

Štátnice

Mário Hoz

30. augusta 2021

Obsah

1	Prehľad použitého značenia	2
2	Základné pojmy	3
3	Otázky MAA	7
3.1	Derivácia v $\mathbb{R}$	7
3.2	Derivácia v $\mathbb{R}^n$	11
3.3	Číselné rady	16
3.4	Mocninné rady	21
3.5	Riemannov integrál	26
3.6	Lebesgueov integrál	30
3.7	Komplexná analýza	35
4	Otázky LAA	39
4.1	Zobrazenia, matice, sústavy	39
4.2	Hermitovské a kvadratické formy	44
4.3	Lineárne operátory a ich vlastné čísla	49
5	Otázky MIP	53
5.1	Zavedenie pravdepodobnosti	53
5.2	Rozdelenie náhodnej veličiny	59
5.3	Transformácia náhodných veličín	63
5.4	Charakteristiky náhodných veličín	67
5.5	Konvergencia v MIP	71
5.6	ZVČ a CLT	74
6	Otázky MAS	77
6.1	Bodové odhady	77
6.2	Nestranné odhady	85
6.3	Testovanie hypotéz	89
6.4	Konfidenčné množiny	94

Prehľad použitého značenia

Značenie	Význam
$i \in \hat{n}$	$i \in \{1, \dots, n\}$
$\exists^{+\infty}$	Existuje nekonečne mnoho
I°	Vnútrajšok intervalu I
$\mathcal{C}^{(n)}([a, b])$	Trieda n -krát spojitodiferencovateľných funkcií na intervale $[a, b]$
$B(z_0, R)$	Kruh so stredom v bode z_0 a polomerom R
$P(z_0, r, R)$	Medzikružie so stredom v bode z_0 a polomeri $r < R$
A'	Množina hromadných bodov A
H_a	Okolie bodu a
$\mathbb{A}, \mathbb{B}$	Matice
$\mathbb{A}^H, \mathbb{A}^T, \mathbb{A}^{-1}$	Hermitovsky združená, transponovaná a inverzná matica
$\mathbb{N}$	Množina prirodzených čísel
$\mathbb{Z}$	Množina celých čísel
$\mathbb{C}$	Množina komplexných čísel
$\mathbb{R}$	Množina reálnych čísel
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\times$	Kartézsky súčin
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$	Postupnosť čísel, postupnosť funkcií
V je VP nad T	V je vektorový priestor nad číselným telesom T
$V^\#$	Duálny priestor k V
$\mathcal{H}$	Hilbertov priestor
$h(\vec{x}, \vec{y})$	Hermitovská forma (polára)
$Q(\vec{x})$	Kvadratická forma (diagonála)
$\langle \vec{x} \vec{y} \rangle$	Skalárny súčin vektorov $\vec{x}, \vec{y}$
OG, ON	Ortogonalne, ortonormálne
∇_k	Subdeterminant rádu k
A^*	Združený operátor
K, D	„Konverguje“, „Diverguje“
s. v.	„Skoro všade“, tzn. až na množinu miery 0
$\sim, \lesssim, \gtrsim$	„Skoro všade“ ekvivalentný, menší, väčší
$\nearrow, \searrow$	Konverguje zospodu, zvrchu
$\ \cdot\ $	Norma
∇	Operátor nabra (gradient)
$\langle \varphi \rangle$	Stopa dráhy φ
int φ , ext φ	Vnútrajšok a vonkajšok dráhy φ
$\text{ind}_\varphi z_0$	Index bodu z_0 vzhľadom k dráhe φ
$\text{rez}_{z_0} f$	Reziduum funkcie f v (singulárnom) bode z_0

Základné pojmy

V tejto kapitole uvádzam pojmy z Poštovho desatora, ktoré nie sú zavedené niekde inde. Taktiež tu uvádzam doplnkové pojmy, ktoré sa pri učení možno hodí trochu osviežiť.

Každopádne učiť sa na štátnice stačí od strany 7 do konca, čo robí 90 strán. Za predpokladu pohodových 6 strán denne stačí na to všetko len 15 dní. :-)

DEF. (Zobrazenie)

Nech A, B sú ľubovoľné množiny. **Zobrazenie množiny A do množiny B** je relácia $f \subset A \times B$ splňujúca

$$(\forall x \in A)(\forall y, z \in B) ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \implies y = z).$$

Ak A, B sú číselné množiny, zobrazenie nazývame **funkcia**.

Poznámka. Pošta rozlišoval nasledovné:

Pre zobrazenie A do B platí $\text{Dom } f = A$, pre zobrazenie z A do B platí $\text{Dom } f \subset A$.

DEF. (Definičný obor)

Uvažujme zobrazenie $f : A \rightarrow B$. **Definičný obor** je množina

$$\text{Dom } f := \{x \in A \mid \exists y \in B, f(x) = y\}.$$

DEF. (Obor hodnôt)

Uvažujme zobrazenie $f : A \rightarrow B$. **Obor hodnôt** je množina

$$\text{Ran } f := \{y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

DEF. (Vzor a obraz množiny)

Uvažujme zobrazenie $f : A \rightarrow B$ a množiny M, N .

Obraz množiny N definujeme ako

$$f(N) := \{y \in B \mid \exists x \in N, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in N\}.$$

Vzor množiny M definujeme ako

$$f^{-1}(M) := \{x \in A \mid \exists y \in M, f(x) = y\} = \{x \mid f(x) \in M\}.$$

DEF. (Zúženie zobrazenia na množinu)

Uvažujme zobrazenie $f : A \rightarrow B$, množinu M . **Zúženie f na množinu M** značíme $f|_M$ a definujeme ako zobrazenie $f|_M : A \cap M \rightarrow B$ splňujúce

$$(\forall x \in (A \cap M)) (f|_M(x) = f(x))$$

Vlastnosti funkcie f na množine M (limita, extrém...) chápeme ako vlastnosti zúženia $f|_M$.

Poznámka. Nemusí obecné platiť, že $M \subset A$. Jednoduchý príklad:

$$f = \{ (1, 6), (2, 5), (3, 22) \}, M = \{ 1, 2, 8 \}, f|_M = \{ (1, 6), (2, 5) \}.$$

DEF. (Injektívne, surjektívne a bijektívne zobrazenie)

Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ nazveme

- **Injektívne** (prosté) práve vtedy, keď

$$(\forall x, y \in A)(f(x) = f(y) \implies x = y).$$

- **Surjektívne** (na B) práve vtedy, keď

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y).$$

- **Bijektívne** práve vtedy, keď je injektívne a surjektívne zároveň.

DEF. (Inverzné zobrazenie)

Uvažujme prosté zobrazenie $f : A \rightarrow B, x \in A, y \in \text{Ran } f$.

Inverzné zobrazenie k f chápeme ako množinu $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$.

DEF. (Kruh)

Otvorený kruh v $\mathbb{C}$ so stredom v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ a polomerom $R > 0$ je definovaný ako množina

$$B(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}.$$

Uzavretý kruh v $\mathbb{C}$ so stredom v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ a polomerom $R > 0$ je definovaný ako množina

$$\overline{B}(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}.$$

Poznámka. V prvom semestri sme najčastejšie využívali zápis pre okolie

$$H_a(\varepsilon) = B(a, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \varepsilon\}.$$

Na $\mathbb{R}$ možno zaviesť ešte pravé a ľavé okolie bodu a , pričom $a \notin H_{a+}(\varepsilon), a \notin H_{a-}(\varepsilon), a \in H_a(\varepsilon)$.

DEF. (Medzikružie)

Medzikružie v $\mathbb{C}$ so stredom v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ a polomerami $r, R > 0$ je definované ako množina

$$P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

DEF. (Obmedzená množina)

Nech $A \subset \mathbb{R}$. Túto množinu nazveme **obmedzená zhora** práve vtedy, keď

$$(\exists H \in \mathbb{R})(\forall z \in A)(z \leq H).$$

Číslo H nazývame **horná záhora**.

Analogicky, množinu nazveme **obmedzená zdola** práve vtedy, keď

$$(\exists D \in \mathbb{R})(\forall z \in A)(z \geq D).$$

Číslo D nazývame **dolná záhora**.

Množina je obmedzená, ak je zároveň obmedzená zhora aj zdola. To možno jednotne vyjadriť zápisom fungujúcim aj na množine $\mathbb{C}$ ako

$$(\exists K > 0)(\forall z \in A)(|z| \leq K).$$

Poznámka. Obmedzenosť postupnosti alebo funkcie sa vzťahuje na to, že ich obor hodnôt je obmedzená množina.

DEF. (Infimum)

Nech $A \subset \mathbb{R}$. Potom existuje práve jedno číslo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ také, že

$$(\forall x \in A)(x \geq \alpha) \wedge (\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' > \alpha)(\exists x \in A)(x < \alpha').$$

Toto číslo α predstavuje vlastne najväčšiu dolnú závoru.

Nazveme ho **infimum množiny** A . Značíme $\inf A$.

DEF. (Supremum)

Nech $A \subset \mathbb{R}$. Potom existuje práve jedno číslo $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ také, že

$$(\forall x \in A)(x \leq \beta) \wedge (\forall \beta' \in \mathbb{R}, \beta' < \beta)(\exists x \in A)(x > \beta').$$

Toto číslo β predstavuje vlastne najmenšiu hornú závoru.

Nazveme ho **supremum množiny** A . Značíme $\sup A$.

DEF. (Hromadný bod)

Nech $A \subset \mathbb{R}, a \in \overline{\mathbb{R}}$. Bod a nazveme **hromadný bod** množiny A práve vtedy, keď

$$(\forall H_a)(H_a \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset).$$

Množinu všetkých hromadných bodov značíme A' .

DEF. (Izolovaný bod)

Nech $A \subset \mathbb{R}, a \in A$. Bod a nazveme **izolovaný bod** množiny A práve vtedy, keď

$$(\exists H_a)(H_a \cap A = \{a\}).$$

Poznámka. Pozor, hromadný bod a izolovaný bod nie sú opačné pojmy.

Hromadný bod nemusí náležať A , izolovaný bod musí náležať A . Z toho vyplýva, že existujú aj také body, ktoré vzhľadom k danej množine nie sú hromadné ani izolované.

DEF. (Limita postupnosti)

Nech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Skutočnosť, že **limita postupnosti** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je a značíme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. Platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \iff (\forall H_a \subset \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n \in H_a).$$

Možno užiť aj jednoduchší zápis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \iff (\forall H_a \subset \mathbb{R})(\exists n_0)(\forall n > n_0)(a_n \in H_a).$$

Poznámka. Definícia funguje analogicky aj pre komplexné postupnosti. Obecné je treba z kontextu rozlišovať, či pracujeme s $\mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$. Napr. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n$ má limitu len v $\mathbb{C}$ (rovnú ∞).

DEF. (Vlastnosti funkcie)

Pre reálnu funkciu reálnej premennej f zavádzame názvoslovie:

- **Rastúca** práve vtedy, keď pre $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom } f, x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **Klesajúca** práve vtedy, keď pre $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom } f, x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **Monotónna** práve vtedy, keď je rastúca alebo klesajúca.
- Nech pre $\forall x \in \text{Dom } f$ platí, že aj $(-x) \in \text{Dom } f$.
Potom f je **párna** ak zároveň $f(x) = f(-x)$, alebo **nepárna** ak zároveň $-f(x) = f(-x)$.
- Nech $\exists l \in \mathbb{R}$ také, že pre $\forall x \in \text{Dom } f$ sú aj čísla $(x + l), (x - l) \in \text{Dom } f$.
Nech zároveň $f(x + l) = f(x)$. Potom f je **periodická** s **periódou** l .

Poznámka. Pre ostré nerovnosti medzi $f(x_1)$ a $f(x_2)$ dostávame ostrú monotóniu.

DEF. (Spojitosť funkcie)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, $a \in \text{Dom } f$.

Funkcia f je **spojitá** v bode a práve vtedy, keď

$$(\forall H_{f(a)})(\exists H_a)(\forall x \in \text{Dom } f \cap H_a)(f(x) \in H_{f(a)}).$$

Bod a je potom **bod spojitosti**. Nech $I \subset \text{Dom } f$. Funkcia f je spojitá na I práve vtedy, keď jej zúženie $f|_I$ je spojitá v každom bode I . To možno ekvivalentne prepísať ako

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a \in I)(|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

DEF. (Stejnomořná spojitost funkcie)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, $I \subset \text{Dom } f$.

Funkcia f je **stejnomořne spojitá** na I práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in I)(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

DEF. (Dirichletova funkcia)

Dirichletova funkcia je reálna funkcia reálnej premennej definovaná ako

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pre } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

DEF. (Riemannova funkcia)

Uvažujme $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, nsd(p, q) = 1$.

Riemannova funkcia je reálna funkcia reálnej premennej definovaná ako

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pre } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pre } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

V. (Heineho veta)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, $a \in \text{Dom}' f, c \in \overline{\mathbb{R}}$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = c$$

pre každú $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ktorá splňuje $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in \text{Dom } f \setminus \{a\}) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \right)$.

V. (Bolzano-Cauchyho kritérium pre funkcie)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, $a \in \text{Dom}' f$. Potom **Bolzano-Cauchyho kritérium**

(BCK) hovorí, že konečná $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists H_a)(\forall x, y \in \text{Dom } f \cap H_a \setminus \{a\})(|f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Poznámka. Ide o postačujúcu podmienku existencie konečnej limity.

Otázky MAA

Derivácia v $\mathbb{R}$

DEF. (Limita funkcie)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, $a \in \text{Dom}' f$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Skutočnosť, že **limita funkcie** f v bode a je c značíme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \iff (\forall H_c)(\exists H_a)(\forall x \in \text{Dom } f \cap H_a \setminus \{a\})(f(x) \in H_c).$$

Pre $a, c \in \mathbb{R}$ možno analogicky definíciu prepísať na tvar

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \text{Dom } f)(0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - c| < \varepsilon).$$

DEF. (Derivácia funkcie)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, $a \in \text{Dom}' f \cap \text{Dom } f$. Ak existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ resp. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

nazveme ju **derivácia** funkcie f v bode a . Značíme $f'(a)$.

Poznámka. Keďže možno zaviesť jednostranné limity, možno zaviesť aj jednostranné derivácie.

Označíme jednostrannú deriváciu v bode a sprava ako $f'_+(a)$ resp. zľava ako $f'_-(a)$.

DEF. (Diferencovateľná funkcia)

Ak je limita z predchádzajúcej definície konečná, nazveme ju **vlastná derivácia**. O f potom povieme, že je v a **diferencovateľná**. V opačnom prípade limitu nazveme **nevlastná derivácia**.

DEF. (Stacionárny bod)

Stacionárny bod (rovnako aj lokálny extrém) je zadefinovaný v kapitole o derivácií v $\mathbb{R}^n$.

DEF. (Inflexný bod)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej a bod $a \in \text{Dom}' f \cap \text{Dom } f$.

Povieme, že a je **inflexný bod** f práve vtedy, keď je f v a diferencovateľná a zároveň $\exists H_a$ také, aby pre $\forall x \in H_a$ platilo

$$\begin{aligned} x < a \implies f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \wedge \quad x > a \implies f'(a) > \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ \text{alebo} \\ x < a \implies f'(a) > \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \wedge \quad x > a \implies f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \end{aligned}$$

DEF. (Konvexnosť a konkávnosť)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej a interval $I \subset \text{Dom } f$.

Povieme, že f je na I **konvexná resp. konkávna** ak platí

$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3) \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \text{ resp. } \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \right).$$

Pre ostré nerovnosti dostávame rýdzu konvexnosť resp. konkávnosť.

DEF. (Dotyčnica)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, $a \in \text{Dom}' f \cap \text{Dom } f$.

- **Zvislá dotyčnica**

Existuje práve vtedy, keď f je v a spojitá a $f'(a) = \pm\infty$. Dotyčnica má predpis $x = a$.

- **Nezvislá dotyčnica**

Existuje práve vtedy, keď $f'(a) \in \mathbb{R}$. Dotyčnica má predpis $y(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Bod $(a, f(a))$ nazývame **bod dotyku**.

DEF. (Asymptota v bode)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, $a \in \text{Dom}' f$.

Uvažujme priamku o rovnici $x = a$. Túto priamku nazveme **asymptota** f v bode a práve vtedy, keď existuje aspoň jedna z postranných limít f v bode a , ktorá je rovna $+\infty$ alebo $-\infty$.

DEF. (Asymptota v nekonečne)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, $+\infty \in \text{Dom}' f$.

Uvažujme priamku o rovnici $y(x) = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$. Túto priamku nazveme **asymptota** f v $+\infty$ práve vtedy, keď platí $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - q) = 0$. Analogicky pre $-\infty$.

V. (Aritmetika derivácií)

Spomenuté v kapitole o derivácií v $\mathbb{R}^n$.

V. (Derivácia zloženej funkcie)

Spomenuté v kapitole o derivácií $\mathbb{R}^n$.

V. (O derivácií inverznej funkcie)

Uvažujme interval $I = [a, b]$. Nech f je spojitá aj prostá na I a diferencovateľná v istom $x_0 \in I^\circ$, pričom $f'(x_0) \neq 0$. Potom inverzná funkcia f^{-1} je diferencovateľná v $y_0 = f(x_0)$ a platí

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

V. (Nutná podmienka pre lokálny extrém)

Nech f má v a lokálny extrém. Potom je $f'(a)$ nulová, alebo neexistuje.

V. (Postačujúca podmienka pre lokálny extrém)

Nech f má na istom H_a konečnú prvú deriváciu.

Ak $f'(a) = 0 \wedge f''(a) \neq 0$, potom f má v a lokálny extrém.

V. (Postačujúca podmienka pre monotóniu funkcie)

Uvažujme interval $I = [a, b]$. Nech f je spojitá na I a diferencovateľná na I° . Potom platí

- $(\forall x \in I^\circ)(f'(x) = 0) \iff f$ je na I konštantná.
- $(\forall x \in I^\circ)(f'(x) \geq 0) \iff f$ je na I rastúca.
- $(\forall x \in I^\circ)(f'(x) \leq 0) \iff f$ je na I klesajúca.
- $(\forall x \in I^\circ)(f'(x) > 0) \implies f$ je na I ostro rastúca.
- $(\forall x \in I^\circ)(f'(x) < 0) \implies f$ je na I ostro klesajúca.

Poznámka. Pozor na posledné dve implikácie, opačne neplatia.

Funkcia $f(x) = x^3$ je ostro rastúca, ale $f'(0) = 0$.

V. (Nutná podmienka pre inflexný bod)

Nech f má v a inflexný bod a je na istom H_a konečnú prvú deriváciu.

Potom je $f''(a)$ nulová, alebo neexistuje.

V. (Postačujúca podmienka pre inflexný bod)

Nech f má na istom H_a konečnú druhú deriváciu.

Ak $f''(a) = 0 \wedge f'''(a) \neq 0$, potom f má v a inflexný bod.

V. (Postačujúca podmienka pre konvexnosť a konkávnosť)

Uvažujme interval $I = [a, b]$. Nech f je spojitá na I a dvakrát diferencovateľná na I° . Potom platí

- $(\forall x \in I^\circ)(f''(x) \geq 0) \implies f$ je na I konvexná.
- $(\forall x \in I^\circ)(f''(x) \leq 0) \implies f$ je na I konkávná.
- $(\forall x \in I^\circ)(f''(x) > 0) \implies f$ je na I rýdzo konvexná.
- $(\forall x \in I^\circ)(f''(x) < 0) \implies f$ je na I rýdzo konkávná.

Poznámka. Existuje aj iná postačujúca podmienka:

Ak je $f'(x)$ na I° (ostro) rastúca, tak je $f(x)$ na I (rýdzo) **konvexná**.

Obdobne, ak je $f'(x)$ na I° (ostro) klesajúca, tak je $f(x)$ na I (rýdzo) **konkávná**.

V. (Rolleova veta)

Uvažujme interval $I = [a, b]$. Nech f je spojitá na I a diferencovateľná na I° .

Ak $f(a) = f(b)$, potom $\exists c \in I^\circ$ také, že

$$f'(c) = 0.$$

V. (Lagrangeova)

Uvažujme interval $I = [a, b]$. Nech f je spojitá na I a diferencovateľná na I° .

Potom $\exists c \in I^\circ$ také, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

V. (Cauchyho veta)

Uvažujme interval $I = [a, b]$. Nech f, g sú spojité na I a diferencovateľné na I° .

Ak $\forall x \in I^\circ, g'(x) \neq 0$, potom $\exists c \in I^\circ$ také, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

V. (Leibnitzov vzorec pre výpočet derivácie súčinu)

Nech f, g majú konečnú n -tú deriváciu v bode a . Potom platí

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(a).$$

V. (O asymptote)

Funkcia f má v $+\infty$ asymptotu o rovnici $y(x) = kx + q$ práve vtedy, keď $+\infty \in \text{Dom}' f$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}.$$

V. (Darbouxova veta)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, $a \in \text{Dom } f$ a navyše platí:

- Funkcia f je spojitá v bode a sprava.
- Funkcia f je diferencovateľná na H_{a^+} .
- Existuje $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$.

Potom f má v bode a deriváciu sprava a platí $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$.

Poznámka. Analogicky prípadne pre ľavé okolie.

V. (L'Hospitalovo pravidlo)

Nech f, g reálne funkcie reálnej premennej, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a navyše platí:

- Existuje H_a na ktorom platí $H_a \setminus \{a\} \subset \left(\text{Dom } \frac{f}{g} \cap \text{Dom } \frac{f'}{g'}\right)$.
- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- Platí, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$.

Potom $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Poznámka. Myslím, že o $a \in \overline{\mathbb{R}}$ netreba nič viac tvrdiť. Prvý predpoklad implikuje, že a sa nachádza v potrebných definičných oboroch. Druhý a tretí predpoklad implikujú, že a sa nachádza aj v potrebných množinách hromadných bodov.

Derivácia v $\mathbb{R}^n$

I keď to nie vždy explicitne uvádzame, pri predpoklade derivácie na množine X je táto množina vždy neprázdna a otvorená podmnožina $\mathbb{R}^n$.

DEF. (Parciálna derivácia)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$. Ľubovoľný nenulový vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ nazveme **smer v $\mathbb{R}^n$** .

Za predpokladu konečnosti príslušnej limity je **smerová derivácia** f v bode a podľa smeru $\vec{v}$ definovaná ako

$$D_{\vec{v}}f(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h\vec{v}) - f(a)}{h}.$$

Nech $\vec{v}$ je pre isté $i \in \hat{n}$ rovné vektoru štandardnej bázy $\mathbb{R}^n$, tzn. $\vec{v} = \vec{e}_i$. Danú smerovú deriváciu nazveme **parciálna derivácia** f v bode a podľa i -tej premennej. Značíme $\partial_i f(a)$.

Poznámka. Na smerový vektor často kladieme dodatočnú požiadavku, aby bol normovaný na 1.

DEF. (Úplná (totálna) derivácia)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in X$.

Povieme, že f je **diferencovateľná** v bode a práve vtedy, keď existuje $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ také, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0 \text{ resp. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - T(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Lineárne zobrazenie T nazveme **úplná (totálna) derivácia** funkcie f v bode a . Značíme $Df(a)$. Toto zobrazenie možno obecné reprezentovať maticou.

Ak je f diferencovateľná v každom bode množiny X , hovoríme, že je **diferencovateľná na X** .

Poznámka. Vďaka ekvivalenciám noriem na $\mathbb{R}^n$ definícia nezávisí na voľbe normy.

DEF. (Jacobiho matica)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in X$. Nech je táto funkcia diferencovateľná v bode a .

Označme komponenty $f = (f_1, \dots, f_m)$. Uvažujme maticu derivácií

$$\varepsilon_n(Df(a))^{\varepsilon_m} := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \dots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix}.$$

Nazveme ju **Jacobiho matica** funkcie f v bode a .

Ak $m = n$, jej determinant nazveme **Jacobián**.

DEF. (Gradient)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$. Nech je táto funkcia diferencovateľná v bode a .

Potom existuje $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ako lineárny funkcionál na $\mathbb{R}^n$. Toto zobrazenie predstavujúce totálnu deriváciu pre $m = 1$ nazývame aj **totálny diferenciál**.

Z Rieszovej vety vyplýva existencia riadkového vektoru z $\mathbb{R}^n$ takého, že pre $\forall x \in \mathbb{R}^n$ platí $\nabla f(a)x = Df(a)x$. $\nabla f(a)$ nazveme **gradient**. Gradient určuje smer „najväčšieho stúpania“ f .

Poznámka. V nadväznosti na predchádzajúce definície si možno všimnúť, že $\partial_i f(a)$ je i -tou zložkou gradientu $\nabla f(a)$. Zároveň, Hessova matica pre $m = 1$ vlastne predstavuje gradient.

DEF. (Parciálna derivácia vyšších rádov)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, a \in X$. Nech f má na istom okolí H_a pre dané $i \in \hat{n}$ parciálnu deriváciu. Potom možno na ňu znova aplikovať parciálnu deriváciu, obecné podľa premennej $j \in \hat{n}$.

Ak existuje konečná limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_i f(a + h\vec{e}_j) - \partial_i f(a)}{h} =: \partial_{j,i}^2 f(a),$$

nazveme ju **parciálna derivácia druhého rádu** f v bode a podľa j -tej a i -tej premennej.

DEF. (Úplná (totálna) derivácia vyšších rádov)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in X$. Nech f má na istom H_a deriváciu $Df \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Povieme, že f je **dvakrát diferencovateľná** v bode a práve vtedy, keď existuje $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ také, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|Df(x) - Df(a) - T(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0 \text{ resp. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|Df(a + h) - Df(a) - T(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Lineárne zobrazenie T nazveme **úplná (totálna) derivácia druhého rádu** f v bode a . Značíme $D^2 f(a)$. Toto zobrazenie možno obecné reprezentovať tenzorom.¹

Ak je f dvakrát diferencovateľná v každom bode množiny X , hovoríme, že je **dvakrát diferencovateľná na X** .

DEF. (Hessova matica)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrát diferencovateľná v bode $a \in X$.

Uvažujme maticu druhých derivácií vzhľadom ku štandardnej báze

$$\varepsilon_n(D^2 f(a)) := \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(a) & \partial_{2,1}^2 f(a) & \dots & \partial_{n,1}^2 f(a) \\ \partial_{1,2}^2 f(a) & \partial_{2,2}^2 f(a) & \dots & \partial_{n,2}^2 f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{1,n}^2 f(a) & \partial_{2,n}^2 f(a) & \dots & \partial_{n,n}^2 f(a) \end{pmatrix}.$$

Nazveme ju **Hessova matica** funkcie f v bode a . Jej determinant nazveme **Hessián**.

DEF. (Triedy hladkosti)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Rozlišujeme nasledujúce **triedy hladkosti** funkcie f na X :

- **Trieda $\mathcal{C}^k(X)$**
Funkcia je na X spojitě diferencovateľná do rádu k .
To znamená, že existujú spojitě $f', f'', \dots, f^{(k)}$.
- **Trieda $\mathcal{C}^{+\infty}(X)$**
Funkcia je na X hladká, tzn. spojitě diferencovateľná do ľubovoľného rádu.
To znamená, že existujú spojitě derivácie všetkých rádov.
- **Trieda $\mathcal{C}^\omega(X)$**
Funkcia je na X analytická. To znamená, že je hladká a navyše k nej konverguje jej Taylorov rozvoj v ľubovoľnom bode množiny X .

Zjavne $\mathcal{C}^\omega \subset \mathcal{C}^{+\infty} \subset \dots \subset \mathcal{C}^2 \subset \mathcal{C}^1 \subset \mathcal{C}^0$.

¹Tým sa v základnom kurze nebudeme zaoberať. Vystačíme si so zjednodušenou podobou tenzoru, s (Hessovou) maticou.

DEF. (Stacionárny bod)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$.

Funkcia f má v bode a **stacionárny bod** práve vtedy, keď $\nabla f(a) = 0$.

DEF. (Lokálne extrém)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$.

Rozlišujeme nasledujúce **lokálne extrém** funkcie f v bode a :

- **Lokálne maximum**

$$(\exists H_a \subset X)(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a))$$

- **Ostré lokálne maximum**

$$(\exists H_a \subset X)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) < f(a))$$

- **Lokálne minimum**

$$(\exists H_a \subset X)(\forall x \in H_a)(f(x) \geq f(a))$$

- **Ostré lokálne minimum**

$$(\exists H_a \subset X)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) > f(a))$$

Analogicky sa definujú extrém vzhľadom k množine $U \subset X$.

V tomto prípade len H_a vo vete vždy nahradíme prienikom $(H_a \cap U)$.

DEF. (Lagrangeova funkcia)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. **Lagrangeova funkcia** $L : X \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná pomocou parametrov $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ nazývaných **Lagrangeove multiplikátory** ako

$$L(x, \lambda) := f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x).$$

DEF. (Charakter matíc)

Nech X je neprázdna podmnožina $\mathbb{R}^n$. Pre $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ rozlišujeme charakter vzhľadom k X :

- **Pozitívne definitná (PD)**

$$(\forall x \in X, x \neq 0)(x^T \mathbb{A} x > 0)$$

- **Pozitívne semidefinitná (PSD)**

$$(\forall x \in X)(x^T \mathbb{A} x \geq 0) \wedge (\exists x_0 \in X, x_0 \neq 0)(x_0^T \mathbb{A} x_0 = 0)$$

- **Negatívne definitná (ND)**

$$(\forall x \in X, x \neq 0)(x^T \mathbb{A} x < 0)$$

- **Negatívne semidefinitná (NSD)**

$$(\forall x \in X)(x^T \mathbb{A} x \leq 0) \wedge (\exists x_0 \in X, x_0 \neq 0)(x_0^T \mathbb{A} x_0 = 0)$$

- **Indefinitná (INDEF)**

$$(\exists x_1, x_2 \in X)(x_1^T \mathbb{A} x_1 > 0 \wedge x_2^T \mathbb{A} x_2 < 0)$$

V. (O spojitosti)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovateľná v bode $a \in X$. Potom je f v bode a spojitá.

V. (Aritmetika derivácií)

Nech $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sú diferencovateľné v bode $a \in X$. Potom pre ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$ platí:

- $D(f \pm cg)(a) = Df(a) \pm cDg(a)$.
- Nech $m = 1$. Potom súčin fg je diferencovateľný v bode a a platí

$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a).$$

- Nech $m = 1$, $g(a) \neq 0$. Potom podiel $\frac{f}{g}$ je diferencovateľný v bode a a platí

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{g^2(a)}.$$

V. (Derivácia zloženej funkcie)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovateľná v bode $a \in X$ a $g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ je diferencovateľná v bode $f(a) \in U$. Potom zložená funkcia $g \circ f$ je diferencovateľná v bode a a platí

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a).$$

V. (O parciálnych deriváciách 1)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovateľná v bode $a \in X$.

Potom pre $\forall i \in \hat{n}, j \in \hat{m}$ existujú parciálne derivácie $\partial_i f_j$ v bode a .

Poznámka. Táto veta zabezpečuje dobré definovanie Jacobiho matice.

V. (O parciálnych deriváciách 2)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in X$. Nech na okolí a existujú pre $\forall i \in \hat{n}, j \in \hat{m}$ parciálne derivácie $\partial_i f_j$. Nech tieto derivácie sú navyše spojité v a . Potom f je diferencovateľné v bode a .

V. (Schwarzova veta)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$. Nech na okolí bodu a existujú pre vybrané $i, j \in \hat{n}$ parciálne derivácie $\partial_i f$ a $\partial_{i,j}^2 f$. Ak je navyše $\partial_{i,j}^2 f$ v a spojitá, potom existuje $\partial_{j,i}^2 f$ v a , pričom platí zámena týchto druhých parciálnych derivácií.

Poznámka. Ak sú druhé parciálne derivácie spojité, je teda Hessova matica symetrická.

