

Matematická analýza a lineární algebra



Zveřejněno: neděle 6. duben 2014 Napsal Administrator

Okruhy otázek ke státním závěrečným zkouškám bakalářského studia

Obor: **Matematické inženýrství - Zaměření Matematická fyzika**

Předmět: **Matematická analýza a lineární algebra**

Literatura:

Předměty, vztahující se k okruhům:

- **01MA1,01MAP** - Matematická analýza 1, Matematická analýza plus
- **01MAA2, 3, 4** - Matematická analýza A 2,3,4
-
- **01LA1, 01LAP** - Lineární algebra 1, Lineární algebra plus
-
- **01LAA2** - Lineární algebra A 2

Okruhy otázek:

1. Diferenciální počet reálné proměnné - derivace, její aplikace pro vyšetřování funkce, věty o přírůstku funkce.
2. Riemannův integrál v $\mathbb{R}$, definice, postačující podmínky existence, Newtonova formule, substituce, per partes, věty o střední hodnotě.
3. Číselné řady, kritéria konvergence, přerovnávání řad, součin řad.
4. Mocninné řady, vlastnosti součtu mocninné řady, Taylorův polynom, Taylorova řada, rozvoje základních funkcí do Taylorovy řady.
5. Derivace v $\mathbb{R}^n$, parciální derivace, gradient, věty o přírůstku funkce, extrémů funkcí více proměnných, vázané extrém.
6. Lebesgueův integrál - definice, měřitelné množiny a funkce, Fubiniho věta, věta o substituci, spojitost integrálu, věty o záměnách (integrál a řada, integrál a limita, integrál a derivace).
7. Derivace v komplexním oboru, holomorfní funkce, Cauchyova věta a Cauchyův vzorec, Laurentův rozvoj a typy singularit, reziduová věta.
8. Lineární zobrazení a jeho matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta.
9. Hermitovské a kvadratické formy, skalární součin a ortogonalita, nerovnosti.
10. Lineární operátory a čtvercové matice, determinant, vlastní čísla, diagonalizovatelnost, normální operátory.

Otázky k BC SZZ z předmětu
Matematická analýza (a lineární algebra)

Tomáš Jakubec

LS 2017/2018

Obsah

1	Diferenciální počet reálné proměnné - derivace, její aplikace pro vyšetřování funkce, věty o přírůstku funkce	3
2	Riemannův integrál v $\mathbb{R}$, definice, postačující podmínky existence, Newtonova formule, substituce, per partes, věty o střední hodnotě	6
3	Číselné řady, kritéria konvergence, přerovnání řad, součin řad	9
4	Mocninné řady, vlastnosti součtu mocninné řady, Taylorův polynom, Taylorova řada, rozvoje základních funkcí do Taylorovy řady	12
5	Derivace v $\mathbb{R}^n$, parciální derivace, věty o přírůstku funkce, extrémů funkcí více proměnných, vázané extrémů	14
6	Lebesgueův integrál - definice, měřitelné množiny a funkce, Fubiniova věta, věta o substituci, spojitost integrálu, věty o záměnách (integrál a řada, integrál a limita, integrál a derivace)	17
7	Derivace v komplexním oboru, holomorfní funkce, Cauchyova věta a Cauchyův vzorec, Laurentův rozvoj a typy singularit, reziduová věta	21
8	Lineární zobrazení a jeho matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta	24
9	Hermitovské operátory a kvadratické formy, skalární součin a ortogonalita, nerovnosti	28
10	Lineární operátory a čtvercové matice, determinant, vlastní čísla, diagonalizovatelnost, normální operátory	31

1 Diferenciální počet reálné proměnné - derivace, její aplikace pro vyšetřování funkce, věty o přírůstku funkce

Definice. (derivace) Buď funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, derivací funkce f v bodě x_0 nazveme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pokud tato limita existuje. Má-li funkce konečnou derivaci v bodě, říkáme, že je v tom bodě diferencovatelná.

Věta. (aritmetika derivace) Budte f, g reálné funkce reálné proměnné definované na okolí $a \in \mathbb{R}$. Pak platí:

1. $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$
2. $(fg)'(a) = g(a)f'(a) + f(a)g'(a),$
3. $f(a) \neq 0, \left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{1}{(f(a))^2} f'(a).$

Pokud výrazy na pravé straně mají smysl.

Věta. (derivace složené funkce) Nechť g je diferencovatelná v bodě a , f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Pak $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Věta. (derivace inverzní funkce) Nechť $D_f = J$, f je spojitá a prostá, J otevřený, $\forall x \in J, f(x) \neq 0$. Pak

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \iff (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

kde $y_0 \in f(J) = I, y_0 = f(x_0)$.

Věta. (Darboux) Buď funkce f zprava spojitá v bodě a , nechť je f diferencovatelná na pravém okolí bodu a , nechť existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí

$$f'_x(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x).$$

Definice. (derivace vyšších řádů) Buď f reálná diferencovatelná funkce. Označíme funkci $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$. Druhou derivací funkce f'' rozumíme derivaci funkce f' atd. pro vyšší derivace.

Definice. (lokální extrémy) Říkáme, že funkce f má v bodě a

1. lokální maximum, právě když $(\exists H_a)(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a)),$
2. ostré lokální maximum, právě když $(\exists H_a)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) < f(a)),$
3. lokální minimum, právě když $(\exists H_a)(\forall x \in H_a)(f(x) \geq f(a)),$
4. ostré lokální minimum, právě když $(\exists H_a)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) > f(a)),$

Věta. (nutná podmínka existence extrému) Buď f má v bodě a lokální extrém. Pak $f'(a) = 0$ nebo $f'(a)$ neexistuje.

Věta. (postačující podmínka pro monotonii funkce) Buď f spojitá na intervalu I , nechť existuje f' na I° . Pak platí:

1. $(\forall x \in I)(f'(x) \geq 0) \iff f$ je na I rostoucí.
2. $(\forall x \in I)(f'(x) \leq 0) \iff f$ je na I klesající.
3. $(\forall x \in I)(f'(x) = 0) \iff f$ je na I konstantní.

4. $(\forall x \in I) (f'(x) > 0) \iff f \text{ je na } I \text{ ostře rostoucí.}$

5. $(\forall x \in I) (f'(x) < 0) \iff f \text{ je na } I \text{ ostře klesající.}$

Věta. (derivace a postačující podmínka existence extrému) Buď f diferencovatelná na nějakém okolí bodu a . Je-li $f'(a) = 0$ a současně $f''(a) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$, pak f má v bodě a lokální $\begin{cases} \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{cases}$.

Definice. (tečna) Funkce f má v bodě a

1. svislou tečnu právě tehdy, když f je spojitá v bodě a a $f'(a) = \pm\infty$,
2. nesvislou tečnu $y(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$, pokud je f v bodě a diferencovatelná. Bodu $(a, f(a))$ říkáme bod dotyku.

Definice. (konvexnost, konkávnost) Říkáme, že f je na intervalu I $\begin{cases} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \end{cases}$, právě když

$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3) \left(f(x_2) \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x_2 - x_1) + f(x_1) \right).$$

Věta. (postačující podmínka pro konvexnost a konkávnost) Buď funkce f spojitá na intervalu I a diferencovatelná na I° . Je-li $f' \begin{cases} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \\ \text{ostře rostoucí} \\ \text{ostře klesající} \end{cases}$ na I° . Pak je f na I $\begin{cases} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \\ \text{ryze konvexní} \\ \text{ryze konkávní} \end{cases}$.

Věta. (postačující podmínka pro monotonii f') Buď funkce f'' na intervalu I° $\begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$. Pak $f' \begin{cases} \text{roste} \\ \text{klesá} \\ \text{ostře roste} \\ \text{ostře klesá} \end{cases}$ na I° . Pak f je na I $\begin{cases} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \\ \text{ryze konvexní} \\ \text{ryze konkávní} \end{cases}$.

Definice. (inflexní bod) Říkáme, že funkce f má v bodě a inflexi, právě když je diferencovatelná a platí

$$(\exists H_a) (\forall x \in H_a) \left(x < a \implies f(x) \begin{cases} > \\ < \end{cases} f(a) + f'(a)(x-a) \right) \wedge \left(x > a \implies f(x) \begin{cases} < \\ > \end{cases} f(a) + f'(a)(x-a) \right).$$

Věta. (nutná podmínka existence inflexního bodu) Nechť funkce f má inflexi v bodě a a nechť je diferencovatelná na okolí a . Pak $f''(a) = 0$ nebo neexistuje.

Věta. (postačující podmínka existence inflexního bodu) Nechť existuje okolí H_a takové, že f má konečnou druhou derivaci na H_a . Nechť $f''(a) = 0$ a $f'''(a) \neq 0$. Pak f má v bodě a inflexní bod.

Věta. (asymtota) Funkce f má v $+\infty$ asymptotu o rovnici $y(x) = kx + q$, právě když

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = q.$$

Podobně pro případ $-\infty$.

Věty o přírůstku funkce

Věta. (Rolleova) Buď f spojitá na intervalu $[a, b] = I$, nechť f je diferencovatelná na $I^\circ = (a, b)$, $f(a) = f(b)$. Pak $\exists c \in I^\circ$ tak, že $f'(c) = 0$.

Věta. (Lagrangeova) *Bud' f spojitá na intervalu $[a, b] = I$ a diferencovatelná na $I^\circ = (a, b)$. Pak $\exists c \in (a, b)$ takový, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta. (Cauchyova) *Bud' f, g spojité na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelné na (a, b) . Nechť dále $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Pak $\exists c \in (a, b)$ takový, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

2 Riemannův integrál v $\mathbb{R}$, definice, postačující podmínky existence, Newtonova formule, substituce, per partes, věty o střední hodnotě

Definice. (dělení intervalu) Buď $[a, b]$ interval v $\mathbb{R}$. Konečnou množinu $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ takovou, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nazýváme rozdělením intervalu $[a, b]$. Bodům x_k pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ říkáme dělicí body intervalu $[a, b]$, intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ říkáme částečný interval intervalu $[a, b]$ při rozdělení σ .

Definice. (norma rozdělení) Buď $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ rozdělením intervalu $[a, b]$. Označme $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$. Číslo $\nu(\sigma) = \max\{\Delta_k | 1, 2, \dots, n\}$ nazýváme normou rozdělení.

Definice. (zjemnění) Necht' σ a σ' jsou rozdělení intervalu $[a, b]$, přičemž $\sigma \subset \sigma'$. Pak σ' nazýváme zjemněním rozdělení σ .

Definice. (horní a dolní součet) Necht' funkce f je omezená na intervalu $[a, b]$ a necht' $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ je rozdělením intervalu $[a, b]$. Označme

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Pak

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \quad \text{a} \quad s(\sigma) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i$$

nazýváme horním, resp. dolním, součtem funkce f pro rozdělení σ .

Definice. (horní a dolní integrální součet) Necht' funkce f je omezená na intervalu $[a, b]$. Infimum množiny horních součtů a supremum dolních součtů přes rozdělení σ intervalu $[a, b]$ nazýváme horním, resp. dolním, integrálním součtem funkce f a značíme

$$\int_a^b f = \inf_{\sigma} S(\sigma), \quad \text{resp.} \quad \int_a^b f = \sup_{\sigma} s(\sigma).$$

Definice. (Riemannův integrál, Darboux) Necht' f je omezená na $[a, b]$. Je-li $\int_a^b f = \int_a^b f$, říkáme, že f má v intervalu $[a, b]$ Riemannův integrál. Společnou hodnotu dolního a horního integrálního součtu značíme $\int_a^b f$ nebo $\int_a^b f(x) dx$. O funkci f říkáme, že je integrovatelná v $[a, b]$.

Věta. (nutná a postačující podmínka existence) Buď f omezená na intervalu $[a, b]$. Pak

$$\int_a^b f \text{ existuje} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \text{ rozdělení } \sigma \text{ intervalu } [a, b]) (S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon).$$

Věta. (postačující podmínky existence integrálu)

Buď funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak f má v tomto intervalu integrál.

Buď funkce f monotonní na intervalu $[a, b]$. Pak f má v tomto intervalu integrál.

Definice. (Riemannova definice Riemannova integrálu) Buď f omezená funkce na $[a, b]$ a necht' $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ je rozdělením intervalu $[a, b]$. Sumu $\mathcal{J}(\sigma) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i$, kde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ nazýváme integrálním součtem funkce f při rozdělení σ .

Definice. (normální posloupnost rozdělení) Posloupnost rozdělení intervalu $[a, b]$ $(\sigma_n)_{n=1}^{+\infty}$ nazýváme normální právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(\sigma_n) = 0$.

Věta. (základní věta integrálního počtu) Buď f omezená funkce na $[a, b]$. Integrál $\int_a^b f$ existuje právě tehdy, když pro každou normální posloupnost rozdělení $(\sigma_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost $(\mathcal{J}(\sigma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentní.

Newtonova formule

Věta. (Newtonova formule v určitém integrálu) *Nechť existuje $\int_a^b f$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť existuje funkce F taková, že*

1. F je spojitá na intervalu $[a, b]$,
2. $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

Pak platí

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \stackrel{\text{ozn.}}{=} [F(x)]_a^b.$$

Věta. (Newtonova formule v zobecněném integrálu) *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$ a nechť pro funkci f na intervalu $[a, b)$ platí $\forall x \in (a, b)$ existuje $R \int_a^x f$. Existuje-li funkce F taková, že*

1. F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) a
2. F má konečné limity $\lim_{a+} F$, $\lim_{a-} F$,

Pak existuje $\int_a^b f$ a platí

$$\int_a^b f = \lim_{b-} F - \lim_{a+} F \stackrel{\text{ozn.}}{=} [F(x)]_a^b.$$

Substituce

Věta. (o substituci v určitém integrálu) *Nechť pro funkce f a ϕ platí:*

1. ϕ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a diferencovatelná v (α, β) ,
2. f je spojitá na $\phi([\alpha, \beta])$.

Pak platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx,$$

pokud integrál na levé straně existuje.

Věta. (o substituci v zobecněném integrálu) *Nechť funkce ϕ je ostře monotonní a má spojitou derivaci ϕ' na intervalu $[\alpha, \beta)$ a nechť je funkce f spojitá na intervalu $\phi([\alpha, \beta))$. Označme $a := \phi(\alpha)$, $b := \lim_{\beta-} \phi$. Pak platí*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx$$

za předpokladu, že alespoň jeden z integrálů existuje.

Per partes

Věta. (per partes pro určitý integrál) *Nechť funkce f a g jsou spojitě na $[a, b]$ a diferencovatelné na (a, b) . Jestliže existují integrály $\int_a^b f'g$ a $\int_a^b fg'$, pak*

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

Věta. (per partes pro zobecněný integrál) *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$ a nechť funkce f a g splňují:*

1. f , g mají spojitou derivaci f' , g' v intervalu (a, b) ,
2. existuje konečná limita $\lim_{b-} fg$,
3. existuje jeden z integrálů $\int_a^b f'g$, $\int_a^b fg'$.

Pak existuje i druhý integrál a platí

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Věty o střední hodnotě

Věta. (o střední hodnotě 1) *Nechť funkce f a g jsou omezené na intervalu $[a, b]$ a necht' mají vlastnosti:*

- 1. funkce f je integrovatelná, nezáporná na intervalu $[a, b]$*
- 2. součin fg je integrovatelný.*

Pak

$$\exists \mu \in \left[\inf_{[a,b]} g, \sup_{[a,b]} g \right] \text{ tak, že } \int_a^b fg = \mu \int_a^b f.$$

Věta. (o střední hodnotě 2) *Nechť funkce f a g jsou integrovatelné na intervalu $[a, b]$ a necht' g je monotónní v (a, b) . Pak*

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ tak, že } \int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f.$$

3 Číselné řady, kritéria konvergence, přerovnání řad, součin řad

Definice. (číselná řada) Necht' $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost. Posloupnost jejích částečných součtů $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ definujeme vztahem

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dvojici posloupností $((a_n)_{n=1}^{+\infty}, (s_n)_{n=1}^{+\infty})$ nazýváme číselnou řadou a značíme ji $\sum_{n=1}^{+\infty} a$, kde a_n nazýváme n -tým členem číselné řady. Existuje-li konečná limita $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$, říkáme, že řada konverguje a má součet s . V opačném případě řada diverguje.

Věta. (nutná podmínka konvergence) Bud' $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní řada. Pak $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Věta. (aritmetika řad) Bud' $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ číselné řady.

- Jestliže $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergují. Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ konverguje.
- Jestliže $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje. Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ diverguje.
- Bud' $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n$ mají stejný charakter.

Věta. (B-C kritérium konvergence) Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0) (\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0) (\forall p \in \mathbb{N}) \left(\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Důsledek. (konverguje-li řada absolutně, konverguje i neabsolutně) Bud' $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergentní řada. Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní řada.

Kritéria konvergence

Řady s kladnými členy

Věta. (srovnávací kritérium) Necht' pro nezáporné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ platí, že $a_n \leq b_n$ od jistého n_0 .

- Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje.
- Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.

Necht' pro nezáporné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ platí, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ od jistého n_0 .

- Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje.
- Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.

Věta. (podílové kritérium) Bud' $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ kladné posloupnosti takové, že existuje $L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

- Pokud $L < +\infty$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud $L > 0$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje.
- Pokud $L \in (0, +\infty)$, pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ mají stejný charakter.

Věta. (Cauchyovo odmocninové kritérium) Necht' $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Jestliže existuje $q < 1$ a n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje. (Limitní případ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.)
2. Jakmile pro nekonečně mnoho indexů platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje. (Limitní případ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.)

Věta. (d'Alambertovo podílové kritérium) *Nechť $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

1. *Jestliže existuje $q < 1$ a n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje. (Limitní případ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.)*
2. *Jakmile pro nekonečně mnoho indexů platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje. (Limitní případ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.)*

Věta. (Raabeovo kritérium) *Nechť $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

1. *Existuje-li $\alpha > 1$ a n_0 takové, že platí $n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje. (Limitní případ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.)*
2. *Jestliže existuje n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí $n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$ pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje. (Limitní případ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.)*

Věta. (Gaussovo kritérium) *Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je kladná posloupnost, pro níž existují čísla $q, \alpha \in \mathbb{R}$, kladné ε a omezená posloupnost $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ taková, že*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. *Jestliže $q < 1$ nebo $q = 1$ a $\alpha > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.*
2. *Jestliže $q > 1$ nebo $q = 1$ a $\alpha \leq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.*

Věta. (Integrální kritérium) *chybí...*

Řady s obecnými členy

Věta. (Dirichletovo kritérium) *Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je reálná posloupnost a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ komplexní posloupnost splňující.*

1. *$(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je monotonní a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$,*
2. *$(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ má omezenou posloupnost částečných součtů.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konverguje.

Věta. (Abelovo kritérium) *Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je reálná posloupnost a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ komplexní posloupnost splňující.*

1. *$(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je monotonní a konvergentní,*
2. *$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ je konvergentní řada.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konverguje.

Řady se střídavými znamínky

Věta. (Leibnitzovo kritérium) *Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je klesající posloupnost kladných čísel. Jestliže $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.*

Poznámka. Z Leibnitzova kritéria lze odvodit i odhad chyby pro řady se střídavými znaménky, pokud bychom chtěli sečíst jen konečný počet prvků. Největší chyba, které se můžeme dopustit je rovna prvnímu vynechanému členu v absolutní hodnotě.

Věta. (modifikované Gaussovo kritérium) *Bud' $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ kladná posloupnost splňující pro nějaké $\alpha, q \in \mathbb{R}$, kladné ε a omezenou posloupnost $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ vztah*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- *Je-li $q < 1$ nebo $q = 1$ a $\alpha > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konverguje absolutně.*
- *Je-li $q > 1$ nebo $q = 1$ a $\alpha \leq 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ diverguje.*
- *Je-li $q = 1$ a $\alpha \in (0, 1]$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konverguje neabsolutně.*

Uzávorkování

Definice. (uzávorkování řady) Buď $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ řada a buď $(k_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{N}$ ostře rostoucí posloupnost. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ jejíž členy jsou určeny $A_n = \sum_{j=k_n}^{k_{n+1}} a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, nazýváme uzavorkováním řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$.

Věta. (řada konverguje, pak konverguje libovolné uzavorkování)

Věta. (uzávorkování řady) Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ je uzavorkováním řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$. Nechť jsou splněny podmínky:

1. $(\exists M \in \mathbb{N}) (\forall n) (k_{n+1} - k_n < M)$,
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ mají stejný charakter a v případě konvergence i stejný součet.

Prerovnání řady

Definice. (prerovnání řady) Mějme číselnou řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a bijekci $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ nazýváme prerovnáním řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle ϕ .

Věta. (prerovnání absolutně konv. řady) Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak každé její prerovnání je absolutně konvergentní řada se stejným součtem.

Věta. (Riemann) Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní řada. Pak ke každému $s \in \mathbb{R}^*$ existuje prerovnání $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ taková, že má součet s . Rovněž existuje oscilující prerovnání.

Součin řad

Definice. (součin řad) Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou číselné řady a $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nechť je bijekce. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme číslo $c_n = a_i b_j$, kde $n = \phi(i, j)$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ nazýváme součinem řad $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Věta. (součin absolutně konvergentních řad) Budťe $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ absolutně konvergentní řady. Pak jejich libovolný součin je také absolutně konvergentní řada a pro její součet platí:

$$\sum_{i,j} a_i b_j = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right).$$

Definice. (součinnová řada) Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou číselné řady. Řadu $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_{n-k} \right)$ nazýváme součinnovou řadou.

Důsledek. Pro absolutně konvergentní řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_{n-k} \right).$$

4 Mocninné řady, vlastnosti součtu mocninné řady, Taylorův polynom, Taylorova řada, rozvoje základních funkcí do Taylorovy řady

Definice. (Mocninná řada, obor konvergence) Necht' $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je reálná resp. komplexní posloupnost a necht' a je reálné resp. komplexní číslo. Pak řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ nazýváme mocninnou řadou se středem v bodě a . Množinu všech reálných resp. komplexních čísel x , pro která mocninná řada konverguje nazýváme obor konvergence mocninné řady, $s(x)$ pak označuje součet mocninné řady pro x z oboru konvergence.

Věta. Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ existuje $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$, $\rho \geq 0$ takové, že

1. pokud $|x-a| < \rho$, pak řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ konverguje absolutně,
2. pokud $|x-a| > \rho$, pak řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ diverguje.

Definice. (poloměr konvergence) Číslo ρ z předchozí věty nazýváme poloměr konvergence mocninné řady.

Věta. Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ je roven

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

přičemž klademe $\rho = 0$, když limes superior je $+\infty$, a $\rho = +\infty$, když limes superior je 0.

Věta. (Mocninnou řadu v oboru konvergence lze derivovat člen po členu) Necht' $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ je reálná mocninná řada s kladným poloměrem konvergence ρ . Označme její součet $s(x)$. Pak pro každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$ platí

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

Následující tvrzení plyne z důkazu předešlé věty.

Věta. Necht' $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ je mocninná řada s kladným poloměrem konvergence. Označme $s(x)$ její součet. Pak pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $a_n = \frac{s^{(n)}(a)}{n!}$.

Věta. (Taylorův vzorec) Necht' reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n -tou derivaci. Potom existuje právě jeden polynom T_n stupně menší nebo rovno n takový, že

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Tento polynom má tvar

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

a nazýváme jej n -tým Taylorovým polynomem funkce f v bodě a .

Taylorovy polynomy některých funkcí v bodě $a = 0$

$$f(x) = e^x \implies T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k,$$

$$f(x) = \sin(x) \implies T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

$$f(x) = \cos(x) \implies T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

$$f(x) = \ln(1+x) \implies T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k,$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha \implies T_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Definice. (Taylorův vzorec, zbytek) Nechť funkce f má v bodě a konečnou n -tou derivaci. Položme $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$. Pak vztah $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ nazýváme Taylorovým vzorcem a $R_n(x)$ nazýváme n -tým zbytkem v Taylorově vzorci.

Základní předpoklady: funkce f má v každém $x \in H_a$ existuje konečná $(n-1)$ -ní derivace funkce f a v bodě a existuje konečná n -tá derivace f .

Věta. Nechť pro f , a , n platí základní předpoklady. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Peanův tvar zbytku: $f(x) = T_n(x) + \omega_n(x) \cdot (x-a)^n$, kde $\lim_{x \rightarrow a} \omega_n(x) = 0$.

Věta. (O nejlepší aproximaci) Nechť pro f , a , n platí základní předpoklady a nechť $Q(x)$ je polynom stupně nejvýše n , různý od Taylorova polynomu T_n příslušného funkci f v bodě a . Pak existuje takové okolí H_a , že

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)|, \text{ pro každé } x \in H_a \setminus \{a\}.$$

Věta. Nechť pro f , a , n platí základní předpoklady. Nechť dále pro polynom p stupně nejvýše n a reálnou funkci $\tilde{\omega}$ platí, že

$$f(x) = p(x) + (x-a)^n \cdot \tilde{\omega}(x), \text{ kde } \lim_{x \rightarrow a} \tilde{\omega}(x) = 0.$$

Pak p je n -tý Taylorův polynom funkce f v bodě a .

Věta. (Taylorova) Nechť existuje okolí H_a bodu a takové, že funkce f v něm má konečnou $(n+1)$ -ní derivaci a nechť $x \in H_a$. Pak zbytek v Taylorově vzorci má tvar $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ má tvar

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Kde číslo ξ závisí na x a n a leží mezi čísly x a a .

Lagrangeův tvar zbytku:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Cauchyho tvar zbytku:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-a).$$

Taylorova řada

Vyjádření reálné funkce reálné proměnné jako řady

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \text{ pro každé } x \in \mathcal{J}$$

nazýváme rozvojem funkce do mocninné řady se středem v bodě $a \in D_f$, kde interval $\mathcal{J}$ je takový, že $a \in \mathcal{J}^\circ$ a $\mathcal{J} \subset D_f$.

Taylorovou řadou rozumíme:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Z Taylorova vzorce

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$$

definujícího zbytek $R_n(x)$ plyne, že

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0.$$

Věta. (Abelova) Reálná mocninná řada je spojitá v celém svém oboru konvergence.

Důkazy a příklady jsou ve skriptech.

5 Derivace v $\mathbb{R}^n$, parciální derivace, věty o přírůstku funkce, extrémy funkcí více proměnných, vázané extrémy

Definice. (afinní prostor) Necht' $\mathcal{X} \neq \emptyset$ $\vec{\mathcal{X}}$ je lineární prostor nad T a zobrazení $(\cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$ $(x, y) \mapsto x\vec{y}$ a platí:

1. $x\vec{y} + y\vec{z} + z\vec{x} = 0 \ \forall x, y, z \in \mathcal{X}$,
2. $(\forall x \in \mathcal{X}) ((\cdot, \cdot) \leftrightarrow x \rightarrow y)$ je bijekce.

Prvky prostoru $\mathcal{X}$ nazýváme body a prvky v $\vec{\mathcal{X}}$ nazýváme vektory.

Definice. (souřadný systém) Souřadným systémem v afinním prostoru rozumíme $o \in \mathcal{X}$ a $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ báze $\vec{\mathcal{X}}$.

Definice. (metrika) Bud' $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}})$ normovaný afinní prostor, potom vzdáleností bodů x a y rozumíme $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Definice. (směr) Směrem v afinním prostoru E rozumíme libovolný jednotkový vektor $\|\vec{v}\| = 1$, kde $\vec{v} \in E$.

Definice. Bud' $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$, $t_0 \in D_\varphi^\circ$ a necht' existuje $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (\varphi(t) - \varphi(t_0))$. Tuto limitu nazveme derivací φ v bodě t_0 a značíme $\varphi'(t_0)$, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=t_0}$.

