahem

$$\Psi_{\xi, \eta}^t(f) = x \mapsto \Psi_\eta(t, f(\Psi_\xi(-t, x)))$$

pro každé zobrazení  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Potom množina  $\{\Psi_{\xi, \eta}^t \mid t \in (a, b)\}$  všech těchto vektorových polí společně s operací skládání  $\circ$  tvoří 1-parametrickou lokální Lieovu grupu, neboť pro libovolné zobrazení  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  platí:

- (1)  $\Psi_{\xi, \eta}^0(f) = x \mapsto \Psi_\eta(0, f(\Psi_\xi(0, x))) = x \mapsto f(x) = f$ ;
- (2)  $(\Psi_{\xi, \eta}^t \circ \Psi_{\xi, \eta}^{-t})(f) = \Psi_{\xi, \eta}^t(x \mapsto \Psi_\eta(-t, f(\Psi_\xi(t, x)))) = x \mapsto \Psi_\eta(t, \Psi_\eta(-t, f(\Psi_\xi(t, \Psi_\xi(-t, x))))) = x \mapsto \Psi_\eta(0, f(\Psi_\xi(0, x))) = x \mapsto f(x) = f$  pro všechna  $t \in (-\delta, \delta)$ , kde  $\delta = \min(-a, b)$ ;
- (3)  $(\Psi_{\xi, \eta}^s \circ \Psi_{\xi, \eta}^t)(f) = \Psi_{\xi, \eta}^s(x \mapsto \Psi_\eta(t, f(\Psi_\xi(-t, x)))) = x \mapsto \Psi_\eta(s, \Psi_\eta(t, f(\Psi_\xi(-t, \Psi_\xi(-s, x))))) = x \mapsto \Psi_\eta(s+t, f(\Psi_\xi(-t-s, x))) = \Psi_{\xi, \eta}^{s+t}(f)$  pro všechna taková  $s, t \in (a, b)$ , že  $s+t \in (a, b)$ .

Hledejme opět tečný vektor ke křivce  $t \mapsto \Psi_{\xi, \eta}^t$ ,  $t \in (a, b)$ . Je

$$\begin{aligned}
 [\Psi_{\xi, \eta}^t(f)](x) &= \Psi_{\eta}(t, f(\Psi_{\xi}(-t, x))) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \frac{\partial^i [\Psi_{\eta}(t, f(\Psi_{\xi}(-t, x)))]}{\partial t^i} \Big|_{t=0} = \\
 &= \Psi_{\eta}(0, f(\Psi_{\xi}(0, x))) + t \frac{\partial [\Psi_{\eta}(t, f(\Psi_{\xi}(-t, x)))]}{\partial t} \Big|_{t=0} + O(t^2) = \\
 &= f(x) + t \Psi'_{\eta}(0, f(\Psi_{\xi}(0, x))) \left( 1, \frac{\partial f(\Psi_{\xi}(-t, x))}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) + O(t^2) = \\
 &= f(x) + t \Psi'_{\eta}(0, f(x)) (1, -f'(x)\xi(x)) + O(t^2) = \\
 &= f(x) + t \frac{\partial \Psi_{\eta}}{\partial t}(0, f(x)) - t \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Psi_{\eta}}{\partial x^i}(0, f(x)) [f'(x)\xi(x)]^i + O(t^2) = \\
 &= f(x) + t \eta(\Psi_{\eta}(0, f(x))) - t \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Psi_{\eta}}{\partial x^i}(0, f(x)) [f'(x)\xi(x)]^i + O(t^2) = \\
 &= f(x) + t \eta(f(x)) - t f'(x)\xi(x) + O(t^2),
 \end{aligned}$$

neboť podle definice derivace ve směru je pro  $i \in \hat{m}$

$$\frac{\partial \Psi_{\eta}}{\partial x^i}(0, f(x)) = \frac{d}{dx} (x \mapsto \Psi_{\eta}(0, f(x) + x e_i)) = \frac{d}{dx} (x \mapsto f(x) + x e_i) = e_i.$$

Tečným vektorem je tedy zobrazení  $x \mapsto \eta(f(x)) - f'(x)\xi(x)$ .

**3.3. Příklad.** Uvažme nyní trochu jinou situaci: Co když místo polí  $\xi : \mathcal{O} \rightarrow V^n$ ,  $\eta : \mathcal{N} \rightarrow V^m$  budeme mít k dispozici jen pole  $\zeta : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^{n+m}$ ?<sup>2</sup> Pole  $\zeta$  můžeme „rozdělit“ na dvě „složky“  $\xi : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^n$  a  $\eta : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^m$ . Potíž je v tom, že  $\xi$  a  $\eta$  nejsou vektorová pole na  $\mathcal{O}$ , resp.  $\mathcal{N}$ . Buď  $\Psi_{\zeta} : (a, b) \times \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{O} \times \mathcal{N}$  tok pole  $\zeta$ . I ten můžeme „rozdělit“ na „složky“  $A_{\zeta} : (a, b) \times \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{O}$ ,  $B_{\zeta} : (a, b) \times \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ . Pro  $t \in (a, b)$ ,  $x \in \mathcal{O}$  a  $y \in \mathcal{N}$  pak máme

$$\Psi_{\zeta}(t, [x, y]) = [A_{\zeta}(t, [x, y]), B_{\zeta}(t, [x, y])].$$

Nyní můžeme pro každé  $t \in (a, b)$  definovat zobrazení  $\Psi_{\zeta}^t : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{O} \times \mathcal{N}$  vztahem  $\Psi_{\zeta}^t(x, y) = \Psi_{\zeta}(t, [x, y])$  pro každé  $x \in \mathcal{O}$  a každé  $y \in \mathcal{N}$ . Buď  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{N}$ . Pro dostatečně malé  $t$  bude množina

$$\{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{O} \times \mathcal{N} \mid (\exists x \in \mathcal{O}) ((\tilde{x}, \tilde{y}) = \Psi_{\zeta}^t(x, f(x)))\}$$

grafem nějakého zobrazení  $\tilde{f} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{N}$ .<sup>3</sup> Tím je ovšem definována infinitezimální transformace  $\Psi_{\xi, \eta}^t$ , která zobrazuje zobrazení  $f$  přiřazuje zobrazení

$$\Psi_{\xi, \eta}^t(f) = \tilde{f} = A_{\zeta}(t, [x, f(x)]) \mapsto B_{\zeta}(t, [x, f(x)]).$$

Pokusme se nalézt vhodnější vyjádření zobrazení  $\tilde{f}$ , než jaké představuje předchozí vztah. Položíme-li

$$\tilde{x} = A_{\zeta}(t, [x, f(x)]),$$

potom

$$x = A_{\zeta}(-t, [\tilde{x}, \tilde{f}(\tilde{x})]),$$

takže můžeme psát

$$\tilde{f} = \tilde{x} \mapsto B_{\zeta}(t, [A_{\zeta}(-t, [\tilde{x}, \tilde{f}(\tilde{x})]), f(A_{\zeta}(-t, [\tilde{x}, \tilde{f}(\tilde{x})]))]).$$

Zobrazení  $\tilde{f}$  je tedy řešením implicitní rovnice

$$y = B_{\zeta}(t, [A_{\zeta}(-t, [x, y]), f(A_{\zeta}(-t, [x, y]))]).$$

<sup>2</sup> $\mathbb{Z}$  formálního hlediska by bylo správnější psát  $\zeta : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^n \oplus V^m$ .

<sup>3</sup>Pro libovolné  $t$  to tak dopadnout nemusí.