V. (Veta o prírastku)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pričom X je otvorená a konvexná a f je na nej diferencovateľná.

Potom pre $x_1, x_2 \in X$ existuje na úsečke spájajúcej body tieto body istý bod y taký, že

$$f(x_2) - f(x_1) = \nabla f(y)(x_2 - x_1).$$

Poznámka. Neexistuje analógia vo viacerých dimenziách. Protipríkladom nech je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$. Vzťah $f(1) - f(0) = Df(y)$ dáva neriešiteľnú sústavu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 3y^2 \end{pmatrix}$.

V. (Dôsledok vety o prírastku)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pričom X je otvorená a konvexná a f je na nej diferencovateľná.

Ak $(\exists K > 0)(\forall y \in X)(\|\nabla f(y)\| \leq K)$, tak pre $\forall x_1, x_2 \in X$ platí $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$.

V. (Dôsledok vety o prírastku vo viacerých dimenziách)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, pričom X je otvorená a konvexná a f je na nej diferencovateľná.

Ak $(\exists K > 0)(\forall y \in X)(\|Df(y)\| \leq K)$, tak pre $\forall x_1, x_2 \in X$ platí $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$.

V. (Nutná podmienka pre lokálny extrém)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$ je lokálny extrém funkcie f . Potom ak existuje $\partial_i f(a)$ pre isté $i \in \hat{n}$, tak je $\partial_i f(a) = 0$. Špeciálne ak je f diferencovateľná v bode a , tak $\nabla f(a) = 0$.

V. (Postačujúca podmienka pre lokálny extrém)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$ je stacionárny bod funkcie f , tzn. $\nabla f(a) = 0$. Nech navyše platí, že f je na X dvakrát spojitito diferencovateľná, tzn. $f \in \mathcal{C}^{(2)}(X)$.

Podľa definitnosti Hессovej matice $\nabla^2 f(a)$ rozlišujeme:

- $\nabla^2 f(a)$ PD $\implies f$ má v a ostré lokálne minimum.
- $\nabla^2 f(a)$ ND $\implies f$ má v a ostré lokálne maximum.
- $\nabla^2 f(a)$ INDEF $\implies f$ má v a sedlový bod.

V. (Nutná podmienka viazaného extrému)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sú $\mathcal{C}^1(X)$, pričom $m < n$.

Nech f splňuje, že má lokálny extrém vzhľadom k $M := \{x \in X \mid g(x) = 0\}$ v bode $a \in M$.

Nech g splňuje $h(Dg(a)) = m$.

Potom existujú $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ také, že

$$\nabla_x L(a, \lambda) = \nabla f(a) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(a) = 0.$$

Funkcia $g(x)$ predstavuje väzbu, ktorá určuje príslušnú diferencovateľnú varietu dimenzie $n - m$. Výraz ∇_x značí, že v gradiente sa objavajú len parciálne derivácie podľa premenných $x_1, \dots, x_n$.

V. (Postačujúca podmienka viazaného extrému)

Nech $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sú $\mathcal{C}^2(X)$, pričom $m < n$.

Označme $M := \{x \in X \mid g(x) = 0\}$. Nech navyše $\exists (a, \lambda) \in M \times \mathbb{R}^m$ taký, že $\nabla_x L(a, \lambda) = 0$.

Označme $\nabla_x^2 L(a, \lambda)$ Hessovu maticu funkcie $L(x, \lambda)$ pre premenné $x_1, \dots, x_n$ v bode a .

Potom platí, že ak $\nabla_x^2 L(a, \lambda)$ je:

- PD vzhľadom ku $\ker Dg(a)$, potom f má v a ostré lokálne minimum vzhľadom k M .
- ND vzhľadom ku $\ker Dg(a)$, potom f má v a ostré lokálne maximum vzhľadom k M .

Metódy diferenciálneho počtu umožňujú nájsť lokálne extrémy. Niekedy (napr. u konvexných funkcií) možno z lokálnych odpovedí usúdiť aj globálne odpovede. Obecne je ale nájdenie globálnych extrémov zložitý problém, ktorý treba riešiť prípad od prípadu.

Malá pripomienka.

Zatiaľ čo v $\mathbb{R}$ pojmy prosté a regulárne zobrazenie splývajú, v $\mathbb{R}^n$ sa prejavuje ich rozdiel.

Zobrazenie je regulárne na X práve vtedy, keď je na X spojitito diferencovateľné a jeho Jacobián je všade nenulový. Pri transformovaní takéto zobrazenie zachová dimenziu. Je to každopádne lokálna vlastnosť. Regularita implikuje lokálnu prostotu, tzn. na istom okolí platí $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$, ale „o kúsok ďalej v X už môže daná hodnota nastať pre iné x “.

Zobrazenie je prosté na X práve vtedy, keď $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ platí všade na X . Nevrávi nič o derivácií, je to iná vlastnosť než samotná regularita.

Číselné rady

DEF. (Číselná rada)

Nech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je číselná postupnosť.

Postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definujeme pre $\forall n \in \mathbb{N}$ vzťahom $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Číselná rada je dvojica postupností $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Túto dvojicu značíme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

DEF. (Číselná rada so striedavými znamienkami)

Nech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je kladná reálna číselná postupnosť.

Rada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ sa nazýva **číselná rada so striedavými znamienkami**.

DEF. (Konvergencia číselnej rady)

Uvažujme číselnú radu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Ak existuje konečná limita $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, hovoríme, že rada **konverguje** a má daný **súčet** s . V opačnom prípade rada **diverguje**.

U konvergentných rád rozlišujeme:

- **Absolútne konvergentná rada**, ak aj $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konverguje.
- **Neabsolútne konvergentná rada**, ak $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverguje.

U divergentných rád rozlišujeme:

- **Podstatne divergentná rada**, ak $s \in \{\pm\infty\}$.
- **Oscilujúca rada**, ak s neexistuje.

Poznámka. Pre súčet s je zaužívané rovnaké značenie ako pre číselnú radu, tzn. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

DEF. (Charakter rady)

Uvažujme číselné rady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Tieto rady majú **rovnaký charakter**, ak obe súčasne konvergujú/podstatne divergujú/oscilujú.

Poznámka. Vynechaním konečného počtu členov rady sa jej charakter nemení.

DEF. (Uzátvorkovanie rady)

Uvažujme číselnú postupnosť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a ostro rastúcu postupnosť prirodzených čísel $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pričom dodefinujeme $k_0 = 0$. **Uzátvorkovanie rady** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podľa postupnosti $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazveme radu $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ definovanú pre $\forall n \in \mathbb{N}$ ako $A_n = a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \dots + a_{k_n}$.

Poznámka. Nech $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ má čiastočné súčty $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ má čiastočné súčty $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Potom platí, že $S_n = s_{k_n}$, tzn. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je vybraná z $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

DEF. (Prerovnanie rady)

Uvažujme číselnú radu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a bijekciu $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Rada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$ sa nazýva **prerovnanie** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podľa φ .

DEF. (Súčin rad)

Uvažujme číselné rady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ a bijekciu $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Pre $\forall n \in \mathbb{N}$ položíme $c_n = a_i b_j$, pričom $n = \varphi(i, j)$. Rada $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ sa potom nazýva **súčin rád** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

DEF. (Súčinová rada)

Uvažujme číselné rady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Rada $\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ sa nazýva **súčinová rada** pre $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Poznámka. Súčinová rada je vlastne uzátvorkovanie jedného konkrétneho súčinu dvoch rád.

V. (Nutná podmienka konverencie)

Ak rada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

V. (Postačujúca podmienka konverencie)

Rada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď platí **Bolzanovo-Cauchyho kritérium konverencie (BCK)** v tvare

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) \left(\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Poznámka. Preto ak rada konverguje absolútne, konverguje aj neabsolútne.

V. (Kalibrovacie rady)

V tejto kapitole využívame znalosť o konvergenciách často sa vyskytujúcich rad.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \text{ K} \iff |q| < 1.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ K} \iff \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1.$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n} \text{ K} \iff \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1.$$

Poznámka. Trochu chytáková je rada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$. Po zrovnaní s $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ zistíme, že diverguje.

V. (Zrovnávanie rad s kladnými členmi)

Nech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sú kladné postupnosti a existuje limita $L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Platí nasledujúca séria tvrdení:

$$L < +\infty \wedge \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ K} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ K}.$$

$$L > 0 \wedge \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ D} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ D}.$$

$$0 < L < +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ a } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ majú rovnaký charakter.}$$

V. (Cauchyho odmocninové kritérium)

Nech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je nezáporná postupnosť. Nelimitné tvary Cauchyho kritéria:

$$(\exists q \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \left(\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konverguje.} \right)$$

$$(\exists^{+\infty} n \in \mathbb{N}) \left(\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverguje.} \right)$$

Limitné tvary Cauchyho kritéria:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

Poznámka. V druhom bode (pre divergenciu) možno zosilniť požiadavky na $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)$.

V. (d'Alambertovo podielové kritérium)

Nech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je kladná postupnosť. Nelimitné tvary d'Alambertovho kritéria:

$$(\exists q \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konverguje.} \right)$$

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverguje.} \right)$$

Limitné tvary d'Alambertovho kritéria:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

Poznámka. V druhom bode (pre divergenciu) Nemožno zoslabiť požiadavky na $(\exists^{+\infty} n \in \mathbb{N})$. Totiž nejaká vybraná rada môže ísť do $+\infty$, ale rada ako celok bude stále konvergentná. Protipríkladom nech je:

$$\sum \frac{1}{(3 - (-1)^k)^k}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} \frac{1/2^{k+1}}{1/4^k} = 2^{k-1}, & k \text{ liché;} \\ \frac{1/4^{k+1}}{1/2^k} = 1/2^{k+2}, & k \text{ sudé.} \end{cases}$$

Vybraná rada pre nepárne k ide do $+\infty$, vybraná rada pre párne k ide do 0. Napriek tomu z Cauchyho kritéria hneď vidno, že rada určite konverguje (volíme $q = \frac{1}{2}$).

V. (Raabeho kritérium)

Nech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je kladná postupnosť. Nelimitné tvary Raabeho kritéria:

$$(\exists q \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \left(n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \geq q > 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konverguje.} \right)$$

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \left(n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \leq 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverguje.} \right)$$

Limitné tvary Raabeho kritéria:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = q > 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = q < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

V. (Dirichletovo kritérium)

Nech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálna postupnosť, ktorá je monotónna a má limitu 0. Nech $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je komplexná postupnosť, ktorá má obmedzené čiastočné súčty. Potom rada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konverguje.

V. (Abelovo kritérium)

Nech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálna postupnosť, ktorá je monotónna a konvergentná. Nech $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je komplexná postupnosť, pričom $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje. Potom rada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konverguje.

V. (Leibnitzovo kritérium)

Nech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je kladná reálna postupnosť, ktorá je klesajúca a má limitu 0.

Potom rada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

Uviedli sme 3 kritéria pre rady s kladnými členmi a 3 ďalšie kritériá pre rady s obecnými členmi, resp. so striedavými znamienkami u členov. Predchádzajúce kritéria zhrňuje (modifikované) Gaussovo kritérium. To ošetruje dokonca aj prípady, kedy $q = 1$. Tu ho však neuvádzame, lebo je zbytočne zložitý a používali sme ho málokedy.

V. (O uzátvorkovaní 1)

Nech $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ je uzátvorkovanie rady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podľa postupnosti $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, potom aj $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ konverguje.

Poznámka. Obrátenie implikácie z prvej vety neplatí, stačí brať $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$, kde $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} = 2n$. Ak by sme implikáciu chceli obrátiť, treba naložiť dodatočné predpoklady, viz nasledujúca veta.

V. (O uzátvorkovaní 2)

Nech $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ je uzátvorkovanie rady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podľa postupnosti $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nech sú navyše splnené nasledujúce predpoklady:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
- Existuje $M \in \mathbb{N}$ také, že pre $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $k_n - k_{n-1} \leq M$.

Potom rady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ majú rovnaký charakter.

V prípade konvergenzie pre tieto rady dokonca platí, že majú rovnaký súčet.

V. (O prerovnaní 1)

Nech $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ absolútne konvergentná rada. Potom aj jej ľubovoľné prerovnanie absolútne konvergentná rada s rovnakým súčtom.

V. (O prerovnaní 2 - Riemannova veta)

Nech $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je neabsolútne konvergentná rada. Potom pre ľubovoľné $s \in \overline{\mathbb{R}}$ existuje prerovnanie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$, ktoré má súčet s . Rovnako existuje oscilujúce prerovnanie.

V. (O súčine rád)

Nech $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sú absolútne konvergentné rady.

Potom ich súčin je absolútne konvergentný a jeho súčet je rovný $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right)$.

V. (O súčinovej rade)

Nech $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sú absolútne konvergentné rady.

Potom ich súčinová rada je absolútne konvergentná a platí

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right).$$

Mocninné rady

DEF. (Taylorov polynóm)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, ktorá má v $a \in \mathbb{R}$ konečnú deriváciu n -tého rádu.

Taylorov polynóm n -tého stupňa funkcie f v bode a je definovaný ako

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Poznámka. Existuje práve jeden polynóm T_n stupňa najvyššie n , ktorý by pre $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ splňoval $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. To je práve Taylorov polynóm.

DEF. (Zbytok v Taylorovom vzorci)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, ktorá má v $a \in \mathbb{R}$ konečnú deriváciu n -tého rádu.

Položíme $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$. Potom $R_n(x)$ nazveme **n -tý Taylorov zbytok** funkcie $f(x)$.

DEF. (Funkčná rada)

Nech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ je funkčná postupnosť, pričom tieto funkcie sú definované na množine $A \subset \mathbb{C}$.

Postupnosť čiastočných súčtov $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definujeme pre $\forall n \in \mathbb{N}_0$ a $\forall z \in A$ vzťahom $F_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z)$.

Funkčná rada je dvojica $((f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (F_n)_{n \in \mathbb{N}_0})$. Túto dvojicu značíme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Poznámka. Okrem mocninných rád sme ešte hojne pracovali aj s inými funkčnými radami, konkrétne Fourierovými radami.

DEF. (Stejnomořná konvergenca funkčnej rady)

Nech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ je funkčná postupnosť, pričom tieto funkcie sú definované na množine $A \subset \mathbb{C}$.

Povieme, že funkčná rada $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **konverguje stejnoměrne** k funkcii F na množine A práve vtedy, keď funkčná postupnosť jej čiastočných súčtov $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konverguje stejnoměrne k funkcii F na množine A . Musí teda platiť

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|F_n(z) - F(z)| < \varepsilon) \text{ čo značíme ako } F_n \xrightarrow{A} F.$$

Poznámka. Pojem stejnoměrne konvergenzie je vždy zviazaný s nejakou množinou!

DEF. (Mocninná rada)

Nech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Funkčná rada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ sa nazýva **mocninná rada** so stredom v bode z_0 .

DEF. (Obor konvergenzie mocninnej rady)

Nech $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ je mocninná rada.

Obor konvergenzie mocninnej rady je množina všetkých $z \in \mathbb{C}$, pre ktoré táto (po dosadení daného z už číselná) rada konverguje.

Čiastočný súčet $s_{z_0}(z)$ označuje súčet mocninnej rady pre konkrétne z z oboru konvergenzie.

Poznámka. Vyšetrujeme len vlastnosti mocninných rád so stredom v bode nula.

Platí totiž $s_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $s_{z_0}(z) = s_0(z - z_0)$.

DEF. (Polomer konvergenzie)

Nech $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ je mocninná rada. Potom pre ňu existuje $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$, $\rho \geq 0$, ktoré splňuje

- Ak $|z - z_0| < \rho \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ konverguje absolútne.
- Ak $|z - z_0| > \rho \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ diverguje.

Toto číslo ρ nazveme **polomer konvergenzie mocninnej rady**.

Poznámka. Polomer konvergenzie vymedzuje obor konvergenzie mocninnej rady.

Každopádne nevieme, čo sa deje na hranici.

DEF. (Rozvoj funkcie do mocninnej rady)

Vyjadrenie reálnej funkcie reálnej premennej ako mocninnej rady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ pre $\forall x \in I$ nazveme **rozvoj funkcie do mocninnej rady so stredom v bode a** .

Pritom musí platiť, že $I \subset \text{Dom } f, a \in I^0$.

Príklady základných rozvojev do Taylorovej rady v bode $a = 0$:

$$\begin{aligned}\exp[x] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \text{ pre } x \in (-1, 1), \alpha \in \mathbb{R} \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \text{ pre } x \in (-1, 1), \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.\end{aligned}$$

V. (Taylorov polynóm ako najlepšia aproximácia 1)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, ktorá má v $a \in \mathbb{R}$ konečnú deriváciu rádu n a na istom H_a konečnú deriváciu rádu $(n-1)$.

Uvažujme Taylorov polynóm $T_n(x)$ a ľubovoľný iný polynóm stupňa nanejvýš $n \in \mathbb{N}$, ktorý označíme $Q(x)$. Potom existuje isté okolie H_a také, že pre $\forall x \in H_a \setminus \{a\}$ platí

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)|.$$

To znamená, že Taylorov polynóm aproximuje funkciu f najlepšie zo všetkých polynómov.

V. (Taylorov polynóm ako najlepšia aproximácia 2)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, ktorá má v $a \in \mathbb{R}$ konečnú deriváciu rádu n a na istom H_a konečnú deriváciu rádu $(n-1)$.

Uvažujme Taylorove polynómy $T_{n-1}(x) \neq T_n(x)$. Potom existuje isté okolie H_a také, že pre $\forall x \in H_a \setminus \{a\}$ platí

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - T_{n-1}(x)|.$$

To znamená, že zvyšovaním $n \in \mathbb{N}$ sa aproximácia zlepšuje.

V. (O konvergencii Taylorovho polynómu)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, ktorá je v $a \in \mathbb{R}$ nekonečnekrát diferencovateľná. Nech $x \in \text{Dom } f$. Potom $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$.

Poznámka. Pre zbytok v Taylorovom vzorci obecné platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Nie vždy je Taylorova rada rovná príslušnej hladkej funkcii. To platí len pre tzv. analytické funkcie. Protipríkladom v podobe neanalytickej funkcie je

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{x^2}\right] & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0. \end{cases}$$

Táto funkcia je hladká (mimo 0 triviálne, ale dá sa to ukázať aj pre tento bod). Platí pre $\forall n \in \mathbb{N}$, že $f^{(n)}(0) = 0$. Preto je Taylorova rada na okolí $a = 0$ identicky nulová funkcia, čo neodpovedá tomu, že by aj samotná f na okolí 0 bola identicky nulová.

Že rovnosť Taylorovej rady a funkcie $f(x)$ na okolí 0 neplatí možno ukázať aj z hore uvedenej vety. Totiž pre $\forall x \neq 0$ je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left[-\frac{1}{x^2}\right] = \exp\left[-\frac{1}{x^2}\right] \neq 0.$$

V. (O zbytku v Taylorovom vzorci)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, ktorá má na istom okolí H_a bodu $a \in \mathbb{R}$ konečnú $(n+1)$ -vú deriváciu. Potom pre $\forall x \in H_a$ možno zaviesť **Lagrangeov tvar zbytku** v Taylorovom vzorci ako

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Číslo ξ závisí na n aj a , pričom leží v intervale s krajnými bodmi x, a .

Poznámka. Táto veta sa nazýva aj Taylora. Dokazuje sa aplikovaním Cauchyho vety na funkcie

$$\psi(z) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z)}{k!} (x-z)^k, \varphi(z) = (x-z)^{n+1}.$$

Možno si povšimnúť, že $\psi(x) = f(x), \psi(a) = T_n(x)$.

Existujú ešte iné tvary zbytku.

Cauchyho tvar zbytku:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-a).$$

Integrálny tvar zbytku:

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

V. (Weierstrassovo kritérium pre funkčné rady)

Nech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sú funkčné postupnosti definované na $A \subset \mathbb{C}$.

Ak $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall z \in A)(|f_n(z)| \leq g_n(z))$, tak $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n \xrightarrow{A} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow{A}$.

Poznámka. Častým prípadom je $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nezávislá na premennej z .

Potom ide len o postupnosť čísel K_n , máme číselnú majorantu $\sum_{n=0}^{+\infty} K_n$.

V. (Dirichletovo a Abelovo kritérium pre funkčné rady)

Nech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sú funkčné postupnosti definované na $A \subset \mathbb{C}$.

Označme $s_n := \sum_{k=0}^n f_k$. Nech platí jedna z nasledujúcich podmienok:

- **Dirichlet**

Postupnosť $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ je monotónna a $g_n \xrightarrow{A} 0$.

Postupnosť $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ je stejně obmedzená, tzn. $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall z \in A)(|s_n(z)| \leq K)$.

- **Abel**

Postupnosť $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ je monotónna a stejně obmedzená. Postupnosť $s_n \xrightarrow{A}$.

Potom $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n g_n \xrightarrow{A}$.

V. (Výpočet polomeru konvergenie)

Polomer konvergenie mocninnej rady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ sa dá vypočítať podľa vzorca

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Poznámka. Keďže $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, nasledujúce rady majú rovnaký polomer konvergenie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|(z - z_0)^n, \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(z - z_0)^n, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} a_n(z - z_0)^n.$$

V. (O stejněměrnej konvergencii mocninnej rady)

Nech $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - a)^n$ je reálna mocninná rada s polomerom konvergenie $\rho > 0$.

Potom konverguje stejněměrne na $[a - r, a + r]$ pre $\forall r \in (0, \rho)$.

V. (Abelova veta)

Nech $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - a)^n$ je reálna mocninná rada s polomerom konvergenie $\rho > 0$.

Ak konverguje v $a + \rho$, potom konverguje stejněměrne na $[a, a + \rho]$. Analogicky pre $a - \rho$.

V. (O derivovaní mocninnej rady)

Nech $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - a)^n$ je reálna mocninná rada s polomerom konvergenie $\rho > 0$.

Potom vo vnútri oboru konvergenie ju možno derivovať člen po člene. Inými slovami

$$\text{Pre } \forall x \in (a - \rho, a + \rho) \text{ platí } \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - a)^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n(x - a)^n \right)'.$$

Reálna mocninná rada je preto hladká vo vnútri svojho oboru konvergenie.

Uvažujme súčet reálnej mocninnej rady $s_a(x)$. Prederivovaním

$$s'_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \text{ resp. } s_a^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}.$$

Preto špeciálne po dosadení $x = a$ pre $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$s_a^{(n)}(a) = n! a_n \implies a_n = \frac{s_a^{(n)}(a)}{n!}$$

Vidno, že dve rôzne mocninné rady (líšiac sa v koeficientoch) s kladným polomerom konvergenzie nemôžu mať rovnaký súčet.

Je zjavné, že $\sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$ je n -tý Taylorov polynóm funkcie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$. Pre funkcie, ktoré sú v bode a nekonečnekrát diferencovateľné máme na istom H_a pre $\forall x \in H_a$ Taylorovu radu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Prihliadnuc k predchádzajúcej poznámke platí, že mocninná rada s kladným polomerom konvergenzie je Taylorovou radou svojej súčtovej funkcie.

Pri opačnej implikácii treba ustrážiť analytickosť.

Riemannov integrál

DEF. (Rozdelenie intervalu)

Uvažujme interval $[a, b]$. **Rozdelenie** $[a, b]$ chápeme ako konečnú množinu $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ takú, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Body x_i pre $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ nazývame **deliace body**.

Rozdelenie σ delí pôvodný interval na čiastočné intervaly $[x_{i-1}, x_i]$ pre $\forall i \in \hat{n}$.

Označíme $\Delta i := x_i - x_{i-1}$.

DEF. (Norma rozdelenia)

Uvažujme rozdelenie σ intervalu $[a, b]$. **Norma rozdelenia** σ je definovaná ako $\nu(\sigma) := \max_{i \in \hat{n}} \Delta i$.

DEF. (Normálne rozdelenie intervalu)

Uvažujme postupnosť rozdelení $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ intervalu $[a, b]$.

Túto postupnosť nazveme **normálna** práve vtedy, keď pre normu platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(\sigma_n) = 0$.

DEF. (Horný a dolný integrálny súčet)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, obmedzená na intervale $[a, b]$ s rozdelením σ .

Pre $\forall i \in \hat{n}$ označme

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Horný súčet funkcie f pri rozdelení σ definujeme ako $S(\sigma) := \sum_{i=1}^n M_i \Delta i$.

Horný integrálny súčet je potom $\int_a^b f := \inf_{\sigma} S(\sigma)$.

Obdobne **dolný súčet** funkcie f pri rozdelení σ definujeme ako $s(\sigma) := \sum_{i=1}^n m_i \Delta i$.

Dolný integrálny súčet je potom $\int_a^b f := \sup_{\sigma} s(\sigma)$.

DEF. (Integrálny súčet)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, obmedzená na intervale $[a, b]$ s rozdelením σ .

Pre $\forall i \in \hat{n}$ uvažujme $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Definujeme **integrálny súčet** $\mathcal{I}(\sigma) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta i$.

Poznámka. Zjavne pre každé rozdelenie σ platí $s(\sigma) \leq \mathcal{I}(\sigma) \leq S(\sigma)$.

DEF. (Riemannov integrál)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, obmedzená na intervale $[a, b]$ s rozdelením σ .

Povieme, že f má na $[a, b]$ **Riemannov integrál**, resp. je na $[a, b]$ **integrabilná**, ak $\int_a^b f = \int_a^b f$.

Spoločnú hodnotu horných a dolných integrálnych súčtov značíme $\mathcal{R} \int_a^b f(x) dx$.

DEF. (Primitívna funkcia)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.

Nech funkcia F splňuje pre $\forall x \in (a, b)$ vzťah $F'(x) = f(x)$. Potom ju nazveme **primitívna funkcia** k f na (a, b) .

DEF. (Neurčitý integrál)

V nadväznosti na predchádzajúcu definíciu sa množina všetkých primitívnych funkcií k f nazýva **neurčitý integrál**.

Poznámka. Neurčitý integrál sa počíta analogickými spôsobmi ako určitý integrál (viz nižšie). Prípadne sa ešte používa rozklad na parciálne zlomky.

DEF. (Zovšeobecnený Riemannov integrál)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej. Uvažujme interval (a, b) , kde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$.

Nech je navyše splnený základný predpoklad, kedy pre $\forall t \in (a, b)$ existuje

$$\mathcal{R} \int_a^t f(x) dx, \text{ resp. } \mathcal{R} \int_t^b f(x) dx.$$

Ak existuje aj konečná limita

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \mathcal{R} \int_a^t f(x) dx, \text{ resp. } \lim_{t \rightarrow a^+} \mathcal{R} \int_t^b f(x) dx,$$

hovoríme, že integrál **konverguje**. Inak hovoríme, že integrál **diverguje**.

Hodnotu tejto konečnej limity nazveme **zovšeobecnený Riemannov integrál** funkcie f na intervale $[a, b]$. Značíme $\int_a^b f(x) dx$.

DEF. (Konvergencia integrálu)

Nech f je reálna funkcia reálnej premennej. Uvažujme interval (a, b) , kde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$.

Nech integrál $\int_a^b f(x) dx$ konverguje. Ak aj $\int_a^b |f(x)| dx$ konverguje, konvergencia je **absolútna**. V opačnom prípade je **neabsolútna**.

V. (Nutná a postačujúca podmienka existencie integrálu)

Nech f je obmedzená na $[a, b]$. Integrál $\int_a^b f(x) dx$ existuje práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \sigma \text{ pre interval } [a, b])(S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon).$$

V. (Základná veta integrálneho súčtu)

Nech f je obmedzená na $[a, b]$. Integrál $\int_a^b f(x) dx$ existuje práve vtedy, keď pre každú normálnu postupnosť rozdelení $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je postupnosť integrálnych súčtov $(\mathcal{I}(\sigma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentná.

V. (Integrovateľnosť a spojitost')

Nech f je spojitá na $[a, b]$. Potom f je na $[a, b]$ integrovateľná.

V. (Integrovateľnosť a monotónia)

Nech f je monotónna na $[a, b]$. Potom f je na $[a, b]$ integrovateľná.

V. (Integrovateľnosť a body spojitosti)

Nech f je integrovateľná na $[a, b]$. Potom f má na $[a, b]$ nekonečne mnoho bodov spojitosti.

V. (Integrovateľnosť a absolútna hodnota)

Nech f je integrovateľná na $[a, b]$. Potom $|f|$ je integrovateľná na $[a, b]$ a platí

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

V. (Vlastnosti integrálu ako funkcie hornej medze)

Nech f je integrabilná na $[a, b]$. Definujeme $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) = \int_a^t f(x) dx$.

Potom F je spojitá na $[a, b]$.

Navyše ak f je spojitá v $t_0 \in [a, b]$, tak F je diferencovateľná v $t_0 \in [a, b]$ a platí $F'(t_0) = f(t_0)$.

Poznámka. Analogické tvrdenie platí aj pre vlastnosti integrálu ako funkcie dolnej medze.

Rozdiel je len v tom, že potom $F'(t_0) = -f(t_0)$.

V. (Vlastnosti zovšeobecneného integrálu)

Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a existujú integrály $\int_a^b f(x) dx$ a $\int_a^b g(x) dx$. Potom platí:

- **Linearita**

Pre $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b (\alpha f + g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

- **Aditivita v medziach**

Pre $\forall c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$ platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

- **Nerovnosti**

Pre $\forall x \in (a, b)$, $f(x) \leq g(x)$ platí

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

- Integrál nezávisí na zmene hodnoty funkcie v konečne mnoha bodoch.

V. (Prvá veta o strednej hodnote)

Nech f je nezáporná a integrovateľná na $[a, b]$. Nech fg je integrovateľná na $[a, b]$.

Potom existuje $\mu \in [\inf_{x \in [a, b]} g(x), \sup_{x \in [a, b]} g(x)]$ také, že

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b f(x) dx.$$

Poznámka. Ak by bola g spojitá na $[a, b]$ dal by sa záver tvrdenia formulovať nasledovne:

...existuje $\mu \in [a, b]$ také, že

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(\mu) \int_a^b f(x) dx.$$

V. (Druhá veta o strednej hodnote)

Nech g je monotónna na $[a, b]$. Nech f je integrovateľná na $[a, b]$.

Potom existuje $\xi \in [a, b]$ také, že

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

Formulujeme tri dôležité tvrdenia pre výpočet integrálu - Newtonova formula, per partes a substitúcia. U každého z nich uvedieme aj zobecnenie, pri ktorom predpokladáme prvú formu základného predpokladu pre zobecný integrál. Tzn. pre $\forall t \in (a, b)$ existuje $\mathcal{R} \int_a^t f(x) dx$ a vo vetách nebudeme uvažovať $a = -\infty$. Pre druhú formu by boli tvrdenia analogické.

Predpoklady si občas zosilujeme, aby sa to lepšie pamätalo. Napr. predpoklad spojitej derivácie zosilujeme na predpoklad spojitej diferencovateľnosti.

V. (Newtonova formula pre určitý integrál)

Nech $-\infty < a < b < +\infty$ a existuje integrál $\int_a^b f(x) dx$.

Nech navyše existuje spojitá primitívna funkcia F k f na (a, b) . Potom

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b.$$

Poznámka. Požadovať existenciu integrálu je netriviálny predpoklad. Ďalej rovnosť $F'(x) = f(x)$ stačí požadovať až na konečný počet výnimiek a integrál roztrhať vďaka aditivite v medziach.

V. (Newtonova formula pre zobecnený integrál)

Nech $-\infty < a < b \leq +\infty$ a existuje integrál $\mathcal{R} \int_a^t f(x) dx$ pre $\forall t \in [a, b)$. Nech navyše existuje spojitá primitívna funkcia F k f na (a, b) , pričom $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ sú konečné. Potom

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) := [F(x)]_a^b.$$

V. (Per partes pre určitý integrál)

Nech $-\infty < a < b < +\infty$. Nech f, g sú spojité na $[a, b]$ a diferencovateľné na (a, b) .