Definice. (derivace ve směru) Necht' $f : E \rightarrow F$ a $x_0 \in D_f^\circ$ a $\vec{v}$ je směr v E , položme $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$. Existuje-li $\varphi'(0)$, pak derivací ve směru rozumíme

$$f_{\vec{v}}(x_0) = \varphi'(0) = \frac{\partial}{\partial v} f(x_0) = \partial_v f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\varphi(t) - \varphi(0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)).$$

Definice. (parciální derivace) Necht' $f : E \rightarrow F$ je zobrazení, $(o, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je normální souřadný systém v E . Existuje-li $f_{\vec{e}_i}(x)$, nazýváme jej parciální derivací podle i -té proměnné, kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Věta. (lineární zobrazení v konečné dim je spojitě)

Věta. (5 ekvivalencí) Bud' U lineární zobrazení z $\vec{E}$ do $\vec{F}$, pak následující výroky jsou ekvivalentní.

1. U je spojitě,
2. U je spojitě v bodě,
3. U je omezené,
4. U je Lipschitzovské,
5. U je stejnoměrně spojitě.

Definice. (norma lineárního zobrazení) $\|U\| = \inf \left\{ k \in \mathbb{R} \mid \|U\vec{h}\| \leq k \|\vec{h}\|, \forall \vec{h} \in \vec{E} \right\}$.

Definice. Označme $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ vektorový prostor všech lineárních zobrazení z $\vec{E}$ do $\vec{F}$ s normou $\|\cdot\|$.

Definice. (derivace jako lin. operátor) Necht' $g : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$, $x_0 \in D_g^\circ$. Říkáme, že g je diferencovatelná právě tehdy, když $\exists L \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ spojitě takové, že

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|} (g(x) - g(x_0) - L(x - x_0)) &= \vec{0}, \\ \iff \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{1}{\|\vec{h}\|} \left(g(x_0 + \vec{h}) - g(x_0) - L(\vec{h}) \right) &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Pak derivace g je $g'(x_0) = L = \frac{dg}{dx}(x_0) = dg(x_0)$.

Věta. (nutná podmínka existence derivace) *Nechť $\exists g'(x_0) = L$, pak g má v x_0 derivaci v každém směru a navíc platí*

$$g_{\vec{v}}(x_0) = g'(x_0) \vec{v}.$$

Věta. (derivace implikuje spojitost) *Má-li zobrazení g derivaci v bodě x_0 , pak je v tomto bodě spojitý.*

Definice. g je afinní $\iff \exists \underline{g} \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ takové, že $g(x) - g(x_0) = \underline{g}(x - x_0)$.

Definice. (gradient) Nechť E je eukleidovský prostor a $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce diferencovatelná v bodě x_0 ($\exists g'(x_0)$). Pak $\exists \vec{k} \in \vec{E}$ takový, že $g'(x_0) \vec{h} = \vec{k} \cdot \vec{h} = \left(\vec{k}, \vec{h} \right)$. Existence takového vektoru $\vec{k}$ plyne z Rieszovy věty. Vektor $\vec{k}$ s těmito vlastnostmi nazýváme gradientem $g(x_0)$, značíme $\vec{k} = \text{grad}(g(x_0))$.

Věta. (vlastnosti derivace) *Nechť $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ jsou diferencovatelná v bodě x_0 , potom platí:*

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
2. $(fg)'(x_0) = g(x_0) f'(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$,
3. $g(x_0) \neq 0$, $\left(\frac{1}{g} \right)'(x_0) = -\frac{1}{(g(x_0))^2} g'(x_0)$.

Věta. (postačující podmínka existence derivace) *Bud' E eukleidovský prostor a $(o, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ ortonormální báze a $g : E \rightarrow F$ a $x_0 \in D_g^\circ$ a $\exists H_{x_0}$ takové okolí, že v něm $\exists g_i(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}$, $\forall i \in \hat{n}, x \in H_{x_0}$ a g_i jsou spojitý. Pak $\exists g'(x_0)$.*

Věty o přírůstku funkce

Věta. (Legrační věta o přírůstku funkce) *Bud' $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ a $(o, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ normální souřadný systém v $\vec{E}$, nechť $x_0 \in D_g^\circ$ a nechť má g na $B(x_0, R)$ derivaci prvního řádu. Pak $\forall x \in B(x_0, R) \exists (x_1, \dots, x_n) \in B(x_0, R)$ tak, že*

$$g(x) - g(x_0) = \sum_{j=1}^n g_j(x_j) (x^j - x_0^j) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x^j}(x_j) (x^j - x_0^j).$$

Věta. (o přírůstku funkce) *Bud' $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, g spojitá na úsečce $[x, y]$ a diferencovatelná na $(x, y) (= [x, y] - \{x, y\})$. Pak $\exists z \in E$ takové, že $g(x) - g(y) = g'(z)(x - y)$.*

Věta. (o přírůstku zobrazení) *Bud' $g : E \rightarrow F$ spojitý na $[x, y]$ a $\exists g'$ na (x, y) a $(\exists c \in \mathbb{R}) (\forall z \in (x, y)) (\|g'(z)\| < c)$. Pak $\|g(x) - g(y)\| < c \|x - y\|$.*

Věta. (nulová derivace, pak je konstantní) *Bud' D oblast v E , $g : E \rightarrow F$ takové, že $g'(x) = 0 \forall x \in D$. Pak g je na D konstantní.*

Extrémy funkcí

f, g jsou v této sekci funkce, tedy zobrazují pouze do $\mathbb{R}$.

Definice. (lokální extrém) O funkci g říkáme, že má v bodě x_0 ostré resp. neostré lokální minimum právě tehdy, když $(\exists H_{x_0}) (\forall x \in H_{x_0} \setminus \{x_0\}) (g(x) > g(x_0))$ respektive $(\exists H_{x_0}) (\forall x \in H_{x_0}) (g(x) \geq g(x_0))$. Pro maximum obdobně.

Věta. (nutná podmínka existence extrému) *Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém a zároveň $\exists f'(x_0)$. Pak $f'(x_0) = \underline{0}$.*

Definice. (stacionární bod) Jestliže $f'(x_0) = 0$, říkáme, že x_0 je stacionárním bodem funkce f .

Definice. (pozitivní definitnost kvadratických forem) Nechť $\exists f''(x_0)$ a $\forall \vec{h} \neq \vec{0}$, $f''(x_0) h^2 > 0$ je pozitivně definitní kvadratická forma, píšeme $f''(x_0) > 0$. Dále jestliže platí $f''(x_0) h^2 \geq 0$, $\forall \vec{h}$, značíme $f''(x_0) \geq 0$ a říkáme, že je pozitivní.

Věta. (vyšetření lokálního extrému) *Bud' $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, dále nechť $\exists f''(x_0)$ a $f'(x_0) = 0$. Pak platí:*

1. f má lokální minimum v $x_0 \implies f''(x_0) \geq 0$,
2. $f''(x_0) > 0 \implies f$ má v x_0 ostré lokální minimum,
3. f má lokální maximum v $x_0 \implies f''(x_0) \leq 0$,
4. $f''(x_0) < 0 \implies f$ má v x_0 ostré lokální maximum,
5. $f''(x_0)$ je indefinitní kvadratická forma, pak f má v bodě x_0 sedlový bod.

Vázaný extrém

Věta. (nutná podmínka pro existenci vázaného extrému) Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $x_0 \in M$, kde M je varieta. Má-li funkce $f|_M$ extrém v bodě x_0 , potom existují koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ takové, že $\Lambda = f - \sum_{l=1}^m \lambda_l \phi^l$ má nulovou derivaci v bodě x_0 ($\Lambda'(x_0) = 0$), má v x_0 stacionární bod.

Věta. (postačující podmínka pro existenci vázaného extrému) Buď M varieta třídy $C^{(2)}$ a x_0 je stacionární bod $\Lambda'(x_0) = 0$ a nechť $f \in C^{(2)}$. Pak platí:

1. má-li $f|_M$ lokální minimum v $x_0 \implies \Lambda''(x_0)|_{T_M(x_0)} \geq 0$,
2. $\Lambda''(x_0)|_{T_M(x_0)} > 0 \implies f|_M$ má ostré lokální minimum vzhledem k varietě M ,
3. má-li $f|_M$ lokální maximum v $x_0 \implies \Lambda''(x_0)|_{T_M(x_0)} \leq 0$,
4. $\Lambda''(x_0)|_{T_M(x_0)} < 0 \implies f|_M$ má ostré lokální maximum vzhledem k varietě M ,
5. jestliže $\Lambda''(x_0)|_{T_M(x_0)}$ je indefinitní forma, pak $f|_M$ nemá extrém v bodě x_0 .

6 Lebesgueův integrál - definice, měřitelné množiny a funkce, Fubiniova věta, věta o substituci, spojitost integrálu, věty o záměnách (integrál a řada, integrál a limita, integrál a derivace)

Zavedení Lebesgueovy míry podle Šťovíčkových poznámek v FA1.

Definice. (σ -algebra, měřitelný prostor) Buď $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, je σ -algebra právě tehdy, když platí:

- $X \in \mathcal{M}$,
- $\forall A \in \mathcal{M}, X \setminus A \in \mathcal{M}$
- $A_n \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

$(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor.

Definice. (borelovská σ -algebra) Buď (X, τ) topologický prostor. Nejmenší σ -algebru takovou, že $\tau \in \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme borelovská σ -algebra. Prvky $\mathcal{B}$ jsou borelovské množiny.

Definice. (měřitelné funkce) Buď $(X, \mathcal{M})$ měřitelný prostor, $f : X \rightarrow \mathbb{C}(\text{resp. } \mathbb{R})$ je $\mathcal{M}$ -měřitelná právě tehdy, když $\forall A \subset \mathbb{C}(\text{resp. } \mathbb{R}), A \text{ borelovská} \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$.

Poznámka. Touto definicí si nejsem moc jistý, tak bych se tím příliš nechlubil... Dále jsou v poznámkách dva důležité speciální případy:

- (X, τ) topologický prostor, $\mathcal{M} = \mathcal{B}$ borelovské množiny v X , pak f je borelovsky měřitelná,
- $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M} = \sigma$ -algebra lebesgueovsky měřitelných množin, pak f je lebesgueovsky měřitelná.

Poznámka. Měřitelnost:

- $A \subset X$ je měřitelná množina ($A \in \mathcal{M}$) $\iff \chi_A$ je měřitelná funkce, kde χ_A je charakteristická funkce intervalu A .
- $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ je měřitelná $\iff \operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ jsou měřitelné.
- $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ je měřitelná $\iff |f| : X \rightarrow \mathbb{R}$ je měřitelná.

Definice. (míra) Buď $(X, \mathcal{M})$ měřitelný prostor, $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ je míra, je-li σ -aditivní (tzn. $A_n \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní, pak $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$). Prostor $(X, \mathcal{M}, \mu)$ nazveme prostor s mírou.

Definice. (konstrukce integrálu) Buď $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor s mírou, konstrukce $\int_X f d\mu$:

1. prostor jednoduchých funkcí $\mathcal{S} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{\chi_A | A \in \mathcal{M}, \mu(A) < \infty\}$ (lineární kombinace charakteristických funkcí množin konečné míry)

$$s \in \mathcal{S}, s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}, \int_X s d\mu := \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j).$$

Ted' umíme integrovat jednoduché funkce.

2. $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ měřitelná,

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_X s d\mu \in [0, +\infty].$$

O funkci říkáme, že je integrovatelná ($f \in L(X, d\mu)$) právě tehdy, když f je měřitelná a $\int_X f d\mu < +\infty$. Ted' umíme integrovat nezáporné funkce.

3. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelná, označme $f^+ := \frac{1}{2}(f + |f|)$, $f^- := \frac{1}{2}(f - |f|)$. O f říkáme, že $f \in L(X, d\mu)$ právě tehdy, když $f^+, f^- \in L(X, d\mu)$, pak definujeme

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu, \text{ když } \int_X f^+ d\mu < +\infty \text{ nebo } \int_X f^- d\mu < +\infty.$$

Nevlastní integrál podle nás existuje a značíme, $f \in L^*$.

V případě komplexní funkce $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in L(X, d\mu)$ právě tehdy, když $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L(X, d\mu)$. Integrál f definujeme:

$$\int_X f d\mu := \int_X \operatorname{Re} f d\mu + i \int_X \operatorname{Im} f d\mu.$$

4. Integrál přes množinu $E \in \mathcal{M}$, $f \in L(X, d\mu)$ definujeme

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu.$$

Definice. (skoro všude) Budťe $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ měřitelné. Říkáme, že $f = g$ μ skoro všude, právě když $\mu(\{x \in X | f(x) \neq g(x)\}) = 0 \iff \int_X |f - g| d\mu = 0$. Značíme $f \sim g$.

Poznámka. Pojem skoro všude je relace ekvivalence

$$\begin{aligned} f = g \text{ s.v.} &\Rightarrow \int_X |f| d\mu = \int_X |g| d\mu, \\ f \in L \text{ nebo } g \in L, f = g \text{ s.v.} &\Rightarrow \int_X f d\mu = \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

Věta. (existence a jednoznačnost nezúplněné leb. míry) Budťe $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ borelovské množiny nad $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje právě jedna míra λ na $\mathcal{B}$ taková, že

1. $\lambda((0, 1)^n) = 1$, jednotkové krychli přiřadí míru 1,
2. je invariantní vůči translaci.

Definice. (zúplnění míry) Budťe $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ míra $\overline{\mu}$ je úplná, jestliže $(\forall A \in \overline{\mathcal{M}}) (\forall B \subset A) (\mu(A) = 0 \implies B \in \overline{\mathcal{M}} \wedge \overline{\mu}(B) = 0)$.

Věta. (existence jediného rozšíření míry) Budť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ libovolný prostor s mírou. Pak existuje právě jedno zúplnění $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$, kde $\overline{\mu}$ je úplná, $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mu}|_{\mathcal{M}} = \mu$.

Definice. (Lebesgueova míra) Míru $\overline{\lambda}$ nazveme Lebesgueovou mírou. Jedná se o zúplněnou míru λ .

Poznámka. $L(X, d\mu) \cong L(X, d\overline{\mu})$, zvětší se třídy ekvivalence, ale nepřibudou nové.

Měřitelné množiny a funkce

Víceméně je to výpis ze zavedení Lebesgueovy míry.

Definice. (měřitelná množina - Krbálek) Budť $A \subset X$ libovolná, $(X, \mathcal{M}, \lambda)$ prostor s mírou. Řekneme, že A je λ -měřitelná právě tehdy, když

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists S \in \mathcal{S}_r, A \subset S) (\lambda(S \setminus A) < \varepsilon).$$

Poznámka. Definice postavená při konstrukci míry pomocí vnější míry.

Definice. (měřitelná funkce - Krbálek) Budť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ měřitelný prostor, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme měřitelnou funkcí právě tehdy, když

$$(\forall c \in \mathbb{R}) (X_c \in \mathcal{M}), \text{ kde } X_c = \{x \in X | f(x) > c\}.$$

Poznámka. Definice měřitelné funkce od pana Krbálka a pana Šťovíčka jsou ekvivalentní, neboť platí $\{x \in X | f(x) > c\} = f^{-1}((c, +\infty))$. Navíc, jak již dobře víme z MIP, minimální σ -algebra nad otevřenými množinami tvoří borelovskou σ -algebru. Dále víme, že vlastnost stačí ověřovat pouze na generující množině. (V pravděpodobnosti jsme volili polouzavřené intervaly $(-\infty, c]$.)

Věta. (postačující podmínka měřitelnosti funkce) Budťe $(X, \mathcal{M}, \mu)$ měřitelný prostor, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce. Pak f je měřitelná.

Poznámka. Množina měřitelných funkcí je úplná.

Fubiniova věta

Věta. (Fubini) Budte $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ měřitelné množiny, buď dále $\varphi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in L^*(A \times B, d\lambda)$. Pak platí:

1. pro skoro všechna $x \in A$, $\varphi(x, \cdot) \in L^*(B)$,
2. $\int_B \varphi(\cdot, y) dy \in L^*(A)$,
3. $\int_{A \times B} \varphi = \int_A \left(\int_B \varphi(x, y) dy \right) dx$

Důsledek. (míra kartézského součinu množin) Budte $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, je-li $A \times B$ měřitelná. Pak $\mu(A \times B) = \mu(A) \mu(B)$.

Věta. (záměna integrálů) Budte $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$ měřitelné množiny a $f(x, y)$ je měřitelná na $M \times N$ a nechť dále jeden z integrálů $\int_M \left(\int_N f(x, y) dy \right) dx$ nebo $\int_N \left(\int_M f(x, y) dx \right) dy$ konverguje. Pak $\int_M \left(\int_N f(x, y) dy \right) dx = \int_N \left(\int_M f(x, y) dx \right) dy$.

Věta o substituci

Věta. (o substituci) Bud' $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ prosté a regulární, buď $A \subset H_\varphi$ měřitelná množina. Pak

$$\int_A f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(y)) \left| \varphi'(y) \right| dy,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl. Označením $\left| \varphi'(y) \right| = |\mathcal{J}_{\varphi(y)}| = \left| \det \varphi'(y) \right|$.

Spojitost integrálu

Věta. (spojitost integrálu vzhledem k rostoucímu systému množin) Bud' $A_n \subset A_{n+1}$ rostoucí systém množin a $\varphi \gtrsim 0$ na $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ a $\varphi \in L(A_n)$. Pak $\varphi \in L(A)$ a $\int_A \varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} \varphi$.

Věta. (spojitost integrálu vzhledem k míře intervalu) Bud' $\varphi \in L(A)$ ($\int_A \varphi < +\infty$). Pak platí:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall B \subset A, \mu(B) < \delta) \left(\int_B |\varphi| < \varepsilon \right).$$

věty o záměnách (integrál a řada, integrál a limita, integrál a derivace)

Věta. (záměna integrálu a řady) Budte $\varphi_n \gtrsim 0$, $\varphi_n \in L^*(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n$. Pak $\varphi \in L^*(A)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_A \varphi_n = \int_A \varphi$.

Věta. (záměna integrálu a monotonní posloupnosti) Bud' $\psi_n \in L(A)$ a $\psi_n \nearrow \psi$. Pak $\psi \in L^*(A)$, $\int_A \psi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A \psi_n$.

Věta. (Lebesgues) Budte $\varphi_0, \varphi_n \in L(A)$, nechť $|\varphi_n| \leq \varphi_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak $\varphi \in L(A)$ a současně $\int_A \varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A \varphi_n$.

Věta. (záměna integrálu a limity v parametru) Bud' $A \subset (X, \rho)$, $M \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha_0 \in X$ a nechť jsou splněny následující podmínky:

1. $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$, je $f(\cdot, \alpha)$ měřitelná na M ,
2. $\alpha_0 \in A'$,
3. pro skoro všechna $x \in M$ $\exists \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) = \psi(x)$,
4. $\exists \varphi \in L(M)$ pro skoro všechna $x \in M$ tak, že $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$ platí $|f(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$.

Pak $\psi \in L(M)$ a $\int_M \psi = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \int_M f(x, \alpha) dx$.

Věta. (o derivaci integrálu závislém na parametru) *Bud' $f : M \times J \rightarrow \mathbb{R}$, kde J je otevřený interval a necht' jsou splněny následující podmínky:*

1. $\forall \alpha \in J$, $f(\cdot, \alpha)$ měřitelná na $M \subset \mathbb{R}^n$,
2. $\exists \alpha_0 \in J$ takové, že $f(\cdot, \alpha_0) \in L(M)$,
3. $\exists Z \subset M$, $\mu(Z) = 0$ a $\forall x \in M \setminus Z$ a $\forall \alpha \in J \exists \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$,
4. $\exists \varphi \in L(M)$ tak, že $\forall \alpha \in J$, $\forall x \in M \setminus Z \left| \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq \varphi(x)$.

Pak $\exists \frac{\partial F}{\partial \alpha}$ na J , $\frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = F'(\alpha) = \int_M \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$ a navíc $f(\cdot, \alpha) \in L$, $\forall \alpha \in J$.

7 Derivace v komplexním oboru, holomorfní funkce, Cauchyova věta a Cauchyův vzorec, Laurentův rozvoj a typy singularit, reziduová věta

Značení: Ω značíme neprázdnou otevřenou podmnožinu $\mathbb{C}$, kouli značíme $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$, $a \in \mathbb{C}$.

Definice. (komplexní derivace) Buďte $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$. Řekneme, že f má v z_0 derivaci, jestliže existuje

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

Značíme ji $f'(z_0)$ nebo $\frac{df(z_0)}{dz}$.

Poznámka. (odvození C-R rovnic) derivace v $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Označíme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Tedy označme novou funkci

$$\tilde{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Dále platí, že $d\tilde{f}(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{2,2}$ (je lineární zobrazení).

$$d\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(x_0, y_0) + d\tilde{f}(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \tilde{R}(x, y)$$

a platí, že $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{|\tilde{R}(x, y)|}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} = 0$.

Platí $f'(z_0)$ existuje, pak $d\tilde{f}(x_0, y_0)$ existuje. $\left(f'(z_0)(z - z_0) \equiv d\tilde{f}(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right)$.

Jestliže existuje $d\tilde{f}(x_0, y_0)$, pak existuje $f'(z_0)$, právě když $d\tilde{f}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{2,2}$ je určeno násobením komplexním číslem. To znamená $c = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 &\mapsto \xi + i\eta \in \mathbb{C} \mapsto (a + ib)(\xi + i\eta) \in \mathbb{C}, \\ &\mapsto \begin{pmatrix} a\xi - b\eta \\ a\eta + b\xi \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \text{ tj. } L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}. \end{aligned}$$

Je určena násobením komplexním číslem, právě když $L_{11} = L_{22}$, $L_{12} = -L_{21}$ (Cauchy-Riemannovy podmínky).

Věta. (nutná a postačující podmínka existence komplexní derivace) Nechť $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$ derivaci $df(x_0, y_0)$ jako funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Označme $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Potom $f'(z_0)$ existuje, právě když jsou splněny Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \right).$$

Důsledek. Buďte $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ a $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Nechť funkce $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ mají na okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace 1. řádu. Potom $f'(z_0)$ existuje, právě když jsou splněny C-R rovnice.

Definice. (holomorfní funkce) Buď $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, f je holomorfní na Ω , právě když $f'(z)$ existuje pro všechna $z \in \Omega$. Množinu všech holomorfních funkcí na Ω označíme $H(\Omega)$.

Definice. (celá funkce) Funkci $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ nazveme celá funkce, jestliže $f \in H(\Omega)$.

Definice. (parciální komp. derivace) Pokládáme $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$

Věta. $(\partial_{\bar{z}} f = 0 \text{ odpovídá C-R rovnicím})$

Cauchyova věta a Cauchyův vzorec

Definice. (soubor regulárních uzavřených křivek) Buď $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $n \in \mathbb{N}$, soubor regulárních uzavřených křivek. Položíme $\langle \Gamma \rangle := \cup_{j=1}^n \langle \gamma_j \rangle$, $f \in C(\langle \Gamma \rangle)$, $\int_{\Gamma} f = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f$. Dále pro všechna $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$ definujeme index bodu vzhledem k souboru regulárních křivek následovně:

$$\text{ind}_{\Gamma}(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-a} = \sum_{j=1}^n \text{ind}_{\gamma_j}(a).$$

Věta. (Cauchyova věta a Cauchyův vzorec) Budť $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $n \in \mathbb{N}$, soubor regulárních uzavřených křivek v Ω . Nechť $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\text{ind}_{\Gamma}(z) = 0$. Potom $\forall f \in H(\Omega)$ platí:

1. $\forall z \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \text{ind}_{\Gamma}(z) f(z)$ (Cauchyova formule),
2. $\int_{\Gamma} f = 0$ (Cauchyova věta).

Poznámka. K důkazu tohoto tvrzení jsou potřeba následující věty.

- Cauchyova věta pro trojúhelník: Funkce holomorfní na oblasti až na jeden bod, pak integrál přes libovolný trojúhelník je nulový.
- Morerova věta: Jestliže je integrál spojitě komplexní funkce přes libovolný trojúhelník nulový, pak je funkce na oblasti holomorfní.
- Liouville: Jestliže je celá funkce omezená, pak už je nutně konstantní.

Důsledek. Budť $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ a $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m)$ dva soubory regulárních uzavřených křivek v Ω . Jestliže $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\text{ind}_{\Gamma}(z) = \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(z)$, potom $\forall f \in H(\Omega)$, $\int_{\Gamma} f = \int_{\tilde{\Gamma}} f$.

Důsledek. Budť γ regulární Jordanova křivka v Ω . Nechť $\text{int}(\gamma) \subset \Omega$. Potom $\forall f \in H(\Omega)$, $\int_{\gamma} f = 0$.

Laurentův rozvoj a typy singularit

Definice. (izolovaná singularita, odstranitelná singularita) Budť $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Potom řekneme, že f má v bodě a izolovanou singularitu. Pokud existuje $\tilde{f} \in H(\Omega)$ tak, že $\forall z \in \Omega \setminus \{a\}$, $f(z) = \tilde{f}(z)$, říkáme, že singularita v bodě a je odstranitelná.

Věta. (nutná a postačující podmínka pro odstranitelnost izolované singularity) Budť $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Singularita v a je odstranitelná, právě když f je omezená na nějakém okolí bodu a .

Věta. (klasifikace singularit) Budť $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Potom nastane právě jedna ze tří možností:

1. f má v bodě a odstranitelnou singularitu,
2. existují jednoznačně určené $m \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{C}$, $c_m \neq 0$ tak, že $f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k}$, $\forall z \in \Omega \setminus \{a\}$ má v bodě a odstranitelnou singularitu,
3. $\forall r > 0$ taková, že $D(a, r) \subset \Omega$ je $f(D'(a, r))$ je hustá podmnožina $\mathbb{C}$.

Definice. (typy singularit) V případě 2., říkáme, že funkce f má v bodě a pól m -tého řádu. V případě 3., má f v bodě a podstatnou singularitu.

Poznámka. Chování funkce na okolí singularity:

- (odstranitelná singularita) existuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$, (příklad $f(z) = 0$, $\forall z \in \Omega \setminus \{a\}$),
- (pól) existuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ ($\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$), (příklad $f(z) = \frac{1}{z^m}$),
- (podstatná singularita) neexistuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$, obraz okolí a pokryje hustou podmnožinu v $\mathbb{C}$, dokonce $\forall w \in \mathbb{C}$ existuje posloupnost $(z_n)_{n=1}^{+\infty}$ tak, že $z_n \rightarrow a$, $f(z_n) \rightarrow w$. (příklad $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$).

Definice. (mezikruží) Množinu $P(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z-a| < r_2\}$, nazýváme mezikruží.

Definice. (Laurentova řada) Budťe $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$. Potom $z \neq a$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}.$$

Laurentova řada konverguje, právě když konvergují obě řady na pravé straně. $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ nazýváme regulární část, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ nazýváme hlavní část.

Věta. Budťe $c_n \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$. Označme po řadě R_- , R_+ poloměry konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{w^n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n$. Jestliže $\frac{1}{R_-} < R_+$, pak Laurentova řada konverguje na $P\left(a, \frac{1}{R_-}, R_+\right)$.

Věta. (podoba koeficientů c_n) Za stejných předpokladů, nechť $\frac{1}{R_-} < R_+$. Označme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in P\left(a, \frac{1}{R_-}, R_+\right).$$

Potom $f \in H\left(P\left(a, \frac{1}{R_-}, R_+\right)\right)$ a $\forall r \in \left(\frac{1}{R_-}, R_+\right)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

kde $\gamma_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Poznámka. koeficienty c_n v Laurentově rozvoji jsou jednoznačně určeny funkcí f .

Věta. (existence jednoznačného rozvoje) Budťe $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, $a \in \mathbb{C}$, $f \in H(P(a, r_1, r_2))$. Potom f lze na $P(a, r_1, r_2)$ jednoznačně rozvést do Laurentovy řady,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in P(a, r_1, r_2).$$

Reziduová věta

Definice. (reziduum) Budť $f \in H(D'(a, r))$, $r > 0$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$. Reziduem funkce f v bodě a je $\text{res}_a(f) = c_{-1}$.