Řešení této rovnice zřejmě závisí na parametru  $t$ , proto jeho funkční hodnotu v bodě  $\mathbf{x}$  budeme značit  $\mathbf{y}(t, \mathbf{x})$ . Poznamenejme, že pro každé  $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$  platí  $\mathbf{y}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

Zbývá najít tečný vektor ke křivce  $t \mapsto \Psi_{\xi, \eta}^t$ ,  $t \in (a, b)$ . Je jím zobrazení

$$\left. \frac{d}{dt} \Psi_{\xi, \eta}^t \right|_{t=0}.$$

Pro libovolné  $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$  platí (místo  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  píšeme  $\mathbf{y}(t, \mathbf{x})$ , abychom „zviditelnili“ závislost na  $t$ )

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \Psi_{\xi, \eta}^t(\mathbf{f}) \right|_{t=0}(\mathbf{x}) &= \left. \frac{d}{dt} [\Psi_{\xi, \eta}^t(\mathbf{f})](\mathbf{x}) \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \mathbf{B}_{\zeta}(t, [\mathbf{A}_{\zeta}(-t, [\mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x})]), \mathbf{f}(\mathbf{A}_{\zeta}(-t, [\mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x})])]) \right|_{t=0} = \\ &= \mathbf{B}'_{\zeta}(0, [\mathbf{A}_{\zeta}(0, [\mathbf{x}, \mathbf{y}(0, \mathbf{x})]), \mathbf{f}(\mathbf{A}_{\zeta}(0, [\mathbf{x}, \mathbf{y}(0, \mathbf{x})])]) \\ &\quad \left[ 1, \mathbf{A}'_{\zeta}(0, [\mathbf{x}, \mathbf{y}(0, \mathbf{x})]) \left( -1, \mathbf{0}, \left. \frac{d\mathbf{y}(t, \mathbf{x})}{dt} \right|_{t=0} \right), \right. \\ &\quad \left. \mathbf{f}'(\mathbf{A}_{\zeta}(0, [\mathbf{x}, \mathbf{y}(0, \mathbf{x})])) \mathbf{A}'_{\zeta}(0, [\mathbf{x}, \mathbf{y}(0, \mathbf{x})]) \left( -1, \mathbf{0}, \left. \frac{d\mathbf{y}(t, \mathbf{x})}{dt} \right|_{t=0} \right) \right] = \\ &= \mathbf{B}'_{\zeta}(0, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]) \left[ 1, \mathbf{A}'_{\zeta}(0, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]) \left( -1, \mathbf{0}, \left. \frac{d\mathbf{y}(t, \mathbf{x})}{dt} \right|_{t=0} \right), \right. \\ &\quad \left. \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \mathbf{A}'_{\zeta}(0, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]) \left( -1, \mathbf{0}, \left. \frac{d\mathbf{y}(t, \mathbf{x})}{dt} \right|_{t=0} \right) \right]. \end{aligned}$$

K dalším úpravám využijeme následujících vztahů:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{A}_{\zeta}(t, [\mathbf{x}, \mathbf{y}])}{\partial t} \right|_{t=0} &= \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \left. \frac{\partial \mathbf{A}_{\zeta}(t, [\mathbf{x}, \mathbf{y}])}{\partial x^i} \right|_{t=0} &= \frac{d}{du} (u \mapsto \mathbf{A}_{\zeta}(0, [\mathbf{x} + u\mathbf{e}_i, \mathbf{y}]))(0) = \frac{d}{du} (u \mapsto \mathbf{x} + u\mathbf{e}_i)(0) = \mathbf{e}_i, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{A}_{\zeta}(t, [\mathbf{x}, \mathbf{y}])}{\partial y^j} \right|_{t=0} &= \frac{d}{du} (u \mapsto \mathbf{A}_{\zeta}(0, [\mathbf{x}, \mathbf{y} + u\mathbf{e}_j]))(0) = \frac{d}{du} (u \mapsto \mathbf{x})(0) = \mathbf{0}, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{B}_{\zeta}(t, [\mathbf{x}, \mathbf{y}])}{\partial t} \right|_{t=0} &= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \left. \frac{\partial \mathbf{B}_{\zeta}(t, [\mathbf{x}, \mathbf{y}])}{\partial x^i} \right|_{t=0} &= \frac{d}{du} (u \mapsto \mathbf{B}_{\zeta}(0, [\mathbf{x} + u\mathbf{e}_i, \mathbf{y}]))(0) = \frac{d}{du} (u \mapsto \mathbf{y})(0) = \mathbf{0}, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{B}_{\zeta}(t, [\mathbf{x}, \mathbf{y}])}{\partial y^j} \right|_{t=0} &= \frac{d}{du} (u \mapsto \mathbf{B}_{\zeta}(0, [\mathbf{x}, \mathbf{y} + u\mathbf{e}_j]))(0) = \frac{d}{du} (u \mapsto \mathbf{y} + u\mathbf{e}_j)(0) = \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

Nyní již celkem snadno odvodíme, že

$$\mathbf{A}'_{\zeta}(0, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]) \left( -1, \mathbf{0}, \left. \frac{d\mathbf{y}(t, \mathbf{x})}{dt} \right|_{t=0} \right) = -\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

a dále

$$\left. \frac{d}{dt} \Psi_{\xi, \eta}^t(\mathbf{f}) \right|_{t=0}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

Tečným vektorem je tudíž zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ .

### 3.2. Prodloužení.

*Poznámka.* Buď  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Potom  $k$ -tá derivace zobrazení  $F$  v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  je symetrické  $k$ -lineární zobrazení  $F^{(k)}(x_0) : \underbrace{V^n \times \dots \times V^n}_{k\text{-krát}} \rightarrow V^m$ .

Jestliže na  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$  pevně zvolíme souřadný systém, potom je toto zobrazení určeno  $m \cdot \binom{n+k-1}{k}$  čísly.

**3.4. Definice.** Buď  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  a necht' je na  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^n$  pevně zvolen souřadný systém. Potom zobrazení

$$\mathrm{Pr}^{(k)} \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \cdot n} \times \dots \times \mathbb{R}^{m \cdot \binom{n+k-1}{k}},$$

které každému bodu  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  přiřazuje  $m \cdot \binom{n+k}{k}$ -tici čísel tvořenou složkami bodu  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  a parciálních derivací zobrazení  $\mathbf{F}$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ , nazýváme *k-té prodloužení zobrazení  $\mathbf{F}$* . Prostor

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \cdot n} \times \dots \times \mathbb{R}^{m \cdot \binom{n+k-1}{k}} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m \cdot \binom{n+k}{k}}$$

pak nazýváme *jetový prostor k-tého řádu příslušný k prostoru  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$* .

**3.5. Definice.** Soustavou *l* diferenciálních rovnic *k-tého řádu v n nezávisle proměnných a m závisle proměnných* budeme rozumět soustavu

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (4)$$

kde  $\Delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m \cdot \binom{n+k}{k}} \rightarrow \mathbb{R}^l \in \mathcal{C}^\infty$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m \cdot \binom{n+k}{k}}$ .

*Poznámka.* Takto definovaná soustava diferenciálních rovnic je opět soustavou rovnic tvaru  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . I zde zavádíme značení

$$\mathcal{S}_\Delta = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m \cdot \binom{n+k}{k}} \mid \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \right\}.$$

**3.6. Definice.** Řešením soustavy (4) nazýváme každé takové zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \in \mathcal{C}^\infty$ , že pro všechna  $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{f}}$  platí

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathrm{Pr}^{(k)} \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}.$$

*Poznámka.* Zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \in \mathcal{C}^\infty$  je řešením soustavy (4) právě tehdy, když pro všechna  $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{f}}$  platí

$$(\mathbf{x}, \mathrm{Pr}^{(k)} \mathbf{f}(\mathbf{x})) \in \mathcal{S}_\Delta.$$

**3.7. Definice.** Buďte (4) systém diferenciálních rovnic v *n* nezávisle proměnných a *m* závisle proměnných,  $(\mathcal{L}, U, \Psi)$  lokální akce na  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Řekneme, že lokální akce  $(\mathcal{L}, U, \Psi)$  je *grupou symetrií systému (4)*, jestliže pro každé řešení  $\mathbf{f}$  systému (4) a pro všechna taková  $g \in \mathcal{L}$ , že množina

$$\{(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \mid (\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)((\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \Psi(g, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]))\}$$

je grafem nějakého zobrazení  $\tilde{\mathbf{f}}_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^\infty$ , je zobrazení  $\tilde{\mathbf{f}}_g$  také řešením systému (4).