Za predpokladu existencie príslušných integrálov platí

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

V. (Per partes pre zobecnený integrál)

Nech $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Nech f, g sú spojitodiferencovateľné na $[a, b)$, pričom $\lim_{x \rightarrow b^-} (fg)(x)$ je konečná.

Ak existuje jeden z integrálov, potom existuje aj druhý a platí

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

V. (Substitúcia pre určitý integrál)

Nech φ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a diferencovateľná na (α, β) . Ďalej nech f je spojitá na $\varphi[\alpha, \beta]$.

Za predpokladu existencie príslušných integrálov a po označení $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b f(x) dx.$$

V. (Substitúcia pre zobecnený integrál)

Nech φ je ostro monotónna a spojitodiferencovateľná na $[\alpha, \beta)$. Ďalej nech f je spojitá na $\varphi[\alpha, \beta)$.

Ak existuje jeden z integrálov, potom existuje aj druhý a po označení $a = \varphi(\alpha)$, $b = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b f(x) dx.$$

Lebesgueov integrál

S Vránom sme robili Danielovu konštrukciu Lebesgueovho integrálu, ktorá úplne vynecháva teóriu miery a stavia na stupňovitých funkciách. Funkcia je stupňovitá na $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď existuje isté rozdelenie $\mathcal{I}$ také, že na vnútrajšku každého čiastočného intervalu je funkcia konštantná. Na štátniciach z AMSM je možné predviesť každopádne aj tento spôsob zavedenia.

DEF. (Základné funkcie)

Nech X je ľubovoľná množina.

Súbor základných funkcií $H(X)$ ² je trieda funkcií $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, pre ktoré platí:

- Sú obmedzené.
- Pre $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall h, k \in H(X)$ platí $(\alpha h + k) \in H(X)$.
- Pre $\forall h \in H(X)$ platí $|h| \in H(X)$.

DEF. (Základný integrál)

Nech X je ľubovoľná množina, $H(X)$ súbor základných funkcií.

Základný integrál je funkcionál, pre ktorý platí:

- **Linearita**
Pre $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall h, k \in H(X)$ platí $I(\alpha h + k) = \alpha I(h) + I(k)$.
- **Nezápornosť**
Pre $\forall h \in H(X), h \geq 0$ platí $I(h) \geq 0$.
- **Spojitosť**
Pre $\forall (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H(X), h_n \geq 0, h_n \geq h_{n+1}$ platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} I(h_n) = 0$.

DEF. (Množina miery 0 pomocou súboru základných funkcií)

Nech X je ľubovoľná množina, $H(X)$ súbor základných funkcií. Nech $Z \subset X$.

Z nazveme **množina miery 0** ($\mu(Z) = 0$) práve vtedy, keď

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H(X), h_n \geq 0, h_n \geq h_{n+1})$ také, že $(\forall x \in Z)(\sup_{n \in \mathbb{N}} h_n(x) \geq 1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(I(h_n) < \varepsilon)$.

DEF. („Skoro všade“)

Nech X je ľubovoľná množina, $H(X)$ súbor základných funkcií. Nech $Z \subset X$.

Výrok platí **μ -skoro všade** na množine X práve vtedy, keď $\mu(Z) = 0$ a súčasne pre $\forall x \in X \setminus Z$ výrok platí. Značíme *s.v.* X .

Poznámka. Zavádzame $f \sim g \iff f(x) = g(x)$ *s.v.* na X . Ďalej taktiež:

- $f \lesssim g \iff f(x) \leq g(x)$ *s.v.* na X .
- $f \gtrsim g \iff f(x) \geq g(x)$ *s.v.* na X .
- $h_n \rightarrow \iff \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x)$ *s.v.* na X .
- $h_n \nearrow f \iff \forall n \in \mathbb{N}, h_n \lesssim h_{n+1} \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = f(x)$ *s.v.* na X .
- $h_n \searrow f \iff \forall n \in \mathbb{N}, h_n \gtrsim h_{n+1} \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = f(x)$ *s.v.* na X .

²Vlastne požadujeme, aby $H(X)$ bol vektorový priestor obmedzených funkcií, ktorý s každou funkciou obsahuje aj jej absolútnu hodnotu.

DEF. (Trieda $\Lambda^+(X)$)

Nech X je ľubovoľná množina, $H(X)$ súbor základných funkcií.

Trieda $\Lambda^+(X)$ je trieda funkcií $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ktoré splňujú, že $\exists (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H(X), h_n \nearrow f$.

DEF. (Integrál na $\Lambda^+(X)$)

Nech $f \in \Lambda^+(X)$. **Integrál na** $\Lambda^+(X)$ definujeme ako $I(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(h_n)$.

DEF. (Trieda $\mathcal{L}^+$)

Nech X je ľubovoľná množina, $H(X)$ súbor základných funkcií.

Trieda $\mathcal{L}^+$ je trieda funkcií z $\Lambda^+(X)$, pre ktoré navyše platí $(\exists c > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(I(h_n) \leq c)$, tzn.

$$f \in \mathcal{L}^+(X) \iff f \in \Lambda^+(X) \wedge I(f) < +\infty.$$

DEF. (Trieda $\Lambda(X)$)

Nech X je ľubovoľná množina, $H(X)$ súbor základných funkcií. Nech $f, g \in \Lambda^+(X)$, pričom aspoň jedna z nich je z $\mathcal{L}^+(X)$. **Trieda** $\Lambda(X)$ je trieda funkcií $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ktoré splňujú $\varphi \sim f - g$.

DEF. (Integrál na $\Lambda(X)$)

Nech $\varphi \in \Lambda(X)$. **Integrál na** $\Lambda(X)$ definujeme ako $I(\varphi) = I(f) - I(g)$.

Tento integrál nazývame aj **Lebesgueov integrál** a značíme $\int_X \varphi(x) dx$ alebo jednoducho $\int_X \varphi$.

DEF. (Trieda $\mathcal{L}(X)$)

Nech X je ľubovoľná množina, $H(X)$ súbor základných funkcií. Nech $f, g \in \mathcal{L}^+(X)$.

Trieda $\mathcal{L}(X)$ je trieda funkcií $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ktoré splňujú $\varphi \sim f - g$.

DEF. (Integrabilita a integrál na množine)

Nech X je ľubovoľná množina, $M \subset X$.

Ak $f \in \mathcal{L}(M)$, tak f je **integrabilná na** M . Ak $f \in \Lambda(M)$, tak f **má integrál na** M .

DEF. (Charakteristická funkcia)

Nech X je ľubovoľná množina, $M \subset X$.

Charakteristická funkcia množiny M je definovaná ako

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in M, \\ 0 & \text{pre } x \in X \setminus M. \end{cases}$$

DEF. (Merateľná funkcia)

Nech X je ľubovoľná množina, $H(X)$ súbor základných funkcií.

Funkcia $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je **merateľná** práve vtedy, keď $\exists (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H(X), h_n \rightarrow \varphi$.

Množinu merateľných funkcií označíme $\mathcal{M}$.

DEF. (Merateľná množina)

Nech X je ľubovoľná množina, $M \subset X$. M je **merateľná množina** práve vtedy, keď χ_M je merateľná funkcia. **Miera množiny** je definovaná ako $\mu(M) := I(\chi_M)$.

DEF. (Množina miery 0 pomocou merateľných funkcií)

Nech X je ľubovoľná množina, $M \subset X$. M je **množina miery 0** práve vtedy, keď $\chi_M \sim 0$, tzn. jej charakteristická funkcia je nulová skoro všade.

V. (Vlastnosti triedy $\Lambda^+(X)$)

Nech $\alpha \geq 0, f, g, \in \Lambda^+(X)$. Celkovo platí:

- $(f + g) \in \Lambda^+(X)$.
- $(\alpha f) \in \Lambda^+(X)$.
- $f^+ = \max(0, f) \in \Lambda^+(X)$.
- $\max(f, g), \min(f, g) \in \Lambda^+(X)$.

V. (O integrále funkcií z $\Lambda^+(X)$)

Nech $\alpha \geq 0, f, g, \in \Lambda^+(X)$. Potom platí:

- $I(\alpha f + g) = \alpha I(f) + I(g)$ ak obe strany majú zmysel.
- $(f \gtrsim g) \implies I(f) \geq I(g)$.

V. (Uzavretosť $\Lambda^+(X)$)

Ak $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Lambda^+(X), f_n \nearrow f$. tak $f \in \Lambda^+$. Navyše platí $I(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n)$.

V. (Vlastnosti triedy $\Lambda(X)$)

Nech $\alpha \in \mathbb{R}, \varphi, \psi \in \Lambda(X)$. Celkovo platí:

- $(\varphi \pm \psi) \in \Lambda(X)$ ak aspoň jedno z $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$.³
- $(\alpha \varphi) \in \Lambda(X)$.
- $\varphi^+ = \max(0, \varphi), \varphi^- = \max(0, -\varphi) \in \Lambda(X)$. Preto aj $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^- \in \Lambda(X)$.
- $\max(\varphi, \psi), \min(\varphi, \psi) \in \Lambda(X)$.

V. (O integrále funkcií z $\Lambda(X)$)

Nech $\alpha \in \mathbb{R}, \varphi, \psi \in \Lambda(X)$. Potom platí:

- $I(\alpha \varphi + \psi) = \alpha I(\varphi) + I(\psi)$ ak obe strany majú zmysel.
- $(\varphi \gtrsim 0) \implies I(\varphi) \geq 0$. Pre túto s.v. nezápornú φ platí dokonca $\varphi \sim 0 \iff I(\varphi) = 0$.

V. (Rozklad Λ)

Platí $\varphi \in \Lambda \iff (\varphi^+ \in \Lambda \wedge \varphi^- \in \Lambda) \wedge (\varphi^+ \in \mathcal{L} \vee \varphi^- \in \mathcal{L})$.

Poznámka. Veta vraví, ako nájsť konkrétne f, g z definície $\varphi \in \Lambda$. Môžu nimi byť napr. φ^+ a φ^- .

³Aby sme zabránili $\varphi + \psi = +\infty - \infty$.

V. (Leviho veta pre rady)

Nech $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$, $\varphi_n \gtrsim 0$. Nech $\varphi \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n$. Potom $\varphi \in \Lambda$ a $I(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} I(\varphi_n)$.

V. (Leviho veta)

Nech $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$, $\varphi_n \nearrow \varphi$. Potom $\varphi \in \Lambda$ a $I(\varphi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(\varphi_n)$.

Ak navyše $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(|I(\varphi_n)| \leq c)$ tak $\varphi \in \mathcal{L}$.

V. (Lebesgueova veta)

Nech $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$, $\varphi_n \rightarrow \varphi$ a navyše $(\exists \varphi_0 \in \mathcal{L})(\forall n \in \mathbb{N})(|\varphi_n| \lesssim \varphi_0)$.

Potom $\varphi \in \mathcal{L}$ a $I(\varphi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(\varphi_n)$.

Poznámka. Slovné, postupnosť integrabilných funkcií je integrabilná práve vtedy, keď pre ňu existuje integrabilná majoranta. Veta môže byť rozšírená dokonca na $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$.

V. (Fatauova veta)

Nech $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$, $\varphi_n \rightarrow \varphi$ a navyše $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(I(|\varphi_n|) \leq c)$.

Potom $\varphi \in \mathcal{L}$ a $I(|\varphi|) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(|\varphi_n|) \leq c$.

V. (O integrále funkcií z $\mathcal{M}$)

Nech $\varphi \in \mathcal{M}$. Potom platí:

- $(\exists \varphi_0 \in \mathcal{L})(|\varphi| \lesssim \varphi_0) \implies (\varphi \in \mathcal{L})$.
- $(\exists \psi \in \Lambda)(I(\psi) = +\infty \wedge \varphi \gtrsim \psi) \implies (\varphi \in \Lambda)(I(\varphi) = +\infty)$.
Analogicky pre $-\infty$ u nerovnosti $\varphi \lesssim \psi$.

V. (Uzavretosť $\mathcal{M}$)

Ak $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$, $\varphi_n \rightarrow \varphi$, tak $\varphi \in \mathcal{M}$.

V. (Rozklad $\mathcal{M}$)

Platí $\varphi \in \mathcal{M} \iff (\exists f, g \in \Lambda^+)(\varphi \sim f - g)$.

V. (Fubiniho veta)

Nech $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ sú merateľné množiny. Nech $f \in \Lambda(A \times B)$. Potom platí:

- Pre s.v. $x \in A$ je $f(x, \cdot) \in \Lambda(B)$.

•

$$\int_B f(\cdot, y) dy \in \Lambda(A).$$

- Integrál možno potom prakticky počítať ako

$$\int_{A \times B} f(x, y) d(x, y) = \int_A \left(\int_B f(\cdot, y) dy \right) (x) dx.$$

V. (O substitúcií)

Nech zobrazenie $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je difeomorfizmus, tzn. φ aj φ^{-1} sú spojitě diferencovateľné.

Nech $A \subset \text{Ran } \varphi$. Za predpokladu, že má aspoň jedna strana rovnosti zmysel, platí

$$\int_A f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(t)) |\det \varphi'(t)| dt.$$

Výraz $|\det \varphi'(t)|$ značí absolútnu hodnotu z Jacobiánu zobrazenia.

V. (O limite)

Nech (V, ρ) je metrický priestor, množina parametrov $A \subset V$ a $M \subset \mathbb{R}^n$.

Nech zobrazenie $f : M \times A \rightarrow \mathbb{R}$ a ešte platí:

- Pre s.v. $x \in M$ je $\lim_{\substack{\alpha \in A, \\ \alpha \rightarrow \alpha_0}} f(x, \alpha) = \varphi(x)$, tzn. $\alpha_0 \in A'$ je z množiny hromadných bodov A .
- Pre $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$ je $f(\cdot, \alpha)$ merateľná na M .
- Existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ pre s.v. $x \in M$ a $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$ taká, že $|f(x, \alpha)| \leq g(x)$.

Potom možno zameniť limitu a integrál, tzn. platí $\varphi \in \mathcal{L}(M)$,

$$\lim_{\substack{\alpha \in A, \\ \alpha \rightarrow \alpha_0}} \int_M f(x, \alpha) dx = \int_M \lim_{\substack{\alpha \in A, \\ \alpha \rightarrow \alpha_0}} f(x, \alpha) dx = \int_M \varphi(x) dx.$$

V. (O spojitosti)

Nech (V, ρ) je metrický priestor, množina parametrov $A \subset V$ a $M \subset \mathbb{R}^n$.

Nech zobrazenie $f : M \times A \rightarrow \mathbb{R}$ a ešte platí:

- Pre s.v. $x \in M$ je $f(x, \cdot)$ spojitá na A .
- Pre $\forall \alpha \in A$ je $f(\cdot, \alpha)$ merateľná na M .
- Existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ pre s.v. $x \in M$ a $\forall \alpha \in A$ taká, že $|f(x, \alpha)| \leq g(x)$.

Potom integrál je spojitý v parametri, tzn. platí

$$F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha) dx \text{ spojitá na } A.$$

V. (O derivácií)

Nech $\mathbb{R}$ je uvažovaný metrický priestor, množina parametrov $I = I^\circ \subset \mathbb{R}$ a $M \subset \mathbb{R}^n$.

Nech zobrazenie $f : M \times I \rightarrow \mathbb{R}$ a ešte platí:

- Pre s.v. $x \in M$ je $f(x, \cdot)$ diferencovateľná na I .
- Pre $\forall \alpha \in I$ je $f(\cdot, \alpha)$ merateľná na M a navyše $\exists \alpha_0 \in I$ pre ktoré je integrabilná na M .
- Existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ pre s.v. $x \in M$ a $\forall \alpha \in I$ taká, že $\left| \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq g(x)$.

Potom možno zameniť deriváciu a integrál, tzn. platí $f(\cdot, \alpha) \in \mathcal{L}(M)$, $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\cdot, \alpha) \in \mathcal{L}(M)$,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_M f(x, \alpha) dx = \int_M \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx.$$

Komplexná analýza

DEF. (Argument komplexného čísla)

Argument komplexného čísla $z \in \mathbb{C}$ je množina $\arg z = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\alpha}\}$.

Nech $\beta \in \mathbb{R}$. Potom pre $z \neq 0$ je množina $\arg z \cap (\beta - \pi, \beta + \pi)$ jednoprvková. Jej jediný prvok označíme ako $\arg_\beta z$, čím definujeme funkciu $\arg_\beta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (\beta - \pi, \beta + \pi)$.

Príklady elementárnych funkcií v $\mathbb{C}$:

$$\exp[z] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg_0 z,$$

$$(z)^\alpha = \exp[\alpha \ln z].$$

Pozor na funkcie $\cos(z), \sin(z)$. V $\mathbb{C}$ nie sú obmedzené!

Navyše z Moivreovej formuly dostávame

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \implies \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

DEF. (Integrál $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$)

Nech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. **Integrál** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ chápeme ako

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx.$$

DEF. (Integrál $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$)

Uvažujme dráhu $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Nech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá na $\langle \varphi \rangle$.

Integrál $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ chápeme ako

$$\int_\varphi f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Poznámka. S týmto si vystačíme, ale podotýkame, že definícia sa dá rôzne zobecniť.

Napr. možno požadovať po častiach spojitosti diferencovateľnú dráhu a definovať integrál ako súčet integrálov cez jednotlivé časti. Za istých okolností by sme mohli upustiť od požiadavky spojitosti f na dráhe.

DEF. (Komplexne diferencovateľná funkcia)

Nech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in (\operatorname{Dom} f)^\circ$. Funkcia f je v bode z_0 **komplexne diferencovateľná** práve vtedy, keď existuje konečná limita $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Značíme $f'(z_0)$.

DEF. (Holomorfná funkcia)

Nech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in (\operatorname{Dom} f)^\circ$. Funkcia f je v bode z_0 **holomorfná** práve vtedy, keď je komplexne diferencovateľná na istom okolí H_{z_0} tohto bodu.

Funkciu nazveme **holomorfná na množine** $M \subset \mathbb{C}$ práve vtedy, keď je holomorfná v každom bode tejto množiny.

DEF. (Izolovaný singulárny bod)

Nech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfná na kruhu $B(z_0, R)$ pre isté $R > 0$ a nie je holomorfná v z_0 .

Potom z_0 nazveme **izolovaný singulárny bod** funkcie f .

DEF. (Index bodu)

Uvažujme dráhu $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je uzavretá a po častiach hladká. Nech $z \notin \langle \varphi \rangle$.

Index bodu z vzhľadom k dráhe φ definujeme vzťahom

$$\text{ind}_{\varphi} z = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varphi} \frac{1}{\xi - z} d\xi.$$

Poznámka. Hodnota daného integrálu je vždy celé číslo. Index možno geometricky interpretovať ako počet obehov krivky φ okolo bodu z v kladnom zmysle.

DEF. (Vnútrajšok a vonkajšok dráhy)

Uvažujme dráhu $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je uzavretá a po častiach hladká.

Vnútrajšok dráhy φ definujeme ako

$$\text{int } \varphi = \{z \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle \mid \text{ind}_{\varphi} z \neq 0\}.$$

Vonkajšok dráhy φ definujeme ako

$$\text{ext } \varphi = \{z \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle \mid \text{ind}_{\varphi} z = 0\}.$$

DEF. (Jordanova dráha)

Uvažujme dráhu $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Nech navyše platí, že táto dráha je spojitá, uzavretá a prostá (nepretína sa). Potom ju nazveme **Jordanova dráha**.

Jej **kladná orientácia** je daná vzťahom $\text{ind}_{\varphi} z > 0$ pre isté $z \in \text{int } \varphi$.

DEF. (Laurentova rada)

Nech $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Laurentova rada so stredom v bode z_0 je definovaná ako $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. Súčet tejto rady definujeme ako $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ v bodoch, kde obe sumy konvergujú. Prvá suma je **regulárna časť** a druhá suma je **hlavná časť** Laurentovho rozvoja.

DEF. (Singularita pre Laurentovu radu)

Nech funkcia f má izolovaný singulárny bod z_0 , $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ príslušná Laurentova rada.

Singularita pre danú Laurentovu radu so stredom v bode z_0 môže byť:

- **Odstrániteľná** práve vtedy, keď pre $(\forall n \in \mathbb{Z}^-)(a_n = 0)$.
Např. funkcia $\frac{\sin(z)}{z}$ v bode $z_0 = 0$.
- **Rádu p (p pól)** práve vtedy, keď $(\exists p \in \mathbb{Z}^-)(a_p \neq 0) \wedge (\forall n < p)(a_n = 0)$.
Např. funkcia $\frac{1+z^2}{z^3(1+z^2)}$ v bode $z_0 = 0$ má pól 3. stupňa.
- **Podstatná** práve vtedy, keď $(\exists^{\infty} n \in \mathbb{Z}^-)(a_n \neq 0)$.
Např. funkcia $\exp[\frac{1}{z}]$ v bode $z_0 = 0$.

DEF. (Reziduum funkcie)

Nech funkcia f má izolovaný singulárny bod z_0 , $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ príslušná Laurentova rada.

Reziduum funkcie f vzhľadom k bodu z_0 definujeme vzťahom $\text{rez}_{z_0} f := a_{-1}$.

Poznámka. Reziduum je pre funkciu vzhľadom k bodu, zatiaľ čo index je pre bod vzhľadom k funkcii (krivke).

V. (O komplexnej diferencovateľnosti)

Nech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Topologicky je normovaný priestor $\mathbb{C}$ totožný s normovaným priestorom $\mathbb{R}^2$.

Preto možno $\forall z \in \text{Dom } f$ zapísať ako $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Po označení reálnej časti funkcie ako f_1 a imaginárnej časti funkcie ako f_2 dostávame

$$f(z) = f(x + iy) = f_1(x, y) + if_2(x, y).$$

Funkcia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 = x_0 + iy_0$ práve vtedy, keď je diferencovateľné vyššie uvedené zobrazenie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ v bode (x_0, y_0) a zároveň platia **Cauchyho-Riemannove podmienky**:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = +\frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Zostaviť v $\mathbb{R}$ funkciu, ktorá by bola všade spojitá a nikde diferencovateľná je veľmi náročné (i keď také funkcie existujú, napr. Weierstrassova funkcia).

V $\mathbb{C}$ toto splňujú už aj triviálne funkcie, ako napr. $\bar{z} = x - iy = x + i(-y)$.

Tá je na celom $\mathbb{C}$ spojitá. Napriek tomu nie je splnená prvá CR podmienka, takže nie je na $\mathbb{C}$ nikde diferencovateľná.

V. (Konštantná holomorfná funkcia)

Nech $M \subset \mathbb{C}$ súvislá, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Ak je f na M holomorfná, tak je f na M konštantná.

V. (Newtonova formula pre holomorfné funkcie)

Uvažujme dráhu $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b])$. Nech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá na $\langle \varphi \rangle$.

Ak existuje spojitá primitívna funkcia F k funkci f na $\langle \varphi \rangle$, tak platí

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b (F \circ \varphi)' dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F(\varphi(x))]_a^b.$$

Integrál cez uzavretú krivku je zjavne nulový.

V. (O spojitosti)

Nech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Ak je táto funkcia v bode z_0 komplexne diferencovateľná, tak je v tomto bode spojitá.

V. (Aritmetika komplexných derivácií)

Nech $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ také, že existujú $f'(z_0), g'(z_0)$. Potom pre ľubovoľné $c \in \mathbb{C}$ platí:

- $(f \pm cg)'(z_0) = f'(z_0) \pm cg'(z_0)$.
- $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$ pre $g(z_0) \neq 0$.

V. (Komplexná derivácia zloženej funkcie)

Nech $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ také, že existujú $g'(z_0), f'(g(z_0))$.

Potom existuje derivácia zloženej funkcie $f \circ g$ v bode z_0 a platí

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

V. (Princíp deformácie dráhy)

Uvažujme Jordanove dráhy φ_1, φ_2 , ktoré sú navyše po častiach hladké. Nech tieto dráhy majú rovnakú orientáciu a $\langle \varphi_1 \rangle \subset \text{int } \varphi_2$.

Potom ak je f spojitá na $\overline{\text{int } \varphi_2} \setminus \text{int } \varphi_1$ a holomorfná na $\text{int } \varphi_2 \setminus \overline{\text{int } \varphi_1}$, tak platí $\oint_{\varphi_2} f = \oint_{\varphi_1} f$.

V. (Cauchyho integrálna veta)

Uvažujme Jordanovu dráhu φ , ktorá je navyše po častiach hladká.

Nech f je spojitá na $\overline{\text{int } \varphi}$ a holomorfná na $\text{int } \varphi$. Potom $\oint_{\varphi} f = 0$.

V. (Cauchyho integrálny vzorec)

Uvažujme Jordanovu dráhu φ , ktorá je navyše po častiach hladká.

Nech f je spojitá na $\overline{\text{int } \varphi}$ a holomorfná na $\text{int } \varphi$. Potom pre $\forall z \in \text{int } \varphi$ platí

$$f(z) = \frac{\text{ind}_{\varphi} z}{2\pi i} \oint_{\varphi} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

V. (Reziduová veta)

Uvažujme Jordanovu dráhu φ , ktorá je navyše po častiach hladká. Nech ďalej platí:

- G otvorená množina.
- $M \subset G$ množina všetkých izolovaných singulárnych bodov funkcie f .
- f je na $G \setminus M$ holomorfná.
- $\overline{\text{int } \varphi} \subset G$, $\langle \varphi \rangle \cap M = \emptyset$, tzn. φ neprechádza žiadnym bodom množiny M .

Potom platí

$$\oint_{\varphi} f(z) dz = \sum_{a \in M \cap \text{int } \varphi} 2\pi i (\text{rez}_a f)(\text{ind}_{\varphi} a).$$

V. („Skoro Laurentova veta“)

Nech f je holomorfná na kruhu $B(z_0, R)$ pre isté $R > 0$.

Uvažujme Jordanovu dráhu $\langle \varphi \rangle \subset B(z_0, R)$, $z_0 \in \text{int } \varphi$. Potom pre $\forall z \in B(z_0, R)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ kde } a_n = \frac{\text{ind}_{\varphi} z_0}{2\pi i} \oint_{\varphi} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Navyše n -tú deriváciu funkcie f v bode z_0 možno vyjadriť ako krivkový integrál

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{\text{ind}_{\varphi} z_0}{2\pi i} (n!) \oint_{\varphi} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

V. (Laurentova veta)

Nech f je holomorfná na medzikruží $P(z_0, r, R)$ pre isté $R > r > 0$.

Uvažujme Jordanovu dráhu $\langle \varphi \rangle \subset P(z_0, r, R)$, $z_0 \in \text{int } \varphi$. Potom pre $\forall z \in P(z_0, r, R)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ kde } a_n = \frac{\text{ind}_{\varphi} z_0}{2\pi i} \oint_{\varphi} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Otázky LAA

Zobrazenia, matice, sústavy

DEF. (Lineárne zobrazenie)

Nech V, W sú VP nad rovnakým telesom T . Zobrazenie $A : V \rightarrow W$ nazveme **lineárne** práve vtedy, keď platia nasledujúce dve podmienky:

- **Aditivita**

Pre $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí $A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$.

- **Homogenita**

Pre $\alpha \in T, \vec{x} \in V$ platí $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x})$.

DEF. (Množina lineárnych zobrazení)

Nech V, W sú VP nad rovnakým telesom T . **Množina lineárnych zobrazení** z predchádzajúcej definície sa značí ako $\mathcal{L}(V, W)$. Pre zobrazenia $A, B \in \mathcal{L}(V, W)$ možno zaviesť operácie:

- **Sčítanie zobrazení**

Pre $\vec{x} \in V$ definujeme $(A + B)(\vec{x}) := A(\vec{x}) + B(\vec{x})$.

- **Násobenie zobrazení číslom z telesa**

Pre $\alpha \in T, \vec{x} \in V$ definujeme $(\alpha A)(\vec{x}) := \alpha A(\vec{x})$.

Množina $\mathcal{L}(V, W)$ s takto zavedenými operáciami tvorí VP nad T .

DEF. (Druhy zobrazení)

Nech $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Pre A zavádzame nasledujúce názvoslovie:

- **Monomorfné**, ak je prosté. To znamená, že pre $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí $A(\vec{x}) = A(\vec{y}) \implies \vec{x} = \vec{y}$.
- **Epimorfné**, ak je „na W “. To znamená, že pre $\vec{z} \in W$ platí, že $\exists \vec{x} \in V, A\vec{x} = \vec{z}$.
- **Izomorfné**, ak je bijektívne. To znamená, že je súčasne monomorfné aj epimorfné.

Poznámka. Možno si všimnúť, že monomorfné a prosté nie sú zameniteľné pojmy. Rozdiel je v nutnom požiadavku na linearitu zobrazenia. Obdobne pre ostatné pojmy.

DEF. (Izomorfné priestory)

Nech $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Povieme, že V a W sú **izomorfné** práve vtedy, keď A je izomorfizmus. Značíme $V \cong W$.

Poznámka. Izomorfizmus možno definovať nad množinami, algebraickými štruktúrami, grafmi, metrickými či topologickými priestormi... V podstate ide o zobrazenie, ktoré zachováva vlastnosti.

DEF. (Lineárny a regulárny operátor)

Nech $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Ak $V = W$, nazveme A **lineárny operátor** a píšeme $A \in \mathcal{L}(V)$.

Ak je navyše A izomorfné, nazveme ho **regulárny operátor**.

DEF. (Lineárny funkcionál)

Nech $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Ak $W = T$, nazveme A **lineárny funkcionál** a píšeme $A \in V^\#$.

Priestor $V^\#$ nazývame **duálny priestor** k V .

DEF. (Hodnosť, jadro a defekt zobrazenia)

Nech $A \in \mathcal{L}(V, W)$. **Hodnosť** A nazývame $\dim A(V)$ a značíme $h(A)$. **Jadro** A nazývame $A^{-1}(\vec{0}_W) = \{\vec{x} \in V \mid A(\vec{x}) = \vec{0}_W\}$ a značíme $\ker A$. **Defekt** A je $\dim \ker A$ a značíme $d(A)$.

DEF. (Matica zobrazenia)

Nech V, W sú konečnorozmerné VP nad rovnakým T . Nech $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báza V , $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je báza W . Uvažujme zobrazenie $A \in \mathcal{L}(V, W)$.

Matica zobrazenia A v bázach $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ je matica ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ typu $m \times n$ definovaná pre $\forall j \in \hat{n}$ ako

$$[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\cdot, j} := (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}.$$

Poznámka. Maticu možno definovať rôznymi analogickými spôsobmi.

- Priamy rozpis: ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = [(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} \dots (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}]$.
- Súradnicový funkcionál v bázi $\mathcal{Y}$: $[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{i, j} := y_i^\#(A\vec{x}_j)$ pre $i \in \hat{m}, j \in \hat{n}$.

DEF. (Matica prechodu)

Nech V je konečnorozmerný VP nad T . Nech $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ sú bázy V .

Matica prechodu od $\mathcal{X}$ k $\mathcal{Y}$ je matica ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$ definovaná vzťahom $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$.

DEF. (Sústava m lineárnych algebraických rovníc pre n neznámých)

Uvažujme sústavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

kde pre $\forall i \in \hat{m}, j \in \hat{n}$ sú a_{ij}, b_i komplexné čísla.

Matica sústavy $\mathbb{A}$ je tabuľka koeficientov u neznámých a **vektor pravej strany $\vec{b}$** je stĺpec koeficientov na pravej strane rovností. Stĺpec komplexných čísel, pre ktoré sú všetky rovnosti splnené, nazývame **riešenie sústavy $\vec{x}$** . Celkovo máme

$$\mathbb{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \vec{b} := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \vec{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Rozšírenou maticou sústavy rozumieme maticu $[\mathbb{A} \mid \vec{b}]$. Sústava je **homogénna** (bez pravej strany), ak je stĺpec pravej strany nulový. Táto sústava má vždy aspoň jedno riešenie, ktorým je nulový vektor. Toto riešenie nazývame **triviálne**. Ak má stĺpec pravej strany aspoň jednu nenulovú zložku, sústava je **nehomogénna** (s pravou stranou).