Věta. (o reziduu) Budťe $A \subset \Omega$, $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ soubor regulárních uzavřených křivek v $\Omega \setminus A$ a nechť A nemá v Ω hromadný bod. Dále nechť $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\text{ind}_\Gamma(w) = 0$. Potom pro libovolnou $f \in H(\Omega \setminus A)$ platí:

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{ind}_\Gamma(a) \text{res}_a(f).$$

Definice. (meromorfní funkce) Funkci f nazveme meromorfní na Ω , jestliže existuje $A \subset \Omega$ taková, že

1. $f \in H(\Omega \setminus A)$,
2. A nemá hromadný bod v Ω ,
3. $\forall a \in A$, f nemá v a podstatnou singularitu.

8 Lineární zobrazení a jeho matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta

Definice. (lineární zobrazení) Budťe P, Q vektorové prostory nad stejným tělesem T , $A : P \rightarrow Q$. A nazveme lineární, pokud platí:

1. A je aditivní $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P) (A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y}))$,
2. A je homogení $(\forall \alpha \in T) (\forall \vec{x} \in P) (A(\alpha \vec{x}) = \alpha A(\vec{x}))$.

Věta. (alternativní definice lin. zobrazení) Budťe P, Q vektorové prostory nad stejným tělesem T , $A : P \rightarrow Q$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. A je lineární,
2. $(\forall \alpha \in T) (\forall \vec{x}, \vec{y} \in P) (A(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha A(\vec{x}) + A(\vec{y}))$,
3. $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T) (\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \left(A \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x}_j \right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j A(\vec{x}_j) \right)$.

Definice. (prostor lineárních zobrazení) Množinu všech lineárních zobrazení z P do Q vektorových prostorů nad tělesem T označíme $\mathcal{L}(P, Q)$. Dále definujeme operace sčítání a násobení číslem z tělesa:

1. $(\forall A, B \in \mathcal{L}(P, Q)) (\forall \vec{x} \in P) ((A \oplus B) \vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x})$,
2. $(\forall \alpha \in T) (\forall A \in \mathcal{L}(P, Q)) (\forall \vec{x} \in P) ((\alpha \odot A) \vec{x} = \alpha A\vec{x})$.

Věta. (prostor lineárních zobrazení je vektorový prostor)

Definice. (monomorfismus, epimorfismus, izomorfismus) Budťe P, Q vektorové prostory nad tělesem T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, říkáme, že:

1. A je prosté, monomorfismus právě tehdy, když $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P) (A\vec{x} = A\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y})$,
2. A je „na Q “, epimorfismus právě tehdy, když $(\forall \vec{z} \in Q) (\exists \vec{x} \in P) (A\vec{x} = \vec{z})$,
3. je-li A prosté i na, pak je A izomorfismus,
4. je-li $P = Q$ a A je izomorfismus, pak A nazveme regulární operátor.

Definice. (linearita inverzního zobrazení) Budťe P, Q vektorové prostory nad tělesem T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ izomorfismus. Pak $A^{-1} \in \mathcal{L}(Q, P)$ je také izomorfismus.

Věta. (linearita složeného zobrazení) Budťe P, Q, V vektorové prostory nad tělesem T , $A \in \mathcal{L}(Q, V)$, $B \in \mathcal{L}(P, Q)$. Pak $AB \in \mathcal{L}(P, V)$.

Definice. (obraz a vzor množiny) Budťe P, Q vektorové prostory nad tělesem T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Necht' $M \subset P$, $N \subset Q$. Obrazem M nazveme $A(M) = \{A\vec{x} | \vec{x} \in M\}$. Vzorem množiny N nazveme $A^{-1}(N) = \{\vec{x} \in P | A\vec{x} \in N\}$.

Věta. (obraz a vzor podprostoru je podprostor)

Definice. (jádro, hodnost, defekt) Budťe P, Q vektorové prostory nad tělesem T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

1. Hodností A nazveme $h(A) = \dim A(P)$,
2. jádrem A nazveme $\ker A = \{\vec{x} \in P | A\vec{x} = \vec{0}_Q\}$,
3. defektem A nazveme $dA = \dim \ker A$.

Věta. (obraz lineárního obalu) Budťe P, Q vektorové prostory nad tělesem T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Necht' $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z P . Pak $A([\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$.

Věta. (dimenze obrazu podprostoru) Budťe P, Q vektorové prostory nad tělesem T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $P_1 \subset P$. Pak $\dim A(P_1) \leq \dim P_1$. Speciálně $h(A) = \dim A(P) \leq \dim P$.

Věta. (jednodušší ověření izomorfности) Budťe P, Q vektorové prostory nad tělesem T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, nechť $\dim P = \dim Q < +\infty$. Pak A je izomorfní právě tehdy, když A je monomorfní nebo epimorfní.

Poznámka. Na konečné dimenzi je lineární zobrazení mezi izomorfními prostory epimorfní, právě když je monomorfní. (Platí též pro lineární operátory.)

Věta. (prostota a jádro) Budťe P, Q vektorové prostory nad tělesem T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. A je prosté právě tehdy, když $\ker A = \{\vec{0}_P\}$.

Věta. (prostota a dimenze obrazu podprostoru) Budťe P, Q vektorové prostory nad tělesem T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ monomorfismus. Pak platí:

1. $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LN v P , pak $A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n$ jsou LN v Q ,
2. $P_1 \subset \subset P$, pak $\dim A(P_1) = \dim P_1$. Speciálně $h(A) = \dim P$.

Věta. (hodnost složeného zobrazení) Budťe P, Q, V vektorové prostory nad tělesem T , $A \in \mathcal{L}(Q, V)$, $B \in \mathcal{L}(P, Q)$. Potom

1. $h(AB) \leq h(B)$, navíc je-li A prosté, pak $h(AB) = h(B)$,
2. $h(AB) \leq h(A)$, navíc je-li B „na Q “, pak $h(AB) = h(A)$.

Věta. (zadávání lin. zobrazení) Budťe P, Q vektorové prostory nad tělesem T . Nechť $n = \dim P \in \mathbb{N}$, ozn. $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ bázi P , $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ jsou vektory z Q . Pak $\exists_1 A \in \mathcal{L}(P, Q)$ takové, že $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$, $\forall i \in \hat{n}$. (Lineární zobrazení je jednoznačně určeno působením na bazické vektory.)

Matice a lineární zobrazení

Definice. (násobení matic) Budťe $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, $\mathbb{B} \in T^{n,p}$. Pak součinem matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ nazveme matici $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \in T^{m,p}$ definovanou:

$$(\forall i \in \hat{m}) (\forall j \in \hat{p}) [\mathbb{A}\mathbb{B}]_{ij} = \sum_{k=1}^n \mathbb{A}_{ik} \mathbb{B}_{jk}.$$

Věta. (vlastnosti součinu matic) Součin matic je asociativní, distributivní vůči sčítání, ale NENÍ komutativní.

Definice. (matice lineárního zobrazení) Budťe P_n, Q_m vektorové prostory nad tělesem T , $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze P_n , $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ báze Q_m . Budť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Definujeme matici zobrazení A v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$:

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = ((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, \dots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}) \in T^{m,n}.$$

Věta. (vlastnosti matic zobrazení) Budťe P_n, Q_m vektorové prostory nad tělesem T , $\mathcal{X}$ báze P_n , $\mathcal{Y}$ báze Q_m . Pak

1. $\forall A, B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$, ${}^{\mathcal{X}}(A+B)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$,
2. $\forall \alpha \in T$, $\forall A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$, ${}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}} = \alpha {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

Věta. (matice složeného zobrazení) Budťe P_n, Q_m, V_s vektorové prostory nad tělesem T , $A \in \mathcal{L}(Q_m, V_s)$, $B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Budťe $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ báze P_n , Q_m , V_s . Pak platí

$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}.$$

Definice. (matice přechodu) Budťe $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ báze V_n . Maticí přechodu od $\mathcal{X}$ k $\mathcal{Y}$ nazveme ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} = ((\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, \dots, (\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}})$.

Soustavy lineárních algebraických rovnic

Soustavou m lineárních algebraických rovnic (LAR) pro n neznámých nazveme každou soustavu tvaru

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

kde čísla a_{ij} a b_i pro $i \in \hat{n}$ jsou obecně komplexní.

Značení:

- Matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

se nazývá matice soustavy.

- Matice

$$\left(\mathbb{A} \middle| \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

se nazývá rozšířenou maticí soustavy.

- Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$ se nazývá sloupec pravých stran.
- Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, pro nějž je soustava splněna, nazýváme řešením soustavy.
- Jestliže $\vec{b} = \vec{0}$, říkáme, že soustava je homogenní nebo bez pravé strany.
- V opačném případě jde o soustavu s pravou stranou.

Poznámka. Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení $\vec{x} = \vec{0}$, takové řešení nazýváme triviální.

Definice. (horní stupňovitý tvar) Matice $\mathbb{A}$ o m řádcích a $n+1$ sloupcích s prvky a_{ij} , $i \in \hat{m}$, $j \in \widehat{n+1}$, je v horním stupňovitém tvaru, pokud existuje $l \in \hat{m}$ a indexy $k_1, \dots, k_l$ takové, že $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l \leq n+1$ a platí:

1. $a_{ik_i} \neq 0$ pro každé $i \in \hat{l}$,
2. $a_{ij} = 0$ pro každé $i \in \hat{l}$, a $j < k_i$,
3. $a_{ij} = 0$ pro každé $i > l$, $j \in \widehat{n+1}$.

Poznámka. Řešení soustavy provádíme pomocí úprav, které nazýváme ekvivalentní:

1. záměna dvou rovnic,
2. přičtení násobku jiné rovnice k vybrané rovnici,
3. násobení rovnice nenulovým číslem.

Poznámka. Sloupce rozšířené matice soustavy s indexy $k_1, k_2, \dots, k_l$ nazýváme hlavní sloupce, ostatní sloupce nazýváme vedlejší.

- Soustava je řešitelná právě tehdy, když sloupec pravých stran je vedlejší.
- Řešení dopočítáme tak, že neznámé odpovídající vedlejším sloupcům zvolíme libovolně a zbylé neznámé jednoznačně dopočítáme.
- Soustava má jediné řešení, právě když má matice soustavy jen samé hlavní sloupce a sloupec pravých stran je vedlejší.

Frobeniova věta

Definice. (hodnost matice) Buď $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. Hodností $\mathbb{A}$ nazveme $h(\mathbb{A}) = \dim [\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \dots, \mathbb{A}_{\cdot n}]_{\lambda}$.

Věta. (hodnost lineárního zobrazení a jeho matice) Budťe $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$, $\mathcal{X}$ báze P_n , $\mathcal{Y}$ báze Q_m . Pak $h(\mathbb{A}) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$.

Věta. (Frobeniova) Budťe $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, $\vec{b} \in T^m$. Pak pro soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ platí:

1. řešení existuje právě tehdy, když $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$,
2. Ozn. $S_0 = \{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A}\vec{x} = 0\}$, pak $S_0 \subset \subset T^n$ a $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A})$,
3. pokud $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$ a ozn. $S = \{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}\}$, pak $S = \vec{a} + S_0$, kde $\vec{a}$ je partikulární řešení tj. $\mathbb{A}\vec{a} = \vec{b}$.

9 Hermitovské operátory a kvadratické formy, skalární součin a ortogonalita, nerovnosti

Hermitovské a kvadratické formy

Definice. (hermitovská forma) Necht V je vektorový prostor nad tělesem T . Zobrazení $h : V \times V \rightarrow T$ nazveme hermitovskou formou pokud platí:

1. hermitovskost: $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V) \left(h(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{h(\vec{y}, \vec{x})} \right),$
2. linearita v prvním argumentu: $(\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \alpha \in T) \left(h(\alpha \vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = \alpha h(\vec{x}, \vec{z}) + h(\vec{y}, \vec{z}) \right).$

Diagonálou hermitovské formy nazýváme zobrazení $Q : V \rightarrow T$ definované pro každé $\vec{x} \in V$ jako $Q(\vec{x}) := h(\vec{x}, \vec{x})$.

Věta. (vlastnosti) Buď V je vektorový prostor nad tělesem T , h hermitovská forma na V , Q její diagonála. Pak $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \alpha \in T$ platí:

1. antilinearita ve druhém argumentu: $h(\vec{x}, \alpha \vec{y} + \vec{z}) = \overline{\alpha} h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{x}, \vec{z}),$
2. $Q(\vec{x}) \in \mathbb{R},$
3. $Q(\alpha \vec{x}) = |\alpha|^2 Q(\vec{x}),$
4. $Q(\vec{x} + \vec{y}) = Q(\vec{x}) + 2\operatorname{Re}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}),$
5. rovnoběžníková rovnost: $Q(\vec{x} + \vec{y}) + Q(\vec{x} - \vec{y}) = 2(Q(\vec{x}) + Q(\vec{y})),$
6. polarizační identity:

pro $T = \mathbb{R}$

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4} (Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})),$$

pro $T = \mathbb{C}$

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4} (Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})) + \frac{i}{4} (Q(\vec{x} + i\vec{y}) - Q(\vec{x} - i\vec{y})).$$

Definice. (nulprostor) Buď V je vektorový prostor nad tělesem T , h hermitovská forma na V . Nulprostorem h nazveme množinu:

$$N_h = \{ \vec{x} \in V | h(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in V \}.$$

Nulitou formy h pak rozumíme $\dim N_h$. Navíc h nazýváme regulární právě tehdy, když $\dim N_h = 0$, jinak je h singulární.

Věta. (o nulprostoru) Buď V je vektorový prostor nad tělesem T , h hermitovská forma na V . Pak $N_h \subset V$.

Definice. (polární báze) Necht V_n je vektorový prostor nad tělesem T a h je hermitovská forma na V_n a necht $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báze V_n . Jestliže $h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0$ pro každé $i, j \in \hat{n}, i \neq j$, pak $\mathcal{A}$ nazveme polární bází hermitovské formy h .

Definice. (kvadratická forma) Buď V je vektorový prostor nad tělesem T , $Q : V \rightarrow T$. Říkáme, že Q je kvadratickou formou, pokud existuje hermitovská forma h taková, že Q je její diagonálou. Takovou h pak nazýváme polárou Q . Polární bází, nulprostorem a nulitou Q rozumíme polární bází, nulprostor a nulitu h . Dále Q je regulární právě tehdy když h je regulární.

Věta. (zákon setrvačnosti kvadratických forem) Buď V_n je vektorový prostor nad tělesem T , Q kvadratická forma na V_n a $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ polární báze Q . Označme p, q, r počty kladných čísel, záporných čísel a nul v posloupnosti $(Q(\vec{a}_1), \dots, Q(\vec{a}_n))$. Pak (p, q, r) nezávisí na volbě báze.

Definice. (index setrvačnosti, signatura kvadratické formy) Čísla p , resp. q z předešlé věty nazýváme kladným, resp. záporným indexem setrvačnosti kvadratické formy. Signaturou Q nazýváme trojici čísel $\operatorname{sg} Q = (p, q, r)$ a hodnotu Q rozumíme $h(Q) = p + q$.

Definice. (charakter kvadratické formy) Buď V je vektorový prostor nad tělesem T , Q kvadratická forma na V . Říkáme, že Q má charakter:

1. pozitivně definitní: $\forall \vec{x} \neq \vec{0} \in V, Q(\vec{x}) > 0$,
2. pozitivně semidefinitní: $\forall \vec{x} \neq \vec{0} \in V, Q(\vec{x}) > 0$ a současně $\exists \vec{x}_0 \in V, Q(\vec{x}_0) = 0$,
3. negativně definitní: $\forall \vec{x} \neq \vec{0} \in V, Q(\vec{x}) < 0$,
4. negativně semidefinitní: $\forall \vec{x} \neq \vec{0} \in V, Q(\vec{x}) < 0$ a současně $\exists \vec{x}_0 \in V, Q(\vec{x}_0) = 0$,
5. indefinitní: $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V, Q(\vec{x}_1) > 0$ a $Q(\vec{x}_2) < 0$.

Skalární součin a ortogonalita

Definice. (skalární součin) Buď V je vektorový prostor nad tělesem T . Zobrazení $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow T$ nazveme skalárním součinem, jestliže $\langle \cdot | \cdot \rangle$ je hermitovskou formou s pozitivně definitní diagonálou. To znamená:

1. hermitovskost: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}$,
2. linearita v prvním argumentu,
3. pozitivní definitnost: $\forall \vec{x} \in V, \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0$ a současně $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Definice. (norma) Normou nazveme zobrazení $\|\cdot\| : V \rightarrow T$ definované $\forall \vec{x} \in V$ předpisem $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$.

Definice. (prehilbertův prostor) Vektorový prostor V nad tělesem T se skalárním součinem $\langle \cdot | \cdot \rangle$ značíme $\mathcal{H}$ a nazýváme prehilbertovým.

Definice. (úhel) Buďte $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}, \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$. Pak úhlem mezi $\vec{x}$ a $\vec{y}$ rozumíme číslo

$$\varphi = \arccos \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}.$$

Definice. (ortogonalita) Buďte $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$, říkáme, že $\vec{x}$ je na $\vec{y}$ ortogonální právě tehdy, když $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$. Dále říkáme, že jsou ortonormální, pokud $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$.

Věta. (lineární nezávislost OG vektorů)

Věta. (souřadnice v OG bázi) Nechť $\mathcal{H}_n$ je vektorový prostor nad tělesem T . Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je OG báze v $\mathcal{H}_n$. Potom pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí:

$$x_i^\#(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle}{\|\vec{x}_i\|^2}.$$

Definice. (Fourierovy koeficienty) Nechť $\mathcal{H}_n$ je vektorový prostor nad tělesem T . Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je ON báze v $\mathcal{H}_n$. Pak souřadnice vektorů v bázi $\mathcal{X}$ nazýváme Fourierovými koeficienty v bázi $\mathcal{X}$.

Věta. (Pythagorova) Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T . Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$ jsou OG vektory. Potom platí, že

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Věta. (Gramm-Schmidtova) Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T . Nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN vektory z $\mathcal{H}$. Pak existují OG (i ON) vektory $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ takové, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro každé $k \in \hat{n}$.

Poznámka. Vzorec ortogonalizačního procesu:

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{x}_{k+1} | \vec{y}_i \rangle}{\|\vec{y}_i\|^2} \vec{y}_i.$$

Nerovnosti

Věta. (Cauchy-Schwartzova nerovnost) *Bud' $\mathcal{H}$ vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Pak platí*

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

Rovnost nastává právě, když jsou vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lineárně závislé.

Věta. (trojúhelníková nerovnost) *Bud' $\mathcal{H}$ vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Pak platí*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Rovnost nastává právě, když $\exists \alpha \geq 0$ takové, že $\vec{x} = \alpha \vec{y}$ nebo $\vec{y} = \alpha \vec{x}$.

Věta. (Besselova nerovnost) *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T . Necht' $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ jsou ON vektory z $\mathcal{H}$. Pak pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí:*

$$\sum_{i=1}^k |\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2.$$

10 Lineární operátory a čtvercové matice, determinant, vlastní čísla, diagonalizovatelnost, normální operátory

Definice. (lineární operátor) Buď V vektorový prostor nad tělesem T .

- Lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(V, V) = \mathcal{L}(V)$ nazveme lineární operátor.
- $\mathcal{L}(V, T) = V^\#$ nazveme duální prostor k V . Prvky duálního prostoru nazýváme funkcionály.

Definice. (čtvercová matice, regulární) Matici $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ nazýváme čtvercová. Dále říkáme, že matice $\mathbb{A}$ je regulární, pokud $\text{h}(\mathbb{A}) = n$. Jestliže matice není regulární, říkáme, že je singulární.

Věta. (izomorfismus a regulární matice) Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$, kde P_n, Q_n jsou vektorové prostory nad tělesem T . Označme $\mathcal{X}$ bázi P_n a $\mathcal{Y}$ bázi Q_n . Potom A je izomorfismus (regulární operátor) právě tehdy, když ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ je regulární matice.

Poznámka. Dále je možné do této sekce zařadit těž nějaká tvrzení ze sekce o lineárních zobrazeních.

Determinant

Definice. (permutace) Každou bijekci $\pi : \hat{n} \rightarrow \hat{n}$ nazýváme permutací na $\hat{n}$. Množinu všech permutací na $\hat{n}$ značíme S_n .

Definice. (inverze, znaménko permutace) Buď $\pi \in S_n$. Pak inverzí v π nazveme každou uspořádanou dvojici (i, j) splňující: $i, j \in \hat{n}$, $i < j$ a $\pi(i) > \pi(j)$. Počet inverzí v π značíme I_π . Znaménkem permutace π rozumíme číslo $\text{sgn}\pi := (-1)^{I_\pi}$. Jde o sudou permutaci, jestliže $\text{sgn}\pi = 1$, a lichou, jestliže $\text{sgn}\pi = -1$.

Definice. (transpozice) Nechť $n \geq 2$ a $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$. Transpozicí čísel i a j nazveme permutaci τ_{ij} splňující:

$$\begin{aligned}\tau_{ij}(k) &= k \text{ pro } i \neq k \neq j, \\ \tau_{ij}(j) &= i, \\ \tau_{ij}(i) &= j.\end{aligned}$$

Věta. (znaménko transpozice) Každá transpozice je lichá permutace.

Věta. (znaménko složené permutace) Budte $\pi, \rho \in S_n$. Pak platí:

$$\text{sgn}(\pi \circ \rho) = \text{sgn}\pi \text{sgn}\rho.$$

Definice. (determinant matice) Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak determinantem matice $\mathbb{A}$ nazveme číslo

$$\det \mathbb{A} := \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}\pi \mathbb{A}_{1\pi(1)} \mathbb{A}_{2\pi(2)} \cdots \mathbb{A}_{n\pi(n)}.$$

Sčítance v sumě nazýváme členy determinantu.

Věta. (determinant transponované matice) Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$.

Definice. (horní a dolní trojúhelníková matice) Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$.

- Matici $\mathbb{A}$ nazveme horní trojúhelníkovou maticí, pokud pro každé $i, j \in \hat{n}$, kde $i > j$, platí $\mathbb{A}_{ij} = 0$. (Matice má pod diagonálou nuly.)
- Matici $\mathbb{A}$ nazveme dolní trojúhelníkovou maticí, pokud pro každé $i, j \in \hat{n}$, kde $i < j$, platí $\mathbb{A}_{ij} = 0$. (Matice má nad diagonálou nuly.)

Věta. (determinant trojúhelníkových matic) Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ a $\mathbb{A}$ je horní či dolní trojúhelníková. Pak $\det \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11} \mathbb{A}_{22} \cdots \mathbb{A}_{nn}$.

Věta. (řádkové a sloupkové úpravy determinantů) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak platí:

1. Vznikne-li $\mathbb{B}$ vynásobením některého řádku (sloupce) matice $\mathbb{A}$ číslem $\alpha \in T$, pak $\det \mathbb{B} = \alpha \det \mathbb{A}$.

2. Je-li některý řádek (sloupec) $\mathbb{A}$ nulový, pak $\det \mathbb{A} = 0$.
3. Vznikne-li $\mathbb{B}$ prohozením dvou řádků (sloupců) matice $\mathbb{A}$, pak $\det \mathbb{B} = -\det \mathbb{A}$.
4. Má-li $\mathbb{A}$ dva řádky (sloupce) stejné, pak $\det \mathbb{A} = 0$.
5. Označme $\mathbb{A} = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{i-1} \vec{p} \vec{a}_{i+1} \dots \vec{a}_n)$ a $\mathbb{B} = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{i-1} \vec{q} \vec{a}_{i+1} \dots \vec{a}_n)$. Pak $\det \mathbb{A} + \det \mathbb{B} = \det (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{i-1} (\vec{p} + \vec{q}) \vec{a}_{i+1} \dots \vec{a}_n)$. Analogicky pro řádky.
6. Přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) matice $\mathbb{A}$ libovolný násobek jiného řádku (sloupce), determinant se nezmění.

Důsledek. Bud' $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ a $\alpha \in T$. Potom $\det (\alpha \mathbb{A}) = \alpha^n \det \mathbb{A}$.

Definice. (n-lineární forma, antisymetrická forma) Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Pak zobrazení $w : V \times V \times \dots \times V \rightarrow T$ nazveme:

- n-lineární formou na V , jestliže pro každé $\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V$ a $\alpha \in T$ a pro každé $i \in \hat{n}$ platí:

$$\begin{aligned} w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \alpha \vec{y} + \vec{z}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) &= \alpha w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \\ &+ w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{z}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n), \end{aligned}$$

- antisymetrickou formou na V , pokud pro každé $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V$ a pro každé $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$, platí:

$$w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) = -w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n).$$

Důsledek. Nahlížíme-li na determinant jako na funkci sloupců matice, pak se jedná o n-lineární antisymetrickou formu na T^n .

Lemma. (řádkové úpravy jako násobení maticí) Bud' $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Předpokládejme, že $\mathbb{M}$ vznikla z jednotkové matice $\mathbb{I}_n$ nějakou ekvivalentní řádkovou úpravou. Pak platí, že $\det (\mathbb{M}\mathbb{A}) = \det \mathbb{M} \det \mathbb{A}$.

Věta. (ekvivalentní řádkové úpravy a determinant matice) Bud' $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Předpokládejme, že $\mathbb{M}$ vznikla z jednotkové matice $\mathbb{I}_n$ konečným počtem ekvivalentních řádkových úprav. Pak $\det (\mathbb{M}\mathbb{A}) = \det \mathbb{M} \det \mathbb{A}$.

Věta. (regulární matice a determinant) Bud' $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Potom $\mathbb{A}$ je regulární, právě když $\det \mathbb{A} \neq 0$.

Věta. (determinant součinu matic) Bud' $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$. Pak platí:

$$\det (\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}.$$

Věta. (determinant inverzní matice) Bud' $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ regulární matice, pak platí:

$$\det (\mathbb{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbb{A}}.$$

Definice. (algebraický doplněk) Bud' $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, kde $n > 1$. Označme $\mathbb{A}^{(i,j)}$ matici, která vznikne z $\mathbb{A}$ vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce. Pak číslo

$$D_{ij} := (-1)^{i+j} \det \mathbb{A}^{(i,j)}$$

nazveme algebraickým doplňkem prvku $\mathbb{A}_{ij}$.

Věta. (rozvoj determinantu podle řádku, sloupce) Bud' $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. Pak platí pro každé $i \in \hat{n}$:

$$\det \mathbb{A} = \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \quad (\text{rozvoj podle } i\text{-tého řádku}).$$

Respektive pro každé $j \in \hat{n}$:

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^n \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \quad (\text{rozvoj podle } j\text{-tého sloupce}).$$

Definice. (adjungovaná matice) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. Adjungovanou maticí k $\mathbb{A}$ nazveme matici $\mathbb{A}^{\text{adj}}$ splňující pro každé $i, j \in \hat{n}$:

$$[\mathbb{A}^{\text{adj}}]_{ij} = D_{ji}.$$

Věta. (inverzní a adjungovaná matice) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. Pak

1. platí rovnost $(\det \mathbb{A}) \mathbb{I} = \mathbb{A}^{\text{adj}} \mathbb{A}$,
2. je-li navíc $\mathbb{A}$ regulární, pak platí, že $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^{\text{adj}}$.

Věta. (Cramerovo pravidlo) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$, a $\vec{b} \in T^n$. Pokud $\mathbb{A}$ je regulární matice, potom pro každé $j \in \hat{n}$ je j -tá složka řešení soustavy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ rovna:

$$x_j = \frac{\det \mathbb{B}^{(j)}}{\det \mathbb{A}},$$

kde matice $\mathbb{B}^{(j)}$ vznikne z matice $\mathbb{A}$ nahrazením j -tého sloupce vektorem $\vec{b}$.

