02LIAG - Lieovy algebry a grupy

Libor Šnobl

9. prosince 2020

Úvod

Tento text vznikl na základě jednosemestrální přednášky Lieovy algebry a grupy, kterou od akademického roku 2005/2006 přednáším v magisterském studiu na FJFI ČVUT. Obsahuje úvod do teorie Lieových grup a algeber, zaměřený zejména na pojmy a vědomosti užitečné pro studenty matematické fyziky. Vzhledem k tomu, že v českém jazyce mě není znám žádný publikovaný úvodní text srovnatelného rozsahu, doufám, že bude užitečný i pro další čtenáře.

Obsah přednášky je poměrně obvyklý: po zavedení pojmu Lieovy grupy jsou zkoumány jeho základní vlastnosti a vztah k Lieovým algebrám. Následně jsou zaváděny potřebné pojmy z teorie Lieových algeber a formulovány nejdůležitější výsledky. Závěrem a nejpodstatnějším výsledkem kurzu je vysvětlení klasifikace poloprostých Lieových algeber a struktury jejich konečněrozměrných reprezentací. Přednáška je přednášena v rozsahu 3 hodiny týdně doplněná 2 hodinami cvičení. Kapitoly víceméně odpovídají členění na týdenní bloky. Cvičení jsou zařazena převážně na závěr kapitol, pouze v kapitole o reprezentacích bylo z pedagogických důvodů vhodnější je zařadit přímo do textu. Některá důležitější cvičení jsou doplněna více či méně podrobným řešením.

Původní koncepce přednášky byla silně ovlivněna učebnicemi [11] a [5]. Tento základ byl postupně upravován, zpřesňován a rozšiřován. Z novější literatury lze jako vhodnou doplňkovou učebnici doporučit [3], s níž jsou zde používaná terminologie a značení i pokrývaná témata víceméně kompatibilní.

Po prostudování tohoto úvodu by čtenář měl být připraven využít získané znalosti v aplikacích např. při studiu diferenciálních rovnic nebo v částicové fyzice, či ke studiu pokročilejších textů z oblasti Lieových grup a algeber, např. [6, 7, 10, 12].

Od čtenářů očekávám, že již mají znalosti obvyklé u absolventů bakalářského studia matematiky či teoretické fyziky, zejména z lineární algebry, topologie a analýzy. Potřebné jsou i základní pojmy z oblasti diferenciální geometrie (diferencovatelné variety, vektorová pole, diferenciální formy). V příkladech a cvičeních je užitečná základní znalost kvantové mechaniky, neboť řada příkladů má svůj původ v této oblasti fyziky.

Pro čtenáře hledajícího text zavádějící pojmy z topologie a diferenciální geometrie dle potřeby, lze doporučit učebnici [13] zabývající se maticovými grupami, ve které lze též najít další užitečné úlohy k procvičování nebo [8] věnovanou konečným a maticovým Lieovým grupám. Pro zopakování diferenciální geometrie lze doporučit např. knihy [4, 5, 9]. Zájemce o často spletitou historii oboru, zde jen stručně zmiňovanou, lze odkázat na [2].

K samotnému vzniku textu: rukou psaný text přednášky přepsali studenti Jan Vábek a Matej Hazala do LaTeXu v podobě wikiskript a dali mi jej v této podobě k dispozici pro další úpravy. Za tuto pomoc, která značně zrychlila přepis přednášky do současné podoby, jsem jim vděčen. Upozorněním na chyby ve výkladu a překlepy během let přispěla řada dalších studentů, ať již k původním rukopisným poznámkám či k elektronické podobě textu.

Tento text je určen pro osobní potřebu a jeho neautorizované šíření není dovoleno.

Obsah

Kapitola 1

Definice Lieovy grupy a Lieovy algebry

1.1 Motivace pro studium Lieových grup a algeber

Grupy jsou matematickým nástrojem pro popis symetrií, tj. bijektivních transformací ponechávajících studovanou strukturu, objekt apod. beze změny. Pokud jsou tyto symetrie navíc parametrizované reálnými parametry, je přirozené zkoumat grupy, které mají v sobě současně zakódovánu hladkou strukturu kompatibilní se strukturou grupy. Takové grupy nazýváme Lieovy po norském matematikovi Sophusovi Lie (1842–1899), který je jako první studoval, mj. v souvislosti se studiem symetrií obyčejných diferenciálních rovnic, a vybudoval značnou část jejich teorie.

Mezi oblasti matematiky a fyziky, v nichž se můžeme s Lieovými grupami setkat, patří

- klasická mechanika – symetrie souvisí podle věty Noetherové s integrály pohybu,
- speciální relativita – jako teorie invariantní vzhledem k Lorentzově (Poincaréově) grupě,
- kvantová mechanika – v níž symetrií s výhodou využíváme při hledání spekter (např. sférická symetrie souvisí s reprezentacemi grupy SO(3), tzv. náhodná degenerace Coulombova potenciálu s reprezentacemi grupy SO(4)),
- kvantová teorie pole – symetrie představují jednu ze základních součástí její formulace („částice“ jako irreducibilní reprezentace Poincaréovy grupy),
- kalibrační teorie elementárních částic založené na reprezentacích kompaktních Lieových grup; konkrétně standardní model na grupě $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$,
- teorie diferenciálních rovnic – hledání řešení diferenciálních rovnic s využitím symetrií, tj. snižování řádu obyčejných diferenciálních rovnic a hledání invariantních řešení parciálních diferenciálních rovnic,
- diferenciální geometrie – Lieovy grupy jsou diferencovatelné variety s řadou speciálních vlastností.

1.2 Lieovy grupy

Definice 1.1. Lieova grupa je diferencovatelná varieta G vybavená binární operací zvanou grupové násobení $\cdot : G \times G \to G$ takovou, že

1. $(G, \cdot)$ je grupa, tj. $\cdot$ je asociativní, existuje jednotkový prvek e (tj. $g \cdot e = e \cdot g = g$) a ke každému prvku $g \in G$ existuje prvek inverzní $g^{-1} \in G$ takový, že $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$, a

2. zobrazení $\cdot : G \times G \to G$ a $(\quad)^{-1} : G \to G$ jsou hladká.

Poznámka 1.2. Zavádí se též pojem **lokálně n–parametrické topologické grupy**, tj. grupy, která je současně topologickým prostorem vybaveným C^0–atlasem (tj. je n–rozměrnou C^0–varietou) a jejíž grupové násobení a inverze jsou spojité. Dle V. Hilbertova problému zformulovaného v roce 1900 matematikem D. Hilbertem a vyřešeného v 50. letech 20. století libovolná lokálně n–parametrická topologická grupa je nutně též grupou Lieovou vzhledem k jednoznačně určené diferencovatelné struktuře třídy C^∞. Bez důkazu.

Příklad 1.3. Buď V vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem reálných čísel. Pak $G = GL(V) = \{A \in \mathcal{L}(V) | \exists A^{-1}\}$ je Lieova grupa vzhledem ke skládání zobrazení, $\dim GL(V) = n^2$. Ekvivalentně, po zapsání zobrazení ve zvolené bázi, $G = GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} | \det A \neq 0\}$ je Lieova grupa vzhledem k násobení matic.

Důkaz. Zobrazení $\det : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n,n}, \mathbb{R})$, $G = \det^{(-1)}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = G^\circ$ je tudíž otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{n,n}$ a tedy triviálně diferencovatelná varieta. Splnění podmínek hladkosti $\cdot$ a $(\quad)^{-1}$ plyne z $(AB)^i_j = A^i_k B^k_j$ a $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\mathrm{adj}}$, neboť složky součinu, determinantu i adjungované matice jsou polynomy ve složkách původní matice (resp. matic) a $\det A \neq 0$ pro všechna $A \in G$. $\square$

Poznámka 1.4. $GL(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n,n} \simeq \mathbb{C}^{n \cdot n} \simeq \mathbb{R}^{2n \cdot n}, \dim GL(n, \mathbb{C}) = 2n^2$. Lze ji též chápat jako **komplexní Lieovu grupu** dimenze n^2, tj. grupu, která je současně komplexní varietou (tj. vybavenou atlasem zobrazujícím do $\mathbb{C}^m$, s holomorfními přechodovými funkcemi) a jejíž grupové násobení a inverze jsou holomorfní. Teorií komplexních Lieových grup se nebudeme zvlášť zabývat. Každá komplexní Lieova grupa je zároveň Lieovou grupou dle definice 1.1 dvojnásobné dimenze, ale naopak to obecně neplatí (a to ani pokud G je přirozeně definována jako podmnožina v nějakém $\mathbb{C}^d$).

Definice 1.5. Maticové Lieovy grupy jsou takové vložené podvariety $GL(V)$, $GL(n, \mathbb{R})$ nebo $GL(n, \mathbb{C})$, které jsou současně uzavřené vzhledem k maticovému násobení a inverzi[1]. Příklady takových grup jsou

- speciální lineární grupa $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | \det A = 1\}$,
- ortogonální grupa $O(n) = \{O \in GL(n, \mathbb{R}) | O^T O = \mathbb{I}\}$,
- unitární grupa $U(n) = \{U \in GL(n, \mathbb{C}) | U^\dagger U = \mathbb{I}\}$,

kde $\mathbb{I} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$ značí jednotkovou matici.

Lze definovat i maticové grupy nad nekomutativním tělesem kvaternionů

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}\text{–span}\{1, i, j, k\}$$

[1]Ne všechny Lieovy grupy jsou maticové či jim izomorfní.

s násobením definovaným relacemi $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k$. V konkrétních situacích tento popis může být výhodný, například ortogonální kvaternionová grupa maticového rozměru 1 je jiným popisem grupy $SU(2)$, dále zavedené symplektické grupy jsou přirozeně definované jako ortogonální kvaternionové grupy. Obecně ovšem lze každou kvaternionovou maticovou grupu v $GL(n, \mathbb{H})$ chápat jako vloženou podgrupu v $GL(2n, \mathbb{C})$.

Pro studium maticových grup je důležitá dobře známá věta o implicitní funkci v následující geometrické podobě

Věta 1.6 (Věta o implicitní funkci). Buď $F : M \to V$ hladké zobrazení variet dimenze $\dim M = n$, $\dim V = r$ a bod $q \in F(M) \subset V$. Pokud

$$\mathrm{rank} F_*|_p = r, \qquad \forall p \in F^{(-1)}(q)$$

pak $F^{(-1)}(q)$ je $(n-r)$–rozměrná vložená podvarieta M. Tečný prostor k podvarietě $F^{(-1)}(q)$ v bodě p je roven

$$T_p F^{(-1)}(q) = \ker F_*|_p.$$

Pro libovolný zvolený prvek $g \in G$ definujeme dva význačné difeomorfismy $L_g, R_g : G \to G$ předpisem $L_g h = g \cdot h$, $R_g h = h \cdot g$, $\forall h \in G$. Nazývají se **levá**, resp. **pravá translace**.

Definice 1.7. Levoinvariantní, resp. **pravoinvariantní, vektorová pole** $X \in \mathcal{X}(G)$ jsou vektorová pole splňující $X = L_{g*}X$, resp. $X = R_{g*}X$ pro všechna $g \in G$.

Poznámka 1.8. V daném bodě $h \in G$ předchozí definice znamená $X|_{gh} = L_{g*}(X|_h)$, resp. $X|_{hg} = R_{g*}(X|_h)$.

Poznámka 1.9. Levoinvariantní vektorové pole je jednoznačně určeno svým tečným vektorem v libovolném pevně zvoleném bodě $g \in G$ (obvykle se volí e), tj. $X|_g = L_{g*}(X|_e)$ protože $L_g \circ L_h = L_{gh}$, $L_{g*} \circ L_{h*} = L_{gh*}$.

Věta 1.10. Vektorový prostor levoinvariantních vektorových polí $\mathfrak{g} \subset\subset \mathcal{X}(G)$ je izomorfní T_eG, tj. $\mathfrak{g} \simeq T_eG$.

Důkaz. Mějme $\tilde{X} \in T_eG$, pak můžeme definovat zobrazení $X : G \to TG$, $X(g) = L_{g*}(\tilde{X})$, tj. $X_g \in T_gG$. Použitím libovolné křivky, k níž je $\tilde{X}$ tečný

$$\gamma : (a,b) \subset \mathbb{R} \to G, \quad a < 0 < b, \quad \gamma(0) = e, \quad \dot{\gamma}(0) = \tilde{X}$$

máme

$$\varphi(g,t) = g \cdot \gamma(t) = L_g(\gamma(t)) \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \mathcal{C}^\infty(G \times (a,b), G).$$

V důsledku $X(g) = L_{g*}(\tilde{X}) \in T_gG$ závisí na g hladce, neboť

$$L_{g*}(\tilde{X}) = L_{g*} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} L_g(\gamma(t)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi(g,t).$$

□

Při zápisu mohou vznikat nejasnosti ve značení, kdy symbol $X \in \mathfrak{g}$ může značit vektorové pole na G nebo pouze odpovídající tečný vektor z T_gG. Budeme se snažit tyto pojmy rozlišovat (X vektorové pole, $X|_g$ nebo $X(g)$ tečný vektor v bodě g), často je však čtenář nucen pochopit význam symbolů z kontextu.

Poznámka 1.11. Pro připomenutí – kotečné zobrazení působí na funkce předpisem

$$(\phi^* f)(p) = (f \circ \phi)(p).$$

Věta 1.12. Vektorové pole $X \in \mathcal{X}(G)$ chápané jako zobrazení $X : \mathcal{C}^\infty(G) \to \mathcal{C}^\infty(G)$ je levoinvariantní právě tehdy, když pro všechna $g \in G$ platí

$$L_g^* \circ X = X \circ L_g^*. \tag{1.1}$$

Důkaz. Pro $\psi : M \to N$, $p \in M$, $X|_p \in T_pM$, $f \in C^\infty(N)$ platí:

$$\psi_*(X|_p)f = X|_p(f \circ \psi) = X|_p(\psi^*(f)) = (X|_p \circ \psi^*)f.$$

Pro $g, h \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ a $f \in C^\infty(G)$ tedy platí:

$$\begin{aligned} L_{g*}(X|_h)f &= (X|_h \circ L_g^*)f = \left(\left(X \circ L_g^*\right) f\right)(h) \\ &= X|_{gh} f = (Xf)(gh) = (Xf)(L_g h) = \left(L_g^*(X(f))\right)(h) = \left((L_g^* \circ X)f\right)(h) \end{aligned}$$

a tudíž $X \circ L_g^* = L_g^* \circ X$. Naopak, z rovnice výše $X \circ L_g^* = L_g^* \circ X$ implikuje levoinvariantnost X v každém bodě $h \in G$. □

Důsledek 1.13. Pro levoinvariantní vektorová pole $X, Y \in \mathfrak{g}$ platí

$$L_g^* \circ [X, Y] = [X, Y] \circ L_g^*,$$

tj. $\mathfrak{g}$ je uzavřená vzhledem ke komutaci.

Důkaz.

$$\begin{aligned} L_g^* \circ [X, Y] &= L_g^* \circ X \circ Y - L_g^* \circ Y \circ X = X \circ L_g^* \circ Y - Y \circ L_g^* \circ X = \\ &= X \circ Y \circ L_g^* - Y \circ X \circ L_g^* = [X, Y] \circ L_g^* \end{aligned}$$

□

1.3 Lieova algebra Lieovy grupy

Definice 1.14. Algebru $\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{X}(G) | X = L_{g*}X\}$ levoinvariantních vektorových polí na Lieově grupě G nazýváme **Lieovou algebrou Lieovy grupy** G.

Definice 1.15. **Lieova algebra** $(A, +, \cdot, [.,.])$ je vektorový prostor $(A, +, \cdot)$ vybavený bilineárním zobrazením $[.,.] : A \times A \to A$ splňujícím:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (antisymetrie),
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jacobiho identita)

pro všechna $X, Y, Z \in A$. Zobrazení $[.,.]$ se nazývá **Lieova závorka**.

Definice 1.16. Uvažujme bázi $(X_i)_{i=1}^{\dim A}$ prostoru A. Lieova závorka $[.,.]$ je určena svým působením na bazické vektory, $[X_i, X_j] = c_{ij}{}^k X_k$. $c_{ij}{}^k$ se nazývají **strukturní konstanty** Lieovy algebry A v bázi (X_i).

Poznámka 1.17. Strukturní konstanty splňují

$$c_{ij}{}^k = -c_{ji}{}^k\,, \qquad\qquad c_{il}{}^m c_{jk}{}^l + c_{jl}{}^m c_{ki}{}^l + c_{kl}{}^m c_{ij}{}^l = 0\,. \tag{1.2}$$

v důsledku antisymetrie a Jacobiho identity.

Poznámka 1.18. Tečné vektory X z $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \simeq T_e\mathbb{R}^{n,n}$ jsou v souřadnicovém zápisu $X = X^i_j \frac{\partial}{\partial x^i_j}|_e$, kde x^i_j jsou standardní souřadnice na $GL(n,\mathbb{R})$, $x^i_j(A) = A^i_j$. Takže prvky maticové Lieovy algebry lze chápat jako matice, pro maticové Lieovy grupy jsou jejich Lieovy algebry vektorové prostory matic odpovídající dimenze a Lieova závorka je komutátor matic (což dokážeme později).

Příklad 1.19. **Afinní transformace** $Af(1)$ na $\mathbb{R}$.
Souvislá komponenta grupy afinních transformací reálné přímky se dá parametrizovat následovně: $Af(1) = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, (x,y)\cdot(\tilde{x},\tilde{y}) = (x\tilde{x}, x\tilde{y}+y))$. Tuto grupu lze též zapsat maticově, tj. grupové násobení přechází v násobení matic a samotná množina je zapsána jako $Af(1) = \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}\}$.

Podoba Lieovy algebry se určí z požadavku na levoinvariantnost obecného vektorového pole určeného v $e = (1,0)$. Uvažujme tečný vektor ve tvaru $X|_e = \alpha\partial_x|_e + \beta\partial_y|_e$. Levoinvariantnost vede na

$$X|_{(a,b)}\,f = L_{(a,b)*}\,X|_{(1,0)}\,f = X|_{(1,0)}\,(f\circ L_{(a,b)}) = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) f(ax, ay+b)|_{(x,y)=(1,0)} =$$
$$= a\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}\,f(x,y)|_{(a,b)} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\,f(x,y)|_{(a,b)}\right).$$

Vidíme tedy, že $X = \alpha x\partial_x + \beta x\partial_y$, Lieova algebra je $\mathfrak{af}(1) = \mathrm{span}\{X_1, X_2\}$, kde $X_1 = x\partial_x$, $X_2 = x\partial_y$. Pro kontrolu si můžeme spočítat komutátor $[X_1, X_2] = X_2$, tj. $\mathfrak{af}(1)$ je skutečně Lieova algebra.

V případě matic máme $\mathfrak{af}(1) = T_eAf(1) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) | \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$, a bazické vektory ztotožňujeme pomocí tečných vektorů ke křivkám $\gamma_1(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $\gamma_2(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ s maticemi z $T_eAf(1))$ následovně: $X_1|_e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ a $X_2|_e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

Poznámka 1.20. Maticové grupy.

Uvažme maticovou grupu $G = GL(n,\mathbb{R})$, za souřadnice považujeme složky matice g^i_j. Podobně jako v minulém příkladě chceme vědět, jak vypadá v libovolném bodě $g \in G$ obecné levoinvariantní vektorové pole X, které je určeno svou hodnotou v e, tj. $X|_e = \alpha^i_j \frac{\partial}{\partial x^i_j}|_e$. Buď $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, $f = f(x^i_j)$. Podmínka levoinvariance:

$$X^i_j(g)\frac{\partial}{\partial x^i_j}|_g f = X|_g f = (L_{g*}X|_e)f = X|_e(f\circ L_g) = \alpha^l_m\left.\frac{\partial f(g^i_k x^k_j)}{\partial x^l_m}\right|_e =$$
$$= \alpha^l_m \left.\frac{\partial f}{\partial x^o_p}\right|_g \left.\frac{\partial(g^o_k x^k_p)}{\partial x^l_m}\right|_e = \alpha^l_m g^o_k \left.\frac{\partial f}{\partial x^o_p}\right|_g \delta^k_l\delta^m_p = \alpha^k_j g^i_k \left.\frac{\partial f}{\partial x^i_j}\right|_g = g^i_k\alpha^k_j\partial^j_i|_g f.$$

Takže $X^i_j(g) = g^i_k\alpha^k_j$, $X(g) = g^i_k\alpha^k_j \left.\frac{\partial}{\partial x^i_j}\right|_g$.

1.4 Cvičení

Cvičení 1.1. Ukažte, že $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) |\det A = 1\}$ je maticová Lieova grupa a najděte její Lieovu algebru.

Řešení. Splnění podmínky pro podvarietu je důsledkem věty o implicitní funkci 1.6. Vybereme

$$f = \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}, \qquad f(A) = \det A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}\pi \prod_{i=1}^{n} A_{i,\pi(i)}$$

(kde A_{ij} značí prvky matice A). Jeho tečné zobrazení je určeno

$$f_*|_A B = \lim_{t\to 0} \frac{\det(A+tB) - \det(A)}{t} = \det(A) \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\det(\mathbb{I} + tA^{-1}B) - 1}{t} = \det A \cdot \mathrm{tr} A^{-1}B.$$

Tudíž pro libovolný $A \in SL(n,\mathbb{R})$ stačí dosadit $B = A$ pro ověření maximální hodnosti zobrazení f_* v bodě A: $f_*|A(A) = 1$, tj. $SL(n,\mathbb{R})$ je vložená podvarieta $GL(n,\mathbb{R})$. Že se jedná o podgrupu je zřejmé z $\det(AB^{-1}) = \frac{\det A}{\det B} = 1$, tj. $AB^{-1} \in SL(n,\mathbb{R})$ pro libovolné $A, B \in SL(n,\mathbb{R})$. Lieova algebra je pak určena předpisem

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \simeq T_{\mathbb{I}}SL(n,\mathbb{R}) = \ker f_*|_{\mathbb{I}} = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n,n} | \mathrm{tr}A = 0\}. \tag{1.3}$$

Cvičení 1.2. Definujme matici $J = \mathrm{diag}(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{p}, \underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{q})$, kde $p + q = n$. Využitím zobrazení $F(A) = A^T JA$ ukažte, že **pseudoortogonální grupa**

$$O(p,q) = \left\{A \in \mathbb{R}^{n,n} | A^T JA = J\right\}$$

je maticová Lieova grupa a najděte její Lieovu algebru. Pokud $q = 0$ jedná se o grupu **ortogonální** $O(n)$, Průnik $SO(p,q) = O(p,q) \cap SL(n,\mathbb{R})$, resp. $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$, pak je grupa **speciální pseudoortogonální**, resp. **speciální ortogonální**.

Řešení. V tomto případě volíme

$$F = \mathbb{R}^{n,n} \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} | A = A^T\}, \qquad F(A) = A^T JA - J$$

a postupujeme analogicky. Jádro tečného zobrazení F_* v grupové jednotce $\mathbb{I}$ určuje Lieovu algebru

$$\mathfrak{o}(p,q) \simeq \mathfrak{so}(p,q) \simeq T_{\mathbb{I}}O(p,q) = \ker F_*|_{\mathbb{I}} = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} | A^T J + JA = 0\}, \tag{1.4}$$

která je stejná i pro grupu $SO(p,q)$, neboť na okolí $\mathbb{I}$ jsou obě grupy difeomorfní.

Cvičení 1.3. Využitím zobrazení $F(A) = A^\dagger JA$ ukažte, že **pseudounitární grupa**

$$U(p,q) = \left\{A \in \mathbb{C}^{n,n} | A^\dagger JA = J\right\} \tag{1.5}$$

je (reálná) maticová Lieova grupa a najděte její Lieovu algebru. Pokud $q = 0$ jedná se o grupu **unitární** $U(n)$, Průnik $SU(p,q) = U(p,q) \cap SL(n,\mathbb{C})$, resp. $SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$, pak je grupa **speciální pseudounitární**, resp. **speciální unitární**.

Řešení.

$$\mathfrak{u}(p,q) = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} | A^\dagger J + JA = 0\}, \quad \mathfrak{su}(p,q) = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} | A^\dagger J + JA = 0, \mathrm{tr}A = 0\}. \tag{1.6}$$

Cvičení 1.4. Definujme matici

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,2n}.$$

Využitím zobrazení $F(A) = A^T JA$ ukažte, že **symplektická grupa**

$$Sp(2n,\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathbb{R}^{2n,2n} | A^T JA = J\right\} \tag{1.7}$$

je maticová Lieova grupa a najděte její Lieovu algebru.

Řešení.

$$F : \mathbb{R}^{2n,2n} \to \mathbb{R}^{2n} \wedge \mathbb{R}^{2n} = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2n,2n} | A + A^T = 0 \right\},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) &= \{A \in \mathbb{R}^{2n,2n} | A^\dagger J + JA = 0\} \\ &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}^{n,n} | b = b^T, c = c^T, d = -a^T \right\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Kapitola 2

Vztah mezi Lieovou grupou a její algebrou

Ukazuje se, že existuje význačné přirozeně definované zobrazení z Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ do jí odpovídající Lieovy grupy G, tzv. exponenciela, které ukazuje, že v jistém smyslu Lieova grupa a její Lieova algebra jsou lokálně totéž. Jeho konstrukcí se budeme zabývat v této kapitole. Následně se budeme zabývat jeho globálními vlastnostmi, tj. kdy je celá grupa obrazem algebry při tomto zobrazení.

Definice 2.1. Hladké zobrazení $\phi : G \to H$ Lieových grup G a H je

- **homomorfismus** G a H pokud $\phi(g \cdot_G h) = \phi(g) \cdot_H \phi(h)$ pro všechna $g, h \in G$,
- **izomorfismus** G a H pokud ϕ je bijektivní homomorfismus a ϕ^{-1} je hladké.

Definice 2.2. Jednoparametrická podgrupa v G je homomorfismus $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to G$.

Důsledek 2.3. Obraz jednoparametrické podgrupy je podgrupa H v G izomorfní jednorozměrné diferencovatelné varietě, tj. celému tělesu reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo kružnici S^1. Definice jednoparametrické podgrupy v sobě obsahuje i preferovanou parametrizaci, tj. výběr souřadnice na H. Platí $\varphi(s+t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t) = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$, tedy nutně $\varphi(0) = e$ a jednoparametrická podgrupa je vždy komutativní.

Příklad 2.4. Pro maticovou grupu G máme

$$\begin{aligned}\dot\varphi(t) &= \varphi(t) \cdot \underbrace{\dot\varphi(0)}_{konst.} = L_{\varphi(t)*}\left(\dot\varphi(0)\right)\\ &= \dot\varphi(0) \cdot \varphi(t) = R_{\varphi(t)*}\left(\dot\varphi(0)\right)\end{aligned}$$

Obecně pak platí

$$\varphi(s+t) = \varphi(t)\varphi(s) \equiv L_{\varphi(t)}\varphi(s), \text{ proto } \underbrace{\dot\varphi(t)}_{\in T_{\varphi(t)}G} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_0 \big(L_{\varphi(t)}\varphi(s)\big) = L_{\varphi(t)*}\underbrace{\dot\varphi(0)}_{\in T_e G}. \tag{2.1}$$

Vidíme tedy, že pokud najdeme pro danou $\varphi(t)$ levoinvariantní pole $X \in \mathfrak{g}$, $X|_e = \dot\varphi(0)$, pak platí $\dot\varphi(t) = L_{\varphi(t)*}(X|_e) = X|_{\varphi(t)}$.

Důsledek 2.5. Jednoparametrické podgrupy v G jsou integrální křivky levoinvariantních vektorových polí, tj. elementů Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, vycházející z e.

Poznámka 2.6. Mějme $X \in \mathfrak{g}$. Pak z věty o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic víme, že existuje $\epsilon > 0$ a integrální křivka φ vektorového pole X vycházející z $e \in G$ definovaná pro křivkový parametr $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Vzhledem k levoinvariantnosti X je $L_g \circ \varphi$ integrální křivka vektorového pole X vycházející z $g \in G$, definovaná opět pro stejný interval hodnot křivkového parametru $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Tudíž máme definován tok $\Psi_X : G \times (-\epsilon, \epsilon) \to G$. Vzhledem k tomu, že ϵ je stejné pro všechna $g \in G$, lze pohybem podél integrální křivky interval dané délky $(-\epsilon, \epsilon)$ posouvat např. o $\epsilon/2$ a tím definovat integrální křivku pro všechny hodnoty $t \in \mathbb{R}$. Proto je $\Psi_X : G \times \mathbb{R} \to G$, tj. levoinvariantní vektorové pole X je úplné.

2.1 Exponenciální zobrazení

Využitím integrálních křivek můžeme definovat zobrazení $\mathfrak{g} \to G$, které danému vektoru $X|_e \in T_e G \simeq \mathfrak{g}$ přiřadí jistý bod na integrální křivce levoinvariantního vektorového pole X, jehož je $X|_e$ tečným vektorem v e.

Definice 2.7. Zobrazení $\exp : \mathfrak{g} \to G$ definujeme předpisem

$$\exp(tX) = \varphi(t), \qquad \exp(X) = \varphi(1), \tag{2.2}$$

kde φ je integrální křivka levoinvariantního vektorového pole $X \in \mathfrak{g}$ vycházející z e. Značíme $\exp(X) \equiv \mathrm{e}^X$.

Poznámka 2.8. Zobrazení exp díky vlastnostem toku vektorového pole splňuje $\varphi(t+s) = \mathrm{e}^{(t+s)X} = \varphi(t)\varphi(s) = \mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sX}$. To je důvodem zvoleného značení.

Poznámka 2.9. Exponenciela maticových grup G

Hledáme integrální křivku $\gamma(t)$ levoinvariantního vektorového pole $X \in \mathfrak{g}$, určenou $X|_e \in T_e G$. Jak toto pole vypadá víme z příkladu 1.20, značení převezmeme z tohoto příkladu, tj. $X^i_j(e) = \alpha^i_j = (A)^i_j$. Pro složky pole máme $X^i_j(\gamma(t)) = \gamma^i_k(t) X^k_j(e) = \gamma^i_k(t)\alpha^k_j$. Rovnice pro integrální křivky tohoto pole jsou

$$\dot{\gamma}^i_j(t) = \gamma^i_k(t)\alpha^k_j, \quad \gamma^i_j(0) = \delta^i_j\,, \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\gamma}(t) = \gamma(t) \cdot A, \quad \gamma(0) = \mathbb{I}\,. \tag{2.3}$$

Z maticového zápisu vidíme, že řešením je maticová exponenciela

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tX|_e)^k = \mathrm{e}^{tX|_e}, \tag{2.4}$$

výsledkem je $\mathrm{e}^X = \gamma(1) = \mathrm{e}^{X|_e}$.

Příklad 2.10. Exponenciela $\exp : \mathfrak{af}(1) \to Af(1)$.

Hledáme integrální křivky vektorového pole z příkladu 1.19. Pro libovolné levoinvariantní pole $X = \alpha X_1 + \beta X_2 = \alpha x \partial_x + \beta x \partial_y$ jsou rovnice pro integrální křivky

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t), \qquad \dot{y}(t) = \beta x(t)$$

s počátečními podmínkami $(x(0), y(0)) = (1, 0)$. Jejich řešením je

$$(x(t), y(t)) = \left(\mathrm{e}^{\alpha t}, \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t} - 1)\right).$$

Exponencielu získáváme dosazením $t = 1$, tj.

$$\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{\alpha x\partial_x + \beta x\partial_y} = \left(\mathrm{e}^\alpha, \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^\alpha - 1)\right).$$

Pro $\alpha = 0$ vyjde výsledek $(1, \beta)$ přímým výpočtem stejně jako provedením $\lim_{\alpha\to 0}$.