**3.8. Definice.** Buďte (4) systém diferenciálních rovnic v *n* nezávisle proměnných a *m* závisle proměnných,  $\mathcal{A} = (\mathcal{L}, U, \Psi)$  lokální akce na  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Potom *k-tým prodloužením* lokální akce  $\mathcal{A}$  rozumíme lokální akci  $\mathrm{Pr}^{(k)} \mathcal{A} = (\mathcal{L}, V, \Phi)$  na  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m \cdot \binom{n+k}{k}}$  definovanou takto: Jsou-li  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \in \mathcal{C}^\infty$  a  $g \in \mathcal{L}$  takové, že množina

$$\{(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \mid (\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)((\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \Psi(g, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]))\}$$

je grafem nějakého zobrazení  $\tilde{\mathbf{f}}_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \in \mathcal{C}^\infty$ , potom pro všechna  $\mathbf{x}$  z definičního oboru zobrazení  $\mathbf{f}$  platí

$$(\tilde{\mathbf{x}}_g, \mathrm{Pr}^{(k)} \tilde{\mathbf{f}}_g(\tilde{\mathbf{x}}_g)) = \Phi(g, [\mathbf{x}, \mathrm{Pr}^{(k)} \mathbf{f}(\mathbf{x})]),$$

kde  $(\tilde{\mathbf{x}}_g, \tilde{\mathbf{f}}_g(\tilde{\mathbf{x}}_g)) = \Psi(g, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})])$ .

**3.9. Věta.** Buďte (4) systém diferenciálních rovnic v *n* nezávisle proměnných a *m* závisle proměnných,  $\mathcal{A} = (\mathcal{L}, U, \Psi)$  lokální akce na  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $\mathrm{Pr}^{(k)} \mathcal{A} = (\mathcal{L}, V, \Phi)$  její *k-té prodloužení*. Jestliže pro všechna  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{S}_\Delta$  a pro všechna  $g \in \mathcal{L}$  taková, že  $\Phi(g, [\mathbf{x}, \mathbf{u}])$  je definováno, platí  $\Phi(g, [\mathbf{x}, \mathbf{u}]) \in \mathcal{S}_\Delta$ , potom  $\mathcal{A}$  je grupa symetrií soustavy (4).

*D ů k a z .* Budťe  $\mathbf{f}$  řešení soustavy (4),  $g \in \mathcal{L}$  a nechť množina

$$\{(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \mid (\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)((\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \Psi(g, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]))\}$$

je grafem nějakého zobrazení  $\tilde{\mathbf{f}}_g$ . Zvolme libovolně  $\tilde{\mathbf{x}}_g$  z definičního oboru zobrazení  $\tilde{\mathbf{f}}_g$ . Máme dokázat, že platí  $(\tilde{\mathbf{x}}_g, \text{Pr}^{(k)} \tilde{\mathbf{f}}_g(\tilde{\mathbf{x}}_g)) \in \mathcal{S}_\Delta$ .

Z definice zobrazení  $\tilde{\mathbf{f}}_g$  vyplývá existence takového  $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{f}}$ , že  $(\tilde{\mathbf{x}}_g, \tilde{\mathbf{f}}_g(\tilde{\mathbf{x}}_g)) = \Psi(g, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})])$ . Ježto  $\mathbf{f}$  je řešením (4), platí  $(\mathbf{x}, \text{Pr}^{(k)} \mathbf{f}(\mathbf{x})) \in \mathcal{S}_\Delta$ . Je-li definováno  $\Phi(g, [\mathbf{x}, \text{Pr}^{(k)} \mathbf{f}(\mathbf{x})])$ , potom podle předpokladu platí  $\Phi(g, [\mathbf{x}, \text{Pr}^{(k)} \mathbf{f}(\mathbf{x})]) \in \mathcal{S}_\Delta$ , ale podle předchozí definice je

$$\Phi(g, [\mathbf{x}, \text{Pr}^{(k)} \mathbf{f}(\mathbf{x})]) = (\tilde{\mathbf{x}}_g, \text{Pr}^{(k)} \tilde{\mathbf{f}}_g(\tilde{\mathbf{x}}_g)). \quad \square$$

**3.10. Definice.** Budťe  $\zeta : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^{n+m}$  vektorové pole,  $\mathcal{L}$  jím generovaná lokální akce.<sup>4</sup> Potom  $k$ -tým prodloužením vektorového pole  $\zeta$  rozumíme vektorové pole  $\text{Pr}^{(k)} \zeta : \mathcal{O} \times \mathbb{R}^{m \cdot \binom{n+k}{k}} \rightarrow V^{n+m \cdot \binom{n+k}{k}}$ , které generuje lokální akci  $\text{Pr}^{(k)} \mathcal{L}$ .

**3.11. Věta.** Buď (4) systém diferenciálních rovnic v  $n$  nezávisle proměnných a  $m$  závisle proměnných a nechť pro všechna  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{S}_\Delta$  platí  $h(\Delta'(\mathbf{x}, \mathbf{u})) = l$ . Buď  $\mathcal{A} = (\mathcal{L}, U, \Psi)$  lokální akce na  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Jestliže pro každé vektorové pole  $\xi$ , které generuje nějakou lokální 1-parametrickou podgrupu  $\mathcal{A}$ , a pro všechna  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{S}_\Delta$  platí

$$\Delta'(\mathbf{x}, \mathbf{u})[\text{Pr}^{(k)} \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u})] = \mathbf{0},$$

potom  $\mathcal{A}$  je grupa symetrií soustavy (4).

*Poznámka.* Předchozí věta představuje základ metody pro nalezení symetrií dané soustavy diferenciálních rovnic. Za těchto okolností je celkem pochopitelné, že je potřeba umět vyjádřit prodloužení daného vektorového pole.

*Poznámka.* Nalezneme vyjádření prvního prodloužení vektorového pole  $\zeta : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^{n+m}$ . Jak napovídá samotná definice tohoto pojmu, nejprve je třeba vyjádřit první prodloužení lokální akce generované polem  $\zeta$ . Označíme-li  $\Psi_{\text{Pr}^{(1)}} \zeta$  tok pole  $\text{Pr}^{(1)} \zeta$ , potom platí

$$\Psi_{\text{Pr}^{(1)} \zeta}(t, [\mathbf{x}, \text{Pr}^{(1)} \mathbf{f}(\mathbf{x})]) = (\tilde{\mathbf{x}}, \text{Pr}^{(1)} \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}})), \quad (5)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\zeta(t, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})])$$

a

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}_\zeta(t, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})])$$

(význam symbolů je stejný jako v příkladu 3.3). Jestliže  $t$  budeme považovat za parametr, dostaneme zderivováním poslední rovnosti

$$\tilde{\mathbf{f}}'(\tilde{\mathbf{x}}) \mathbf{A}'_\zeta(t, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]) (0, \mathbf{E}, \mathbf{f}'(\mathbf{x})) = \mathbf{B}'_\zeta(t, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]) (0, \mathbf{E}, \mathbf{f}'(\mathbf{x}))$$

a odtud

$$\tilde{\mathbf{f}}'(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}'_\zeta(t, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]) (0, \mathbf{E}, \mathbf{f}'(\mathbf{x})) [\mathbf{A}'_\zeta(t, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]) (0, \mathbf{E}, \mathbf{f}'(\mathbf{x}))]^{-1}$$

(regularita zobrazení  $\mathbf{A}'_\zeta(t, [\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})]) (0, \mathbf{E}, \mathbf{f}'(\mathbf{x}))$  je díky spojitosti pro  $t$  dostatečně blízka 0 zaručena).