Definice. (subdeterminant) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, nechť čísla $i_1, i_2, \dots, i_k \in \hat{n}$ a $j_1, j_2, \dots, j_l \in \hat{n}$ splňují:

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \quad \text{a} \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq n.$$

Pak matici $\mathbb{A} \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_k \\ j_1, j_2, \dots, j_l \end{pmatrix}$, jež vznikla z $\mathbb{A}$ zachováním pouze těch prvků, které mají řádkový index z $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ a zároveň sloupcový index z $\{j_1, j_2, \dots, j_l\}$, nazveme submaticí matice $\mathbb{A}$. Je-li submatice čtvercová řádu k , pak její determinant nazveme subdeterminantem řádu k matice $\mathbb{A}$.

Věta. (hodnota subdeterminantu) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak $h(\mathbb{A}) = k$, právě když existuje nenulový subdeterminant matice $\mathbb{A}$ řádu k a zároveň je každý subdeterminant vyššího řádu nulový.

Definice. (determinant operátoru) Nechť V_n je vektorový prostor dimenze n nad tělesem T . Nechť $\mathcal{X}$ je libovolná báze prostoru V_n a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Pak determinant operátoru A značíme $\det A := \det^{\mathcal{X}} A$.

Poznámka. Pro operátory platí podobná tvrzení s determinanty jako pro matice.

Vlastní čísla

Definice. (vlastní čísla, vektory) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme vlastním číslem matice $\mathbb{A}$, pokud existuje vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq 0$, takový, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ nazveme vlastním vektorem matice $\mathbb{A}$ příslušným vlastnímu číslu λ . Množinu vlastních čísel matice $\mathbb{A}$ nazveme spektrem matice $\mathbb{A}$ a značíme $\sigma(\mathbb{A})$. Vlastním podprostorem matice $\mathbb{A}$ příslušným vlastnímu číslu λ rozumíme $P_\lambda := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n | \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$, tj. P_λ je množina vlastních vektorů $\mathbb{A}$ příslušných λ s přidáním nulového vektoru.

Věta. (LK vlastních vektorů) Buďte $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Pak $P_\lambda \subset \mathbb{C}^n$. Navíc $\{\mathbb{A}\vec{x} | \vec{x} \in P_\lambda\} \subset P_\lambda$.

Definice. (geometrická násobnost) Buďte $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Potom geometrickou násobností vlastního čísla λ nazveme $\nu_g(\lambda) = \dim P_\lambda$.

Definice. (charakteristický polynom) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Zobrazení $p_{\mathbb{A}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované pro každé $t \in \mathbb{C}$ jako $p_{\mathbb{A}}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I})$ nazýváme charakteristickým polynomem matice $\mathbb{A}$.

Věta. (Vlastnosti charakteristického polynomu) Nechť $p_{\mathbb{A}}$ je charakteristický polynom matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom platí:

1. $p_{\mathbb{A}}$ je polynom,
2. stupeň $p_{\mathbb{A}}$ je n a koeficient u nejvyššího stupně t^n v $p_{\mathbb{A}}(t)$ je $(-1)^n$,
3. konstantní člen polynomu $p_{\mathbb{A}}$ je roven $\det \mathbb{A}$.

Věta. (vlastní čísla a charakteristický polynom) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, právě když $p_{\mathbb{A}}(\lambda) = 0$.

Definice. (algebraická násobnost) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Algebraickou násobností $\nu_a(\lambda)$ vlastního čísla λ nazveme násobnost λ jakožto kořene charakteristického polynomu $p_{\mathbb{A}}$.

Věta. (vlastní čísla a determinant) Necht' $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou všechna vzájemně různá vlastní čísla matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak platí:

$$\det \mathbb{A} = \lambda_1^{\nu_a(\lambda_1)} \lambda_2^{\nu_a(\lambda_2)} \dots \lambda_k^{\nu_a(\lambda_k)}.$$

Věta. (vlastní čísla a regularita matice) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Matice $\mathbb{A}$ je regulární, právě když $0 \notin \sigma(\mathbb{A})$.

Věta. (vlastní čísla trojúhelníkové matice) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ horní nebo dolní trojúhelníková matice. Pak vlastní čísla jsou rovna jejím diagonálním prvkům.

Věta. (algebraická a geometrická násobnost) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí: $\nu_a(\lambda) \geq \nu_g(\lambda)$.

Věta. (LN vlastních vektorů) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Necht' $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou vzájemně různá vlastní čísla a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ jsou jim příslušné vlastní vektory matice $\mathbb{A}$. Pak $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ jsou LN.

Věta. (báze z vlastních vektorů) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. V prostoru $\mathbb{C}^n$ existuje báze z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$ právě tehdy, když pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí, že $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.

Poznámka. Máme-li $\mathbb{X}$ sestavenou z báze z vlastních vektorů příslušných $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, tedy

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Tím jsme převedli matici $\mathbb{A}$ na diagonální $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.

Diagonalizovatelnost

Definice. (podobnost matic) Buďte $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbb{A}$ je podobná matici $\mathbb{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbb{X}$ řádu n taková, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}$.

Poznámka. Podobnost je relace ekvivalence na množině čtvercových matic řádu n .

Věta. (vlastnosti podobných matic) Buďte $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\mathbb{A}$ je podobná $\mathbb{B}$.

1. Pak $p_{\mathbb{A}} = p_{\mathbb{B}}$, tedy $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$ a $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_a^{\mathbb{B}}(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, kde $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda)$ značí algebraickou násobnost čísla λ pro matici $\mathbb{A}$, podobně $\nu_a^{\mathbb{B}}(\lambda)$ pro $\mathbb{B}$.
2. Je-li $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, pak $\nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{B}}(\lambda)$.
3. Potom $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{B}$ a $\text{Tr}(\mathbb{A}) = \text{Tr}(\mathbb{B})$.

Poznámka. Buď $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Platí, že $\mathbb{A}^T$ je podobná matici $\mathbb{A}$. Je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$, pak $\mathbb{A}^T$ je podobná $\mathbb{B}^T$ a $\mathbb{A}^{-1}$ je podobná $\mathbb{B}^{-1}$, pokud existují. Navíc jsou si podobné i v mocninách. Je-li alespoň jedna z matic regulární, pak $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je podobná $\mathbb{B}\mathbb{A}$.

Definice. (diagonalizovatelnost) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom matici $\mathbb{A}$ nazveme diagonalizovatelnou, pokud je podobná diagonální matici, tj. existují matice $\mathbb{D}$ diagonální a $\mathbb{X}$ regulární tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.

Věta. (diagonalizovatelnost a báze z vlastních vektorů) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když v $\mathbb{C}^n$ existuje báze z vlastních vektorů $\mathbb{A}$.

Věta. (diagonalizovatelnost a násobnosti) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.

Věta. (Hamiltonova-Caleyho) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak matice $\mathbb{A}$ je kořenem svého charakteristického polynomu.

Poznámka. Podobné věty platí pro operátory avšak s ohledem na to, že všechna vlastní čísla musí být z tělesa. Navíc vlastní podprostor číslu λ získáme jako $P_{\lambda} = \ker(A - \lambda I)$. Dále se operátor diagonalizuje převodem do báze z vlastních vektorů. Tedy báze $\mathcal{V}$ taková, že ${}^{\mathcal{V}}A$ je diagonální matice. Operátor je diagonalizovatelný, právě když všechna jeho vlastní čísla jsou z tělesa a algebraické násobnosti se rovnají geometrickým.

Normální operátory a matice

Věta. (Rieszova) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T . Je-li $\varphi \in (\mathcal{H}_n)^\#$, pak existuje právě jeden vektor $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$ takový, že $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.*

Definice. (sdužený operátor) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pokud $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a B splňuje pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ vztah:*

$$\langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | B\vec{y} \rangle,$$

pak B nazveme sduženým operátorem k A a značíme A^* .

Poznámka. Nechá se ukázat existence a jednoznačnost, proto má smysl dávat sduženému operátoru nějakou značku.

Věta. (matice sduženého operátoru) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T . Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Pak platí:*

$${}^{\mathcal{X}}(A^*) = ({}^{\mathcal{X}}A)^H.$$

Poznámka. Horní index H značí hermitovské sdužení, jedná se o operaci transponace a komplexního sdužení.

Poznámka. Pro determinant sduženého operátoru platí $\det A^* = \overline{\det A}$. Podobně spektrum sduženého operátoru je komplexním sdužením toho původního.

Definice. (normální, hermitovský, unitární operátor) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a nechť je dán operátor $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$.*

- Pokud $AA^* = A^*A$, pak A nazveme normálním.
- Pokud $A = A^*$, pak A nazveme hermitovským.
- Pokud $AA^* = I$, pak A nazveme unitárním.

Poznámka. V případě, že jsme nad reálným tělesem, používáme místo pojmu hermitovský pojem symetrický a namísto unitární pojem ortogonální.

Poznámka. Podobně pro matice. $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^H\mathbb{A}$ je normální matice atd.

Věta. (normální operátory a normální matice) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a $\mathcal{X}$ je ON báze v $\mathcal{H}_n$.*

1. A je normální operátor, právě když ${}^{\mathcal{X}}A$ je normální matice.
2. A je hermitovský operátor, právě když ${}^{\mathcal{X}}A$ je hermitovská matice.
3. A je unitární operátor, právě když ${}^{\mathcal{X}}A$ je unitární matice.

Lemma. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je hermitovský operátor. Jestliže $\langle A\vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, pak $A = \Theta$.*

Věta. (charakterizace normálních operátorů) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální, právě když $\|A\vec{x}\| = \|A^*\vec{x}\|$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.*

Věta. (vlastní vektory normálních operátorů) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ je normální. Pak platí:*

1. $\lambda \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ , právě když $\bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A^* příslušný $\bar{\lambda}$.
2. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Věta. (diagonalizovatelnost normálních operátorů) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Je-li A normální operátor, pak A je diagonalizovatelný.*

Věta. (normální operátory a ON báze z vlastních vektorů) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální, právě když v $\mathcal{H}_n$ existuje ON báze z vlastních vektorů.*

Logika

Matematika je jednou z nejstarších věd. Oproti obsahové charakterizaci matematiky se však od vzniku řecké matematiky (Eukleides, 300 př. Kr.) nezměnila podstata matematické metody: každé nové tvrzení je třeba dokázat.¹ Názory na to, co je to vlastně důkaz, se postupně vyvíjely. Avšak od samých počátků hrála velmi významnou roli logika jako základní prostředek k budování matematické teorie.

Logika není oborem matematiky, studuje se především na filozofických fakultách. Jejím předmětem je smysluplná řeč, tedy i řeč o tom, co je pravdivé a jak z daných pravd odvozovat pravdy jiné. (Předmětem logiky není to, co zkoumá jazykověda, a sice zkoumání řeči ve smyslu tvaroslovném.)

Existuje tzv. *matematická logika*, kdy se předmět logiky zkoumá matematickými prostředky, to je však pouze jeden úhel pohledu (formální a idealizovaný). Přitom ovšem jsou k tomuto zkoumání nutné poznatky z různých dalších matematických teorií, např. teorie množin.

Otázka zní: kde začít? Potřebujeme-li k vybudování matematické logiky poznatky z matematiky, konkrétně z teorie množin, a k vybudování teorie množin (jako i všech dalších matematických teorií) se používá matematická logika, je otázka, zda se nedopouštíme „odvození kruhem“. Proto se při zkoumání matematické logiky zavádí označení *metateorie* pro teorii, v jejímž rámci se náš výzkum odehrává, a označení *metajazyk* pro jazyk, který metateorie používá.

¹ A. Einstein k tomu kdysi řekl: „Matematika požívá oproti jiným vědám mimořádné vážnosti. Její věty jsou absolutně jisté a nepopíratelné, zatímco ve všech ostatních vědách jsou důkazy do jisté míry sporné a jsou vždy vystaveny nebezpečí, že nově odhalené skutečnosti je vyvrátí.“

3.1. Výrokový počet

Nejjednodušší oblastí matematické logiky je tzv. *výrokový počet*. Jde o zkoumání logických spojek a výroků, které jsou jimi tvořeny z výroků jednodušších. (Nezajímáme se o vnitřní strukturu výroků.)

Problematický je už pojem *výrok*. V logice se obvykle „definuje“ jako cosi, o čemž má smysl se *ptát*, zda je to pravdivé či nepravdivé. V matematické logice pravdivému výroku přiřazujeme pravdivostní hodnotu 1, nepravdivému 0.²

Výrokové proměnné, zastupující výroky, značíme obvykle velkými písmeny, např. A, B,

Výrokový počet tvoří složitější výroky z jednodušších pomocí výrokových spojek. Základní výrokové spojky jsou negace $\neg$, implikace $\Rightarrow$, konjunkce $\wedge$, disjunkce $\vee$, ekvivalence $\Leftrightarrow$, přičemž každé správné (smysluplné) slovo (nazývané též formule) se tvoří konečným počtem aplikací těchto výrokových spojek na výrokové proměnné. Protože priorita operací obvykle není předem domluvena, používáme závorek (,).³ Například

$$P \Rightarrow (\neg \neg (Q \vee \neg (R \wedge \neg Q)))$$

je formule, ale

$$PP \Rightarrow)))QP \neg$$

formule není (je to nesmysl). Pravdivostní hodnota složených formulí je dána následující tabulkou:⁴

² Gottlob Frege považoval přechod od výroků k pravdivostním hodnotám za rozhodující abstrahující krok ve formální logice.

³ Většinou má negace prioritu nejvyšší, implikace a ekvivalence nejnižší.

⁴ U implikace je často markantní rozdíl od běžného porozumění. Např. pro pravdivost věty „*Nejela tramvaj, a proto jsem přišel pozdě*“ při matematizaci stačí, že jsem přišel pozdě. Naopak v běžném pojetí je věta považována za lež, pokud porucha v dopravě nebyla.

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1

Ve výrokovém počtu jsou zvláště zajímavé ty formule, které jsou pravdivé bez ohledu na pravdivostní hodnoty použitých výrokových proměnných, tzv. *tautologie*. Pro zjišťování, zda je formule tautologií, lze použít metodu tabulek. Zvláště významné tautologie (logické zákony) jsou např.

$(A \wedge A) \Leftrightarrow A$	$(A \vee A) \Leftrightarrow A$	idempotence
$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$	$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$	(komutativita)
$((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$	$((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$	(asociativita)
$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$	$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$	distributivita
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	(de Morgan)
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$	(implikace)
$(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B)) \Leftrightarrow ((A_1 \wedge A_2) \Rightarrow B)$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	
$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$	modus ponens	
$A \vee \neg A$	tertium non datur	
$A \Leftrightarrow \neg \neg A$	dvojitá negace	
$\neg(A \wedge (\neg A))$	principium contradictionis	
$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$	reductio ad absurdum	

3.2. Predikátový počet

Výrokový počet odhlíží od vnitřní struktury výroků, což je zřejmá nevýhoda. Tak například sice umožňuje z výroků „*Les je zelený*“ a „*Obloha je modrá*“ odvodit výrok „*Les je zelený a obloha je modrá*“, ale neumožňuje z předpokladů „*Sokrates je člověk*“ a „*Každý člověk je smrtelný*“ vyvodit intuitivně zřejmý závěr, že „*Sokrates je smrtelný*“.

Predikátová logika zavádí proto navíc tzv. *predikáty* (výrokové formy), obsahující proměnné, například

$$V(x) = \text{„}x \text{ je smrtelný“},$$

a umožňuje tzv. *kvantifikaci*, tj. použití kvantifikátorů $\forall$ (pro každé) a $\exists$ (existuje).

Je důležité, že za proměnné nemůžeme dosadit „cokoliv“. Proměnné mají za obor proměnnosti individua z konkrétní situace, kterou zkoumáme, mohou to být např. reálná čísla, přímky, roviny, apod. Místo proměnné můžeme dosadit výstup vzniklý konečným počtem aplikací funkčních symbolů (nazývaný term), např. jsou-li x, y proměnné, za něž dosazujeme reálná čísla, je $x+y$ term (jejich součet). Dosazením termu do predikátu vznikne výrok.

Formule se predikátovém počtu tvoří jako v počtu výrokovém, tj. aplikací výrokových spojek, ovšem navíc s tím, že je-li A formule, pak i

$$(\forall x)A \quad \text{a} \quad (\exists x)A$$

jsou opět korektní formule.

Užitečné formule:⁵

$\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$	negace
$\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$	
$(\forall x)(\forall y)A(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A(x,y)$	komutativita kvantifikátorů stejného druhu
$(\exists x)(\exists y)A(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A(x,y)$	
$(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow ((\forall x)A(x) \Rightarrow (\forall x)B(x))$	distributivita ⁶
$(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow ((\exists x)A(x) \Rightarrow (\exists x)B(x))$ ⁷	
$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x))$	
$(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x))$	
$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow ((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x))$	
$((\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$	
$(\exists x)(\forall y)A(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A(x,y)$ ⁸	
$(\exists x)(\forall y)(A(x) \Rightarrow B(y)) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)(A(x) \Rightarrow B(y))$	

Kvantifikace je umožněna právě přes uvažovaný obor proměnnosti. Vzniká tak tzv. logika prvního řádu, v matematice používaná téměř výhradně.⁹

⁵ Pro přehlednost jsou vynechány některé závorky.

⁶ Asociativita nemá u kvantifikátorů smysl, pořadí je dáno stavbou formule.

⁷ Pozor, formule $(\exists x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow ((\exists x)A(x) \Rightarrow (\exists x)B(x))$ neplatí.

⁸ Pozor, opačná implikace neplatí.

⁹ Existují i logiky vyšších řádů než prvního, které mají *lepší* vyjadřovací schopnost. Vyznačují se např. tím, že v nich lze kvantifikovat nejen přes individua, ale i přes predikáty. Například výrok „Petr a Karel mají nějakou společnou vlastnost“ jde v logice druhého řádu zachytit ve tvaru $(\exists P)(P(\text{Karel}) \wedge P(\text{Petr}))$. Kvantifikace přes predikát P je ovšem v logice prvního řádu zakázána. Logika prvního řádu má některé (dobré) vlastnosti, které logiky vyšších řádů obecně postrádají, např. je sémanticky úplná (výrok je dokazatelný tehdy, platí-li ve všech modelech, viz dále), je kompaktní (každá sporná množina výroků

3.3. Axiomatické pojetí matematiky

Při výkladu je potřeba z něčeho vyjít. U každého pojmu, který používáme, je potřeba dát jeho definici. Tato definice ovšem obsahuje další pojmy; je třeba se někde zastavit, na jisté úrovni pojmy považovat za známé a z nich vytvářet další pojmy.

Např. v geometrii jsou základními pojmy bod, rovina, přímka. Pokud intuitivně víme, co je to bod, rovina, přímka a předpokládáme, že víme, co znamená „bod leží v rovině“, „bod leží na přímce“ a „přímka leží v rovině“, můžeme pomocí těchto *primitivních pojmů* definovat další, např. kružnici, tečnu, rovnoběžky, atd. Tak postupně vytvoříme celou teorii. Protože jistě nelze připustit, aby si každý představoval pod pojmy bod, rovina, přímka cokoliv, stanovíme „pravidla počítání“, tzv. *axiomy*, které určují zacházení s těmito primitivními pojmy. Z těchto axiomů vycházíme při budování další teorie.

Například postulujeme následující axiomy:

Axiom 1: Ke každým dvěma bodům existuje právě jedna přímka, na které tyto body leží.

Axiom 2: Leží-li dva různé body přímky v rovině, leží všechny body této přímky v této rovině.

Z axiomu 1 lze logickými soudy odvodit následující *větu*:

Věta: Dvě různé přímky mají buď jediný společný bod nebo žádný společný bod.

Každou větu je třeba *dokázat*:

Důkaz věty: Pokud by dvě různé přímky měly alespoň dva společné body, pak by podle axiomu existovala pouze jedna přímka, na které tyto body leží, což je spor.

obsahuje konečnou spornou podmnožinu) a má tzv. Skolemovu vlastnost (každá množina výroků, která má model, má nejvýše spočetný model). V neposlední řadě jde pro každé tvrzení v logice prvního řádu rozhodnout v konečně mnoha krocích (pomocí počítače), zda je pravdivé, a počítač také může být použit k tomu, aby, pokud poběží dostatečně (nekonečně) dlouho, postupně vypsal všechna pravdivá tvrzení vyvíjené teorie.

Teprve na základě platnosti této věty lze vyslovit následující *definici*:

Definice: Dvě různé přímky nazýváme a) různoběžné, mají-li jeden společný bod, b) rovnoběžné, nemají-li společný žádný bod a existuje-li rovina, která tyto dvě přímky obsahuje, c) mimoběžné, nejsou-li ani různoběžné ani rovnoběžné.

Tak lze pokračovat dále, odvozovat další věty a definovat nové pojmy.

Uvedme nyní jiný příklad. Jsou tři přátelé, Pavel, Jirka a Jarda. Jeden z nich je kuchař, jeden inženýr, jeden zahradník. Jedou spolu v tramvaji a sedí vedle sebe. Přitom víme, že:

- (1) Jarda nesedí vlevo.
- (2) Pavel je kuchař.
- (3) Uprostřed nesedí zahradník.
- (4) Vpravo je Jirka.

Otázka zní: Čím je Jarda? Logickými úvahami dospějeme postupně lehce k následujícím závěrům:

- (5) Jarda sedí uprostřed.
- (6) Pavel sedí vlevo.
- (7) Vpravo sedí zahradník.
- (8) Jarda je inženýr.

Z hlediska matematické teorie zde máme primitivní pojmy Jarda, Jirka, Pavel, inženýr, zahradník, kuchař; dále sedět vlevo, sedět vpravo, sedět uprostřed. Máme dány axiomy (1)–(4) a z nich jsme vyvodili věty (5)–(8).

Všimněme si, že pokud si představíme, že Pavel je vlčák, Jarda teriér a Jirka jezevčík, zahradník bude mít smysl „černý pes“, inženýr „bílý pes“ a kuchař „hnědý pes“, pak nám naše věty dávají odpověď na otázku „Jaké barvy je teriér?“, věta (8) říká, že teriér je bílé barvy. To je příklad konkrétní interpretace, tzv. *modelu* dané teorie.

Uvažme nyní podobnou úlohu s tím, že soustavu axiomů pozměníme takto:

- (1) Jarda nesedí vlevo.
- (2) Pavel je kuchař.
- (3) Uprostřed nesedí zahradník.
- (4) Vpravo je Jirka.
- (5) Pavel sedí vlevo.

Vidíme, že axiom (5) je zde nadbytečný. Jde totiž odvodit z axiomů (1)–(4). Je zřejmé, že je třeba se vždy snažit o co nejmenší počet axiomů, je důležité, aby axiomy byly na sobě *nezávislé*.

Pozměňme nyní výchozí axiomy takto:

- (1) Jarda nesedí vlevo.
- (2) Pavel je kuchař.
- (3) Uprostřed nesedí zahradník.
- (4) Jirka je uprostřed.
- (5) Inženýr je vpravo.

Odtud lehce odvodíme, že:

- (6) Jarda sedí vpravo.
- (7) Pavel sedí vlevo.
- (8) Jarda je inženýr.
- (9) Kuchař je vpravo.
- (10) Zahradník je uprostřed.

Vidíme, že jsme se dostali do sporu, axiom (3) odporuje odvozenému tvrzení (10). Při volbě axiomů musíme být nanejvýš opatrní, axiomy musí být tzv. *bezesporné*, což zvláště u složitějších matematických teorií může být velkým problémem ověřit.

Konečně uvažme poslední variantu takto:

- (1) Jarda nesedí vlevo.
- (2) Pavel je kuchař.
- (3) Inženýr sedí vpravo.
- (4) Jarda není zahradník.

Lehko zjistíme, že

- (5) Jarda sedí vpravo.

Ovšem to je asi tak všechno. Nyní máme dvě možnosti:

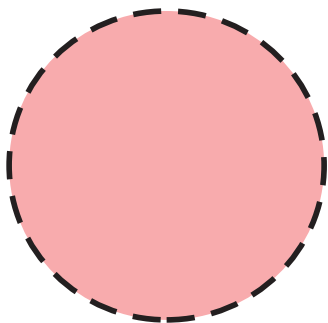
- (6₁) Pavel sedí vlevo.
- (6₂) Pavel sedí uprostřed.

Žádné z těchto tvrzení není upřednostněné. Z axiomů (1)–(4) nikterak neplyne, kde sedí Pavel. Můžeme zkonstruovat dvě teorie: v jedné Pavel sedí vlevo, v druhé uprostřed. Vidíme, že soustava axiomů (1)–(4) nebyla tzv. *úplná*. V takovém případě je nutné se rozhodnout z nějakého jiného důvodu, jaký axiom k teorii přidat. Někdy se ovšem stane, že existují „dobré“ důvody jak pro přidání tvrzení, tak jeho opaku.

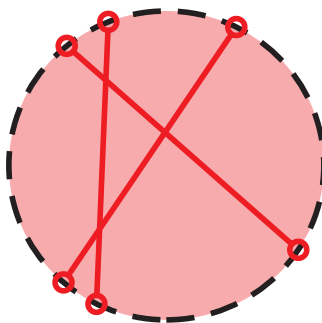
Z axiomů 1 a 2 pro geometrii, jak jsme je uvedli na začátku, například neplyne tvrzení o rovnoběžkách:

Eukleidův axiom o rovnoběžkách: Daným bodem lze vést k dané přímce právě jednu rovnoběžku.

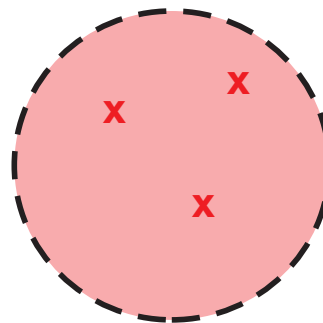
Ukázat, že dané tvrzení z axiomů neplyne, je možné například nalezením modelu, v kterém toto tvrzení neplatí. Uvažme následující model geometrie: rovina bude pro nás vnitřek kruhu v rovině, přímky pro nás budou tělívky této kružnice (bez krajních bodů) a body budou vnitřní body tohoto kruhu:



rovina

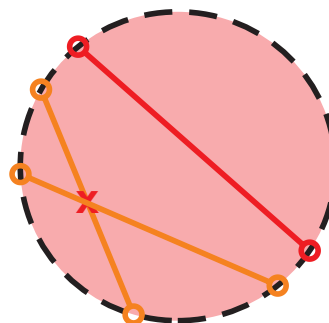
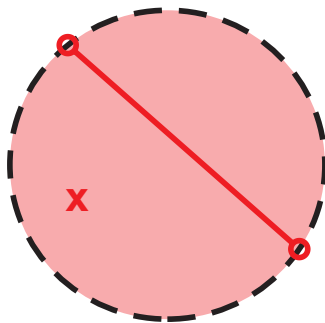


přímky



body

Pak jsou ovšem axiomy 1 a 2 splněny a je vidět, že daným bodem lze vést k dané přímce více než jednu rovnoběžku (dokonce nekonečně mnoho).



rovnoběžky

Na závěr uvedme pro zajímavost axiomy (přesněji axiomatická schemata), s jejichž pomocí jde odvodit jakákoliv platná formule v logice prvního řádu:

- 1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- 2) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
- 3) $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- 4) $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$ (tzv. axiom distribuce)¹⁰
- 5) $(\forall x)A \Rightarrow A(x/t)$ (tzv. axiom substitute)¹¹

3.4. Neúplnost a nedokazatelnost aritmetiky a ostatních dostatečně silných matematických teorií

David Hilbert ve dvacátých letech 20. století formuloval požadavek na sestavení kompletního soupisu axiomů k formalizaci všech existujících matematických teorií. Tento soubor axiomů měl splňovat dříve uvedené vlastnosti: měl být bezesporný a kompletní. Tvrdou ránu této představě zasadil brněnský rodák, Kurt Gödel, kterému na byla nedávno v Brně na jeho domě v Pellicově ulici odhalena pamětní deska. Jak ukázal v roce 1931, něco takového není v zásadě možné. Dokázal, že každá dostatečně silná matematická teorie, která v sobě bude obsahovat axiomu pro sčítání a násobení přirozených čísel, není kompletní. Vždy totiž bude existovat smysluplný výrok, který nebude možné ani dokázat, ani vyvrátit. (Ten sice můžeme přidat jako axiom, ale opět nebudeme u konce, budou

¹⁰ Lze použít, pouze pokud A neobsahuje volný výskyt proměnné x tj. nekvanifikovaný kvantifikátory $\forall x$ nebo $\exists x$

¹¹ x/t značí nahrazení proměnné x termem t ; axiom lze použít, jen pokud se žádný volný výskyt x nevyskytuje v rozsahu žádného kvantifikátoru vážícího libovolnou proměnnou z termu t .

existovat další nerozhodnutelná tvrzení, atd.) Co hůře: navíc nevíme, zda taková teorie je konzistentní. Gödel totiž dokázal, že pokud lze (v rámci dané teorie) dokázat, že je konzistentní, pak je nekonzistentní.¹²

Ačkoliv Gödelovy výsledky do značné míry šokovaly tehdejší matematickou obec, protože ukázaly, že není možné axiomatickou metodou formalizovat kompletně celou matematiku, je to možné udělat pro její podstatnou dnes používanou část. Zermelo-Fraenkelova teorie množin (spolu s axiomem výběru, zkráceně ZFC, viz dále) spolu s logikou prvního řádu, jak jsme si ji představili, tvoří dostatečně bohatý a všeobecně přijímaný základ, na kterém drtivá většina dnešních matematiků buduje své teorie. Aniž by věděli, zda tento základ je konzistentní, a i když vědí, že se mohou čas od času objevit nerozhodnutelná tvrzení.¹³

Množiny

Naivní teorie množin¹⁴ vede k problémům.¹⁵ Proto bylo přistoupeno k sestavení tzv. axiomatické teorie množin.