Sústavy riešime pomocou ekvivalentných úprav matice, ktorá ju predstavuje:

- Zámena dvoch riadkov.
- Násobenie riadku nenulovým číslom.
- Pripočítanie jedného riadku k druhému riadku.

Tieto úpravy nemenia množinu riešenia sústavy. Takto sa snažíme dostať maticu sústavy do horného stupňovitého tvaru pomocou Gaussovej eliminácie.

- Je-li matice nulová, pak už je v horním stupňovitém tvaru.
- Je-li matice nenulová, prohledáme první sloupec matice a nalezneme nenulový prvek. Odpovídající řádek zaměníme s prvním řádkem. Není-li v prvním sloupci nenulový prvek, postupujeme stejně s druhým sloupcem. Označíme k_1 index prvního sloupce, ve kterém najdeme nenulové číslo. Od každého řádku počínaje druhým odečteme takové násobky prvního řádku, abychom ve sloupci s indexem k_1 dostali nuly.
- Prohledáváme další sloupce, které jsou na řadě, vždy od druhého řádku počínaje. Index prvního sloupce, v němž najdeme nenulový prvek, označíme k_2 . Odpovídající řádek zaměníme s druhým. Od třetího a dalších řádků odečítáme takové násobky druhého řádku, abychom od třetího řádku počínaje vyrobili ve sloupci s indexem k_2 samé nuly.
- Analogicky postupujeme tak dlouho, dokud jsou v prohledávaných sloupcích na potřebných místech nenulové prvky.

V. (Alternatívna definícia lineárneho zobrazenia)

Nech V, W sú VP nad rovnakým T , zobrazenie $A : V \rightarrow W$.

Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- A je lineárne zobrazenie.
- Pre $\forall \alpha \in T$ a $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ platí $A(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha A(\vec{x}) + A(\vec{y})$.
- Pre $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ a $\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ platí

$$A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A(\vec{x}_i).$$

V. (O lineárnych zobrazeniach)

Nech V, W sú VP nad rovnakým T , $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Potom platí:

- A je monomorfné práve vtedy, keď jeho jadro obsahuje len nulový vektor, tzn. $\ker A = \{\vec{0}_V\}$.
- Nech $\dim V = \dim W < +\infty$.
 A je izomorfné práve vtedy, keď je monomorfné alebo epimorfné.
- Ak A je izomorfné, tak existuje k nemu inverzné zobrazenie $A^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$ a toto zobrazenie je taktiež izomorfné. Navyše $h(A) = \dim V = \dim W$.

V. (O zložení lineárnych zobrazení)

Nech V, W, U sú VP nad rovnakým T , $A \in \mathcal{L}(V, W)$, $B \in \mathcal{L}(W, U)$. Potom platí, že zložené zobrazenie $BA \in \mathcal{L}(V, U)$ a navyše:

- $h(BA) \leq h(B)$, pričom rovnosť nastáva pre A epimorfné.
- $h(BA) \leq h(A)$, pričom rovnosť nastáva pre B monomorfné.

V. (Veta o dimenzii)

Nech V, W sú VP nad rovnakým T , $A \in \mathcal{L}(V, W)$, pričom $\dim V < +\infty$.

Potom platí $h(A) + d(A) = \dim V$.

V. (O maticiach zobrazenia)

Nech V, W sú konečnorozmerné VP nad rovnakým T , $A \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{X}$ báza V a $\mathcal{Y}$ báza W .

Potom platí:

- Pre $\forall \vec{x} \in V$ je $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} (\vec{x})_{\mathcal{X}}$.
- Nech $\dim V = \dim W < +\infty$. Potom A je izomorfné práve vtedy, keď ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ je regulárna.
- $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$.

V. (O zložení matíc zobrazenia)

Nech V, W, U sú VP nad rovnakým T .

Nech $A \in \mathcal{L}(V, W)$, $B \in \mathcal{L}(W, U)$, $\mathcal{X}$ báza V , $\mathcal{Y}$ báza W , $\mathcal{Z}$ báza U . Potom platí

$${}^{\mathcal{X}}(BA)^{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{Z}} {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}.$$

V. (Riešenie $A\vec{x} = \vec{b}$)

Nech V, W sú VP nad rovnakým T , $A \in \mathcal{L}(V, W)$, $\vec{b} \in A(V)$. Potom množina všetkých riešení sústavy $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $A^{-1}(\vec{b}) = \vec{a} + \ker A$, kde **partikulárne riešenie** $\vec{a} \in V$ splňuje $A\vec{a} = \vec{b}$.

Poznámka. Samotný predpoklad $\vec{b} \in A(V)$ vynucuje existenciu partikulárneho riešenia. Inak by totiž platilo $A^{-1}(\vec{b}) = \emptyset$.

V. (Frobeniova veta)

Nech $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, $\vec{b} \in T^m$. Potom pre sústavu lineárnych algebraických rovníc $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ platia nasledujúce tvrdenia:

- Označme množinu riešení homogénnej sústavy s maticou $\mathbb{A}$ ako $S_0 := \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}\}$. Potom $S_0 \subset\subset T^n$, $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A})$.
- Sústava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ je riešiteľná práve vtedy, keď hodnosť matice sústavy je rovnaká ako hodnosť rozšírenej matice sústavy, tzn. $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A} \mid \vec{b})$.
- Ak je sústava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ riešiteľná, označme množinu riešení tejto sústavy ako $S := \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}\}$. Potom $S = \vec{a} + S_0$, kde pre partikulárne riešenie $\vec{a}$ platí $\mathbb{A}\vec{a} = \vec{b}$.

Poznámka. Pripomíname rozdiel medzi $S \subset T^n$ (podmnožina) a $S \subset\subset T^n$ (podpriestor). Podpriestor je neprázdna podmnožina uzavretá na operácie sčítanie a násobenie číslom.

V. (Riešenie $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$)

Nech $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $\vec{b} \in T^n$.

Homogénna sústava $\mathbb{A}\vec{x} = 0$ má len triviálne riešenie práve vtedy, keď A je regulárna.

Obdobne nehomogénna sústava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ má len jedno riešenie práve vtedy, keď A je regulárna.

Hermitovské a kvadratické formy

DEF. (Hermitovská forma)

Nech V je VP nad T . **Hermitovská forma** je zobrazenie $h : V \times V \rightarrow T$ pre ktoré platí:

- **Hermitovskosť**

Pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ platí $h(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{h(\vec{y}, \vec{x})}$.

- **Linearita v prvom argumente**¹

Pre $\forall \alpha \in T$ a $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ platí $h(\alpha \vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = \alpha h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{y}, \vec{z})$.

DEF. (Diagonála hermitovskej formy)

V nadväznosti na predchádzajúcu definíciu je **diagonála hermitovskej formy** zobrazenie $Q : V \rightarrow T$ definované pre $\forall \vec{x} \in V$ ako $Q(\vec{x}) = h(\vec{x}, \vec{x})$.

DEF. (Polárna báza)

Nech V je VP nad T , h hermitovská forma na V . **Polárna báza** hermitovskej formy h je báza $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, ktorá splňuje, že pre $\forall i, j \in \hat{n}, i \neq j$ platí $h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0$.

DEF. (Nulpriestor)

Nech V je VP nad T , h hermitovská forma na V . **Nulpriestor** hermitovskej formy h je množina

$$N_h := \{\vec{x} \in V \mid h(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ pre } \forall \vec{y} \in V\}.$$

Dimenziu tohto priestoru nazveme **nulita**.

Hermitovská forma je **regulárna**, ak sa nulita rovná 0. V opačnom prípade je **singulárna**.

DEF. (Kvadratická forma)

Nech V je VP nad T . **Kvadratická forma** je zobrazenie $Q : V \rightarrow T$, pre ktoré platí, že existuje hermitovská forma h , ktorej je Q diagonálou.

DEF. (Polára kvadratickej formy)

V nadväznosti na predchádzajúcu definíciu je **polára kvadratickej formy** spomenutá hermitovská forma, ktorej je Q diagonálou.

Ak hovoríme o polárnej báze, nulpriestore a nulite kvadratickej formy, myslíme tým polárnu bázu, nulpriestor a nulitu jej poláry.

DEF. (Signatura kvadratickej formy)

Nech V je VP nad T , Q kvadratická forma na V . Nech $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je polárna báza.

Označme p, q, r počet kladných čísel, záporných čísel a núl v podstupnosti $(Q(\vec{a}_1), \dots, Q(\vec{a}_n))$.

Číslo p je **kladný index zotrvačnosti**, číslo q je **záporný index zotrvačnosti**.

Hodnosť Q definujeme ako $h(Q) := p + q$. **Signatura** Q je trojica $sg(Q) := (p, q, r)$.

¹V druhom argumente je hermitovská forma antilineárna. To znamená, že α sa z hermitovskej formy vyťahuje ako $\bar{\alpha}$. Každopádne, na MF sa v treťaku formy zavádzajú aj celé opačne, neexistuje jednoznačná konvencia.

DEF. (Charakter kvadratickej formy)

Nech V je VP nad T , Q kvadratická forma na V . Potom u Q rozlišujeme nasledujúce charaktery:

- **Pozitívne definitná (PD)**

$$(\forall \vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{0})(Q(\vec{x}) > 0).$$

- **Pozitívne semidefinitná (PSD)**

$$(\forall \vec{x} \in V)(Q(\vec{x}) \geq 0) \wedge (\exists \vec{x}_0 \in V, \vec{x}_0 \neq \vec{0})(Q(\vec{x}_0) = 0).$$

- **Negatívne definitná (ND)**

$$(\forall \vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{0})(Q(\vec{x}) < 0).$$

- **Negatívne semidefinitná (NSD)**

$$(\forall \vec{x} \in V)(Q(\vec{x}) \leq 0) \wedge (\exists \vec{x}_0 \in V, \vec{x}_0 \neq \vec{0})(Q(\vec{x}_0) = 0).$$

- **Indefinitná (INDEF)**

$$(\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V)(Q(\vec{x}_1) > 0 \wedge Q(\vec{x}_2) < 0).$$

DEF. (Matica kvadratickej formy)

Nech V je VP nad T , Q kvadratická forma na V , h jej polára. Nech $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báza V . **Matica kvadratickej formy** Q v báze $\mathcal{X}$ je definovaná pre $\forall i, j \in \hat{n}$ ako $[\mathcal{X}Q]_{i,j} := h(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$.

DEF. (Skalárny súčin)

Nech V je VP nad T . **Skalárny súčin** je zobrazenie $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow T$, ktoré splňuje, že je hermitovskou formou s PD diagonálou. To znamená, že súčasne platí:

- **Hermitovskosť**

$$\text{Pre } \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \text{ platí } \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}.$$

- **Linearita v prvom argumente**

$$\text{Pre } \forall \alpha \in T, \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V \text{ platí } \langle \alpha \vec{x} + \vec{y} | \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle.$$

- **Pozitívna definitnosť**

$$\text{Pre } \forall \vec{x} \in V \text{ platí } \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0 \text{ a zároveň } \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = 0.$$

DEF. (Norma)

Norma je zobrazenie $\| \cdot \| : V \rightarrow T$ definované pre $\forall \vec{x} \in V$ predpisom $\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$.

Poznámka. Na priestoroch $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ má norma význam veľkosti vektora.

DEF. (Hilbertov priestor)

Každý VP nad telesom T so zadefinovaným skalárnym súčinom nazveme **Hilbertov**.
Značíme ho $\mathcal{H}$.

Poznámka. Poznáme dva najtypickejšie príklady Hilbertových priestorov.

Euklidovský priestor $\mathbb{R}^n$ nad telesom $\mathbb{R}$, kde pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k \wedge \|\vec{x}\| := \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Unitárny priestor $\mathbb{C}^n$ nad telesom $\mathbb{C}$, kde pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ platí

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \wedge \|\vec{x}\| := \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}.$$

DEF. (Ortogonalita a ortonormalita)

Uvažujme Hilbertov priestor $\mathcal{H}$. Nech $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathcal{H}$.

Tieto vektory nazveme **ortogonálne**, keď pre $\forall i, j \in \hat{n}, i \neq j$ platí $\langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = 0$. Špeciálne ak pre dva vektory platí $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$, značíme túto skutočnosť ako $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Tieto vektory nazveme **ortonormálne**, keď pre $\forall i, j \in \hat{n}$ platí $\langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = \delta_{ij}$.

Poznámka. Ak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ sú nenulové OG, tak $\frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|}, \dots, \frac{\vec{x}_n}{\|\vec{x}_n\|}$ sú ON.

DEF. (Ortogonálny doplnok)

Uvažujme Hilbertov priestor $\mathcal{H}$. Nech $M \subset \mathcal{H}, M \neq \emptyset$.

Ortogonálny doplnok M do $\mathcal{H}$ je množina

$$M^\perp := \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0 \text{ pre } \forall \vec{y} \in M\}.$$

V. (Zákon zotrvačnosti kvadratických foriem)

Nech V je VP nad T , Q kvadratická forma na V . Nech $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je polárna báza.

Potom $sg(Q) = (p, q, r)$ nezávisí na voľbe polárnej bázy.

V. (Charakter a signatura)

Nech V je VP nad T , Q kvadratická forma na V . Nech $sg(Q) = (p, q, r)$ jej signatura.

Potom pre $\dim V = n$ platí:

- Q je $PD \iff p = n, q = 0, r = 0$.
- Q je $PSD \iff q = 0, r \neq 0$.
- Q je $ND \iff p = 0, q = n, r = 0$.
- Q je $NSD \iff p = 0, r \neq 0$.
- Q je $INDEF \iff p \neq 0, q \neq 0$.

V. (Vlastnosti kvadratickej formy)

Nech V je VP nad T , Q kvadratická forma na V , h príslušná polára. Potom pre $\forall \alpha \in T, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ platí:

- $Q(\vec{x}) \in \mathbb{R}$.
- $Q(\alpha \vec{x}) = |\alpha|^2 Q(\vec{x})$.
- $Q(\vec{x} + \vec{y}) = Q(\vec{x}) + 2 \operatorname{Re} h(\vec{x}, \vec{y}) + Q(\vec{y})$.
- $Q(\vec{x} + \vec{y}) + Q(\vec{x} - \vec{y}) = 2(Q(\vec{x}) + Q(\vec{y}))$.

V. (Vlastnosti matice kvadratickej formy)

Nech V je VP nad T , Q kvadratická forma na V , h príslušná polára. Nech $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báza V . Potom pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ platí:

- ${}^{\mathcal{X}}Q = ({}^{\mathcal{X}}Q)^H$.
- $h(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x})_{\mathcal{X}}^T {}^{\mathcal{X}}Q \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$.
- $Q(\vec{x}) = (\vec{x})_{\mathcal{X}}^T {}^{\mathcal{X}}Q \overline{(\vec{x})_{\mathcal{X}}}$.
- Pre všetky bázy $\mathcal{Y}$ priestoru V platí ${}^{\mathcal{Y}}Q = ({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})^T {}^{\mathcal{X}}Q \overline{({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})}$.

V. (Silvestrovo kritérium)

Nech V je VP nad T , Q kvadratická forma na V . Nech $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báza V . Potom platí:

- Q je PD práve vtedy, keď sú všetky hlavné subdeterminanty ${}^{\mathcal{X}}Q$ kladné.

$$\text{Pre } \forall k \in \hat{n} : \Delta_k > 0.$$

- Q je ND práve vtedy, keď sú všetky párne hlavné subdeterminanty ${}^{\mathcal{X}}Q$ kladné a nepárne hlavné subdeterminanty ${}^{\mathcal{X}}Q$ záporné.

$$\text{Pre párne } k \in \hat{n} : \Delta_k > 0. \quad \wedge \quad \text{Pre nepárne } k \in \hat{n} : \Delta_k < 0.$$

V. (Spektrálne kritérium)

Nech V je VP nad T , Q kvadratická forma na V . Nech $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báza V . Potom platí:

- Q je PD práve vtedy, keď ${}^{\mathcal{X}}Q$ má len kladné vlastné čísla.
- Q je PSD práve vtedy, keď ${}^{\mathcal{X}}Q$ má vlastné číslo 0 a nemá záporné vlastné čísla.
- Q je ND práve vtedy, keď ${}^{\mathcal{X}}Q$ má len záporné vlastné čísla.
- Q je NSD práve vtedy, keď ${}^{\mathcal{X}}Q$ má vlastné číslo 0 a nemá kladné vlastné čísla.
- Q je INDEF práve vtedy, keď ${}^{\mathcal{X}}Q$ má aspoň jedno kladné a aspoň jedno záporné vlastné číslo.

V. (Cauchy-Schwarzova nerovnosť)

Uvažujme Hilbertov priestor $\mathcal{H}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Potom platí $|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$.

Rovnosť nastáva práve vtedy, ak sú vektory $\vec{x}, \vec{y}$ LZ.

V. (Trojuholníková nerovnosť)

Uvažujme Hilbertov priestor $\mathcal{H}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Potom platí $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Rovnosť nastáva, ak existuje $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$ taká, že $\vec{x} = \alpha \vec{y}$ alebo $\vec{y} = \alpha \vec{x}$.

Poznámka. Myslím, že nemožno obecne povedať, že rovnosť nastáva ak sú vektory $\vec{x}, \vec{y}$ LZ. Totiž máme navyše požiadavku na α , že nemôže byť hocikaké, ale reálne **kladné**.

V. (Besselova nerovnosť)

Uvažujme Hilbertov priestor $\mathcal{H}$, ON vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathcal{H}$. Potom pre ľubovoľné $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí

$$\sum_{i=1}^n |\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2.$$

V. (Pytagorova veta)

Uvažujme Hilbertov priestor $\mathcal{H}$, OG vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Potom platí $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.

V. (Gram-Schmidtova veta)

Uvažujme Hilbertov priestor $\mathcal{H}$, LNz vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathcal{H}$.

Potom existujú OG (ON) vektory $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n \in \mathcal{H}$ také, že pre $\forall k \in \hat{n}$ platí

$$[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]_{\lambda} = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k]_{\lambda}.$$

Poznámka. Ľubovoľné LNz vektory možno ortogonalizovať (následne ortonormalizovať).

To znamená, že môžeme vždy vyrobiť OG resp. ON bázu daného priestoru. Položíme $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$.

Ďalej využijeme kľúčový vzťah z Gram-Schmidtovho ortogonalizačného procesu v tvare

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{x}_{k+1} | \vec{y}_i \rangle}{\|\vec{y}_i\|^2} \vec{y}_i.$$

V. (Rieszova veta)

Uvažujme Hilbertov priestor $\mathcal{H}$.

Ak $\varphi \in \mathcal{H}^{\#}$, potom existuje práve jeden vektor $\vec{y} \in \mathcal{H}$ taký, že pre $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}$ platí $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$.

V. (O ortogonálnom doplnku)

Uvažujme Hilbertov priestor $\mathcal{H}$. Nech $M \subset \mathcal{H}, M \neq \emptyset$.

Potom $M^{\perp} \subset \mathcal{H}$ a $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

V. (O ortogonálnom rozklade)

Uvažujme Hilbertov priestor $\mathcal{H}$. Nech $M \subset \mathcal{H}, \dim M < +\infty$.

Potom $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$ a $M = (M^{\perp})^{\perp}$.

Lineárne operátory a ich vlastné čísla

DEF. (Štvorcová matica)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom maticu nazveme **štvorcová**.

Ak $h(\mathbb{A}) = n$, matica je **regulárna**. V opačnom prípade je **singulárna**.

DEF. (Názvoslovie matica)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Maticu $\mathbb{A}$ nazveme:

- **Diagonálna** práve vtedy, keď všetky jej prvky okrem diagonálnych sú nulové. Pritom na diagonále je aspoň jeden nenulový, tzn. $\mathbb{O}$ nepovažujeme za diagonálnu.
- **Horná trojuholníková** práve vtedy, ak má pod diagonálou nuly.
- **Dolná trojuholníková** práve vtedy, ak má nad diagonálou nuly.
- **Normálna** práve vtedy, keď $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^H\mathbb{A}$.
- **Unitárna** práve vtedy, keď $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{I}$.
Ak $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ spĺňa $\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{I}$, hovoríme, že je **ortogonálna**.
- **Hermitovská** práve vtedy, keď $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$.
Ak $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ spĺňa $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, hovoríme, že je **symetrická**.

Poznámka. Je zjavné, že každá unitárna aj každá hermitovská matica je normálna.

DEF. (Diagonalizovateľná matica)

Nech $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. $\mathbb{A}$ je **podobná** $\mathbb{B}$ práve vtedy, keď existuje regulárna $\mathbb{X}$ taká, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}$.
 $\mathbb{A}$ je **diagonalizovateľná** práve vtedy, keď je podobná diagonálnej matici.

Poznámka. Každá matica $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je podobná matici v Jordanovom kanonickom tvare $\mathbb{J}$.
Táto matica má blokový diagonálny tvar, bloky sú vyrobené postupne pre všetky $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$.
Počet blokov pre dané λ odpovedá $\nu_g(\lambda)$ a súčet rádoov blokov pre dané λ odpovedá zase $\nu_a(\lambda)$.

DEF. (Diagonalizovateľný operátor)

Nech V je VP nad T , $A \in \mathcal{L}(V)$. A je **diagonalizovateľný** práve vtedy, keď existuje báza $\mathcal{X}$ priestoru V taká, že ${}^{\mathcal{X}}A$ je diagonálna (nie len diagonalizovateľná!) matica.

DEF. (Znamienko permutácie)

Nech π permutácia na n . Množinu všetkých takýchto permutácií označíme S_n .

Nech I_π počet usporiadaných dvojíc (i, j) v rámci permutácie π , ktoré spĺňujú $i < j \wedge \pi(i) > \pi(j)$.
Potom **znamienko permutácie** definujeme ako $\text{sgn } \pi := (-1)^{I_\pi}$.

DEF. (Determinant matice)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, S_n množina všetkých permutácií na n . **Determinant matice** $\mathbb{A}$ definujeme ako

$$\det A := \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi \mathbb{A}_{1,\pi(1)} \mathbb{A}_{2,\pi(2)} \cdots \mathbb{A}_{n,\pi(n)}.$$

Poznámka. Suma má $n!$ sčítancov nazývaných členy determinantu. Každý má n činiteľov v podobe prvkov matice. Konkrétne, z každého riadku a stĺpca je vybraný práve jeden prvok.

DEF. (Algebraický doplnok)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n > 1$. Nech $\mathbb{A}^{(i,j)}$ vznikne z $\mathbb{A}$ vyškrtnutím i -teho riadku a j -teho stĺpca.

Algebraický doplnok prvku $\mathbb{A}_{ij}$ je pre $\forall i, j \in \hat{n}$ definovaný ako číslo $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbb{A}^{(i,j)}$.

Poznámka. Platí rozvoj podľa i -teho riadku resp. j -teho stĺpca v tvare

$$\det \mathbb{A} = \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \text{ resp. } \det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^n \mathbb{A}_{ij} D_{ij}.$$

DEF. (Adjungovaná matica)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n > 1$. **Adjungovaná matica** je pre $\forall i, j \in \hat{n}$ definovaná ako $[\mathbb{A}^{adj}]_{ij} := D_{ji}$.

DEF. (Charakteristický polynóm)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Zobrazenie $p_{\mathbb{A}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované $\forall t \in \mathbb{C}$ ako $p_{\mathbb{A}}(t) := \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I})$ nazývame **charakteristický polynóm** matice $\mathbb{A}$.

DEF. (Vlastné číslo a vlastný vektor matice)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme **vlastné číslo** matice $\mathbb{A}$ práve vtedy, ak existuje nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, pre ktorý platí $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Tento vektor $\vec{x}$ nazveme **vlastný vektor** matice $\mathbb{A}$, ktorý náleží vlastnému číslu λ .

DEF. (Spektrum matice)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. **Spektrum** matice $\mathbb{A}$ je množina jej vlastných čísel. Značíme $\sigma(\mathbb{A})$.

DEF. (Vlastný podpriestor)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. **Vlastný podpriestor** λ je definovaný ako množina

$$P_{\lambda} := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\}.$$

Ide o množinu vlastných vektorov $\mathbb{A}$ príslušných λ s pridaním nulového vektoru.

DEF. (Algebraická násobnosť vlastného čísla matice)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. **Algebraická násobnosť** $\nu_a(\lambda)$ je definovaná ako násobnosť λ v zmysle koreňa charakteristického polynómu $p_{\mathbb{A}}$.

Poznámka. Súčet algebraických násobností odpovedá násobnosti koreňov v rozklade polynómu na koreňové činitele. Je rovný stupňu polynómu, čiže platí $\sum_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} \nu_a(\lambda) = n$.

DEF. (Geometrická násobnosť vlastného čísla matice)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. **Geometrická násobnosť** $\nu_g(\lambda)$ je definovaná ako $\nu_g(\lambda) := \dim P_{\lambda}$.

Poznámka. Geometrická násobnosť odpovedá počtu LNZ vlastných vektorov príslušných λ .

Nech V je konečnodimenziálny VP nad T , $A \in \mathcal{L}(V)$. Nech $\mathcal{X}$ je báza V .

Obdobne možno definovať uvedené pojmy pre operátory. Pritom u determinantu a charakteristického polynómu pracujeme s maticou ${}^{\mathcal{X}}A$.

Lemma (Diagonalizovateľnosť matíc)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ diagonalizovateľná. Potom existuje diagonálna $\mathbb{D} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a regulárna $\mathbb{X} \in \mathbb{C}^{n,n}$ také, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$, resp. $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{D}$.

Matica $\mathbb{A}$ je diagonalizovateľná práve vtedy, keď pre $\forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$. Zjavne ak označíme i -ty stĺpec matice $\mathbb{X}$ ako $\vec{x}_i$ a i -te číslo na diagonále $\mathbb{D}$ ako λ_i tak platí $\mathbb{A}\vec{x}_i = \lambda_i\vec{x}_i$. Stĺpce $\mathbb{X}$ sú vlastné vektory a čísla na diagonále $\mathbb{D}$ príslušné vlastné čísla matice $\mathbb{A}$.

V. (Vlastnosti determinantu)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom platí:

- Pripočítanie ľubovoľného jedného riadku k druhému riadku nemení determinant matice. Analogicky pre stĺpce.
- Transpozícia nemení determinant matice.
- $\mathbb{A}$ singularná $\iff \det \mathbb{A} = 0$. $\mathbb{A}$ regulárna $\iff \det \mathbb{A} \neq 0$.
- $\mathbb{A}$ regulárna $\implies \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^{adj} \wedge \det \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}}$.
- Nech $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ pre násobením číslom $\alpha \in \mathbb{C}$, tzn. $\mathbb{B} = \alpha \mathbb{A}$. Potom $\det \mathbb{B} = \alpha^n \det \mathbb{A}$.
- Nech $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ prehodením dvoch riadkov, alebo dvoch stĺpcov. Potom $\det \mathbb{B} = -\det \mathbb{A}$.
- Nech $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ ľubovoľná. Potom $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}$.

V. (Hodnota a subdeterminant)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$. Potom $h(\mathbb{A}) = k$ práve vtedy, keď existuje nenulový subdeterminant matice $\mathbb{A}$ rádu k a zároveň každý subdeterminant vyššieho rádu je nulový.

V. (Cramerovo pravidlo)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\vec{b} \in \mathbb{C}^n$, pričom $n > 1$.

Označme $\mathbb{B}^j$ maticu, ktorá vzniká z $\mathbb{A}$ nahradením j -teho stĺpca vektorom $\vec{b}$.

Ak $\mathbb{A}$ je regulárna matica, má sústava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ práve jedno riešenie, ktoré možno pre $\forall j \in \hat{n}$ napočítať pomocou Cramerovho pravidla ako

$$x_j = \frac{\det \mathbb{B}^j}{\det \mathbb{A}}.$$

V. (Vlastné čísla a charakteristický polynóm matice)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ práve vtedy, keď λ je koreňom $p_{\mathbb{A}}$.

V. (O vlastných číslach matice)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pre $\forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $\nu_a(\lambda) \geq \nu_g(\lambda)$.

Matica $\mathbb{A}$ je diagonalizovateľná práve vtedy, keď pre $\forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.

V. (O vlastných vektoroch matice 1)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

Matica $\mathbb{A}$ je diagonalizovateľná práve vtedy, keď existuje v priestore $\mathbb{C}^n$ báza z vlastných vektorov.

V. (O vlastných vektoroch matice 2)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ navzájom rôzne vlastné čísla matice $\mathbb{A}$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ im príslušné vlastné vektory. Potom $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ sú LNZ.

Na záver dve vety, ktoré sa pre operátory netriviálne líšia:

V. (Vlastné čísla a charakteristický polynóm operátora)

Nech V_n je VP nad T , $A \in \mathcal{L}(V)$. Potom $\lambda \in \sigma(A)$ práve vtedy, keď λ je koreňom p_A a $\lambda \in T$.

V. (O vlastných číslach operátora)

Nech V_n je VP nad T , $A \in \mathcal{L}(V)$. Pre $\forall \lambda \in \sigma(A)$ platí $\nu_a(\lambda) \geq \nu_g(\lambda)$.

Operátor A je diagonalizovateľný práve vtedy, keď pre $\forall \lambda \in \sigma(A)$ je $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ a $p_A^{-1}(0) \subset T$.

V. (Charakterizácia normálnych matíc)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom $\mathbb{A}$ je normálna práve vtedy, keď platí:

- Existuje ON báza unitárneho priestoru $\mathbb{C}^n$ zostavená z vlastných vektorov $\mathbb{A}$.
- **Schurova veta:** Existuje diagonálna matica $\mathbb{D}$ a unitárna matica $\mathbb{X}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.
- Pre $\forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n$ platí $\|\mathbb{A}\vec{x}\| = \|\mathbb{A}^H \vec{x}\|$.

Poznámka. Z vety O vlastných vektoroch matice 1 sme vedeli o existencii bázy $\mathbb{C}^n$ z vlastných vektorov, teraz máme dokonca ON bázu.

V. (O normálnych maticiach)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ normálna. Potom platí:

- $\mathbb{A}$ je diagonalizovateľná.
- $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ a $\vec{x}$ vlastný vektor $\lambda \iff \bar{\lambda} \in \sigma(\mathbb{A}^H)$ a $\vec{x}$ vlastný vektor $\bar{\lambda}$.
Vlastné vektory príslušné rôznym vlastným číslam sú na seba kolmé.

Poznámka. Z vety O vlastných vektoroch matice 2 sme vedeli o LNŽ vlastných vektorov, teraz máme dokonca ich kolmosť.

V. (Charakterizácia unitárnych matíc)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom $\mathbb{A}$ unitárna práve vtedy, keď platí:

- $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^H$.
- Pre $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ platí $\langle \mathbb{A}\vec{x} | \mathbb{A}\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$.
- Pre $\forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n$ platí $\|\mathbb{A}\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.

V. (O unitárnych maticiach)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ unitárna. Potom platí:

- Pre $\forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $|\lambda| = 1$.
- $|\det \mathbb{A}| = 1$.

V. (O hermitovských maticiach)

Nech $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ hermitovská. Potom platí:

- Pre $\forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\det \mathbb{A} \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Tieto matice majú úzky súvis s hermitovskými a kvadratickými formami. Pracuje sa s nimi v zmysle ${}^e Q = \mathbb{A}$.

Otázky MIP

Zavedenie pravdepodobnosti

DEF. (Historická DEF. podľa Misesa)

Opakujeme experiment. Buď A pozorovaný jav.

Pravdepodobnosť javu A je

$$\tilde{p}(A) := \frac{n_A}{n}.$$

- Číslo n_A je počet experimentov, pri ktorých nastal jav A .
- Číslo n je celkový počet experimentov.