V maticovém vyjádření je tečný vektor $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, platí $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, ..., $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)^k = \left(\begin{smallmatrix}\alpha^k & \alpha^{k-1}\beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, takže získáváme

$$\exp(\alpha X_1 + \beta X_2) = \exp\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!} & \frac{\beta}{\alpha}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^\alpha & \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^\alpha - 1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Věta 2.11. Pro libovolnou čtvercovou matici $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ platí

$$\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr} A}. \tag{2.5}$$

Důkaz. Diagonalizovatelné matice jsou husté v množině všech matic a obě strany rovnice jsou spojité, tj. postačí ukázat pro libovolné diagonalizovatelné A. Předpokládame tedy, že existuje B takové, že $D = BAB^{-1}$ je diagonální a máme

$$\mathrm{tr}D = \mathrm{tr}BAB^{-1} = \mathrm{tr}AB^{-1}B = \mathrm{tr}A.$$

Z definice pomocí řady vidíme, že platí $\mathrm{e}^{BAB^{-1}} = B\mathrm{e}^A B^{-1}$. Proto

$$\det\, \mathrm{e}^D = \det\, B \det\, B^{-1} \det\, \mathrm{e}^A = \det\, \mathrm{e}^A.$$

Protože $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, máme $\mathrm{e}^D = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$ a tedy

$$\det\, \mathrm{e}^D = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_k} = \mathrm{e}^{\sum_k \lambda_k} = \exp(\mathrm{tr}D).$$

□

Věta 2.12. Buď G Lieova grupa, pak $\exp : \mathfrak{g} \to G : X \to \mathrm{e}^X$ je lokální difeomorfismus okolí $0 \in \mathfrak{g}$ na okolí $e \in G$.

Důkaz. $\mathfrak{g}$ jako vektorový prostor lze chápat jako varietu, $T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$. Z hladkosti závislosti řešení diferenciálních rovnic na parametrech v rovnicích obsažených je exp hladké zobrazení variet a $\exp_*|_0 : T_0\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \equiv T_eG$. $\exp(tX)$ je integrální křivka v G procházející e s tečným vektorem $X|_e$ a $\gamma(t) = 0 + tX|_e$ je křivka v $\mathfrak{g}$ s tečným vektorem $X|_e$ v $t = 0$. Tudíž dle definice tečného zobrazení máme

$$\begin{aligned}\exp_*|_0 (X|_e)f &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^{\gamma(t)}) - f(\mathrm{e}^{\gamma(0)})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^{0+tX|_e}) - f(\mathrm{e}^0)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^{tX}) - f(e)}{t} \overset{\text{def.}}{=} X|_e f.\end{aligned}$$

Tedy $\exp_*|_0 (X|_e) = X|_e$, $\exp_*|_0 = \mathrm{id}$ a dle věty o inverzním zobrazení je exp lokální difeomorfismus. □

Poznámka 2.13. Pro matice to je zřejmější, viz

$$\exp_*(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{tX})\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 + tX + O(t^2)\right)\Big|_{t=0} = X.$$

Poznámka 2.14. Zobrazení exp obecně není surjektivní ani injektivní. Je zřejmé, že exp nemůže být surjektivní pro grupy s více komponentami souvislosti (nelze spojit křivkou body z různých komponent). Ale obecně exp není surjektivní ani pro souvislé G. V případě, že G je souvislá a kompaktní, lze ukázat, že exp je nutně surjektivní.

2.2 Vyšetřování souvislosti variet

Definice 2.15. Buď M diferencovatelná varieta a V její prostě vnořená podvarieta. Pokud existuje spojité zobrazení $r : \langle 0, 1\rangle \times M \to M$, takové že

- $r(0, m) = m, \forall m \in M$,
- $r(t, v) = v, \forall v \in V, \forall t \in \langle 0, 1\rangle$,
- $r(1, m) \in V, \forall m \in M$,

říkáme, že podvarieta V je **deformační retrakt** variety M.

Poznámka 2.16. Definice deformačního retraktu vyžaduje pouze spojitost, jedná se tedy o topologický pojem, aplikovatelný i na podprostor topologického prostoru.

Definice 2.17. Souvislý topologický prostor (či souvislá varieta) M je **jednoduše souvislý** právě tehdy, když pro každou spojitou uzavřenou křivku

$$\gamma : \langle 0, 1\rangle \to M, \quad \gamma(0) = \gamma(1),$$

existuje spojité zobrazení $\phi : \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \to M$ takové, že

$$\forall t \in \langle 0, 1\rangle : \quad \phi(0, t) = \gamma(t), \quad \phi(1, t) = \gamma(0).$$

Věta 2.18. Nechť V je deformační retrakt M, pak

- M je souvislá právě tehdy, když V je souvislá,
- M je jednoduše souvislá právě tehdy, když V je jednoduše souvislá.

Důkaz. V případě souvislosti zřejmé. Pro jednoduchou souvislost plyne z vhodného složení ϕ a r. Libovolnou uzavřenou křivku $\gamma_M(t)$ v M lze spojitě zdeformovat na křivku $\gamma_V(t) = r(1, \gamma_M(t))$ v V a tedy lze-li do bodu kontrahovat každou uzavřenou křivku v V, lze totéž udělat i pro libovolnou uzavřenou křivku v M.

Naopak libovolná křivka ve V je současně křivkou v M. Je-li M jednoduše souvislá, lze každou křivku ve V spojitě zkontrahovat do bodu zobrazením ϕ zobrazujícím do M, pak $\tilde{\phi}(s, t) = r(1, \phi(s, t))$ zobrazuje $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ do V a má požadované vlastnosti. □

Poznámka 2.19. Přímým zobecněním lze ukázat, že M a její deformační retrakt V mají izomorfní takzvané homologické grupy $H_p(M, G)$ a $H_p(V, G)$ pro libovolnou abelovskou grupu koeficientů G.

Příklad 2.20. $SL(2, \mathbb{R}) = \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right),\ xw - zy = 1\}$ je souvislá, ale není jednoduše souvislá, jak ukážeme následující posloupností deformačních retraktů deformujících ji na $SO(2)$. Nejprve definujeme V_1:

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \tilde{z} & \tilde{w} \end{pmatrix} \middle|\, \tilde{x}^2 + \tilde{z}^2 = 1,\ \tilde{x}\tilde{w} - \tilde{z}\tilde{y} = 1 \right\}.$$

Položíme $r_1\left(t, \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \alpha(t)x & \frac{1}{\alpha(t)}y \\ \alpha(t)z & \frac{1}{\alpha(t)}w \end{pmatrix}$, kde $\alpha(0) = 1$ a pro $\alpha(1)$ platí $\alpha^2(1)\,(x^2 + z^2) = 1$. Proto vybíráme $\alpha(t) = \frac{1}{(x^2+z^2)^{t/2}}$. Tudíž $V_1 = r_1\,(1, SL(2, \mathbb{R})) \subset SL(2, \mathbb{R})$ je deformační retrakt $SL(2,\mathbb{R})$. Dále deformujeme V_1 tak, aby sloupce byly ortonormální vektory:

$$r_2\left(t,\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix} - t\,(xy+zw)\begin{pmatrix} 0 & x\\ 0 & z\end{pmatrix},$$
$$V_2 = r_2(1,V_1) = \left\{\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})\,\middle|\, x^2+z^2=1,\ xy+zw=0\right\}.$$

Nyní $xy+zw=0$ a $xw-zy=1$ implikují

$$w = x\cdot(y^2+w^2), \qquad y = -z\cdot(y^2+w^2) \Rightarrow$$
$$w^2+y^2 = (x^2+z^2)(w^2+y^2)^2 = (w^2+y^2)^2$$

a tedy v důsledku nenulovosti w^2+y^2 máme $w^2+y^2=1$. V důsledku

$$V_2 = \left\{\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)\,\middle|\,\theta\in\langle 0,2\pi)\right\} = SO(2)$$

je souvislá a topologicky ekvivalentní kružnici S^1. $SL(2,\mathbb{R})$ je tedy stejně jako S^1 souvislá, ale není jednoduše souvislá.

Dále najdeme obor hodnot zobrazení $\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R})$. Máme

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \left\{A = \begin{pmatrix} x & y\\ z & -x\end{pmatrix}\,\middle|\, x,y,z\in\mathbb{R}\right\},$$

což implikuje

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & y\\ z & -x\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x^2+yz & 0\\ 0 & zy+x^2\end{pmatrix} = -\det A\cdot\mathbb{I}.$$

$$\mathrm{e}^A = \begin{cases} \cos\sqrt{|A|}\cdot\mathbb{I} + \frac{\sin\sqrt{|A|}}{\sqrt{|A|}}\cdot A, & |A|>0 \\ \cosh\sqrt{-|A|}\cdot\mathbb{I} + \frac{\sinh\sqrt{-|A|}}{\sqrt{-|A|}}\cdot A, & |A|<0 \\ \mathbb{I}+A, & |A|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \operatorname{tr}\mathrm{e}^A = 2\cos\sqrt{|A|}\in\langle -2,2\rangle, \\ \operatorname{tr}\mathrm{e}^A = 2\cosh\sqrt{-|A|}\geq 2, \\ \operatorname{tr}\mathrm{e}^A = 2, \end{array}$$

kde $|A| = \det A$.

V důsledku vidíme, že $\operatorname{tr}\mathrm{e}^A \geq -2$ pro každé $A\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Ovšem v $SL(2,\mathbb{R})$ existují elementy, které této podmínce nevyhovují, např. $\left(\begin{smallmatrix}-2 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right)$ a tedy $\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\to SL(2,\mathbb{R})$ není surjektivní.

Důsledek 2.21. Souvislá Lieova grupa G nemusí být celá pokryta exponencielním zobrazením, tj. může nastat $\exp(\mathfrak{g})\subset G$, $\exp(\mathfrak{g})\neq G$.

Poznámka 2.22. Lze ukázat, že $SL(n,\mathbb{R})$ není jednoduše souvislá pro žádné $n\geq 2$.

Věta 2.23. Buď G souvislá Lieova grupa, $g\in G$. Pak existuje $n\in\mathbb{N}$, $X_1,\ldots,X_n\in\mathfrak{g}$ takové, že $g = \mathrm{e}^{X_1}\mathrm{e}^{X_2}\ldots\mathrm{e}^{X_n}$.

Důkaz. Mějme otevřené okolí U_0 obsahující jednotku, $e\in U_0 = U_0^\circ\subset G$. Předpokládejme, že $(.)^{-1} : U_0\to U_0$ (jinak vezmeme $\tilde{U}_0 = U_0\cap U_0^{-1}$, kde $U_0^{-1} = \{g^{-1}|g\in U_0\}$). Zkonstruujeme posloupnost do sebe vnořených otevřených podmnožin $U_i = \bigcup_{g\in U_{i-1}} gU_0$, $U_i\subset U_{i+1}$. Protože $L_g(U_0) = (L_g(U_0))^\circ$, je též sjednocení otevřených množin U_i otevřené. Označme

$U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} U_i$, pak $U = U^\circ$ a pro $V = G \setminus U$ platí $V = \overline{V}$. Sporem ukážeme, že pro libovolný bod $g \in V$ je $g \in gU_0 = L_g(U_0) = (L_g(U_0))^\circ \subset V$, tj. že každý bod $g \in V$ má ve V otevřené okolí. Z předpokladu $L_g(U_0) \cap U \neq \emptyset$ totiž vyplývá existence $u_0 \in U_0$ takového, že $gu_0 \in U$, tj. pro nějaké $i \in \mathbb{N}_0$ musí být $gu_0 \in U_i$. V důsledku inkluze $U_i u_0^{-1} = \{hu_0^{-1} | h \in U_i\} \subset U_{i+1} \subset U$, tj. máme hledaný spor $g \in U_i u_0^{-1} \subset U$. Odvodili jsme tedy, že V je otevřená, tj. $U = \overline{U}$. Protože $e \in U$ je $U \neq \emptyset$ a tedy jako množina současně otevřená a uzavřená v souvislém topologickém prostoru je nutně $U = G$. □

Poznámka 2.24. Podstatně složitějším způsobem lze ukázat, že n ve výše uvedené větě lze vybrat rovné 2.

2.3 Cvičení

Cvičení 2.1. Ukažte, že unitární grupa $U(n)$ je souvislá.

Řešení. Dokažte, že pro každé $G \in U(n)$ existuje diagonální matice $D = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n}) \in U(n)$ a $U \in U(n)$ takové, že $G = U \cdot D \cdot U^\dagger$. Pak spojte $\mathbb{I} \in U(n)$ s G křivkou

$$G(t) = U \cdot \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\varphi_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\varphi_n}) \cdot U^\dagger \subset U(n).$$

Cvičení 2.2. Ukažte, že speciální ortogonální grupa $SO(n)$ je souvislá.

Řešení. Postupujeme podobně, místo diagonálních matic uvažujeme blokově diagonální matice s bloky $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, případně $1 \in \mathbb{R}^{1,1}$ pro n liché.

To, že každou sudorozměrnou ortogonální matici s jednotkovým determinantem lze zapsat jako blokově diagonální s bloky tvaru $R(\varphi)$ dokážeme následovně:

Pro ortogonální matici se snadno ověří, že ortogonální doplněk invariantního podprostoru je nutně též invariantní.

Daná matice $S \in SO(2m)$ má z ortogonality vlastní čísla s absolutní hodnotou rovnou jedné (neboť ortogonální matice je též unitární). Imaginární vlastní čísla jsou pro reálnou matici v komplexně sdružených párech, se stejnou násobností pro daný pár. Taková čísla tedy do determinantu přispívají jedničkou. Podobně máme vlastní čísla -1 a $+1$, které v součinu musí dát $\det A = 1$, tj. též násobnosti $+1$ a -1 jsou sudé. Proto máme 2×2 bloky odpovídající těmto vlastním číslům ve tvaru $R(0)$ a $R(\pi)$. Najdeme ortogonální doplněk V k direktnímu součtu vlastních podprostorů odpovídajících $+1$ a -1 a zúžíme na něj operátor S. Získaný operátor $\tilde{S} : V \to V$ má pouze imaginární vlastní čísla. Ve V uvažujeme jednotkovou kouli $S^k = \{\vec{v} \in V | \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 1\} \subset V$ a na ní spojitou funkci

$$f : S^k \to \mathbb{R} : f(\vec{v}) = \langle \vec{v}, S\vec{v} \rangle.$$

S^k je kompaktní a tudíž f na S^k nabývá svých extrémů. Buď $\vec{v}_0$ extremální bod. Pak

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\vec{v}_0 + t\vec{x}) = < x, Sv_0 > + < v_0, Sx > = < x, (S + S^T)v_0 >$$

pro všechna $\vec{x} \in T_{v_0}S^k$, tj. pro všechna $\vec{x}$ kolmá na $\vec{v}_0$. Tj. $(S + S^T)v_0$ je kolmý na všechny vektory z $T_{v_0}S^k$ a tedy je násobkem $\vec{v}_0$, $(S + S^T)v_0 = \lambda v_0$. Ekvivalentně $S^2 v_0 + v_0 = \lambda S v_0$ neboli $S^2 v_0 = \lambda S v_0 - v_0$ a vidíme, že v_0, Sv_0 je bazí dvourozměrného invariantního podprostoru $\tilde{V}$. Zúžením S na něj získáváme $\hat{S} \in SO(2)$, který již nutně ve vhodné ortonormální bázi má tvar $R(\varphi)$. Opět přejdeme k ortogonálnímu doplňku podprostoru $\tilde{V}$

ve V a opakujeme, dokud nedospějeme k hledanému kvazidiagonálnímu tvaru operátoru S.

Pro matice $S \in SO(2m+1)$ se postup liší pouze tím, že násobnost vlastního čísla $+1$ je nutně lichá a tedy máme navíc blok $1 \in \mathbb{R}^{1,1}$.

Kapitola 3

Tok levoinvariantního vektorového pole, vztah podgrup a podalgeber, akce grup

V této kapitole se budeme nejprve zabývat vzájemnou korespondencí mezi pojmy z oblasti Lieových grup a Lieových algeber, např. podgrupou vs. podalgebrou, a ukážeme si, že Lieovu závorku lze vypočítat jistou limitou grupového násobení vhodných jednoparametrických podgrup. V další části zavedeme pojem akce grupy a homogenní prostor.

Věta 3.1. Tok generovaný levoinvariantním vektorovým polem $X \in \mathfrak{g}$ je jednoparametrická grupa pravých translací

$$\Psi_X^t(g) = g\mathrm{e}^{tX}, \qquad \text{tj.} \qquad \Psi_X^t = R_{\mathrm{e}^{tX}}\,. \tag{3.1}$$

Důkaz. Pro $X \in \mathfrak{g}$ je $X|_e \in T_eG$ a e^{tX} je integrální křivka vycházející z e. Ukážeme, že integrální křivka tohoto pole procházející g je $\gamma(t) = g\mathrm{e}^{tX}$:

$$\dot\gamma(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t g\mathrm{e}^{tX} = L_{g*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \mathrm{e}^{tX} = L_{g*}\,X|_{\mathrm{e}^{tX}} = X|_{g\mathrm{e}^{tX}}\,,$$

tj. $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$. Z jednoznačnosti integrální křivky vycházející z bodu g pak plyne vztah (3.1). □

Důsledek 3.2. Buď $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathcal{X}(G)$, $Y \circ R_g^* = R_g^* \circ Y$, potom $[X,Y] = 0$. Tj. levoinvariantní a pravoinvariantní vektorová pole komutují.

Důkaz.

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\big((Yf)\circ R_{\mathrm{e}^{tX}} - Yf - Y(f\circ R_{\mathrm{e}^{tX}}) + Yf\big) =$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\big((R^*_{\mathrm{e}^{tX}}\circ Y)f - (Y\circ R^*_{\mathrm{e}^{tX}})f\big) = 0.$$

□

Věta 3.3. Buď M diferencovatelná varieta, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ vektorová pole, Ψ_X^t, Ψ_Y^t jejich toky, $f \in C^\infty(M)$ hladká funkce a bod $p \in M$. Potom platí

$$([X,Y]f)(p) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\sigma(t)) - f(p)}{t^2}\,,$$

kde $\sigma(t) = (\Psi_Y^{-t}\circ\Psi_X^{-t}\circ\Psi_Y^t\circ\Psi_X^t\ )(p)$ (tj. $\sigma(0) = p$).

Důkaz. Pro přehlednost zaveďme následující značení:

$$0 \equiv p, \quad 1 \equiv \Psi_X^t(p), \quad 2 \equiv \Psi_Y^t(1), \quad 3 \equiv \Psi_{-X}^t(2) = \Psi_X^{-t}(2), \quad 4 \equiv \Psi_{-Y}^t(3).$$

Pak můžeme psát

$$f(4) - f(0) = \big(f(4) - f(3)\big) + \big(f(3) - f(2)\big) + \big(f(2) - f(1)\big) + \big(f(1) - f(0)\big). \qquad (3.2)$$

Rozvineme

$$\begin{aligned}
f(1) - f(0) &= tXf(0) + \frac{t^2}{2}X(Xf)(0) + O(t^3),\\
f(2) - f(1) &= tYf(1) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(1) + O(t^3),\\
f(3) - f(2) &= -tXf(2) + \frac{t^2}{2}X(Xf)(2) + O(t^3),\\
f(4) - f(3) &= -tYf(3) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(3) + O(t^3).
\end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned}
Xf(0) - Xf(2) &= Xf(0) - Xf(1) + Xf(1) - Xf(2)\\
&= -tX(Xf)(0) - tY(Xf)(1) + O(t^2)\\
&= -tX(Xf)(0) - tY(Xf)(0) + O(t^2),\\
Yf(1) - Yf(3) &= Yf(1) - Yf(2) + Yf(2) - Yf(3)\\
&= -tY(Yf)(1) + tX(Yf)(2) + O(t^2)\\
&= -tY(Yf)(0) + tX(Yf)(0) + O(t^2)
\end{aligned}$$

a v členech $t^2X(X(f))$, $t^2X(Y(f))$, $t^2Y(X(f))$ a $t^2Y(Y(f))$ při výpočtu s uvažovanou přesností na bodu vyhodnocení nezáleží, je možné jej nahradit bodem $0 \equiv p$.

Dosazením do (3.2) dostáváme

$$\begin{aligned}
f(4) - f(0) = &-t^2X(Xf)(0) - t^2Y(Xf)(0) - t^2Y(Yf)(0) + t^2X(Yf)(0) +\\
&+ \frac{t^2}{2}X(Xf)(0) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(0) + \frac{t^2}{2}X(Xf)(0) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(0) + O(t^3)\\
&= t^2\big(X(Yf) - Y(Xf)\big)(0) + O(t^3).
\end{aligned}$$

Provedením limity získáváme dokazovanou identitu

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\big(f(\sigma(t)) - f(p)\big) = \left(X(Yf) - Y(Xf)\right)(p) = ([X,Y]f)(p).$$

□

Důsledek 3.4. Pro $X, Y \in \mathfrak{g}$ máme

$$\begin{aligned}
[X,Y]f(p) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\Big(f\big(R_{\mathrm{e}^{-tY}} R_{\mathrm{e}^{-tX}} R_{\mathrm{e}^{tY}} R_{\mathrm{e}^{tX}}(p)\big) - f(p)\Big) =\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\Big(f\big(pe^{tX}e^{tY}e^{-tX}e^{-tY}\big) - f(p)\Big) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Důsledek 3.5. V případě maticových grup platí $[X,Y]|_e = XY - YX$ pro libovolná $X, Y \in T_eG \simeq \mathfrak{g}$.

Důkaz. $e = \mathbb{I}$, $R_{e^{-tY}} R_{e^{-tX}} R_{e^{tY}} R_{e^{tX}}(\mathbb{I}) = e^{tX} e^{tY} e^{-tX} e^{-tY}$

$$[X,Y]f(e) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\Big(f\left(e^{tX} e^{tY} e^{-tX} e^{-tY}\right) - f(\mathbb{I})\Big) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(e^{\sqrt{t}X} e^{\sqrt{t}Y} e^{-\sqrt{t}X} e^{-\sqrt{t}Y}\right) - f(\mathbb{I})}{t}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0^+} f(e^{\sqrt{t}X} e^{\sqrt{t}Y} e^{-\sqrt{t}X} e^{-\sqrt{t}Y}).$$

Máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0^+} \left(e^{\sqrt{t}X} e^{\sqrt{t}Y} e^{-\sqrt{t}X} e^{-\sqrt{t}Y}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0^+} \left(\mathbb{I} + \sqrt{t}X + \frac{t}{2}X^2\right)\left(\mathbb{I} + \sqrt{t}Y + \frac{t}{2}Y^2\right) \times$$
$$\times \left(\mathbb{I} - \sqrt{t}X + \frac{t}{2}X^2\right)\left(\mathbb{I} - \sqrt{t}Y + \frac{t}{2}Y^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0^+} \left(\mathbb{I} + t\,(XY - YX) + O(\sqrt{t}^3)\right) = X \cdot Y - Y \cdot X,$$

tudíž

$$[X,Y]f(\mathbb{I}) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(f(\mathbb{I} + t(XY - YX)) - f(\mathbb{I})\right)$$

a tedy

$$[X,Y]\big|_{\mathbb{I}} = X\big|_{\mathbb{I}} \cdot Y\big|_{\mathbb{I}} - Y\big|_{\mathbb{I}} \cdot X\big|_{\mathbb{I}} \in T_{\mathbb{I}}G.$$

□

3.1 Vztah mezi podgrupou a podalgebrou, integrabilita distribucí

Nyní budeme zkoumat vztah mezi podgrupami Lieových grup a podalgebrami odpovídajících Lieových algeber. Základním nástrojem je teorie tzv. integrabilních distribucí.

Definice 3.6. **k–rozměrná distribuce** Δ_k na varietě M, kde $\dim M = n \geq k$, je hladké zobrazení, které každému $p \in M$ přiřazuje k–rozměrný podprostor v T_pM. Značíme $\Delta_k(p) \subset T_pM$, $\dim \Delta_k(p) = k$.

Hladkost z předcházející definice chápeme v tom smyslu, že pro každé $p \in M$ existuje jeho otevřené okolí U, $p \in U$ a vektorová pole $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(U)$ taková, že $\Delta_k(q) = \operatorname{span}\left\{ X_1\big|_q, \ldots, X_k\big|_q \right\}$ v každém bodě $q \in U$.

Definice 3.7. **Integrální podvarieta** dimenze l distribuce Δ_k je vnořená podvarieta N dimenze l taková, že $T_pN \subset \Delta_k(p)$ ve všech bodech $p \in N$.

Příklad 3.8. Integrální křivky zvoleného vektorového pole jsou integrální podvariety dimenze 1.

Definice 3.9. Distribuce Δ_k je (úplně) **integrabilní** právě tehdy, když pro každý bod $p \in M$ existují na nějakém jeho otevřeném okolí U souřadnice $\left(x^1, \ldots x^k, y^1, \ldots, y^{n-k}\right)$ takové, že rovnice $y^j = \text{konst}_j$ pro $j \in \widehat{n-k} \equiv \{1, \ldots, n-k\}$ definují k–rozměrné integrální podvariety distribuce Δ_k. Takové souřadnice (x,y) se nazývají Frobeniova mapa.

Takto zkonstruované integrální podvariety distribuce Δ_k jsou z definice vložené podvariety M.

Věta 3.10 (Frobeniova)**.** Distribuce Δ_k je úplně integrabilní tehdy a jen tehdy, když

$$[\Delta_k, \Delta_k] \subset \Delta_k. \tag{3.4}$$

Rovnice (3.4) znamená, že pro libovolné otevřené okolí $U = U^\circ \subset M$ a dvojici vektorových polí $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ takovou, že $\forall p \in U : X(p), Y(p) \in \Delta_k(p)$ platí $[X, Y](q) \in \Delta_k(q)$ v každém $q \in U$. Bez důkazu.

Používáme zápis $X \in \Delta_k(U)$ nebo $X \in \Delta_k$, pokud pro vektorové pole $X \in \mathcal{X}(U)$ platí $X(q) \in \Delta_k(q)$ pro všechna $q \in U$. Dále

$$[\Delta_k, \Delta_k](p) = \operatorname{span}\Big\{ [X_1, X_2]|_p \mid X_1, X_2 \in \Delta_k(U) \Big\}.$$

Integrální podvariety N_1, N_2, pro které $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, lze hladce navazovat, tj. vytvářet větší integrální podvariety postupem $N = N_1 \cup N_2$. Postupným sjednocením integrálních podvariet získáváme listy distribuce Δ_k.

Definice 3.11. Maximální list distribuce Δ_k je taková integrální podvarieta, na kterou nelze hladce navázat žádnou integrální podvarietu v listu neobsaženou. Maximální listy tvoří tzv. **foliaci** variety danou integrabilní distribucí.

Listy již obecně nejsou vloženými podvarietami, protože se vloženost může narušit nekonečným sjednocením. Z konstrukce ale zůstávají vnořenými podvarietami, neboť tečné zobrazení popisující vnoření v každém bodě p má jako obraz k–rozměrný podprostor $\Delta_k(p)$.

Věta 3.12 (Chevalley)**.** Maximální listy integrabilní distribuce jsou prostě vnořené podvariety. Bez důkazu.

Lemma 3.13. Uvažujme Lieovu grupu G, její Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ a její podalgebru $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, tj. vektorový podprostor splňující $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Nechť H je maximální list integrabilní distribuce určené $\mathfrak{h}$ procházející grupovou jednotkou e. Pak H je podgrupa Lieovy grupy G.

Důkaz. Díky levoinvariantnosti $\mathfrak{h}$ je gH opět maximální list. Ten je z definice buď totožný s původním nebo s ním má prázdný průnik. Ale pokud $g \in H$, pak $ge = g \in H \cap gH$ a tedy $gH = H$. Obdobně $g \in H$ implikuje $g^{-1}H = H$, protože $g^{-1}g = e \in H \cap g^{-1}H$. □

Důsledek 3.14. Buď G Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra, $\mathfrak{h}$ podalgebra $\mathfrak{g}$. Potom existuje prostým způsobem vnořená podvarieta $H \subset G$ taková, že H je podgrupa G a její Lieova algebra je přirozeně izomorfní $\mathfrak{h}$.

Obecně H není uzavřená v topologii G. To implikuje, že se obecně nejedná o vloženou podvarietu, jak ukazuje následující příklad. Uvažujme torus

$$T^2 = S^1[\varphi] \times S^1[\vartheta], \quad (\varphi_1, \theta_1)\cdot(\varphi_2, \theta_2) = (\varphi_1 + \varphi_2 \mod 2\pi, \theta_1 + \theta_2 \mod 2\pi), \quad e = (0, 0).$$

Vektorové pole $X = a\partial_\varphi + b\partial_\vartheta \in \mathfrak{t}^2$ je levoinvariantní, $\mathfrak{h} = \operatorname{span}\{X\}$ je jednorozměrná podalgebra v $\mathfrak{t}^2$. Integrální křivky vektorového pole X jsou určeny rovnicemi $\dot{\varphi} = a$, $\dot{\theta} = b$, takže máme odpovídající jednoparametrickou podgrupu

$$H = \{(at \mod 2\pi, bt \mod 2\pi) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Pro $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ je křivka na toru uzavřená a jedná se o vložení. Pro $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ ale v topologii T^2 platí $\overline{H} = T^2$, tj. křivka hustě nakrývá torus, není uzavřená a nejedná se o vložení, ale pouze o prosté vnoření.

3.2 Akce grupy na varietě

Definice 3.15. (Levá) **akce** ϕ **Lieovy grupy** G na varietě M je hladké zobrazení $\phi : G \times M \to M$ vyhovující

- $\phi(g_1 g_2, m) = \phi(g_1, \phi(g_2, m))$ pro všechna $g_1, g_2 \in G$, $m \in M$, a
- $\phi(e, m) = m$ ve všech bodech $m \in M$.

Pro zvolený bod $m \in M$ nazýváme množinu bodů $\{\phi(g, m) | g \in G\}$ **orbita** akce ϕ procházející bodem m a značíme $\mathcal{O}_m$.

Poznámka 3.16. Obdobně se definuje **pravá akce** $\phi : M \times G \to M$:

- $\phi(m, g_1 g_2) = \phi(\phi(m, g_1), g_2)$,
- $\phi(m, e) = m$.

Pravou akci lze vyjádřit pomocí levé akce záměnou $g \to g^{-1}$.

Definice 3.17. Pro podgrupu H grupy G definujeme **levé cosety** $gH = \{gh | h \in H\}$. Cosety $gH = \mathcal{O}_g$ jsou tedy orbity pravé akce podgrupy H na grupě G.

Množinu levých cosetů značíme G/H, tj. $G/H = \{gH | g \in G\}$. Obdobně lze definovat i pravé cosety. V případě normálních podgrup, tj. takových H, že $gHg^{-1} = H$ pro všechna $g \in G$, pojmy levý a pravý coset splývají.

Pokud H je podgrupa Lieovy grupy G uzavřená v topologii G, lze na G/H zavést právě jednu hladkou strukturu takovou, že $(G, G/H, H, \pi)$, $\pi : G \to G/H$, $\pi(g) = gH$, je hlavní fibrovaný prostor s bazí G/H, projekcí π a typickým vláknem H.

Definice 3.18. Akce $\phi : G \times M \to M$ je

- **efektivní** právě tehdy, když pro každý prvek $g \in G$ různý od e existuje bod $m \in M$ takový, že $\phi(g, m) \neq m$,
- **volná** právě tehdy, když $\phi(g, m) = m$ pro jeden bod $m \in M$ již implikuje $g = e$,
- **tranzitivní** právě tehdy, když pro každou dvojici bodů $m_1, m_2 \in M$ existuje $g \in G$ takové, že $m_2 = \phi(g, m_1)$.

Definice 3.19. Nechť ϕ je tranzitivní akce G na M a $x_0 \in M$. **Grupa izotropie** (nebo také grupa stability, stabilizátor nebo malá grupa) bodu x_0 je

$$H_{x_0} = \{g \in G | \phi(g, x_0) = x_0\} . \tag{3.5}$$

Poznámka 3.20. Z rovnice (3.5) a hladkosti akce je vidět, že H_{x_0} obsahuje všechny své limitní body, tj. je uzavřenou podgrupou v G.

Protože pro libovolné $x \in M$ existuje $g_x \in G$ takové, že $x = \phi(g_x, x_0)$, máme pro libovolné $g_0 \in H_{x_0}$, $\phi(g_x g_o g_x^{-1}, x) = \phi(g_x, \phi(g_0, \phi(g_x^{-1}, x))) = x$. Proto platí $H_x = g_x H_{x_0} g_x^{-1}$, tj. všechny grupy izotropie jsou konjugované. V případě normálních podgrup H_{x_0} jsou dokonce totožné.

Důsledek 3.21. Pro tranzitivní akci $\phi : G \times M \to M$ a zvolený bod $x_0 \in M$ je

$$M \simeq G/H_{x_0}.$$

Důkaz. Protože pro libovolné $g_x \in G$ takové, že $\phi(g_x, x_0) = x$, platí $\phi(g_x H_{x_0}, x_0) = \phi(g_x, x_0) = x$, máme vzájemně jednoznačné přiřazení $G/H_{x_0} \leftrightarrow M : \quad g_x H_{x_0} \leftrightarrow x \in M$.