Ze vztahu

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\text{Pr}^{(1)} \zeta}(t, [\mathbf{x}, \text{Pr}^{(1)} \mathbf{f}(\mathbf{x})]) \right|_{t=0} = \text{Pr}^{(1)} \zeta(\mathbf{x}, \text{Pr}^{(1)} \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

<sup>4</sup>Tzn.  $\mathcal{L} = ((a, b), (a, b) \times \mathcal{O} \times \mathcal{N}, \Psi_\zeta)$ , kde  $\Psi_\zeta : (a, b) \times \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  je tok pole  $\zeta$ .

a ze (5) plyne důležitý závěr: Prvních  $n + m$  „složek“ pole  $\text{Pr}^{(1)} \zeta$  je totožných s polem  $\zeta$ . Je tedy  $\text{Pr}^{(1)} \zeta = (\xi, \eta, \phi)$ , kde  $\phi : \mathbb{R}^{n+m+n \cdot m} \rightarrow V^{n \cdot m}$  a

$$\begin{aligned}
 \phi(x, f(x), f'(x)) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}'(\tilde{x}) \right|_{t=0} = \\
 &= \left. \frac{\partial}{\partial t} [B'_\zeta(t, [x, f(x)]) (0, E, f'(x))] \right|_{t=0} [A'_\zeta(0, [x, f(x)]) (0, E, f'(x))]^{-1} + \\
 &\quad + [B'_\zeta(0, [x, f(x)]) (0, E, f'(x))] \left. \frac{\partial}{\partial t} [A'_\zeta(t, [x, f(x)]) (0, E, f'(x))]^{-1} \right|_{t=0} = \\
 &= \left. \frac{\partial}{\partial t} [B'_\zeta(t, [x, f(x)]) (0, E, f'(x))] \right|_{t=0} E - f'(x) [A'_\zeta(0, [x, f(x)]) (0, E, f'(x))]^{-1} \cdot \\
 &\quad \cdot \left. \frac{\partial}{\partial t} [A'_\zeta(t, [x, f(x)]) (0, E, f'(x))] \right|_{t=0} [A'_\zeta(0, [x, f(x)]) (0, E, f'(x))]^{-1} = \\
 &= \left. \frac{\partial}{\partial t} [B'_\zeta(t, [x, f(x)]) (0, E, f'(x))] \right|_{t=0} - \\
 &\quad - f'(x) \cdot E \left. \frac{\partial}{\partial t} [A'_\zeta(t, [x, f(x)]) (0, E, f'(x))] \right|_{t=0} E = \\
 &= \left. \frac{\partial}{\partial t} B'_\zeta(t, [x, f(x)]) \right|_{t=0} (0, E, f'(x)) - f'(x) \left. \frac{\partial}{\partial t} A'_\zeta(t, [x, f(x)]) \right|_{t=0} (0, E, f'(x)) = \\
 &= \eta'(x, f(x)) (E, f'(x)) - f'(x) \xi'(x, f(x)) (E, f'(x)).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Závěr: Jsou-li  $(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^m, u_1^1, \dots, u_n^1, \dots, u_1^m, \dots, u_n^m)$  souřadnice v prostoru  $\mathbb{R}^{n+m+n \cdot m}$  a označíme-li  $x = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $u = (u^1, \dots, u^m)$ ,

$$u' = \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^m & \dots & u_n^m \end{pmatrix},$$

potom platí

$$\boxed{\phi(x, u, u') = \eta'(x, u) \begin{pmatrix} E \\ u' \end{pmatrix} - u' \xi'(x, u) \begin{pmatrix} E \\ u' \end{pmatrix},}$$

kde  $E$  je jednotková matice.

**3.12. Příklad.** Nalezneme první prodloužení vektorového pole  $\zeta : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^{2+1}$ . Jako vždy máme  $\zeta = (\xi, \eta)$ , kde  $\xi : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^2$  a  $\eta : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^1$ . Dle předchozího bude  $\text{Pr}^{(1)} \zeta = (\xi, \eta, \phi)$ , kde

$$\begin{aligned}
 \phi(x^1, x^2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) &= \\
 &= \left[ (\eta_{x_1}, \eta_{x_2}, \eta_u) - (u_{x_1}, u_{x_2}) \begin{pmatrix} \xi_{x_1}^1 & \xi_{x_2}^1 & \xi_u^1 \\ \xi_{x_1}^2 & \xi_{x_2}^2 & \xi_u^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_{x_1} & u_{x_2} \end{pmatrix} = \\
 &= (\eta_{x_1} - u_{x_1} \xi_{x_1}^1 - u_{x_2} \xi_{x_1}^2, \eta_{x_2} - u_{x_1} \xi_{x_2}^1 - u_{x_2} \xi_{x_2}^2, \eta_u - u_{x_1} \xi_u^1 - u_{x_2} \xi_u^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_{x_1} & u_{x_2} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \eta_{x_1} - u_{x_1} \xi_{x_1}^1 - u_{x_2} \xi_{x_1}^2 + u_{x_1} \eta_u - (u_{x_1})^2 \xi_u^1 - u_{x_1} u_{x_2} \xi_u^2 \\ \eta_{x_2} - u_{x_1} \xi_{x_2}^1 - u_{x_2} \xi_{x_2}^2 + u_{x_2} \eta_u - u_{x_1} u_{x_2} \xi_u^1 - (u_{x_2})^2 \xi_u^2 \end{pmatrix}^T = \\
 &= \begin{pmatrix} \eta_{x_1} + u_{x_1} (\eta_u - \xi_{x_1}^1) - u_{x_2} \xi_{x_1}^2 - (u_{x_1})^2 \xi_u^1 - u_{x_1} u_{x_2} \xi_u^2 \\ \eta_{x_2} - u_{x_1} \xi_{x_2}^1 + u_{x_2} (\eta_u - \xi_{x_2}^2) - (u_{x_2})^2 \xi_u^2 - u_{x_1} u_{x_2} \xi_u^1 \end{pmatrix}^T.
 \end{aligned}$$

*Poznámka.* Pokusme se nyní vyjádřit druhé prodloužení vektorového pole  $\zeta : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^{n+m}$ . Podobně jako v případě prvního prodloužení zjistíme, že  $\text{Pr}^{(2)}\zeta = (\xi, \eta, \phi, \chi)$ , kde  $\phi$  je zobrazení z předchozí poznámky. Jak najdeme zobrazení  $\chi : \mathbb{R}^{n+m+n \cdot m + n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot m} \rightarrow V^{n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot m}$ ? Můžeme vyjít třeba ze vzorce (6). Jeho zderivováním dostaneme

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}''(\tilde{x}) A'_\zeta(t, [x, f(x)]) (0, E, f'(x)) \right|_{t=0} &= \eta''(x, f(x)) (E, f'(x))^2 + \\ &+ \eta'(x, f(x)) (O, f''(x)) - f''(x) \xi'(x, f(x)) (E, f'(x)) - \\ &- f'(x) \xi''(x, f(x)) (E, f'(x))^2 - f'(x) \xi'(x, f(x)) (O, f''(x)). \end{aligned}$$

Upravíme-li výraz na levé straně,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}''(\tilde{x}) A'_\zeta(t, [x, f(x)]) (0, E, f'(x)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}''(\tilde{x}) \right|_{t=0} A'_\zeta(0, [x, f(x)]) (0, E, f'(x)) + \\ &+ \left. \tilde{f}''(\tilde{x}) \right|_{t=0} \left. \frac{\partial}{\partial t} A'_\zeta(t, x, f(x)) \right|_{t=0} (0, E, f'(x)) = \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}''(\tilde{x}) \right|_{t=0} E + f''(x) \xi'(x, f(x)) (E, f'(x)), \end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}''(\tilde{x}) \right|_{t=0} &= \eta''(x, f(x)) (E, f'(x))^2 + \\ &+ \eta'(x, f(x)) (O, f''(x)) - 2f''(x) \xi'(x, f(x)) (E, f'(x)) - \\ &- f'(x) \xi''(x, f(x)) (E, f'(x))^2 - f'(x) \xi'(x, f(x)) (O, f''(x)). \end{aligned}$$

Je tedy

$$\boxed{\begin{aligned} \chi(x, u, u', u'') &= \eta''(x, u) \begin{pmatrix} E \\ u' \end{pmatrix}^2 - u' \xi''(x, u) \begin{pmatrix} E \\ u' \end{pmatrix}^2 - 2u'' \xi'(x, u) \begin{pmatrix} E \\ u' \end{pmatrix} + \\ &+ [\eta'(x, u) - u' \xi'(x, u)] \begin{pmatrix} O \\ u'' \end{pmatrix}, \end{aligned}}$$

kde  $E$  je jednotková matice  $n$ -tého řádu a  $O$  je  $n$ -tice nulových matic  $n$ -tého řádu.