Poznámka. Je nešikovné, že pravdepodobnosť závisí na výsledku experimentu. Po sérií experimentov v pondelok dostaneme inú pravdepodobnosť, než u série experimentov v utorok.

DEF. (Historická DEF. podľa Laplaceho)

Uvažujeme experiment. Buď A pozorovaný jav.

Pravdepodobnosť javu A je

$$\hat{p}(A) := \frac{n_A}{n}.$$

- Číslo n_A je počet spôsobov, pri ktorých experiment dopadol tak, že nastal jav A .
- Číslo n je celkový počet spôsobov, ako mohol experiment dopadnúť.

Poznámka. Oproti Misesovi sme už odprostili výsledok od závislosti na experimente.

Táto definícia má však stále mnoho obmedzení. Číslo n musí byť prirodzené, čo indikuje, že možných výsledkov môže byť len konečne mnoho a navyše všetky musíme poznať. Ďalej by jednotlivé spôsoby mali byť rovnako možné a navzájom sa vylučovať.

DEF. (Geometrická definícia pravdepodobnosti)

Buď Ω^* merateľný fázový priestor vybavený mierou μ , $A^* \subset \Omega^*$.

Uvažujeme množinu všetkých možných výsledkov experimentu Ω , pozorovaný jav $A \subset \Omega$. Nech navyše existuje bijektívne zobrazenie $Z : (\Omega, A) \rightarrow (\Omega^*, A^*)$. **Pravdepodobnosť javu A je**

$$p(A) := \frac{\mu(A^*)}{\mu(\Omega^*)}.$$

Poznámka. Táto definícia už je veľmi blízko súčasnej, axiomatickej.

Stále má však v sebe skryté obmedzenia v podobe požiadavky na zobrazenie Z .

DEF. (Základné pojmy pre javy)

Zavedieme niekoľko základných pojmov, s ktorými budeme v teórii pravdepodobnosti pracovať.

- **Elementárny jav** ω je jav, ktorého vnútornú štruktúru už ďalej nerozlišujeme.
- **Základná množina** Ω je množina všetkých elementárnych javov.
- **Jav** A je ľubovoľnou podmnožinou množiny všetkých elementárnych javov, tzn. $A \subset \Omega$. Hovoríme, že **jav** A **nastal** práve vtedy, ak nastal elementárny jav $\omega \in \Omega$, $\omega \in A$.
- **Nemožný jav** chápeme ako $A = \emptyset$.
- **Istý jav** chápeme ako $A = \Omega$.

Poznámka. Ako príklad berieme hádzanie kockou.

Uvažujeme $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Definujeme javy $A_1 = \{5\}$ („Padla 5.“), $A_2 = \{2, 4, 6\}$ („Padlo párne číslo.“), $A_3 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ („Padlo číslo väčšie 1.“).

Po hode kockou nastane niektorý z elementárnych javov, povedzme $\omega = \{4\}$. To znamená, že nastal A_2 lebo 4 je párne číslo. Nastal aj A_3 , lebo 4 je väčšie než 1.

DEF. (Operácie s javmi)

Nech $A, B \subset \Omega$ sú ľubovoľné javy.

- **Komplementárny (opačný) jav** A^c
Jav A^c nastane práve vtedy, keď jav A nenastane.

$$\omega \in A^c \iff \omega \notin A$$

- **Inklúzia** $A \subset B$
Ak nastane jav A , tak nastane aj jav B .

$$\omega \in A \implies \omega \in B$$

- **Totožný jav**
Jav A nastane práve vtedy keď jav B .

$$\omega \in A \iff \omega \in B$$

- **Rozdiel javov** $A \setminus B$
Jav A nastal a súčasne jav B nenastal.

$$\omega \in A \setminus B \iff (\omega \in A \wedge \omega \notin B)$$

- **Prienik (súčin) javov** $A \cap B$
Nastal jav A a zároveň jav B .

$$\omega \in A \cap B \iff (\omega \in A \wedge \omega \in B)$$

Javy, nazývame **nezlúčiteľné** práve vtedy, keď platí $A \cap B = \emptyset$.

- **Zjednotenie (súčet) javov** $A \cup B$
Nastane jav A alebo jav B .

$$\omega \in A \cup B \iff (\omega \in A \vee \omega \in B)$$

Ak sú javy A a B nezlúčiteľné, tzn. $A \cap B = \emptyset$, nazveme ich zjednotenie **direktným súčtom javov** A a B a značíme $A + B$.

DEF. (σ -algebra)

Nech Ω základná množina, $\mathcal{P}(\Omega)$ jej potenčná množina, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Nech tento podsystem navyše splňuje nasledujúce axiomy:

I. $\Omega \in \mathcal{A}$,

II. $(\forall A \in \mathcal{A})(A^c \in \mathcal{A})$,

III. $(\forall j \in \mathbb{N})(A_j \in \mathcal{A}) \implies \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Potom $\mathcal{A}$ nazývame **σ -algebrou** na množine Ω .

DEF. (Minimálna σ -algebra)

Nech Ω základná množina, $\mathcal{P}(\Omega)$ jej potenčná množina, $\tau \subset \mathcal{P}(\Omega)$ neprázdna.

Najmenší nadsystem v rámci Ω obsahujúci τ , ktorý ešte je σ -algebrou, nazývame **minimálna σ -algebra nad τ** , pričom dané τ nazývame **generátor**. Značíme $\sigma(\tau)$.

Poznámka. Pomocou indexovej množiny I možno písať

$$(\forall \alpha \in I, \tau \subset \mathcal{A}_\alpha)(\sigma(\tau) := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha).$$

DEF. (Borelovská σ -algebra)

Nech $\Omega = \mathbb{R}^n$ základná množina, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ jej potenčná množina, $\tau \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ má tvar

$$\tau = \left\{ \bigtimes_{i=1}^n (a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i \right\}.$$

Potom minimálnu σ -algebru nad systémom τ nazveme **borelovskou σ -algebrou v $\mathbb{R}^n$** .

Značíme $\sigma(\tau) := \mathcal{B}_n$.

DEF. (Náhodná veličina)

Majme priestor $(\Omega, \mathcal{A})$. Vektorová funkcia $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ sa nazýva merateľná funkcia práve vtedy, keď pre $\forall B \in \mathcal{B}_n$ platí $\mathbf{X}^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Každá číselná množina z borelovskej σ -algebry má teda reprezentáciu v abstraktnom priestore. Merateľnej funkcií sa v MIP hovorí **náhodná veličina**. Ak je $\mathcal{A}$ borelovská σ -algebra, $\mathbf{X}$ je **borelovská náhodná veličina**.

DEF. (Axiomatická definícia pravdepodobnosti)

Nech Ω neprázdna základná množina, $\mathcal{P}(\Omega)$ jej potenčná množina, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ -algebra.

Lubovoľnú funkciu $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme **pravdepodobnostná miera** práve vtedy, keď splňuje Kolmogorovove axiomy:

I. **Normovanosť na 1:** $P(\Omega) = 1$.

II. **Nezápornosť:** $(\forall A \in \mathcal{A})(P(A) \geq 0)$.

III. **σ -aditivita:** $(\forall j \in \mathbb{N})(A_j \in \mathcal{A} \text{ navzájom nezlúčiteľné}) \left(P\left(\sum_{j=1}^{+\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(A_j) \right)$.

Poznámka. Ak Ω spočetná, stačilo by brať $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Ak Ω nespočetná, môžu nastať problémy. Preto predpokladáme podsystem v podobe σ -algebry $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, na ktorej vieme pomocou P vždy bezpečne merať.

DEF. (Pravdepodobnostný priestor)

Nech Ω neprázdna základná množina, $\mathcal{P}(\Omega)$ jej potenčná množina, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ -algebra a ešte P pravdepodobnostná miera. Trojicu $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nazveme **pravdepodobnostný priestor**.

DEF. (Podmienená pravdepodobnosť)

Majme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Uvažujme javy $A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) > 0$.

Podmienenú pravdepodobnosť $P(A \mid B)$ chápeme ako pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B . Matematicky

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Poznámka. V tomto vzťahu teda jav B vystupuje ako fixný parameter a jav A ako premenná.

DEF. (Úplný rozklad množiny Ω)

Majme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech $\mathcal{H}$ je súbor javov.

Systém $\mathcal{H}$ nazveme **úplný rozklad množiny** Ω a označíme $\dot{\cup} \Omega$ práve vtedy, keď splňuje:

- $(\forall H \in \mathcal{H})(P(H) > 0)$.
- Pre ľubovoľné $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ platí, že sú navzájom nezlúčiteľné.
- $\mathcal{H}$ pokrýva Ω v pravdepodobnostnom zmysle, tzn. $P\left(\sum_{j=1}^{n,+\infty} H_j\right) = \sum_{j=1}^{n,+\infty} P(H_j) = 1$.

DEF. (Vzájomná nezávislosť javov)

Majme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech $\mathcal{H}$ je súbor javov z $\mathcal{A}$.

Javy z $\mathcal{H}$ nazveme **vzájomne (stochasticky) nezávislými** práve vtedy, keď ich združená pravdepodobnosť je rovná súčinu ich marginálnych pravdepodobností. Matematicky

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \left(\forall (A_j)_{j=1}^k \in \mathcal{H} \right) \left(P \left(\bigcap_{j=1}^k A_j \right) = \prod_{j=1}^k P(A_j) \right).$$

Poznámka. Ďalej sa zavádza napr. nezávislosť po dvoch.

DEF. (Nezávislosť náhodných veličín)

Majme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$ je systém náhodných veličín, $(\forall j \in \mathbb{N})(X_j : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1))$.

Povieme, že tieto náhodné veličiny sú **vzájomne (stochasticky) nezávislé** práve vtedy, keď je súbor ich vzorov nezávislý v zmysle nezávislosti javov na σ -algebre $\mathcal{A}$, tzn.

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \left(\forall (B_{j_i})_{i=1}^k \in \mathcal{B}_1 \right) \left(P \left(\bigcap_{i=1}^k X_{j_i}^{-1}(B_{j_i}) \right) = \prod_{i=1}^k P \left(X_{j_i}^{-1}(B_{j_i}) \right) \right).$$

Podmienku nezávislosti možno upraviť tak, aby v nej miesto náhodných veličín vystupovali ich rozdelenia. Označme $\mathbf{X} := (X_{j_1}, \dots, X_{j_k})$ k -rozmernú náhodnú veličinu zostavenú z jednorozmerných náhodných veličín.

Upravme teraz obe strany spomínaného výrazu na

$$P \left(\bigcap_{i=1}^k X_{j_i}^{-1}(B_{j_i}) \right) = P \left(\mathbf{X} \in \bigtimes_{i=1}^k B_{j_i} \right) = (P \circ \mathbf{X}^{-1}) \left(\bigtimes_{i=1}^k B_{j_i} \right) = P^{\mathbf{X}} \left(\bigtimes_{i=1}^k B_{j_i} \right),$$

$$\prod_{i=1}^k P \left(X_{j_i}^{-1}(B_{j_i}) \right) = \prod_{i=1}^k (P \circ X_{j_i}^{-1}) (B_{j_i}) = \prod_{i=1}^k P^{X_{j_i}}(B_{j_i}).$$

Vyšla rovnosť

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \left(\forall (B_{j_i})_{i=1}^k \in \mathcal{B}_1 \right) \left(P^{\mathbf{X}} \left(\bigtimes_{i=1}^k B_{j_i} \right) = \prod_{i=1}^k P^{X_{j_i}}(B_{j_i}) \right).$$

V. (Generátory $\mathcal{B}_n$)

Uvažujme systémy

- $\tau_1 := \{(-\infty, b] \mid b \in \mathbb{R}\},$
- $\tau_2 := \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\},$
- $\tau_3 := \{[b, +\infty) \mid b \in \mathbb{R}\},$
- $\tau_4 := \{(b, +\infty) \mid b \in \mathbb{R}\},$
- $\tau_5 := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$
- $\tau_6 := \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ je otvorená}\}.$

Potom každý z týchto systémov generuje borelovskú σ -algebru nad $\mathbb{R}$, tzn. $\sigma(\tau_j) = \mathcal{B}_1$ pre $\forall j \in \hat{6}$.

V. (Vlastnosti pravdepodobnostnej miery P)

Majme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech pre $\forall j \in \mathbb{N}$ je $A_j \in \mathcal{A}$ a tiež $B \in \mathcal{A}$.

- **Pravdepodobnosť nemožného javu**

$$P(\emptyset) = 0$$

- **Aditivita**

$$P\left(\sum_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$$

- **Subtraktivita**

$$A \subset B \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

- **Monotónia**

$$A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$$

- **Obmedzenosť**

$$(\forall A \in \mathcal{A})(P(A) \leq 1)$$

- **Komplementarita**

$$A \in \mathcal{A} \implies P(A^c) = 1 - P(A)$$

V. (O zjednoteniach)

Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $A, B, C \in \mathcal{A}$. Potom platí:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
- **Booleova nerovnosť**, ktorá hovorí že pre $\forall (A_j)_{j=1}^{n,+\infty} \in \mathcal{A}$ platí

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n,+\infty} A_j\right) \leq P\left(\sum_{j=1}^{n,+\infty} (A_j)\right) = \sum_{j=1}^{n,+\infty} P(A_j).$$

V. (O prienikoch)

Majme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech $(A_j)_{j=1}^n \in \mathcal{A}$, $P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) > 0$. Potom platí

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Poznámka. Predpoklad $P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) > 0$ hovorí o tom, že javy môžu nastať súčasne. Neuvažujeme teda javy nezlúčiteľné, u ktorých by výsledná pravdepodobnosť bola triviálne nulová.

V. (O $\dot{\mathcal{U}}\mathcal{R}\Omega$)

Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $A \in \mathcal{A}$. Nech súbor javov $\mathcal{H}$ tvorí $\dot{\mathcal{U}}\mathcal{R}\Omega$. Potom platí

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n,+\infty} P(A | H_j) P(H_j).$$

V. (Bayesova veta)

Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $A \in \mathcal{A}$, $P(A) > 0$. Nech súbor javov $\mathcal{H}$ tvorí $\dot{\mathcal{U}}\mathcal{R}\Omega$.

Potom pre všetky $j \in \mathbb{N}$ platí **Bayesov vzorec**

$$P(H_j | A) = \frac{P(A | H_j) \cdot P(H_j)}{\sum_{j=1}^{n,+\infty} P(A | H_j) \cdot P(H_j)}.$$

V. (Nezávislosť cez distribučnú funkciu)

Nech $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$, pričom pre vybraných n z nich definujeme $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim F_{\mathbf{X}}$.

Potom tieto veličiny sú nezávislé práve vtedy, keď

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \left(F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n F_{X_j}(x_j) \right).$$

V. (Nezávislosť cez hustotu pravdepodobnosti)

Nech $(X_j)_{j=1}^{+\infty}$, pričom pre vybraných n z nich definujeme $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim f_{\mathbf{X}}$ s ASR.

Potom tieto veličiny sú nezávislé práve vtedy, keď

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \left(f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n f_{X_j}(x_j) \right).$$

Rozdelenie náhodnej veličiny

DEF. (Rozdelenie náhodnej veličiny)

Majme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na ňom náhodnú veličinu $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$.

Rozdelenie náhodnej veličiny $\mathbf{X}$ značíme $P^{\mathbf{X}}$ a definujeme ako $P^{\mathbf{X}} := P \circ \mathbf{X}^{-1}$.

Poznámka. $P^{\mathbf{X}}$ žerie borelovskú množinu a vracia číslo z $[0,1]$. Zavádzame značenie

$$P^{\mathbf{X}}(B) = (P \circ \mathbf{X}^{-1})(B) = P(\mathbf{X}^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega \mid \mathbf{X}(\omega) \in B\}) \stackrel{\text{ozn.}}{=} P(\mathbf{X} \in B).$$

Fakt, že náhodná veličina $\mathbf{X}$ má rozdelenie pravdepodobnosti $P^{\mathbf{X}}$ budeme značiť $\mathbf{X} \sim P^{\mathbf{X}}$.

DEF. (Distribučná funkcia)

Majme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, náhodnú veličinu $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$.

Uvažujme n -rozmernú variantu systému τ_1 , tzn. $\tau_{1,n} = \{\times_{i=1}^n (-\infty, x_i] \mid (\forall i \in \hat{n})(x_i \in \mathbb{R})\}$.

Distribučná funkcia $F_{\mathbf{X}}$ je definovaná ako zúženie

$$F_{\mathbf{X}} := P^{\mathbf{X}}|_{\tau_{1,n}}.$$

Fakt, že náhodnej veličine $\mathbf{X}$ prislúcha distribučná funkcia $F_{\mathbf{X}}$ budeme značiť $\mathbf{X} \sim F_{\mathbf{X}}$.

Poznámka. Distribučná funkcia žerie borelovské množiny zo systému $\tau_{1,n}$ a vracia číslo z $[0,1]$. Obecne uvažujeme za premenné distribučnej funkcie práve x_i , čiže číslo ohraničujúce danú borelovskú množinu (interval) zprava. Pre $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ zavádzame značenie

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P^{\mathbf{X}}\left(\times_{i=1}^n (-\infty, x_i]\right) \stackrel{\text{ozn.}}{=} P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}).$$

Význam distribučnej funkcie sa dobre ukazuje na $\mathbb{R}$. Tam je vidno, že ak zväčšujeme x , zväčšujeme aj príslušný interval a pravdepodobnosť „kumuluje“, čo možno vyjadriť ako

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P^X((-\infty, x]) = (P \circ X^{-1})((-\infty, x]) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty, x]\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) \stackrel{\text{ozn.}}{=} P(X \leq x). \end{aligned}$$

Danú funkciu preto nazývame občas aj **kumulatívna distribučná funkcia**.

DEF. (Marginálna distribučná funkcia)

Majme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, náhodnú veličinu $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$.

Pre dané $j_0 \in \hat{n}$ máme 1D náhodnú veličinu X_{j_0} a jej **marginálnu distribučnú funkciu**

$$F_{X_{j_0}}(x_{j_0}) := \lim_{\substack{x_j \rightarrow +\infty \\ j \neq j_0}} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}).$$

Možno ju dostať limitnými prechodmi, o ktorých vieme že existujú vďaka monotónnosti $F_{\mathbf{X}}$.

DEF. (Diskrétna náhodná veličina)

Nech $\mathbf{X} \sim P^{\mathbf{X}}$. Povieme, že $\mathbf{X}$ je **diskrétna** práve vtedy, keď jej obor hodnôt je najviac spočetný. To znamená keď $\text{Ran } \mathbf{X} = \{x_k\}_{k=1}^{m,+\infty}$.

DEF. (Hustota pravdepodobnosti - nespojito)

Nech $\mathbf{X} \sim P^{\mathbf{X}}$ diskrétna, $\text{Ran } \mathbf{X} = \{x_k\}_{k=1}^{m,+\infty}$.

Hustota pravdepodobnosti $f_{\mathbf{X}}$ je definovaná pre $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ako

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} p_k := P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_k) = P(X_1 = x_{k1}, \dots, X_n = x_{kn}) & \text{pre } \mathbf{x} = \mathbf{x}_k \in \text{Ran } \mathbf{X}, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Poznámka. Zároveň na $\mathbb{R}$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{n,+\infty} P(X = x_k) \chi_{[x_k, +\infty)}(x).$$

DEF. (Marginálna hustota pravdepodobnosti - nespojito)

Nech $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}$ diskrétna. Nech pre isté $j \in \hat{n}$ je $\mathbf{X}' := \mathbf{X} \setminus X_j$.

Marginálna hustota pravdepodobnosti $f_{\mathbf{X}'}$ je definovaná pre $\forall \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ako

$$f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}') := \sum_{x_j} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}).$$

DEF. (Podmienená hustota pravdepodobnosti - nespojito)

Nech $\mathbf{X} = (X, Y) \sim f_{(X,Y)}$ diskrétna.

Podmienenú hustotu pravdepodobnosti náhodnej veličiny $\mathbf{X}$ za podmienky $Y = y$ definujeme pre

$$(\forall x \in \text{Ran } X)(\forall y \in \text{Ran } Y, f_Y(y) \neq 0) \left(f_{X|Y}(x | y) = f_{X|Y=y}(x) := \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)} \right).$$

Diskrétné veličiny	Parametre	Funkcia $P(\mathbf{X})$	$E[\mathbf{X}]$	$\text{Var}[\mathbf{X}]$
Binomické $Bi(n, p)$	$n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$	$P(\mathbf{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Bernoulliho $Be(p) := Bi(1, p)$	$p \in (0, 1)$	$P(\mathbf{X} = k) = p^k (1-p)^{1-k}, k \in \{0, 1\}$	p	$p(1-p)$
Poissonovo ¹ $Pois(\lambda)$	$\lambda \in \mathbb{N}$	$P(\mathbf{X} = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ

DEF. (σ -konečná miera)

Nech λ je miera na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Nazveme ju **σ -konečná** práve vtedy, keď

$$\left(\exists (B_j)_{j=1}^{+\infty} \in \mathcal{B}_n \right) \left((\forall j \in \mathbb{N})(\lambda(B_j) < +\infty) \wedge \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j = \mathbb{R}^n \right).$$

DEF. (Absolútne spojitá miera)

Uvažujme miery ν, λ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$.

Povieme, že miera ν je **absolútne spojitá** vzhľadom k miere λ práve vtedy, keď

$$(\forall B \in \mathcal{B}_n)(\lambda(B) = 0 \implies \nu(B) = 0).$$

Používa sa aj výraz λ **dominuje nad** ν . Značíme $\lambda \gg \nu$.

¹Limitný vzťah medzi binomickým rozdelením a Poissonovým rozdelením možno nájsť na <http://mathcenter.oxford.emory.edu/site/math117/connectingPoissonAndBinomial/>.

DEF. (Spojitá náhodná veličina)

Nech $\mathbf{X}$ je náhodná veličina. Povieme, že náhodná veličina je **spojitá** práve vtedy, keď jej obor hodnôt je nespočetný.

DEF. (Hustota pravdepodobnosti - spojito)

Nech $\mathbf{X} \sim P^{\mathbf{X}}$ spojitá. V R-N vete položíme $\nu := P^{\mathbf{X}}$, λ Lebesgueova miera a dostaneme

$$(\lambda \gg P^{\mathbf{X}}) \iff \left(\exists! f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+, f_{\mathbf{X}} \text{ borelovsky merateľná} \right) (\forall B \in \mathcal{B}_n) \left(P^{\mathbf{X}}(B) = \int_B f_{\mathbf{X}} d\lambda \right).$$

Povieme, že $\mathbf{X}$ má **absolútne spojité rozdelenie** $P^{\mathbf{X}}$ vzhľadom k Lebesgueovej miere λ .

Funkcia $f_{\mathbf{X}}$ je jednoznačná až na množinu nulovej miery a nazývame ju **hustota pravdepodobnosti náhodnej veličiny $\mathbf{X}$** .

Poznámka. Zároveň na $\mathbb{R}$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

DEF. (Marginálna hustota pravdepodobnosti - spojito)

Nech $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}$ spojitá. Nech pre isté $j \in \hat{n}$ je $\mathbf{X}' := \mathbf{X} \setminus X_j$.

Marginálna hustota pravdepodobnosti $f_{\mathbf{X}'}$ je definovaná pre $\forall \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ako

$$f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}') := \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_j.$$

Možno ju teda dostať zafixovaním $n - 1$ premenných a integrovaním cez x_j .

DEF. (Podmienená hustota pravdepodobnosti - spojito)

Nech $\mathbf{X} = (X, Y) \sim f_{(X,Y)}$ spojitá.

Podmienenú hustotu pravdepodobnosti náhodnej veličiny $\mathbf{X}$ za podmienky $Y = y$ definujeme pre

$$(\forall x \in \text{Ran } X)(\forall y \in \text{Ran } Y, f_Y(y) \neq 0) \left(f_{X|Y}(x) := \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)} \right).$$

Spojité veličiny	Parametre	Funkcia $P(\mathbf{X})$	$E[\mathbf{X}]$	$\text{Var}[\mathbf{X}]$
Uniformné $\mathcal{U}(a, b), x \in \mathbb{R}$	$a, b \in \mathbb{R}, a < b$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \chi_{/a,b/}(x)$	$\frac{(a+b)}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciálne $\text{Exp}(\Theta), x > 0$	$\Theta > 0$	$f_X(x) = \frac{1}{\Theta} \exp \left[-\frac{x}{\Theta} \right]$	$\frac{1}{\Theta}$	$\frac{1}{\Theta^2}$
Normálne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), x \in \mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]$	μ	σ^2
	$\mu = 0, \sigma = 1$	$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$	0	1

V. (Vlastnosti distribučnej funkcie)

Nech $\mathbf{X} \sim F_{\mathbf{X}}$. Potom $F_{\mathbf{X}}$ má nasledujúce vlastnosti:

D1. $F_{\mathbf{X}}$ je neklesajúca v každej svojej premennej.

D2. $F_{\mathbf{X}}$ je spojitá sprava v každej svojej premennej.

D3. a) $(\forall j \in \hat{n}) \left(\lim_{x_j \rightarrow +\infty} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{X} \setminus X_j}(\mathbf{x} \setminus x_j) \right),$

b) $(\forall j \in \hat{n}) \left(\lim_{x_j \rightarrow -\infty} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0 \right),$

c) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 1.$

D4. $F_{\mathbf{X}}$ má nanajvýš spočetne mnoho bodov nespojivosti (skokov).

Inými slovami, množina bodov spojitosti $F_{\mathbf{X}}$ je hustá v $\mathbb{R}$.

V. (Radonova-Nikodymova veta)

Nech λ, ν sú σ -konečné miery na priestore $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Potom platí

$$\nu \ll \lambda \implies (\exists! f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+, f \text{ borelovsky merateľná})(\forall B \in \mathcal{B}_n) \left(\nu(B) = \int_B f \, d\lambda \right).$$

Funkcia f je vzhľadom k λ určená jednoznačne až na množinu miery nula. Túto funkciu nazývame **Radon-Nikodymovou deriváciou miery ν vzhľadom k miere λ** . Značíme $f := \frac{d\nu}{d\lambda}$.

Poznámka. Predpokladať u oboch mier zvlášť vlastnosť σ -konečnosti je dôležité. Absolútna spojitosť totiž túto vlastnosť neprenáša z jednej miery na druhú mieru.

V. (O vlastnostiach $\mathcal{N}$)

Nech $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, distribučná funkcia F_X a hustota f_X .

Uvažujme špeciálny prípad $\mathcal{N}(0, 1)$ s distribučnou funkciou Φ_X a hustotu φ_X . Platí

- $\mathcal{N}$ je symetrické okolo bodu $x = \mu$.
- $\mathcal{N}$ má inflexiu v bodoch $x = \mu \pm \sigma$.
- $P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \exp \left[\frac{-x^2}{2} \right] dx.$
- $F_X(x) = \Phi_X \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right), f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi_X \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right).$
- $\Phi_X(x) = 1 - \Phi_X(-x).$
- $\mathcal{N}$ má reprodukčnú vlastnosť. Nech pre $\forall i \in \hat{n}$ platí $a_i \neq 0$ a $(X_i)_{i=1}^n \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ sú *i.i.d.* Potom platí

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim \mathcal{N} \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i; \sum_{i=1}^n (a_i \sigma_i)^2 \right).$$

- Nech $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = 2\Phi_X(k) - 1.$$

- Nech $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$. Potom

$$Y := aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, (a\sigma)^2).$$

Transformácia náhodných veličín

Pomocou normálneho rozdelenia možno zaviesť ďalšie rozdelenia. Uvedieme niekoľko príkladov.

- **Log-normálne rozdelenie**

Nech $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Definujeme $Z := LN(\mu, \sigma^2) \sim e^X$.

Používa sa v teórii spoľahlivosti, pri výpočte pravdepodobnosti poistnej udalosti a pri modelovaní ekonomických veličín.

- **Chí kvadrát rozdelenie**

Nech $(X_i)_{i=1}^n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Definujeme $Z := \chi^2(n) \sim \sum_{i=1}^n X_i^2$.

Používa sa pri testovaní hypotéz (asymptotický LRT, Waldov, testy dobrej zhody) a pri konštrukciách intervalov spoľahlivosti.

- **Študentovo rozdelenie**

Nech $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$. Definujeme $Z := S(n) = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$.

Používa sa pri testovaní hypotéz (párový a nepárový t -test pre stredné hodnoty) a pri konštrukciách intervalov spoľahlivosti. Najviac sme ho videli v EKONS.

- **Fisherovo rozdelenie**

Nech $X \sim \chi^2(n)$, $Y \sim \chi^2(m)$. Definujeme $Z := F(n, m) \sim \frac{X/n}{Y/m}$.

Používa sa pri testovaní hypotéz (ANOVA, F -test pre homogenitu rozptylov) a pri konštrukciách intervalov spoľahlivosti.

DEF. (Charakteristická funkcia)

Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ náhodná veličina.

Charakteristická funkcia $\varphi_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ je definovaná pre $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ ako

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) := \mathbb{E}[\exp[i\mathbf{t} \cdot \mathbf{X}]].$$

Poznámka. Charakteristická funkcia má význam Fourierovej transformácie (spojitej) hustoty pravdepodobnosti. Keďže VPI funguje aj na komplexné veličiny, platí

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \mathbb{E}[\exp[i\mathbf{t} \cdot \mathbf{X}]] = \int_{\Omega} \exp[i\mathbf{t} \cdot \mathbf{X}] dP \stackrel{\text{VPI}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \exp[i\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}] dP^{\mathbf{X}} \stackrel{\text{R-N}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp[i\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}] f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathcal{F}[f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})](\mathbf{t}).\end{aligned}$$

DEF. (Momentová funkcia)

Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ náhodná veličina.

Momentová funkcia $m_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je za predpokladu existencie príslušnej strednej hodnoty definovaná pre $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ ako

$$m_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) := \mathbb{E}[\exp[\mathbf{t} \cdot \mathbf{X}]].$$

Poznámka. Ak je $m_{\mathbf{X}}$ na okolí bodu 0 analytická, platí $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = m_{\mathbf{X}}(i\mathbf{t})$.

Medzi charakteristickou funkciou $\varphi_{\mathbf{X}}$, rozdelením pravdepodobnosti $P^{\mathbf{X}}$ a distribučnou funkciou $F_{\mathbf{X}}$ je jednoznačný vzťah.

V. (Nezávislosť a charakteristická funkcia 1)

Nech $(X_j)_{j=1}^n, (\forall j \in \hat{n})(X_j \sim P^{X_j})$. Definujme $Y := \sum_{j=1}^n X_j$.

Potom ak $(X_j)_{j=1}^n$ sú vzájomne nezávislé, tak pre $\forall t \in \mathbb{R}$ platí

$$\varphi_Y(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t).$$

V. (Nezávislosť a charakteristická funkcia 2)

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim P^{\mathbf{X}}$.

Potom $(X_j)_{j=1}^n$ sú vzájomne nezávislé práve vtedy, keď pre $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t_j).$$

Vzťahy z uvedených dvoch viet platia rovnako aj pre momentové funkcie. Potom ale treba navyše predpokladať existenciu $m_Y, m_{\mathbf{X}}, m_{X_1}, \dots, m_{X_n}$.