Definice 3.22. Varietu M, kterou lze zapsat ve tvaru $M \simeq G/H_{x_0}$ pro nějakou Lieovu grupu G s tranzitivní akcí na M a její uzavřenou podgrupu $H_{x_0} \subset G$, nazýváme **homogenní prostor**.

Zde se homogenním prostorům a jejich geometrickým vlastnostem, např. metrice, konexi a křivosti kompatibilní s akcí grupy, nebudeme podrobněji věnovat, případné zájemce o tuto oblast teorie Lieových grup nezbývá než odkázat na [1] či [13].

3.3 Cvičení

Cvičení 3.1. Nechť $G, \widetilde{G}$ jsou Lieovy grupy, $\phi : G \to \widetilde{G}$ hladký homomorfismus, tj. $\forall g, h \in G,\ \phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$, pak platí:

$$\phi_* \circ L_{g*} = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*, \quad \text{a} \quad \phi_*(X) \in \widetilde{\mathfrak{g}}\big|_{\phi(G)},\ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Řešení. Z definice platí pro libovolná $g, h \in G$, a $X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} &L_{g*}\, X|_h = X|_{gh}\,, \\ &\phi(L_g h) = L_{\phi(g)}\phi(h) \quad \Rightarrow \quad \phi \circ L_g = L_{\phi(g)} \circ \phi \quad \Rightarrow \quad \phi_* \circ L_{g*} = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že $\phi_*(X|_{gh}) = \phi_*\left(L_{g*}\left(X|_h\right)\right) = L_{\phi(g)*}\phi_*\left(X|_h\right)$ a lze konzistentně definovat $(\phi_* X)_{\phi(g)} = \phi_*\left(X|_g\right) \in \mathcal{X}(\phi(G))$, neboť libovolná dvě $g_1, g_2 \in G$ taková, že $\phi(g_1) = \phi(g_2)$ lze zapsat ve tvaru $g_2 = hg_1$, kde $\phi(h) = e$ a platí $\phi_*\left(X|_{g_2}\right) = \phi_*\left(X|_{hg_1}\right) = L_{\phi(h)}\left(\phi_*\left(X\right)|_{\phi(g_1)}\right) = \phi_*\left(X\right)|_{\phi(g_1)}$. Označme $\phi(g) = \widetilde{g}, \phi(h) = \widetilde{h}$, pak můžeme psát

$$\begin{aligned} L_{\widetilde{g}*}\left(\phi_* X\right)|_{\widetilde{h}} &= L_{\phi(g)*}\left(\phi_* X\right)|_{\phi(h)} = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*\left(X|_h\right) = \phi_* \circ L_{g*}\left(X|_h\right) = \\ &= \phi_*\Big(X|_{gh}\Big) = \left(\phi_* X\right)|_{\phi(gh)} = \left(\phi_* X\right)|_{\widetilde{g}\widetilde{h}}\,. \end{aligned}$$

Tudíž pro libovolná $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \phi(G)$ platí levoinvariance $\phi_*(X)$, tj. vztah $L_{\widetilde{g}*}\left(\phi_* X\right)|_{\widetilde{h}} = \left(\phi_* X\right)|_{\widetilde{g}\widetilde{h}}$. Levoinvariantním dodefinováním pak lze $\phi_*(X)$ chápat jako jednoznačně určený prvek $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

Cvičení 3.2. Nechť $G, \widetilde{G}$ jsou Lieovy grupy, $\phi : G \to \widetilde{G}$ hladký homomorfismus. Pak platí:

$$\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \mathrm{e}^{t\phi_* X}.$$

Řešení. Obě strany rovnice jsou díky $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ 1–parametrické podgrupy. Vidíme, že jejich tečné vektory v e jsou stejné

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \phi_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{tX} = \left(\phi_* X\right)|_{\widetilde{e}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{t\phi_* X}.$$

Protože jednoparametrické podgrupy jsou plně určeny svými tečnými vektory v grupové jednotce, dokázali jsme tím požadovanou identitu.

Cvičení 3.3. Nechť $G, \widetilde{G}$ jsou Lieovy grupy, $\phi : G \to \widetilde{G}$ hladký homomorfismus. Pak platí:

$$[\phi_* X, \phi_* Y] = \phi_*\big([X, Y]\big)$$

pro všechna $X, Y \in \mathfrak{g}$, tj. ϕ_* je homomorfismus Lieových algeber.

Řešení. Mějme libovolnou $f \in C^\infty(\widetilde{G})$ a bod $g \in G$:

$$\begin{aligned}(\phi_* X)\, f|_{\phi(g)} &= X\,(f\circ\phi)|_g = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\phi\left(g\mathrm{e}^{tX}\right)\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\phi(g)\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right) = \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(f\circ R_{\phi(\mathrm{e}^{tX})}\right)\Big|_{\phi(g)}.\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}[\phi_* X, \phi_* Y]\, f|_{\phi(g)} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left[f\left(\phi(g)\phi\left(\mathrm{e}^{sX}\right)\phi\left(\mathrm{e}^{tY}\right)\right) - f\left(\phi(g)\phi\left(\mathrm{e}^{tY}\right)\phi\left(\mathrm{e}^{sX}\right)\right)\right] = \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{s,t=0}\left[f\left(\phi\left(g\mathrm{e}^{sX}\mathrm{e}^{tY}\right)\right) - f\left(\phi\left(g\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{sX}\right)\right)\right] = \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{s,t=0}\left[(f\circ\phi)\left(g\mathrm{e}^{sX}\mathrm{e}^{tY}\right) - (f\circ\phi)\left(g\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{sX}\right)\right] = \\ &= [X,Y]\,(f\circ\phi)|_g = \left(\phi_*[X,Y]\right) f|_{\phi(g)}.\end{aligned}$$

Protože na obou stranách dokazované identity stojí levoinvariantní vektorová pole, lze ji konzistentně dodefinovat jako vztah platný ve všech bodech $\tilde{g} \in \tilde{G}$ i tehdy, když ϕ není surjektivní.

Cvičení 3.4. Uvažujte distribuci Δ definovanou v každém bodě $p \in M = \mathbb{R}^3\backslash\{0\}[x,y,z]$ předpisem $\Delta(p) = \mathrm{span}\{X_1|_p, X_2|_p, X_3|_p\}$, kde

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Najděte rozměr této distribuce, ukažte, že je úplně integrabilní dle Frobeniovy věty, a popište její maximální listy.

Cvičení 3.5. Ukažte geometrickou úvahou, že $S^2 \simeq SO(3)/SO(2)$.

Cvičení 3.6. Ukažte zobecněním postupu z předchozího cvičení, že $S^n \simeq SO(n{+}1)/SO(n)$.

Řešení. Můžeme to udělat i explicitně:

$$T \in SO(n+1) : T = \begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ \vec{c}^T & d\end{pmatrix}, \text{ kde } A \in \mathbb{R}^{n,n}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n, d \in R.$$

Z podmínek na matici T máme

$$\begin{aligned} A\cdot A^T + \vec{b}\cdot\vec{b}^T &= \mathbb{I}, & A\cdot\vec{c} + d\cdot\vec{b} &= \vec{0}, & \\ \vec{c}^T\cdot A^T + d\cdot\vec{b}^T &= \vec{0}, & \vec{c}^T\cdot\vec{c} + d^2 &= 1, & \det T &= 1.\end{aligned}$$

Stabilizátor bodu $\vec{x}_0 = (0,0,\ldots,0,1)^T \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je určen podmínkou

$$T\cdot\vec{x} = \vec{x}, \text{ tj. } \vec{b} = 0, d = 1$$

a v důsledku $A \in SO(n), \vec{c} = 0$. Tudíž máme

$$SO(n) = H_{x_0} = \left\{\begin{pmatrix} A & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1\end{pmatrix} | A \in SO(n)\right\} \subset SO(n+1).$$

Chceme explicitně vyjádření S^n pomocí vhodných reprezentantů tříd ekvivalence, tj. levých cosetů $T \cdot H_{x_0}$.

$$T \cdot H_{x_0} = \left\{ \begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ \vec{c}^T & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot F & \vec{b} \\ \vec{c}^T \cdot F & d \end{pmatrix} | F \in SO(n) \right\}.$$

Vidíme, že $\vec{b}$ a d se nemění při výberu reprezentanta, tj. charakterizují coset. Jak můžeme určit $A, \vec{c}$?

Matice A musí splňovat podmínku $A \cdot A^T = \mathbb{I} - \vec{b} \cdot \vec{b}^T$. Ukážeme, že lze požadovat, aby matice A byla lineární kombinací matic $\mathbb{I}$ a $\vec{b} \cdot \vec{b}^T$.

Zvolíme-li $\tilde{A} = \mathbb{I} - \frac{1}{1-d} \vec{b} \cdot \vec{b}^T$, pak snadno ověříme, že $\tilde{A}$ splňuje stejnou podmínku jako A, tj. $\tilde{A} \cdot \tilde{A}^T = \mathbb{I} - \vec{b} \cdot \vec{b}^T$ s využitím $\vec{b}^T \cdot \vec{b} + d^2 = 1$. Matice $A^{-1} \cdot \tilde{A}$ splňuje

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot \tilde{A} \cdot (A^{-1} \cdot \tilde{A})^T &= A^{-1} \cdot (\tilde{A} \cdot \tilde{A}^T) \cdot (A^{-1})^T = \\ &= A^{-1} \cdot \left(\mathbb{I} - \vec{b} \cdot \vec{b}^T \right) \cdot (A^{-1})^T = \mathbb{I}, \end{aligned}$$

tj. $F = A^{-1} \cdot \tilde{A} \in O(n)$, z výpočtu determinantu $F = A^{-1} \cdot \tilde{A} \in SO(n)$. Tedy vhodným výběrem $F \in SO(n)$ lze vybrat reprezentanta cosetu $T \cdot H_{x_0}$ ve tvaru s $A = \mathbb{I} - \frac{1}{1-d} \vec{b} \cdot \vec{b}^T$.

$\vec{c}$ je pak jednoznačně určené z $A \cdot \vec{c} + d \cdot \vec{b} = \vec{0}$. Snadný výpočet pro zvolenou matici A ukáže, že musí platit $\vec{c} = \vec{b}$.

Shrnutí: podmínka $\vec{b}^T \cdot \vec{b} + d^2 = 1$ určuje body sféry S^n. Následně lze konstrukcí výše jednoznačně určit odpovídajícího reprezentanta, tj. matici T, v uvedeném tvaru plně určeném $\vec{b}$ a d.

Kapitola 4

Reprezentace Lieových grup a algeber, vztah Lieových algeber a jim odpovídajících Lieových grup

V této kapitole nejprve zavádíme důležitý pojem reprezentace Lieovy grupy, resp. Lieovy algebry, a zkoumáme jeho základní vlastnosti. V druhé části pak zkoumáme jednoznačnost ve vztahu mezi Lieovými grupami a algebrami.

4.1 Reprezentace Lieových grup a algeber

Definice 4.1. Reprezentace Lieovy grupy G na vektorovém prostoru V je hladký homomorfismus $\rho : G \to GL(V)$.

V případě $\dim V = +\infty$ většinou uvažujeme reprezentace grupy G na Hilbertově či Banachově prostoru $\mathscr{H}$ pomocí omezených bijektivních operátorů, tj. $\rho : G \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ s požadavkem na omezenost též inverzního operátoru $\rho(g)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Definice 4.2. Reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na vektorovém prostoru V je homomorfismus $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Jinými slovy ρ je lineární a platí $\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y) \circ \rho(X)$.

V případě nekonečněrozměrného Hilbertova či Banachova prostoru $V = \mathscr{H}$ je třeba dbát na to, aby $[\rho(X), \rho(Y)]$ byl vhodným způsobem definován (tj. otázka definičních oborů neomezených operátorů).

V případě reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ musí být V vektorovým prostorem nad stejným tělesem jako algebra $\mathfrak{g}$ samotná - může však být současně i vektorovým prostorem nad větším tělesem. Často se setkáváme s komplexními reprezentacemi reálných Lieových algeber. V případě Lieových grup, které z definice uvažujeme jako reálné diferencovatelné variety, požadujeme, aby V byl alespoň reálný vektorový prostor - a to i v případě, že se jedná o komplexní maticovou grupu.

Příklad 4.3. Reprezentace $\mathfrak{so}(3)$ na $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ je definována $\rho(X_i) = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_k \partial_j$.

Poznámka 4.4. Libovolná reprezentace ρ grupy G na vektorovém prostoru V definuje levou akci G na V předpisem

$$\phi_\rho(g, v) = \rho(g)v.$$

Tato akce je navíc **lineární** ve smyslu $\phi_\rho(g, \alpha v + w) = \alpha\phi_\rho(g, v) + \phi_\rho(g, w)$. A naopak, každá lineární levá akce grupy na vektorovém prostoru definuje reprezentaci.

Definice 4.5. Reprezentace ρ grupy G (resp. algebry $\mathfrak{g}$) je **věrná** právě tehdy, když ρ je prosté zobrazení (monomorfismus).

Na základě věrné reprezentace jsme schopni jednoznačně zrekonstruovat grupu G, resp. algebru $\mathfrak{g}$, tj. příslušné grupové násobení či Lieovu závorku, ze znalosti obrazu grupy, resp. algebry, v reprezentaci. Proto nazýváme věrné reprezentace **realizace** dané grupy, resp. algebry. Příkladem jsou $\mathfrak{so}(3)$ jako 3×3 antisymetrické matice nebo vektorová pole z příkladu 4.3.

Definice 4.6. Buď $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$ soubor lineárních operátorů na vektorovém prostoru V. Soubor Σ je

- **reducibilní** právě tehdy, když existuje netriviální podprostor $W \neq 0, V$ **invariantní** vzhledem k Σ, tj. $\Sigma W = \operatorname{span}\{Aw | A \in \Sigma, w \in W\} \subset W$,
- **ireducibilní** právě tehdy, když neexistuje žádný netriviální podprostor invariantní vzhledem k Σ,
- **úplně reducibilní** právě tehdy, když ke každému invariantnímu podprostoru W existuje invariantní doplněk, tj. podprostor $\tilde{W}$ splňující $\Sigma\tilde{W} \subset \tilde{W}$ a $W \oplus \tilde{W} = V$.

Reprezentace Lieovy grupy G, resp. Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, je ireducibilní (reducibilní, úplně reducibilní) právě tehdy, když $\rho(G)$, resp. $\rho(\mathfrak{g})$, je ireducibilní (reducibilní, úplně reducibilní) soubor operátorů.

Příklad 4.7. Reprezentace $\rho : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$, tzv. **unitární reprezentace**, jsou úplně reducibilní, protože díky unitaritě platí $\rho(G)W \subset W \Rightarrow \rho(G)W^{\perp} \subset W^{\perp}$. Na úrovni algeber platí $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{u}(\mathscr{H})$ neboť pomocí exponenciely získáváme pro $X \in \mathfrak{g}$ vztah

$$\begin{aligned}
\rho\big(\mathrm{e}^X\big) = \mathrm{e}^{\rho_*(X)} \quad &\Rightarrow \quad \Big(\rho\big(\mathrm{e}^X\big)\Big)^\dagger = \rho\big(\mathrm{e}^X\big)^{-1} = \mathrm{e}^{-\rho_*(X)} \\
&\qquad\qquad = \Big(\mathrm{e}^{\rho_*(X)}\Big)^\dagger = \mathrm{e}^{(\rho_*(X))^\dagger} \\
&\Rightarrow \quad \big(\rho_*(X)\big)^\dagger = -\rho_*(X),
\end{aligned}$$

tj. $\rho_*(X)$ jsou antihermitovské matice, $\mathfrak{u}(\mathscr{H}) = \big\{B \in \mathfrak{gl}(\mathscr{H}) \mid B + B^\dagger = 0\big\}$.

Poznámka 4.8. Ve fyzice je zvykem používat hermitovské matice, proto se definují „fyzikální" prvky reálné Lieovy algebry s dodatečnými imaginárními jednotkami

$$A \mapsto A_{\mathrm{F}} = -\mathrm{i}A\,. \tag{4.1}$$

A_{F} již splňují $A_{\mathrm{F}}^\dagger = A_{\mathrm{F}}$, ale jejich strukturní konstanty jsou formálně ryze imaginární,

$$[X_j, X_k] = c_{jk}{}^l X_l, \quad g = \exp(X) \quad \Rightarrow \quad [X_{Fj}, X_{Fk}] = -\mathrm{i}c_{jk}{}^l X_{Fl}, \quad g = \exp(\mathrm{i}X_F). \tag{4.2}$$

Výběr znaménka v (4.1) je otázkou konvence, jemu odpovídají znaménka u imaginárních jednotek ve vztazích (4.2).

Věta 4.9 (Schurovo lemma)**.** Buď V komplexní vektorový prostor konečné dimenze a $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$ ireducibilní soubor operátorů na V. Potom pro každý operátor $A \in \mathfrak{gl}(V)$ komutující se všemi prvky souboru Σ, tj. $[A, \Sigma] = 0$, existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $A = \lambda\mathbb{I}$.

Důkaz. Nechť $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Díky zvolenému tělesu je $\sigma(A) \neq \emptyset$ a tedy existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $W = \ker(A - \lambda\mathbb{I}) \neq \{\vec{0}\}$. Pak pro každé $S \in \Sigma$ platí $(A - \lambda\mathbb{I})SW = S(A - \lambda\mathbb{I})W = 0$, tj. $SW \subset W$, W je nenulový invariantní podprostor. Z ireducibility plyne $W = V$, $A = \lambda\mathbb{I}$. □

Pro úplně reducibilní soubory operátorů lze tvrzení obrátit:

Věta 4.10. Buď V komplexní vektorový prostor konečné dimenze, $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$ úplně reducibilní soubor operátorů. Pokud platí pro každý lineární operátor $A \in \mathfrak{gl}(V)$ implikace $[A, \Sigma] = 0 \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{C} : \ A = \lambda \mathbb{I})$, potom Σ je ireducibilní.

Důkaz. Buď $W \neq \{\vec{0}\}$ invariantní podprostor. Pak existuje podprostor $\widetilde{W}$ invariantní vzhledem k Σ takový, že $V = W \oplus \widetilde{W}$. Definujme A pomocí jeho hodnoty na těchto dvou invariantních podprostorech následovně $A|_W = \mathbb{I}$, $A|_{\widetilde{W}} = 0$, tj. $AW \subset W$, $A\widetilde{W} \subset \widetilde{W}$. Protože evidentně $[A, \Sigma] = 0$, musí dle předpokladu věty existovat $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $A = \lambda \mathbb{I}$ a tedy $\lambda = 1, \widetilde{W} = \{\vec{0}\}, V = W$. □

4.2 Vztah mezi Lieovou algebrou a jí odpovídajícími Lieovými grupami

Nyní se budeme zabývat (ne)jednoznačností ve vztahu mezi Lieovými grupami a Lieovým algebrami. Již víme, že každé Lieově grupě odpovídá jednoznačně určená Lieova algebra. Lze nějakým způsobem popsat množinu všech Lieových grup, jejichž algebry jsou izomorfní, nebo omezením na nějakou vhodnou třídu grup vztah učinit vzájemně jednoznačným?

Připomeňme si, že souvislá varieta M je **jednoduše souvislá** právě tehdy, když všechny uzavřené křivky lze spojitě zdeformovat do bodu, tj. na konstantní zobrazení $S^1 \to x_0 \in M$ (viz definice 2.17).

Definice 4.11. Buďte $M, \overline{M}$ souvislé variety. $\overline{M}$ je **nakrytí** M právě tehdy, když existuje hladké zobrazení $\pi : \overline{M} \to M$ splňující

- $\forall x \in M, \ \exists U = U^\circ \ni x : \ \pi^{(-1)}(U) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha, \ U_\alpha = U_\alpha^\circ \subset \overline{M}, \ U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset, \ \forall \alpha \neq \beta,$
- kde $\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ je difeomorfismus pro každé α z indexové množiny $\mathcal{I}$.

Příklad 4.12. $M = S^1, \ \overline{M} = S^1, \ \pi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$. $\overline{M}$ je dvojnásobné nakrytí.

Příklad 4.13. $M = S^1, \ \overline{M} = \mathbb{R}, \ \pi(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. $\overline{M}$ je $\mathbb{Z}$–násobné nakrytí.

Definice 4.14. Nakrytí $\overline{M}$ variety M je **univerzální** právě tehdy, když $\overline{M}$ je jednoduše souvislá.

Věta 4.15. Všechna univerzální nakrytí souvislé variety jsou difeomorfní. Přesněji, pro libovolná dvě univerzální nakrytí $\pi_1 : \overline{M}_1 \to M$ a $\pi_2 : \overline{M}_2 \to M$ souvislé variety M existuje difeomorfismus $\phi : \overline{M}_1 \to \overline{M}_2$ takový, že $\pi_1 = \pi_2 \circ \phi$.

Bez důkazu.

Jak lze univerzální nakrytí pro konkrétní souvislou varietu M zkonstruovat? Nakrývající varietu konstruujeme jako topologický prostor tříd ekvivalence křivek a následně na něj jednoznačně přeneseme hladkou strukturu. Pro křivky $\gamma : \langle 0, 1\rangle \to M, \ \widetilde{\gamma} : \langle 0, 1\rangle \to M, \ \gamma(1) = \widetilde{\gamma}(0)$ definujeme:

$$\begin{aligned} \gamma \circ \widetilde{\gamma} : \langle 0,1\rangle \to M : \gamma \circ \widetilde{\gamma}(t) &= \gamma(2t) && 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ &= \widetilde{\gamma}(2t-1) && \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ \gamma^{-1}(t) : \langle 0,1\rangle \to M : \gamma^{-1}(t) &= \gamma(1-t) && 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Definujme ekvivalenci

$$\gamma \sim \widetilde{\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(0) = \widetilde{\gamma}(0) \ \wedge \gamma(1) = \widetilde{\gamma}(1) \ \wedge \ \gamma \circ \widetilde{\gamma}^{-1} \text{ lze spojitě deformovat na } \gamma(t) = x_0.$$

Díky hladkosti naší variety M lze pro každou třídu ekvivalence $[\gamma]$ zvolit hladkou křivku jako jejího reprezentanta, např. pomocí interpolace dané spojité křivky pomocí polynomu dostatečně vysokého řádu ve zvolených souřadnicích.

Zvolme $x_0 \in M$ fixní, pak každý bod $x \in M$ lze spojit s x_0 hladkou křivkou díky souvislosti M. Definujme $\overline{M} = \{[\gamma] \mid \gamma : \langle 0,1\rangle \to M, \ \gamma(0) = x_0\}$. Uvažujme jednoduše souvislé otevřené okolí U_x bodu $x \in M$. Pro každé $y \in U_x$ existuje křivka

$$\gamma_{xy} : \langle 0,1\rangle \to U_x : \ \gamma_{xy}(0) = x, \ \gamma_{xy}(1) = y.$$

Všechny takové γ_{xy} spojující x a y uvnitř jednoduše souvislého okolí jsou ekvivalentní. Definujme $\overline{U} \subset \overline{M}$ okolí $[\gamma] \in \overline{M}$, $\gamma(1) = x$ předpisem $\overline{U} = \{[\gamma \circ \gamma_{xy}] \mid y \in U_x\}$. Platí tedy $\gamma \circ \gamma_{xy}(0) = x_0$, $\gamma \circ \gamma_{xy}(1) = y$. Zavedeme-li zobrazení $\pi([\gamma]) = \gamma(1) \in M$, pak takto definované $\overline{U}$ je homeomorfní U_x.

Hladkou strukturu definujeme tím, že postulujeme π jako hladké zobrazení, tj. pomocí $(\pi|_{\overline{U}})^{-1}$ přeneseme hladkou strukturu a následně ukážeme, že tímto způsobem lze konsistentně definovat hladkou strukturu na $\overline{M}$. O $\overline{M}$ pak lze dokázat, že je jednoduše souvislá.

Je-li G souvislá Lieova grupa, pak na $\overline{G}$ můžeme definovat strukturu Lieovy grupy. Buď $x_0 \equiv e$ a pro libovolný $g \in G$ značíme $\gamma_g : \langle 0,1\rangle \to G, \ \gamma_g(0) = e, \ \gamma_g(1) = g$. Definujeme

- $[\gamma_g] \cdot [\gamma_h] \equiv [\gamma_g \circ L_g(\gamma_h)]$, kde $L_g(\gamma_h)(t) = g \cdot \gamma_h(t), \ \forall t \in \langle 0,1\rangle$,
- $\overline{e} = [\gamma_e]$, kde $\gamma_e(t) = e, \ \forall t \in \langle 0,1\rangle$,
- $[\gamma_g]^{-1} = \left[L_{g^{-1}}\left(\gamma_g^{-1}\right)\right]$.

Z konstrukce grupového násobení vyplývá $\pi\left([\gamma_g] \cdot [\gamma_h]\right) = g \cdot h$, tj. π je homomorfismus grup. Protože okolí grupových jednotek jsou difeomorfní okolí z definice nakrytí, platí $\mathfrak{g} \simeq \overline{\mathfrak{g}}$.

Věta 4.16 (Ado)**.** Pro libovolnou konečněrozměrnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ existuje její věrná konečněrozměrná reprezentace $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, tj. $\mathfrak{g} \simeq \rho(\mathfrak{g}) \subset\subset \mathfrak{gl}(V)$.

Bez důkazu.

Důsledek 4.17. Ke každé Lieově algebře $\mathfrak{g}$ existuje jí odpovídající souvislá maticová Lieova grupa $G \subset\subset GL(V)$. Dále ke G můžeme najít jednoduše souvislé nakrytí $\overline{G}$, které ale již nemusí ležet uvnitř $GL(V)$.

Věta 4.18. Ke každé konečněrozměrné Lieově algebře $\mathfrak{g}$ existuje právě jedna souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa G taková, že $\mathfrak{g}$ je její Lieova algebra. Všechny ostatní souvislé Lieovy grupy s touto Lieovou algebrou $\mathfrak{g}$ jsou nakrývány G a mohou být proto zapsány jako G/D, kde D je diskrétní normální podgrupa.

Důkaz. Tvrzení věty vyplývá z existence jednoznačně určeného univerzálního nakrytí, dále z toho, že na něm lze zkonstruovat odpovídající hladké grupové násobení a z toho, že lze zkonstruovat izomorfismus libovolných dvou jednoduše souvislých Lieových grup s izomorfními Lieovými algebrami pomocí izomorfismu algeber a zobrazení exp. Podgrupa D je vzorem grupové jednotky $e \in G/D$ při projekci π, její normálnost vyplývá z toho, že je jádrem homomorfismu π, tj. $D = \ker \pi$. Diskrétnost vyplývá z definice nakrytí.

Poznámka 4.19. To, že D je normální podgrupa, znamená $gDg^{-1} = D$ pro všechna $g \in G$. Pro pevně zvolené $d_0 \in D$ definujme $\phi : G \to D \subset G : \phi(g) = gd_0g^{-1} \in D$. Protože G je souvislá a ϕ hladké, je též $\phi(G)$ souvislá. Současně D je diskrétní podmnožina G, tudíž jediné její souvislé podmnožiny jsou jednotlivé body. Proto pro každé $g \in G$ platí $\phi(g) = d_0$, tedy $gd_0 = d_0g$. Což znamená, že $D \subset \mathcal{Z}(G) = \{h \in G \mid hg = gh,\ \forall g \in G\}$, tj. D musí být abelovská podgrupa obsažená v centru grupy G.

Poznámka 4.20. Buď ρ reprezentace $\mathfrak{g}$ na V, $\dim V < +\infty$. Pak ρ je reprezentace jednoduše souvislé grupy G. Uvažujme G/D dle předpokladů výše. Pokud $\rho(D) \neq \{\mathbb{I}\}$, pak nelze definovat reprezentaci $\rho : G/D \to GL(V)$, ale pouze reprezentaci modulo $\rho(D)$, tj. jeden prvek grupy je reprezentován třídou lineárních operátorů modulo $\rho(D)$. Takovým zobrazením říkáme **víceznačná reprezentace** a setkáváme se s nimi například v kvantové mechanice. V ní je jejich využití koneckonců přirozené, neboť fyzikální stav je určen jednorozměrným podprostorem, nikoliv konkrétním stavovým vektorem z tohoto podprostoru. Tudíž je-li $\rho(D) \subset \operatorname{span}\{\mathbb{I}\}$, je pro kvantověmechanické úvahy víceznačná reprezentace ρ plně akceptovatelná.

Poznámka 4.21. Výše uvedené věty řeší otázku nalezení všech souvislých Lieových grup G se stejnou Lieovou algebrou $\mathfrak{g}$, resp. převádí ji na otázku klasifikace diskrétních normálních podgrup souvislé a jednoduše souvislé Lieovy grupy G.

4.3 Cvičení

Cvičení 4.1. Ukažte, že ve vhodných bazích jsou strukturní konstanty algeber $\mathfrak{so}(3)$ a $\mathfrak{su}(2)$ totožné, tj. jedná se o izomorfní algebry.

Řešení. V $\mathfrak{so}(3)$ je vhodnou bazí

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

s Lieovými závorkami $[E_j, E_k] = \epsilon_{jkl} E_l$, v $\mathfrak{su}(2)$ je odpovídající báze tvořena

$$e_j = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_j, \tag{4.3}$$

kde σ_j jsou Pauliho matice,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 4.2. Ukažte, že pro Lieovu algebru $\mathfrak{su}(2)$ existují právě dvě souvislé Lieovy grupy $SU(2)$ a $SO(3) = SU(2)/_{\{\mathbb{I},-\mathbb{I}\}}$ tím, že zdůvodníte jednoduchou souvislost $SU(2)$ a explicně zkonstruujete nakrývající zobrazení $\pi : SU(2) \to SO(3)$.

Řešení. Nejprve ukážeme strukturu grupy $SU(2)$. Z podmínek

$$UU^\dagger = \mathbb{I}, \qquad \det U = 1$$

snadno zjistíme, že obecná unitární matice s jednotkovým determinantem má tvar

$$U = \begin{pmatrix} a_1 + \mathrm{i}a_2 & -b_1 + \mathrm{i}b_2 \\ b_1 + \mathrm{i}b_2 & a_1 - \mathrm{i}a_2 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}, \quad a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1,$$

tudíž geometricky je grupa $SU(2)$ třírozměrnou sférou,

$$SU(2) \simeq S^3 = \{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4 | a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1\}.$$

Proto je souvislá i jednoduše souvislá.

Dále definujeme reprezentaci ρ grupy $SU(2)$ na $\mathbb{R}^3$ využitím bijektivní izometrie

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{su}(2) : T(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{e} = \sum_{j=1}^{3} x_j e_j,$$

kde e_j jsou matice (4.3) a na $\mathfrak{su}(2)$ uvažujeme skalární součin $\langle X, Y \rangle = -2\mathrm{tr}(X \cdot Y)$, vzhledem k němuž je báze (4.3) ortonormální. Reprezentace ρ je pak definována

$$T(\rho(U)\vec{x}) = U \cdot T(\vec{x}) \cdot U^\dagger. \tag{4.4}$$

Snadno vidíme z definice (4.4), že

$$T(\rho(U_1)\rho(U_2)\vec{x}) = T(\rho(U_1 U_2)\vec{x}),$$

tj. z bijektivity T je ρ reprezentace, a

$$\langle T(\rho(U)\vec{x}), T(\rho(U)\vec{y}) \rangle = \langle T(\vec{x}), T(\vec{y}) \rangle,$$

tj. $\rho(U) \in O(3)$. Ze spojitosti ρ a souvislosti $SU(2)$ je $\rho(U) \in SO(3)$. Zbývá ukázat, že

$$\ker \rho = \{U \in SU(2) | \rho(U) = \mathbb{I}\} = \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$$

což je zřejmé z přímého výpočtu a že ρ je surjektivní. To je vidět z toho, že každá rotace $S \in SO(3)$ je rotací o jistý úhel φ kolem osy $\vec{n}$ a lze ji tudíž vyjádřit ve tvaru

$$R = \exp\left(\varphi \sum_{j=1}^{3} n_j E_j\right).$$

Odpovídající unitární matici můžeme zkonstruovat předpisem

$$U = \exp\left(\varphi \sum_{j=1}^{3} n_j e_j\right) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\varphi \sum_{j=1}^{3} n_j \sigma_j\right),$$

který je důsledkem přímým výpočtem snadno ověřitelného vztahu $\rho_*|_{\mathbb{I}}(e_j) = E_j$, tj. $\rho_*|_{\mathbb{I}} : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ je příslušný izomorfismus Lieových algeber ze cvičení 4.1, a výsledku cvičení 3.2. Explicitně si to snadno ověříme např. pro $\vec{n} = (1, 0, 0)$:

$$R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad U_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\varphi}{2}) & -\mathrm{i}\sin(\frac{\varphi}{2}) \\ -\mathrm{i}\sin(\frac{\varphi}{2}) & \cos(\frac{\varphi}{2}). \end{pmatrix}$$

Za povšimnutí stojí, že $U_1(2\pi) = -\mathbb{I}$, zatímco $R_1(2\pi) = \mathbb{I}$.