**3.13. Příklad.** Nalezněme druhé prodloužení vektorového pole  $\zeta : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^{2+1}$ . Jako vždy máme  $\zeta = (\xi, \eta)$ , kde  $\xi : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^2$  a  $\eta : \mathcal{O} \times \mathcal{N} \rightarrow V^1$ . Dle předchozího bude  $\text{Pr}^{(2)}\zeta = (\xi, \eta, \phi, \chi)$ . Zobrazení  $\phi$  jsme vyjádřili v předchozím

příkladě, a pro zobrazení  $\chi$  máme

$$\begin{aligned}
& \chi(x^1, x^2, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, u_{x_2x_2}) = \\
& = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{x_1} \\ 0 & 1 & u_{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{x_1x_1} & \eta_{x_1x_2} & \eta_{x_1u} \\ \eta_{x_1x_2} & \eta_{x_2x_2} & \eta_{x_2u} \\ \eta_{x_1u} & \eta_{x_2u} & \eta_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \\
& - (u_{x_1}, u_{x_2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{x_1} \\ 0 & 1 & u_{x_2} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \xi_{x_1x_1}^1 & \xi_{x_1x_2}^1 & \xi_{x_1u}^1 \\ \xi_{x_1x_2}^1 & \xi_{x_2x_2}^1 & \xi_{x_2u}^1 \\ \xi_{x_1u}^1 & \xi_{x_2u}^1 & \xi_{uu}^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_{x_1x_1}^2 & \xi_{x_1x_2}^2 & \xi_{x_1u}^2 \\ \xi_{x_1x_2}^2 & \xi_{x_2x_2}^2 & \xi_{x_2u}^2 \\ \xi_{x_1u}^2 & \xi_{x_2u}^2 & \xi_{uu}^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \\
& - 2 \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ u_{x_1x_2} & u_{x_2x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{x_1}^1 & \xi_{x_2}^1 & \xi_u^1 \\ \xi_{x_1}^2 & \xi_{x_2}^2 & \xi_u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\
& + (\eta_{x_1}, \eta_{x_2}, \eta_u) \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ u_{x_1x_2} & u_{x_2x_2} \end{pmatrix} \right] - \\
& - (u_{x_1}, u_{x_2}) \begin{pmatrix} \xi_{x_1}^1 & \xi_{x_2}^1 & \xi_u^1 \\ \xi_{x_1}^2 & \xi_{x_2}^2 & \xi_u^2 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ u_{x_1x_2} & u_{x_2x_2} \end{pmatrix} \right] = \\
& = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{x_1} \\ 0 & 1 & u_{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{x_1x_1} + u_{x_1}\eta_{x_1u} & \eta_{x_1x_2} + u_{x_2}\eta_{x_1u} \\ \eta_{x_1x_2} + u_{x_1}\eta_{x_2u} & \eta_{x_2x_2} + u_{x_2}\eta_{x_2u} \\ \eta_{x_1u} + u_{x_1}\eta_{uu} & \eta_{x_2u} + u_{x_2}\eta_{uu} \end{pmatrix} - \\
& - u_{x_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{x_1} \\ 0 & 1 & u_{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{x_1x_1}^1 + u_{x_1}\xi_{x_1u}^1 & \xi_{x_1x_2}^1 + u_{x_2}\xi_{x_1u}^1 \\ \xi_{x_1x_2}^1 + u_{x_1}\xi_{x_2u}^1 & \xi_{x_2x_2}^1 + u_{x_2}\xi_{x_2u}^1 \\ \xi_{x_1u}^1 + u_{x_1}\xi_{uu}^1 & \xi_{x_2u}^1 + u_{x_2}\xi_{uu}^1 \end{pmatrix} - \\
& - u_{x_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{x_1} \\ 0 & 1 & u_{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{x_1x_1}^2 + u_{x_1}\xi_{x_1u}^2 & \xi_{x_1x_2}^2 + u_{x_2}\xi_{x_1u}^2 \\ \xi_{x_1x_2}^2 + u_{x_1}\xi_{x_2u}^2 & \xi_{x_2x_2}^2 + u_{x_2}\xi_{x_2u}^2 \\ \xi_{x_1u}^2 + u_{x_1}\xi_{uu}^2 & \xi_{x_2u}^2 + u_{x_2}\xi_{uu}^2 \end{pmatrix} - \\
& - 2 \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ u_{x_1x_2} & u_{x_2x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{x_1}^1 + u_{x_1}\xi_u^1 & \xi_{x_2}^1 + u_{x_2}\xi_u^1 \\ \xi_{x_1}^2 + u_{x_1}\xi_u^2 & \xi_{x_2}^2 + u_{x_2}\xi_u^2 \end{pmatrix} + \\
& + (\eta_u - u_{x_1}\xi_u^1 - u_{x_2}\xi_u^2) \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ u_{x_1x_2} & u_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{x_1} \\ 0 & 1 & u_{x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_{x_1x_1} + u_{x_1}\eta_{x_1u} - u_{x_1}\xi_{x_1x_1}^1 - (u_{x_1})^2\xi_{x_1u}^1 - u_{x_2}\xi_{x_1x_1}^2 - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_1u}^2 \\ \eta_{x_1x_2} + u_{x_1}\eta_{x_2u} - u_{x_1}\xi_{x_1x_2}^1 - (u_{x_1})^2\xi_{x_2u}^1 - u_{x_2}\xi_{x_1x_2}^2 - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_2u}^2 \\ \eta_{x_1u} + u_{x_1}\eta_{uu} - u_{x_1}\xi_{x_1u}^1 - (u_{x_1})^2\xi_{uu}^1 - u_{x_2}\xi_{x_1u}^2 - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{uu}^2 \\ \eta_{x_1x_2} + u_{x_2}\eta_{x_1u} - u_{x_1}\xi_{x_1x_2}^1 - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_1u}^1 - u_{x_2}\xi_{x_1x_2}^2 - (u_{x_2})^2\xi_{x_1u}^2 \\ \eta_{x_2x_2} + u_{x_2}\eta_{x_2u} - u_{x_1}\xi_{x_2x_2}^1 - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_2u}^1 - u_{x_2}\xi_{x_2x_2}^2 - (u_{x_2})^2\xi_{x_2u}^2 \\ \eta_{x_2u} + u_{x_2}\eta_{uu} - u_{x_1}\xi_{x_2u}^1 - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{uu}^1 - u_{x_2}\xi_{x_2u}^2 - (u_{x_2})^2\xi_{uu}^2 \end{pmatrix} - \\
& - 2 \begin{pmatrix} u_{x_1x_1}\xi_{x_1}^1 + u_{x_1}u_{x_1x_1}\xi_u^1 + u_{x_1x_2}\xi_{x_1}^2 + u_{x_1}u_{x_1x_2}\xi_u^2 & u_{x_1x_1}\xi_{x_2}^1 + u_{x_2}u_{x_1x_1}\xi_u^1 + u_{x_1x_2}\xi_{x_2}^2 + u_{x_2}u_{x_1x_2}\xi_u^2 \\ u_{x_1x_2}\xi_{x_1}^1 + u_{x_1}u_{x_1x_2}\xi_u^1 + u_{x_2x_2}\xi_{x_1}^2 + u_{x_1}u_{x_2x_2}\xi_u^2 & u_{x_1x_2}\xi_{x_2}^1 + u_{x_2}u_{x_1x_2}\xi_u^1 + u_{x_2x_2}\xi_{x_2}^2 + u_{x_2}u_{x_2x_2}\xi_u^2 \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} u_{x_1x_1}\eta_u - u_{x_1}u_{x_1x_1}\xi_u^1 - u_{x_2}u_{x_1x_1}\xi_u^2 & u_{x_1x_2}\eta_u - u_{x_1}u_{x_1x_2}\xi_u^1 - u_{x_2}u_{x_1x_2}\xi_u^2 \\ u_{x_1x_2}\eta_u - u_{x_1}u_{x_1x_2}\xi_u^1 - u_{x_2}u_{x_1x_2}\xi_u^2 & u_{x_2x_2}\eta_u - u_{x_1}u_{x_2x_2}\xi_u^1 - u_{x_2}u_{x_2x_2}\xi_u^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Výsledná matice by se nevešla na stránku, a proto vypíšeme její jednotlivé prvky.