¹² Hermann Weyl k tomu poznamenal, že „matematika není žádný automat, který za 10 centů vyplivne balík axiomů, definic a lemmat a už se ani nehne.“

¹³ Příkladem takového nerozhodnutelného tvrzení je např. slavná hypotéza kontinua, viz dále.

¹⁴ Georg Cantor, 19. století: „Množina je kolekce určitých, různých objektů v naší mysli; tyto objekty se nazývají prvky množiny.“

¹⁵ Bertrand Russell, 1901: Uvažme množinu R všech množin, které nejsou prvkem sama sebe. Pokud $R \in R$, pak R je prvkem sama sebe, tedy $R \notin R$, spor. Pokud $R \notin R$, pak R není prvkem sama sebe, tedy podle definice R musí být $R \in R$, opět spor. (Holič holí ty muže, kteří se neholí sami. Holí holič sám sebe?)

Proměnné v predikátech mají nyní za obor všechny množiny. Na začátku startujeme s atomární formulí pouze jednoho jediného typu: $X \in \mathcal{Y}$ (čteme X je prvkem či elementem $\mathcal{Y}$). Všechny další pravdivé formule jsou odvozeny pouze pomocí axiomů logiky prvního řádu a následujících axiomů teorie množin:

1. $(\forall X)(\forall \mathcal{Y})\left((\forall \mathcal{Z})(\mathcal{Z} \in X \Leftrightarrow \mathcal{Z} \in \mathcal{Y}) \Rightarrow (\forall \mathcal{Z})(X \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow \mathcal{Y} \in \mathcal{Z})\right)$ (axiom extenzionality; pokud dvě množiny obsahují stejné prvky, patří do stejných množin).
2. $(\forall X)\left((\exists \mathcal{Y})\mathcal{Y} \in X \Rightarrow (\exists \mathcal{Y})(\mathcal{Y} \in X \wedge \neg(\exists \mathcal{Z})(\mathcal{Z} \in \mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z} \in X))\right)$ (axiom regularity; každá neprázdná množina X obsahuje prvek $\mathcal{Y}$ tak, že X a $\mathcal{Y}$ jsou disjunktní).
3. $(\forall A)\left[\left((\forall X \in A)(\exists^1 \mathcal{Y})\varphi(X, \mathcal{Y})\right) \Rightarrow \left((\exists B)(\forall \mathcal{Y})(\mathcal{Y} \in B \Leftrightarrow (\exists X \in A)\varphi(X, \mathcal{Y}))\right)\right]$ (axiomatické schema nahrazení; zaručuje existenci podmnožiny A popsané pomocí φ).¹⁶
4. $(\forall F)(\exists A)(\forall \mathcal{Y})(\forall X)X \in \mathcal{Y} \wedge \mathcal{Y} \in F \Rightarrow X \in A$ (axiom sjednocení; zaručuje existenci množiny obsahující každý prvek každého prvku F).

¹⁶ Množinu takových X , které patří do A a současně je pro ně splněna formule $\varphi(X)$, značíme takto: $\{X \in A \mid \varphi(X)\}$.

$(\forall X \in A) \dots$ je zkratka za $(\forall X)(X \in A \Rightarrow \dots$

$(\exists X \in A) \dots$ je zkratka za $(\exists X)(X \in A) \wedge \dots$

$\exists^1 \mathcal{Y}$ znamená „existuje právě jedno $\mathcal{Y}$ “; je to zkratka za $(\exists \mathcal{Y})(\varphi(X, \mathcal{Y}) \wedge (\forall \mathcal{Z})\varphi(X, \mathcal{Z}) \Rightarrow \mathcal{Y} = \mathcal{Z})$.

Rovnost dvou množin definujeme takto: $X = \mathcal{Y} \Leftrightarrow ((\forall \mathcal{Z})\mathcal{Z} \in X \Leftrightarrow \mathcal{Z} \in \mathcal{Y})$. Tj. množiny se rovnají právě tehdy, pokud obsahují stejné prvky.

5. $(\exists A)\left(\{\} \in A \wedge (\forall \mathcal{I})(\mathcal{I} \in A \Rightarrow \mathcal{I} \cup \{\mathcal{I}\} \in A)\right)$ (axiom nekonečna; zaručuje existenci množiny přirozených čísel).¹⁷

6. $(\forall X)(\exists \mathcal{I})(\forall \mathcal{Z})\mathcal{Z} \subset X \Rightarrow \mathcal{Z} \in \mathcal{I}$ (axiom o potenční množině; pro každou množinu X existuje tzv. potenční množina obsahující všechny její podmnožiny).¹⁸

7. $(\forall X)(\exists \mathcal{I})(\forall \mathcal{Z})(\forall W)\left((\mathcal{Z} \in W \wedge W \in X) \Rightarrow \exists V \forall U((\exists T)((U \in W \wedge W \in T) \wedge (U \in T \wedge T \in \mathcal{I})) \Leftrightarrow U = V)\right)$ (axiom výběru; pro každou množinu X existuje $\mathcal{I}$ – kolekce párů, jeden pár pro každý neprázdný prvek X ; jeden prvek páru je prvkem X a druhý je libovolným prvkem tohoto prvků).

4.1. Přirozená čísla

V rámci axiomaticky vybudované teorie množin v matematice pracujeme pouze s objekty, které jsou množinami, nic jiného nemáme k dispozici.

Jako příklad vývoje základní teorie uveďme zavedení přirozených čísel. Označme

$$0 = \{\}$$

a dále

$$1 = 0 \cup \{0\} = \{\} \cup \{\{\}\} = \{\{\}\},$$

$$2 = 1 \cup \{1\} = \{\{\}\} \cup \{\{\{\}\}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\},$$

$$3 = 2 \cup \{2\} = \dots = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\},$$

atd.

¹⁷ Ze schematu nahrazení plyne, že existuje právě jedna prázdná množina. Značíme ji obvykle $\{\}$ nebo $\emptyset$.

¹⁸ Potenční množinu k množině A označujeme obvykle $P(A)$.

Množinu I nazveme induktivní, pokud má následující dvě vlastnosti:

1. $\{\} \in I$,
2. $(\forall x)x \in I \Rightarrow x \cup \{x\} \in I$.

Pak množinu přirozených čísel včetně nuly¹⁹ můžeme definovat jako nejmenší induktivní množinu, tj. klademe

$$\mathbb{N}_0 = \{x \in A \mid (\forall I \text{ induktivní})(x \in I)\},$$

kde A je libovolná induktivní množina; její existence je zaručena axiomem 5. S takto zavedenými přirozenými čísly dále snadno definujeme jejich sčítání, násobení atd., zavedeme čísla celá, racionální, reálná atd., o kterých lze pak dokázat ta tvrzení a vlastnosti, na které jsme zvyklí.

4.2. Zápisy množin

Pro zápis množin máme několik způsobů. Jednak lze použít výčtový zápis pomocí složených závorek.

Např. množinu, která obsahuje právě prvky x, y, z značíme $\{x, y, z\}$.

Pokud množina obsahuje mnoho prvků, lze někdy použít znak „...“:

Např. množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Mnohdy je výčtový způsob zápisu nevhodný. Pak lze využít jiný způsob – zápisu pomocí formule. Jak už bylo řečeno, množinu takových x , které patří do A a současně je pro ně splněna formule $\varphi(x)$, značíme takto: $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$.

Je tedy např. $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Existuje-li množina B tak, že platí $(\forall x)\varphi(x) \Rightarrow x \in B$, pak lze místo $\{x \in B \mid \varphi(x)\}$ psát pouze $\{x \mid \varphi(x)\}$.

¹⁹ Do přirozených čísel obvykle nulu neřadíme.

4.3. Základní operace s množinami

Budte A, B množiny. Pak říkáme, že A je **podmnožinou** B , pokud

$$(\forall x) \left((x \in A) \Rightarrow (x \in B) \right).$$

Píšeme $A \subset B$.

Např. $\{1, 2, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Pro každé tři množiny A, B, C platí

$$A \subset A,$$

$$A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B,$$

$$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C.$$

Pokud je $A \subset B$ a současně $A \neq B$, říkáme, že A je **vlastní** podmnožina B a píšeme $A \subsetneq B$.

Např. $\{n \in \mathbb{N} | (\exists k \in \mathbb{N})(n = 3k)\} \subsetneq \mathbb{N}$.

Budte A, B množiny. Pak **průnik** množin $A \cap B$ definujeme jako množinu prvků patřících do A i do B současně:

$$A \cap B = \{x \in A | x \in B\}.$$

Sjednocení množin $A \cup B$ definujeme jako množinu prvků patřících do A nebo do B (přičemž mohou patřit do obou). (Existenci sjednocení zajišťuje axiom o sjednocení.)

Rozdíl množin $A - B$ definujeme jako množinu všech prvků, které patří do A , ale ne do B :

$$A - B = \{x \in A | x \notin B\}.$$

Je-li např. $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{2, 3, 5\}$, pak $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$, $A - B = \{1\}$ a $B - A = \{5\}$.

Pro každé tři množiny A, B, C platí

$A \cap B = B \cap A$, komutativita

$A \cup B = B \cup A$.

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, asociativita

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Asociativita ospravedlňuje zápis bez závorek: lze psát $A \cup B \cup C$ a $A \cap B \cap C$.

Dále platí:

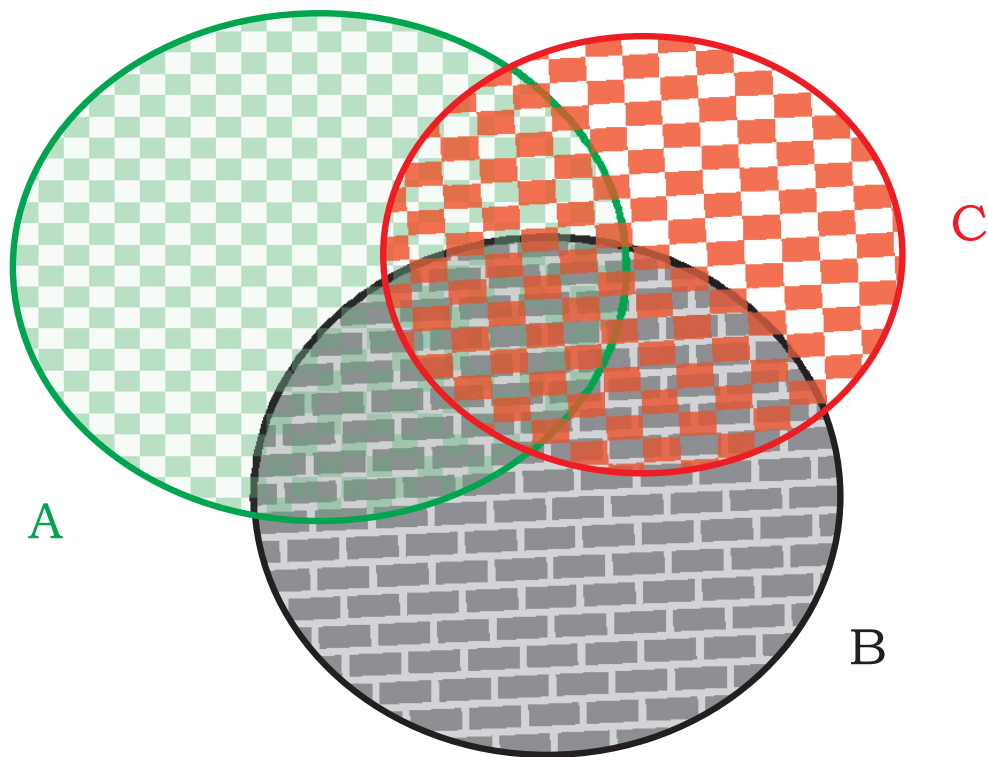
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, distributivita

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$, de Morgan

$C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$.

Uvedené a další formule se hezky ozřejmují pomocí Vennových diagramů:



Pojmy průnik a sjednocení jdou zobecnit pro libovolný počet množin. Např. místo $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ používáme zápis $\bigcup_{j=1}^n A_j$, podobně pro průnik.

4.4. Uspořádaná dvojice, kartézský součin

Dvoupvková množina $\{a,b\} = \{b,a\}$, jinými slovy nezáleží na pořadí. Pro další účely se hodí definovat **uspořádanou dvojici** prvků (a,b) vztahem

$$(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}.$$

Je zřejmé, že $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$.

Pomocí vztahů

$$(a,b,c) = ((a,b),c),$$

$$(a,b,c,d) = ((a,b,c),d),$$

...

definujeme uspořádané trojice, čtveřice atd.

Jsou-li A, B množiny, pak **kartézský součin** $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic (a,b) takových, že $a \in A$ a $b \in B$.

Kombinuje se tedy „každý s každým“, např. je-li $A = \{1,2\}$ a $B = \{10,11,12\}$, pak $A \times B = \{(1,10), (1,11), (1,12), (2,10), (2,11), (2,12)\}$.

Zápis $A \times A$ zkracujeme jako A^2 .

4.5. Zobrazení

Základním pojmem v matematice je pojem zobrazení neboli funkce.²⁰

Nechť A, B jsou libovolné množiny. **Zobrazením** nazveme každou podmnožinu $f \subset A \times B$, která splňuje vztah

²⁰ Přestože se tyto pojmy občas rozlišují, pro nás budou splývat.

$$(\forall x,y,z)((x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \Rightarrow y = z).^{21}$$

Je-li $(x,y) \in f$, pak pro y používáme též značku $f(x)$, píšeme tedy $y = f(x)$.

Např. $f_1 = \{(1,6), (2,5), (3,6)\}$ je zobrazení, ale $f_2 = \{(1,6), (2,5), (2,2)\}$ zobrazení není.

K pojmu zobrazení se váže několik dalších důležitých definic:

Množinu

$$D_f = \{x | (\exists y)(y = f(x))\}$$

nazýváme **definiční obor** zobrazení f .

Množinu

$$H_f = \{y | (\exists x)(y = f(x))\}$$

nazýváme **obor hodnot** zobrazení f .

Tedy $f_1 = \{(1,6), (2,5), (3,6)\}$ má $D_{f_1} = \{1,2,3\}$ a $H_{f_1} = \{5,6\}$.

Fakt $D_f = A \wedge H_f \subset B$ zapisujeme zkráceně takto:

$$f: A \rightarrow B.$$

Hovoříme o zobrazení množiny A do množiny B .

V našem příkladu lze například napsat $f_1: \{1,2,3\} \rightarrow \mathbb{R}$, ale třeba i $f_1: \{1,2,3\} \rightarrow \mathbb{N}$.

(Poznámka: někdy se můžeme setkat i se značkou

$$f: (A) \rightarrow B,$$

ta znamená, že $D_f \subset A \wedge H_f \subset B$, hovoříme o zobrazení z množiny A do množiny B .)

Můžeme se tedy psát třeba $f_1: (\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Je zřejmé, že dvě zobrazení f, g se rovnají, pokud platí

²¹ $\forall x,y,z$ je zkratka za $\forall x \forall y \forall z$.

$$D_f = D_g \wedge (\forall x \in D_f)(f(x) = g(x)).$$

Zobrazení f nazveme **konstantní**, pokud

$$(\forall x, y \in D_f)(f(x) = f(y)).$$

Neprázdné konstantní zobrazení má jednoprvkový obor hodnot.

Nechť $f: A \rightarrow B$ je zobrazení, M množina. $f|_M$ – tzv. **zúžení** zobrazení f **na množinu** M definujeme jako zobrazení, které splňuje

$$f|_M: M \cap A \rightarrow B, \quad \forall x \in M \cap A: f|_M(x) = f(x).$$

Např. $f_1|_{\{1,2,8\}} = \{(1,6), (2,5)\}$. Všimněme si, že nemusí být $M \subset D_f$.

Nechť $f: A \rightarrow B$ je zobrazení, M množina. **Obrazem množiny** M nazýváme množinu

$$f(M) = \{y | (\exists x \in M)(y = f(x))\}^{22}$$

Vzorem množiny M nazýváme množinu

$$f^{-1}(M) = \{x | (\exists y \in M)(y = f(x))\}.$$

Např. $f_1(\{0,1\}) = \{6\}$, $f_1^{-1}(\{6\}) = \{1,3\}$.

Nechť $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow D$ jsou dvě zobrazení. Pak **složeným zobrazením** nazýváme zobrazení $f \circ g$ s definičním oborem

$$g^{-1}(A) \tag{1}$$

které splňuje vztah

$$\left(\forall x \in g^{-1}(A) \right) \left((f \circ g)(x) = f(g(x)) \right).$$

²² Zápis $\{y | (\exists x \in M)(y = f(x))\}$ se často zkracuje jako $\{f(x) | x \in M\}$.

Složme např. zobrazení $f = \{(1,2), (2,4), (3,4)\}$ a $g = \{(0,5), (1,2), (2,3)\}$. Je

$$g^{-1}(A) = g^{-1}(\{1,2,3\}) = \{1,2\},$$

dále $f(g(1)) = f(2) = 4, f(g(2)) = f(3) = 4$, takže $f \circ g = \{(1,4), (2,4)\}$.

Pro dvě zobrazení f, g obecně neplatí vztah $f \circ g = g \circ f$, složení není komutativní. Avšak je asociativní, tj. pro libovolná tři zobrazení f, g, h platí $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. To nás ospravedlňuje vynechat závorky a psát $f \circ g \circ h$.

Bud' $f: A \rightarrow B$ zobrazení, M libovolná množina. Říkáme, že zobrazení f je tzv.

1. **injektivní** (neboli prosté), pokud $(\forall x, y \in D_f) \left((x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y)) \right)$.

2. **M -surjektivní** (neboli na M), pokud $M \subset H_f$.

3. **M -bijektivní** (neboli M jednoznačné či vzájemně jednoznačné), pokud je současně injektivní a M -surjektivní.

Např. zobrazení $f_1 = \{(1,6), (2,5), (3,6)\}$ není prosté, prvku 1 a 3 přiřazuje stejný prvek 6. Je na $\{5,6\}$. Ale třeba také na $\{5\}$.

Zobrazení f nazýváme **identické** (neboli identita, jednotka), pokud

$$(\forall x \in D_f) (f(x) = x).$$

Používáme pro něj značku Id nebo Id_{D_f} .

Pokud je zobrazení f prosté, definujeme **inverzní** zobrazení $k f$ vztahem

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}.$$

Např. zobrazení $f = \{(1,6), (2,5), (3,10)\}$ je prosté. f^{-1} získáme jednoduše prohozením hodnot v závorkách: $f^{-1} = \{(6,1), (5,2), (10,3)\}$.

Inverzní zobrazení má prohozený definiční obor i obor hodnot: platí

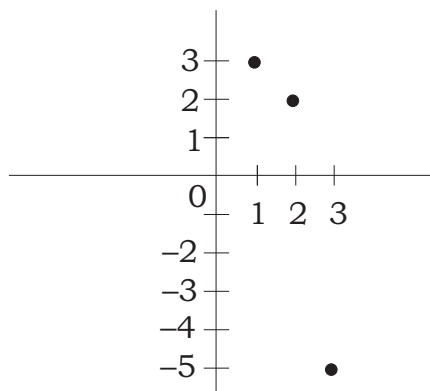
$$D_{f^{-1}} = H_f, \quad H_{f^{-1}} = D_f.$$

Dále platí

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_{H_f}, \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_{D_f}.$$

Na závěr poznamenejme, že pojem **graf** funkce f je synonymem pro funkci samotnou, tj. pojmy „graf funkce f “ a „funkce f “ mají naprosto stejný význam. Pojem graf používáme zejména tehdy, když uspořádané dvojice zakreslujeme do kartézských souřadnic, kde na vodorovnou osu vynášíme prvky definičního oboru a na svislou osu prvky oboru hodnot.

Např. graf funkce $f = \{(1,3), (2,2), (3,-5)\}$ vypadá takto:



4.6. Množina reálných čísel

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ má následující důležité vlastnosti (říkáme také, že je tzv. uspořádaným tělesem):

Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

1. $x + y = y + x$, $xy = yx$ (komutativní zákon),
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$ (asociativní zákon),
3. $x(y + z) = xy + xz$ (distributivní zákon),

dále platí

4. $(\exists^1 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x + 0 = x)$ (existence nuly),
5. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists^1 -x \in \mathbb{R})(x + (-x) = 0)$ (existence opačného prvku k x),
6. $(\exists^1 1 \in \mathbb{R})\left(1 \neq 0 \wedge (\forall x \in \mathbb{R})(1 \cdot x = x)\right)$ (existence jedničky),
7. $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0)(x \cdot x^{-1} = 1)$ (existence inverzního prvku k x),²³
8. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \leq y \vee y \leq x)$,
9. $(\forall x, y \in \mathbb{R})\left(x \leq y \Rightarrow (\forall z \in \mathbb{R})(x + z \leq y + z)\right)$,
10. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz)$ (vlastnosti uspořádání).
11. $\mathbb{R}$ je tzv. úplná, viz dále.

Z těchto vlastností jdou odvodit všechny další vlastnosti reálných čísel.

Základními podmnožinami reálných čísel jsou tzv. intervaly.

Budte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak definujeme po řadě **uzavřený interval** $\langle a, b \rangle$, **polouzavřený intervaly** $\langle a, b \rangle$ a (a, b) a **otevřený interval** (a, b) jako množiny

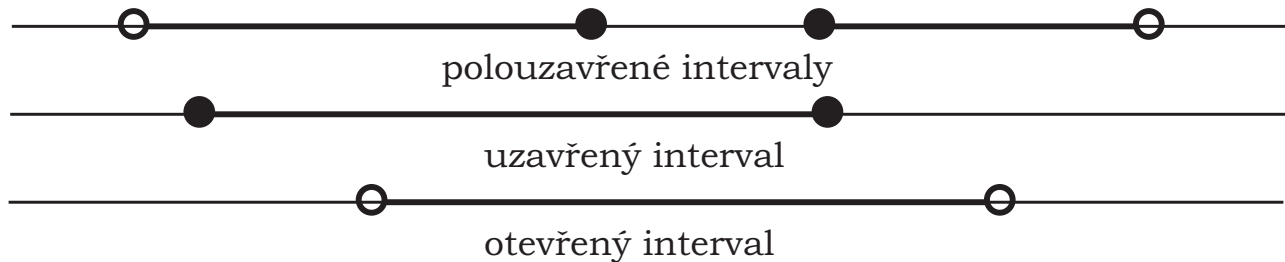
²³ $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0) \dots$ je zkratka za $(\forall x \in \mathbb{R})(x \neq 0 \Rightarrow \dots)$.

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\},$$

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\},$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\},$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$
²⁴



4.7. Elementární funkce

Funkce, které mají za obor hodnot podmnožinu reálných čísel, se nazývají reálné funkce. Funkce, které mají za definiční obor podmnožinu reálných čísel, se nazývají funkce reálné proměnné.

Bud' $n \in \mathbb{N}_0$. **Polynomem** n -tého stupně (řádu) rozumíme reálnou funkci reálné proměnné ve tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

²⁴ Občas se místo špičatých závorek $\langle, \rangle$ používají hranaté $[,]$.

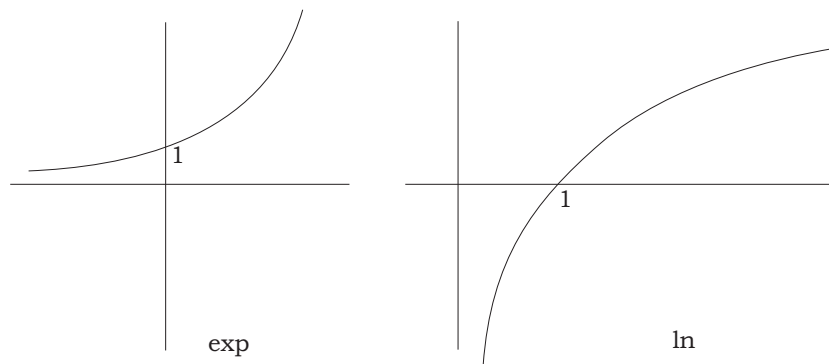
kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou reálné konstanty, $a_n \neq 0$. Polynomy nultého řádu jsou konstantní funkce (kromě nuly), polynomy prvního řádu se nazývají lineární funkce, druhého kvadratické, třetího kubické.

Podíl dvou polynomů se nazývá **racionální** funkce.

Funkce ve tvaru $f(x) = x^\alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je konstanta, se nazývá **mocninná**. Definičním oborem mocninné funkce je $\mathbb{R}^+$, někdy $\mathbb{R} - \{0\}$ či $\mathbb{R}$ (v závislosti na parametru α).

Funkce ve tvaru $f(x) = a^x$, kde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ²⁵ je konstanta, se nazývá **exponenciální**. Def. oborem exponenciální funkce je $\mathbb{R}$. Pokud je $a = e$ (Eulerova konstanta, viz dále), používáme pro e^x též značku $\exp x$.

Inverzní funkcí k funkci exponenciální je **logaritmus** $\log_a x$ (znač. případně $\ln x$, pokud základem je Eulerova konstanta e).

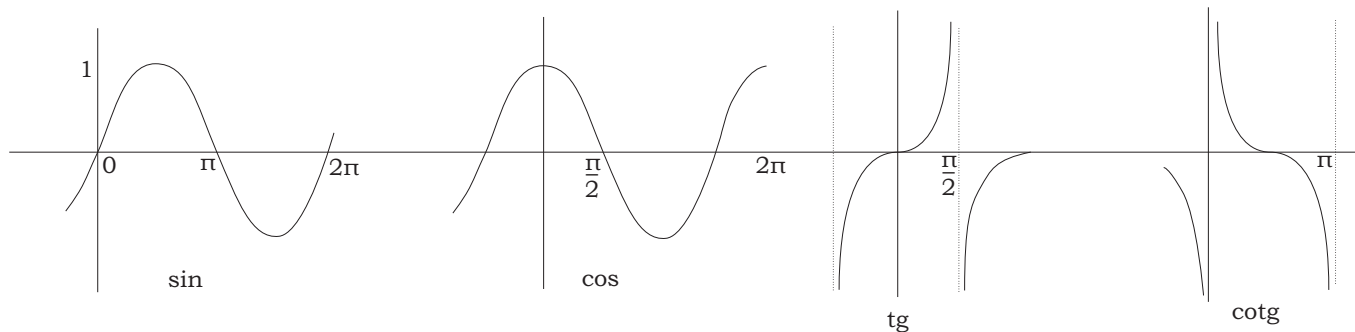


Def. obory a obory hodnot **goniometrických** funkcí shrnuje následující tabulka:²⁶

²⁵ $\mathbb{R}^+$ je zkratka za $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\} = (0, +\infty)$. Dále $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\} = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}_0^\pm = \{0\} \cup \mathbb{R}^\pm$, podobně pro $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}$. O symbolu $\pm\infty$ viz dále.