Kapitola 5

Lieovy algebry - základní pojmy

Nadále se budeme zabývat strukturou Lieových algeber, bez ohledu na jim odpovídající Lieovu grupu/grupy. Není-li výslovně uvedeno jinak, předpokládáme, že má zkoumaná algebra konečnou dimenzi. Uvažujeme Lieovy algebry nad tělesy reálných a komplexních čísel. V této kapitole si zavedeme základní názvosloví.

Definice 5.1. Podalgebra $\mathfrak{h}$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je vektorový podprostor v $\mathfrak{g}$ splňující $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Poznámka 5.2. Pro podprostory $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ značíme $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \mathrm{span}\{[X, Y] | X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{b}\}$. Bez užití lineárního obalu by výsledná množina obecně nebyla podprostorem.

Příklad 5.3. V Lorentzově algebře generátory vlastních Lorentzových transformací (tzv. boostů) K_i komutují na rotace, $[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijl} L_l$, tedy netvoří podalgebru. Generátory rotací L_i podalgebru tvoří, neboť $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$.

Definice 5.4. Podprostor $\mathfrak{h}$ v $\mathfrak{g}$ je **ideál** právě tehdy, když $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Příklad 5.5. V Poincaréově (či nehomogenní Lorentzově) algebře tvořené generátory Lorentzovy algebry a generátory translací P^α platí $[M^{\mu\nu}, P^\alpha] \sim P^\xi$ a $[P^\alpha, P^\beta] = 0$, tedy translace tvoří abelovský ideál.

Definice 5.6. Faktoralgebra podle ideálu $\mathfrak{h}$ je $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{x + \mathfrak{h} | x \in \mathfrak{g}\}$ s Lieovou závorkou

$$[X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] \equiv [X, Y] + \mathfrak{h}.$$

Cvičení 5.1. Ukažte, že výše zavedená operace konzistentně definuje Lieovu závorku na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

5.1 Speciální třídy Lieových algeber

Definice 5.7. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je

- **abelovská** právě tehdy, když $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$,
- **prostá** právě tehdy, když $\dim \mathfrak{g} > 1$ a jediné ideály v $\mathfrak{g}$ jsou $\{0\}$ a $\mathfrak{g}$,
- **poloprostá** právě tehdy, když její jediný abelovský ideál je $\{0\}$.

U výše uvedených pojmů obvykle předpokládáme $\mathfrak{g} \neq \{0\}$.

Definice 5.8. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je **direktním součtem** ideálů $\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2$ pokud $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ jako vektorové podprostory a současně $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1,\ [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] \subset \mathfrak{g}_2,\ [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = \{0\}$.

Poznámka 5.9. Nadále budeme pro odlišení direktní součet vektorových prostorů značit $V = V_1 \dotplus V_2$.

Definice 5.10. Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ nazveme **rozložitelná**, pokud existují nenulové ideály $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ takové, že $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Jinak je $\mathfrak{g}$ **nerozložitelná**.

Příklad 5.11.

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(n) &= \mathfrak{a}(1) \oplus \mathfrak{sl}(n), \qquad \text{kde } \mathfrak{a}(1) = \operatorname{span}\{\mathbb{I}\}, \\ \mathfrak{u}(n) &= \mathfrak{a}(1) \oplus \mathfrak{su}(n), \qquad \text{kde } \mathfrak{a}(1) = \mathbb{R}\text{–span}\{i\mathbb{I}\}, \\ \mathfrak{so}(4) &= \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3). \end{aligned}$$

Definice 5.12. **Centrum** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je maximální ideál ζ^1 s vlastností $[\mathfrak{g}, \zeta^1] = 0$, tj. $\zeta^1 = \{x \in \mathfrak{g} | [x, \mathfrak{g}] = 0\}$. Značíme $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \zeta(\mathfrak{g}) = \zeta^1(\mathfrak{g}) = \zeta^1$.

Definice 5.13. Definujeme následující tři charakteristické série ideálů v $\mathfrak{g}$:

- **derivovaná série**: $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}],\ \forall k \in \mathbb{N}$. Pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$, algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá **řešitelná**.
- **dolní centrální série**: $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}],\ \forall k > 1$. Pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathfrak{g}^n = \{0\}$, algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá **nilpotentní**.
- **horní centrální série**: $\zeta^1 = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),\ \zeta^k = \{X \in \mathfrak{g} | [X, \mathfrak{g}] \subset \zeta^{k-1}\} \supset \zeta^{k-1},\ \forall k > 1$.

To, že se skutečně jedná o ideály, vyplývá z Jacobiho identity a je přenecháno čtenáři jako cvičení.

Poznámka 5.14. Z definice vyplývá, že $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^{(1)}$, $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$, tj. každá nilpotentní algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná.

Věta 5.15. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní právě tehdy, když $\lim_{k\to+\infty} \zeta^k = \mathfrak{g}$.

Limita je ryze formální, znamená existenci přirozeného čísla K takového, že

$$\zeta^K = \zeta^{K+j} = \mathfrak{g}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Ukážeme oba směry implikace:

$\Rightarrow$: nechť $\mathfrak{g}$ je nilpotentní, tj. existuje $k \le \dim \mathfrak{g} + 1$, $\mathfrak{g}^k = 0$ a v důsledku $\mathfrak{g}^{k-1} \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \zeta^1$. Indukcí ukážeme, že platí $\mathfrak{g}^{k-j} \subset \zeta^j$. Pro $j = 1$ zřejmé, $j \to j + 1$:

$$\left[\mathfrak{g}^{k-j-1}, \mathfrak{g}\right] = \mathfrak{g}^{k-j} \subset \zeta^j, \text{ tj. } \mathfrak{g}^{k-j-1} \subset \zeta^{j+1}.$$

Pro $j = k - 2$ tedy máme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \subset \zeta^{k-1}$.

$\Leftarrow$: Naopak, nechť existuje k takové, že $\zeta^k = \mathfrak{g}$. Indukcí ukážeme, že platí $\zeta^{k-j+1} \supset \mathfrak{g}^j$. Pro $j = 1$ zřejmé, indukční krok $j - 1 \to j$:

$$\mathfrak{g}^{j-1} \subset \zeta^{k-j+2} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}^j = \left[\mathfrak{g}^{j-1}, \mathfrak{g}\right] \subset \left[\zeta^{k-j+2}, \mathfrak{g}\right] = \zeta^{k-j+1}.$$

V důsledku vidíme, že $\mathfrak{g}^k \subset \zeta^1 = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ a tedy $\mathfrak{g}^{k+1} = 0$.

□

Příklad 5.16. Heisenbergova algebra $\mathfrak{h}(n) = \operatorname{span}\{X_i, P_i, \mathbb{I}\}$ s Lieovými závorkami

$$[X_i, P_j] = \delta_{ij}\mathbb{I},\ i,j \in \hat{n}, \qquad [\mathfrak{h}(n), \mathbb{I}] = 0$$

je nilpotentní, neboť $(\mathfrak{h}(n))^2 = \operatorname{span}\{\mathbb{I}\}$, a tudíž $(\mathfrak{h}(n))^3 = 0$.

Poznámka 5.17. Používáme následující konvenci: pokud Lieovy závorky nejsou uvedeny explicitně a nevyplývaji z antisymetrie, tak jsou automaticky považovány za rovné nule.

Příklad 5.18. Striktně horní trojúhelníkové matice $\mathfrak{tr}_0(n) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & & ? \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}\right\}$ jsou nilpotentní.

Příklad 5.19. Horní trojúhelníkové matice $\mathfrak{tr}(n) = \left\{\begin{pmatrix} ? & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & ? \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}\right\}$. Ze snadno ověřitelných vztahů

$$[\mathfrak{tr}(n), \mathfrak{tr}(n)] = \mathfrak{tr}_0(n), \quad [\mathfrak{tr}(n), \mathfrak{tr}_0(n)] = \mathfrak{tr}_0(n)$$

plyne, že algebra $\mathfrak{tr}(n)$ je řešitelná, ale není nilpotentní.

Řešitelné či nilpotentní mohou být i ideály v dané Lieově algebře (tj. v konstrukci sérií uvažujeme pouze prvky z uvažovaného ideálu). Jako cvičení ukážeme, že součet a průnik řešitelných ideálů je řešitelný ideál, součet a průnik nilpotentních ideálů je nilpotentní ideál. Z konečnosti dimenze Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ pak vyplývá existence maximálního řešitelného, resp. nilpotentního, ideálu.

Definice 5.20. Maximální řešitelný ideál v $\mathfrak{g}$ se nazývá **radikál** a maximální nilpotentní ideál se nazývá **nilradikál**.

Poznámka 5.21. Nechť $\mathfrak{r}$ je radikál algebry $\mathfrak{g}$. Uvažujme $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ a v ní abelovský ideál $\mathfrak{h}/\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, tj. máme ideál $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | X + \mathfrak{r} \in \mathfrak{h}/\mathfrak{r}\}$ takový, že $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{r}$. Tudíž $\mathfrak{h}^{(1)} \subset \mathfrak{r}$ a současně $\mathfrak{r}$ je řešitelná, tj. existuje k takové, že $\mathfrak{r}^{(k)} = 0$. V důsledku máme $\mathfrak{h}^{(k+1)} \subset \mathfrak{r}^{(k)} = 0$ a dle předpokladu maximality radikálu $\mathfrak{r}$ je $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}$. Proto $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ nemá žádný netriviální abelovský ideál a je tedy poloprostá.

Platí dokonce ještě silnější tvrzení tvrdící, že $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ lze realizovat jako podalgebru v $\mathfrak{g}$:

Věta 5.22 (Leviho)**.** Každou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ lze rozložit na polopřímý součet poloprosté podalgebry $\mathfrak{s}$ a radikálu $\mathfrak{r}$, tj.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \dotplus \mathfrak{r},\ [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s},\ [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r},\ [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r},$$

přičemž $\mathfrak{s}$ je určena až na izomorfii. $\mathfrak{s}$ nebo $\mathfrak{r}$ může být rovné $\{0\}$.

Bez důkazu.

5.2 Derivace

Definice 5.23. Derivace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je lineární zobrazení $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ splňující $D([X, Y]) = [DX, Y] + [X, DY]$ pro všechna $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Definice 5.24. Buď G Lieova grupa a $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra.

- **Adjungovaná akce** Lieovy grupy G na G je $\phi : G \times G \to G$ definovaná předpisem

$$\phi(g, h) \equiv \phi_g(h) = ghg^{-1},\ \text{tj. } \phi_g = L_g \circ R_{g^{-1}},$$

- **adjungovaná reprezentace Lieovy grupy** G na Lieově algebře $\mathfrak{g}$ je

$$Ad : G \to GL(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{Ad}(g) = \phi_{g*} = L_{g*} \circ R_{g^{-1}*},$$

- **adjungovaná reprezentace Lieovy algebry** $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$ je

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{ad}_X \equiv \mathrm{ad}(X) = \mathrm{Ad}_*(X), \text{ tj. } \mathrm{ad}_X Y = \mathrm{Ad}_*(X)Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})Y.$$

Ověření, že se skutečně jedná o akci, resp. reprezentace, je přenecháno jako cvičení čtenáři.

Poznámka 5.25. Adjungovanou reprezentaci lze ekvivalentně zavést požadavkem $g\mathrm{e}^X g^{-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{Ad}(g)X}$. Pro maticové grupy lze $\mathrm{Ad}(g)X$ počítat jednoduše vztahem

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}.$$

Podobně se zjednoduší výpočet adjungované reprezentace algebry.

Věta 5.26. Pro adjungovanou reprezentaci Lieovy algebry platí

$$\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]. \tag{5.1}$$

Důkaz. Pro každé $X \in \mathfrak{g}$, $p \in G$ a $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ máme

$$X(f)(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (f \circ \Psi^s_X)(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} f(p\mathrm{e}^{sX})$$

a zároveň platí $\mathrm{e}^{\phi_*(X)} = \phi\left(\mathrm{e}^X\right)$ pro libovolný homomorfismus ϕ, tj. i konkrétně pro ϕ_g definovaný adjungovanou akcí G na G. Z definice adjungované reprezentace Lieovy algebry máme

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_X(Y)f|_p &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{tX}}(Y)f|_p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\phi_{\mathrm{e}^{tX}})_*(Y)f|_p = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ R_{\exp(s(\phi_{\mathrm{e}^{tX}})_*(Y))}\big|_p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(p\mathrm{e}^{s(\phi_{\mathrm{e}^{tX}})_*(Y)}\right) = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(p\phi_{\mathrm{e}^{tX}}\left(\mathrm{e}^{sY}\right)\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \underbrace{f\left(p\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sY}\mathrm{e}^{-tX}\right)}_{=F(t,s,-t)} = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} F(t,s,0) - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} F(0,s,t) = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(f\left(p\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sY}\right) - f\left(p\mathrm{e}^{sY}\mathrm{e}^{tX}\right)\right) = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} Yf(p\mathrm{e}^{tX}) - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} Xf(p\mathrm{e}^{sY}) = X(Yf)(p) - Y(Xf)(p) = [X,Y]f(p)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$ □

Poznámka 5.27. Pro matice je rovnice (5.1) vidět ihned: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \mathrm{e}^{tX}Y\mathrm{e}^{-tX} = XY - YX = [X, Y]$.

Poznámka 5.28. Vzhledem k větě (5.26) lze adjungovanou reprezentaci Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ definovat rovnicí (5.1) bez ohledu na to, zda uvažujeme odpovídající Lieovu grupu G nebo nikoliv.

Důsledek 5.29. Díky Jacobiho identitě je ad_X derivace.

Definice 5.30. Derivace D je **vnitřní** právě tehdy, když existuje $X \in \mathfrak{g}$ takové, že $D = \mathrm{ad}_X$. Všechny ostatní derivace se nazývají **vnější**.

5.3 Vztah reálných a komplexních algeber

Definice 5.31. Pro reálnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ existuje jediná komplexní Lieova algebra $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, nazývaná **komplexifikace** $\mathfrak{g}$, kterou definujeme jako $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} + \mathrm{i}\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$, tj.

$$\begin{aligned} [X + \mathrm{i}Y, U + \mathrm{i}V] &= ([X,U] - [Y,V]) + \mathrm{i}([Y,U] + [X,V]), \qquad X,Y,U,V \in \mathfrak{g}, \\ (\alpha + \mathrm{i}\beta) \cdot (U + \mathrm{i}V) &= (\alpha U - \beta V) + \mathrm{i}(\beta U + \alpha V), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, U, V \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Naopak, pro každou komplexní Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ můžeme jednoznačně zkonstruovat reálnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ pomocí doplnění libovolné báze $(X_j)_{j=1}^n \subset \mathfrak{g}$ na $\mathbb{R}$–span$\{X_j,\ \mathrm{i}X_j\}_{j=1}^n$. Strukturní konstanty jsou pak reálné a komplexní části původních.

Platí $\dim_\mathbb{C} \mathfrak{g}_\mathbb{C} = \dim_\mathbb{R} \mathfrak{g}$ a $\dim_\mathbb{R} \mathfrak{g}_\mathbb{R} = 2 \dim_\mathbb{C} \mathfrak{g}$.

Definice 5.32. Reálná forma komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je libovolná reálná Lieova algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ splňující $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}_\mathbb{C}$.

Příklad 5.33. Reálné algebry $\mathfrak{su}(2)$ a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ jsou dvě různé reálné formy stejné komplexní algebry $\mathfrak{su}(2)_\mathbb{C} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_\mathbb{C}$. Podobně $\mathfrak{so}(1,3)_\mathbb{C} = \mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) = \mathfrak{so}(4,\mathbb{R})_\mathbb{C}$.

5.4 Zobrazení Lieových algeber

Definice 5.34. Pro lineární zobrazení $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ Lieových algeber nad stejným tělesem zavádíme označení:

- ϕ je **homomorfismus** právě tehdy, když $[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X,Y])$ platí pro všechna $X, Y \in \mathfrak{g}$,
- homomorfismus ϕ je **endomorfismus** právě tehdy, když $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$,
- homomorfismus ϕ je **izomorfismus** právě tehdy, když $\ker \phi = \{0\}$, $\phi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$,
- izomorfismus ϕ je **automorfismus** právě tehdy, když je současně endomorfismus.

Příklad 5.35. Pro libovolné $g \in G$ je $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ automorfismus. Zobrazení $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je homomorfismus. Ale pro $X \in \mathfrak{g}$ zobrazení $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ obecně není homomorfismus, protože $\mathrm{ad}_X[Y,Z] = [\mathrm{ad}_X Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}_X Z] \neq [\mathrm{ad}_X Y, \mathrm{ad}_X Z]$.

5.5 Cvičení

Cvičení 5.2. Nalezněte všechny neizomorfní reálné Lieovy algebry v dimenzích $1, 2$ a 3.

Řešení. V dimenzi 1 je úloha jednoduchá, z antisymetrie je jediná Lieova algebra abelovská,

$$\mathfrak{a}_1 = \mathrm{span}\{e_1\}, \qquad [e_1, e_1] = 0.$$

Nulové Lieovy závorky nadále nebudeme uvádět.

V dimenzi 2 máme z antisymetrie jedinou netriviální Lieovu závorku $[e_1, e_2]$. Pokud je nulová, tj, $\mathfrak{g}^2 = 0$, máme abelovskou Lieovu algebru $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$. Pokud $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$, zvolíme bázi tak, aby $\mathfrak{g}^2 = \mathrm{span}\{e_1\}$. Pak musí existovat $e_2 \in \mathfrak{g}\backslash\mathfrak{g}^2$ takové, že $[e_1, e_2] = \alpha e_1$, $\alpha \neq 0$ a vhodným výběrem násobku e_2 máme algebru $\mathfrak{af}(1)$ ve tvaru

$$\mathfrak{af}(1) = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}, \quad [e_1, e_2] = e_1.$$

Tato algebra je řešitelná, není nilpotentní.

V dimenzi 3 obdobně postupujeme podle $\dim \mathfrak{g}^2$. Máme

- $\dim \mathfrak{g}^2 = 0$: $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$.
- $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$: Jsou dvě možnosti
  - $\mathfrak{g}^2 \subset \zeta^1$, pak $\mathfrak{g}^2 = \mathrm{span}\{e_1\}$, $[e_1, \mathfrak{g}] = 0$, tudíž vhodným výběrem báze máme nilpotentní Heisenbergovu algebru ve tvaru

    $$\mathfrak{h}_1 = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}, \qquad [e_2, e_3] = e_1.$$

  - $\mathfrak{g}^2 \not\subset \zeta^1$, pak $\mathfrak{g}^2 = \mathrm{span}\{e_1\}$, $[e_1, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^2$. Pak existuje $e_2 \in \mathfrak{g}\backslash\mathfrak{g}^2$ takové, že $[e_1, e_2] = e_1$. $\mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ je zjevně ideál a doplňkový lineárně nezávislý vektor e_3 lze vhodným odečtením násobků e_1 a e_2 vybrat tak, že $[e_3, e_1] = [e_3, e_2] = 0$. Nacházíme tudíž algebru $\mathfrak{af}(1) \oplus \mathfrak{a}_1$.
- $\dim \mathfrak{g}^2 = 2$: Máme dvě možnosti pro strukturu $\mathfrak{g}^2 = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$:
  - $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{a}_2$. Pak je algebra $\mathfrak{g}$ plně určena regulární maticí $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, kde

    $$\begin{aligned} [e_1, e_3] &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2, \\ [e_2, e_3] &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2. \end{aligned}$$

    Změnou báze e_1, e_2 lze matici A převést na libovolnou matici s ní konjugovanou, dále můžeme vybrat vhodný násobek e_3, čemuž odpovídá přenásobení A nenulovým číslem. Celkem máme tři kanonické tvary pro matici A: diagonalizovatelná, Jordanův tvar a reálná matice diagonalizovatelná pouze nad $\mathbb{C}$, což po vhodném přenásobení dává

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{pmatrix},$$

a jim odpovídající algebry. Pokud zohledníme všechny výše uvedené transformace měnící zvolenou bázi, máme možnosti

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{3,\lambda} : [e_1, e_3] &= e_1, & [e_2, e_3] &= \lambda e_2, & &0 < |\lambda| \leq 1, \\
& & & & &\text{pokud } |\lambda| = 1 : \arg\lambda \leq \pi, \\
\mathfrak{g}_{3,\mathrm{Jordan}} : [e_1, e_3] &= e_1, & [e_2, e_3] &= e_1 + e_2, \\
\mathfrak{g}_{3,p} : [e_1, e_3] &= pe_1 - e_2, & [e_2, e_3] &= e_1 + pe_2, & &p \geq 0, \ \text{pouze nad } \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Všechny tyto algebry jsou řešitelné, ale nikoliv nilpotentní.

– $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{af}(1)$ implikuje spor s Jacobiho identitou, tj. tomuto případu žádná algebra neodpovídá.

- $\dim \mathfrak{g}^2 = 3$: Je výhodné Lieovy závorky ve zvolené bázi (e_j) zapsat způsobem

$$[e_j, e_k] = \epsilon_{jkl}\alpha_{lm}e_m.$$

Jacobiho identity implikují, že matice $\alpha = (\alpha_{jk})$ je symetrická a z $\dim \mathfrak{g}^2 = 3$ je nutně regulární. Při změně báze $\tilde{e}_a = \rho_a^k e_k$ máme

$$[\tilde{e}_a, \tilde{e}_b] = \det\rho \cdot \epsilon_{abc}(\rho^{-1})_l^c \alpha_{lm}(\rho^{-1})_m^d \tilde{e}_d \equiv \epsilon_{abc}\tilde{\alpha}_{cd}\tilde{e}_d,$$

tj. za předpokladu $\det\rho = 1$ máme transformaci složek symetrické bilineární formy $\tilde{\alpha} = (\rho^{-1})^T \cdot \alpha \cdot \rho^{-1}$. Celkový násobek matice α můžeme ovšem vybrat další transformací $\tilde{e}_j = \gamma e_j$. Tudíž α lze vždy převést na kanonický tvar symetrické nedegenerované bilineární formy nad zvoleným tělesem s tím, že celkové znaménko je irelevantní. Nad tělesem komplexních čísel získáváme jedinou algebru

$$so(3,\mathbb{C}) : \quad [e_j, e_k] = \epsilon_{jkl}e_l,$$

nad reálnými čísly musíme rozlišit dvě možné relevantní signatury $(3, 0, 0)$ a $(2, 1, 0)$, což vede kromě $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ na druhou možnost

$$\mathfrak{so}(2,1) : \quad [e_1, e_2] = -e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2.$$

Tato algebra je současně izomorfní algebře $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, jak lze ukázat jiným výběrem báze, v níž mají Lieovy závorky tvar

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{span}\{h, x_+, x_-\} : \quad [h, x_\pm] = \pm 2x_\pm, \quad [x_+, x_-] = h.$$

odpovídající maticím $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $x_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cvičení 5.3. Buďte $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ ideály v $\mathfrak{g}$. Pak $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$, $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ jsou ideály v $\mathfrak{g}$.

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
&[[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2], \mathfrak{g}] = [\mathfrak{h}_1, [\mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}]] + [[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}], \mathfrak{h}_2] \subset [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2], \\
&[\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}] + [\mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2, \\
&[\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_1 \quad \wedge \quad [\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_2 \quad \Rightarrow \quad [\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.
\end{aligned}
$$

□

Důsledek 5.36. Je-li $\mathfrak{h}$ ideál v $\mathfrak{g}$, pak $\mathfrak{h}^k, \mathfrak{h}^{(k)}$ jsou ideály v $\mathfrak{g}$.

Cvičení 5.4. Jsou-li $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ řešitelné ideály v $\mathfrak{g}$, pak $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ je řešitelný ideál v $\mathfrak{g}$.

Důkaz. Z vlastností podprostorů a z toho, že $\mathfrak{h}_1,\ \mathfrak{h}_2,\ \mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2,\ \mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2$ jsou ideály v $\mathfrak{g}$ máme izomorfismus faktoralgeber

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$$

Protože $\mathfrak{h}_2$ je řešitelný, je též $\mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$ řešitelný a z izomorfismu výše je $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1$ řešitelný. Protože $\mathfrak{h}_1$ je řešitelný, je i $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ je řešitelný. □

Cvičení 5.5. Buďte $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ nilpotentní ideály v $\mathfrak{g}$. Pak $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ je nilpotentní ideál.

Důkaz. Chceme ukázat, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{h}_1 \cup \mathfrak{h}_2$ platí $[X_1, [X_2, \dots, [X_{n-1}, X_n]]] = 0$. Z linearity Lieovy závorky pak bude plynout dokazovaná nilpotentnost.
Víme, že $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ jsou nilpotentní právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{h}_1^k = 0$, $\mathfrak{h}_2^k = 0$. Vezmeme $n = 2k$ a bez újmy na obecnosti předpokládáme, že alespoň k z $X_1, \dots, X_n$ je z $\mathfrak{h}_1$. Pak platí

$$X \in \mathfrak{h}_1^j,\ Y \in \mathfrak{h}_1 \quad\Rightarrow\quad [X,Y] \in \mathfrak{h}_1^{j+1}, \qquad X \in \mathfrak{h}_1^j,\ Y \in \mathfrak{h}_2 \quad\Rightarrow\quad [X,Y] \in \mathfrak{h}_1^j.$$

Celkem tedy vidíme, že $[X_1, [X_2, \dots, [X_{n-1}, X_n]]] \in \mathfrak{h}_1^k = \{0\}$. □

Kapitola 6

Killingova forma, vlastnosti řešitelných a nilpotentních algeber

Na Lieových algebrách existuje význačná bilineární forma zvaná Killingova, která je velmi užitečná při jejich zkoumání. Po jejím zavedení se budeme hlouběji zabývat vlastnostmi řečitelných a nilpotentních algeber.

6.1 Killingova forma

Definice 6.1. Symetrická bilineární forma ω na Lieově algebře $\mathfrak{g}$ je:

- **invariantní vzhledem k automorfismům** $\mathfrak{g}$ právě tehdy, když

$$\omega(\phi(X), \phi(Y)) = \omega(X, Y) \text{ pro každý automorfismus } \phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}), \tag{6.1}$$

- ad–**invariantní (invariantní)** právě tehdy, když

$$\omega([X, Y], Z) + \omega(Y, [X, Z]) = 0 \text{ pro každou trojici } X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \tag{6.2}$$

Poznámka 6.2. Je-li forma ω invariantní vzhledem k automorfismům, pak pro všechna $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ platí

$$\begin{aligned} &\omega\left(\mathrm{Ad}_{e^{tX}} Y, \mathrm{Ad}_{e^{tX}} Z\right) = \omega(Y, Z) \quad \Big/ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ &\omega\left(\mathrm{ad}_X Y, Z\right) + \omega\left(Y, \mathrm{ad}_X Z\right) = 0, \end{aligned}$$

tedy ω je ad–invariantní.

Naopak to neplatí. Například uvažme symetrické formy na abelovské Lieově algebře - všechny jsou ad–invariantní, ale jedině nulová forma je invariantní vzhledem k automorfismům, tj. všem lineárním regulárním operátorům.

Definice 6.3. Killingova forma Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ nad tělesem $\mathbb{T}$ je zobrazení

$$K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{T} : K(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y). \tag{6.3}$$

Uvažme ϕ automorfismus, $X \in \mathfrak{g}$ a $\mathrm{ad}_{\phi(X)} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Pak platí

$$\mathrm{ad}_{\phi(X)} Y = [\phi(X), Y] = \left[\phi(X), \phi\left(\phi^{-1}(Y)\right)\right] = \phi\left(\left[X, \phi^{-1}(Y)\right]\right) = \left(\phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1}\right)(Y),$$

tedy $\mathrm{ad}_{\phi(X)} = \phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1}$. Pro Killingovu formu tedy platí

$$K\left(\phi(X), \phi(Y)\right) = \mathrm{tr}\left(\phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \mathrm{ad}_Y \circ \phi^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y\right) = K(X, Y), \quad (6.4)$$

tj. je invariantní vzhledem k automorfismům (a tedy je též ad–invariantní).

Explicitně lze ukázat, že K je ad–invariantní následovně

$$\begin{aligned} K\left([X, Y], Z\right) + K\left(Y, [X, Z]\right) &= \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_{[X,Y]} \circ \mathrm{ad}_Z + \mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_{[X,Z]}\right) = \\ &= \mathrm{tr}\left((\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_X)\mathrm{ad}_Z + \mathrm{ad}_Y(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Z - \mathrm{ad}_Z \mathrm{ad}_X\right) = 0 \end{aligned}$$

využitím invariance stopy vůči cyklické záměně.

Věta 6.4. Je-li $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ideál, pak pro jeho Killingovu formu platí $K_{\mathfrak{h}} = K_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$.

Důkaz. Zvolenou bázi $\mathfrak{h}$ ve tvaru $(e_i)_{i=1}^{\dim \mathfrak{h}}$ doplníme na bázi $\mathfrak{g}$, $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}}$. Pak pro libovolná $X, Y \in \mathfrak{h}$ platí $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}_Y : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, tj.:

$$(\mathrm{ad}_X)_{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} \end{array}\right) \}\dim \mathfrak{h}, \qquad (\mathrm{ad}_Y)_{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} \end{array}\right) \}\dim \mathfrak{h},$$

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \mathrm{tr}\left(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} \end{array}\right)\right) = \\ &= \mathrm{tr}\left(A \cdot \widetilde{A}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{h}}, \mathrm{ad}_Y|_{\mathfrak{h}}\right) = K_{\mathfrak{h}}(X, Y). \end{aligned}$$

□

Definice 6.5. Ortogonální doplněk ideálu $\mathfrak{h}$ vzhledem ke Killingově formě K na $\mathfrak{g}$ je

$$\mathfrak{h}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} | K(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}. \quad (6.5)$$

Obdobně lze definovat ortogonální doplněk vzhledem ke Killingově formě libovolného podprostoru v $\mathfrak{g}$.

Poznámka 6.6. Je-li $\mathfrak{h}$ ideál, pak i $\mathfrak{h}^{\perp}$ je ideál.

Důkaz. Pro libovolné $X \in \mathfrak{h}^{\perp}$, $Y \in \mathfrak{g}$, $Z \in \mathfrak{h}$ platí:

$$K\big([X, Y], Z\big) = -K\big([Y, X], Z\big) = K\big(X, \underbrace{[Y, Z]}_{\in \mathfrak{h}}\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad [X, Y] \in \mathfrak{h}^{\perp}.$$

□

6.2 Nilpotentní a řešitelné algebry

Věta 6.7. Je-li $\phi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ homomorfismus, pak $(\phi(\mathfrak{g}))^{(k)} = \phi(\mathfrak{g}^{(k)})$, $(\phi(\mathfrak{g}))^{k} = \phi\left(\mathfrak{g}^{k}\right)$.

Důkaz. Indukcí:

$$(\phi(\mathfrak{g}))^{(0)} = \phi(\mathfrak{g}) = \phi\left(\mathfrak{g}^{(0)}\right)$$
$$(\phi(\mathfrak{g}))^{(k)} = \left[\phi(\mathfrak{g})^{(k-1)}, \phi(\mathfrak{g})^{(k-1)}\right] = \left[\phi\left(\mathfrak{g}^{(k-1)}\right), \phi\left(\mathfrak{g}^{(k-1)}\right)\right] = \phi\left(\left[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}\right]\right) = \phi\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right).$$

Podobně

$$(\phi(\mathfrak{g}))^{1} = \phi(\mathfrak{g}) = \phi\left(\mathfrak{g}^{1}\right)$$
$$(\phi(\mathfrak{g}))^{k} = \left[\phi(\mathfrak{g})^{k-1}, \phi(\mathfrak{g})\right] = \left[\phi\left(\mathfrak{g}^{k-1}\right), \phi\left(\mathfrak{g}\right)\right] = \phi\left(\left[\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}\right]\right) = \phi\left(\mathfrak{g}^{k}\right).$$

□

Důsledek 6.8. Je-li Lieova algebra $\mathfrak{g}$ řešitelná (resp. nilpotentní) a $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfismus, pak $\operatorname{Ran}\phi \equiv \phi(\mathfrak{g})$ je řešitelná (resp. nilpotentní) algebra.