V prvním sloupci prvního řádku bude

$$\begin{aligned}
& \eta_{x_1x_1} + u_{x_1}\eta_{x_1u} - u_{x_1}\xi_{x_1x_1}^1 - (u_{x_1})^2\xi_{x_1u}^1 - u_{x_2}\xi_{x_1x_1}^2 - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_1u}^2 + u_{x_1}\eta_{x_1u} + (u_{x_1})^2\eta_{uu} - (u_{x_1})^2\xi_{x_1u}^1 - \\
& - (u_{x_1})^3\xi_{uu}^1 - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_1u}^2 - (u_{x_1})^2u_{x_2}\xi_{uu}^2 - 2u_{x_1x_1}\xi_{x_1}^1 - 2u_{x_1}u_{x_1x_1}\xi_u^1 - 2u_{x_1x_2}\xi_{x_1}^2 - 2u_{x_1}u_{x_1x_2}\xi_u^2 + \\
& + u_{x_1x_1}\eta_u - u_{x_1}u_{x_1x_1}\xi_u^1 - u_{x_2}u_{x_1x_1}\xi_u^2 = \\
& = \eta_{x_1x_1} + u_{x_1}(2\eta_{x_1u} - \xi_{x_1x_1}^1) - u_{x_2}\xi_{x_1x_1}^2 + (u_{x_1})^2(\eta_{uu} - 2\xi_{x_1u}^1) - 2u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_1u}^2 - (u_{x_1})^3\xi_{uu}^1 - (u_{x_1})^2u_{x_2}\xi_{uu}^2 + \\
& + u_{x_1x_1}(\eta_u - 2\xi_{x_1}^1) - 2u_{x_1x_2}\xi_{x_1}^2 - 3u_{x_1}u_{x_1x_1}\xi_u^1 - 2u_{x_1}u_{x_1x_2}\xi_u^2 - u_{x_2}u_{x_1x_1}\xi_u^2.
\end{aligned}$$

Ve druhém sloupci prvního řádku bude

$$\begin{aligned} & \eta_{x_1x_2} + u_{x_2}\eta_{x_1u} - u_{x_1}\xi_{x_1x_2}^1 - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_1u}^1 - u_{x_2}\xi_{x_1x_2}^2 - (u_{x_2})^2\xi_{x_1u}^2 + u_{x_1}\eta_{x_2u} + u_{x_1}u_{x_2}\eta_{uu} - (u_{x_1})^2\xi_{x_2u}^1 \\ & - (u_{x_1})^2u_{x_2}\xi_{uu}^1 - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_2u}^2 - u_{x_1}(u_{x_2})^2\xi_{uu}^2 - 2u_{x_1x_1}\xi_{x_2}^1 - 2u_{x_2}u_{x_1x_1}\xi_u^1 - 2u_{x_1x_2}\xi_{x_2}^2 - 2u_{x_2}u_{x_1x_2}\xi_u^2 + \\ & + u_{x_1x_2}\eta_u - u_{x_1}u_{x_1x_2}\xi_u^1 - u_{x_2}u_{x_1x_2}\xi_u^2 = \\ & = \eta_{x_1x_2} + u_{x_1}(\eta_{x_2u} - \xi_{x_1x_2}^1) + u_{x_2}(\eta_{x_1u} - \xi_{x_1x_2}^2) - (u_{x_1})^2\xi_{x_2u}^1 + u_{x_1}u_{x_2}(\eta_{uu} - \xi_{x_1u}^1 - \xi_{x_2u}^2) - (u_{x_2})^2\xi_{x_1u}^2 - \\ & - (u_{x_1})^2u_{x_2}\xi_{uu}^1 - u_{x_1}(u_{x_2})^2\xi_{uu}^2 - 2u_{x_1x_1}\xi_{x_2}^1 + u_{x_1x_2}(\eta_u - 2\xi_{x_2}^2) - u_{x_1}u_{x_1x_2}\xi_u^1 - 2u_{x_2}u_{x_1x_1}\xi_u^1 - 3u_{x_2}u_{x_1x_2}\xi_u^2. \end{aligned}$$

V prvním sloupci druhého řádku bude

$$\begin{aligned} & \eta_{x_1x_2} + u_{x_1}\eta_{x_2u} - u_{x_1}\xi_{x_1x_2}^1 - (u_{x_1})^2\xi_{x_2u}^1 - u_{x_2}\xi_{x_1x_2}^2 - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_2u}^2 + u_{x_2}\eta_{x_1u} + u_{x_1}u_{x_2}\eta_{uu} - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_1u}^1 \\ & - (u_{x_1})^2u_{x_2}\xi_{uu}^1 - (u_{x_2})^2\xi_{x_1u}^2 - u_{x_1}(u_{x_2})^2\xi_{uu}^2 - 2u_{x_1x_2}\xi_{x_1}^1 - 2u_{x_1}u_{x_1x_2}\xi_u^1 - 2u_{x_2x_2}\xi_{x_1}^2 - 2u_{x_1}u_{x_2x_2}\xi_u^2 \\ & + u_{x_1x_2}\eta_u - u_{x_1}u_{x_1x_2}\xi_u^1 - u_{x_2}u_{x_1x_2}\xi_u^2 = \\ & = \eta_{x_1x_2} + u_{x_1}(\eta_{x_2u} - \xi_{x_1x_2}^1) + u_{x_2}(\eta_{x_1u} - \xi_{x_1x_2}^2) - (u_{x_1})^2\xi_{x_2u}^1 + u_{x_1}u_{x_2}(\eta_{uu} - \xi_{x_1u}^1 - \xi_{x_2u}^2) - (u_{x_2})^2\xi_{x_1u}^2 - \\ & - (u_{x_1})^2u_{x_2}\xi_{uu}^1 - u_{x_1}(u_{x_2})^2\xi_{uu}^2 + u_{x_1x_2}(\eta_u - 2\xi_{x_1}^1) - 2u_{x_2x_2}\xi_{x_1}^2 - 3u_{x_1}u_{x_1x_2}\xi_u^1 - 2u_{x_1}u_{x_2x_2}\xi_u^2 - u_{x_2}u_{x_1x_2}\xi_u^2. \end{aligned}$$

Ve druhém sloupci druhého řádku bude

$$\begin{aligned} & \eta_{x_2x_2} + u_{x_2}\eta_{x_2u} - u_{x_1}\xi_{x_2x_2}^1 - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_2u}^1 - u_{x_2}\xi_{x_2x_2}^2 - (u_{x_2})^2\xi_{x_2u}^2 + u_{x_2}\eta_{x_2u} + (u_{x_2})^2\eta_{uu} - u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_2u}^1 \\ & - u_{x_1}(u_{x_2})^2\xi_{uu}^1 - (u_{x_2})^2\xi_{x_2u}^2 - (u_{x_2})^3\xi_{uu}^2 - 2u_{x_1x_2}\xi_{x_2}^1 - 2u_{x_2}u_{x_1x_2}\xi_u^1 - 2u_{x_2x_2}\xi_{x_2}^2 - 2u_{x_2}u_{x_2x_2}\xi_u^2 \\ & + u_{x_2x_2}\eta_u - u_{x_1}u_{x_2x_2}\xi_u^1 - u_{x_2}u_{x_2x_2}\xi_u^2 = \\ & \eta_{x_2x_2} - u_{x_1}\xi_{x_2x_2}^1 + u_{x_2}(2\eta_{x_2u} - \xi_{x_2x_2}^2) - 2u_{x_1}u_{x_2}\xi_{x_2u}^1 + (u_{x_2})^2(\eta_{uu} - 2\xi_{x_2u}^2) - (u_{x_2})^3\xi_{uu}^2 - \\ & - u_{x_1}(u_{x_2})^2\xi_{uu}^1 - 2u_{x_1x_2}\xi_{x_2}^1 + u_{x_2x_2}(\eta_u - 2\xi_{x_2}^2) - u_{x_1}u_{x_2x_2}\xi_u^1 - 2u_{x_2}u_{x_1x_2}\xi_u^1 - 3u_{x_2}u_{x_2x_2}\xi_u^2. \end{aligned}$$

#### 4. LIEOVY ALGEBRY

**4.1. Definice.** Buď  $\mathfrak{g}$  vektorový prostor nad tělesem  $T$  a nechť  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  je operace, pro kterou platí

- (1)  $(\forall A, B, C \in \mathfrak{g})(\forall \alpha \in T)([\alpha A + B, C] = \alpha[A, C] + [B, C]),$
- (2)  $(\forall A, B \in \mathfrak{g})([A, B] = -[B, A]),$
- (3)  $(\forall A, B, C \in \mathfrak{g})([A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0).$

Potom dvojici  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  nazýváme *Liovou algebrou* a operaci  $[\cdot, \cdot]$  nazýváme *Liovou závorkou* nebo *komutátorem*.