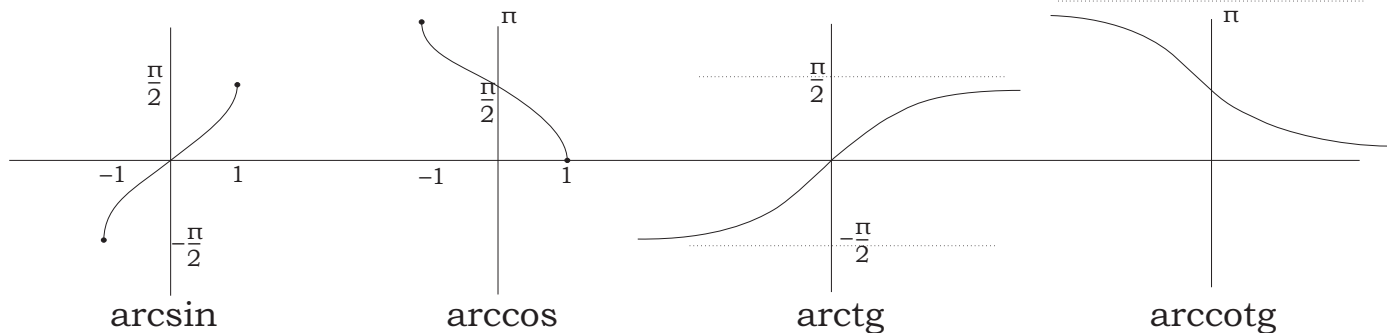
²⁶ O korektním zavedení obecné mocniny, logaritmu a goniometrických funkcí viz dále a též doporučená literatura.

funkce	def. obor	obor hodnot
sin	$\mathbb{R}$	$\langle -1, 1 \rangle$
cos	$\mathbb{R}$	$\langle -1, 1 \rangle$
tg	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R}$
cotg	$\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$



Protože goniometrické funkce nejsou prosté, definujeme k nim inverzní funkce **cyklometrické** tak, že je zúžíme na intervaly, kde již prosté jsou.

funkce	def. obor	obor hodnot
arcsin	$\langle -1, 1 \rangle$	$\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
arccos	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle 0, \pi \rangle$
arctg	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$
arccotg	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$



Pokud f_1, f_2 jsou reálné funkce, definujeme funkce $f_1 + f_2, f_1 - f_2, f_1 f_2$ a $\frac{f_1}{f_2}$ vztahy

$$\begin{aligned}
 (f_1 \pm f_2)(x) &= f_1(x) \pm f_2(x), \quad D_{f_1 \pm f_2} = D_{f_1} \cap D_{f_2}, \\
 (f_1 f_2)(x) &= f_1(x) f_2(x), \quad D_{f_1 f_2} = D_{f_1} \cap D_{f_2}, \\
 \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) &= \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad D_{\frac{f_1}{f_2}} = D_{f_1} \cap D_{f_2} - f_2^{-1}(\{0\}).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Funkce vyjmenované výše a funkce, které z nich vzniknou konečným počtem aritmetických operací $\pm, \cdot, /$ a operací $\circ$ a $^{-1}$, se nazývají **elementární**.

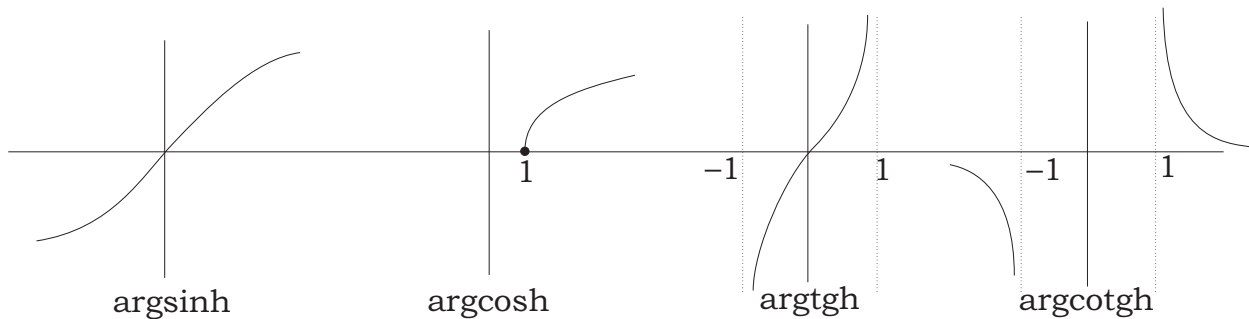
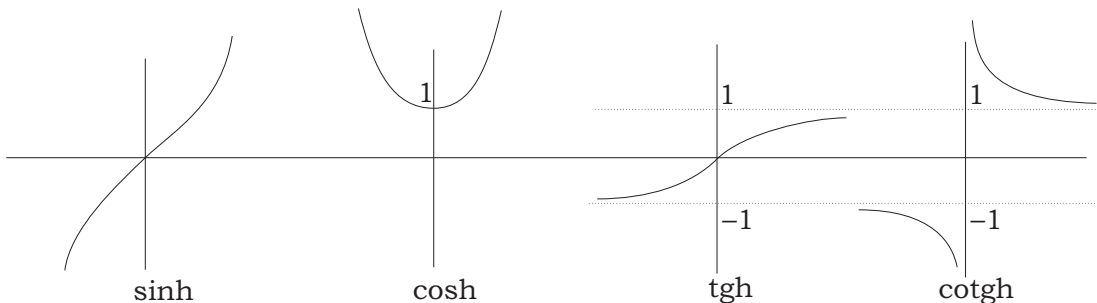
Mezi elementární patří tedy i tzv. **hyperbolické** funkce, definované vztahy

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

a funkce k nim inverzní: $\operatorname{argsinh}, \operatorname{argcosh}, \operatorname{argtgh}$ a $\operatorname{argcotgh}$ (v případě $\operatorname{argcosh}$ opět po zúžení def. oboru, neboť $\cosh$ není prostá).

funkce	def. obor	obor hodnot
$\sinh$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cosh$	$\mathbb{R}$	$\langle 1, +\infty \rangle$
$\tanh$	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$
$\coth$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

funkce	def. obor	obor hodnot
$\operatorname{argsinh}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{argcosh}$	$\langle 1, +\infty \rangle$	$\langle 0, +\infty \rangle$
argtgh	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{argcotgh}$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$\mathbb{R} - \{0\}$



Pokud není řečeno jinak, **učiníme úmluvu, že definiční obor identity budou všechna reálná čísla**. Definiční obor elementární funkce pak plyne z definice (2) a ze vztahu pro definiční obor složené funkce (viz vztah (1)).

Proto např. definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$, pokud nestanovíme jinak, je podle naší úmluvy automaticky $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$.

4.8. Ekvivalence množin

Říkáme, že množina A je **ekvivalentní** s množinou B (neboli má stejnou mohutnost), pokud existuje bijekce $f: A \rightarrow B$ množiny A na B . Značíme $A \sim B$.

$\sim$ má tzv. vlastnosti ekvivalence. To znamená, že pro každé tři množiny A, B, C platí:

1. $A \sim A$.
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.
3. $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

O množině A řekneme, že je

1. **konečná**, pokud je prázdná nebo ekvivalentní s $\{1, 2, \dots, n\}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.
2. **spočetná**, pokud je ekvivalentní s $\mathbb{N}$, **nejvýše spočetná**, pokud je spočetná nebo konečná.
3. **nespočetná**, pokud není ani spočetná ani konečná.

Množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$, celých čísel $\mathbb{Z}$, racionálních čísel $\mathbb{Q}$ jsou spočetné.

Spočetnost $\mathbb{Z}$ plyne z existence bijekce, která je dána např. následující tabulkou:

1	2	3	4	5	6	7	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	-1	2	-2	3	-3	...

Sjednocení libovolného spočetného systému je opět spočetné.

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Slavná hypotéza kontinua říká, že pokud $X \subset \mathbb{R}$ je nespočetná, už nutně $X \sim \mathbb{R}$ (nerozhodnutelné tvrzení v rámci ZFC).

4.9. Absolutní hodnota, trojúhelníková nerovnost

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ zavádíme vztahem

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

velikost (absolutní hodnotu) reálného čísla a . Splňuje tzv. **trojúhelníkovou nerovnost**, tj. pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Často se hodí i nerovnost, která jde z trojúhelníkové lehce odvodit: $|x-y| \leq ||x| - |y||$.

4.10. Celá část

V dalším často využijeme následující funkci: pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme jeho **celou část** $[x]$ jako největší celé číslo menší nebo rovno x . Celá část tedy splňuje nerovnost

$$x-1 < [x] \leq x.$$

Např.

$$[-2] = -2, \quad [5] = 5, \quad [3,7] = 3, \quad [-4,001] = -5.$$

4.11. Signum

Bude se nám hodit i tzv. znaménková funkce: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

4.12. Omezenost podmnožiny reálných čísel, maximum, minimum

Řekneme, že podmnožina $A \subset \mathbb{R}$ je **omezená shora**, pokud

$$(\exists H \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x \leq H).$$

(Každé takové H s uvedenou vlastností nazýváme **horní závora** množiny A .)

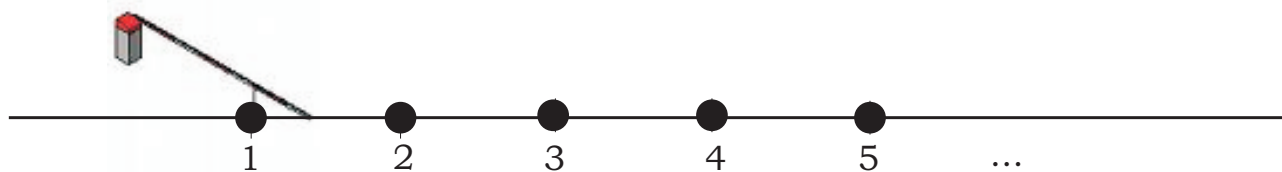


otevřený interval $(3, 5)$ je omezený shora,
7 je příklad horní závory.

Řekneme, že podmnožina $A \subset \mathbb{R}$ je **omezená zdola**, pokud

$$(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x \geq D).$$

(Každé takové D s uvedenou vlastností nazýváme **dolní závora** množiny A .)



množina přirozených čísel je omezená zdola,
1 je příklad dolní závory.

Pokud je množina $A \subset \mathbb{R}$ omezená současně shora i zdola, říkáme, že je **omezená**.

Říkáme, že číslo $a \in A$ je **minimum** (nejmenším prvkem) množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když
 $(\forall x \in A)(x \geq a)$.

Značíme ho $\min A$.

Je např. $\min \langle 1, 8 \rangle = 1$. Ne každá množina má minimum: interval $(-5, 8)$ minimum nemá.

Říkáme, že číslo $b \in A$ je **maximum** (největším prvkem) množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když
 $(\forall x \in A)(x \leq b)$.

Značíme ho $\max A$.

Např. $\max \langle 10, 20 \rangle = 20$, ale $\max (-1, 1)$ neexistuje.

4.13. Rozšíření množiny reálných čísel

Množinu $\mathbb{R}$ rozšíříme o dva nové prvky, které označíme $+\infty$ a $-\infty$ (nazýváme je **plus nekonečno** a **mínus nekonečno**).²⁷ Označíme toto rozšíření $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Uspořádání na $\overline{\mathbb{R}}$ rozšíříme vztahem

$$(\forall x \in \mathbb{R})(-\infty < x < +\infty).$$

Časem zavedeme i aritmetické operace na $\overline{\mathbb{R}}$.

Pojem otevřený interval a polouzavřený interval rozšiřujeme i na případy, kdy je mez u kulaté závorky nekonečná, např.

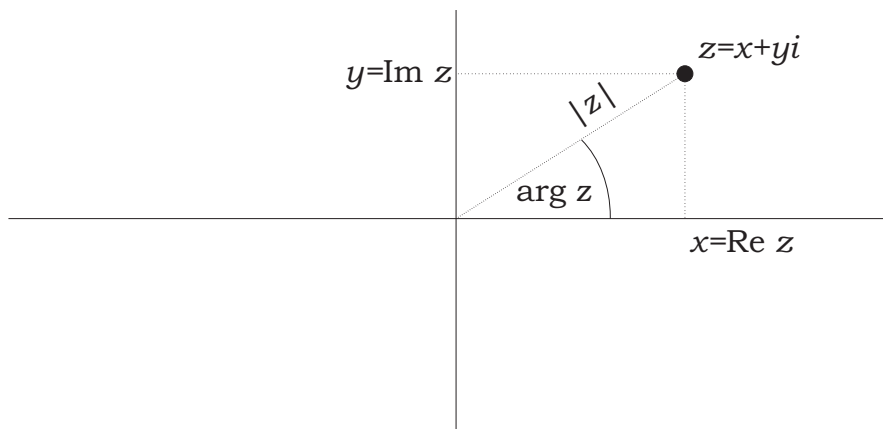
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\},$$

apod.

²⁷ Důležitá poznámka: znaménko $\pm$ je pevnou součástí značky, nejedná se o unární plus či mínus; tzn. psát ∞ místo $+\infty$ je chyba!

4.15. Množina komplexních čísel

Množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ je množina uspořádaných dvojic $\mathbb{R}^2$, na které je definováno sčítání a násobení.



Každé komplexní číslo z lze zapsat ve tvaru $z = x + yi$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ a i je komplexní jednotka, $i^2 = -1$. x nazýváme **reálnou částí** z , y **imaginární částí** z ; značíme $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. (Reálná čísla považujeme za speciální případ komplexních s nulovou imaginární částí, tj. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.)

Číslo $\bar{z} = x - yi$ nazýváme **komplexně združené** k z . Pro libovolná $z, w \in \mathbb{C}$ platí

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w, \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

Číslo $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazýváme **velikostí** komplexního čísla $z = x + yi$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Značíme ho $|z|$.

Platí pro ni **trojúhelníková nerovnost**, tj. pro každá dvě $z, w \in \mathbb{C}$ je

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Každé komplexní číslo z lze vyjádřit v tzv. goniometrickém tvaru:

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

kde $\alpha = \arg z$ je úhel komplexního čísla z , zvaný též **argument** z . Důležitou identitou platící pro každé komplexní číslo z je Moirova věta:

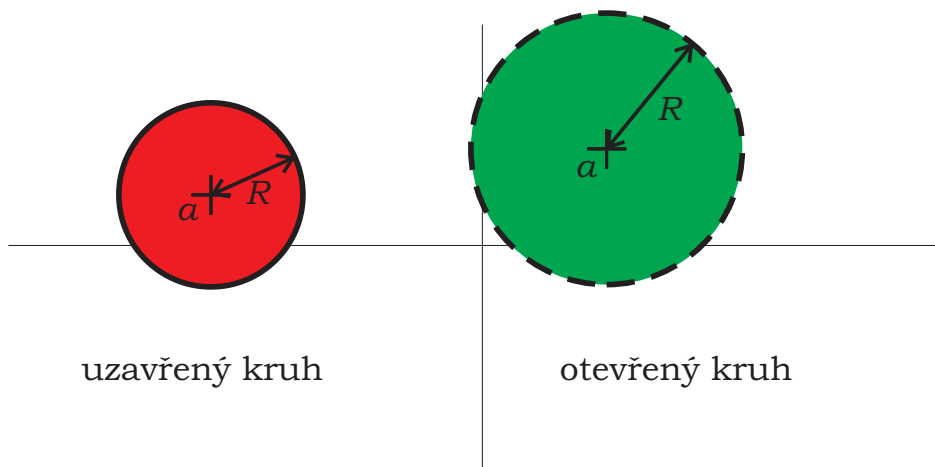
$$z^n = |z|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Bud' $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Geometrický význam absolutní hodnoty jakožto vzdálenosti dvou bodů je příčinou pojmenování množiny

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\} \quad \text{resp.} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq R\}$$

názvem **otevřený kruh** resp. **uzavřený kruh** se středem v bodě a a poloměrem R .

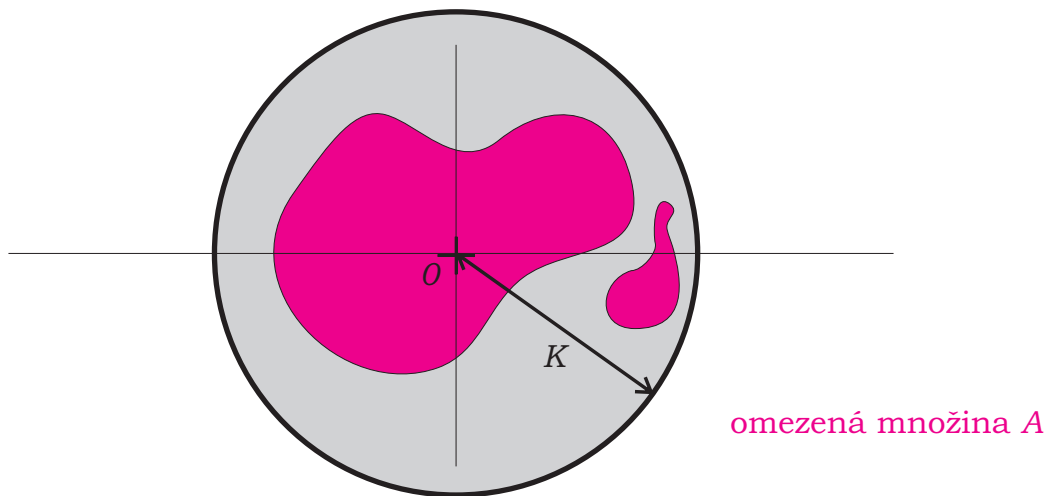
Čárkováním vyznačujeme, že body ke kruhu nepatří.



4.16. Omezené podmnožiny komplexních čísel

Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{C}$ je **omezená** právě tehdy, když
 $(\exists K > 0)(\forall z \in A)(|z| \leq K)$.

Vlastně to znamená, že se A „schová“ do uzavřeného kruhu se středem v počátku a poloměrem K .



4.17. Rozšíření množiny komplexních čísel

Podobně jako množinu reálných čísel rozšíříme $\mathbb{C}$ o jeden prvek označený ∞ (nazývaný **nekonečno**). Rozšířenou množinu značíme $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.²⁸

²⁸ Na rozdíl od $\pm\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ zde žádné znaménko není součástí značky. Je $\infty \neq \pm\infty$, tedy $\overline{\mathbb{R}} \not\subset \overline{\mathbb{C}}$.

Reálné funkce jedné reálné proměnné

Reálná funkce jedné reálné proměnné f je speciální případ zobrazení: $f: (\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Podobně, jako jsme definovali některé vlastnosti pro číselné posloupnosti, je lze definovat i pro funkce:

Funkci $f: (\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme

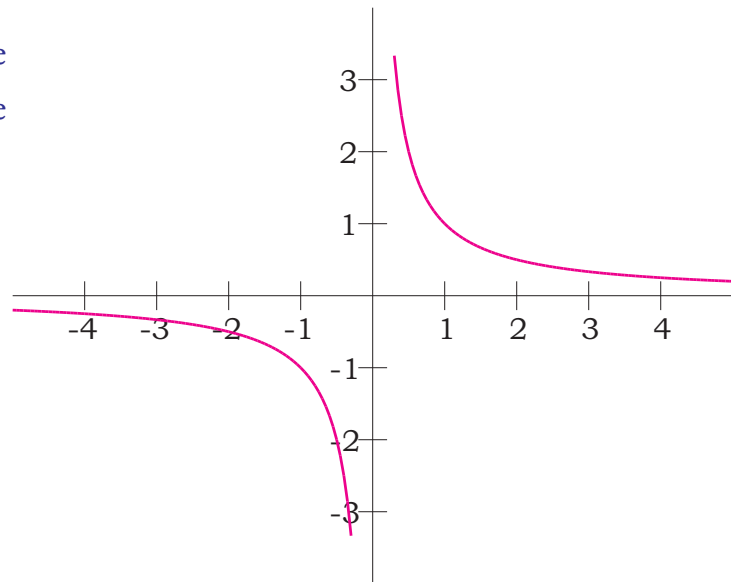
- **omezená shora**, pokud je její obor hodnot H_f množina omezená shora,
- **omezená zdola**, pokud je H_f množina omezená zdola,
- **omezená**, pokud je H_f množina omezená,
- **rostoucí**, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2)(f(x_1) \leq f(x_2))$,
- **klesající**, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2)(f(x_1) \geq f(x_2))$,
- **ostře rostoucí**, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2)(f(x_1) < f(x_2))$,
- **ostře klesající**, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2)(f(x_1) > f(x_2))$,
- **monotónní**, pokud je klesající nebo rostoucí,
- **ryze monotónní**, pokud je ostře klesající nebo ostře rostoucí.
- **sudá**, pokud $(\forall x \in D_f)(f(x) = f(-x))$,
- **lichá**, pokud $(\forall x \in D_f)(f(x) = -f(-x))$,
- **periodická s periodou $l > 0$** , pokud $(\forall x \in D_f)(f(x) = f(x \pm l))$.

Někdy potřebujeme popsat vlastnost funkce jen na části definičního oboru. Říkáme, že f má určitou vlastnost na množině M , pokud $M \subset D_f$ a zúžení $f|_M$ má tuto vlastnost.

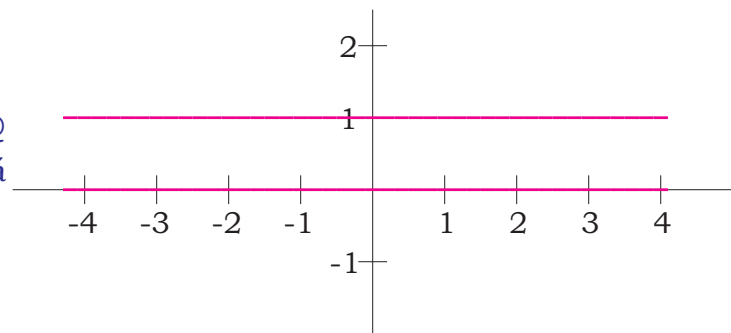
Pojmy **maximum**, **minimum funkce f** jsou definovány jako daný pojem aplikovaný na obor hodnot. Tj. $\max f = \max H_f$ atd.

Pojmy typu **maximum f na množině A** se definují pomocí zúžení, např. $\max_A f = \max f|_A$, atd.

Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ není podle naší definice ostře klesající na svém definičním oboru $\mathbb{R} - \{0\}$, protože např. $f(-1) < f(1)$.



Dirichletova funkce $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ má na první pohled „podivný“ graf. Je periodická a periodou je každé racionální číslo.



6.1. Limita funkce

Číslo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ nazveme **hromadným bodem** množiny $A \subset \mathbb{R}$, pokud v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů z množiny A . Body z A , které nepatří mezi hromadné body A , se nazývají **izolované**.

Alternativně lze říci, že a je hromadný bod množiny A , pokud existuje posloupnost (x_n) čísel z množiny $A - \{a\}$ mající za limitu bod a .

Množinu všech hromadných bodů množiny A budeme značit A' .

- Množina $\{1,2,3\}$ nemá žádný hromadný bod.
- Jakákoliv konečná množina nemá žádný hromadný bod.
- Množina $\mathbb{N}$ má jediný hromadný bod: $+\infty$. Tedy $\mathbb{N}' = \{+\infty\}$.
- Množina $\mathbb{Z}$ má dva hromadné body: $\pm\infty$. Tedy $\mathbb{Z}' = \{+\infty, -\infty\}$.
- Interval $(-1,2)$, $\langle -1,2 \rangle$ i $[-1,2]$ mají za hromadné body všechny prvky z $\langle -1,2 \rangle$.
- Množina $\mathbb{Q}$ má nespočetně mnoho hromadných bodů: tvoří celou množinu $\overline{\mathbb{R}}$.
- Také množina $\mathbb{R}$ má za hromadné body všechny prvky $\overline{\mathbb{R}}$.

Bud' a hromadným bodem definičního oboru funkce f , tj. $a \in D_f'$. Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu** $c \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \left(\forall x \in D_f \cap H_a(\delta) - \{a\} \right) \left(f(x) \in H_c(\varepsilon) \right).$$

Zapisujeme $\lim_a f = c$ nebo tradičněji $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.

Podobně jako u limity posloupnosti daná funkce může mít v daném bodě nejvýš jednu limitu. Podle toho, zda a a c jsou reálná čísla nebo nekonečna, lze definici přepsat různými ekvivalentními způsoby. Nejdůležitější případ je, pokud $a, c \in \mathbb{R}$. Pak

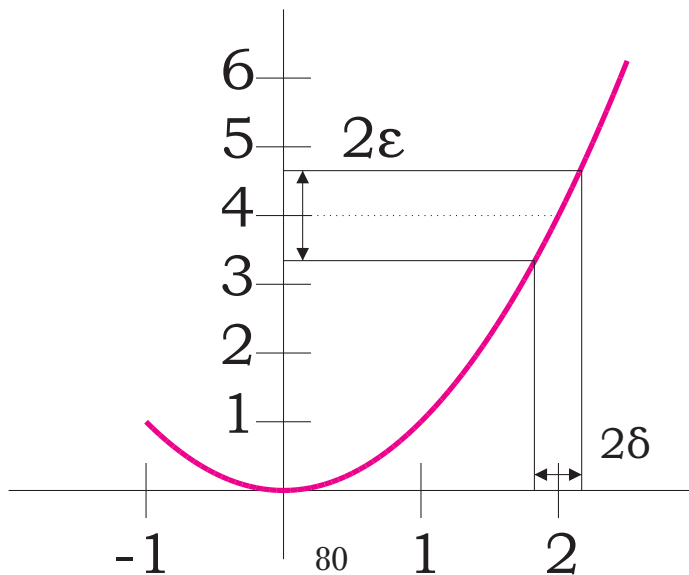
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta)(|f(x) - c| < \varepsilon).$$

Reálná posloupnost je speciální případ reálné funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$. Definice limity posloupnosti se shoduje s definicí výše, neboť $a = +\infty$ (jiné hromadné body definičního oboru posloupnosti nemá) a $H_{+\infty} = (K, +\infty)$.

Limita vůbec nezávisí na tom, zda funkce f je či není v bodě a definovaná, ani na hodnotě $f(a)$.

Přímo z definice limity funkce lze ukázat např., že

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$



Souvislost limity posloupnosti a limity funkce je patrná z tzv. Heineovy věty:

Nechť $a \in D_f$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = c \text{ pro každou posloupnost } (x_n), \text{ pro kterou platí}$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in D_f - \{a\}) \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

Přitom vlevo je limita funkce f v bodě a , vpravo pak limita posloupnosti $f(x_n)$.

Důležitý příklad. Podle Heineovy věty máme

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} e^x = e^\alpha \text{ pro všechna } \alpha \in \overline{\mathbb{R}},$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a \text{ pro všechna } a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty.$$

Další důležitý příklad. Podle Heineovy věty je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

neboť víme, že pro každou posloupnost (p_n) splňující $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$ platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$$

Podobně se dá odvodit, že

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Heineova věta jde užít i pro důkaz neexistence limity funkce.

Např.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$$

neexistuje, protože

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2n\pi) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu c vzhledem k množině A** , pokud zúžení $f|_A$ má v bodě a limitu c . Značíme $\lim_{a, A} f$ příp. $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$.