Poznámka 6.9. Je-li $\phi : \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ homomorfismus, pak $\ker\phi$ je ideál v $\mathfrak{g}$.

Důkaz. $X \in \mathfrak{g},\ Y \in \ker\phi \quad \Rightarrow \quad \phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] = 0 \quad \Rightarrow \quad [X,Y] \in \ker\phi$. □

Věta 6.10. Je-li $\mathfrak{h}$ ideál v algebře $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ jsou řešitelné. Pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná.

Důkaz. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ řešitelná $\quad\Leftrightarrow\quad \exists n \in \mathbb{N},\ (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(n)} = 0 \bmod \mathfrak{h} \quad\Leftrightarrow\quad \mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{h}$ a protože $\mathfrak{h}$ je řešitelný, $\exists k \in \mathbb{N},\ \mathfrak{h}^{(k)} = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{g}^{(n+k)} \subset \mathfrak{h}^{(k)} = 0$, tj. $\mathfrak{g}$ je řešitelná. □

Důsledek 6.11. Máme-li homomorfismus $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ takový, že $\operatorname{Ran}\phi$ a $\ker\phi$ jsou řešitelné, pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná, protože $\operatorname{Ran}\phi \cong \mathfrak{g}/\ker\phi$.

Věta 6.12. Je-li $\mathfrak{h} \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ nilpotentní, pak $\mathfrak{g}$ je nilpotentní.

Důkaz. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ nilpotentní $\quad\Leftrightarrow\quad \exists n \in \mathbb{N},\ (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{n} = 0 \bmod \mathfrak{h}$, tj. $\mathfrak{g}^{n} \subset \mathfrak{h}$ a $\mathfrak{g}^{n+1} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = 0$. □

Důsledek 6.13. Označme $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} = \{\operatorname{ad}_X | X \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Pak

- $\mathfrak{g}$ řešitelná právě tehdy, když $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ řešitelná.
- $\mathfrak{g}$ nilpotentní právě tehdy, když $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ nilpotentní.

Důkaz. $\ker\operatorname{ad} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X,Y] = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}\} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, tj. $\ker\operatorname{ad}$ je rovno centru algebry $\mathfrak{g}$ a lze použít větu 6.10, resp. 6.12. □

Vlastnosti konečněrozměrných operátorů

Definice 6.14. Lineární operátor $A \in \mathfrak{gl}(V)$ je **poloprostý (diagonalizovatelný)** právě tehdy, když existuje báze vektorového prostoru $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1}^{\dim V} \subset V$ tvořená vlastními vektory operátoru A, tj. $Ae_i = \lambda_i e_i$.

Soubor operátorů $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}} \subset \mathfrak{gl}(V)$ je **současně diagonalizovatelný** právě tehdy, když existuje báze vektorového prostoru $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1}^{\dim V} \subset V$ tvořená společnými vlastními vektory, $A_\alpha e_i = \lambda_i^{(\alpha)} e_i$.

Definice 6.15. Lineární operátor $A \in \mathfrak{gl}(V)$ je **nilpotentní** právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A^n = 0$.

Věta 6.16 (Jordanův rozklad)**.** Buď $A \in \mathfrak{gl}(V)$, kde V je vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{C}$. Pak existuje jednoznačně určená dvojice operátorů $S, N \in \mathfrak{gl}(V)$ splňující

- $A = S + N$,
- S je diagonalizovatelný, N nilpotentní,
- $[S, N] = 0$.

Operátory S a N lze vyjádřit jako polynomy v operátoru A.

Důkaz viz učebnice lineární algebry.

Poznámka 6.17. Pro další úvahy je užitečné si uvědomit, že spektrum nilpotentního operátoru je tvořené pouze 0 a tedy i stopa N je nulová. Vidíme to z toho, že $Nx = \lambda x$ implikuje $N^k x = \lambda^k x$, tj. $\{0\} = \sigma(N^k) = \{\lambda^k | \lambda \in \sigma(N)\}$.

6.3 Cvičení

Cvičení 6.1. Určete, jak vypadá Killingova forma libovolné nilpotentní Lieovy algebry.

Řešení. Víme, že

$$\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g}^j \to \mathfrak{g}^{j+1}, \qquad \mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y : \mathfrak{g}^j \to \mathfrak{g}^{j+2}.$$

Protože algebra $\mathfrak{g}$ je dle předpokladu nilpotentní, existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathfrak{g}^k = 0$, tj. $(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y)^k = 0$. Tudíž $K(X, Y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y) = 0$.

Cvičení 6.2. Najděte Killingovu formu algebry $\mathfrak{af}(1)$ v bázi e_1, e_2, $[e_1, e_2] = e_1$.

Řešení.

$$\mathrm{ad}_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{e_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kapitola 7

Věty Lieova a Engelova

V této kapitole vyslovíme dvě základní věty o struktuře řešitelných a nilpotentních algeber - větu Engelovu a větu Lieovu, které budeme často využívat v dalším textu. K jejich důkazu si připravíme několik definic a pomocných tvrzení.

Definice 7.1. Vektor $X \in \mathfrak{g}$ je ad–**nilpotentní** právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $(\mathrm{ad}_X)^n = 0$.

Poznámka 7.2. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$ platí $\mathrm{ad}_{X_1} \circ \dots \circ \mathrm{ad}_{X_n} = 0$. Speciálně pro libovolný $X \in \mathfrak{g}$ platí $(\mathrm{ad}_X)^n = 0$, tj. všechny prvky nilpotentní algebry jsou ad–nilpotentní.

Lemma 7.3. Pokud operátor $X \in \mathfrak{gl}(V)$ je nilpotentní, pak je X též ad–nilpotentní v $\mathfrak{gl}(V)$.

Důkaz. Indukcí ukážeme že platí:

$$(\mathrm{ad}_X)^k Y = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} X^j Y X^{k-j}. \tag{7.1}$$

$k = 1$ zřejmé, $k - 1 \to k$:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}_X)^k Y &= \mathrm{ad}_X \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} X^j Y X^{k-1-j} \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} X^{j+1} Y X^{k-1-j} - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} X^j Y X^{k-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \left(\binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j} \right) X^j Y X^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} X^j Y X^{k-j}.
\end{aligned}$$

Konkrétně je-li $X^n = 0$ pro nějaké $n \in N$, pak v každém sčítanci výrazu $(\mathrm{ad}_X)^{2n}$ je nula v X^j nebo X^{k-j}. □

Lemma 7.4. Buď $\mathfrak{h}$ ideál v $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, $W = \bigcap_{X \in \mathfrak{h}} \ker X = \{v \in V | Xv = 0, \forall X \in \mathfrak{h}\}$. Pak $\mathfrak{g}W \subset W$, tj. W je invariantní podprostor.

Důkaz. Pro všechna $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{g}$ platí $X(YW) = \underbrace{[X, Y]}_{\in \mathfrak{h}} W + Y(XW) = 0$. Tudíž $YW \subset \ker X$ pro všechna $X \in \mathfrak{h}$, a tedy $YW \subset W$ pro libovolné $Y \in \mathfrak{g}$. □

Lemma 7.5. Buď $\mathfrak{g}$ podalgebra v $\mathfrak{gl}(V)$ taková, že všechny elementy $\mathfrak{g}$ jsou nilpotentní. Pak existuje $v \in V,\ v \neq 0$ takový, že $Xv = 0$ pro všechna $X \in \mathfrak{g}$.

Důkaz. Indukcí podle $\dim \mathfrak{g}$:

- $\dim \mathfrak{g} = 1 \ \Rightarrow\ \mathfrak{g} = \mathrm{span}\{X\},\ X^n = 0 \ \Rightarrow\ 0 \in \sigma(X) \ \Rightarrow\ \exists v \in V,\ v \neq 0,\ Xv = 0,$
- $\dim \mathfrak{g} = n-1 \to n$. Uvažujme vlastní podalgebru maximální dimenze $\mathfrak{h}$ a definujme reprezentaci $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$:

$$\phi(X)(Y + \mathfrak{h}) = \mathrm{ad}_X Y + \mathfrak{h}, \qquad \forall X \in \mathfrak{h},\ Y \in \mathfrak{g}.$$

Protože všechna $X \in \mathfrak{h}$ jsou nilpotentní, jsou dle Lemmatu 7.3 též ad–nilpotentní. Proto jsou $\phi(X)$ nilpotentní a tedy $\phi(\mathfrak{h})$ splňuje předpoklady dokazovaného tvrzení a má dimenzi ostře menší než n. Dle indukčního předpokladu existuje $Z \in \mathfrak{g}$ takové, že

$$Z + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h},\ Z + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h},\ \phi(X)(Z + \mathfrak{h}) = \mathfrak{h},\ \forall X \in \mathfrak{h},$$

tj. $Z \notin \mathfrak{h},\ [X, Z] \in \mathfrak{h},\ \forall X \in \mathfrak{h}$. Tudíž $\mathrm{span}\{Z\} + \mathfrak{h}$ je podalgebra $\mathfrak{g}$, její dimenze je $\dim = \dim \mathfrak{h} + 1$ a z maximality $\mathfrak{h}$ plyne, že je rovna celé $\mathfrak{g}$.

Z indukčního předpokladu rovněž plyne existence nenulového $v \in V$ takového, že $\mathfrak{h}v = 0$. Jinými slovy $W = \bigcap_{X\in\mathfrak{h}} \ker X \neq \{0\}$. Protože $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = [\mathrm{span}\{Z\} + \mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, je $\mathfrak{h}$ je ideál. Dle Lemmatu 7.4 je W invariantní podprostor $\mathfrak{g}$. A konečně, z nilpotentnosti Z plyne, že též $Z|_W : W \to W$ je nilpotentní, což implikuje existenci $w \in W,\ w \neq 0,\ Zw = 0$. To nám již dává dokazované tvrzení pro algebru $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}w = (\mathrm{span}\, Z + \mathfrak{h})\, w = 0$.

□

Lemma 7.6. Buď $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ taková, že všechny operátory $X \in \mathfrak{g}$ jsou nilpotentní, tj. $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra nilpotentních operátorů. Pak existuje báze $\mathcal{E} = \{e_i\}$ ve V taková, že pro všechna $X \in \mathfrak{g}$ je $Xe_1 = 0$, $Xe_i \in \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$, tj. všechny matice $X_\mathcal{E}$ jsou horní trojúhelníkové matice s nulovou diagonálou. V důsledku, $\mathfrak{g}$ je nilpotentní algebra.

Důkaz. Dle Lemmatu 7.5 existuje nenulový $e_1 \in \bigcap_{X\in\mathfrak{g}} \ker X$. Položíme $V_1 = \mathrm{span}\{e_1\}$ a definujeme akci $\mathfrak{g}$ na V/V_1:

$$\phi(X)\,(v + V_1) = Xv + V_1, \qquad \forall X \in \mathfrak{g},\ \forall v \in V. \tag{7.2}$$

Podobně jako v důkazu Lemmatu 7.5 je $\phi(\mathfrak{g})$ tvořena nilpotentními operátory a tedy existuje $e_2 \in V,\ e_2 \notin V_1$ takový, že $\phi(X)\,(e_2 + V_1) = V_1$ pro každé $X \in \mathfrak{g}$. Takže máme $Xe_2 \in V_1$. Zvolíme $V_2 = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ a postup opakujeme. Indukcí získáváme **kompoziční řadu** $\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$ splňující $\dim V_i/V_{i-1} = 1,\ \mathfrak{g}V_i \subset V_{i-1}$. V bázi $\mathcal{E}$ tvořené vektory $e_i \in V_i \backslash V_{i-1}$ jsou matice operátorů $X \in \mathfrak{g}$ horní trojúhelníkové matice s nulovou diagonálou. □

Věta 7.7 (Engelova)**.** Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní právě tehdy, když každý vektor $X \in \mathfrak{g}$ je ad–nilpotentní. Každá komplexní maticová nilpotentní Lieova algebra $\mathfrak{g}$ má ve vhodné bázi tvar

$$X = \begin{pmatrix} A_1(X) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k(X) \end{pmatrix}, \text{ kde } A_i(X) = \begin{pmatrix} \lambda_i(X) & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i(X) \end{pmatrix},\ \lambda_i \in \mathfrak{g}^*.$$

Důkaz. Je-li $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} = \{\mathrm{ad}_X \mid X \in \mathfrak{g}\}$ tvořena nilpotentními operátory, pak dle Lemmatu 7.6 je $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ nilpotentní maticová algebra. Podle Důsledku 6.13 je algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentní. Opačná implikace plyne z poznámky 7.2.

Uvažujme dále komplexní maticové algebry. Libovolný komplexní vektorový prostor V lze rozložit jako součet zobecněných vlastních podprostorů vzhledem ke zvolenému operátoru $X \in \mathfrak{gl}(V)$

$$V = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(X)} \lim_{n\to+\infty} \ker(X - \lambda\mathbb{I})^n \tag{7.3}$$

(jinými slovy, podprostory $\ker(X - \lambda\mathbb{I})^n$ odpovídají Jordanovým blokům operátoru X).

Indukcí ukážeme, že platí

$$(X - \lambda\mathbb{I})^k\, Y = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\mathrm{ad}_X)^j\, Y\, (X - \lambda\mathbb{I})^{k-j}, \qquad X, Y \in \mathfrak{gl}(V). \tag{7.4}$$

Pro $k = 0$ je zřejmé, $k-1 \to k$ získáváme přímým dosazením

$$\begin{aligned}
&(X - \lambda\mathbb{I})^k\, Y = (X - \lambda\mathbb{I}) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (\mathrm{ad}_X)^j\, Y\, (X - \lambda\mathbb{I})^{k-1-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Big(X\, (\mathrm{ad}_X)^j\, Y - \lambda\, (\mathrm{ad}_X)^j\, Y \Big) (X - \lambda\mathbb{I})^{k-1-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Big((\mathrm{ad}_X)^{j+1}\, Y + (\mathrm{ad}_X)^j\, Y X - \lambda\, (\mathrm{ad}_X)^j\, Y \Big) (X - \lambda\mathbb{I})^{k-1-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Big((\mathrm{ad}_X)^{j+1}\, Y + (\mathrm{ad}_X)^j\, Y (X - \lambda\mathbb{I}) \Big) (X - \lambda\mathbb{I})^{k-1-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j} \right) (\mathrm{ad}_X)^j\, Y\, (X - \lambda\mathbb{I})^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\mathrm{ad}_X)^j\, Y\, (X - \lambda\mathbb{I})^{k-j}.
\end{aligned}$$

Nechť $\mathfrak{g}$ je nilpotentní podalgebra $\mathfrak{gl}(V)$, kde V je nad $\mathbb{C}$ a $X \in \mathfrak{g}$. Označíme

$$W_\lambda^X = \lim_{n\to+\infty} \ker(X - \lambda\mathbb{I})^n, \qquad \lambda \in \sigma(X).$$

Dle vztahu (7.4) platí pro libovolné $Y \in \mathfrak{g}$

$$(X - \lambda\mathbb{I})^k\, Y W_\lambda^X = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\mathrm{ad}_X)^j\, Y\, (X - \lambda\mathbb{I})^{k-j}\, W_\lambda^X \quad \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} (X - \lambda\mathbb{I})^k\, Y W_\lambda^X = 0,$$

protože pro dostatečně velké k je buď $(\mathrm{ad}_X)^j Y = 0$ z nilpotentnosti operátoru ad_X nebo je $(X - \lambda\mathbb{I})^{k-j} W_\lambda^X = 0$ z definice W_λ^X. Vidíme tedy, že $Y W_\lambda^X \subset W_\lambda^X$, tj. W_λ^X je invariantní podprostor. Zúžením všech operátorů z $\mathfrak{g}$ na W_λ^X dospíváme ke stejnému problému na menším vektorovém prostoru, kde postup opakujeme. Tímto opakovaným zužováním na stejným způsobem konstruované podprostory pro další $Y \in \mathfrak{g}$ po konečně mnoha krocích získáváme invariantní podprostory, na nichž všechny operátory $X \in \mathfrak{g}$ působí jako násobek jednotky plus nilpotentní operátor. Označme libovolný z těchto podprostorů W. Všechny komutátory $[X,Y]$ na takovém podprostoru W jsou nilpotentní, neboť jim odpovídající násobek jednotky $\lambda\mathbb{I}|_W$ je nulový z nulovosti stopy komutátoru operátorů $\mathrm{tr}[X|_W, Y|_W]$. Lze tudíž definovat novou operátorovou algebru na W odečtením příslušného násobku jednotky od každého z operátorů $X|_W$ (násobky jednotky nepřispívají do komutátorů, výše jsme ověřili, že nejsou přítomny v pravých stranách, tj. nová algebra je uzavřená vzhledem ke komutátorům a má stejné komutační relace jako původní $\mathfrak{g}|_W$). Tato algebra na W je tvořena nilpotentními operátory, můžeme tedy na ni aplikovat Lemma 7.6 a nalézáme maticovou podobu Engelovy věty. $\square$

Lemma 7.8. Buď V komplexní vektorový prostor a $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ řešitelná algebra operátorů. Pak existuje $v \in V,\ v \neq 0$ a $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ takové, že

$$Xv = \lambda(X)v, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}. \tag{7.5}$$

Důkaz. Indukcí dle $\dim \mathfrak{g}$. Případ $\dim \mathfrak{g} = 1$ je zřejmý.

$\dim \mathfrak{g} = k-1 \to k$. Buď $\mathfrak{g}$ řešitelná algebra, $\dim \mathfrak{g} = k$. Máme $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subsetneqq \mathfrak{g}$. Uvažujme $\mathfrak{h}$ podprostor $\mathfrak{g}$ s vlastnostmi $\mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{h}$ a $\dim \mathfrak{h} = k-1$. Takový $\mathfrak{h}$ je nutně řešitelný ideál v $\mathfrak{g}$, protože $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{h}$. Tedy $\mathfrak{h}$ splňuje indukční předpoklad a proto existuje $v_0 \in V,\ v \neq 0$ a $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ taková, že $Xv_0 = \lambda_0(X)v_0,\ \forall X \in \mathfrak{h}$. Vezmeme libovolné $Z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$, tj. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathrm{span}\{Z\}$, a definujeme $v_{j+1} = Zv_j,\ j \in \mathbb{N}_0,\ W = \mathrm{span}\{v_j\}_{j=0}^{+\infty}$. Evidentně platí $\dim W \leq \dim V < +\infty$, takže existuje $p \in \mathbb{N}_0$ takové, že $\{v_0,\ldots,v_p\}$ jsou lineárně nezávislé a $Zv_p \in \mathrm{span}\{v_0,\ldots,v_p\}$, tj. $W = \mathrm{span}\{v_j\}_{j=0}^{p}$ a $ZW \subset W$. Pro libovolné $X \in \mathfrak{h}$ platí

$$\begin{aligned}
Xv_0 &= \lambda_0(X)v_0,\\
Xv_1 &= XZv_0 = ZXv_0 + \overbrace{[X,Z]}^{\in\mathfrak{h}}v_0 = \lambda_0(X)Zv_0 + \lambda_0([X,Z])v_0\\
&= \lambda_0(X)v_1 + \lambda_0([X,Z])v_0,\\
Xv_2 &= ZXv_1 + [X,Z]v_1 = \lambda_0(X)v_2 + 2\lambda_0([X,Z])v_1 + \lambda_0([[X,Z],Z])v_0,\\
&\ \ \vdots\\
Xv_j &= \lambda_0(X)v_j + \underbrace{\cdots}_{\in\,\mathrm{span}\{v_0,\ldots,v_{j-1}\}}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že W je invariantní vzhledem k působení $\mathfrak{h}$ a platí $\mathrm{tr}\, X|_W = \dim W \cdot \lambda(X)$. Protože z konstrukce $\dim W \geq 1$, máme

$$\lambda_0([X,Z]) = \frac{1}{\dim W}\mathrm{tr}\,[X,Z]|_W = \frac{1}{\dim W}\left(\mathrm{tr}\, X|_W\, Z|_W - \mathrm{tr}\, Z|_W\, X|_W\right) = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{h}.$$

Takže pro libovolné $X \in \mathfrak{h}$ máme $Xv_1 = \lambda_0(X)v_1$, $Xv_j = \lambda(X)_0 v_j$, tj. všechny $X \in \mathfrak{h}$ jsou současně diagonální na W ve zvolené bázi, dokonce to jsou násobky jednotkového operátoru, s vlastními čísly $\lambda_0(X)$. Protože $ZW \subset W$, existuje $v \in W,\ v \neq 0$ takové, že $Zv = \tilde{\lambda}v$. Tím je učiněn indukční krok, neboť máme pro nalezený vektor v funkcionál $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ splňující (7.5) ve tvaru $\lambda(\alpha Z + X) = \alpha\tilde{\lambda} + \lambda_0(X)$, kde $X \in \mathfrak{h}$. $\square$

Věta 7.9 (Lieova)**.** Buď $\mathfrak{g}$ podalgebra $\mathfrak{gl}(V)$, kde V je komplexní vektorový prostor konečné dimenze. Potom je $\mathfrak{g}$ řešitelná právě tehdy, když je možné najít bázi vektorového prostoru V, v níž všechny operátory $X \in \mathfrak{g}$ mají současně horní trojúhelníkový tvar.

Důkaz. Jedním směrem je tvrzení jednoduché: pokud $\mathfrak{g}$ tvoří horní trojúhelníkové matice, pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná výpočtem derivované série.

Naopak, mějme řešitelnou algebru $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, V nad $\mathbb{C}$. Dle Lemmatu 7.8 existuje $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$ a $\lambda_1 \in \mathfrak{g}^*$ takové, že $Xv_1 = \lambda_1(X)v_1$ pro všechna $X \in \mathfrak{g}$. Definujme $V_1 = \mathrm{span}\{v_1\}$ a reprezentaci $\mathfrak{g}$ na V/V_1:

$$\phi(X)\,(v + V_1) = Xv + V_1, \qquad X \in \mathfrak{g},\ v \in V.$$

Jako homomorfní obraz je $\phi(\mathfrak{g})$ opět řešitelná maticová algebra, tedy dle Lemmatu 7.8 existuje $v_2 \in V$, $v_2 \notin V_1$ a $\widetilde{\lambda}_2 \in \phi(\mathfrak{g})^*$:

$$\begin{aligned}\phi(X)\,(v_2 + V_1) &= Xv_2 + V_1 \\ &= \widetilde{\lambda}_2(\phi(X))\,(v_2 + V_1) = \widetilde{\lambda}_2(\phi(X))v_2 + V_1, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

Položíme $\lambda_2 := \widetilde{\lambda}_2 \circ \phi \in \mathfrak{g}^*$ a máme $Xv_2 = \lambda_2(X)v_2 \bmod V_1$. Definujeme $V_2 = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ a pokračujeme indukcí. Získáváme bázi V ve tvaru $(v_1, v_2, \dots)$ s vlastností

$$Xv_j = \lambda_j(X)v_j \bmod V_{j-1}, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

V této bázi jsou všechny $X \in \mathfrak{g}$ horní trojúhelníkové matice. $\square$

Důsledek 7.10. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě tehdy, když její derivovaná algebra $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^{(1)}$ je nilpotentní.

Důkaz. Nejprve ukážeme pro komplexní algebry:

$\Leftarrow$: $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^2$ je abelovská, tj. řešitelná, $\mathfrak{g}^2$ je řešitelná. Tudíž $\mathfrak{g}$ je řešitelná dle věty 6.10.

$\Rightarrow$: $\mathfrak{g}$ řešitelná právě tehdy, když $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je řešitelná. Dle Lieovy věty to nastává právě tehdy, když ve vhodné bázi $\mathfrak{g}$ je $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ vyjádřena pomocí horních trojúhelníkových matic. Pak pro libovolné $X, Y \in \mathfrak{g}$ je $Z = [X, Y]$ homomorfismem ad zobrazeno na $\mathrm{ad}_Z = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]$. To je horní trojúhelníková matice s nulovou diagonálou, tj. všechna $\mathrm{ad}_Z \in \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^2}$ jsou striktně horní trojúhelníkové matice, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^2}$ je nilpotentní algebra a tedy dle poznámky 6.13 je $\mathfrak{g}^2$ nilpotentní algebra.

Pro reálnou algebru máme

$$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^k = \left(\mathfrak{g}^k\right)_{\mathbb{C}}, \qquad (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{(k)} = \left(\mathfrak{g}^{(k)}\right)_{\mathbb{C}}.$$

Proto platí $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ je řešitelná, resp. nilpotentní, právě tehdy, když $\mathfrak{g}$ je řešitelná, resp. nilpotentní. $\square$

Kapitola 8

Cartanova kritéria

Ukazuje se, že řešitelnost a poloprostotu dané Lieovy algebry je možné zjistit výpočtem přímo z vlastností Killingovy formy. Tato tvrzení, známá jako Cartanova kritéria, odvodíme v této kapitole a následně budeme zkoumat jejich důsledky pro strukturu poloprostých Lieových algeber.

Nejprve ale potřebujeme jedno spíše technické tvrzení.

Věta 8.1. Buď $\mathfrak{g}$ podalgebra $\mathfrak{gl}(V)$ a nechť pro každé $X, Y \in \mathfrak{g}$ je $\operatorname{tr}(XY) = 0$. Pak je $\mathfrak{g}$ řešitelná.

Důkaz. Větu bude dokazovat pro komplexní vektorové prostory V (pro reálné vektorové prostory řešíme komplexifikací). Ukážeme že každý $X \in \mathfrak{g}^{(1)}$ je nilpotentní. Z toho bude plynout, že je dle Engelovy věty $\mathfrak{g}^{(1)}$ nilpotentní a tedy $\mathfrak{g}$ řešitelná dle důsledku 7.10.

Pro $X \in \mathfrak{g}^{(1)}$ použijeme Jordanův rozklad:

$$X = S + N, \quad [S, N] = 0, \quad \exists k \in \mathbb{N},\ N^k = 0, \quad S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ve vhodné bázi $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1}^n$. Pro $\operatorname{ad}_X, \operatorname{ad}_S, \operatorname{ad}_N : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ a $(E_{ij})_{i,j=1}^n$ bázi $\mathfrak{gl}(V)$ máme:

$$\operatorname{ad}_X = \operatorname{ad}_S + \operatorname{ad}_N, \quad [\operatorname{ad}_S, \operatorname{ad}_N] = 0, \quad (\operatorname{ad}_N)^{2k} = 0, \quad \operatorname{ad}_S(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)\, E_{ij},$$

tj. ad_S je diagonální a $\operatorname{ad}_X = \operatorname{ad}_S + \operatorname{ad}_N$ je Jordanův rozklad. Proto existuje polynom $p \in \mathcal{P}[x]$ takový, že $\operatorname{ad}_S = p(\operatorname{ad}_X)$. Uvažujme komplexně sdruženou matici $\overline{S} = \operatorname{diag}\left(\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n\right)$ a její ad–reprezentaci $\operatorname{ad}_{\overline{S}}(E_{ij}) = \left(\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j\right) E_{ij}$. Protože existuje polynom $q \in \mathcal{P}[x]$ splňující $\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j = q(\lambda_i - \lambda_j)$, je též $\operatorname{ad}_{\overline{S}} = q(\operatorname{ad}_S)$. Definujeme-li $\widetilde{p} \in \mathcal{P}[x]$ předpisem $\widetilde{p}(x) = q(p(x))$, pak $\operatorname{ad}_{\overline{S}} = q(\operatorname{ad}_S) = \widetilde{p}(\operatorname{ad}_X)$. Protože $\operatorname{ad}_S, \operatorname{ad}_N, \operatorname{ad}_{\overline{S}}$ jsou polynomy v ad_X, zobrazují $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ a platí:

$$\begin{aligned}
[\overline{S}, N] &= \operatorname{ad}_{\overline{S}} N = \widetilde{p}(\operatorname{ad}_X) N = \widetilde{p}(0) \cdot N, \\
\left(\overline{S}N\right)^2 &= \overline{S}N\overline{S}N = \overline{S}^2 N^2 - \overline{S}\widetilde{p}(0) NN = \left(\overline{S}^2 - \widetilde{p}(0) \cdot \overline{S}\right) N^2, \\
&\ \vdots \\
\left(\overline{S}N\right)^k &= (\dots)\, N^k.
\end{aligned}$$

Protože N je nilpotentní, je nilpotentní též $\overline{S}N$. V důsledku platí následující vztah

$$\operatorname{tr}\left(\overline{S}X\right) = \operatorname{tr}\left(\overline{S}(S + N)\right) = \operatorname{tr}\left(\overline{S}S\right) + \underbrace{\operatorname{tr}\left(\overline{S}N\right)}_{=0} = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 .$$

Speciálně, pro libovolné $X \in \mathfrak{g}^{(1)}$ vyjádřené ve tvaru $X = \sum_k [A_k, B_k]$, kde $A_k, B_k \in \mathfrak{g}$, platí dle předpokladu dokazované věty

$$\operatorname{tr}\left(\overline{S}X\right) = \operatorname{tr}\left(\overline{S}\sum_k [A_k, B_k]\right) = \sum_k \operatorname{tr}\left(\overline{S}A_k B_k - \overline{S}B_k A_k\right) = \sum_k \operatorname{tr}\Big(\underbrace{\mathrm{ad}_{\overline{S}}(A_k)}_{\in\mathfrak{g}} \circ B_k\Big) = 0.$$

Proto pro vlastní čísla operátoru X platí $\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 = 0$, tj. $\lambda_j = 0,\ \forall j \in \hat{n}$ a tedy $S = 0$, $X = N$, což jsme chtěli ukázat. □

Nyní již můžeme přistoupit k formulaci a důkazu Cartanových kritérií.

Věta 8.2 (1. Cartanovo kritérium)**.** Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě tehdy, když $K(X,Y) = 0$ pro všechna $X \in \mathfrak{g}$ a $Y \in \mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}^2$.

Důkaz. Důkaz jako obvykle provedeme pro komplexní Lieovy algebry, pro reálné vyplývá ze vzájemné korespondence ideálů v derivované sérii při komplexifikaci.

⇒: Algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná, tudíž $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ je řešitelná maticová algebra a dle Lieovy věty ji ve vhodné bázi tvoří horní trojúhelníkové matice. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{(1)}} = (\mathrm{ad}_\mathfrak{g})^{(1)}$, tedy $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{(1)}}$ obsahuje horní trojúhelníkové matice s nulovou diagonálou. Proto platí

$$K(X,Y) = \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y) = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{g},\ Y \in \mathfrak{g}^{(1)}.$$

⇐: Nechť $K(X,Y) = 0$ pro všechny $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{g}^{(1)}$. Speciálně $K(X,Y) = 0$ pro libovolné $X, Y \in \mathfrak{g}^{(1)}$, tj. $\operatorname{tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y) = 0$. Dle věty 8.1 je $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{(1)}}$ řešitelná, tj. též $\mathfrak{g}^{(1)}$ je řešitelná. Zároveň $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ je evidentně abelovská, tj. řešitelná. Dle věty 6.10 je tudíž $\mathfrak{g}$ řešitelná.

□

Poznámka 8.3. Připomeňme definici ortogonálního doplňku $\mathfrak{h}^\perp = \{X \in \mathfrak{g} | K(X,Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$.

Definice 8.4. Radikál Killingovy formy je ortogonální doplněk Lieovy algebry vzhledem ke Killingově formě,

$$\operatorname{rad} K = \mathfrak{g}^\perp = \{X \in \mathfrak{g} \mid K(X,Y) = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Věta 8.5 (2. Cartanovo kritérium)**.** Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je poloprostá právě tehdy, když její Killingova forma K je nedegenerovaná, tj. $\mathfrak{g}^\perp = 0$.

Důkaz. **⇒:** Nechť K je degenerovaná, tj. $\operatorname{rad} K$ je nenulový ideál. Evidentně $K|_{\operatorname{rad} K \times \operatorname{rad} K} = 0$, takže dle 1. Cartanova kritéria $\operatorname{rad} K$ je řešitelný ideál, tj. existuje $k \in \mathbb{N}_0$ takový, že $(\operatorname{rad} K)^{(k)} \neq 0$, a $(\operatorname{rad} K)^{(k+1)} = 0$. Protože prvky derivované série ideálu $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jsou též ideály v $\mathfrak{g}$ a $\left[(\operatorname{rad} K)^{(k)}, (\operatorname{rad} K)^{(k)}\right] = 0$, je $(\operatorname{rad} K)^{(k)}$ nenulový abelovský ideál a tudíž $\mathfrak{g}$ není poloprostá.