*Poznámka.* (1) Vztah 3 z předchozí definice se nazývá *Jacobiova identita*.

- (2) V dalším budeme většinou ztotožňovat Lieovu algebru  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  a její „nosič“  $\mathfrak{g}$ .

- (3) Jestliže pro všechna  $A, B \in \mathfrak{g}$  platí  $[A, B] = 0$ , nazývá se Lieova algebra  $\mathfrak{g}$  *komutativní* nebo *abelovská*.

**4.2. Definice.** Budte  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  Lieova algebra,  $A \subset \mathfrak{g}$ . Řekneme, že  $A$  je *podalgebra* Lieovy algebry  $\mathfrak{g}$ , jestliže  $[A, A] \subset A$ , tj. jestliže pro všechna  $x \in A$  platí  $[x, x] \in A$ .

**4.3. Definice.** Budte  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  Lieova algebra,  $A$  její podalgebra. Pro  $n \in \mathbb{N}_0$  položme

$$A^{(n)} := \begin{cases} A & n = 0, \\ [A^{(n-1)}, A^{(n-1)}] & n > 0. \end{cases}$$

Jestliže existuje takové  $N \in \mathbb{N}$ , že  $A^{(N)} = \{0\}$ , potom říkáme, že  $A$  je *řešitelná*.

**4.4. Definice.** Budte  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  Lieova algebra,  $I$  její podalgebra. Jestliže platí  $[\mathfrak{g}, I] \subset I$ , tj. jestliže pro všechna  $A \in \mathfrak{g}$  a  $B \in I$  platí  $[A, B] \in I$ , potom podalgebru  $I$  nazýváme *ideál*.

*Poznámka.* (1) Každá Lieova algebra  $\mathfrak{g}$  je zřejmě ideálem.

- (2) Z vlastností Lieovy závorky vyplývá, že  $[A, 0] = 0$  pro každé  $A \in \mathfrak{g}$ , takže  $\{0\}$  je vždy ideálem.

**4.5. Definice.** Budť  $\mathfrak{g}$  Lieova algebra,  $I$  její ideál. Řekneme, že  $I$  je

- *netriviální*, jestliže  $I \neq \{0\}$ ;
- *vlastní*, jestliže  $I \neq \mathfrak{g}$ .

**4.6. Definice.** Budť  $\mathfrak{g}$  Lieova algebra. Řekneme, že je

- *poloprostá*, jestliže v  $\mathfrak{g}$  neexistuje netriviální komutativní ideál;
- *prostá*, jestliže v  $\mathfrak{g}$  neexistuje vlastní ideál a  $\mathfrak{g}$  není komutativní.

*Poznámka.* Každá prostá Lieova algebra je poloprostá.

**4.7. Věta (Levi-Malceo).** Každá Lieova algebra  $\mathfrak{g}$  je izomorfní polopřímému součtu  $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$ , kde  $\mathfrak{s}$  je poloprostá podalgebra  $\mathfrak{g}$  a  $\mathfrak{n}$  je maximální řešitelný ideál v  $\mathfrak{g}$ .

#### DODATEK D. HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ PDR 1. ŘÁDU

**D.1. Definice.** Budť  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  oblast. Budť  $g_1, \dots, g_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  spojité funkce a nechtť pro každé  $x \in \Omega$  platí

$$\sum_{i=1}^n |g_i(x)| > 0.$$

Potom rovnici

$$\sum_{i=1}^n g_i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0 \quad (7)$$

nazveme *homogenní lineární parciální diferenciální rovnici 1. řádu*.

**D.2. Definice.** Autonomní soustavu obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

budeme nazývat *charakteristický systém* příslušný k rovnici (7). Každé řešení  $\phi : (\mathbb{R}) \rightarrow \Omega$  tohoto systému nazveme *charakteristika* rovnice (7).

**D.3. Věta.** Budť  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\Omega)$ . Potom  $\psi$  je řešením rovnice (7) v  $\Omega$  právě tehdy, když  $\psi$  je konstantní podél každé charakteristiky rovnice (7).

*D ů k a z .* (1) Nechtť  $\psi$  řeší (7) v  $\Omega$ , tj. nechtť pro každé  $x \in \Omega$  platí

$$\sum_{i=1}^n g_i(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^i} = 0. \quad (8)$$

Budť  $\phi$  nějaká charakteristika rovnice (7), označme  $(t_1, t_2)$  její definiční obor (z teorie ODR víme, že  $\phi \in C^1(t_1, t_2)$ ). Pro  $t \in (t_1, t_2)$  je

$$\frac{d(\psi \circ \phi)}{dt}(t) = \psi'(\phi(t))\phi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(\phi(t))g_i(\phi(t)) = 0,$$

takže  $\psi \circ \phi$  je na  $(t_1, t_2)$  konstantní.

- (2) Budť  $\psi$  funkce konstantní podél každé charakteristiky. Zvolme  $x_0 \in \Omega$ . Ze spojitosti funkcí  $g_1, \dots, g_n$  podle Peanovy věty vyplývá existence alespoň jedné charakteristiky  $\psi$  procházející bodem  $x_0$ , označme  $(t_1, t_2)$  její definiční obor. Podle předpokladu existuje takové  $C \in \mathbb{R}$ , že pro všechna  $t \in (t_1, t_2)$

platí  $(\psi \circ \phi)(t) = C$ . Proto, označíme-li  $t_0 \in (t_1, t_2)$  onen bod, který splňuje  $\phi(t_0) = x_0$ , můžeme psát

$$0 = \frac{d(\psi \circ \phi)}{dt}(t_0) = \psi'(\phi(t_0))\phi'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0)g_i(x_0).$$

Ježto jsme bod  $x_0 \in \Omega$  zvolili libovolně, platí (8) pro každé  $x \in \Omega$  a to jinými slovy znamená, že  $\psi$  je řešení rovnice (7) v  $\Omega$ .  $\square$

**D.4. Věta.** Necht' v žádné podoblasti  $\Omega' \subset \Omega$  nejsou všechny funkce  $g_1, \dots, g_n$  identicky rovny nule. Buďte  $\psi_1, \dots, \psi_n$  funkce třídy  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  a necht' je každá z těchto funkcí řešením rovnice (7) v  $\Omega$ . Potom jsou funkce  $\psi_1, \dots, \psi_n$  v  $\Omega$  závislé.

*Důkaz.* Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že funkce  $\psi_1, \dots, \psi_n$  nejsou v  $\Omega$  závislé. Potom existuje takový bod  $x_0 \in \Omega$ , že platí

$$\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)}(x_0) \neq 0.$$

Z toho, že funkce  $\psi_1, \dots, \psi_n$  jsou třídy  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ , vyplývá existence takového  $\varepsilon > 0$ , že  $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$  a pro všechna  $x \in B_\varepsilon(x_0)$  platí

$$\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)}(x) \neq 0.$$

To ale znamená, že soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x^1}(x) y_1 + \dots + \frac{\partial \psi_1}{\partial x^n}(x) y_n &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x^1}(x) y_1 + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial x^n}(x) y_n &= 0 \end{aligned}$$

má pro všechna  $x \in B_\varepsilon(x_0)$  pouze triviální řešení. Zejména tedy není možné, aby funkce  $\psi_1, \dots, \psi_n$  řešily rovnici (7) v oblasti  $B_\varepsilon(x_0)$ , a přitom by funkce  $g_1, \dots, g_n$  nebyly v  $B_\varepsilon(x_0)$  identicky rovny nule.  $\square$

**D.5. Definice.** Buďte  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  funkce třídy  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  a necht' je každá z těchto funkcí řešením rovnice (7) v  $\Omega$ . Necht' v každé podoblasti  $\Omega' \subset \Omega$  existuje takový bod  $x_0$ , že hodnota matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x^n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}$$

je rovna  $n-1$ . Potom řekneme, že funkce  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  tvoří *fundamentální systém* rovnice (7).