Uvažujme náhodnú veličinu $X \sim \text{Gamma}(\lambda, \beta)$. Uvádzame jej $m_X(\lambda)$ a $\varphi_X(\lambda)$.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{\beta^\lambda} x^{\lambda-1} e^{-x/\beta} \\ m_X(\lambda) &= E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{\beta^\lambda} x^{\lambda-1} e^{-x/\beta} dx = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{\beta^\lambda} \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x(\frac{1}{\beta} - t)} dx = \left| x(\frac{1}{\beta} - t) = y \right| = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{\beta^\lambda} \int_0^\infty \frac{y^{\lambda-1}}{(\frac{1}{\beta} - t)^{\lambda-1}} e^{-y} dy = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{\beta^\lambda} \frac{1}{(\frac{1}{\beta} - t)^\lambda} \int_0^\infty y^{\lambda-1} e^{-y} dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{\beta^\lambda} \frac{\beta^\lambda}{(1 - \beta t)^\lambda} \cdot \Gamma(\lambda) = \frac{(1 - \beta t)^{-\lambda}}{(1 - \beta t)^{-\lambda}} \\ \varphi_X(t) &= \frac{1}{(1 - \beta t)^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Uvažujme teraz $(X_i)_{i=1}^n$ i.i.d s rozdelením $X_i \sim \text{Gamma}(\lambda_i, \beta)$. Uvažujme $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Platí:

$$\varphi_Y(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n (1 - \beta t)^{-\lambda_i} = (1 - \beta t)^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i} \text{, teda } Y \sim \text{Gamma}(\sum_{i=1}^n \lambda_i, \beta).$$

OBR. 5.1: Odvodenie m_X a φ_X pre Gamma rozdelenie.

Uvažujme náhodnú veličinu $X \sim N(0, 1)$. Uvádzame jej $m_X(\lambda)$ a $\varphi_X(\lambda)$.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \\ m_{X^2}(\lambda) &= E[e^{tX^2}] = \int_{\mathbb{R}} e^{tx^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}(1-2t)} dx = \left| x\sqrt{1-2t} = y \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2t}} dy = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy = \frac{(1-2t)^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{(1-2t)^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \\ \varphi_{X^2}(t) &= \frac{(1-2t)^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Prieto $X^2 \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, 2)$. Zjeme ale $(X_i^2)_{i=1}^n$ i.i.d s rozdelením $X_i \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, 2)$, takže

$$X^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \text{Gamma}(\frac{n}{2}, 2). \text{ Prieto } f_{X^2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{2^{n/2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}.$$

OBR. 5.2: Odvodenie m_X a φ_X pre χ^2 rozdelenie.

V. (O obecnej transformácii)

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim f_{\mathbf{X}}$. Nech $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ borelovsky merateľná funkcia, pomocou ktorej definujeme novú náhodnú veličinu $\mathbf{Y} = \mathbf{g} \circ \mathbf{X} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \mathbf{g}(\mathbf{X})$. Uvažujeme $\mathbf{Y} \sim f_{\mathbf{Y}}$.

Ak existujú všetky potrebné parciálne derivácie skoro všade, tak pre $f_{\mathbf{Y}}$ platí

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{\partial^m}{\partial y_1 \cdots \partial y_m} \int_{B_{\mathbf{y}}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \text{ kde } B_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}\} \in \mathcal{B}_n.$$

V. (O obecnej transformácii prakticky)

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim f_{\mathbf{X}}$.

Nech $G := \sum_{i=1}^k B_i$ je množina, ktorá vznikla ako súčet navzájom disjunktných a otvorených množín B_i pričom platí $\int_G f_{\mathbf{X}} d\mathbf{x} = 1$. Ešte nech $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ borelovsky merateľná funkcia, ktorá je na množinách B_i po častiach regulárna a prostá.

Pomocou nej definujeme novú náhodnú veličinu $\mathbf{Y} = \mathbf{g} \circ \mathbf{X} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \mathbf{g}(\mathbf{X})$. Uvažujeme $\mathbf{Y} \sim f_{\mathbf{Y}}$.

Potom pre $f_{\mathbf{Y}}$ platí

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k f_{\mathbf{X}}(\mathbf{g}_i^{-1}(\mathbf{y})) |\det \mathbb{J}_{\mathbf{g}_i^{-1}}(\mathbf{y})| & \forall \mathbf{y} \in \mathbf{g}(G), \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Výraz $\mathbf{g}_i^{-1}(\mathbf{y})$ značí zúženie $\mathbf{g}^{-1} \mid_{B_i}(\mathbf{y})$.

V. (Vybrané výsledky vety o obecnej transformácii)

Nech $k = 1$, teda uvažujeme len jednu množinu.

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y})) |\det \mathbb{J}_{\mathbf{g}^{-1}}(\mathbf{y})| & \forall \mathbf{y} \in \mathbf{g}(G), \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nech $n = 1$, teda uvažujeme len jednu dimenziu transformačnej funkcie.

Využitím vety o derivácii inverznej funkcie v $\mathbb{R}$ máme

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|} & \forall y \in g(G), \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Uvažujeme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Odvodíme f_Y pre $Y = e^X$.

ZOBRAZENIE: $y = e^x$
 $x = \ln y$

JACOBIAN: $J = \left(\frac{1}{y} \right)$
 $|\det J| = \frac{1}{y}$

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{y} \exp\left[-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

OBR. 5.3: Využitie vety na odvodenie Lognormálneho rozdelenia.

Uvažujeme $X \sim N(0,1)$. Odvodíme f_Y pre $Y = X^2$.

DISTRIBUČNÁ FUNKCIA:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{pre } y < 0 \\ P(-\sqrt{y} \leq X \leq +\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & \text{pre } y \geq 0. \end{cases}$$

HUSTOTA:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 0 & \text{pre } y < 0 \\ f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} - f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) - f_X(-\sqrt{y})] & \text{pre } y \geq 0. \end{cases}$$

Doradíme do týchto obidvoch výrazov špeciálne $f_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ a máme:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pre } y < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} & \text{pre } y \geq 0. \end{cases}$$

Odpovedá tomu, že $X^2 \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, 2) \sim \chi^2(1)$.

OBR. 5.4: Pre porovnanie ešte klasický spôsob odvodu hustoty rozdelenia X^2 .

Charakteristiky náhodných veličín

DEF. (Jednoduchá funkcia)

Nech $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, μ σ -konečná miera. Nech pre $\forall i \in \hat{n}$ je $a_i \in \mathbb{R}$, pričom $A_i \in \mathcal{A}$ sú všetky navzájom disjunktné. **Jednoduchá funkcia** je zobrazenie $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definované ako

$$\varphi(\omega) := \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(\omega).$$

Integrál z nej vypočítame ako

$$\int_{\Omega} \varphi \, d\mu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Poznámka. Pre Lebesgueovu mieru dostávame koncept stupňovitých funkcií z MAA4.

DEF. (Integrál z nezápornej náhodnej veličiny)

Nech $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, μ σ -konečná miera. Nech $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nezáporná.

Definujeme **integrál nezápornej náhodnej veličiny**

$$\int_{\Omega} X \, d\mu := \sup \left\{ \int_{\Omega} \varphi \, d\mu \mid \varphi \text{ je jednoduchá funkcia splňujúca } 0 \leq \varphi \leq X. \right\}$$

Poznámka. Pre Lebesgueovu mieru dostávame koncept triedy Λ^+ .

DEF. (Integrál z náhodnej veličiny)

Nech $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, μ σ -konečná miera. Nech $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ľubovoľná. Zavedieme nezáporné funkcie $X^+ := \max\{X, 0\}$, $X^- := \max\{-X, 0\}$. Tie identifikujú javy, ktorým X priraduje kladnú a zápornú hodnotu. Definujeme **integrál náhodnej veličiny**

$$\int_{\Omega} X \, d\mu := \int_{\Omega} X^+ \, d\mu - \int_{\Omega} X^- \, d\mu.$$

Samozrejme napravo predpokladáme existenciu oboch a konečnosť aspoň jedného z integrálov.

Poznámka. Pre Lebesgueovu mieru dostávame koncept triedy Λ .

DEF. (Stredná hodnota na $\mathbb{R}$)

Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, uvažujeme teda mieru pravdepodobnostnú. Nech $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Potom integrál z predchádzajúcej definície nazveme **stredná hodnota (jednorozmernej)** X a značíme

$$E[X] := \int_{\Omega} X \, dP.$$

Ak $E[X]$ existuje, hovoríme, že X vzhľadom k P má integrál.

Ak $E[X]$ existuje a je konečná, hovoríme, že X vzhľadom k P je integrovateľná.

Poznámka. Má význam ťažiska (váženého priemeru) pravdepodobnostnej hmoty.

DEF. (Stredná hodnota na $\mathbb{R}^n$)

Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Stredná hodnota (viacrozmernej) $\mathbf{X}$ je značená $E[\mathbf{X}]$ a definovaná po zložkách, tzn.

$$(\forall i \in \hat{n}) \left(E[X_i] := \int_{\Omega} X_i \, dP \right).$$

DEF. (Priestory integrabilných náhodných veličín)

Priestor integrabilných náhodných veličín

$$\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) := \{X \text{ náhodná veličina na } (\Omega, \mathcal{A}, P) \mid |E[X]| < +\infty\}.$$

Obdobne **priestor kvadraticky integrabilných náhodných veličín**

$$\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P) := \{X \text{ náhodná veličina na } (\Omega, \mathcal{A}, P) \mid E[X^2] < +\infty\} = \{X \mid X^2 \in \mathcal{L}_1\}.$$

Poznámka. Analogicky ako v MAA4, možno vybudovať lineárne vektorové priestory L_1, L_2 . Stačí uvedené množiny rozdeliť na triedy ekvivalencie a zostrojiť faktorpriestor, na ktorom zavedieme príslušné operácie.

Poznámka. Na L_2 môžeme pomocou $E[X]$ zaviesť aj normu, nielen seminormu (viz nižšie). Totiž existuje jedna jediná X tak, že $\|X\| = 0 \iff X = 0$. Na L_2 je to totiž zástupca danej triedy, pričom na $\mathcal{L}_2$ by sme mali problém kvôli nekonečne mnoho funkciám nulovým skoro iste.

DEF. (Skalárny súčin náhodných veličín)

Nech $X, Y \in \mathcal{L}_2$. **Skalárny súčin náhodných veličín** definujeme ako číslo

$$\langle X, Y \rangle := E[XY].$$

Skalárny súčin prirodzene indukuje **seminormu náhodných veličín**

$$\|X\| := \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{E[X^2]}.$$

DEF. (Variancia)

Nech $X \in \mathcal{L}_2$. **Variancia** $\text{Var}[X]$ je definovaná ako

$$\text{Var}[X] := E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

DEF. (Smerodratná odchylka)

Nech $X \in \mathcal{L}_2$. **Smerodratná odchylka** $\sigma(X)$ je definovaná ako

$$\sigma(X) := \sqrt{\text{Var}[X]}.$$

DEF. (Kovariancia)

Nech $X, Y \in \mathcal{L}_2$. **Kovariancia** $\text{Cov}[X, Y]$ je definovaná ako

$$\text{Cov}[X, Y] := E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

DEF. (Korelácia)

Nech $X, Y \in \mathcal{L}_2$, $\text{Var}[X] > 0$, $\text{Var}[Y] > 0$. **Korelácia** $\rho(X, Y)$ je normovaná kovariancia,

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Vyjadruje mieru lineárnej závislosti daných náhodných veličín.

Ak $\rho(X, Y) = 0$, resp. $\text{Cov}[X, Y] = 0$, dané veličiny **nekorelujú**.

DEF. (Kovariančná a korelačná matica)

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ viacrozmerná náhodná veličina, pričom pre $\forall j \in \hat{n}$ je $X_j \in \mathcal{L}_2$.

Kovariančnú maticu definujeme vzťahom $\mathbb{C}(\mathbf{X}) := (\text{Cov}[X_i, X_j])_{i,j=1}^n$.

Korelačnú maticu definujeme vzťahom $\mathbb{R}(\mathbf{X}) := (\rho(X_i, X_j))_{i,j=1}^n$.

DEF. (Kvantilová funkcia)

Nech $X \sim F_X$. **Kvantilová funkcia** F_X^{-1} je pre $\forall \alpha \in (0, 1)$ definovaná ako

$$F_X^{-1}(\alpha) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\}.$$

Poznámka. V značení využívame, že kvantilová funkcia je do istej miery inverzia k F_X . O inverzii má ale zmysel hovoriť len tam, kde je F_X spojitá a rýdzo monotónna.

DEF. (Kvantily)

Kvantily hovoríme bodom definičného oboru F_X , ktoré rozdeľujú obor hodnôt distribučnej funkcie na časti s rovnakou pravdepodobnostnou hmotou.

α -**kvantily** označíme teda $\alpha - 1$ bodov, ktoré rozdeľujú obor hodnôt F_X na α častí, pričom každá má pravdepodobnostnú hmotu $\frac{1}{\alpha}$.

Pravdepodobnostná hmota v kvantiloch sa postupne kumuluje, vždy o prírastok $\frac{1}{\alpha}$. Možno ich určiť zapôsobením kvantilovej funkcie v bodoch $\frac{j}{\alpha}$ pre $\forall j \in \mathbb{N}, 0 < j < \alpha$.

Poznámka. Nech $X \sim F_X$ symetrická okolo bodu $a \in \mathbb{R}$, pričom F_X spojitá a rýdzo monotónna. Potom platí pre ľubovoľné $\alpha \in (0, 1)$, že $x_\alpha = 2a - x_{1-\alpha}$.

DEF. (Momenty)

Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ak pre $k \in \mathbb{N}$ existuje $E[X^k]$, nazveme ju **obecný k -ty moment** X a značíme μ_k .

Ak pre $k \in \mathbb{N}$ existuje $E[(X - E[X])^k]$, nazveme ju **centrálny k -ty moment** X a značíme ν_k .

Poznámka. Platí $\nu_1(X) = 0, \nu_2(X) = \text{Var}[X]$. Možno využiť aj vyššie momenty na zadefinovanie tzv. šikmosti či špičatosti, ktoré vyjadrujú symetrickosť rozdelenia či ostrosť priebehu rozdelenia.

V. (Youngova nerovnosť v MIP)

Nech $X, Y \in L_2$. Potom $2|E[XY]| \leq E[X^2] + E[Y^2]$.

V. (Cauchy - Schwarzova nerovnosť v MIP)

Nech $X, Y \in L_2$. Potom $|E[XY]| \leq \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}$, resp. $\langle X, Y \rangle_{L_2} \leq \|X\|_{L_2}\|Y\|_{L_2}$.

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď sú X a Y lineárne závislé.

V. (O prenose integrácie)

Nech $\mathbf{X}$ náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim P^{\mathbf{X}}$.

Nech $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ borelovsky merateľná. Za predpokladu existencie aspoň jedného z integrálov

$$E[g \circ \mathbf{X}] = \int_{\Omega} g \circ \mathbf{X} dP = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) d(P \circ \mathbf{X}^{-1}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) dP^{\mathbf{X}}.$$

Voľbou identického g dostávame

$$E[\mathbf{X}] = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{x} dP^{\mathbf{X}}.$$

Poznámka. Veta nám pomohla prejsť z integrácie na abstraktnom priestore do $\mathbb{R}^n$.

Ak má $\mathbf{X}$ diskrétné rozdelenie a $\sum_k g(\mathbf{x}_k)$ konverguje, máme

$$E[g \circ \mathbf{X}] = \sum_k g(\mathbf{x}_k)p_k \text{ resp. } E[\mathbf{X}] = \sum_k \mathbf{x}_k p_k.$$

Ak má $\mathbf{X}$ absolútne spojitú rozdelenie vzhľadom k λ a $g(\mathbf{X}) \in \mathcal{L}$, máme

$$E[g \circ \mathbf{X}] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\lambda \text{ resp. } E[\mathbf{X}] = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{x}f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\lambda.$$

V. (Výpočet E pomocou F_X)

Nech $X \in \mathcal{L}_1$. Potom platí:

- $X \geq 0 \implies E[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x)) dx.$
- $X \leq 0 \implies E[X] = - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx.$
- Pre ľubovoľnú náhodnú veličinu existuje rozklad $X = X^+ - X^-$. Ak majú obe strany zmysel

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-] = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx.$$

V. (Výpočty s varianciou)

Nech $X \in \mathcal{L}_2$. Potom platí:

- $\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$

- Pre $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je

$$\text{Var}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \text{Var}[X].$$

- Pre $\forall \beta \in \mathbb{R}$ je

$$\text{Var}[\beta] = 0.$$

V. (Výpočty s kovarianciou)

Nech $X, Y \in \mathcal{L}_2$. Potom platí:

- $\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X] \geq 0.$
- $\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X].$
- Ak sú X, Y nezávislé, potom $\text{Cov}[X, Y] = 0.$

V. (Výpočty s koreláciou)

Nech $X, Y \in \mathcal{L}_2$. Potom platí:

- $\rho(X, Y) \in [-1, 1].$
- $\rho(X, Y) = 1 \iff (\exists \beta > 0) (\beta(X - E[X]) = Y - E[Y]).$
- $\rho(X, Y) = -1 \iff (\exists \beta < 0) (\beta(X - E[X]) = Y - E[Y]).$

V. (O kovariančnej matici)

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{L}_2$. Potom platí:

- $\text{diag } \mathbb{C}(\mathbf{X}) = (\text{Var}[X_1], \dots, \text{Var}[X_n]).$
- $\mathbb{C}(\mathbf{X})$ je pozitívne semidefinitná.
- $\mathbb{C}(\mathbf{X})$ je symetrická.

Poznámka. Obdobne pre korelačnú maticu. Tá má na diagonále dokonca jednotky.

V. (Nezávislosť a stredná hodnota)

Nech $(X_j)_{j=1}^{+\infty} \subset \mathcal{L}_1$ resp. $\mathcal{L}_2$ nezávislé. Potom pre $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E \left[\prod_{j=1}^n X_j \right] = \prod_{j=1}^n E[X_j] \text{ resp. } \text{Var} \left[\sum_{j=1}^n X_j \right] = \sum_{j=1}^n \text{Var}[X_j].$$

Poznámka. Ide o nutnú podmienku nezávislosti. Obecne túto implikáciu nemožno obrátiť.

Konvergenca v MIP

DEF. (Konvergenca podľa normy)

Nech $1 \leq p < +\infty$, $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Konvergenca $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ **k** X **podľa normy** je definovaná ako

$$X_n \xrightarrow{L_p} X \iff \|X_n - X\|_p = \left(E[|X_n - X|^p] \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0.$$

DEF. (Konvergenca skoro iste - silná)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Konvergenca $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ **k** X **skoro iste** je definovaná ako

$$X_n \xrightarrow{s.i.} X \iff P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\right\}\right) = 1.$$

Možno tiež písať $P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} |X_n - X| = 0\right) = 1$, alebo analogicky $P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} |X_n - X| \neq 0\right) = 0$.

DEF. (Konvergenca podľa pravdepodobnosti - slabá)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Konvergenca $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ **k** X **podľa pravdepodobnosti** je definovaná ako

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff \forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1.$$

Možno tiež písať $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$, alebo analogicky $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

DEF. (Lipschitzovská funkcia)

Funkcia $g: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ je **lipschitzovská** práve vtedy, keď

$$(\exists L > 0)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^s)(|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|).$$

Poznámka. Každá lipschitzovská funkcia je spojitá, dokonca absolútne. Preto sa často na g v ďalšej definícii kladie priamo táto silnejšia požiadavka, i keď lipschitzovkosť stačí.

DEF. (Konvergenca v distribúcií)

Nech $(\mathbf{X}_n)_{n=1}^{+\infty}$ náhodné veličiny na priestoroch $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ a pre $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $\mathbf{X}_n: \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^s$, $\mathbf{X}_n \sim P^{\mathbf{X}_n}$.² Uvažujme ešte $\mathbf{X}$ náhodnú veličinu na priestore $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$, $\mathbf{X}: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^s$, $\mathbf{X} \sim \tilde{P}^{\mathbf{X}}$.

Konvergenca $(\mathbf{X}_n)_{n=1}^{+\infty}$ **k** $\mathbf{X}$ **v distribúcií** je definovaná ako

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X} \iff (\forall g: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}, g \text{ obmedzená lipschitzovská}) \left(\int_{\mathbb{R}^s} g(\mathbf{x}) dP^{\mathbf{X}_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^s} g(\mathbf{x}) d\tilde{P}^{\mathbf{X}} \right).$$

Pomocou vety o prenose integrácie možno pravú časť prepísať na

$$\int_{\Omega_n} g(\mathbf{X}_n) dP_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\Omega}} g(\mathbf{X}) d\tilde{P}.$$

Následne pomocou strednej hodnoty

$$E_{P_n} [g(\mathbf{X}_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E_{\tilde{P}} [g(\mathbf{X})].$$

Z dôvodu úspornosti často dolné indexy vynechávame a len si pamätáme, že každú veličinu integrujeme podľa inej pravdepodobnostnej miery.

²Ide o postupnosť náhodných veličín, pričom každá z týchto veličín je definovaná na vlastnom pravdepodobnostnom priestore a zobrazuje do $\mathbb{R}^s$.

V. (O konvergencii podľa normy)

Nech $1 \leq p < q < +\infty$, $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset L_q(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom $X_n \xrightarrow{L_q} X \implies X_n \xrightarrow{L_p} X$.

Poznámka. Na priestoroch s obecnou mierou nemusí veta platiť vôbec.

V. (Dôsledky konverencie podľa normy)

Nech $1 \leq p < +\infty$, $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom $X_n \xrightarrow{L_p} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$.

V. (Kritérium silnej konverencie)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$. Kritérium pre silnú konvergenciu má tvar

$$X_n \xrightarrow{s.i.} X \iff \forall \varepsilon > 0: \lim_{k \rightarrow +\infty} P \left(\bigcap_{n \geq k} \{ \omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon \} \right) = 1,$$

$$X_n \xrightarrow{s.i.} X \iff \forall \varepsilon > 0: \lim_{k \rightarrow +\infty} P \left(\bigcup_{n \geq k} \{ \omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon \} \right) = 0.$$

Možno si teda všimnúť podobnosť s významom $\{A_n \text{ a. b. f. o.}\}$ a $\{A_n \text{ i. o.}\}$.

V. (Dôsledky silnej konverencie)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom $X_n \xrightarrow{s.i.} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$.

V. (Kritérium slabej konverencie)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$. Kritérium pre slabú konvergenciu má tvar

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right] = 0.$$

V. (Dôsledky slabej konverencie)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Potom $X_n \xrightarrow{P} X \implies (\exists (n_k)_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{N}, \text{ ostro rastúca}) (X_{n_k} \xrightarrow{s.i.} X)$.

V. (O konvergencii v distribúcií 1)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde $(\forall n \in \mathbb{N})(X_n \sim P^{X_n})$.

Nech $X \sim P^X$ je z toho istého pravdepodobnostného priestoru. Potom

$$X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{d} X.$$

V. (O konvergencii v distribúcií 2)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde $(\forall n \in \mathbb{N})(X_n \sim P^{X_n})$.

Nech $X \sim \delta_c$ je z toho istého pravdepodobnostného priestoru. To znamená, že existuje isté $c \in \mathbb{R}$ také, že $X = c$ s. i. P . Potom

$$X_n \xrightarrow{d} X \implies X_n \xrightarrow{P} X.$$

V. (O konvergencii zobrazení 1)

Nech $(\mathbf{X}_n)_{n=1}^{+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$, $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathbf{X}_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^s)$ a $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^s$.

Nech $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ je borelovsky merateľná a spojitá *s.i.* vzhľadom k $P^{\mathbf{X}}$. Platí

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X} \implies g(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{P} g(\mathbf{X}) \text{ a taktiež } \mathbf{X}_n \xrightarrow{s.i.} \mathbf{X} \implies g(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{s.i.} g(\mathbf{X}).$$

V. (O konvergencii zobrazení 2)

Nech $(\mathbf{X}_n)_{n=1}^{+\infty}$, kde $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathbf{X}_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^s)$ a nech $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^s$.

Nech $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ je borelovsky merateľná a spojitá *s.i.* vzhľadom k $P^{\mathbf{X}}$. Platí

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X} \implies g(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{d} g(\mathbf{X}).$$

Lemma (Slutského lemma)

Nech $(\mathbf{X}_n)_{n=1}^{+\infty}, (\mathbf{Y}_n)_{n=1}^{+\infty}$, kde $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^s)$ a nech $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^s, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^s$.

Potom

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}_n \xrightarrow{d} \mathbf{c} \implies (\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) \xrightarrow{d} (\mathbf{X}, \mathbf{c}).$$

V. (Slutského veta)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty}, (Y_n)_{n=1}^{+\infty}$, kde $(\forall n \in \mathbb{N})(X_n, Y_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R})$ a nech $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Ak navyše $X_n \xrightarrow{d} X$ a $Y_n \xrightarrow{d} c$, tak potom platí

- $X_n \pm Y_n \xrightarrow{d} X \pm c$,
- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$,
- $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}$ pre $c \neq 0$.

V. (Lévyho veta o spojitosti)

Nech $(\mathbf{X}_n)_{n=1}^{+\infty}$, kde $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathbf{X}_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^s)$ a $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^s$. Potom

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X} \iff \varphi_{\mathbf{X}_n} \rightarrow \varphi_{\mathbf{X}}.$$

Konvergenciou charakteristických funkcií sa myslí bodová konvergenca.

V. (Konvergenca v distribúcií a distribučné funkcie)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$, kde $(\forall n \in \mathbb{N})(X_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R})$ a $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Potom

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff F_{X_n} \rightarrow F_X.$$

Konvergenciou distribučných funkcií sa myslí bodová konvergenca, konkrétne na množine bodov spojitosti F_X .

ZVČ a CLT

DEF. (Základné pojmy pre zákony veľkých čísel)

Nech $(X_j)_{j=1}^{n,+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definujeme

- **N -tý čiastočný súčet**

$$S_n := \sum_{j=1}^n X_j$$

- **Aritmetický priemer**

$$\overline{X_n} := \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j.$$

Označíme

- $(\forall j \in \hat{n})(X_j \in \mathcal{L}_1) \left(\mu_j =: E[X_j], \overline{\mu_n} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu_j \right),$
- $(\forall j \in \hat{n})(X_j \in \mathcal{L}_2) \left(\sigma_j^2 =: \text{Var}[X_j], \overline{\sigma_n^2} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \right).$

DEF. (Asymptotika)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ kde $(\forall n \in \mathbb{N})(X_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R})$. Nech $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

O postupnosti $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ povieme, že je **asymptoticky normálna** práve vtedy, keď

$$(\exists (\mu_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R})(\exists (\sigma_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^+) \left(\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} Z \right).$$

Značíme $X_n \sim \mathcal{AN}(\mu_n, \sigma_n^2)$.

Pritom μ_n nazývame **asymptotická stredná hodnota** a σ_n^2 nazývame **asymptotický rozptyl**.

Poznámka. Častejšie sa používa symbolické značenie $\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$, aj keď formálne je tento zápis nezmyselný. Naľavo máme totiž náhodné veličiny, napravo rozdelenie náhodnej veličiny, čiže de facto iné matematické objekty.

DEF. (Normálne rozdelenie vo viac rozmeroch)

Nech $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{X}]$, $\mathbb{C}$ kovariančná matica $\mathbf{X}$.

Povieme, že $\mathbf{X}$ má **s -rozmerné normálne rozdelenie** $\mathcal{N}_s(\boldsymbol{\mu}, \mathbb{C})$ práve vtedy, keď každá lineárna kombinácia jej zložiek má jednorozmerné Gaussovo rozdelenie. Matematicky

$$(\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^s) \left(\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}^T \mathbb{C} \boldsymbol{\alpha}) \right).$$

Poznámka. Ak vieme, že s -rozmerné rozdelenie je normálne, vieme to povedať aj o každej jeho zložke. Stačí voliť $\boldsymbol{\alpha}$ všade až na jednu zložku nulový. Naopak však implikácia neplatí.

DEF. (Asymptotika vo viac rozmeroch)

Nech $(\mathbf{X}_n)_{n=1}^{+\infty}$ kde $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathbf{X}_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^s)$. Nech ďalej $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_s(\mathbf{0}, \mathbb{I})$.

O postupnosti $(\mathbf{X}_n)_{n=1}^{+\infty}$ povieme, že je **asymptoticky normálna** práve vtedy, keď

$$(\exists (\boldsymbol{\mu}_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^s)(\exists (\sigma_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^+) \left(\frac{\mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu}_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} \mathbf{Z} \right).$$

Značíme $\mathbf{X}_n \sim \mathcal{AN}_s(\boldsymbol{\mu}_n, \sigma_n^2 \mathbb{I})$.

Poznámka. Miesto $\mathbb{I}$ môžeme uvažovať ľubovoľnú $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^{s,s}$, ktorá je symetrická a PSD.

Lemma (Čebyševova integrálna nerovnosť)

Nech $X \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom

$$(\forall \varepsilon > 0) \left(P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2} \right).$$

V. (Bernoulliho formulácia slabého ZVČ)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$ sú *i. i. d* s rozdelením $Be(p)$. Potom $\overline{X_n} - p \xrightarrow{P} 0$.

V. (Čebyševova formulácia slabého ZVČ)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sú po dvoch nezávislé so rovnako obmedzenými rozptylmi, tzn.

$(\exists K > 0)(\sup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n^2 \leq K)$. Potom $\overline{X_n} - \overline{\mu_n} \xrightarrow{P} 0$.

V. (Štandardná formulácia slabého ZVČ)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sú *i. i. d*. Potom $\overline{X_n} - \mu \xrightarrow{P} 0$.

Lemma (Kolmogorova nerovnosť)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sú vzájomne nezávislé.

Ak pre $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $E[X_n] = 0 \wedge \text{Var}[X_n] = \sigma_n^2$, potom

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(P \left(\max_{k \in \tilde{n}} |S_k| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\text{Var}[S_n]}{\varepsilon^2} \right).$$

V. (Borelova formulácia silného ZVČ)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$ sú *i. i. d* s rozdelením $Be(p)$. Potom $\overline{X_n} - p \xrightarrow{s.i.} 0$.

V. (Kolmogorova formulácia silného ZVČ)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sú vzájomne nezávislé a rada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2}$ konverguje.

Potom $\overline{X_n} - \overline{\mu_n} \xrightarrow{s.i.} 0$.

V. (Štandardná formulácia silného ZVČ)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sú *i. i. d*. Potom $\overline{X_n} - \mu \xrightarrow{s.i.} 0$.

V. (O asymptoticky normálnej postupnosti)

Nech $(X_n)_{n=1}^{+\infty}, (\forall n \in \mathbb{N})(X_n \sim \mathcal{AN}(\mu_n, \sigma_n^2))$. Potom

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \mu \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n^2 = 0 \right) \implies X_n - \mu \xrightarrow{P} 0.$$

V. (Nabla metóda)

Nech $(\mathbf{X}_n)_{n=1}^{+\infty}, (\forall n \in \mathbb{N})(\mathbf{X}_n \sim \mathcal{AN}_s(\boldsymbol{\mu}_n, \sigma_n^2 \mathbb{C}))$.

Nech existuje $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s, g \in \mathcal{C}^1(H_\mu)$, teda spojitou diferencovateľnou na istom okolí $\boldsymbol{\mu}$. Potom

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\mu}_n = \boldsymbol{\mu} \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n^2 = 0 \right) \implies g(\mathbf{X}_n) \sim \mathcal{AN}_s\left(g(\boldsymbol{\mu}_n), \mathbb{J}_g(\boldsymbol{\mu}) \cdot \sigma_n^2 \mathbb{C} \cdot \mathbb{J}_g^T(\boldsymbol{\mu})\right).$$

Poznámka. Existujú jednoduchšie prípady tejto vety podľa funkcie g .

Ak $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathbf{X}_n \sim \mathcal{AN}_s(\boldsymbol{\mu}_n, \sigma_n^2 \mathbb{C}))$, $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$, potom

$$g(\mathbf{X}_n) \sim \mathcal{AN}_1\left(g(\boldsymbol{\mu}_n), (\nabla g(\boldsymbol{\mu})) \cdot \sigma_n^2 \mathbb{C} \cdot (\nabla g(\boldsymbol{\mu}))^T\right).$$

Ak $(\forall n \in \mathbb{N})(X_n \sim \mathcal{AN}_1(\mu_n, \sigma_n^2))$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, potom

$$g(\mathbf{X}_n) \sim \mathcal{AN}_1\left(g(\mu_n), \sigma_n^2 [g'(\mu)]^2\right).$$

V. (CLT - Linderberg a Lévy)

Nech $(X_j)_{j=1}^{+\infty} \subset \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i. i. d so strednou hodnotou μ a rozptylom $\sigma^2 > 0$.