$\Leftarrow$: Nechť $\mathfrak{g}$ není poloprostá. Což znamená, že v ní existuje nenulový abelovský ideál $\mathfrak{h}$.
Pro libovolná $X \in \mathfrak{h},\ Y, Z \in \mathfrak{g}$ platí:

$$(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y)^2 Z = \underbrace{\mathrm{ad}_X\, \underbrace{\mathrm{ad}_Y\, \underbrace{\mathrm{ad}_X\, \underbrace{\mathrm{ad}_Y Z}_{\in \mathfrak{g}}}_{\in \mathfrak{h}}}_{\in \mathfrak{h}}}_{\in [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = 0} = 0.$$

Tudíž $\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y$ je nilpotentní a tedy $K(X,Y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y) = 0$, $0 \neq \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^\perp$, tj. algebra $\mathfrak{g}$ má degenerovanou Killingovu formu.

□

Poznámka 8.6. Pro konečněrozměrné vektorové prostory je bilineární forma ω degenerovaná právě tehdy, když $\det \omega = 0$, kde ω značí v tomto případě zároveň i matici formy v libovolné zvolené bázi.

Věta 8.7. Poloprostá Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je direktním součtem prostých ideálů.

Důkaz. Buď $\mathfrak{g}$ poloprostá, ale ne prostá, tj. existuje nenulový vlastní ideál $\mathfrak{h}$. Jeho ortogonální doplněk $\mathfrak{h}^\perp$ je též ideál. Pro libovolné $X, Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp, Z \in \mathfrak{g}$ platí:

$$K\big([X,Y],Z\big) = -K\big(Y, \underbrace{[X,Z]}_{\in \mathfrak{h}\cap\mathfrak{h}^\perp}\big) = 0, \text{ tj. } [X,Y] \in \mathfrak{g}^\perp = 0.$$

Proto máme $\big(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp\big)^{(1)} = 0$, tj. $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ je abelovský ideál a z poloprostory algebry $\mathfrak{g}$ je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = 0$. Zvolíme-li (X_j) bázi $\mathfrak{h}$, můžeme definovat lineární operátor $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ předpisem:

$$A(Y) = \sum_j X_j K(X_j, Y), \qquad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Evidentně $\ker A = \mathfrak{h}^\perp$ a $A(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$, tudíž z lineární algebry (tzv. 2. věta o dimenzi) dostáváme $\dim \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{h}^\perp = \dim \mathfrak{g}$. Proto je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$. Pokud $\mathfrak{h}$ nebo $\mathfrak{h}^\perp$ (případně oba) není prostý, tak postup opakujeme, dokud nedospějeme k požadovanému rozkladu na prosté ideály. □

V důkazu jsme nikde nevyužili předpoklad, že ideál $\mathfrak{h}$ je poloprostý. Přitom jsme ukázali, že jeho Killingova forma je nedegenerovaná, neboť $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$. Máme tedy důsledek:

Důsledek 8.8. Všechny nenulové ideály v poloprosté Lieově algebře $\mathfrak{g}$ jsou též poloprosté (a jsou součtem prostých ideálů $\mathfrak{g}$).

Věta 8.9. Všechny derivace poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ jsou vnitřní.

Důkaz. Z definice derivace vyplývá, že vektorový prostor všech derivací Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je sám též Lieovou algebrou vzhledem ke komutátoru zobrazení. Označme jej $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$. Potom $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$. Pro libovolné $D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g}),\ X, Y \in \mathfrak{g}$ platí:

$$[D, \mathrm{ad}_X]\, Y = D\,([X,Y]) - [X, D(Y)] = [D(X), Y] + [X, D(Y)] - [X, D(Y)] = \mathrm{ad}_{D(X)} Y,$$

tedy $[D, \mathrm{ad}_X] = \mathrm{ad}_{D(X)}$, pro všechna $D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$, $X \in \mathfrak{g}$. Proto $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ tvoří ideál v $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ a též $(\mathrm{ad}_\mathfrak{g})^\perp$ a $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp$ jsou ideály. Protože $\mathfrak{g}$ je poloprostá, je $\mathscr{Z}(\mathfrak{g}) = \ker \mathrm{ad} = 0$ a tedy $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}$ je též poloprostá. Obdobně $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp$ jako ideál v poloprostém ideálu je poloprostý, je-li nenulový. V důsledku Killingova forma K na $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ zúžená na $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ zůstává nedegenerovaná (a je rovna Killingově formě na $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$). Podobně, je-li $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp$ nenulový, pak i jeho Killingova forma je nedegenerovaná. Proto ze vztahu $K|_{\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp \times \mathrm{ad}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp} = 0$ vidíme, že $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp = 0$. Pro libovolné $D \in \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp$, $X \in \mathfrak{g}$ máme:

$$\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \ni \mathrm{ad}_{D(X)} = [D, \mathrm{ad}_X] \in \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ad}_{D(X)} = 0, \qquad \forall D \in \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp,\ X \in \mathfrak{g}.$$

Proto pro všechna $D \in \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp$, $X \in \mathfrak{g}$ je $D(X) \in \ker \mathrm{ad} = \{0\}$, tj. $D = 0$, $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp = 0$. Zároveň z konstrukce ortogonálního doplňku jako řešení soustavy $\dim \mathfrak{g}$ homogenních lineárních rovnic pro $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ neznámých musí platit

$$\dim \mathrm{ad}_\mathfrak{g} + \dim \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp \geq \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}).$$

Tím dostáváme dokazované tvrzení $\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$. □

8.1 Cvičení

Cvičení 8.1. Spočítejte Killingovu formu Lieovy algebry $\mathfrak{af}(1)$, Heisenbergovy algebry $\mathfrak{h}(1)$ a třírozměrných řešitelných algeber ze cvičení 5.2. Ilustrujte na nich 1. Cartanovo kritérium.

Cvičení 8.2. Ukažte, že obecně radikál Killingovy formy je řešitelný ideál, ale nemusí být roven radikálu Lieovy algebry. Jaký je vztah radikálu Killingovy formu k nilradikálu?

Cvičení 8.3. Ukažte, že obecně pro libovolnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ je ortogonální doplněk derivované algebry $\left(\mathfrak{g}^{(1)}\right)^\perp = (\mathfrak{g}^2)^\perp$ řešitelný ideál. (Lze dokázat, že už je maximální, tj. je rovný radikálu algebry $\mathfrak{g}$.)

Cvičení 8.4. Určete Killingovu formu algeber $\mathfrak{su}(2)$ a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ a použijte 2. Cartanovo kritérium k důkazu jejich poloprostoty. Z čeho lze vyvodit, že obě algebry jsou dokonce prosté? Využitím signatury Killingovy formy dokažte, že se jedná o dvě různé reálné formy komplexní prosté Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Cvičení 8.5. Ukažte, že v prosté komplexní Lieově algebře jsou všechny symetrické invariantní formy násobkem Killingovy formy.

Řešení. Killingovu formu využijte k zavedení vzájemně jednoznačného zobrazení bilineárních forem a lineárních operátorů

$$\omega \leftrightarrow A_\omega : \qquad \omega(X, Y) = K(X, A_\omega Y)$$

a zkoumejte vlastnosti operátoru A_ω přiřazeného libovolné symetrické invariantní formě ω. Využijte symetrii a invariantnost ω i K a Schurovo lemma. Uvědomte si, že ideály jsou právě invariantní podprostory adjungované reprezentace. Co to implikuje pro prostou Lieovu algebru z hlediska vlastností adjungované reprezentace?

Kapitola 9

Cartanova podalgebra

Nyní budeme definovat základní pojem potřebný pro klasifikaci komplexních poloprostých Lieových algeber, tzv. Cartanovu podalgebru, a dokážeme si, že v každé komplexní Lieově algebře existuje.

Definice 9.1. **Normalizátor** podalgebry $\mathfrak{h}$ v $\mathfrak{g}$ je $\mathrm{Norm}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} | [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$.

Poznámka 9.2. Evidentně $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Norm}(\mathfrak{h})$ a pro $\mathfrak{h}$ ideál $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Norm}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$.

Definice 9.3. **Cartanova podalgebra** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je libovolná nilpotentní podalgebra $\mathfrak{g}_0$, která je rovna svému normalizátoru.

Poznámka 9.4. Cartanova podalgebra je pro algebry nad $\mathbb{C}$ určena jednoznačně až na automorfismus algebry $\mathfrak{g}$. Nad $\mathbb{R}$ to obecně neplatí.

Definice 9.5. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra a $X \in \mathfrak{g}$. Definujeme **zobecněné vlastní podprostory** operátoru ad_X, tj. podprostory odpovídající Jordanovým blokům

$$\mathfrak{g}_\lambda(X) = \lim_{k \to +\infty} \ker(\mathrm{ad}_X - \lambda \mathbb{I})^k.$$

Pokud $\lambda \notin \sigma(\mathrm{ad}_X)$, plyne z definice $\mathfrak{g}_\lambda(X) = 0$. Limita v definici 9.5 je formální, od jistého $k \leq \dim \mathfrak{g}$ se $\ker(\mathrm{ad}_X - \lambda \mathbb{I})^k$ již nemění.

Poznámka 9.6. Pro libovolný $X \in \mathfrak{g}$ je

- $\mathfrak{g} = \dot{+}_{\lambda \in \sigma(\mathrm{ad}_X)}\, \mathfrak{g}_\lambda(X)$,
- $\dim \mathfrak{g}_0(X) \geq 1$, protože $\mathrm{ad}_X X = [X, X] = 0$ a tedy $X \in \mathfrak{g}_0(X)$,
- $\dim \mathfrak{g}_0(X)$ se nazývá **nulita** prvku X.

Definice 9.7. $X \in \mathfrak{g}$ je **regulární** právě tehdy, když $\dim \mathfrak{g}_0(X) = \min_{Y \in \mathfrak{g}} \dim \mathfrak{g}_0(Y)$, tj. nulita X je nejmenší možná.

Poznámka 9.8. Skoro všechny prvky $X \in \mathfrak{g}$ jsou regulární, ve smyslu: je-li $(e_j)_{j=1}^n$ báze $\mathfrak{g}$ a $X = \alpha^j e_j$, potom $\mu(\{\{\alpha^j\}_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n | X \text{ není regulární}\}) = 0$, kde μ je Lebesgueova míra na $\mathbb{C}^n$.

Lemma 9.9. Pro libovolná $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ platí

$$(\mathrm{ad}_X - (\lambda + \mu)\mathbb{I})^k [Y, Z] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda \mathbb{I})^j Y, (\mathrm{ad}_X - \mu \mathbb{I})^{k-j} Z \right].$$

Důkaz. Indukcí: $k = 1$:

$$(\mathrm{ad}_X - (\lambda+\mu)\mathbb{I})\,[Y,Z] = [(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{I})\,Y, Z] + [Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{I})\,Z]\,.$$

$k-1 \to k$:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{ad}_X - (\lambda+\mu)\mathbb{I})^k\,[Y,Z] = \\
&= (\mathrm{ad}_X - (\lambda+\mu)\mathbb{I}) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Big[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{I})^j\,Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{I})^{k-1-j}\,Z\Big] = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Big[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{I})^{j+1}\,Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{I})^{k-1-j}\,Z\Big] + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Big[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{I})^j\,Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{I})^{k-j}\,Z\Big] = \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j}\right) \Big[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{I})^j\,Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{I})^{k-j}\,Z\Big] = \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Big[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{I})^j\,Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{I})^{k-j}\,Z\Big]\,.
\end{aligned}$$

□

Důsledek 9.10. Pro každý $X \in \mathfrak{g}$ platí $[\mathfrak{g}_\lambda(X), \mathfrak{g}_\mu(X)] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}(X)$.

Lemma 9.11. Buď X regulární prvek algebry $\mathfrak{g}$. Pak $\mathfrak{g}_0(X)$ je nilpotentní podalgebra $\mathfrak{g}$.

Důkaz. Z důsledku 9.10 víme, že $[\mathfrak{g}_0(X), \mathfrak{g}_0(X)] \subset \mathfrak{g}_0(X)$, tj. $\mathfrak{g}_0(X)$ je podalgebra v $\mathfrak{g}$. Z definice zobecněných vlastních podprostorů plyne, že $\mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ je nilpotentní a pro libovolné $\lambda \in \sigma(\mathrm{ad}_X)$, $\lambda \neq 0$ je $\mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{g}_\lambda(X)}$ je regulární zobrazení. Vezmeme libovolné $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$ a spojíme ho úsečkou $Y(t) = tY + (1-t)X \subset \mathfrak{g}_0(X)$ s X. Protože $[\mathfrak{g}_0(X), \mathfrak{g}_\lambda(X)] \subset \mathfrak{g}_\lambda(X)$, platí pro každé $t \in \langle 0,1\rangle$ vztah $\mathrm{ad}_{Y(t)}\mathfrak{g}_\lambda(X) \subset \mathfrak{g}_\lambda(X)$. Když dosadíme $t = 0$, máme $\mathrm{ad}_{Y(0)}|_{\mathfrak{g}_\lambda(X)} = \mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{g}_\lambda(X)}$ regulární operátor. Protože determinant operátoru závisí na parametrech spojitě a počet podprostorů $\mathfrak{g}_\lambda(X)$ je konečný, musí existovat $\varepsilon > 0$ takové, že pro všechna $\lambda \in \sigma(\mathrm{ad}_X)$, $\lambda \neq 0$ a pro všechna t, $0 \leq t < \varepsilon$ je $\mathrm{ad}_{Y(t)}|_{\mathfrak{g}_\lambda(X)}$ regulární.

Tudíž musí platit $\mathfrak{g}_0(Y(t)) \subset \mathfrak{g}_0(X)$ pro všechna t, $0 \leq t < \varepsilon$ (neboť máme rozklad na invariantní podprostory a na všech ostatních prostorech je zobrazení regulární). Ale díky minimalitě nulity vektoru X musí být $\mathfrak{g}_0(Y(t)) = \mathfrak{g}_0(X)$, $\forall t \in \langle 0, \varepsilon)$, tj. pro dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$

$$\ker\left(\mathrm{ad}_{Y(t)}|_{\mathfrak{g}_0(X)}\right)^k = \ker\left(t\,\mathrm{ad}_Y + (1-t)\mathrm{ad}_X\right)^k = \mathfrak{g}_0(X), \qquad \forall t \in \langle 0, \varepsilon).$$

Operátor $\left(\mathrm{ad}_{Y(t)}|_{\mathfrak{g}_0(X)}\right)^k$ je polynom v t s hodnotami v maticích, nulový na neprázdném otevřeném intervalu $(0,\varepsilon)$. Tudíž je to nulový polynom pro všechna t, tj. $\left(\mathrm{ad}_Y|_{\mathfrak{g}_0(X)}\right)^k = \left(\mathrm{ad}_{Y(1)}|_{\mathfrak{g}_0(X)}\right)^k = 0$. Jinými slovy, pro všechny vektory $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$ jsou $\mathrm{ad}_Y|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ nilpotentní, tj. dle Engelovy věty je podalgebra $\mathfrak{g}_0(X)$ nilpotentní. □

Důsledek 9.12. Buď X regulární prvek, pak $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0(X)}\big|_{\mathfrak{g}}$ je reprezentace nilpotentní algebry $\mathfrak{g}_0(X)$ na vektorovém prostoru $\mathfrak{g}$, tj. komplexní maticová nilpotentní algebra. Z maticové verze Engelovy věty víme, že existuje báze $\mathfrak{g}$ a funkcionály $\{\lambda_j\} \subset (\mathfrak{g}_0(X))^*$ takové, že pro všechny $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$ máme blokově diagonální tvar ad_Y

$$\mathrm{ad}_Y = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & ? & ? \\ \vdots & \ddots & ? \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} \lambda_1(Y) & ? & ? & ? \\ 0 & \ddots & ? & ? \\ \vdots & & \ddots & ? \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_1(Y) \end{matrix} & & \\ & & \begin{matrix} \lambda_2(Y) & ? & ? & ? \\ 0 & \ddots & ? & ? \\ \vdots & & \ddots & ? \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_2(Y) \end{matrix} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

Věta 9.13. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra a $X \in \mathfrak{g}$ její regulární vektor. Potom $\mathfrak{g}_0(X)$ je Cartanova podalgebra $\mathfrak{g}$.

Důkaz. X je regulární, tj. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \dot{+} \left(\dot{+}_{\lambda\in\sigma(X)}\mathfrak{g}_\lambda(X)\right)$, kde $\mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{g}_0(X)$ je nilpotentní. Pokud $\lambda \in \sigma(\mathrm{ad}_X)$, $\lambda \neq 0$ a $Z_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$, pak platí

$$[X, Z_\lambda] = \lambda Z_\lambda + \underbrace{\dots}_{\text{LN na } Z_\lambda} \in \mathfrak{g}_\lambda(X), \tag{9.2}$$

Pro libovolné $Z \in \mathrm{Norm}(\mathfrak{g}_0)$ zkonstruujeme jeho rozklad $Z = \sum_{\lambda\in\sigma(\mathrm{ad}_X)} Z_\lambda$, $Z_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda(X)$. Dle rovnice (9.2) platí

$$[X, Z] \in \mathfrak{g}_0 \quad \Rightarrow \quad Z_\lambda = 0, \quad \forall\lambda \neq 0,$$

tj. $Z = Z_0 \in \mathfrak{g}_0$. Vidíme, že $\mathfrak{g}_0$ se rovná svému normalizátoru, tedy $\mathfrak{g}_0$ je Cartanova podalgebra $\mathfrak{g}$. □

Poznámka 9.14. Naopak, máme-li Cartanovu podalgebru $\mathfrak{g}_0$ komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ zadanou, pak její reprezentace $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}|_{\mathfrak{g}}$ na $\mathfrak{g}$ má dle Engelovy věty tvar (9.1). Libovolný vektor $X \in \mathfrak{g}_0$ takový, že $\lambda(X) \neq 0$ pro všechny funkcionály λ z rozkladu (9.1), je regulární a definuje stejnou Cartanovu podalgebru předpisem $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(X)$, tj. všechny Cartanovy podalgebry mají tvar $\mathfrak{g}_0(X)$ pro nějaké X.

Definice 9.15. Nenulové $\lambda_j \in \mathfrak{g}_0^*$ z rozkladu (9.1) se nazývají **kořeny** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Množinu všech kořenů Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ značíme Δ.

Kořeny evidentně závisí na výběru Cartanovy podalgebry $\mathfrak{g}_0$, ač se to v používané terminologii zvlášť nezdůrazňuje.

Definice 9.16. Podprostor $\mathfrak{g}_\lambda$ příslušející kořenu λ se nazývá **kořenový podprostor**. Vektor $Y_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$ se nazývá **kořenový vektor**.

Vektory z Cartanovy podalgebry většinou pro zjevné odlišení od obecných vektorů z $\mathfrak{g}$ značíme písmenem H.

Lemma 9.17. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(X)$ její Cartanova podalgebra definovaná pomocí regulárního prvku X. Pak pro všechna $H \in \mathfrak{g}_0$, $\lambda \in \Delta$ a $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$ platí

$$K(H, Y) = 0.$$

Důkaz. Pro každé $\mu \in \Delta \cup \{0\}$ máme $\mathrm{ad}_H : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_\mu$, $\mathrm{ad}_Y : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$. Proto $(\mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_Y)^k : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_{\mu+k\lambda}$. Vždy najdeme dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu + k\lambda$ není ani kořen ani 0, tedy $\mathfrak{g}_{\mu+k\lambda} = \{0\}$. Vidíme, že $\mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_Y$ musí být nilpotentní. Proto platí $K(H, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_Y) = 0$, tj. $\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\lambda$, $\forall \lambda \in \Delta$. □

Lemma 9.18. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $H \in \mathfrak{g}_0$. Pak platí implikace

$$\lambda(H) = 0, \forall \lambda \in \Delta \quad \Rightarrow \quad H = 0.$$

Jinak vyjádřeno, $\mathrm{span}\, \Delta = \mathfrak{g}_0^*$.

Důkaz. Je-li $\lambda(H) = 0$, $\forall \lambda \in \Delta$, pak $\mathrm{ad}_H\big|_{\mathfrak{g}}$ je ve vyjádření (9.1) horní trojúhelníková matice s nulovou diagonálou. Proto pro každé $\widetilde{H} \in \mathfrak{g}_0$ platí $K(H, \widetilde{H}) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_{\widetilde{H}}\right) = 0$, tj. $H \in \mathfrak{g}_0^\perp$. Současně dle lemmatu 9.17 je $H \in \mathfrak{g}_\lambda^\perp$ pro $\lambda \in \Delta$. Tudíž $H \in \mathfrak{g}^\perp$, tj. $H = 0$ díky nedegenerovanosti Killingovy formy poloprosté algebry $\mathfrak{g}$. □

Věta 9.19 (Alternativní definice Cartanovy podalgebry poloprosté komplexní Lieovy algebry)**.** Podalgebra $\mathfrak{g}_0$ komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je Cartanovou podalgebrou algebry $\mathfrak{g}$ právě tehdy, když je maximální abelovskou podalgebrou takovou, že ad_H je poloprostý operátor pro všechny vektory $H \in \mathfrak{g}_0$.

Důkaz. Abelovská podalgebra $\mathfrak{g}_0$ je evidentně nilpotentní, všechny ad_H pro $H \in \mathfrak{g}_0$ mezi sebou komutují a jsou diagonalizovatelné, tudíž ve vhodné bázi jsou současně diagonální. Je-li $X \in \mathrm{Norm}(\mathfrak{g}_0)$, pak $\mathrm{ad}_H(X) \in \mathfrak{g}_0$, což vzhledem k diagonalitě matic ad_H znamená $\mathrm{ad}_H(X) = 0$, tj. $X \in \cap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker \mathrm{ad}_H$. Maximalita $\mathfrak{g}_0$ pak implikuje $\cap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker \mathrm{ad}_H = \mathfrak{g}_0$, tj. $\mathrm{Norm}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$.

Naopak, mějme Cartanovu podalgebru $\mathfrak{g}_0$ a rozklad algebry $\mathfrak{g}$ do kořenových podprostorů $\mathfrak{g} = \dot{+}_{\lambda \in \Delta \cup \{0\}} \mathfrak{g}_\lambda$. Platí

$$\begin{aligned}
&K([H_1, H_2], X) = 0, && \forall H_1, H_2 \in \mathfrak{g}_0,\ X \in \mathfrak{g}_\lambda,\ \lambda \in \Delta,\\
&K([H_1, H_2], H_3) = \mathrm{tr}\Big(\underbrace{[\mathrm{ad}_{H_1}, \mathrm{ad}_{H_2}]}_{\text{ostře hor. trojúh.}} \mathrm{ad}_{H_3}\Big) = 0, && \forall H_1, H_2, H_3 \in \mathfrak{g}_0.
\end{aligned}$$

Tudíž pro libovolná $H_1, H_2 \in \mathfrak{g}_0$ je $[H_1, H_2] \in \mathfrak{g}^\perp = \{0\}$, tj. $\mathfrak{g}_0$ je abelovská. Je též maximální, protože $\mathrm{Norm}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$. Dále platí:

$$\mathrm{ad}_H\big|_{\mathfrak{g}_\lambda} = \lambda(H)\mathbb{I} + \underbrace{\ldots}_{\text{nad diag.}} \qquad \forall H \in \mathfrak{g}_0,\ \lambda \in \Delta,$$

Tudíž v Jordanově rozkladu $\mathrm{ad}_H = S + N$, kde S je poloprostý a N nilpotentní, je $S\big|_{\mathfrak{g}_\lambda} = \lambda(H)\mathbb{I}$ pro $\lambda \in \Delta \cup \{0\}$. Takže pro všechna $X \in \mathfrak{g}_\lambda$, $Y \in \mathfrak{g}_\mu$, kde $\lambda, \mu \in \Delta \cup \{0\}$, máme:

$$S[X, Y] = (\lambda(H) + \mu(H))\,[X, Y] = [\lambda(H)X, Y] + [X, \mu(H)Y] = [SX, Y] + [X, SY].$$

Proto $S \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ a díky poloprostotě $\mathfrak{g}$ existuje $W \in \mathfrak{g}$ takové, že $S = \mathrm{ad}_W$ a $p \in \mathcal{P}[x]$ takové, že $S = \mathrm{ad}_W = p(\mathrm{ad}_H)$. Protože $\mathfrak{g}_0$ je abelovská, máme

$$[\mathrm{ad}_W, \mathrm{ad}_{H_1}] = [p(\mathrm{ad}_H), \mathrm{ad}_{H_1}] = 0, \qquad \forall H_1 \in \mathfrak{g}_0$$

díky $[\mathrm{ad}_H, \mathrm{ad}_{H_1}] = 0$. Současně $\mathfrak{g}$ je poloprostá a tedy $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \ker \mathrm{ad} = 0$, což implikuje $[W, \mathfrak{g}_0] = 0$. Z maximality pak dostáváme $W \in \mathfrak{g}_0$. Celkem tedy vidíme, že

$$N = \mathrm{ad}_H - S = \mathrm{ad}_H - \mathrm{ad}_W = \mathrm{ad}\,\underbrace{_{H-W}}_{\in\mathfrak{g}_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma(\mathrm{ad}_{H-W}) = \{0\}.$$

Proto vektor $H-W \in \mathfrak{g}_0$ splňuje $\lambda(H-W) = 0$ pro všechna $\lambda \in \Delta$, tudíž dle lemmatu 9.18 platí $H - W = 0$ a tedy $\mathrm{ad}_H = S$. $\square$

Shrnutí pro komplexní poloprosté Lieovy algebry

Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, $\Delta = \{\lambda\} \subset \mathfrak{g}_0^*$ odpovídající systém kořenů. Pak máme rozklad na kořenové podprostory $\mathfrak{g}_\lambda$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \dotplus \left(\dotplus_{\lambda\in\Delta}\mathfrak{g}_\lambda\right),$$

které splňují

- $\lambda \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \neq 0 \quad \wedge \quad \mathfrak{g}_\lambda = \bigcap_{H\in\mathfrak{g}_0} \ker(\mathrm{ad}_H - \lambda(H)\mathbb{I}) \neq 0$,
- $[H_1, H_2] = 0$ pro všechna $H_1, H_2 \in \mathfrak{g}_0$,
- $\mathrm{ad}_H : \mathfrak{g}_\lambda \to \mathfrak{g}_\lambda$ je násobek jednotkového operátoru $\mathrm{ad}_H = \lambda(H) \cdot \mathbb{I}|_{\mathfrak{g}_\lambda}$ pro všechna $H \in \mathfrak{g}_0$, $\lambda \in \Delta$,
- $\mathrm{ad}_{X_\lambda} : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$, tj. ad_{X_λ} je nilpotentní pro všechny $\lambda \in \Delta$, $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$,
- $\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\lambda$ pro všechna $\lambda \in \Delta$, kde kolmost chápeme vzhledem ke Killingově formě.

Nadále se budeme zabývat pouze **komplexními poloprostými** algebrami.

Lemma 9.20. $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$ pro všechny $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$, $\alpha + \beta \neq 0$.

Důkaz. Díky invariantnosti Killingovy formy pro libovolné $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $H \in \mathfrak{g}_0$ platí

$$(\alpha+\beta)(H)K(X_\alpha, X_\beta) = (\alpha(H) + \beta(H))\,K(X_\alpha, X_\beta) = K([H, X_\alpha], X_\beta) + K(X_\alpha, [H, X_\beta]) = 0$$

Protože $\alpha+\beta \neq 0$, existuje $H \in \mathfrak{g}_0$ takové, že $(\alpha+\beta)(H) \neq 0$ a tudíž $K(X_\alpha, X_\beta) = 0$. $\square$

Lemma 9.21. $K|_{\mathfrak{g}_0} \equiv K|_{\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{g}_0}$ je nedegenerovaná. Pro každý kořen $\lambda \in \Delta$ existuje jednoznačně určené $H_\lambda \in \mathfrak{g}_0$ takové, že pro všechna $H \in \mathfrak{g}_0$ je $\lambda(H) = K(H, H_\lambda)$.

Důkaz. Killingova forma K je na $\mathfrak{g}$ nedegenerovaná, tedy ke každému nenulovému $H \in \mathfrak{g}_0$ existuje $X \in \mathfrak{g}$ takové, že $K(H, X) \neq 0$. Zároveň $\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\lambda$ pro $\lambda \in \Delta$, takže bez újmy na obecnosti lze takové X volit z $\mathfrak{g}_0$. Tudíž K je nedegenerovaná na $\mathfrak{g}_0$ a přiřazení $H \to K(\cdot, H)$ je izomorfismus vektorových prostorů $\mathfrak{g}_0$ a $\mathfrak{g}_0^*$, tj. ke každému $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ existuje právě jedno H_λ takové, že $\lambda(\cdot) = K(\cdot, H_\lambda)$. □

Lemma 9.22. Buď $\alpha \in \Delta$. Potom $-\alpha \in \Delta$ a pro všechna $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ je

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = K(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha.$$

Důkaz. $\alpha \in \Delta$ implikuje $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$. Z lemmatu 9.20 plyne, že pro všechna $\mu \in \Delta \cup \{0\} \setminus \{-\alpha\}$ je $\mathfrak{g}_\mu \perp \mathfrak{g}_\alpha$. Kdyby platilo $-\alpha \notin \Delta$, tj. $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \{0\}$, bylo by $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}$, tj. $\mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$, což je spor. Proto $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq \{0\}$. Pro všechna $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ a $H \in \mathfrak{g}_0$ platí:

$$\begin{aligned} K\big([X_\alpha, X_{-\alpha}] - K(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha, H\big) &= K\big([X_\alpha, X_{-\alpha}], H\big) - K(X_\alpha, X_{-\alpha})\underbrace{K(H_\alpha, H)}_{\alpha(H)} = \\ &= -K\big(X_\alpha, \underbrace{[H, X_{-\alpha}]}_{-\alpha(H)X_{-\alpha}}\big) - K(X_\alpha, X_{-\alpha})\alpha(H) = \big(\alpha(H) - \alpha(H)\big)K(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 0 \end{aligned}$$

Z nedegenerovanosti $K|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0}$ plyne $[X_\alpha, X_{-\alpha}] - K(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha = 0$. □

Lemma 9.23. Pro libovolné $\alpha \in \Delta$ platí $\alpha(H_\alpha) = K(H_\alpha, H_\alpha) \neq 0$.

Důkaz. Protože $\mathfrak{g}_{-\alpha} \perp \mathfrak{g}_\beta$ pro $\beta \in (\Delta \cup \{0\}) \setminus \{\alpha\}$ a $\mathfrak{g}_{-\alpha} \not\perp \mathfrak{g}$, musí existovat $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ takové, že $K(X_{-\alpha}, X_\alpha) = 1$, tj. dle předchozího lemmatu $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. Uvažujme $\beta \in \Delta$ a $\mathfrak{g}_{\beta\alpha} = \dot{+}_{k \in \mathbb{Z}}\, \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}$. Pak operátory ad_{X_α}, $\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}$, ad_{H_α} ponechávají podprostor $\mathfrak{g}_{\beta\alpha}$ invariantní a platí

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}|_{\mathfrak{g}_{\beta\alpha}} \mathrm{ad}_{H_\alpha} &= \mathrm{tr}|_{\mathfrak{g}_{\beta\alpha}} \big[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\big] = 0 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\beta + k\alpha)(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} = \beta(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{\beta\alpha} + \alpha(H_\alpha) \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \dim \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}, \end{aligned}$$

tj.

$$\beta(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{\beta\alpha} = -\alpha(H_\alpha) \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \dim \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}.$$

Evidentně $\dim \mathfrak{g}_{\beta\alpha} \geq \dim \mathfrak{g}_\beta \geq 1$ a $\dim \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} \geq 0$ pro $k \neq 0$. Pokud by platilo $\alpha(H_\alpha) = 0$, pak by pro všechna $\beta \in \Delta$ muselo též platit $\beta(H_\alpha) = 0$ a tedy z nedegenerovanosti by nutně bylo $H_\alpha = 0$, což je spor s předpokladem $\alpha \in \Delta$. □

Definice 9.24. Pro daný kořen $\alpha \in \Delta$ definujeme

$$T_\alpha = \frac{2}{K(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha, \qquad a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = \frac{2K(H_\beta, H_\alpha)}{K(H_\alpha, H_\alpha)}. \tag{9.3}$$

Pro daný kořen $\alpha \in \Delta$ zvolme $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ splňující $K(X_\alpha, X_{-\alpha}) = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)}$. Pak platí

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_{-\alpha}] &= K(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha = T_\alpha, \\ [T_\alpha, X_{\pm\alpha}] &= \pm 2 X_{\pm\alpha}, \end{aligned} \tag{9.4}$$

což jsou komutační relace Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ v bázi tvořené maticemi $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $X_+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $X_- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Věta 9.25 (Konečněrozměrné ireducibilní reprezentace algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$)**.** Buď V komplexní vektorový prostor konečné dimenze. Nechť lineární operátory $T, X_\pm$ na V splňují komutační relace (9.4), tj.

$$[X_+, X_-] = T, \qquad [T, X_\pm] = \pm 2X_\pm$$

a působí na V ireducibilně. Potom existuje báze $\mathcal{E} = (v_j)_{j=0}^{\dim V-1}$ splňující

$$Tv_j = (r-2j)v_j, \qquad X_-v_j = v_{j+1}, \qquad X_+v_j = j(r-j+1)v_{j-1},$$

kde $r = \dim V - 1$.