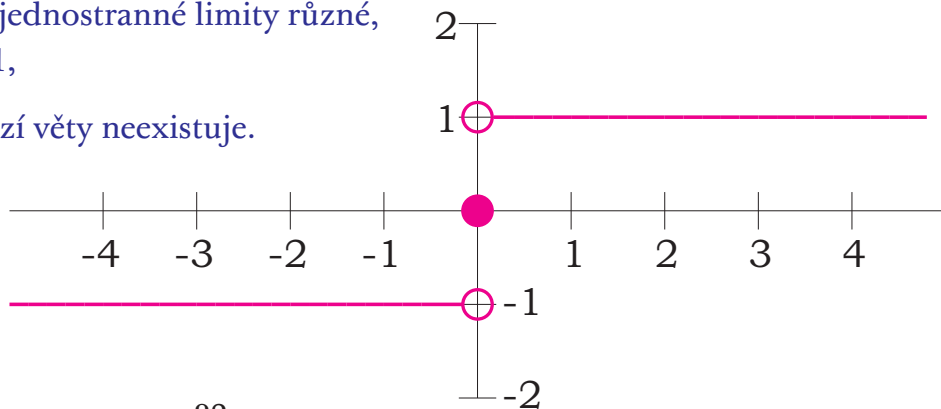
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zleva** resp. **zprava** rovnou c , pokud zúžení $f|_{(-\infty, a)}$ resp. $f|_{(a, +\infty)}$ má v bodě a limitu c . Značíme $\lim_{a-} f$ resp. $\lim_{a+} f$, případně $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ resp. $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$.

Platí věta: Buď a hromadným bodem $D_f \cap (-\infty, a)$ a $D_f \cap (a, +\infty)$. Pak funkce f má v bodě a limitu c právě tehdy, když limita f zleva i zprava v bodě a je rovna c .

Např. funkce $\operatorname{sgn} x$ má v bodě 0 jednostranné limity různé,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn} x = -1,$$

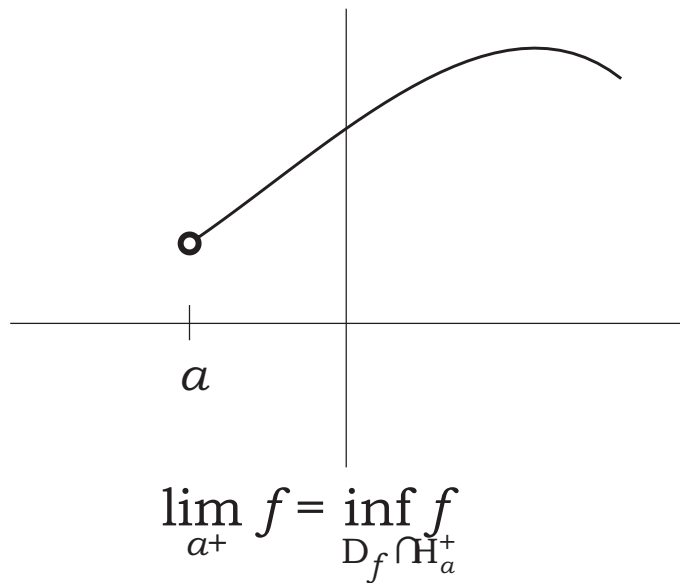
takže limita v bodě 0 podle předchozí věty neexistuje.



Podobně jako u posloupností monotonie opět zaručuje existenci limity:

Nechť existuje H_a^+ tak, že a je hromadným bodem $D_f \cap H_a^+$ a f je na $D_f \cap H_a^+$ monotónní. Pak existuje limita v bodě a zprava.

Přímo z definice limity pak plyne, že je-li např. f rostoucí na $D_f \cap H_a^+$, pak $\lim_{a+} f = \inf_{H_a^+} f$, je-li klesající, pak $\lim_{a+} f = \sup_{H_a^+} f$. Podobné tvrzení samozřejmě platí analogicky i pro $D_f \cap H_a^-$ a limitu zleva.



6.2. Výpočet limity funkce

Následují analogické věty jako u limit posloupností:

Nechť $a \in D'_{f \pm g}$ resp. D'_{fg} resp. D'_f . Pak platí vzorce

$$\lim_a (f \pm g) = \lim_a f \pm \lim_a g,$$

$$\lim_a (fg) = (\lim_a f)(\lim_a g),$$

pokud výrazy na pravé straně mají smysl (!).

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g},$$

K těmto vzorcům patří opět věta o limitě z odmocniny

Buď $k \in \mathbb{N}$, f nezáporná. Pak platí

$$\lim_a \sqrt[k]{f} = \sqrt[k]{\lim_a f},$$

pokud výraz na pravé straně má smysl.

a věta o limitě absolutní hodnoty:

Platí

$$\lim_a f = c \Rightarrow \lim_a |f| = |c|.$$

Pokud $c=0$, platí zde dokonce ekvivalence, tj. i směr $\Leftarrow$!

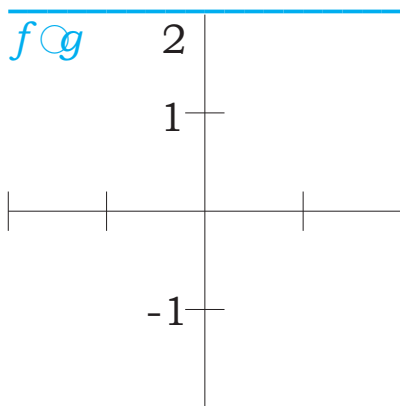
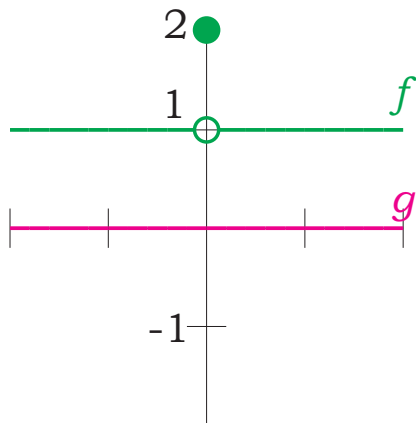
Nejmocnější nástroj na výpočet limity, který nemá analogii u posloupností, je ovšem věta o limitě složené funkce (umožňující činit „substituce“ při počítání limity):

Nechť $a \in D'_{f \circ g}$, nechť dále $\lim_a g = b$, $\lim_b f = c$ a konečně nechť platí podmínka

$$(\exists H_a)(\forall x \in H_a \cap D_g - \{a\})(g(x) \neq b) \quad \vee \quad f(b) = c \quad \vee \quad b \notin D_f. \quad (!)$$

Pak $\lim_a f \circ g = c$.

Ověřovat podmínku (!) je velmi důležité. Mějme např. $(\forall x \in \mathbb{R})(g(x) = 0)$ a $f(y) = 1$ pro $y \neq 0$, $f(0) = 2$. Pak $\lim_a f \circ g = 2$ (neboť $f \circ g$ je konstantní funkce rovna 2), ale přitom $\lim_a g = 0$ a $\lim_0 f = 1 \neq 2$.



Podmínka (!) je automaticky splněna tehdy, pokud je g na okolí H_a prostá. To je velmi častý případ.

Důležitý příklad. Víme, že $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Odtud dostaneme pomocí věty o limitě složené funkce,

že

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Podobně dostaneme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Odtud plyne závěr, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Důležitý příklad. Pomocí předchozího příkladu dostaneme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Důležitý příklad. Opět pomocí předchozího příkladu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Důležitý příklad. Bud' $a > 0$, $a \neq 1$. Jak jinak než pomocí předchozího příkladu dostaneme:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Důležitý příklad. Vypočtěme limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1).$$

Heineova věta říká, že stačí počítat limitu funkce $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$. Pomocí předpředchozího příkladu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1.$$

Následující věty platí podobně jako u limit posloupností:

Věty o **nerovnostech** mezi limitami:

Platí

$$\lim_a f < \lim_a g \Rightarrow (\exists H_a)(\forall x \in D_f \cap D_g \cap H_a - \{a\})(f(x) < g(x)).$$

Nechť existují $\lim_a f$ a $\lim_a g$, nechť existuje H_a tak, že $H_a \cap D_f - \{a\} = H_a \cap D_g - \{a\}$. Potom

$$(\forall x \in H_a \cap D_f - \{a\})(f(x) \leq g(x)) \Rightarrow \lim_a f \leq \lim_a g.$$

Věta o limitě sevřené funkce:

Nechť $\lim_a f = \lim_a g = c$. Nechť existuje H_a tak, že $H_a \cap D_f - \{a\} = H_a \cap D_g - \{a\} = H_a \cap D_h - \{a\}$. Pak platí

$$(\forall x \in H_a \cap D_f - \{a\})(f(x) \leq h(x) \leq g(x)) \Rightarrow \lim_a h = c.$$

6.4. Spojitost

Řekneme, že funkce f je **spojitá** v bodě a (či a je bodem spojitosti f), pokud platí
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f \cap H_a(\delta))(f(x) \in H_{f(a)}(\varepsilon))$.

Spojitá tedy může být funkce pouze v bodě svého definičního oboru.

Je zřejmé, že každý izolovaný bod D_f je bodem spojitosti f .

Nechť $a \in D_f \cap D'_f$. Pak f je spojitá v bodě a právě tehdy, když $\lim_{a} f = f(a)$.

Důsledkem je analogická věta jako u limit:

Nechť f a g jsou spojitě funkce v bodě a . Pak funkce $|f|, f \pm g, fg, \frac{f}{g}$ (pokud $g(a) \neq 0$) jsou spojitě v bodě a .

Z věty o limitě složené funkce pak plyne:

Nechť g je spojitá v bodě a , f v bodě $g(a)$. Pak $f \circ g$ je spojitá v bodě a .

Na cvičeních budeme soustavně používat následující silnou větu:

Elementární funkce jsou spojitě ve všech bodech svého definičního oboru.

Důkaz předchozího tvrzení je netriviální pouze u obecné mocniny (a logaritmu) a u goniometrických funkcí, viz předcházející stránky.

Jednostrannou spojitost zavádíme podobně jako u limit: f je v bodě a **vzhledem k množině A** , pokud $f|_A$ je spojitá v bodě a .

f je spojitá v bodě a **zprava**, pokud $f|_{(a, +\infty)}$ je spojitá v bodě a .

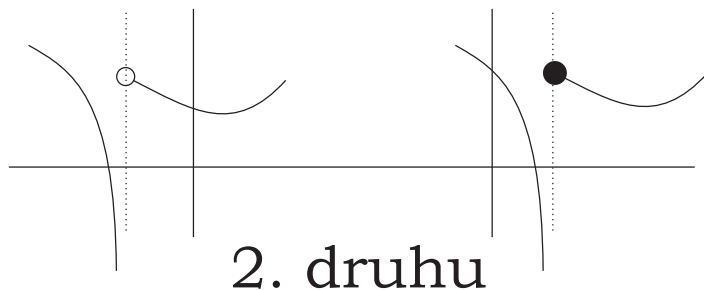
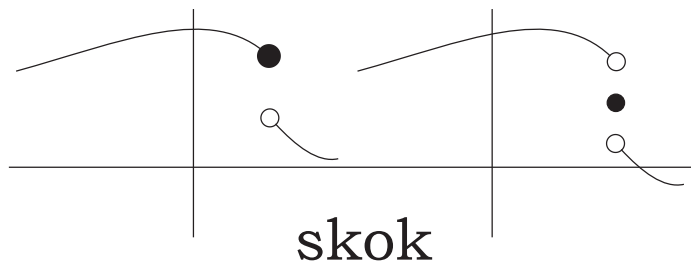
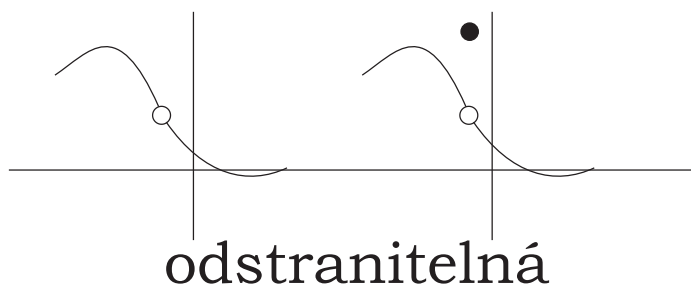
f je spojitá v bodě a **zleva**, pokud $f|_{(-\infty, a)}$ je spojitá v bodě a .

Bod $a \in D_f$, který není bodem spojitosti f , se nazývá **bodem nespojitosti** f . Rozeznáváme následující druhy bodu nespojitosti a funkce f :

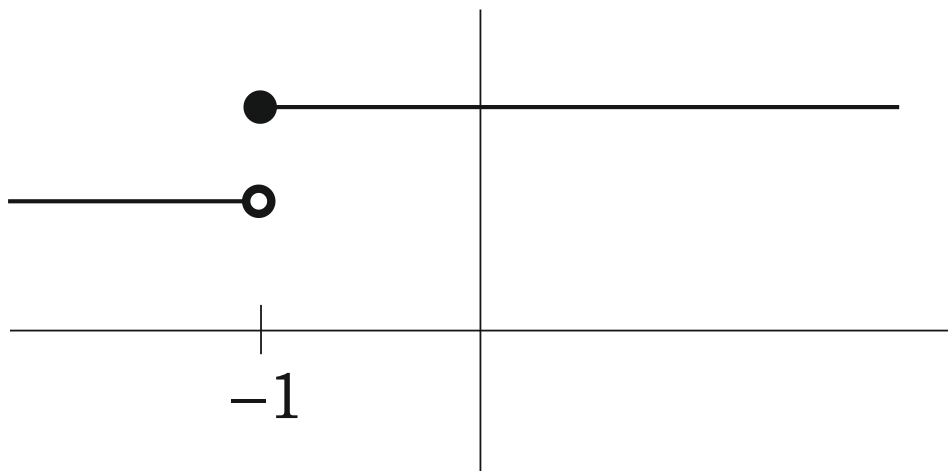
- **odstranitelnou**, která nastává, je-li $\lim_{a} f \in \mathbb{R}$, ale není rovna $f(a)$ nebo $a \notin D_f$,

- **skok**, když existují navzájem různé konečné $\lim_{a+} f$ a $\lim_{a-} f$,

- **druhého druhu**, když se nejedná ani o odstranitelnou nespojitost, ani o skok.



Řekneme, že funkce je **spojitá na množině M** , pokud zúžení $f|_M$ je spojitě v každém bodě M .
Tedy funkce spojitá na M nemusí být spojitá v každém bodě M :



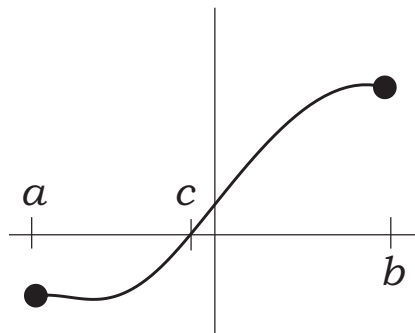
spojitá na $M = \langle -1, +\infty \rangle$, ale ne v každém bodě množiny M

Pro funkce spojité na intervalu platí důležitá tvrzení:

Bud' f spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $f(a)f(b) < 0$. Pak existuje $c \in \langle a, b \rangle$ tak, že $f(c) = 0$.

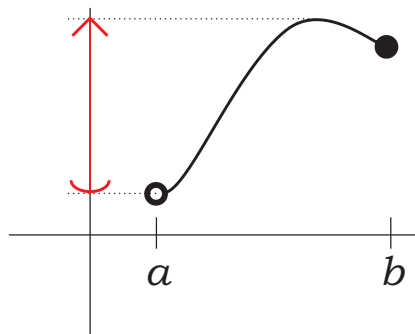
- Z věty ihned plyne, že f spojitá na $\langle a, b \rangle$ dokonce nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

- Je-li f nenulová a spojitá na intervalu $\mathcal{J}$, pak na tomto intervalu nemění znaménko, je tedy na tomto intervalu buď kladná nebo záporná.



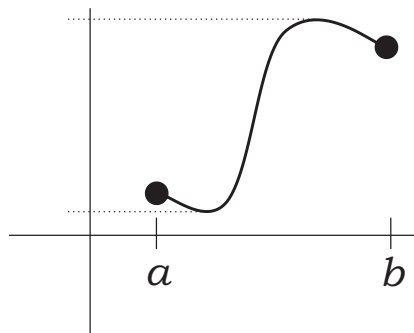
Nechť f je spojitá na intervalu $\mathcal{J}$. Pak obraz $f(\mathcal{J})$ je interval (nebo 1prvková množina).

- Spojitý obraz intervalu může být libovolného typu: uzavřený, polouzavřený, otevřený.



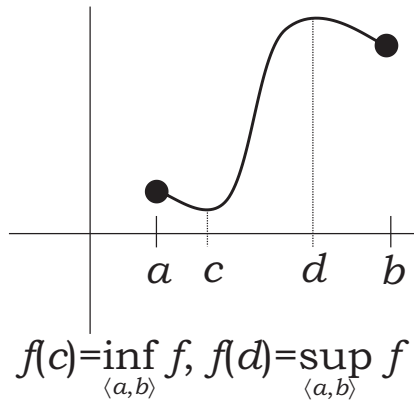
Nechť f je spojitá na $\langle a, b \rangle$. Pak f je na $\langle a, b \rangle$ omezená.

- Pro neuzavřený interval podobné tvrzení neplatí, např. $\operatorname{tg} x$ je spojitá na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ale není na něm omezená.



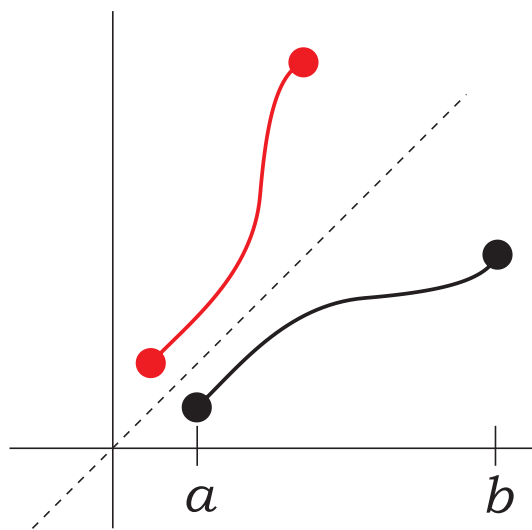
Nechť f je spojitá na $\langle a, b \rangle$. Pak f nabývá na $\langle a, b \rangle$ hodnot $\sup_{\langle a, b \rangle} f$ a $\inf_{\langle a, b \rangle} f$.

- Hodnoty suprema a infima jsou tedy maximum a minimum f na $\langle a, b \rangle$.
- V případě, že f není konstantní, je obrazem uzavřeného intervalu uzavřený interval.
- Pro neuzavřený interval podobné tvrzení opět neplatí.



Bud' f na intervalu $\mathcal{J}$ spojitá a prostá. Pak je na něm
ryze monotónní a $f|_{\mathcal{J}}^{-1}$ je spojitá a ryze monotónní
na $f(\mathcal{J})$.

- Druh monotonie se zachovává.



6.6. Derivace

Limitu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazýváme **derivace** funkce f v bodě a . Označujeme ji $f'(a)$.

Derivaci funkce f má tedy smysl zjišťovat pouze v bodech $a \in D_f \cap D'_f$. Pokud tato podmínka není splněna, říkáme, že derivace f v bodě a nemá smysl.

Pomocí věty o limitě složené funkce získáme ekvivalentní definici:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Pro derivaci zprava/zleva používáme značky $f'_+(a)$ resp. $f'_-(a)$.

Pokud je $f'(a) \in \mathbb{R}$ (tj. konečná), říkáme, že f má **vlastní** derivaci v bodě a neboli f je v bodě a **diferencovatelná**.

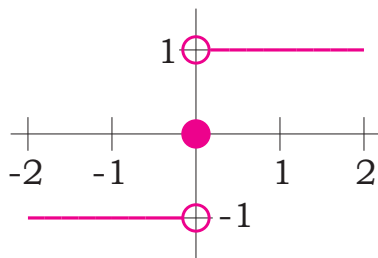
Pokud je $f'(a) = \pm\infty$, mluvíme o **nevlastní** derivaci.

Např.

$$(e^x)' = e^x.$$

Např.

$$(\operatorname{sgn} x)' = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0, \\ +\infty & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$



Platí následující věta:

Funkce diferencovatelná v bodě a je v tomto bodě spojitá.

Opačně věta neplatí, např. $|x|$ je spojitá v bodě 0, ale není v něm diferencovatelná.

6.7. Výpočet derivace

Pro výpočet derivací máme tři velmi důležitá tvrzení, které z derivování elementárních funkcí činí mechanickou záležitostí:

Aritmetika derivací. Necht' f, g jsou diferencovatelné v bodě a a necht' $a \in D_{f \pm g} \cap D'_{f \pm g}$ resp. $D_{fg} \cap D'_{fg}$ resp. $D_{\frac{f}{g}} \cap D'_{\frac{f}{g}}$. Pak platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta o derivaci složené funkce. Necht' g je diferencovatelná v bodě a , f v bodě $g(a)$. Pak $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Věta o derivaci inverzní funkce. Necht' f je spojitá a prostá v otevřeném intervalu $\mathcal{J}$, $x_0 \in \mathcal{J}$, $f'(x_0) \neq 0$. Pak platí

$$f/\mathcal{J}^{-1}'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Vypočtěme např. $(\operatorname{arctg} x)'$ pro $x \in \mathbb{R}$. Předpoklady věty o derivaci inverzní funkce jsou splněny; podle vzorce $f/\bar{f}^{-1'}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$ dostaneme

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Užitečná tabulka derivací:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}, x > 0,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \text{ pro } a > 0, x \in \mathbb{R},$$

$$(\sin x)' = \cos x \text{ pro } x \in \mathbb{R},$$

$$(\cos x)' = -\sin x \text{ pro } x \in \mathbb{R},$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pro } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ pro } x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pro } x \in (-1, 1),$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pro } x \in (-1, 1),$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ pro } x \in \mathbb{R},$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \text{ pro } x \in \mathbb{R},$$

$$(e^x)' = e^x \text{ pro } x \in \mathbb{R},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ pro } x > 0,$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \text{ pro } x \in \mathbb{R},$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \text{ pro } x \in \mathbb{R},$$

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \text{ pro } x \in \mathbb{R},$$

$$(\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \text{ pro } x \in \mathbb{R} - \{0\},$$

$$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ pro } x \in \mathbb{R},$$

$$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ pro } x > 1,$$

$$(\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \text{ pro } x \in (-1, 1),$$

$$(\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \text{ pro } x \in \mathbb{R} - \langle -1, 1 \rangle.$$

6.8. Derivace vyšších řádů

Symbolem f' označíme funkci s definičním oborem $\{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) \in \mathbb{R}\}$ definovanou předpisem

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

(kde vlevo stojí hodnota funkce f' v bodě x a vpravo limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$). Nazýváme jí **první derivace** f .

Lze opět zkoumat, kde je f' je diferencovatelná, a v těchto bodech analogicky definovat **druhou**, **třetí** atd. derivaci f . Užíváme značení f'' , f''' nebo $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ atd. Často klademe též $f^{(0)} = f$.

Pro m -tou derivaci n -té derivace platí zřejmý vztah $(f^{(m)})^{(n)} = f^{(n+m)}$.

Pro n -tou derivaci součinu lze indukcí z pravidla pro derivaci součinu odvodit tzv. Leibnizův vzorec:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

6.9. Věty o přírůstku funkce

Věty o přírůstku funkce umožňují aproximovat hodnotu přírůstku (poklesu) funkce na malém okolí daného bodu pomocí hodnoty první derivace v tomto bodě.

První z nich je věta **Rolleova**, která říká, že je-li funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b)$ a existuje derivace f' v každém bodě (a, b) , pak existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Nejdůležitější je její bezprostřední důsledek, věta Lagrangeova:

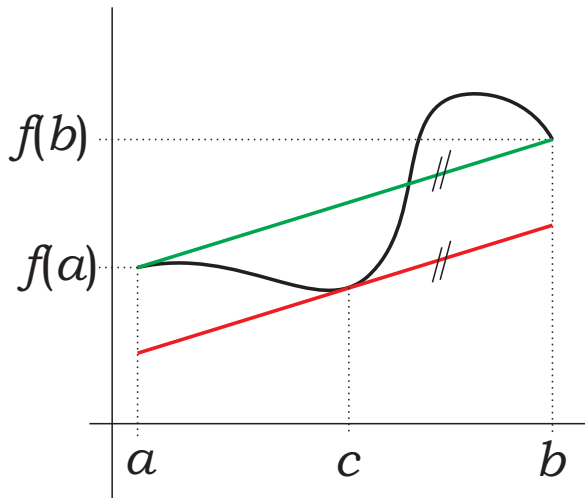
Lagrangeova věta (o přírůstku funkce). Nechť f je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a v každém bodě (a, b) má derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Aneb jede-li auto z bodu a do bodu b průměrnou rychlostí 80 km/h, jistě existuje na trase aspoň jeden bod c , ve kterém má okamžitou rychlost 80 km/h.

Nebo jinak: pro spojitou funkci na $\langle a, b \rangle$ mající derivaci v každém bodě (a, b) existuje v intervalu (a, b) alespoň jeden bod c , ve kterém je tečna ke grafu rovnoběžná se spojnicí bodů $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.

Lagrangeova věta jde zobecnit:

Cauchyova věta (zobecněná věta o přírůstku funkce). Nechť f, g jsou spojitě na $\langle a, b \rangle$ a v každém bodě (a, b) mají derivaci; nechť derivace g je na (a, b) konečná nenulová. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.



6.10. Darbouxova věta o spojitosti derivace

Občas se stane, že na výpočet derivace nelze použít větu o derivaci složené či inverzní funkce, neboť jejich předpoklady nejsou splněny (typicky na krajích intervalů definičních oborů). Někdy se lze s úspěchem vyhnout počítání derivace z definice pomocí následující věty:

Darbouxova věta. Necht' f je spojitá v bodě a zprava a f je diferencovatelná na nějakém H_a^+ . Pak platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x),$$

pokud limita vpravo existuje.

Analogicky platí věta pro derivaci zleva.

Počítejme $f'_+(-1)$, kde $f(x) = \arcsin x$. Větu o derivaci inverzní funkce nelze použít, protože $-\frac{\pi}{2}$ leží na kraji intervalu příslušného zúžení funkce $\sin$.

Pomocí Darbouxovy věty máme snadno, že

$$f'_+(-1) = +\infty.$$

6.11. Lokální extrémy

Řekneme, že funkce má v bodě a

- **lokální maximum**, pokud $(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in H_a(\varepsilon))(f(x) \leq f(a))$,
- **lokální minimum**, pokud $(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in H_a(\varepsilon))(f(x) \geq f(a))$,
- **ostré lokální maximum**, pokud $(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in H_a(\varepsilon) - \{a\})(f(x) < f(a))$,
- **ostré lokální minimum**, pokud $(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in H_a(\varepsilon) - \{a\})(f(x) > f(a))$.

V předchozích případech též říkáme, že funkce má v bodě a **lokální extrém**.

Základní pomůckou, jak zjistit, zda funkce má v bodě lokální extrém, je tato věta:

Nechť f má v bodě a lokální extrém. Pak $f'(a) = 0$ nebo $f'(a)$ neexistuje.

Věta tedy specifikuje nutnou, nikoliv postačující podmínku pro lokální extrém.

Přímo z definice extrému plyne jako postačující podmínka tato věta:

Nechť funkce f je spojitá v bodě a a

$\exists H_a^\pm$ tak, že f je (ostře) $\begin{pmatrix} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \end{pmatrix}$ v H_a^- $\wedge$ f je (ostře) $\begin{pmatrix} \text{klesající} \\ \text{rostoucí} \end{pmatrix}$ v H_a^+ .

Pak f má v bodě a (ostré) lokální $\begin{pmatrix} \text{maximum} \\ \text{minimum} \end{pmatrix}$.

Někdy lze pro zjištění druhu extrému použít tuto větu:

Nechť existuje H_a tak, že f je na H_a diferencovatelná. Nechť $f'(a) = 0$ a $f''(a) \begin{pmatrix} > \\ < \end{pmatrix} 0$. Pak f má v bodě a ostré lokální $\begin{pmatrix} \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{pmatrix}$.