Potom pre $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ platí

$$\overline{X}_n \sim \mathcal{AN}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Poznámka. CLT má absolútne zásadný dôsledok.

Nech sú veličiny X_n akéhokoľvek rozdelenia, vždy sa ich aritmetický priemer $\overline{X}_n$ limitne blíži normálnemu rozdeleniu,

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{AN}(0, 1), \text{ resp. } \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Navyše z $\overline{X}_n \sim \mathcal{AN}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ máme $n^\alpha(\overline{X}_n - \mu) \sim \mathcal{AN}(0, n^{2\alpha-1}\sigma^2)$. Z MIP vieme, že možno rozšíriť tvrdenie predchádzajúce vety a dokonca

$$\left(\forall \alpha < \frac{1}{2}\right) \left(n^\alpha(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} 0\right).$$

Hovoríme o **ráde konzistentnosti** $o_p(n^{-\alpha})$ pre μ .

V. (CLT - Moivre a Laplace)

Nech $(X_j)_{j=1}^{+\infty} \subset (\Omega, \mathcal{A}, P)$ i. i. d s Bernoulliho rozdelením.

Potom pre $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ platí

$$\overline{X}_n \sim \mathcal{AN}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

V. (CLT v $\mathbb{R}^s$ - Linderberg a Lévy)

Nech $(\mathbf{X}_j)_{j=1}^{+\infty} \subset \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i. i. d s rovnakou strednou hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a kovariančnou maticou $\mathbb{C}$.

Potom pre $\overline{\mathbf{X}}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j$ platí

$$\overline{\mathbf{X}}_n \sim \mathcal{AN}_s\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\mathbb{C}\right).$$

V. (Základná veta matematickej štatistiky)

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je replikácia vlastnosti X , ktorá je určená pomocou F_X .

Pre fixné $t \in \mathbb{R}$ volíme $\theta = F_X(t)$. Potom veličina

$$F_n(t, \mathbf{X}) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi_{(X_j, +\infty)}(t)$$

je nestranným, konzistentným a $\mathcal{AN}\left(F_X(t), \frac{1}{n}F_X(t)(1 - F_X(t))\right)$ odhadom $F_X(t)$.

Lemma (Glivenko - Cantelliho lemma)

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je replikácia vlastnosti X , ktorá je určená pomocou F_X .

Potom $F_n(t) \xrightarrow{\mathbb{R}} F_X(t)$ s.i.

Otázky MAS

Bodové odhady

DEF. (Základné pojmy pre štatistiku)

Majme základnú množinu Ω , σ -algebru $\mathcal{A}$ a na nej definovanú pravdepodobnostnú mieru P .

Pravdepodobnostný priestor je trojica $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

V MAS Ω nazveme **populácia** a $\omega \in \Omega$ nazveme **indivídium**.

Náhodná veličina $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ predstavuje **vlastnosť** v rámci populácie. Realizácia náhodnej veličiny $X(\omega)$ predstavuje **pozorovanie vlastnosti** X . Častejšie uvažujeme postupnosť pozorovaní vlastnosti X , tzn. $(X(\omega_j))_{j=1}^n$.

DEF. (Náhodný výber)

Majme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. **Náhodný výber** je súbor indivídií $\omega := (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega^n$.

DEF. (Replikácia a realizácia vlastnosti)

Majme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vlastnosť X a náhodný výber $\omega \in \Omega^n$.

Replikácia vlastnosti X je náhodná veličina $\mathbf{X} : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ktorej zložky $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ pôsobia na náhodný výber v zmysle $(\forall j \in \hat{n})(X_j(\omega) := X(\omega_j))$.

Realizácia vlastnosti X je konkrétny obraz jej replikácie $\mathbf{x} := \mathbf{X}(\omega)$.

DEF. (Priestor realizácií)

Priestor realizácií (nameraných dát) je množina $\chi := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \omega \in \Omega^n, \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{x}\}$.

DEF. (Pravdepodobnostný priestor v štatistike)

Uvažujme $\Omega^n := \times_{j=1}^n \Omega_j$, $\mathcal{A}^n := \sigma\left(\times_{j=1}^n \mathcal{A}_j\right)$, $P^n := \otimes_{j=1}^n P_j$.

Potom v štatistike budeme ďalej využívať značenie $(\Omega, \mathcal{A}, P) := (\Omega^n, \mathcal{A}^n, P^n)$.

DEF. (Parameter)

Nech $k \geq 1$, systém uvažovaných rozdelení $\mathcal{P}$.

Parameter je zobrazenie $\theta : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^k$. Parameter môže byť:

- Spojený s rozdelením $X \sim P^X$.
Je teda istou funkciou $\theta = \theta(P^X)$.
- Priamo parametrom rozdelenia $X \sim P^X$.
Rozdelenie je na parametri priamo závislé, píšeme $P_\theta^X = P^X(\theta)$.

Parametrický priestor je množina všetkých parametrov $\Theta \subset \mathbb{R}^k$.

DEF. (Parametrická funkcia)

Parametrická funkcia je ľubovoľná reálna funkcia parametru, $\tau : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^s$.

Poznámka. Ide o veľmi obecnú definíciu. Najčastejšie uvažujeme $s = 1$ a identickým zobrazením sledujeme vybranú zložku viacrozmerného parametru (konkrétny jednorozmerný parameter).

DEF. (Štatistický model)

Štatistický model je systém uvažovaných rozdelení $\mathcal{P} := \{P^X\}$ resp. $\mathcal{P} := \{P_{\theta}^X \mid \theta \in \Theta\}$ identifikovateľný podľa parametru. To znamená, že $\theta_1 \neq \theta_2 \implies P_{\theta_1}^X \neq P_{\theta_2}^X$.

Poznámka. Opačne identifikovateľnosť platiť nemusí.

Dve rôzne rozdelenie môžu mať stále rovnaký parameter θ (napr. strednú hodnotu).

DEF. (Štatistika)

Štatistika je ľubovoľná borelovsky merateľná funkcia náhodnej veličiny $\mathbf{X}$, ktorá nezávisí na parametri príslušného rozdelenia.

DEF. (Bodový odhad)

Štatistiku $\hat{\theta}(\mathbf{X}) : \Omega \rightarrow \Theta \subset \mathbb{R}^k$ nazývame **bodový odhad parametru**.

Štatistiku $T_n(\mathbf{X}) : \Omega \rightarrow \tau(\Theta) \subset \mathbb{R}^s$ nazývame **bodový odhad parametrickej funkcie**, pričom index n korešponduje s počtom zložiek $\mathbf{X}$ (počtom pozorovaní).

DEF. (Nestrannosť odhadu)

Uvažujme parametrickú funkciu τ , odhad $T_n(\mathbf{X}) \in \mathcal{L}_1$.

Tento odhad je **nestranný** práve vtedy, keď

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \theta \in \Theta) \left(E[T_n(\mathbf{X})] = \tau(\theta) \right).$$

Obdobne tento odhad je **asymptoticky nestranný** práve vtedy, keď

$$(\forall \theta \in \Theta) \left(E[T_n(\mathbf{X})] \rightarrow \tau(\theta) \right).$$

Poznámka. Pre $\tau(\theta) = \theta$ nám nestrannosť hovorí, že odhad nie je vychýlený, tzn. zaťažený posunutím v dôsledku systematickej chyby.

DEF. (Konzistentnosť odhadu)

Uvažujme parametrickú funkciu τ , odhad $T_n(\mathbf{X})$.

Tento odhad je **slabo resp. silno konzistentný** práve vtedy, keď

$$(\forall \theta \in \Theta) \left(T_n(\mathbf{X}) - \tau(\theta) \xrightarrow{P} 0 \right) \text{ resp. } (\forall \theta \in \Theta) \left(T_n(\mathbf{X}) - \tau(\theta) \xrightarrow{s.i.} 0 \right).$$

Poznámka. Pre $\tau(\theta) = \theta$ nám konzistentnosť hovorí, že čím viac budeme merať, tým lepší odhad získame. Dostatočne veľkým n možno urobiť chybu odhadu ľubovoľne malú.

DEF. (Výdatnosť odhadu)

Uvažujme parametrickú funkciu τ , odhad $T_n(\mathbf{X}) \in \mathcal{L}_2$. Tento odhad je **výdatný (eficientný)** práve vtedy, keď má najmenšiu možnú strednú kvadratickú odchýlku zo všetkých odhadov.

Iným slovami, ak pre $\forall \theta \in \Theta$ a $\widetilde{T}_n(\mathbf{X}) \in \mathcal{L}_2$ platí, že

$$s = 1 : E \left[(T_n(\mathbf{X}) - \tau(\theta))^2 \right] \leq E \left[(\widetilde{T}_n(\mathbf{X}) - \tau(\theta))^2 \right],$$

$$s > 1 : E \left[\|T_n(\mathbf{X}) - \tau(\theta)\|^2 \right] \leq E \left[\|\widetilde{T}_n(\mathbf{X}) - \tau(\theta)\|^2 \right].$$

Pre nestranné odhady prechádzajú stredné kvadratické odchýlky na variancie. V tom prípade možno povedať, že výdatnejší je odhad s menším rozptylom.

Poznámka. Pre $\tau(\theta) = \theta$ nám výdatnosť hovorí, že odhad nie je príliš „roztahaný“ a dobre odpovedá skutočnosti.

DEF. (Asymptoticky normálny odhad)

Uvažujme maticu $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^{s,s}$, ktorá je PSD a symetrická. Uvažujme navyše parametrickú funkciu τ , odhad $T_n(\mathbf{X})$. Tento odhad je **asymptoticky normálny** práve vtedy, keď

$$(\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta) \left(T_n(\mathbf{X}) \sim \mathcal{AN}_s \left(\tau(\boldsymbol{\theta}), \frac{1}{n} \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}) \right) \right).$$

Pre $s = 1$ dostávame $\mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}) = \sigma^2(\boldsymbol{\theta})$, tzv. **asymptotický rozptyl**.

Poznámka. Z asymptotickej normality neplynie, že $E[T_n(\mathbf{X})] \rightarrow \tau(\boldsymbol{\theta})$ ani $\text{Var}[T_n(\mathbf{X})] \rightarrow \frac{1}{n} \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta})$.

V. (O t -štatistike)

Nech $X \in \mathcal{L}_2$, $\mathbf{X}$ jej replikácia. Potom pre t -štatistiku

$$t_n(\mathbf{X}) := \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{s_n} \xrightarrow{d} U \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Čiže Študentovo rozdelenie pre dostatočne veľké n splýva s normálnym rozdelením.

V. (O výberovom priemere)

Nech $X \in \mathcal{L}_1$, $\mathbf{X}$ jej replikácia. Volíme $\theta := \mu = E[X]$. Uvažujme výberový priemer

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j.$$

Ten je potom nestranným a konzistentným odhadom parametru $\theta = \mu$.

Ak navyše $X \in \mathcal{L}_2$, potom $\overline{X}_n \sim \mathcal{AN}(\mu, \frac{1}{n} \sigma^2)$ odhadom parametru $\theta = \mu$.

V. (O výberovom rozptyle)

Nech $X \in \mathcal{L}_2$, $\mathbf{X}$ jej replikácia. Volíme $\theta := \sigma^2 = \text{Var}(X)$. Uvažujme výberový rozptyl

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X}_n)^2.$$

Ten je potom asymptoticky nestranným a konzistentným odhadom parametru $\theta = \sigma^2$.

Ak navyše $X \in \mathcal{L}_4$, potom $\widehat{\sigma}_n^2 \sim \mathcal{AN}(\sigma^2, \frac{1}{n}(\nu_4 - \sigma^4))$ ¹ odhadom parametru $\theta = \sigma^2$.

Poznámka. Pre modifikáciu výberového rozptylu

$$s_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X}_n)^2.$$

platí obdobná veta s tým, že tento odhad je dokonca nestranný (nielen asymptoticky).

¹Štvrtý centrálny moment $\nu_4 := E[X - E[X]]^4$ nepoznám. Je to ďalšia vec, ktorú musím najprv nejako odhadnúť, ak chcem používať túto vetu.

V. (O výberovom momente - Chinchinova veta, prvá časť)

Nech $r \geq 1$, $X \in \mathcal{L}_r$, $\mathbf{X}$ jej replikácia. Volíme $\theta_1 := \mu_r = E[X^r]$. Uvažujme r -tý výberový moment

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^r.$$

Ten je potom nestranným a konzistentným odhadom parametru $\theta_1 = \mu_r$.

Ak navyše $X \in L_{2r}$, potom $m_r \sim \mathcal{AN}(\cdot, \cdot)$ odhadom parametru $\theta_1 = \mu_r$.

V. (O centrálnom výberovom momente - Chinchinova veta, druhá časť)

Nech $r \geq 1$, $X \in \mathcal{L}_{2r}$, $\mathbf{X}$ jej replikácia. Volíme $\theta_2 := \nu_r = E[(X - E[X])^r]$.

Uvažujme r -tý centrálny výberový moment

$$n_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^r.$$

Ten je potom asymptoticky nestranným a konzistentným odhadom parametru $\theta_2 = \nu_r$.

Ak navyše $X \in L_{4r}$, potom $n_r \sim \mathcal{AN}(\cdot, \cdot)$ odhadom parametru $\theta_2 = \nu_r$.

V. (O odhadoch pri normálnom rozdelení)

Nech $X \in \mathcal{L}_2$, $\mathbf{X}$ jej replikácia, pričom zložky $(X_j)_{j=1}^n$ sú *i.i.d* s rozdelením $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Uvažujme ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$.

- Pre $\bar{X}_n$ je $\text{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$ a platí

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

- Pre $\widehat{\sigma}_n^2$ je $\text{Var}(\widehat{\sigma}_n^2) = 2\sigma^4 \frac{(n-1)}{n^2}$ a platí

$$\frac{n\widehat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

- Pre s_n^2 je $\text{Var}(s_n^2) = 2\sigma^4 \frac{1}{n-1}$ a platí

$$\frac{(n-1)s_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

- Veličiny $\bar{X}_n$ a s_n^2 sú stochasticky nezávislé² a platí

$$t_n(\mathbf{X}) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{s_n} \sim \frac{\mathcal{N}(0, 1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n-1)}{n-1}}} = t(n-1).$$

Poznámka. Zjavne $\text{Var}(s_n^2) > \text{Var}(\widehat{\sigma}_n^2)$. Čiže $\widehat{\sigma}_n^2$ má nevýhodu v len asymptotickej nestrannosti, ale výhodu v menšom rozptyle. Obecne nemožno povedať, ktorý z odhadov je lepší.

²Pozor, funkčne sú závislé, pretože sú vyrobené obe z veličín $(X_j)_{j=1}^n$.

DEF. (Momentové zobrazenie)

Nech $k \geq 1, \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$. Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je replikácia vlastnosti X , ktorá je určená pomocou $f_X(x, \boldsymbol{\theta})$. Nech $X \in \mathcal{L}_k$, čiže pre $\forall r \in \hat{k}$ existujú momenty $\mu_r = \mu_r(\boldsymbol{\theta})$.

Definujeme **momentové zobrazenie** $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ dané ako $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) := (\mu_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \mu_k(\boldsymbol{\theta}))$. Na toto zobrazenie kladieme dodatočné požiadavky, ktoré zabezpečia existenciu $\boldsymbol{\mu}^{-1}$. Požadujeme preto napr. aby bolo $\boldsymbol{\mu}$ regulárne a prosté.

Poznámka. Analogicky možno uvažovať aj centrálné momenty, ak $X \in \mathcal{L}_{2k}$.

DEF. (Momentový odhad)

V nadväznosti na predchádzajúcu definíciu uvažujme najvyššie výberové momenty $m_r = m_r(\mathbf{X})$. Definujeme **momentový odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$** ako

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_M(\mathbf{X}) := \boldsymbol{\mu}^{-1}(m_1(\mathbf{X}), \dots, m_k(\mathbf{X})).$$

Definujeme ešte **momentový odhad parametrickej funkcie $\tau(\boldsymbol{\theta})$** ako $T_M(\mathbf{X}) := \tau(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_M(\mathbf{X}))$.

Zhrnutie metódy M - Moments

Výhody metódy:

- Je invariantná voči transformáciám, $T_M(\mathbf{X}) := \tau(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_M(\mathbf{X})) = \hat{\tau}(\boldsymbol{\theta}_M(\mathbf{X}))$.
- Konzistentný aj $\mathcal{AN}$.
- Dostávame jednoduché rovnice pre $\boldsymbol{\theta}$ s menším počtom zložiek v tvare $\mu_r(\boldsymbol{\theta}) = m_r(\mathbf{X})$.

Nevýhody metódy:

- Odhady obecné nie sú výdatné.
- Silné predpoklady (existencia všetkých momentov, spojitost a diferencovateľnosť zobrazení).

Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou i.i.d. z rozdělení $N(0, \theta^2)$ useknutého v bodě 0 zleva. Metodou momentů najděte odhad parametru θ . Dále rozhodněte, zda je tento odhad nestranný a konzistentní a odvoďte jeho asymptotické rozdělení.

Chceme zachovat normovanost na 1, takže $f(x, \theta) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right); x \in (0; +\infty)$.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\theta} x \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right) dx = \left| \begin{matrix} y = \frac{x^2}{2\theta^2} \\ dy = \frac{x}{\theta^2} dx \end{matrix} \right| = \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta \cdot e^{-y} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta \cdot E(X^2) \cdot \theta^{-2}$$

MEq: $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta = m_1 \Rightarrow \hat{\theta}_H = \sqrt{\frac{\pi}{2}} X_n$. Analogicky, když dosadím $x = \sqrt{2\theta^2 y}$ a vezmu na Γ funkci.

NESTRANNOST:
 $E(\hat{\theta}_H) = E\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} X_n\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot E(X) = \theta \quad \checkmark$

KONZISTENCIA:
 Funkce $\mu: m_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta; \mu^{-1}: \theta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} m_1$ Když μ^{-1} spojitá, takže možná převést V.2.4 $\checkmark$

AN:
 Funkce μ, μ^{-1} spojitě diferencovatelné; $J_{\mu^{-1}}(\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \ell(\theta) = \text{Cov}(X) = \text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \theta^2 - \theta^2 = 0$
 Možná převést V.2.6. a odhad $\frac{1}{n} J_{\mu^{-1}}(\theta) \cdot \ell(\theta) \cdot J_{\mu^{-1}}(\theta) = \frac{1}{n} \cdot \theta^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

Čiže $\hat{\theta}_H \sim AN\left(\theta; \frac{1}{n} \theta^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right)$.

OBR. 6.1: Ukážka metody momentů pro normálne rozdelenie.

Napočítavame $E[X], E[X^2]$... Potom ich položíme rovné m_1, m_2 ... Keďže výberové momenty sú nejakou funkciou náhodnej veličiny, vyjadríme parameter ako funkciu závislu na X . Tým dostaneme hľadaný odhad.

DEF. (Stratová a riziková funkcia)

Nech $k \geq 1, \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$. Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je replikácia vlastnosti X , ktorá je určená pomocou $f_X(x, \boldsymbol{\theta})$. Nech $T_n(\mathbf{X}) \in \mathcal{L}_2$ je odhad $\tau(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$.

Stratová funkcia $L(T_n(\mathbf{X}), \boldsymbol{\theta})$ vyjadruje odchýlku odhadu od skutočnej hodnoty parametru. Existuje viacero stratových funkcií, ktoré sa odlišujú indexom. My indexovať nebudeme, pretože v celom MAS uvažujeme výhradne **kvadratickú** stratovú funkciu

$$L(T_n(\mathbf{X}), \boldsymbol{\theta}) := (T_n(\mathbf{X}) - \tau(\boldsymbol{\theta}))^2.$$

Riziková funkcia $R(T_n(\mathbf{X}), \boldsymbol{\theta})$ je definovaná ako

$$R(T_n(\mathbf{X}), \boldsymbol{\theta}) := E[L(T_n(\mathbf{X}), \boldsymbol{\theta})].$$

Pre nestranné odhady ide o rozptyl, $R(T_n(\mathbf{X}), \boldsymbol{\theta}) = \text{Var}[T_n(\mathbf{X})]$.

DEF. (T_{UMR} a T_{UMVUE} odhad)

V nadväznosti na predchádzajúcu definíciu zavádzame za predpokladu existencie príslušného minima **odhad za stejnôměrne minimálního risku** $T_{UMR}(\mathbf{X})$ ako

$$T_{UMR}(\mathbf{X}) := \arg \min_{T_n(\mathbf{X})} R(T_n(\mathbf{X}), \boldsymbol{\theta}).$$

Ak uvažujeme $T_n(\mathbf{X})$ nestranný, daný odhad nazývame **nestranný odhad za stejnôměrne minimální odchýlky** $T_{UMVUE}(\mathbf{X})$.

Zhrnutie metódy UMVUE - Uniformly Minimum-Variance Unbiased Estimator

Výhody metódy:

- Získaný $T_{UMVUE}(\mathbf{X})$ je najlepší zo všetkých možných nestranných odhadov.

Nevýhody metódy:

- Nie je invariantná voči transformáciám.
- Nepoužiteľné pre model, kde neexistuje žiadny nestranný odhad alebo je nevyhovujúci pre použitie Rao-Blackwellovej vety. Práve pomocou tej (resp. jej vylepšenia v podobe Lehman-Scheffeho vety) UMVUE prakticky hľadáme.
- $T_{UMVUE}(\mathbf{X})$ môže byť stále horší ako nejaký iný vychýlený odhad, ak má tento vychýlený odhad stejnôměrne nižší rozptyl.
To vieme už z Gaussovho rozdelenia. Nestranný s_n^2 nie je vždy lepší ako vychýlený $\widehat{\sigma_n^2}$.

Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou i.i.d. s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Pro σ^2 známé nalezněte UMVUE pro parametr μ .

Víme, že náš odhad je sa dobře hodí $T_n(X) = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Zaujímá nás tento odhad, pro μ .

Máme $E(T_n(X)) = \mu$; $\text{Var}(T_n(X)) = \frac{\sigma^2}{n}$. Víme též, že pro normální rozdělení $\text{Inf}(\mu, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^2} \end{pmatrix}$
 $\text{RCLB}(\theta) = \frac{(2\sigma^2)^2}{\text{Inf}(\mu)} = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n}$. Ukulíme tedy $\text{Var}(T_n(X)) = \text{RCLB}(\theta) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Je nestranný odhad $E(\theta) = E(\mu) = \mu$.

UMVUE pro σ^2 (a Lehmann-Scheffé): $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$

Víme, že $E(S_n^2) = \sigma^2$; $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \Rightarrow \text{Var}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$

→ Podle $\frac{n-1}{\sigma^2} \sigma^2$.

$$\text{Var } S_n^2 = \frac{2\sigma^4}{(n-1)} > \text{RCLB}(\theta)$$

Další odhad pro σ^2 : $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$

Víme, že $E(\hat{\sigma}_n^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$; $\text{Var}(\hat{\sigma}_n^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \text{Var}(S_n^2) = \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{2\sigma^4}{(n-1)} = \frac{n-1}{n^2} 2\sigma^4 < \text{RCLB}(\theta)$

Aj keď je S_n^2 nestranný, má aj táto vlastnosť spásomobnosti!

8

OBR. 6.2: Odvodenie UMVUE odhadu pre normálne rozdelenie.

Nestranné odhady

DEF. (Vierohodnostná funkcia)

Uvažujme systém hustôt $\mathcal{F} := \{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$.

Vierohodnostná funkcia $L(\boldsymbol{\theta})$ je definovaná

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : L(\boldsymbol{\theta}) := f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}).$$

Na hustotu pravdepodobnosti sa tentokrát pozeráme (po dosadení konkrétnych dát $\mathbf{x}$) výhradne ako na funkciu parametru $\boldsymbol{\theta}$.

Logaritmická vierohodnostná funkcia $l(\boldsymbol{\theta})$ je definovaná

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \forall \mathbf{x} \in \text{supp } f_{\mathbf{X}} : l(\boldsymbol{\theta}) := \ln L(\boldsymbol{\theta}).$$

Systém vierohodnostných rovníc LE_q je potom chápaný ako systém k rovníc

$$\nabla l(\boldsymbol{\theta}) = (\partial_1 l(\boldsymbol{\theta}), \partial_2 l(\boldsymbol{\theta}), \dots, \partial_k l(\boldsymbol{\theta})) = 0.$$

LE_q sa riešia spravidla numericky, diferenciálnymi metódami. Tie nefungujú vždy. Rozlišujeme dva hlavné problémy:

- Definičný obor závisí na $\boldsymbol{\theta}$, čiže $\text{supp } f_{\mathbf{X}}$ sa mení pre každý parameter.
- Spomínané maximum je v bode, kde $L(\boldsymbol{\theta})$ resp. $l(\boldsymbol{\theta})$ nie je diferencovateľná, čo môže nastať napr. v krajnom bode $\text{supp } f_{\mathbf{X}}$.

Ak dané riešenie možno nájsť, ide o nejaký lokálny extrém. Extrém, ktorý predstavuje dokonca globálne (!) maximum potom využijeme k definícii MLE odhadu.

DEF. (Maximálny vierohodný odhad)

V nadväznosti na predchádzajúce definície zavedme $\widehat{\boldsymbol{\theta}_{MLE}}(\mathbf{X}) := \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta})$.

Ak $\widehat{\boldsymbol{\theta}_{MLE}}(\mathbf{X})$ existuje, je jednoznačný a závislý na $\mathbf{X}$, nazveme ho **maximálny vierohodný odhad** $\boldsymbol{\theta}$. $T_{MLE}(\mathbf{X}) := \tau(\widehat{\boldsymbol{\theta}_{MLE}}(\mathbf{X}))$ nazveme **maximálny vierohodný odhad** $\tau(\boldsymbol{\theta})$.

DEF. (Fisherova matica a Fisherova informácia)

Uvažujme systém hustôt $\mathcal{F} := \{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$.

Nech existuje $L(\boldsymbol{\theta})$ resp. $l(\boldsymbol{\theta})$ a jej gradient $\nabla l(\boldsymbol{\theta})$. Pre $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$ uvažujeme

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta}) := \text{Cov}[\nabla l(\boldsymbol{\theta})],$$

tzn. kovariančnú maticu rozmerov $(k \times k)$ počítanú z jednotlivých zložiek $\nabla l(\boldsymbol{\theta})$.

Túto maticu nazveme **Fisherova informačná matica**.

Pre $\forall \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ jednorozmerné dostávame **Fisherovu informáciu** $\mathbb{I}(\theta) = \text{Var} \left[\frac{\partial \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} \right]$.

DEF. (Regulárny systém hustôt $\mathcal{F}_{reg}$)

Uvažujme systém hustôt $\mathcal{F} := \{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$.

Potom $\mathcal{F}$ nazveme **regulárny** práve vtedy, keď platia nasledujúce 4 podmienky:

- Θ je otvorená množina.
- Nosič $\text{supp } f_{\mathbf{X}}$ nezávisí na $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$.
- Pre $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$ platí $E[\nabla l(\boldsymbol{\theta})] = 0$.
- Pre $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$ je Fisherova informačná matica $\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta})$ PD a jej prvky sú konečné čísla.

Tento systém budeme značiť $\mathcal{F}_{reg}$.

DEF. (ML-regulárny systém hustôt $\mathcal{F}_{reg}^{ML}$)

Uvažujme systém hustôt $\mathcal{F} := \{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$.

Potom $\mathcal{F}$ nazveme **ML regulárny** práve vtedy, keď platia nasledujúce 4 podmienky:

- Splňuje predpoklady $\mathcal{F}_{reg}$.
- Pre $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$ platí záměna integrácie a druhej derivácie v tvare

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} 1 = 0.$$

- Pre $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí, že $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathcal{C}^{(3)}$ vzhľadom k $\boldsymbol{\theta}$. Tým rozumieme spojitú diferencovateľnosť pri postupnom derivovaní podľa ľubovoľných troch zložiek $\boldsymbol{\theta}$.
- Možno zhora odhadovať tretiu deriváciu $\ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ podľa ľubovoľných troch zložiek $\boldsymbol{\theta}$ nejakou integrabilnou funkciou, tzn.

$$(\forall \boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta)(\exists H_{\boldsymbol{\theta}_0} \subset \Theta)(\forall \boldsymbol{\theta} \in H_{\boldsymbol{\theta}_0}) \left(\|\partial^3 \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})\| \leq M(\mathbf{x}) \right) \text{ kde } E_{\boldsymbol{\theta}_0}[M(\mathbf{X})] < +\infty.$$

Tento systém budeme značiť $\mathcal{F}_{reg}^{ML}$.

V. (Rao - Cramerova nerovnosť)

Uvažujme systém hustôt $\mathcal{F}_{reg} = \{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$, kde $\mathbf{X}$ replikácia vlastnosti X . Označme $\mathbb{I}_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta})$ Fisherovu informačnú maticu pre príslušnú viacrozmernú hustotu.

Nech parametrická funkcia $\tau(\boldsymbol{\theta})$ splňuje:

- $\tau(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$,
- $(\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta)(\exists \nabla \tau(\boldsymbol{\theta}))$.

Nech pre odhad parametrickej funkcie $T_n(\mathbf{X})$ splňuje:

- Je nestranný.
- Pre $\forall i \in \hat{k}$ možno $E[T_n(\mathbf{X})]$ derivovať podľa θ_i pod znakom E (možno zameniť deriváciu a integrál).

Potom existuje Rao-Cramerova spodná hranica pre rozptyl nestranného odhadu parametrickej funkcie v tvare

$$\text{Var} [T_n(\mathbf{X})] \geq RCLB_{\tau}(\boldsymbol{\theta}) := \nabla \tau(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbb{I}_{\mathbf{X}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot (\nabla \tau(\boldsymbol{\theta}))^T.$$

Rovnosť v Rao-Cramerovej nerovnosti náleží T_{UMVUE} . Nastáva pre

$$|D| = \det \begin{bmatrix} \text{Var} [T_n(\mathbf{X})] & \nabla \tau(\boldsymbol{\theta}) \\ (\nabla \tau(\boldsymbol{\theta}))^T & \mathbb{I}_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = 0$$

resp. keď D singulárna.

Poznámka. Uvažujme $\theta \in \mathbb{R}$ (jednorozmerný parameter).

Nerovnosť prejde na

$$\text{Var} [T_n(\mathbf{X})] \geq RCLB_{\tau}(\theta) := \frac{(\tau'(\theta))^2}{\mathbb{I}_{\mathbf{X}}(\theta)}.$$

Poznámka. Máme možnosť porovnať kvalitu dvoch nestranných odhadov parametrickej funkcie podľa blízkosti k $RCLB_{\tau}(\boldsymbol{\theta})$, ktorá predstavuje rozptyl najvýdatnejšieho nestranného odhadu.

V. (O existencii riešenia LE_q)

Uvažujme systém hustôt $\mathcal{F}_{reg}^{ML} = \{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$, kde $\mathbf{X}$ replikácia vlastnosti X .

Potom existuje konzistentné riešenie sústavy LE_q s týmto jednorozmerným parametrom s pravdepodobnosťou, ktorá sa s rastúcim počtom meraní blíži 1.

V. (O význame vierhodnostnej funkcie v MLE)

Uvažujme systém hustôt $\mathcal{F}_{reg} = \{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$, kde $\mathbf{X}$ replikácia vlastnosti X .

Je kľúčové zdôrazniť, že tento systém je navyše identifikovateľný podľa parametru.