Důkaz. Operátor $T \in \mathcal{L}(V)$ má alespoň jeden vlastní vektor $v \in V$, $v \neq 0$ a jemu příslušné vlastní číslo $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{C}$, $Tv = \widetilde{\lambda}v$. Z komutačních relací platí

$$T(X_+v) = [T, X_+]v + X_+Tv = 2X_+v + \widetilde{\lambda}X_+v = (\widetilde{\lambda}+2)X_+v,$$

takže buď $X_+v = 0$ nebo $\widetilde{\lambda}+2 \in \sigma(T)$. Po konečně mnoha krocích získáme $v_0 \in V$, $v_0 \neq 0$ takové, že $Tv_0 = \lambda v_0$ a $X_+v_0 = 0$. Položíme $v_j = X_-^j v_0$, kde $j \in \mathbb{N}$. Indukcí zjišťujeme, že

$$\begin{aligned} Tv_j &= [T, X_-]X_-^{j-1}v_0 + X_-(TX_-^{j-1}v_0) = -2X_-X_-^{j-1}v_0 + X_-TX_-^{j-1}v_0 = \dots \\ &= (\lambda-2j)X_-^j v_0 = (\lambda-2j)v_j. \end{aligned}$$

Vidíme, že pokud $v_j \neq 0$, pak jsou to vlastní vektory operátoru T příslušné různým vlastním číslům $(\lambda-2j)$, tj. lineárně nezávislé. Díky konečnosti dimenze vektorového prostoru V existuje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že $v_k \neq 0$, $v_{k+1} = 0$. Podprostor $\operatorname{span}\{v_0, \dots, v_k\}$ je z konstrukce uzavřený vůči působení T, X_-. Indukcí ukážeme že $X_+v_j = j(\lambda-j+1)v_{j-1}$:

$$\begin{aligned} X_+v_1 &= X_+X_-v_0 = [X_+, X_-]v_0 + X_-X_+v_0 = Tv_0 = \lambda v_0, \\ X_+v_2 &= X_+X_-v_1 = Tv_1 + X_-X_+v_1 = (\lambda-2)v_1 + \lambda v_1 = 2(\lambda-1)v_1, \\ &\vdots \\ X_+v_j &= X_+X_-v_{j-1} = Tv_{j-1} + X_-(j-1)(\lambda-j+2)v_{j-2} = \\ &= \big((\lambda-2j+2) + (j-1)(\lambda-j+2)\big)v_{j-1} = j(\lambda-j+1)v_{j-1}. \end{aligned}$$

Podprostor $\operatorname{span}\{v_0, \dots, v_k\}$ je tedy uzavřený i vůči X_+, tj. je to invariantní podprostor ireducibilní reprezentace. Proto platí $V = \operatorname{span}\{v_0, \dots, v_k\}$ a $k = r$. Současně máme $0 = X_+v_{r+1} = (r+1)(\lambda-r)v_r$, přičemž $v_r \neq 0$. Proto musí platit $\lambda = r$. $\square$

Kapitola 10

Weylova-Chevalley normální forma poloprosté algebry, kořenové diagramy

Ukazuje se, že struktura kořenového systému dané poloprosté komplexní Lieovy algebry je natolik omezující, že v každé takové algebře můžeme najít význačnou bázi, v níž mají Lieovy závorky velmi speciální tvar. Vyjádření algebry v této bázi nazýváme Weylova-Chevalley normální forma dané poloprosté Lieovy algebry.

Dále se ukazuje, že kořeny poloprosté komplexní algebry definují svým lineárním obalem reálný podprostor ve vhodném Eukleidově prostoru, tj. lze analyzovat jejich strukturu metodami elementární geometrie (úhly, délky apod.).

10.1 Weylova-Chevalley normální forma poloprosté algebry

Lemma 10.1. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ příslušná množina kořenů. Pak platí

- Pro každou dvojici $\alpha, \beta \in \Delta$ existují $p, q \in \mathbb{Z}, p \leq 0 \leq q$, taková, že $\{\beta + k\alpha\}_{k=p}^{q}$ je nepřerušená posloupnost kořenů, případně obsahující 0. Žádné jiné kořeny tvaru $\beta + k\alpha$ neexistují a platí
$$a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = 2\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = 2\frac{K(H_\beta, H_\alpha)}{K(H_\alpha, H_\alpha)} = -(p+q) \in \mathbb{Z}. \tag{10.1}$$

- Nechť $\alpha \in \Delta$. Potom $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ a jediné násobky α, které jsou kořeny, jsou $\beta = \pm\alpha$.

- Buď $\alpha, \beta \in \Delta$ takové, že $\alpha + \beta \neq 0$. Potom $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. (Pokud $\alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}$, je z definice $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \{0\}$.)

- Buď $\alpha, \beta \in \Delta$, $a_{\beta\alpha} \neq 0$, $\epsilon = \operatorname{sgn} a_{\beta\alpha}$. Potom $\beta - \epsilon\alpha$, $\beta - 2\epsilon\alpha, \ldots, \beta - a_{\beta\alpha}\alpha$ jsou kořeny.

Důkaz. Uvažujme $\alpha, \beta \in \Delta$ a odpovídající kořenové vektory $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta,\ X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takové, že platí $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = T_\alpha,\ [T_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2X_{\pm\alpha}$. Označme
$$V = \operatorname{span}\left\{ (\operatorname{ad}_{X_\alpha})^j \left(\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta \ \mid\ j, k \in \mathbb{Z}_+^0 \right\} \subset \mathfrak{g}_{\beta\alpha} = \dot{+}_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}.$$

Protože platí $\mathrm{ad}_{T_\alpha} X_\beta = \beta(T_\alpha) X_\beta$, máme

$$\mathrm{ad}_{T_\alpha} \left(\mathrm{ad}_{X_\alpha}\right)^j \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta = \left(\beta(T_\alpha) + 2j - 2k\right) \left(\mathrm{ad}_{X_\alpha}\right)^j \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta.$$

Vidíme, že podprostor V je uzavřený vůči působení ad_{T_α} a $\mathrm{ad}_{X_{\pm\alpha}}$. Z důkazu věty 9.25 vidíme, že se jedná o ireducibilní reprezentaci $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ na V a že pro každé získané vlastní číslo $\beta(T_\alpha) + 2j - 2k$ operátoru ad_{T_α} na V máme jediný vlastní vektor až na násobek. Dle věty 9.25 platí $r = \dim V - 1$, $\sigma\left(\mathrm{ad}_{T_\alpha}|_V\right) = \{r, r-2, \dots, -r\}$, tj. platí

$$\begin{aligned} &\{\beta(T_\alpha) + 2k\}_{k=p}^{q} = \{r, r-2, \dots, -r\}, \\ &\left.\begin{aligned} \beta(T_\alpha) + 2q &= r \\ \beta(T_\alpha) + 2p &= -r \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \beta(T_\alpha) = -(p+q) \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Dále označme $\widetilde{V} = \mathrm{span}\{X_{-\alpha}\} \dot{+} \dot{+}_{k\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{g}_{k\alpha}$, takže $\widetilde{V}$ je invariantní vzhledem k ad_{X_α}, ad_{T_α} a $\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}$. Proto má smysl rovnost $\mathrm{ad}_{T_\alpha}|_{\widetilde{V}} = \left[\mathrm{ad}_{X_\alpha}|_{\widetilde{V}}, \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}|_{\widetilde{V}}}\right]$, z níž plyne

$$0 = \mathrm{tr}|_{\widetilde{V}} \left[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right] = \mathrm{tr}|_{\widetilde{V}}\, \mathrm{ad}_{T_\alpha} = -\underbrace{\alpha(T_\alpha)}_{=2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} k\, \underbrace{\alpha(T_\alpha)}_{=2} \dim \mathfrak{g}_{k\alpha}.$$

Tudíž $\sum_{k\in\mathbb{N}} k \dim \mathfrak{g}_{k\alpha} = 1$, tj. $\mathfrak{g}_\alpha = 1$, $\mathfrak{g}_{k\alpha} = 0$, $\forall k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. V důsledku $k\alpha \notin \Delta$, $\forall k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Použitím $\frac{\alpha}{k}$ místo α obdobně dostáváme, že $\frac{\alpha}{k} \notin \Delta$, $\forall k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Nechť $\beta = c\alpha$, $c \notin \mathbb{Z}$. Máme

$$\beta(T_\alpha) = c\alpha(T_\alpha) = 2c = b \in \mathbb{Z}$$

ze vztahu (10.2). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $c > 0$ (jinak $\alpha \to -\alpha$), pak

$$c = \frac{b}{2},\ b \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \{\beta + k\alpha\}_{k=p}^{q} = \left\{\left(\frac{b}{2} + k\right)\alpha\right\}_{k=p}^{q} \in \Delta.$$

Zároveň ale platí $b = -(p+q)$, $p \leq 0 \leq q$, z čehož plyne $-\frac{b}{2} + \frac{1}{2} \geq -b \geq p$, takže

$$\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{b}{2} + \underbrace{\left(-\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{\geq p}\right)\alpha \in \Delta$$

což je spor s tím, že $\frac{\alpha}{2} \notin \Delta$. Tím je dokázáno druhé tvrzení. Zbylou část prvního dokážeme sporem: nechť existuje $\widetilde{\beta} = \beta + n\alpha$, $n < p$ nebo $n > q$. Zkonstruujeme nepřerušenou posloupnost kořenů z $\widetilde{\beta} \in \Delta$ a vyjádříme ji ve tvaru $\{\beta + k\alpha\}_{k=\widetilde{p}}^{\widetilde{q}}$. Díky tomu, že $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ pro libovolné $\alpha \in \Delta$, musí být $\{p, \dots, q\} \cap \{\widetilde{p}, \dots, \widetilde{q}\} = \emptyset$ a tedy $\widetilde{p} > q$ nebo $\widetilde{q} < p$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\widetilde{q} < p$. Současně musí platit $a_{\beta\alpha} = -(\widetilde{p} + \widetilde{q})$, takže

$$\widetilde{p} + \widetilde{q} < \widetilde{p} + p < 2p \leq p + q$$

což dává jasný spor $\alpha_{\beta\alpha} < \alpha_{\beta\alpha}$. Tím je první tvrzení zcela dokázáno. Třetí tvrzení plyne z ireducibility reprezentace konstruované na V. Zbývá tedy už jen poslední, čtvrté tvrzení. Protože $p \leq 0 \leq q$, platí $p \leq p + q = -a_{\beta\alpha} \leq q$, tj. $\beta - a_{\beta\alpha}\alpha \in \Delta$ dle bodu 1 a tedy i $\beta - \epsilon k\alpha \in \Delta$ pro všechna $k \leq |a_{\beta\alpha}|$. $\square$

Definice 10.2. $a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = 2\frac{K(H_\beta,H_\alpha)}{K(H_\alpha,H_\alpha)} = -(p+q)$ nazýváme **Cartanova celá čísla**.

Věta 10.3. (**Weylova-Chevalley normální forma**) Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ příslušný systém kořenů. Pak $\mathfrak{g}$ jako vektorový prostor je direktním součtem $\mathfrak{g}_0$ a jednorozměrných kořenových podprostorů $\mathfrak{g}_\alpha = \operatorname{span}\{E_\alpha\}$. Platí:

- $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha, \ \forall H \in \mathfrak{g}_0$,
- $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathfrak{g}_0, \ [E_\alpha, E_{-\alpha}] \neq 0, \ \ \forall\alpha \in \Delta$,
- $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$ pro $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha + \beta \neq 0$. Pokud navíc $\alpha + \beta \in \Delta$, je $N_{\alpha\beta} \neq 0$.

Důkaz. Plyne z předchozího lemmatu. □

Bez důkazu uveďme, že výše zavedené $N_{\alpha\beta}$ při vhodném výběru E_α splňují $N_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$, $N_{\alpha\beta} = -N_{(-\alpha)(-\beta)} = \pm(-p+1)$, kde $p \leq 0$ je nejmenší číslo splňující $\beta + p\alpha \in \Delta$.

10.2 Kořenové diagramy, Cartanova matice

Kořenové diagramy jsou vyjádřením kořenů komplexní poloprosté Lieovy algebry jako vektorů ve vhodném Eukleidově prostoru. Pomáhají nám pochopit strukturu kořenového systému dané algebry a tvoří základní východisko pro klasifikaci všech poloprostých algeber.

Definice 10.4. Zavádíme označení pro reálné vektorové prostory definované jako reálné lineární obaly všech vektorů H_α a všech kořenů α

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}\text{–span}\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}, \qquad\qquad \mathfrak{h}^* = \mathbb{R}\text{–span}\{\alpha\}_{\alpha\in\Delta}.$$

Níže ukážeme konstrukcí vhodného skalárního součinu, že $\mathfrak{h}$ a $\mathfrak{h}^*$ jsou navzájem duální vektorové prostory, jak zavedené značení naznačuje.

Věta 10.5. Bilineární symetrické zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \to \mathbb{R}$ definované předpisem $\langle\alpha, \beta\rangle = K(H_\alpha, H_\beta)$ je skalární součin na $\mathfrak{h}^*$.

Důkaz. Protože $a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) \in \mathbb{Z}, \ a_{\alpha\alpha} = \alpha(T_\alpha) = 2$, platí při vyjádření v rozkladu (9.1)

$$\begin{aligned} K(H_\alpha, H_\beta) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}_{H_\alpha} \circ \operatorname{ad}_{H_\beta}\right) = \sum_{\tilde\alpha\in\Delta} \tilde\alpha(H_\alpha)\tilde\alpha(H_\beta) = \\ = \left(\frac{1}{4}\sum_{\tilde\alpha\in\Delta}\underbrace{a_{\tilde\alpha\alpha}a_{\tilde\alpha\beta}}_{\in\mathbb{Z}}\right)K(H_\alpha, H_\alpha)K(H_\beta, H_\beta). \end{aligned} \tag{10.3}$$

Speciálně dosazením $\beta = \alpha$ zjišťujeme, že

$$\alpha(H_\alpha) = K(H_\alpha, H_\alpha) = \frac{(\alpha(H_\alpha))^2}{4}\sum_{\tilde\alpha\in\Delta} a_{\tilde\alpha\alpha}^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha(H_\alpha) = \frac{4}{\sum_{\tilde\alpha\in\Delta} a_{\tilde\alpha\alpha}^2} > 0.$$

Vidíme, že $K(H_\alpha, H_\alpha) \in \mathbb{R}$ a tedy dle rovnice (10.3) i $K(H_\alpha, H_\beta) \in \mathbb{R}$, tj. $K|_{\mathfrak{h}}$ je reálná symetrická bilineární forma. Též vidíme, že $T_\alpha = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha \in \mathfrak{h}$. Pro $H \in \mathfrak{h}$, $H = \sum_\alpha h_\alpha T_\alpha$, $h_\alpha \in \mathbb{R}$ máme:

$$K(H,H) = \sum_{\tilde{\alpha}\in\Delta} \tilde{\alpha}(H)\tilde{\alpha}(H) = \sum_{\tilde{\alpha}\in\Delta} \tilde{\alpha}(H)^2 = \sum_{\tilde{\alpha}\in\Delta} \left(\sum_{\alpha\in\Delta} \underbrace{h_\alpha}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{\tilde{\alpha}(T_\alpha)}_{\in\mathbb{Z}} \right)^2 \geq 0$$

Pokud $K(H,H) = 0$, pak musí být $\tilde{\alpha}(H) = 0$ pro všechny $\tilde{\alpha} \in \Delta$. To dle věty 9.18 implikuje $H = 0$. Takže reálná forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je pozitivně definitní a tedy definuje skalární součin na $\mathfrak{h}$. $\square$

Poznámka 10.6. Máme-li $H \in \mathfrak{h}$, pak $\mathrm{i}H \notin \mathfrak{h}$ neboť $K(\mathrm{i}H, \mathrm{i}H) = -K(H,H)$. Protože $\mathfrak{h}_\mathbb{C} = \mathfrak{g}_0$ (neboť komplexní lineární obal Δ je celé $\mathfrak{g}_0^*$ a totéž platí pro H_α a $\mathfrak{g}_0$ neboť máme izomorfismus definovaný pomocí Killingovy formy), je $\dim_\mathbb{R} \mathfrak{h} = \dim_\mathbb{C} \mathfrak{g}_0$.

Definice 10.7. Kořenový diagram je vyjádření kořenů $\alpha \in \Delta$ jako vektorů v Euklidově prostoru $\mathfrak{h}^*$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definice 10.8. Zrcadlení podle nadroviny kolmé ke kořenu α je lineární zobrazení $S_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$

$$S_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha = \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha.$$

Poznámka 10.9. Dvojitou aplikací S_α dostáváme

$$S_\alpha(S_\alpha(\lambda)) = S_\alpha(\lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha) = \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha - \lambda(T_\alpha)(\alpha - 2\alpha) = \lambda,$$

takže ve shodě s tím, co od zrcadlení očekáváme, máme $S_\alpha^2 = \mathbb{I}$.

Podle čtvrtého tvrzení lemmatu 10.1 je pro každou dvojici kořenů $\alpha, \beta \in \Delta$ výsledek aplikace zrcadlení opět kořen, $S_\alpha(\beta) \in \Delta$. Proto lze chápat S_α jako zobrazení $S_\alpha : \Delta \to \Delta$ pro každý zvolený kořen $\alpha \in \Delta$.

Definice 10.10. Weylova grupa $\mathcal{W}$ kořenového systému Δ je grupa lineárních operátorů na $\mathfrak{h}^*$ generovaná všemi zobrazeními S_α, kde $\alpha \in \Delta$.

Poznámka 10.11. Protože i prvky Weylovy grupy musí stejně jako její generátory zobrazovat kořeny na kořeny, je Weylova grupa izomorfní nějaké podgrupě grupy všech permutací S_Δ kořenového systému Δ. Z tohoto důvodu je Weylova grupa je konečná.

Podobně, všechna zrcadlení S_α zachovávají délky a úhly, tj. jsou ortogonálními zobrazeními. Proto i Weylova grupa jimi generovaná je podgrupou ortogonální grupy $O(\mathfrak{h}^*)$.

Vyberme libovolné $H_0 \in \mathfrak{h}$ takové, že $\alpha(H_0) \neq 0$ pro všechny kořeny $\alpha \in \Delta$. H_0 považujeme dále za pevně zvolené.

Definice 10.12. Definujeme množiny **kladných**, resp. **záporných, kořenů** předpisem

$$\Delta^\pm = \{\alpha \in \Delta | \alpha(H_0) \gtrless 0\}.$$

Na Δ definujeme částečné uspořádání $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha(H_0) \leq \beta(H_0)$.

Volba rozkladu na kladné a záporné kořeny evidentně závisí na volbě vektoru H_0.

Poznámka 10.13. Protože ke každému kořenu $\alpha \in \Delta^+$ existuje kořen opačný $-\alpha \in \Delta$, pro který evidentně platí $-\alpha \in \Delta^-$, je stejný počet kladných a záporných kořenů. Dále vidíme, že pro $\alpha, \beta \in \Delta^+$ takové, že $\alpha + \beta \in \Delta$, je $\alpha + \beta \in \Delta^+$. Tyto dvě vlastnosti lze použít jako alternativní definici rozdělení na kladné a záporné kořeny místo výběru vektoru H_0.

Definice 10.14. Při zvoleném rozdělení $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ definujeme **prosté kořeny** jako ty kladné kořeny, které nelze zapsat jako součet dvou jiných kladných kořenů,

$$\Delta^P = \{\alpha \in \Delta^+ | \forall \beta, \gamma \in \Delta^+,\ \beta + \gamma \neq \alpha\}.$$

Věta 10.15 (Vlastnosti kořenového diagramu)**.** Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ odpovídající systém kořenů rozdělený pomocí $H_0 \in \mathfrak{h}$ na kladné a záporné. Pak platí

- Každý $\alpha \in \Delta^+$ lze zapsat jako lineární kombinaci prostých kořenů

  $$\alpha = \sum_{\beta \in \Delta^P} c_\beta \beta,$$

  kde $c_\beta \in \mathbb{N}_0$.

- Pro každou dvojici různých prostých kořenů $\alpha, \beta \in \Delta^P$, $\alpha \neq \beta$ platí $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$, tj. úhel mezi prostými kořeny je tupý (či pravý).

- Prosté kořeny Δ^P tvoří bázi $\mathfrak{h}^*$ a $\mathfrak{g}_0^*$.

Důkaz. Buď $\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta^P$. Pak existují $\beta, \gamma \in \Delta^+$ takové, že $\beta + \gamma = \alpha$. Tudíž z definice uspořádání máme $\alpha > \beta, \gamma$. Postup opakujeme pro β a γ, pokud nejsou prosté. Iterujeme, dokud po konečně mnoha krocích nedostaneme součet prostých kořenů - uspořádání nám zaručuje, že se nemůže postup zacyklit. Protože se mohou stejné prosté kořeny opakovat z různých větví výpočtu, dostáváme celočíselné nezáporné koeficienty v lineární kombinaci $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta^P} c_\beta \beta$.

Uvažujme $\alpha, \beta \in \Delta^P$ takové, že $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$. Pak platí $\alpha(T_\beta), \beta(T_\alpha) > 0$ a tedy dle lemmatu 10.1 jsou $\alpha - \beta, \beta - \alpha \in \Delta$, přičemž jeden z nich je kladný, druhý záporný. Bez újmy na obecnosti nechť je $\alpha - \beta \in \Delta^+$. Tím nacházíme spor s předpokladem, neboť $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$, tj. $\alpha \notin \Delta^P$.

Zbývá ukázat lineární nezávislost Δ^P. Mějme reálnou lineární kombinaci prostých kořenů rovnou nule a rozdělme její koeficienty na kladné a záporné,

$$\sum_{\alpha_i \in \Delta^P} x_i \alpha_i = \sum_{j \in J} p_j \alpha_j - \sum_{k \in K} n_k \alpha_k = 0,$$

kde $\{\alpha_j\}_{j \in J} \cap \{\alpha_k\}_{k \in K} = \emptyset$, $\{\alpha_j\}_{j \in J} \cup \{\alpha_k\}_{k \in K} \subset \Delta^P$, $p_j > 0$, $n_k > 0$. Protože $\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle \leq 0$ pro všechna $j \in J$, $k \in K$, musí pro $\widetilde{x} = \sum_{j \in J} p_j \alpha_j = \sum_{k \in K} n_k \alpha_k$ platit:

$$\langle \widetilde{x}, \widetilde{x} \rangle = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} p_j n_k \underbrace{\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}_{\leq 0} \leq 0$$

Tudíž $\widetilde{x}$ je nulový vektor v $\mathfrak{h}^*$, $\widetilde{x} = 0$. Současně ale $\widetilde{x}(H_0) = \sum_{j \in J} p_j \alpha_j(H_0) = \sum_{k \in K} n_k \alpha_k(H_0)$ jsou součty kladných čísel. Jediná možnost nevedoucí ke sporu je, že sumy probíhají přes prázdné množiny, tj. $J = K = \emptyset$. Vidíme tedy, že $\{\alpha_i\} \in \Delta^P$ jsou lineárně nezávislé v $\mathfrak{h}^*$, tvoří tedy jeho bázi. Protože $(\mathfrak{h}^*)_\mathbb{C} = \mathfrak{g}_0^*$, tvoří $(\alpha_i)_{i=1}^l \in \Delta^P$ též bázi $\mathfrak{g}_0^*$.

□

Při konstrukci kořenového diagramu je třeba začít prostými kořeny. Aplikací zrcadlení S_α, kde $\alpha \in \Delta^P$, získáme další kořeny (kladné i záporné). Zrcadlením i vzhledem k nově získaným kořenům a opakovanými iteracemi tohoto postupu konstruujeme kořeny tak dlouho, až získáme množinu $\widetilde{\Delta}$ uzavřenou vůči všem zrcadlením S_α, kde $\alpha \in \widetilde{\Delta}$. Lze obecně ukázat nebo v každém konkrétním případě ověřit, že tím získáváme celou množinu kořenů, tj. $\widetilde{\Delta} = \Delta$. Z tohoto postupu mj. plyne, že délka libovolného kořenu je rovna délce nějakého prostého kořenu.

Definice 10.16. Cartanova matice $\mathcal{A}$ je tvořena složkami $a_{ij} = 2\frac{\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle},\ \alpha_i, \alpha_j \in \Delta^P$.

Lze se v literatuře setkat i s transponovanou konvencí pro $\mathcal{A}$.

Poznámka 10.17. Z vlastností kořenů přímo plynou následující vlastnosti Cartanovy matice $\mathcal{A}$:

- $a_{ii} = 2$,
- $a_{ij} \leq 0$ pro $i \neq j$,
- $a_{ij}a_{ji} = 4\frac{|\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle|^2}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} = 4\underbrace{\cos^2 \sphericalangle(\alpha_i, \alpha_j)}_{<1 \text{ díky LN } \alpha_i,\alpha_j} \quad\Rightarrow\quad a_{ij}a_{ji} \in \{0, 1, 2, 3\}$.

  Tudíž $\cos \sphericalangle(\alpha_i, \alpha_j) \in \left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, tj. $\sphericalangle(\alpha_i, \alpha_j) \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

Kapitola 11

Dynkinovy diagramy a klasifikace poloprostých komplexních Lieových algeber

Struktura kořenů, tj. kořenový diagram, je základním kamenem pro úplnou klasifikaci poloprostých komplexních Lieových algeber, kterou poprvé kompletně odvodil francouzský matematik Élie Cartan (1869–1951) ve své disertační práci v roce 1894. Na úrovni ne zcela dokázané domněnky ke stejné klasifikaci před ním dospěl německý matematik Wilhelm Killing (1847–1923) v letech 1888 až 1890.

V současnosti se z pedagogických důvodů klasifikace obvykle odvozuje pomocí studia Dynkinových diagramů, které zavedl ruský matematik Eugene Dynkin (1924 – 2014) v roce 1947 společně s definicí prostých kořenů. Tohoto přístupu se budeme držet i my.

Definice 11.1. Dynkinův diagram poloprosté komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, resp. jejího kořenového systému Δ, je graf sestrojený podle následujících pravidel:

- jeho vrcholy odpovídají prostým kořenům $\Delta^P = \{\alpha_j\}_{j=1}^{l}$, kde $l = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_0 = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}$,
- vrcholy α_j, α_k jsou spojeny $a_{jk}a_{kj}$ hranami, tj. dva vrcholy spojují maximálně 3 hrany. Pokud je hran více, zakreslíme šipku směrem k delšímu kořenu (ve smyslu normy na $\mathfrak{h}^*$ indukované $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

Konvence týkající se značení délky prostých kořenů se mohou v různých zápisech lišit. Někdo používá plné a duté značky pro vrcholy pro znázornění dvou možných délek kořenů (z klasifikace vyplyne, že jich více potřeba není), někdo kreslí šipku doprostřed hrany v opačném směru a interpretuje ji jako znak nerovnosti (tj. větší či menší).

Uvažujme případ $1 < a_{jk}a_{kj} \leq 3$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a_{jk} = -1,\ a_{kj} < -1$ (jinak zaměníme α_j a α_k). Pak platí

$$1 > \frac{a_{jk}}{a_{kj}} = \frac{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = \frac{\|\alpha_j\|^2}{\|\alpha_k\|^2}, \text{ tj. } \|\alpha_k\|^2 = -a_{kj} \|\alpha_j\|^2 .$$

Máme tedy $\|\alpha_k\| = \sqrt{2}\,\|\alpha_j\|$ nebo $\|\alpha_k\| = \sqrt{3}\,\|\alpha_j\|$ dle hodnoty $a_{jk}a_{kj}$.

Poznámka 11.2. Z Dynkinova diagramu je možné jednoznačně zrekonstruovat Cartanovu matici.

Věta 11.3. Mějme komplexní poloprostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{g}_0$ a kořenovým systémem $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$. Pokud existuje rozklad kořenového systému na dva disjunktní kolmé podsystémy $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, pro všechna $\alpha \in \Delta_1$ a $\beta \in \Delta_2$, pak Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je direktním součtem dvou ideálů

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2,$$

kde

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &= \mathfrak{g}_{1,0} \dotplus \dotplus_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha, & \mathfrak{g}_2 &= \mathfrak{g}_{2,0} \dotplus \dotplus_{\beta \in \Delta_2} \mathfrak{g}_\beta, & \mathfrak{g}_0 &= \mathfrak{g}_{1,0} \oplus \mathfrak{g}_{2,0} \\ \mathfrak{g}_{1,0} &= \operatorname{span}\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_1}, & \mathfrak{g}_{2,0} &= \operatorname{span}\{H_\beta\}_{\beta \in \Delta_2}, & K(\mathfrak{g}_{1,0}, \mathfrak{g}_{2,0}) &= 0. \end{aligned}$$

Důsledek 11.4. Souvislé komponenty Dynkinova diagramu odpovídají prostým ideálům, neboť rozklad prostých kořenů na dva disjunktní podsystémy již implikuje rozklad celého kořenového systému (prosté kořeny tvoří bázi a jsou-li $\alpha, \beta \in \Delta^P$, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, pak $\alpha + \beta$ ani $\alpha - \beta$ není kořen).

Důkaz. V celém důkazu značí $\alpha \in \Delta_1$, $\beta \in \Delta_2$ libovolná. Z vztahu

$$K(H_\alpha, H_\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle = \alpha(T_\beta) \frac{K(H_\beta, H_\beta)}{2} = 0$$

plyne, že $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{1,0} \oplus \mathfrak{g}_{2,0}$ a tedy z definice $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2$. Též vidíme, že platí $\alpha(T_\beta) = a_{\alpha\beta} = \beta(T_\alpha) = 0$. Z toho vyplývá, že $[H_\alpha, E_\beta] = \beta(H_\alpha) E_\beta = 0 = [H_\beta, E_\alpha]$. Dále $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}$, kdykoliv je $\alpha + \beta \in \Delta$. Ale $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, tj. bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\alpha + \beta \in \Delta_1$. Pak $\langle \alpha + \beta, \beta \rangle = \langle \beta, \beta \rangle \neq 0$, což je spor. Tj. $\alpha + \beta \notin \Delta$, což implikuje $[E_\alpha, E_\beta] = 0$. Vidíme tedy, že každá dvojice bazických vektorů z $\mathfrak{g}_1$ a $\mathfrak{g}_2$ komutuje. Zbývá ověřit, že pro $\alpha, \tilde{\alpha} \in \Delta_1$ je $[E_\alpha, E_{\tilde{\alpha}}] \in \mathfrak{g}_1$. To dokážeme sporem: nechť $[E_\alpha, E_{\tilde{\alpha}}] \in \mathfrak{g}_2$, tj. $\alpha + \tilde{\alpha} \in \Delta_2$. Pak $\langle \alpha + \tilde{\alpha}, \alpha + \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha + \tilde{\alpha}, \alpha \rangle + \langle \alpha + \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} \rangle = 0$ z kolmosti Δ_1 a Δ_2, což je spor. Vidíme tedy, že $\mathfrak{g}_1$ a $\mathfrak{g}_2$ jsou dva ideály v $\mathfrak{g}$, tj. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. □

Nadále se budeme zabývat pouze souvislými Dynkinovými diagramy, tj. prostými algebrami.

Lemma 11.5. Nechť $\alpha_j, \alpha_k \in \Delta^P$, $j \neq k$, $\|\alpha_j\| \leq \|\alpha_k\|$. Potom počet hran spojujících α_j a α_k v Dynkinově diagramu je roven $\#\{n \in \mathbb{Z} | \alpha_k + n\alpha_j \in \Delta\} - 1$.