6.12. Monotonie

Věty o přírůstku funkce umožňují formulaci podmínek pro monotonii funkce na intervalu.

Pro interval $I = \langle a, b \rangle$ či $\langle a, b \rangle$ či (a, b) či (a, b) označme $I^0 = (a, b)$ (tj. interval I „okleštěný“ o krajní body).

Platí následující věta, která udává postačující (a v neostrých případech i nutnou) podmínku pro monotonii funkce na intervalu I :

Nechť f je spojitá na intervalu I , nechť f má derivaci v každém bodě I^0 . Pak:

$(\forall x \in I^0)(f'(x) \geq 0) \Leftrightarrow f$ je na I rostoucí,

$(\forall x \in I^0)(f'(x) \leq 0) \Leftrightarrow f$ je na I klesající,

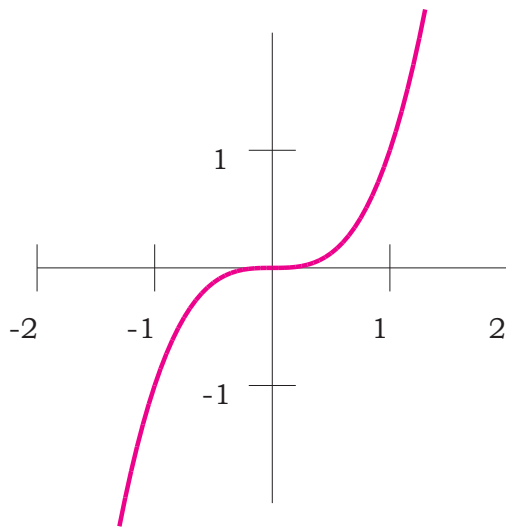
$(\forall x \in I^0)(f'(x) = 0) \Leftrightarrow f$ je na I konstantní,

$(\forall x \in I^0)(f'(x) > 0) \Rightarrow f$ je na I ostře rostoucí,

$(\forall x \in I^0)(f'(x) < 0) \Rightarrow f$ je na I ostře klesající.

U ryzí monotonie (poslední dva případy) implikaci nelze obrátit. Např. funkce $f(x) = x^3$ je ostře rostoucí na celém $\mathbb{R}$, ale v bodě 0 není její derivace kladná:

$$f'(0) = 3x^2 \Big|_{x=0} = 0.$$



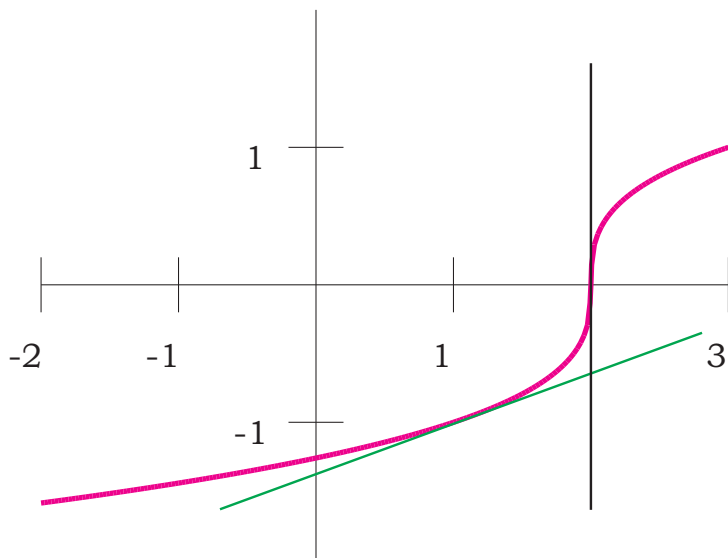
6.13. Tečny

Řekneme, že f má v bodě a **tečnu**

- o rovnici $x=a$, je-li f spojitá v bodě a a $f'(a) = +\infty$ nebo $-\infty$,
- o rovnici $y=f(a)+f'(a)(x-a)$, je-li f diferencovatelná v bodě a .

Bodu $(a, f(a))$ říkáme **bod dotyku**.

Např. funkce $\sqrt[3]{x-2}$ má v bodě 2 tečnu o rovnici $x=2$ a v bodě 1 tečnu o rovnici $y = -1 + \frac{1}{3}(x-1)$.

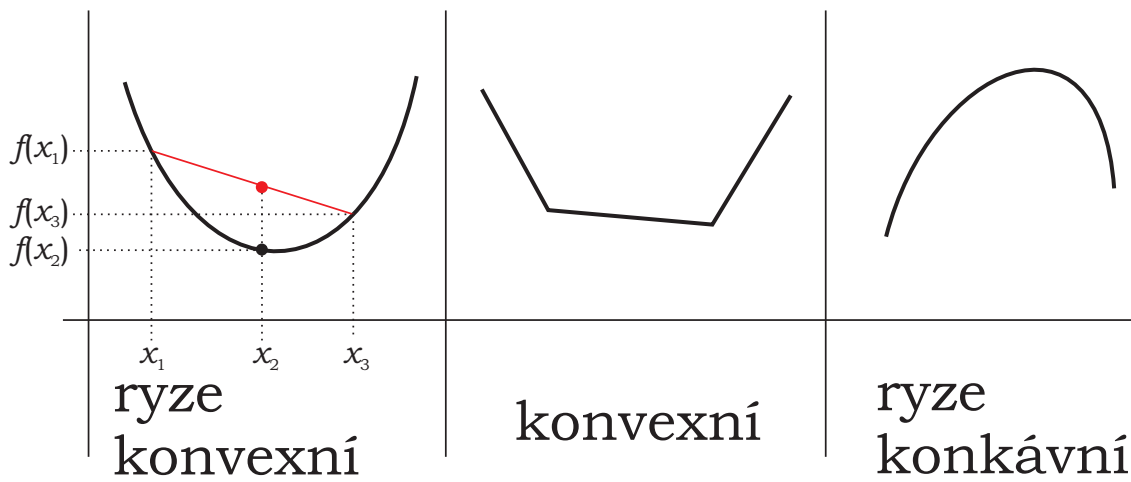


6.14. Konvexnost a konkávnost

Řekneme, že funkce f je na intervalu $\mathcal{J}$ (**ostře či ryze**) $\begin{matrix} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \end{matrix}$, pokud

$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{J}, x_1 < x_2 < x_3) \left(f(x_2) \begin{matrix} \leq (<) \\ \geq (>) \end{matrix} \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x_2 - x_1) + f(x_1) \right).$$

Definice říká, že bod $(x_2, f(x_2))$ musí ležet pod/nad úsečkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$ (nebo na ní v případě neostře nerovnosti).



Postačující podmínku pro konvexnost/konkávnost funkce na intervalu dává následující věta:

Nechť f je spojitá na intervalu I , nechť f je diferencovatelná na I^0 . Pak:

Je-li f (ostře) $\begin{matrix} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \end{matrix}$ na I^0 , je f (ryze) $\begin{matrix} \text{konvexní} \\ \text{konkávni} \end{matrix}$ na I .

Tato věta má v praxi používanější důsledek:

Nechť f je spojitá na intervalu I . Pak:

$(\forall x \in I^0) \left(f'(x) \begin{matrix} \geq (>) \\ \leq (<) \end{matrix} 0 \right) \Rightarrow f \text{ je na } I \text{ (ryze) } \begin{matrix} \text{konvexní} \\ \text{konkávni} \end{matrix}.$

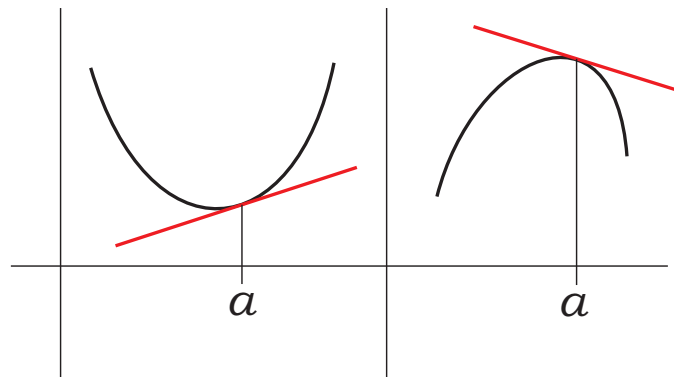
Souvislost konvexity/konkávity funkce a tečny: platí, že je-li funkce f na I ryze konvexní a diferencovatelná v bodě $a \in I$, pak

$$(\forall x \in I - \{a\}) (f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)).$$

Má-li funkce f na otevřeném intervalu I druhou derivaci, pak platí, že f je ryze konvexní na I právě tehdy, když v každém bodě $a \in I$ platí podmínka

$$(\exists H_a)(\forall x \in H_a - \{a\}) (f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)).$$

Obdobně tvrzení platí samozřejmě i pro funkce ryze konkávni.



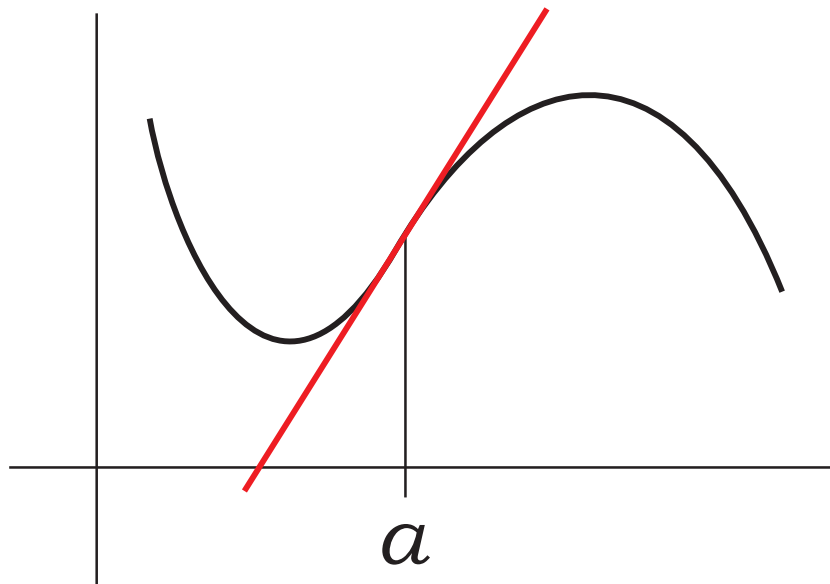
Říkáme, že funkce f má v bodě a tzv. **inflexi** (inflexní bod) $\Leftrightarrow$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(\exists H_a)(\forall x \in H_a) \left(\left(x < a \Rightarrow f(x) \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} f(a) + f'(a)(x-a) \right) \wedge \left(x > a \Rightarrow f(x) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} f(a) + f'(a)(x-a) \right) \right).$$

Pro nalezení inflexních bodů mohou být užitečné následující věty:

Nechť f má inflexi v bodě a . Nechť na nějakém okolí H_a je f diferencovatelná. Pak $f''(a) = 0$ nebo $f''(a)$ neexistuje.

Nechť existuje $\varepsilon > 0$ tak, že f'' je konečná na $H_a(\varepsilon)$. Nechť $f''(a) = 0$ a $f'''(a) \neq 0$. Pak f má v bodě a inflexní bod.



6.15. Asymptoty

Přímku o rovnici $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, nazveme **asymptotou** funkce f v bodě $+\infty$ (resp. $-\infty$), pokud

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (\text{resp. } -\infty)}} (f(x) - (kx + q)) = 0.$$

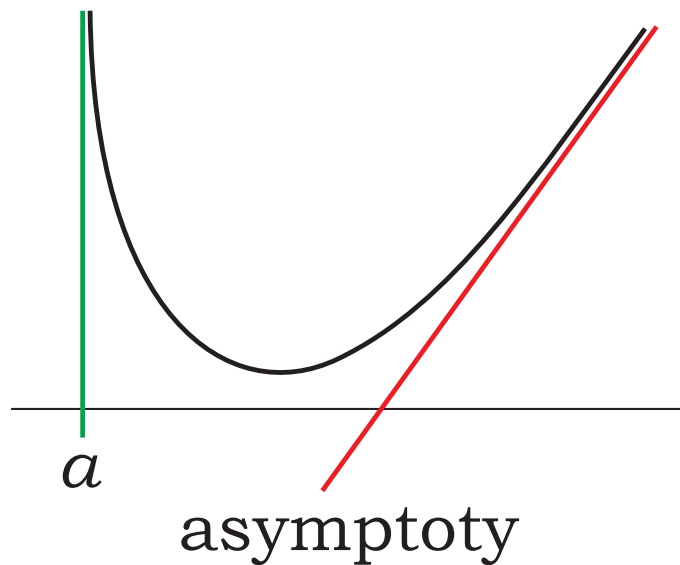
Buď $a \in \mathbb{R}$. Přímku o rovnici $x = a$ nazveme **vislou asymptotou** funkce f v bodě a , pokud existuje alespoň jedna z limit $\lim_{a+} f$ či $\lim_{a-} f$ a je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$.

Na hledání asymptot funkcí je užitečná tato věta:

f má v bodě $+\infty$ asymptotu o rovnici $y = kx + q$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}.$$

(Podobně věta platí i pro bod $-\infty$.)



6.16. Vyšetřování funkcí

Vyšetřování funkcí je proces, kdy se (zpravidla pomocí diferenciálního počtu) snažíme o funkci dozvědět co nejvíce informací, abychom mohli načrtnout věrně její graf. Jde zejména o

- definiční obor, obor hodnot,
- průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty,
- případnou sudost, lichost, periodicitu,
- spojitost, druhy bodů nespojitosti,
- existenci asymptot,
- monotonii funkce, lokální extrémy,
- konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body.

Zdaleka ne vždy jsme schopni zjistit všechny vyjmenované skutečnosti.

1. MOCNINNÉ ŘADY, VLASTNOSTI SOUČTU MOCNINNÉ ŘADY, TAYLORŮV POLYNOM, TAYLOROVA ŘADA, ROZVOJE ZÁKLADNÍCH FUNKCÍ DO TAYLOROVY ŘADY

Definice 1.1. Bud' $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině $A \subset \mathbb{C}$. Nechť dále pro každé $z \in A$ číselná posloupnost $\{f_n(z)\}_1^\infty$ konverguje. Potom funkci f definovanou na množině A předpisem $z \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ nazýváme **limitní funkcí posloupnosti** $\{f_n\}_1^\infty$ (též **bodovou limitou posloupnosti**).

Definice 1.2. Bud' f funkce a $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost funkcí definovaných na množině A . Řekneme, že posloupnost $\{f_n(z)\}_1^\infty$ **konverguje k** $f(z)$ **stejněoměrně na množině** A , jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ a všechna $z \in A$ platí $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Značíme $f_n(z) \xrightarrow{A} f(z)$.

Věta 1.3 (supremové kritérium). Posloupnost $\{f_n(z)\}_1^\infty$ na množině A konverguje stejněoměrně ke své limitní funkci $f(z)$ právě tehdy, když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \right) = 0.$$

Definice 1.4. Bud' $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině $A \subset \mathbb{C}$, $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$ pro všechna $z \in A$ a všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Pak uspořádanou dvojici $(\{f_n\}_0^\infty, \{F_n\}_0^\infty)$ nazveme **funkční řadou** a značíme $\sum_0^\infty f_n$.

Pokud funkční posloupnost $\{F_n\}_0^\infty$ má na množině A limitní funkci F , nazveme ji **součtovou funkcí** řady $\sum_0^\infty f_n$ a píšeme $\sum_0^\infty f_n = F$.

Definice 1.5. Řekneme, že řada $\sum_0^\infty f_n(z) = (\{f_n(z)\}_0^\infty, \{F_n(z)\}_0^\infty)$ stejněoměrně konverguje na množině A , jestliže na množině A stejněoměrně konverguje posloupnost $\{F_n(z)\}_0^\infty$.

Věta 1.6 (Bolzano, Cauchy). Řada $\sum_0^\infty f_n(z)$ konverguje stejněoměrně na množině A právě tehdy, jestliže pro všechna kladná čísla ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$, pro všechna přirozená čísla p a všechna $z \in A$ platí:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Poznámka. Odsud plyne nutná podmínka pro stejněoměrnou konvergenci řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \xrightarrow{A} \implies f_n(z) \xrightarrow{A} 0.$$

Věta 1.7 (Weierstrassovo kritérium). Bud' $\{f_n\}_0^\infty$ a $\{g_n\}_0^\infty$ dvě posloupnosti funkcí definovaných na množině A . Nechť dále pro všechna $z \in A$ a všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí: $|f_n(z)| \leq g_n(z)$. Potom, konverguje-li řada $\sum_0^\infty g_n(z)$ stejněoměrně na množině A , konverguje stejněoměrně na množině A také řada $\sum_0^\infty f_n(z)$.

Věta 1.8. Bud' $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině A , $\{g_n\}_0^\infty$ monotonní posloupnost reálných funkcí definovaných na A . Označme $F_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Nechť dále je splněno některé z následujících kritérií:

(i) (Dirichlet) $\{F_n\}_0^\infty$ stejně omezená na A a $g_n(z) \xrightarrow{A} 0$.

(ii) (Abel) $F_n(z) \xrightarrow{A}$ a $\{g_n\}_0^\infty$ stejně omezená na A .

Potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)g_n(z)$ konverguje stejněoměrně na množině A .

Věta 1.9. (Abel) Bud' $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ mocninná řada s kladným poloměrem konvergence R . Potom řada $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ konverguje stejněoměrně na každém kruhu $B(z_0, r)$, kde $r < R$.

Věta 1.10. (1. věta Abelova) Nechť má reálná mocninná řada $\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$ kladný poloměr konvergence R . Potom, konverguje-li řada $\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$ v bodě x_0+R resp. x_0-R , pak konverguje stejněoměrně na intervalu $[x_0, x_0+R]$ resp. $[x_0-R, x_0]$.

1. Vyslovte definici mocninné řady a jejích charakteristik. 2. Jak lze vypočítat poloměr konvergence? 3. Jak se při znalosti poloměru konvergence určí celý obor? 4. Čemu říkáme nutná podmínka stejnoměrné konvergence? 5. Jaký obecný poznatek víme o stejnoměrné konvergenci mocninných řad? 6. Jak lze teorii mocninných řad napojit na teorii taylorovských rozvojų? 7. Co je analytická funkce? 8. Jak se určují Taylorovy koeficienty funkce $g(x)$? (myslí se $a_n = g^{(n)}(c)/n!$) 9. Sestavte Maclaurinovu řadu funkce $\exp(-2x)$.

1. DERIVACE V $\mathbb{R}^n$, PARCIÁLNÍ DERIVACE, GRADIENT, VĚTY O PŘÍRŮSTKU FUNKCE, EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH, VÁZANÉ EXTRÉMY

Definice 1.1 (Parciální derivace funkce). Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na jistém okolí bodu $\vec{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{E}^r$. Potom parciální derivace funkce $f(\vec{x})$ podle proměnné x_k ($k \in \widehat{r}$) v bodě $\vec{a}$ (pokud existuje a je vlastní)

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \dots, a_r) - f(\vec{a})}{h}$$

Definice 1.2 ((Totální) derivace). Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na jistém okolí bodu $\vec{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{E}^r$. Nechť pro všechna $k \in \widehat{r}$ existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$. (Totální) derivací funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ rozumíme vektor

$$\frac{Df}{D\vec{x}}(\vec{a}) = \frac{Df}{D(x_1, \dots, x_r)}(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r}(\vec{a}) \right)$$

Věta 1.3 (Vlastnosti parciálních derivací). Nechť funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na jistém okolí $H_{\vec{a}}$ bodu $\vec{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{E}^r$. Nechť $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$ mají parciální derivace podle proměnné x_k a necht $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha f + g)}{\partial x_k}(\vec{a}) &= \alpha \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{a}) \\ \frac{\partial(fg)}{\partial x_k}(\vec{a}) &= \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})g(\vec{a}) + f(\vec{a})\frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{a}) \\ \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_k}(\vec{a}) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})g(\vec{a}) - f(\vec{a})\frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{a})}{g^2(\vec{a})}, \text{ pokud } g(\vec{a}) \neq 0 \end{aligned}$$

Definice 1.4 (k-tá parciální derivace). Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na jistém okolí bodu $\vec{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{E}^r$ a $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pak k-tou parciální derivací funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ podle proměnných $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ rozumíme následující hodnotu (je-li definována)

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \right)(\vec{a}),$$

kde je na symbol $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}}$ nahlíženo jako na funkci proměnné $\vec{x}$.

Věta 1.5 (o záměně smíšených parciálních derivací). Nechť pro $i, j \in \widehat{r}$ existují na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbb{E}^r$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť je parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ spojitá v bodě $\vec{a}$. Potom existuje také $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ v bodě $\vec{a}$ a navíc platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a})$$

Definice 1.6 (parciální derivace ve směru). Nechť $\vec{s}$ je nenulový vektor z vektorového prostoru $\mathbb{E}^r$. Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na jistém okolí bodu $\vec{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{E}^r$. Pak parciální derivace funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ ve směru $\vec{s}$ rozumíme limitu (pokud existuje a je vlastní)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) = \frac{1}{\|\vec{s}\|} \lim_{\|\vec{s}\| \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{s}) - f(\vec{a})}{h}$$

Definice 1.7 (gradient). Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$, pro kterou v oblasti $G \subset \mathbb{E}^r$ existují všechny níže zmíněné parciální derivace. Potom gradientem funkce $f(\vec{x})$ na množině G rozumíme funkční vektor

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r}(\vec{x}) \right)$$

Věta 1.8 (o přírůstku). Necht funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ má na otevřeném intervalu $I = \times_{k=1}^r (\alpha_k, \beta_k)$ totální derivaci. Potom pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in I$ existují body $\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_r \in I$ tak, že platí

$$f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i)(x_i - y_i)$$

Věta 1.9 (totální derivace a spojitost). Necht je pro funkci $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ splněn alespoň jeden z předpokladů:

- (1) $f(\vec{x})$ má na jistém okolí $H_{\vec{a}}$ bodu $\vec{a}$ totální derivaci, která je na $H_{\vec{a}}$ omezená
- (2) $f(\vec{x})$ má na jistém okolí $H_{\vec{a}}$ spojitou totální derivaci

Pak $f(\vec{x})$ je v bodě $\vec{a}$ spojitá.

Definice 1.10 (totální diferenciál). Necht funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ je definována na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbb{E}^r$. Totálním diferenciálem funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ nazýváme lineární funkci $df_{\vec{a}}(\vec{h})$ tvaru

$$df_{\vec{a}}(\vec{h}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i,$$

kde $\vec{h} = (h_1, \dots, h_r) \in H_{\vec{0}} \subset \mathbb{E}^r$ a $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($i \in \widehat{r}$), pro niž platí

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i + \eta(\vec{h}),$$

přičemž

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\eta(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

Jestliže taková funkce s vlastnostmi uvedenými výše existuje, říkáme, že funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál nebo že je v bodě $\vec{a}$ diferencovatelná. Nezávislou proměnnou h_k ($k \in \widehat{r}$) vystupující ve funkci $df_{\vec{a}}(\vec{h})$ budeme nazývat k -tou diferencí.

Věta 1.11 (koeficienty totálního diferenciálu). Necht funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $\vec{a} \in \mathbb{E}^r$ totální diferenciál $\sum_{k=1}^r \alpha_k h_k$. Pak pro koeficienty α_k totálního diferenciálu platí

$$\alpha_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) \quad (k \in \widehat{r})$$

Věta 1.12 (totální diferenciál a spojitost). Necht má funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbb{E}^r$ totální diferenciál. Pak je v bodě $\vec{a}$ spojitá a má v něm derivaci.

Věta 1.13 (spojitá derivace a totální diferenciál). Necht funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ má na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbb{E}^r$ derivaci, která je spojitá. Pak má v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál.

Definice 1.14 ((ostré) lokální minimum). Necht je funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ definována na množině $M \subset \mathbb{E}^r$ a necht $\vec{a} \in \text{der}(M)$ ($\text{der}(M)$ je derivace množiny M , tj. množina všech hromadných bodů M). Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ lokální minimum, resp. ostré lokální minimum na množině M , jestliže existuje redukované okolí $H_{\vec{a}}^*$ (tj. $H_{\vec{a}} \setminus \{\vec{a}\}$) tak, že pro každé $\vec{x} \in H_{\vec{a}}^* \cap M$ platí $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$, resp. $f(\vec{x}) > f(\vec{a})$. Analogicky pro maximum. Je-li množina M definiční obor funkce $\text{dom}(f)$, hovoříme o (ostrých) lokálních minimech či maximech.

Věta 1.15 (lokální extrém na podmnožině). Má-li funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $\vec{a} \in M \subset \mathbb{E}^r$ lokální extrém na množině M , pak má odpovídající extrém v bodě $\vec{a}$ i na libovolné podmnožině N množiny M , pro niž $\vec{a} \in \text{der}(N)$.

Věta 1.16 (nutná podmínka pro lokální extrém). Necht je funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ definována na množině M a necht $\vec{a} \in M$. Má-li funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ lokální extrém na množině $M \subset \mathbb{E}^r$ a má-li v něm parciální derivaci podle proměnné x_k , pak $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = 0$.

Definice 1.17 (stacionární bod). Bod $\vec{a} \in \mathbb{E}^r$ nazveme stacionárním bodem funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže $\text{grad } f(\vec{a}) = \vec{0}$.

Věta 1.18 (postačující podmínka pro lokální extrém). Nechť $\vec{a} \in \mathbb{E}^r$ je stacionárním bodem funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť má tato funkce na určitém okolí $H_{\vec{a}}$ spojité všechny parciální derivace do třetího řádu včetně. Potom jestliže je kvadratická forma druhého totálního diferenciálu funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ pozitivně, resp. negativně definitní v $\mathbb{E}^r$, pak má funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ ostré lokální minimum, resp. maximum. Jestliže je kvadratická forma druhého totálního diferenciálu funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ indefinitní v $\mathbb{E}^r$, pak extrém funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ nenastává.

Věta 1.19 (nutná podmínka pro vázané lokální extrémy). Nechť $A \subset \mathbb{E}^{r+p}$ je otevřená množina a $f(\vec{x}), G_1(\vec{x}), \dots, G_p(\vec{x}) : \mathbb{E}^{r+p} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce mající v množině A spojité derivace. Označíme

$$M = \left\{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_{r+p}) \in A : G_i(\vec{x}) = 0 \text{ pro } i \in \widehat{p} \right\}$$

Nechť dále Jacobiho matice

$$\frac{\mathcal{D}(G_1, \dots, G_p)}{\mathcal{D}(x_1, \dots, x_{r+p})}(\vec{x})$$

má pro všechna $\vec{x} \in M$ hodnotu p . Potom má-li funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ lokální extrém na množině M , pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) - \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial x_k}(\vec{a}) = 0$$

pro všechna $k \in \widehat{r+p}$, tj. funkce $L(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^p \lambda_j G_j(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ nenulovou derivaci.

Definice 1.20 (Lagrangeovy multiplikátory). Čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ z předchozí věty nazýváme Lagrangeovými multiplikátory, p rovnic $G_i = 0$ pro $i \in \widehat{p}$ vazbami a funkci $L(\vec{x})$ Lagrangeovou funkcí. Extrémy funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^{r+p} \rightarrow \mathbb{R}$ na množině M nazýváme také (ostrými) lokálními vázanými extrémy (minimy či maximy).

Definice 1.21 ((ostré) globální minimum). Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ definována na množině $M \subset \mathbb{E}^r$ a nechť $\vec{a} \in M$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ globální minimum, resp. ostré globální minimum na množině M , jestliže pro každé $\vec{x} \in M \setminus \{\vec{a}\}$ platí

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{a}) \text{ resp. } f(\vec{x}) > f(\vec{a})$$

Analogicky pro maximum.

Věta 1.22 (o existenci globálního extrému funkce). Spojitá funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{R}$ nabývá na neprázdné kompaktní množině svého maxima i minima.