**D.6. Věta.** Necht' v každé podoblasti  $\Omega' \subset \Omega$  existuje takový bod  $x_0$ , že platí

$$\sum_{i=1}^n |g_i(x_0)| > 0.$$

Buďte  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  fundamentální systém rovnice (7),  $\Theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ . Potom  $\Theta$  je řešením rovnice (7) v  $\Omega$  tehdy a jen tehdy, jsou-li funkce  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \Theta$  v  $\Omega$  závislé.

*Důkaz.* Implikace ( $\Rightarrow$ ) byla dokázána v minulé větě. Jsou-li funkce  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \Theta$  závislé v  $\Omega$ , potom je pro každé  $x \in \Omega$

$$\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \Theta)}{\partial(x^1, \dots, x^n)}(x) = 0.$$

Protože totéž platí pro determinant matice transponované, má soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x^1}(x) y_1 + \dots + \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x^1}(x) y_{n-1} + \frac{\partial \Theta}{\partial x^1}(x) y_n &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x^n}(x) y_1 + \dots + \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x^n}(x) y_{n-1} + \frac{\partial \Theta}{\partial x^n}(x) y_n &= 0 \end{aligned}$$

netriviální řešení pro každé  $x \in \Omega$ . Tuto soustavu můžeme zapsat též vektorově ve tvaru

$$\nabla \psi_1(x) y_1 + \dots + \nabla \psi_{n-1}(x) y_{n-1} + \nabla \Theta(x) y_n = 0.$$

Jestliže tuto rovnici skalárně vynásobíme vektorem  $(g_1(x), \dots, g_n(x))$ , dostaneme pro každé  $x \in \Omega$

$$y_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_1}{\partial x^i}(x) g_i(x) + \dots + y_{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x^i}(x) g_i(x) + y_n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta}{\partial x^i}(x) g_i(x) = 0.$$

Protože funkce  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  řeší (7), dostáváme odtud pro každé  $x \in \Omega$

$$y_n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta}{\partial x^i}(x) g_i(x) = 0.$$

Předpokládejme existenci takového bodu  $x_0 \in \Omega$ , že

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta}{\partial x^i}(x_0) g_i(x_0) \neq 0.$$

Na levé straně této rovnosti stojí spojitá funkce, a proto existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$  a pro každé  $x \in B_\varepsilon(x_0)$  je

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta}{\partial x^i}(x) g_i(x) \neq 0.$$

Pro  $x \in B_\varepsilon(x_0)$  tedy musí být  $y_n = 0$ , a přitom má mít soustava

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x^1}(x) y_1 + \dots + \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x^1}(x) y_{n-1} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x^n}(x) y_1 + \dots + \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x^n}(x) y_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

netriviální řešení. Podle definice fundamentálního systému však existuje takový bod  $x' \in B_\varepsilon(x_0)$ , že hodnota matice této soustavy v bodě  $x'$  je rovna  $n - 1$  (víme, že transpozice matice nemění hodnotu). V bodě  $x'$  má proto tato soustava pouze triviální řešení a to je spor.  $\square$

**D.7. Věta** (o redukci). Buď  $p < n - 1$  a necht'  $\psi_1, \dots, \psi_p$  jsou funkce třídy  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  takové, že

- každá z těchto funkcí je řešením rovnice (7) v  $\Omega$ ,
- pro všechna  $x \in \Omega$  platí

$$\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_p)}{\partial(x^1, \dots, x^p)}(x) \neq 0,$$

- zobrazení  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi : x \mapsto (\psi_1(x), \dots, \psi_p(x), x^{p+1}, \dots, x^n)$  je prosté.

Položme  $\tilde{\Omega} := \Phi(\Omega)$  a definujme na  $\tilde{\Omega}$  funkce  $\tilde{g}_{p+1}, \dots, \tilde{g}_n$  vztahy  $\tilde{g}_i(y) := g_i(\Phi^{-1}(y))$  pro  $i = p + 1, \dots, n$ . Buďte  $\tilde{\psi}_{p+1}, \dots, \tilde{\psi}_{n-1}$  řešení rovnice

$$\sum_{i=p+1}^n \tilde{g}_i(y) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y^i} = 0$$

v  $\tilde{\Omega}$  ( $y_1, \dots, y_p$  jsou v této rovnici parametry) a nechť pro každé  $y \in \tilde{\Omega}$  platí

$$\frac{\partial(\tilde{\psi}_{p+1}, \dots, \tilde{\psi}_{n-1})}{\partial(y^{p+1}, \dots, y^{n-1})}(y) \neq 0.$$

Pro  $k = p+1, \dots, n-1$  položíme  $\psi_k(x) := \tilde{\psi}_k(\Phi(x))$ . Potom  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  tvoří fundamentální systém rovnice (7).

*D ů k a z .* (1) Nejprve dokaŹme, Źe funkce  $\psi_{p+1}, \dots, \psi_{n-1}$  jsou řešenými rovnice (7) v  $\Omega$ . Pro  $k \in \{p+1, \dots, n-1\}$ ,  $i \in \hat{n}$  platí

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial y^j} \circ \Phi \right) \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^p \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial y^j} \circ \Phi \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial x^i} + \sum_{j=p+1}^n \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial y^j} \circ \Phi \right) \delta_{ji},$$

takŹe

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_k}{\partial x^i} g_i &= \sum_{j=1}^p \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial y^j} \circ \Phi \right) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial x^i} g_i + \sum_{j=p+1}^n \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial y^j} \circ \Phi \right) \sum_{i=1}^n \delta_{ji} g_i = \\ &= \sum_{j=1}^p \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial y^j} \circ \Phi \right) 0 + \sum_{j=p+1}^n \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial y^j} \circ \Phi \right) g_j = \sum_{j=p+1}^n \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial y^j} \tilde{g}_j \right) \circ \Phi = 0. \end{aligned}$$

(2) Zbývá dokáŹat, Źe  $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  tvoří fundamentální systém. Buď  $k \in \widehat{n-1}$ . Je-li  $k \leq p$ , pak  $\psi_k = \Phi^k = y^k \circ \Phi$ ; je-li  $k > p$ , pak  $\psi_k = \tilde{\psi}_k \circ \Phi$ . Odtud

$$\nabla \psi_k = \begin{cases} e_k \cdot \Phi' & k \leq p, \\ (\nabla \tilde{\psi}_k \circ \Phi) \cdot \Phi' & k > p, \end{cases}$$

takŹe můŹeme psát

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x^{n-1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^p}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial y^p}{\partial y^n} \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^{n-1}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^p} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^p} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^{p+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^p}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^p}{\partial x^{p+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi^p}{\partial x^{n-1}} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^p} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^p} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^{p+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^p}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^p}{\partial x^{p+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi^p}{\partial x^{n-1}} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obě poslední matice jsou čtvercové  $(n-1)$ -ního řádu, takže pro  $x \in \Omega$  je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})}{\partial(x^1, \dots, x^{n-1})}(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial\tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial\tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^p} & \dots & \frac{\partial\tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial\tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^p} & \dots & \frac{\partial\tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^{n-1}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^{p+1}} & \dots & \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Phi^p}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\Phi^p}{\partial x^{p+1}} & \dots & \frac{\partial\Phi^p}{\partial x^{n-1}} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial\tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^{p+1}} & \dots & \frac{\partial\tilde{\psi}_{p+1}}{\partial y^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^{p+1}} & \dots & \frac{\partial\tilde{\psi}_{n-1}}{\partial y^{n-1}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Phi^p}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\Phi^p}{\partial x^p} \end{vmatrix} = \\
&= \frac{\partial(\tilde{\psi}_{p+1}, \dots, \tilde{\psi}_{n-1})}{\partial(y^{p+1}, \dots, y^{n-1})}(\Phi(x)) \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_p)}{\partial(x^1, \dots, x^p)}(x) \neq 0. \quad \square
\end{aligned}$$

## REFERENCE

- [1] P. J. Olver: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag New York 1993.
- [2] I. Štoll, J. Tolar: *Teoretická fyzika*, skripta, ČVUT Praha 1994.
- [3] O. Litzman, M. Sekanina: *Užití grup ve fyzice*, Academia Praha 1982.
- [4] O. John, J. Nečas: *Rovnice matematické fyziky*, skripta, MFF UK Praha 1982.
- [5] L. Vrána: *Matematická analýza III. Diferenciální počet*, skripta, ČVUT Praha 1982.