Po označení skutočnej hodnoty parametru ako $\boldsymbol{\theta}_0$ platí pre $\forall \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{\boldsymbol{\theta}_0}(L(\boldsymbol{\theta}_0) > L(\boldsymbol{\theta})) = 1.$$

V limite ideme do nekonečna s počtom meraní n . Tento počet je skrytý v dosadzovaní nameraných dát do hustoty pravdepodobnosti $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ v definícii $L(\boldsymbol{\theta})$.

V. (Asymptotická normalita MLE)

Uvažujme systém hustôt $\mathcal{F}_{reg}^{ML} = \{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$, kde $\mathbf{X}$ replikácia vlastnosti X .

Po označení $\mathbb{I}_X(\boldsymbol{\theta}_0)$ Fisherovu informačnú maticu pre jednorozmernú hustotu $f_X(x, \boldsymbol{\theta}_0)$, kde $\boldsymbol{\theta}_0$ je skutočná hodnota parametru.

Po označení nejakého konzistentného riešenia LE_q ako $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(\mathbf{X})$ (špeciálne aj pre $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{MLE}(\mathbf{X})$) platí

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(\mathbf{X}) \sim \mathcal{AN}\left(\boldsymbol{\theta}_0, \frac{1}{n} \mathbb{I}_X^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\right).$$

Pre tento prípad, kedy $\mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{I}_X^{-1}$, nazývame odhad asymptoticky výdatný.

Zhrnutie metódy MLE - Maximum Likelihood Estimation

Výhody metódy:

- Je invariantná voči transformáciám, $T_{MLE}(\mathbf{X}) := \tau(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{MLE}(\mathbf{X})) = \widehat{\tau}(\boldsymbol{\theta}_{MLE}(\mathbf{X}))$.
- Konzistentný aj $\mathcal{AN}$.
- Odhady sú obecné výdatné (ideálne asymptotické vlastnosti).

Nevýhody metódy:

- Do vety o MLE potrebujeme konzistentné riešenie LE_q .
Na nájdenie takéhoto riešenia nie je obecný návod. Rovnice môžu byť aj neriešiteľné.
Ak aj sú rovnice riešiteľné, často je riešenie výpočetne náročné. Je bežná veľká závislosť na počiatočnom riešení, od ktorého sa pri iteráciách odrážame. Toto počiatočné riešenie sa často volí ako známy momentový odhad.
- Ideálne asymptotické vlastnosti v praxi často nestačia.
Pre pevný, konečný počet pozorovaní $n \in \mathbb{N}$ môžu byť iné odhady lepšie.

Testovanie hypotéz

DEF. (Hypotéza)

Majme populáciu Ω , vlastnosť X , ktorá je určená pomocou $f_X(x, \theta)$. Nech táto hustota je z rodiny hustôt $\mathcal{F} := \{f_X(x, \theta) \mid \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$, ktorá je identifikovateľná podľa parametru. Často požadujeme aj opačnú jednoznačnosť. Majme ďalej replikáciu vlastnosti $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$.

Nulová hypotéza H_0 je výrok o parametri, ktorý hovorí $H_0 : \theta \in \Theta_0$.

Alternatívna hypotéza H_1 hovorí $H_1 : \theta \in \Theta_1$, kde $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$.

Ak Θ_0 resp. Θ_1 jednoprvková, príslušná hypotéza je **jednoduchá**. V opačnom prípade je **zložená**. Ak je tvrdenie o parametri zapísané pomocou nerovnosti, hypotéza je **jednostranná**. V opačnom prípade je **nestranná**.

DEF. (Odmietnutie a prijatie hypotézy)

Uvažujme výberový **riestor realizácií** (nameraných dát) $\chi := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \omega \in \Omega, \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{x}\}$. Označme R_{H_0} ako jav predstavujúci **zamietnutie** H_0 a $\bar{R}_{H_0}$ ako jav predstavujúci **prijatie** H_0 .

DEF. (Chyba I. a II. druhu)

Na základe prijatia/odmietnutia hypotézy H_0 rozlišujeme **chyby I. a II. druhu**:

	Zamietame H_0	Prijímame H_0
H_0 platí	Chyba I. druhu α	Správne
H_0 neplatí	Správne	Chyba II. druhu β

Poznámka. Pochopenie rozdielu medzi chybami je zásadný pre formulovanie toho, čo bude H_0 . Hypotézy vždy nastavujeme tak, že to čo nám vadí viac je symbolizované chybou I. druhu. Inými slovami, vždy radšej zamietame H_0 aj za cenu že platí (dopúšťame sa chyby α , ktorá je zafixovaná na nízkej hodnote), než aby sme prijali H_0 aj za cenu, že neplatí (dopúšťame sa chyby β , ktorá je síce minimalizovaná, ale nie nutne nízka).

DEF. (Hladina významnosti)

Chyby pri testovaní sú komplementárne. Spravidla prvú fixujeme, druhú následne minimalizujeme.

Hladina významnosti $\alpha \in (0, 1)$ označuje fixnú hodnotu chyby I. druhu.

Poznámka. V praxi sa najmenšia hladina významnosti, pri ktorej ešte zamietame H_0 nazýva aj p -hodnota (p -value).

DEF. (Kritická funkcia testu φ)

Uvažujme test φ . **Kritická funkcia testu** $\varphi(\mathbf{x})$ určuje pravdepodobnosť zamietnutia H_0 na základe nameraných dát. Ide teda o zobrazenie $\varphi(\mathbf{x}) : \chi \rightarrow [0, 1]$ definované pre $\forall \mathbf{x} \in \chi$ ako

$$\varphi(\mathbf{x}) := P(R_{H_0} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}).$$

Poznámka. Označenie testu a kritickej funkcie testu sa líši v (ne)uvedení argumentu za φ .

DEF. (Kritická oblasť testu φ)

Uvažujme test φ . Množina $W := \{\mathbf{x} \in \chi \mid \varphi(\mathbf{x}) = 1\}$ sa nazýva **kritická oblasť testu** φ .

Je to množina nameraných dát, pri ktorých zamietame H_0 .

DEF. (Prípustná oblasť testu φ)

Uvažujme test φ . Množina $AR := \{\mathbf{x} \in \chi \mid \varphi(\mathbf{x}) < 1\}$ sa nazýva **prípustná oblasť testu** φ .

Je to množina, ktorá je doplnkom kritickej oblasti.

DEF. (Neznáhodnený test)

Uvažujme test φ , pre ktorý je kritická funkcia testu v tvare

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} : \varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in W, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Tento test potom nazveme **neznáhodnený**.

DEF. (Znáhodnený test)

Uvažujme test φ . Tento test nazveme **znáhodnený**, ak nie je neznáhodnený.

To znamená, že funkcia testu nabera v istom prípade nebinárnej hodnoty. V tomto prípade nie je vždy jednoznačne dané, či hypotézu na základe nameraných dát zamietnuť alebo prijať.

DEF. (Hladina testu φ)

Pre $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$ je definovaná funkcia $\beta_\varphi(\boldsymbol{\theta}) := E_{\boldsymbol{\theta}}[\varphi(\mathbf{X})]$. **Hladina testu** φ je $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \beta_\varphi(\boldsymbol{\theta})$.

Sme teda na časti parametrického priestoru Θ_0 , kde hľadáme supréum.

DEF. (Silofunkcia testu φ)

Silofunkcia testu φ je zúženie $\beta_\varphi(\boldsymbol{\theta})|_{\Theta_1}$. **Sila testu** pre konkrétne $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ je vyčíslenie silofunkcie pre dané $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$.

Sme teda na časti parametrického priestoru Θ_1 , kde napočítavame silu pre všetky parametre.

Odvodzovacie okienko:

Pri odvodení sily testu pre neznáhodnený φ sa dá využiť, že $P(R_{H_0})$ môže byť vlastne len 0 alebo 1. To zachytíme charakteristickou funkciou. Využitím $E[E[X | Y]] = E[X]$ máme

$$\beta_\varphi(\boldsymbol{\theta}) := E_{\boldsymbol{\theta}}[\varphi(\mathbf{X})] = E_{\boldsymbol{\theta}}[P(R_{H_0} | \mathbf{X} = \mathbf{x})] = E_{\boldsymbol{\theta}}[E[\mathbb{I}_{R_{H_0}} | \mathbf{X} = \mathbf{x}]] = E_{\boldsymbol{\theta}}[\mathbb{I}_{R_{H_0}}] = P_{\boldsymbol{\theta}}(R_{H_0}).$$

Výsledný vzťah platí dokonca aj pre znáhodnený test.

Na Θ_0 značí $\beta_\varphi(\boldsymbol{\theta})$ pravdepodobnosť chyby I. druhu. Tá je obmedzená hladinou významnosti. Na Θ_1 značí $1 - \beta_\varphi(\boldsymbol{\theta})$ pravdepodobnosť chyby II. druhu. Tá nie je zhora obmedzená ničím.

DEF. (Nestrannosť testu)

Test φ je **nestranný** práve vtedy, keď sila testu neklesá pod hladinu testu, čiže

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \beta_\varphi(\boldsymbol{\theta}) \leq \inf_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} \beta_\varphi(\boldsymbol{\theta}).$$

DEF. (Konzistentnosť testu)

Test φ je **konzistentný** práve vtedy, keď silofunkcia testu s rastúcim počtom pozorovaní bodovo konverguje k jednotke. To znamená, že pre $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_\varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1.$$

Limitíme počet pozorovaní n , ktorý sa skrýva v počte zložiek $\mathbf{X}$, keďže $\beta_\varphi(\boldsymbol{\theta}) = E_{\boldsymbol{\theta}}[\varphi(\mathbf{X})]$.

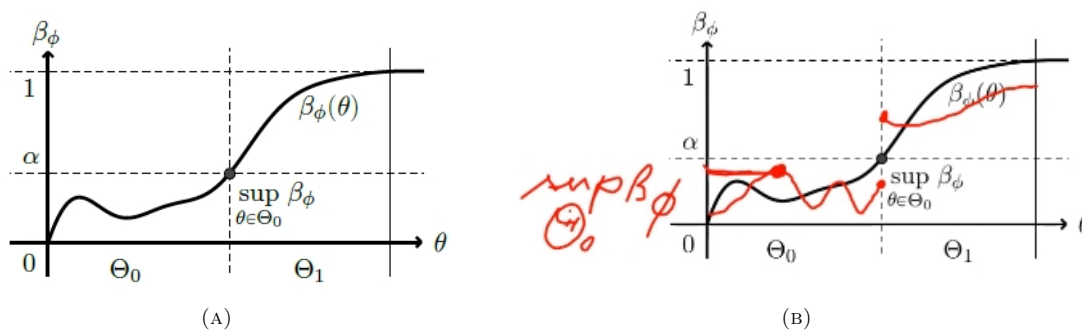
DEF. (UMP test)

Obece pripuštame len také testy, pre ktoré hladina testu je pod hranicou významnosti. To znamená, že funkcia $\beta_\varphi(\theta)$ na Θ_0 je stejnomoerne pod hladinou významnosti, resp.

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\varphi(\theta) \leq \alpha.$$

Pre **stejnomoerne najsilnejší test** φ^* navyše požadujeme, aby sila testu na Θ_1 bola stejnomoerne najväčšia. Pre tento test používame skratku **UMP** (*uniformly most powerful*).

Ideálne je v rámci dovolených medzí chybu I. druhu maximalizovať, čo vedie k minimalizácii chyby II. druhu. Je kontraproduktívne snažiť sa hodnotu chyby I. druhu pri návrhu testu ešte znižovať, tým ideme proti filozofii hľadania UMP. Funkciu β_θ by sme sa vždy mali „tlačiť nahor najviac, ako sa v rámci medzí dá“. To na Θ_0 znamená zároveň s α a na Θ_1 zároveň s 1.



Obece je problém vybrať, či je červený alebo čierny test lepší. Na Θ_0 oba splňujú, že ich hladina je pod hladinou významnosti. Z priebehu čierneho testu dokonca vidno, že jeho hladina je priamo rovná hladine významnosti. Na Θ_1 ale ani jeden nie je stejnomoerne najsilnejší.

V. (Neyman-Pearsonovo lemma pre jednoduché hypotézy)

Pri zadanej hladine významnosti $\alpha \in (0, 1)$ testujeme jednoduchú $H_0 : \theta = \theta_0$ oproti jednoduchéj $H_1 : \theta = \theta_1$. Označme príslušné hustoty $f_0 := f(\mathbf{x}, \theta_0)$, $f_1 := f(\mathbf{x}, \theta_1)$

Potom existuje UMP test φ^*

$$\varphi^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{ak } f_1 > K f_0, \\ \gamma & \text{ak } f_1 = K f_0, \\ 0 & \text{ak } f_1 < K f_0, \end{cases}$$

pre isté $K > 0$ tak, že platí $\beta_{\varphi^*}(\theta_0) = \alpha$.

DEF. (LRT test)

Pri zadanej hladine významnosti $\alpha \in (0, 1)$ testujeme obecnú $H_0 : \theta \in \Theta_0$ oproti $H_1 : \theta \in \Theta_1$. Pomocou vierohodnostnej funkcie $L(\theta)$ z kapitoly o metóde MLE definujeme

$$\Lambda(\mathbf{x}) := \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta, \mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta, \mathbf{x})}.$$

Chceme zaviesť test

$$\varphi_\Lambda(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{ak } \Lambda(\mathbf{x}) \leq K, \\ 0 & \text{ak } \Lambda(\mathbf{x}) > K. \end{cases}$$

pre isté $K \in [0, 1]$ tak, že $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_{\varphi_\Lambda}(\theta) \leq \alpha$. Ak takýto test existuje, nazveme ho **LRT test** (*likelihood-ratio test*). Ide vlastne o test s kritickou oblasťou $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \Lambda(\mathbf{x}) \leq K, K \in [0, 1]\}$.

DEF. (Jednovýberový t -test)

Uvažujme normálne rozdelenie, ktoré má **neznámu** strednú hodnotu μ a **neznámy** rozptyl σ^2 . Máme replikáciu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ vlastnosti $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Pri zadanej hladine významnosti $\alpha \in (0, 1)$ testujeme hypotézu

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Máme teda $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$, $\Theta_0 = \mu_0 \times \mathbb{R}^+$, $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Definujeme funkciu

$$\Lambda(\mathbf{x}) := \frac{\sup\{f(\mathbf{x} \mid \mu_0, \sigma^2) \mid \sigma^2 > 0\}}{\sup\{f(\mathbf{x} \mid \mu, \sigma^2) \mid \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}}.$$

Jednovýberový t -test je LRT test pre takúto $\Lambda(\mathbf{x})$. Za platnosti H_0 dostaneme štatistiku

$$T_\Lambda(\mathbf{X}) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{s_n} \sim t(n-1), \text{ pričom}$$

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n, \hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_n^2 \text{ sú MLE odhady, ktoré riešia rovnice pre suprema z } \Lambda(\mathbf{x}) \text{ a } s_n = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}_n.$$

Výsledná kritická oblasť má tvar

$$W_\Lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |T_\Lambda(\mathbf{x})| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}.$$

DEF. (Dvojvýberový F -test homogenity rozptylov)

Uvažujme dve normálne rozdelenia, ktoré majú **neznáme** stredné hodnoty μ_1, μ_2 a **neznáme** obecné rozptyly σ_1^2, σ_2^2 .

Máme replikácie $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n_1})$ vlastnosti $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ a replikácie $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n_2})$ vlastnosti $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Potom

$$\frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1), \quad \frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1).$$

Pri zadanej hladine významnosti $\alpha \in (0, 1)$ testujeme hypotézu

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2,$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Dvojvýberový F -test homogenity rozptylov volí pri platnosti H_0 štatistiku

$$T_{n_1, n_2}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2}} \frac{n_2-1}{n_1-1} \sim F(n_1-1, n_2-1).$$

Výsledná kritická oblasť má tvar

$$W = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mid T_{n_1, n_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \vee T_{n_1, n_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\}.$$

Odôvodnenie pre Dvojvýberový F -test pre rozptyly:

Test spočíva v tom, že $s_1^2 \xrightarrow{s.i.} \sigma_1^2, s_2^2 \xrightarrow{s.i.} \sigma_2^2$. Ak platí H_0 , tak sa v našej štatistike vykrátia $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ a zostane len zlomok

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \xrightarrow{s.i.} 1.$$

Využitím vety o odhadoch pri normálnom rozdelení vieme, že podiely v navrhnutej štatistike idú k χ^2 a celkovo dostávame Fisherovo rozdelenie. To je nesymetrické - kvantily nastavujeme tak, aby sme pokryli okolie jednotky (ideálne jednotkový podiel s_1^2, s_2^2).

DEF. (Dvojvýberový nepárový t -test)

Uvažujme dve normálne rozdelenia, ktoré majú **neznáme** stredné hodnoty μ_1, μ_2 a (viz rôzne nižšie diskutované príklady) obecné rozptyly σ_1^2, σ_2^2 .

Máme replikácie $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n_1})$ vlastnosti $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ a replikácie $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n_2})$ vlastnosti $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Potom

$$\overline{X}_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \quad \overline{Y}_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

Pri zadanej hladine významnosti $\alpha \in (0, 1)$ testujeme hypotézu

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2,$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Dvojvýberový nepárový t -test volí pri platnosti H_0 štatistiky pre rôzne prípady podľa toho, koľko informácií máme o rozptyloch σ_1^2, σ_2^2 . Tieto prípady sú bližšie diskutované nižšie.

- **Známe** σ_1^2, σ_2^2

) Známe-li σ_1^2, σ_2^2 , potom

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{Y}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

protože z reprodukční vlastnosti $\mathcal{N}$ víme, že $(\overline{X}_1 - \overline{Y}_2) \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$.

Při $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ pak nalezneme rozdělení testovací statistiky

$$U = U(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\overline{X}_1 - \overline{Y}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Vyřešením rovnice $\mathbb{P}(|U| \geq K_\alpha) = \alpha$ dostaneme $K_\alpha = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ s následným RT kritickým

oborem $W_\alpha = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |U(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$, kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ značí příslušný kvantil $\mathcal{N}(0, 1)$ rozdělení.

- **Neznáme** $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Len špeciálny prípad ANOVA.

- **Neznáme** $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Zložitejšia Welchova aproximácia. Vede na kritickú oblasť danú vzťahom $|T_n(\mathbf{X})| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$, kde ν je zložitý výraz. :-D

Odôvodnenie pre Dvojvýberový t -test pre stredné hodnoty:

Test spočíva v tom, že $\overline{X}_n \xrightarrow{s.i.} \mu_1, \overline{Y}_n \xrightarrow{s.i.} \mu_2$. Ak platí H_0 , tak rozdiel $(\overline{X}_n - \overline{Y}_n) \xrightarrow{s.i.} 0$.

Vieme, že štatistika má vďaka reprodukčnej vlastnosti tiež normálne rozdelenie.

To je symetrické - kvantily nastavujeme tak, aby pokryli okolie 0 (ideálne nulový rozdiel $\overline{X}_n, \overline{Y}_n$).

Konfidenčné množiny

Konfidenčné množiny sú „náhodné množiny“ parametrov, lebo sú závislé na náhodnom výbere (výrabame ich na základe pozorovaní). Skutočná hodnota parametru je pokrytá konfidenčnou množinou s prípustnou odchýlkou $\alpha \in (0, 1)$. Táto α teraz neznačí hladinu testu, v tejto kapitole totiž nič netestujeme. Ide o tzv. konfidenčnú hladinu.

DEF. (Konfidenčná množina)

Nech $k \geq 1, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k, \theta = \theta(P)$. Nech $\mathbf{X}$ je replikácia vlastnosti X určenej rozdelením $P \in \mathcal{P}$. Pripomínáme, že je dôležitá identifikovateľnosť rodiny $\mathcal{P}$ podľa parametru.

Volíme $\alpha \in (0, 1)$.

Konfidenčná množina pre skutočnú hodnotu parametru θ na hladine $(1 - \alpha)$ je množina $C(\mathbf{X})$ z borelovského systému množín nad Θ , pre ktorú platí

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} P(\theta \in C(\mathbf{X})) \geq 1 - \alpha.$$

Číslo $\inf_{P \in \mathcal{P}} P(\theta \in C(\mathbf{X}))$ nazývame **konfidenčný koeficient**.

Ak je daná konfidenčná množina interval, nazveme ho **konfidenčný interval** a značíme $CI_{1-\alpha}$.

DEF. (Asymptoticky konfidenčná množina)

V nadväznosti na predchádzajúcu definíciu je **asymptoticky konfidenčná množina** definovaná tak, že pre $\forall P \in \mathcal{P}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\theta \in C(\mathbf{X})) \geq 1 - \alpha.$$

Chceli by sme čo najväčší konfidenčný koeficient a čo najmenší stredný objem konfidenčnej množiny, chápaný pomocou Lebesgueovej miery λ ako $E[\lambda(C(\mathbf{X}))]$. Tieto požiadavky však idú proti sebe. Preto podobne ako u testovania hypotéz fixujeme konfidenčný koeficient a stredný objem sa snažíme dostať na rozumnú hranicu.

DEF. (Pivotálna veličina)

Borelovsky merateľná funkcia $\mathcal{R}(\mathbf{X}, \theta)$ sa nazýva **pivotálna veličina** pre parameter θ práve vtedy, keď jej rozdelenie nezávisí na rozdelení $P \in \mathcal{P}$.

DEF. (Asymptoticky pivotná veličina)

V nadväznosti na predchádzajúcu definíciu je **asymptoticky pivotná veličina** je taká, ktorej limitné rozdelenie (v zmysle konvergenzie v distribúcií) nezávisí na rozdelení $P \in \mathcal{P}$.

Konstrukcia konfidenčných intervalov pomocou pivotálnych veličín

1. Nájdenie istej pivotálnej veličiny $\mathcal{R}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$.

- Už tu môžeme naraziť na problémy. Napr. pivot neexistuje, resp. existuje ich mnoho ale žiadny nevieme nájsť.
- Ďalším problém môže byť, že z nájdených pivotov nevieme vybrať ten optimálny.

2. Zvolenie pevného P a nájdeme $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ také, že

$$P(c_1 \leq \mathcal{R}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \leq c_2) \geq 1 - \alpha \text{ resp. } P(c_1 \leq \mathcal{R}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \leq c_2) = 1 - \alpha.$$

- Najčastejšie sa volí symetrická voľba, podobne ako u testovania hypotéz. Volíme konštantny tak, aby sme naľavo aj napravo z hustoty $f_{\mathcal{R}}$ urezali pravdepodobnostnú hmotu $\frac{\alpha}{2}$.
- Explicitný výpočet $CM_{1-\alpha}$ z danej nerovnosti môže byť náročný. Jednoduché sú prípady, kedy je $\mathcal{R}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$ prostá.

3. Potom $CM_{1-\alpha} = \{\boldsymbol{\theta} \in \Theta \mid c_1 \leq \mathcal{R}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \leq c_2\}$.

Konstrukcia konfidenčných intervalov pomocou testovania hypotéz

1. Volíme ľubovoľné pevné $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$.

Testujeme na hladine významnosti $\alpha \in (0, 1)$ hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$.

2. Zostrojíme test φ s kritickou oblasťou W . Vyjadríme príslušnú prípustnú oblasť $AR(\boldsymbol{\theta}_0)$ ako doplnok kritickej oblasti.

3. Postup opakujeme, prejdeme všetky $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$.

4. Potom sa pozrieme, do ktorých všetkých $AR(\boldsymbol{\theta})$ spadlo naše meranie a nastavíme

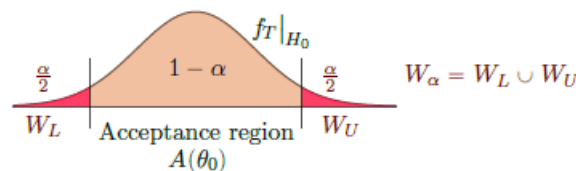
$$CM_{1-\alpha} = \{\boldsymbol{\theta} \in \Theta \mid \mathbf{X} \in AR(\boldsymbol{\theta})\}.$$

- Ak sme užili neznáhodnený test, ktorý je na hladine α , platí $\beta_{\varphi}(\boldsymbol{\theta}_0) = \alpha$ pre $\forall \boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$ a konfidenčný koeficient je rovný $(1 - \alpha)$.

POZNÁMKA 6.7. Nechť je test ϕ pro $H_0 : \theta = \theta_0$ **neznáhodněný** a tedy je charakterizován pro dané θ_0 příslušnou kritickou oblastí typu

$$W_{\alpha} = \{T(\mathbf{x}) \leq K_1 \vee T(\mathbf{x}) \geq K_2\} = \{T(\mathbf{x}) \leq K_1\} \cup \{T(\mathbf{x}) \geq K_2\} \stackrel{\text{ozn}}{=} W_L \cup W_U$$

na hladině testu α , tzn. $\mathbb{P}_{\theta_0}(\mathbf{X} \in W_{\alpha}) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\mathbf{X} \in W_L) + \mathbb{P}_{\theta_0}(\mathbf{X} \in W_U) = \alpha$. V tomto případě pak platí, že $A(\theta_0) = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \in (K_1, K_2)\} = W_{\alpha}^c$, kde $\mathbb{P}(\mathbf{X} \in A(\theta_0)) = 1 - \alpha$. Tuto situaci ilustruje obrázek 6.1.



Obrázek 6.1: Souvislost $CI_{1-\alpha}$ a testování hypotézy $H_0 : \theta = \theta_0$ skrze CR W_{α} .

Konstrukcia asymptotických konfidenčných intervalov sa robí obdobne, akurát používame výsledné limitné rozdelenia. Tieto asymptotické konfidenčné intervaly môžu byť odlišné od neasymptotických a to už pri triviálnych prípadoch (napr. gaussovské modely).

Nech X replikácia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; čiže máme $(x_i)_{i=1}^n$ i.i.d $N(\mu, \sigma^2)$. Chceme zostrojiť $CI_{1-\alpha}$ pre parameter μ ; pričom $\sigma^2 > 0$ nepoznáme.

PIVOTÁLNE VELIČINY:

① $R(X, \theta) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{L}(n-1)$ je pivotálna veličina

② Mame funkciu P^X a hľadáme $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ také, že $P^X(c_1 \leq R(X, \theta) \leq c_2) = 1 - \alpha$.

Isplati pre volbu $c_1 := k_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$; $c_2 := k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$. Potom $k_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X}_n \leq \mu \leq k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X}_n$
 $\bar{X}_n - k_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \bar{X}_n - k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

③ Vyúsťim $k_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = -k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ je $CI_{1-\alpha} := [\bar{X}_n - k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$.

TESTOVNÉ HYPOTÉZY:

① Na hladine $\alpha \in (0, 1)$ testujeme $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$.

② Vime, že pomocou jednotajkového k -testu využijim LRT pridáme k $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |T_n(x)| \geq k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$.

Odtiaľ $AR(\mu_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |T_n(x)| < k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$.

③ $CI_{1-\alpha} := \{\mu \in \mathbb{R} \mid X \in AR(\mu)\} \ni (\bar{X}_n - k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Pritom prístupný metódy s $AR(\mu_0)$.

Ešte jedna asymptotická úloha na pivotálne veličiny:

Nech X replikácia $X \sim F_X$; čiže máme $(x_i)_{i=1}^n$ i.i.d F_X . Chceme zostrojiť $CI_{1-\alpha}$ pre parameter $F_X(k)$ (hodnota distribučnej funkcie pre fixné $k \in \mathbb{R}$).

PIVOTÁLNE VELIČINY:

① Vime, že $F_n(k) \sim \text{AN}(\frac{1}{n} F_X(k), \frac{1}{n} F_X(k) \cdot (1 - F_X(k)))$. Odtiaľ $\frac{\sqrt{n}[F_n(k) - F_X(k)]}{\sqrt{F_X(k) \cdot (1 - F_X(k))}} \xrightarrow{d} W(0, 1)$.
 Označíme $R(X, \theta) = \frac{\sqrt{n}[F_n(k) - F_X(k)]}{\sqrt{F_X(k) \cdot (1 - F_X(k))}}$ a nime, že ide o asymptotickú pivotálnu veličinu.

② $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{F_X}(c_1 \leq R(X, \theta) \leq c_2) \stackrel{U \sim N(0,1)}{\rightarrow} P_{\mathbb{L}(0,1)}(c_1 \leq U \leq c_2) = 1 - \alpha$. Vime $c_1 = u_{\frac{\alpha}{2}}$; $c_2 = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Stačí prísť doviest metódu $|R(X, \theta)| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pre dané $F(k)$.

OBR. 6.4: Ukážka odvodení konfidenčných intervalov.

DEF. (χ^2 -test dobrej zhody)

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je replikácia vlastnosti X , ktorá je určená pomocou F_X .

Pri zadanej hladine významnosti $\alpha \in (0, 1)$ testujeme hypotézu

$$H_0 : F_X = F_0,$$

$$H_1 : F_X \neq F_0.$$

χ^2 -test dobrej zhody delí obor hodnôt veličiny X na disjunktné boxy $\{H_1, \dots, H_m\}$.³

Zavádzame pravdepodobnosti, že pozorovanie padne do príslušného boxu pri skutočnej F_X a pri nami overovanej F_0 . Pre $\forall j \in \hat{m}$ definujeme

$$p_j = P_{F_X}(X \in H_j), \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m), \sum_{j=1}^m p_j = 1,$$

$$p_{0j} = P_{F_0}(X \in H_j), \mathbf{p}_0 = (p_{01}, \dots, p_{0m}), \sum_{j=1}^m p_{0j} = 1.$$

Ďalej zavádzame počet pozorovaní pre každý box, tzn. pre $\forall j \in \hat{m}$ definujeme

$$Y_j = \#\{X_i \in H_j\}_{i=1}^n$$

Kedže jednotlivé replikácie vlastnosti X sú *i.i.d.*, platí

$$Y_j \sim Bi(n, p_j), \mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m) \sim Multi(n, \mathbf{p}).$$

Pôvodnú hypotézu možno previesť na testovanie parametru multibinomického rozdelenia $Multi(n, \mathbf{p})$ veličiny $\mathbf{Y}$. Pri zadanej hladine významnosti $\alpha \in (0, 1)$ testujeme hypotézu

$$H_0 : \mathbf{p} = \mathbf{p}_0,$$

$$H_1 : \mathbf{p} \neq \mathbf{p}_0.$$

Pearsonov χ^2 -test volí pri platnosti H_0 štatistiku

$$T_n(\mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^m \frac{(Y_j - np_{0j})^2}{np_{0j}} \xrightarrow{d} \chi^2(m-1).$$

Výsledná kritická oblasť pre zamietnutie H_0 na asymptotickej hladine α (!) má tvar

$$W = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid T_n(\mathbf{y}) \geq \chi_{1-\alpha}^2(m-1)\}.$$

Poznámka. Pre túto úlohu možno zaviesť aj iné, asymptoticky ekvivalentné štatistiky.

Neymanova:

$$T_n(\mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^m \frac{(Y_j - np_{0j})^2}{Y_j} \xrightarrow{d} \chi^2(m-1).$$

LRT štatistika:

$$T_n(\mathbf{Y}) = -2 \ln \Lambda(\mathbf{Y}) = -2 \sum_{j=1}^m Y_j \ln \frac{np_{0j}}{Y_j} \xrightarrow{d} \chi^2(m-1).$$

Práve cez túto LRT štatistiku sa celý test dokazuje.

Vieme, že u LRT štatistiky sa v argumente χ^2 obecne objavuje dimenzia parametru. U nás je počet zložiek $\mathbf{p}$ rovný m , avšak nesmieme zabúdať na zníženie dimenzie úlohy väzbou $\sum_{j=1}^m p_j = 1$.

Teda z odhadu pre $\forall j \in \widehat{m-1}$ máme $p_j = p_{0j}$ a posledné p_j dopočítame z väzby.

³Týmto strácame do istej miery informáciu o rozdelení, ale na tom je test postavený. Každému boxu by mal náležať dostatočný počet pozorovaní.