Důkaz. Počet hran mezi α_j, α_k je $a_{jk} a_{kj} = 4 \frac{\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle^2}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle \langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} \in \{0, 1, 2, 3\}$. Pokud $a_{jk} a_{kj} = 0$, pak je $\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle = 0$, tj. $\alpha_k + n\alpha_j \notin \Delta$, pro všechna $n \neq 0$ (připomeňte si lemma 10.1 a uvědomte si, že pro prosté kořeny $\alpha_k - n\alpha_j$, $n \in \mathbb{N}$ nikdy není kořen díky větě 10.15, tj. $p = 0$ v lemmatu 10.1). Pokud $a_{jk} a_{kj} \in \{1, 2, 3\}$ pak dle předpokladu je $a_{jk} = 2 \frac{\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = -1$, $a_{kj} = 2 \frac{\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \in \{-1, -2, -3\}$. Dle lemmatu 10.1 je $\{\alpha_k + n\alpha_j\}_{n=p}^{q} \subset \Delta$, kde $p = 0, -(p+q) = -q = a_{kj}$, množina všech kořenů tvaru $\alpha_k + n\alpha_j$. Takže máme $a_{jk} a_{kj} = \#\{n \in \mathbb{Z} | \alpha_k + n\alpha_j \in \Delta\} - 1$. □

Poznámka 11.6. Označme $e_j = \frac{\alpha_j}{\|\alpha_j\|}$, kde $\alpha_j \in \Delta^P$, tj. $(e_j)_{j=1}^{l} \equiv \Delta^P_{(N)}$ je normovaná báze $\mathfrak{h}^*$. Nechť $n_{jk} = a_{jk} a_{kj}$ je počet hran spojujících α_j a α_k. Pak platí $\langle e_j, e_k \rangle = -\frac{1}{2}\sqrt{n_{jk}}$. Pro libovolný $x = \sum_j x_j e_j \neq 0$ zjišťujeme, že

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_j x_j^2 + 2 \sum_{j<k} x_j x_k \langle e_j, e_k \rangle = \sum_j x_j^2 - \sum_{j<k} x_j x_k \sqrt{n_{jk}} > 0\,. \qquad (11.1)$$

Definice 11.7. Graf s l vrcholy nazýváme **přípustný**, pokud konstanty n_{jk} jím určené definují předpisem

$$\langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{l} x_j^2 - \sum_{j<k} x_j x_k \sqrt{n_{jk}}.$$

pozitivně definitní skalární součin na $\mathbb{R}^l$ se souřadnicemi $x_1, \dots, x_l$.

Evidentně, je-li graf přípustný, musí být přípustný i jakýkoliv jeho podgraf (tj. graf obsahující výběr vrcholů z původního grafu a všechny hrany tyto vybrané vrcholy spojující).

Lemma 11.8. Přípustné grafy

- neobsahují uzavřené smyčky,
- v každém jejich vrcholu se setkávají nejvýše tři hrany,
- nahradíme-li dvojici vrcholů přípustného grafu spojených jednou hranou jediným vrcholem dostaneme opět přípustný graf.

Důsledek 11.9. Grafy

$$\cdot\!\equiv\!\cdot - \cdot\,, \qquad \vdots\!> \cdot - \cdot <\!\vdots\,, \qquad \cdot = \cdot - \cdot = \cdot\,, \qquad \cdot = \cdot - \cdot <\!\vdots$$

nejsou přípustné.

Důkaz. • Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ odpovídají minimální uzavřené smyčce, tj. neobsahující žádnou podsmyčku. Položíme $x = \sum_{j=1}^{k} e_j$, tj. $\langle e_j, e_{j+1}\rangle \neq 0$, $\langle e_k, e_1\rangle \neq 0$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, kdykoliv $i < j - 1$. Ztotožníme $k + 1 \equiv 1$. Pak

$$\langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{k} 1 - \sum_{j=1}^{k} \sqrt{n_{j,j+1}} \leq k - k = 0,$$

tj. nacházíme nepřípustný graf.

- Nechť $e_0 \in \Delta^P_{(N)}$ odpovídá vrcholu přípustného grafu a je spojený hranami s vrcholy odpovídajícími $\{e_j\}_{j=1}^{k}$. Pak $x = e_0 - \sum_{j=1}^{k} \langle e_0, e_j\rangle e_j \neq 0$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ kdykoliv $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$. Máme

$$\langle x, x\rangle = 1 + \sum_{j=1}^{k} \langle e_0, e_j\rangle^2 - 2\sum_{j=1}^{k} \langle e_0, e_j\rangle\langle e_0, e_j\rangle = 1 - \sum_{j=1}^{k} \langle e_0, e_j\rangle^2 > 0,$$

$$\text{tj. } 1 > \sum_{j=1}^{k} \langle e_0, e_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \alpha_0, \alpha_j\rangle^2}{\langle \alpha_0, \alpha_0\rangle\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{4} \underbrace{a_{0j} a_{j0}}_{=n_{0j}}.$$

Tudíž počet hran setkávajících se ve vrcholu $\alpha_0 \equiv e_0$ je menší než 4.

- Nechť α_1, α_2 jsou spojené hranou v přípustném grafu. Pro libovolné $x = \sum_{j=1}^{l} x^j e_j$ platí

  $$\langle x, x\rangle = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - x^1x^2 + p_1\left(x^3, \dots, x^l\right)x^1 + p_2\left(x^3, \dots, x^l\right)x^2 + p_3\left(x^3, \dots, x^l\right),$$

  kde p_1, p_2, p_3 jsou jisté lineární a kvadratické polynomy v uvedených proměnných. Nahraďme vrcholy e_1, e_2 jediným sloučeným vrcholem e_{12}. Pro $y = x^{12}e_{12} + \sum_{j=3}^{l} x^j e_j$ spočítáme jeho kvadrát normy dosazením $x^1 = x^2 = x^{12}$ do $\langle x, x\rangle$ a vynecháním jednoho příspěvku $\left(x^{12}\right)^2$ za dvojnásobně započítaný vrchol a stejného příspěvku za zrušenou hranu

  $$\langle y, y\rangle = \left(x^{12}\right)^2 + \left(p_1\left(x^3, \dots, x^l\right) + p_2\left(x^3, \dots, x^l\right)\right)x^{12} + p_3\left(x^3, \dots, x^l\right).$$

  Vidíme, že máme opět pozitivně definitní skalární součin, nyní odpovídající sloučenému grafu.

□

Lemma 11.10. Graf $\underset{1}{\bullet} - \underset{2}{\bullet} = \underset{3}{\bullet} - \underset{4}{\bullet} - \underset{5}{\bullet}$ není přípustný.

Důkaz. Uvažujme $x = \sum_{j=1}^{5} x^j e_j$,

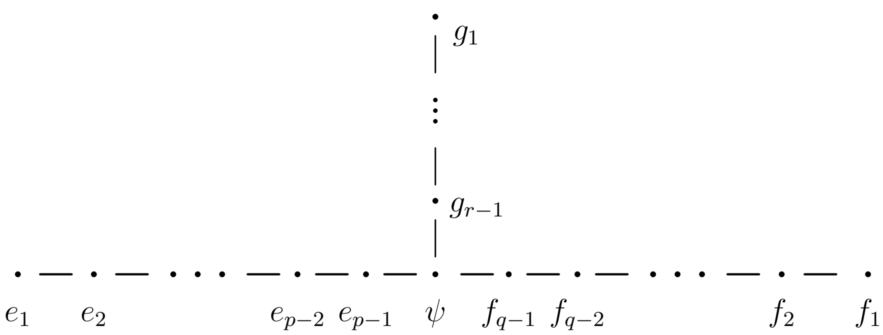
$$Q(x) = \langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{5}\left(x^j\right)^2 - x^1x^2 - \sqrt{2}x^2x^3 - x^3x^4 - x^4x^5$$

a najděme minimum $Q(x)$. Extrém je určen rovnicemi $\frac{\partial Q}{\partial x^j} = 0$, tj.

$$2x^1 - x^2 = 0, \qquad 2x^2 - x^1 - \sqrt{2}x^3 = 0, \qquad 2x^3 - \sqrt{2}x^2 - x^4 = 0,$$
$$2x^4 - x^3 - x^5 = 0, \qquad 2x^5 - x^4 = 0.$$

Dosazením vidíme, že $Q(x)$ nabývá extrému pro libovolný násobek $x = \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3, 2, 1\right)$, kde $Q(x) = \langle x, x\rangle = 0$. Takže $\langle ., .\rangle$ není pozitivně definitní, tj. uvedený diagram není přípustný. □

Lemma 11.11. Uvažujme diagram tvaru



kde $\|\psi\| = \|e_j\| = \|f_j\| = \|g_j\| = 1$ a $p \geq q \geq r \geq 2$. Pak

- definujeme-li $x = \sum_{j=1}^{p-1} je_j,\ y = \sum_{j=1}^{q-1} jf_j,\ z = \sum_{j=1}^{r-1} jg_j$, je

  $$\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle = 0,\ \langle x, x\rangle = \frac{p(p-1)}{2},\ \langle y, y\rangle = \frac{q(q-1)}{2},\ \langle z, z\rangle = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Důkaz.

$$\langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{p-1} j^2 - \sum_{j=1}^{p-2} j(j+1) = (p-1)^2 - \sum_{j=1}^{p-2} j = (p-1)^2 - \frac{(p-1)(p-2)}{2} = \\ = \frac{p(p-1)}{2},$$

ostatní části tvrzení dokazujeme obdobně. □

- Buďte $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ úhly mezi x, y, z a ψ. Pak je $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z < 1$.

  Důkaz. Uvědomme si že, x, y, z jsou navzájem kolmé a uvažme (neúplný) Fourierův rozklad vektoru ψ do x, y, z. Zjišťujeme, že

  $$\psi - \sum_{u\in\{x,y,z\}} \frac{\langle\psi, u\rangle}{\|u\|} u \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 > \sum_{u\in\{x,y,z\}} \frac{|\langle\psi, u\rangle|^2}{\langle u, u\rangle} = \sum_{u\in\{x,y,z\}} \cos^2 \sphericalangle(\psi, u).$$

  □

- Platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$.

  Důkaz.

  $$\frac{|\langle\psi, x\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} = \frac{|\langle\psi, (p-1)e_{p-1}\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} = \frac{(p-1)^2}{\frac{p(p-1)}{2}} \underbrace{|\langle\psi, e_{p-1}\rangle|^2}_{=\frac{1}{4}} = \frac{(p-1)}{2p}$$

  Z předchozího tvrzení máme

  $$1 > \sum_{u\in\{x,y,z\}} \frac{|\langle\psi, u\rangle|^2}{\langle u, u\rangle} = \frac{p-1}{2p} + \frac{q-1}{2q} + \frac{r-1}{2r} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right),$$

  tj. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$. □

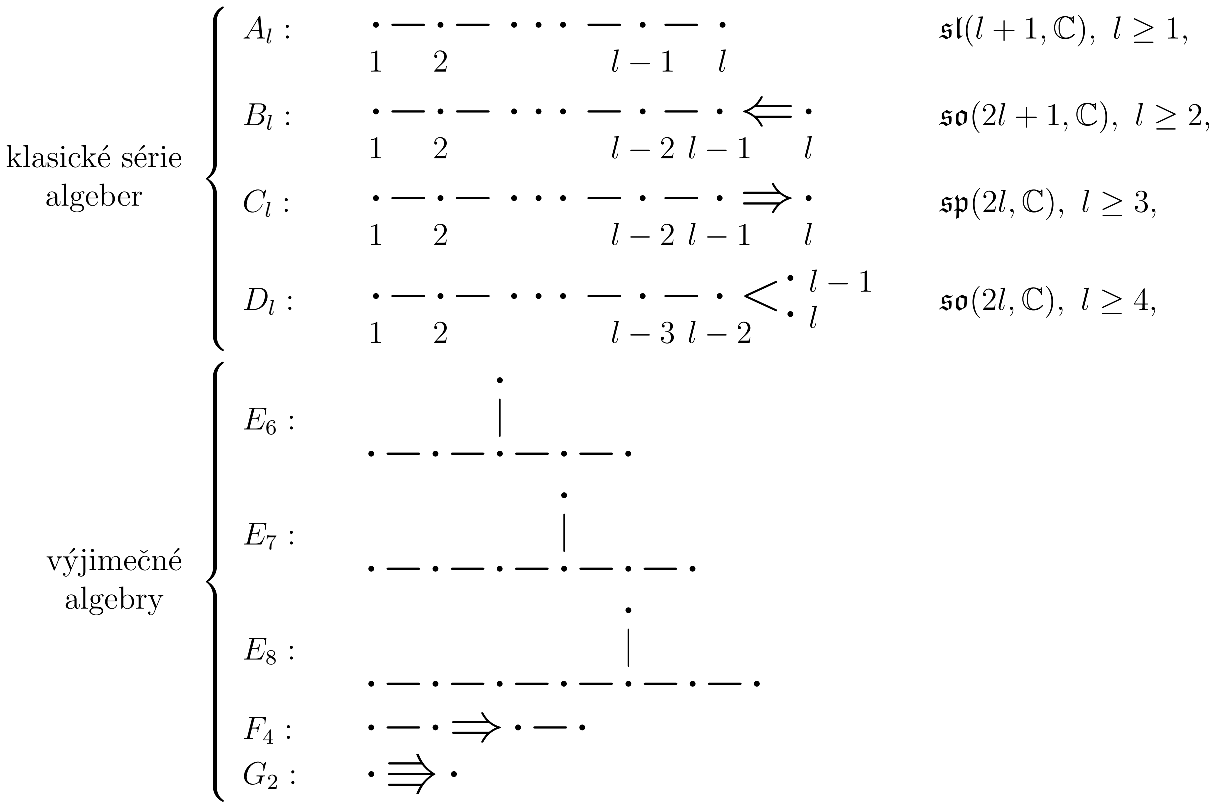
- Přípustné možnosti pro parametry p, q, r tudíž jsou pouze následující

  $$\begin{array}{lll} r = 2, & q = 2, & p \geq 2, \\ r = 2, & q = 3, & p = 3, 4, 5. \end{array}$$

Poznámka 11.12. Je dobré si uvědomit, že kořenové vektory pozitivních kořenů společně s $\mathfrak{g}_0$ tvoří řešitelnou podalgebru v $\mathfrak{g}$, podprostor tvořený lineárními kombinacemi kořenových vektorů pozitivních kořenů tvoří nilpotentní podalgebru v $\mathfrak{g}$.

Věta 11.13 (Cartanova o klasifikaci prostých algeber)**.** Buď $\mathfrak{g}$ komplexní prostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ systém kořenů, $\Delta^P \subset \Delta$ prosté kořeny. Pak její

Dynkinův diagram má jednu z následujících podob:



Důkaz. Výše jsme ukázali, že toto jsou všechny přípustné diagramy, existence příslušných algeber byla dokázána jejich zkonstruováním, jednoznačnost plyne z Weylovy-Chevalley normální formy, pokud se detailně uváží struktura konstant $N_{\alpha\beta}$ (což jsme zde neprovedli). □

Při identifikaci Dynkinova diagramu dané algebry ze známé struktury kořenů či z Cartanovy matice lze pro určení směru šipky využít vztah

$$\frac{\|\alpha_i\|}{\|\alpha_j\|} = \sqrt{\frac{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}} = \sqrt{\frac{a_{ij}}{a_{ji}}} \qquad \Rightarrow \qquad \|\alpha_i\| = \sqrt{\frac{a_{ij}}{a_{ji}}}\, \|\alpha_j\| \ . \tag{11.2}$$

11.1 Cvičení

Cvičení 11.1. Nakreslete všechny možné kořenové diagramy v $\mathbb{R}^2$ a přiřaďte jim odpovídající algebry.

Řešení. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_2$.

Cvičení 11.2. K Dynkinovým diagramům přiřaďte odpovídající Cartanovy matice.

Řešení. Kořeny uspořádány dle diagramů, 0 vynechány:

$$\mathcal{A}_{A_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{B_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -2 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{C_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{D_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & -1 & 2 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 11.3. Najděte Cartanovu podalgebru, kořeny, kořenový a Dynkinův diagram speciální lineární algebry

$$A_l = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathbb{C}^{l+1,l+1} \mid \mathrm{tr} A = 0 \right\}.$$

Řešení.

- Cartanova podalgebra $\mathfrak{g}_0 = \{\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_{l+1}) \mid \sum_j d_j = 0\} \subset \mathfrak{sl}(l+1)$, $\dim \mathfrak{g}_0 = l$, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0$. Je abelovská, tj. nilpotentní. Níže uvidíme (rovnice (12.1)), že $\mathfrak{g}_0$ je rovná svému normalizátoru.

- Kořeny: Mějme

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}, \qquad i \neq j.$$

Pak máme rozklad $\mathfrak{sl}(l+1) = \mathfrak{g}_0 + \mathrm{span}\{E_{ij}\}_{i \neq j}$ a pro $D \in \mathfrak{g}_0$ ve tvaru $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_{l+1})$ máme $[D, E_{ij}] = (d_i - d_j) E_{ij}$. Zaveďme funkcionály $\varphi_j \in \mathfrak{g}_0^*$, $\varphi_j(D) = d_j$. Pak

$$[D, E_{ij}] = (\varphi_i - \varphi_j)(D) E_{ij}.$$

Tj. máme skutečně Cartanovu podalgebru a kořeny

$$\Delta = \left\{ (\varphi_i - \varphi_j) \mid \; i \neq j, \; i, j \in \widehat{l+1} \right\}$$

Zvolíme $H_0 = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_{l+1})$, $h_i > h_{i+1}$, tj. $(\varphi_i - \varphi_j)(H_0) \neq 0$. Máme tedy vybrané kladné a prosté kořeny

$$\Delta^+ = \{\varphi_i - \varphi_j | i < j \leq l+1\},$$
$$\Delta^P = \left\{ \varphi_i - \varphi_{i+1} \equiv \alpha_i \middle| i \in \widehat{l} \right\}.$$

Ověříme, že pomocí Δ^P můžeme nakombinovat celé Δ:

$$\varphi_i - \varphi_j = (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + (\varphi_{i+1} - \varphi_{i+2}) + \cdots + (\varphi_{j-1} - \varphi_j).$$

- Cartanova matice, Dynkinův diagram:

$$a_{\beta\alpha} = -(p+q) \overset{\alpha,\beta\in\Delta^P}{=} -q, \text{ kde } \qquad \{\beta + k\alpha\}_{k=p}^{q} \in \Delta^+.$$

Pro $\alpha_i = \varphi_i - \varphi_{i+1}, \alpha_j = \varphi_j - \varphi_{j+1}$ máme

$$\alpha_i + k\alpha_j = \varphi_i - \varphi_{i+1} + k(\varphi_j - \varphi_{j+1}) \overset{!}{=} \varphi_a - \varphi_b,\ a < b.$$

Pokud $i < j-1$ nebo $j < i-1$ je $k = 0$, tj. $a_{ij} = 0$. Pro $i = j-1$ nebo $j = i-1$ je $k = 0, 1$, tj. $a_{ij} = -1$, proto má Cartanova matice a Dynkinův diagram tvar

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \underset{1}{\bullet} - \underset{2}{\bullet} - \cdots - \underset{l-1}{\bullet} - \underset{l}{\bullet}$$

Cvičení 11.4. Najděte Cartanovu podalgebru, kořeny, kořenový a Dynkinův diagram symplektické algebry

$$C_l = \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathbb{C}^{2l,2l} \mid JA + A^T J = 0 \right\}, \text{ kde } J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{smallmatrix} \right).$$

Řešení. • Cartanova podalgebra. Označme $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{C}^{2l,2l}$. Musí platit

$$JA + A^T J = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^T & -a^T \\ d^T & -b^T \end{pmatrix} = 0 \text{ tj. } d = -a^T,\ b = b^T,\ c = c^T.$$

Označme diagonální podalgebru

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{smallmatrix} \right) \middle| \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{C}^{l,l} \right\}$$

a ověřme, že se jedná o Cartanovu podalgebru. Evidentně je abelovská, zbývá ukázat, že je rovná svému normalizátoru. Máme $[\Lambda, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \in \mathbb{C}^{l,l}$, z čehož plyne

$$\left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{pmatrix} \right] = (\lambda_i - \lambda_j) \underbrace{\begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{pmatrix}}_{\equiv I_{ij},\ i\neq j},$$

$$\left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} + E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda(E_{ij} + E_{ji}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (E_{ij} + E_{ji})\Lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda_i + \lambda_j) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & E_{ij} + E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\equiv F_{ij},\ i\leq j},$$

$$G_{ij} = F_{ij}^T : \quad \left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}, G_{ij} \right] = -\left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}, F_{ij} \right]^T = -(\lambda_i + \lambda_j)G_{ij}.$$

Vidíme, že $\mathfrak{g}_0$ je skutečně Cartanova podalgebra. Funkcionály φ_i, definované předpisem $\varphi_i \left(\begin{smallmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{smallmatrix} \right) = \lambda_i$ pro $i \in \widehat{l}$, tvoří bázi $\mathfrak{g}_0^*$.

- Kořeny. Z relací výše, kde jsme našli kořenové vektory I_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, plyne tvar kořenů

$$\Delta = \{\varphi_i - \varphi_j \mid i \neq j\} \cup \{\varphi_i + \varphi_j \mid i \leq j\} \cup \{-(\varphi_i + \varphi_j) \mid i \leq j\}\,.$$

Zvolme $H_0 :\ \varphi_i(H_0) > \varphi_{i+1}(H_0) > 0, \forall i = 1, \dots, l$. Pak

$$\begin{aligned}
\Delta^+ &= \{\varphi_i - \varphi_j \mid i < j\} \cup \{\varphi_i + \varphi_j \mid i \leq j\}\,,\\
\Delta^- &= \{\varphi_i - \varphi_j \mid i > j\} \cup \{-(\varphi_i + \varphi_j) \mid i \leq j\}\,,\\
\Delta^P &= \{\underbrace{\varphi_i - \varphi_{i+1}}_{\equiv\alpha_i} \mid i \in \widehat{l-1}\} \cup \{\underbrace{2\varphi_l}_{\equiv\alpha_l}\}.
\end{aligned}$$

Ověříme, že kladné kořeny umíme vyjádřit pomocí prostých

$$\begin{aligned}
\varphi_i - \varphi_j &= (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + \dots + (\varphi_{j-1} - \varphi_j) = \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k,\\
\varphi_i + \varphi_j &= 2\varphi_l + (\varphi_i - \varphi_l) + (\varphi_j - \varphi_l) = \alpha_l + \sum_{k=i}^{l-1} \alpha_k + \sum_{k=j}^{l-1} \alpha_k.
\end{aligned}$$

- Cartanova matice. Její složky hledáme ze vztahu $a_{ij} = -q = 1 - \#\{k \in \mathbb{N} \mid \alpha_i + k\alpha_j \in \Delta^+\}$

$$\begin{array}{lll}
\{\alpha_i + k\alpha_j\}_{i,j<l} & = (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + k(\varphi_j - \varphi_{j+1}) & \Rightarrow \ |i-j| > 1: \quad k = 0,\\
& & \ |i-j| = 1: \quad k = 0, 1,\\
\{\alpha_i + k\alpha_l\}_{i<l} & = (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + 2k\varphi_l & \Rightarrow \ i < l-1: \quad k = 0,\\
& & \ i = l-1: \quad k = 0, 1,\\
\{\alpha_l + k\alpha_i\}_{i<l} & = 2\varphi_l + k(\varphi_i - \varphi_{i+1}) & \Rightarrow \ i < l-1: \quad k = 0,\\
& & \ i = l-1: \quad k = 0, 1, 2.
\end{array}$$

Tudíž $a_{l-1,l} = -1 = \frac{\langle\alpha_{l-1}, \alpha_l\rangle}{\langle\alpha_l, \alpha_l\rangle}$, $a_{l,l-1} = -2 = \frac{\langle\alpha_l, \alpha_{l-1}\rangle}{\langle\alpha_{l-1}, \alpha_{l-1}\rangle}$, tj. $\|\alpha_l\| = \sqrt{2}\,\|\alpha_{l-1}\|$. Celkem tedy máme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix}
2 & -1 & & & & \\
-1 & \ddots & \ddots & & & \\
& \ddots & 2 & -1 & & \\
& & -1 & 2 & -1 & \\
& & & -2 & 2 &
\end{pmatrix}, \qquad \underset{1}{\bullet} - \underset{2}{\bullet} - \cdots - \underset{l-2}{\bullet} - \underset{l-1}{\bullet} \Rightarrow \underset{l}{\bullet}$$

Cvičení 11.5. Najděte Cartanovu podalgebru, kořeny, kořenový a Dynkinův diagram speciální ortogonální algebry v sudé dimenzi

$$D_l = \mathfrak{so}(2l, \mathbb{C}) = \left\{A \in \mathbb{C}^{2l,2l} \mid A^T + A = 0\right\}, \text{ kde } l > 1.$$

Řešení. Ukážeme, že

$$\mathfrak{g}_0 = \{H = \operatorname{diag}(\lambda_1\sigma_2, \dots, \lambda_l\sigma_2)\}\,, \text{ kde } \sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

je Cartanova podalgebra. Nechť $X \in \mathbb{C}^{2,2}$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Požadujme

$$\lambda_i\sigma_2 X - \lambda_j X\sigma_2 = i\lambda_i \begin{pmatrix} -x_{21} & -x_{22} \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} - i\lambda_j \begin{pmatrix} x_{12} & -x_{11} \\ x_{22} & -x_{21} \end{pmatrix} \overset{!}{=} c(\lambda_i, \lambda_j) \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Rovnici zapíšeme ve tvaru

$$i\begin{pmatrix} ic & -\lambda_j & -\lambda_i & 0 \\ \lambda_j & ic & 0 & -\lambda_i \\ \lambda_i & 0 & ic & -\lambda_j \\ 0 & \lambda_i & \lambda_j & ic \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = 0$$

a z požadavku řešitelnosti soustavy det $= 0$ dostáváme hodnoty možných konstant $c(\lambda_i, \lambda_j)$ ve tvaru $c_{1,2,3,4} = \pm(\lambda_i \pm \lambda_j)$. Pro

- $c_1 = \lambda_i + \lambda_j$ najdeme (až na libovolný násobek) řešení X ve tvaru $\widetilde{F} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right) = \sigma_3 + i\sigma_1$,
- $c_2 = \lambda_i - \lambda_j$, $i < j$ dává $\widetilde{G} = \mathbb{I} + \sigma_2$,
- zbylé dvě matice získáváme sdružením hermitovským $\widetilde{F}^\dagger$, resp. komplexním $\widetilde{G}^*$.

Nyní již můžeme přímo zkonstruovat kořenové vektory ve tvaru

$$F_{ij} = \begin{array}{r} \\ \\ i \to \\ j \to \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \overset{i}{\downarrow} & \overset{j}{\downarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \vdots & \vdots \\ \dots & & & \widetilde{F} \\ \dots & & -\widetilde{F}^T & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}, \quad i < j, \quad [H, F_{ij}] = (\lambda_i + \lambda_j) F_{ij},$$

$$F_{ij}^\dagger : \qquad \left[H, F_{ij}^\dagger\right] = \left[H^\dagger, F_{ij}^\dagger\right] = -\left[H, F_{ij}\right]^\dagger = -(\lambda_i + \lambda_j) F_{ij}^\dagger, \text{ pro } H \in \mathfrak{h},$$

$$G_{ij} = \begin{array}{r} \\ \\ i \to \\ j \to \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \overset{i}{\downarrow} & \overset{j}{\downarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \vdots & \vdots \\ \dots & & & \widetilde{G} \\ \dots & & -\widetilde{G}^T & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}, \quad i < j, \quad [H, G_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) G_{ij},$$

$$G_{ij}^\dagger : \qquad \left[H, G_{ij}^\dagger\right] = \left[H^\dagger, G_{ij}^\dagger\right] = -\left[H, G_{ij}\right]^\dagger = -(\lambda_i - \lambda_j) G_{ij}^\dagger, \text{ pro } H \in \mathfrak{h}.$$

Zjišťujeme, že $\mathfrak{g}_0$ je rovna svému normalizátoru (a je abelovská), tj. je Cartanovou podalgebrou.

Zaveďme funkcionály $\varphi_j \in \mathfrak{g}_0^*$ předpisem $\varphi_j(H) = \lambda_j$. Kořeny odpovídající výše nalezeným kořenovým vektorům mají tvar

$$\Delta = \{\varphi_i + \varphi_j \mid i < j\} \cup \{\varphi_i - \varphi_j \mid i \neq j\} \cup \{-(\varphi_i + \varphi_j) \mid i < j\}.$$

Označme $H_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1\sigma_2, \dots, \lambda_l\sigma_2)$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l > 0$. Tím máme zavedeny kladné a prosté kořeny

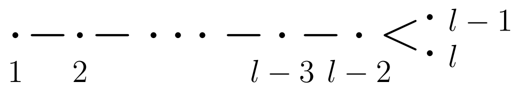
$$\begin{aligned} \Delta^+ &= \{\varphi_i + \varphi_j \mid i < j\} \cup \{\varphi_i - \varphi_j \mid i < j\} \\ \Delta^P &= \Big\{ \underbrace{\varphi_i - \varphi_{i+1}}_{\equiv \alpha_i} \Big| \, i \in \widehat{l-1} \Big\} \cup \Big\{ \underbrace{\varphi_{l-1} + \varphi_l}_{\equiv \alpha_l} \Big\} \end{aligned}$$

Složky Cartanovy matice hledáme ze vztahu $a_{ij} = -q = -\#\{k|\alpha_i + k\alpha_j \in \Delta^+\} + 1$

$$\begin{aligned} \alpha_i + k\alpha_{i+1} &= (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + k(\varphi_{i+1} - \varphi_{i+2}),\ i \in \widehat{l-1} && \Rightarrow\ k = 0, 1, \\ \alpha_{l-2} + k\alpha_l &= (\varphi_{l-2} - \varphi_{l-1}) + k(\varphi_{l-1} + \varphi_l) && \Rightarrow\ k = 0, 1, \\ \alpha_{l-1} + k\alpha_l &= (\varphi_{l-1} - \varphi_l) + k(\varphi_{l-1} + \varphi_l) && \Rightarrow\ k = 0. \end{aligned}$$

Tomu odpovídá

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & 2 & -1 & -1 \\ & & -1 & 2 & 0 \\ & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$



Změnou báze v $\mathbb{C}^{2l}$ lze přejít k formulaci, v níž bilineární kvadratická forma J není diagonální, tj.

$$D_l = \mathfrak{so}(2l, \mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathbb{C}^{2l,2l} \mid A^T J + JA = 0 \right\},\ \text{kde } J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{smallmatrix} \right),\ l > 1.$$

Pak je Cartanova podalgebra tvořená všemi diagonálními maticemi v takto zapsané algebře $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$.

Cvičení 11.6. Najděte Cartanovu podalgebru, kořeny, kořenový a Dynkinův diagram speciální ortogonální algebry v liché dimenzi

$$B_l = \mathfrak{so}(2l + 1, \mathbb{C}).$$

Řešení. Ukážeme, že Cartanova podalgebra má tvar

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ H = \begin{pmatrix} \lambda_1\sigma_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_l\sigma_2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zaveďme funkcionály

$$\varphi_i(H) = \varphi_i \begin{pmatrix} \lambda_1\sigma_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_l\sigma_2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda_i.$$

Uvažujme matice tvaru

$$X = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \vec{v} \\ -\vec{v}^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2l+1,2l+1},\ \text{kde } \vec{v} \in \mathbb{C}^{2l}, \quad \text{a} \quad H' = \begin{pmatrix} \lambda_1\sigma_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_l\sigma_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2l,2l}$$

(kde $\mathbb{O} \in \mathbb{C}^{2l,2l}$ je nulová matice). Takové matice vyhovují

$$[H, X] = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & H'\vec{v} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \vec{0} \\ -(\vec{v})^T H' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & H'\vec{v} \\ -(H'\vec{v})^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Za $\vec{v}$ vybereme vlastní vektory H', s vlastními čísly $\pm\lambda_i$. Při zohlednění výsledků cvičení 11.5 tak dostáváme kořenový systém ve tvaru

$$\Delta = \{\varphi_i + \varphi_j\}_{i<j} \cup \{\varphi_i - \varphi_j\}_{i\neq j} \cup \{-(\varphi_i + \varphi_j)\}_{i<j} \cup \{\varphi_i\}_{i=1}^{l} \cup \{-\varphi_i\}_{i=1}^{l}$$

a vidíme, že $\mathfrak{g}_0$ je rovna svému normalizátoru, tj. je Cartanova.

Zvolíme $H_0 : \lambda_i = \varphi_i(H_0)$, $\lambda_1 > \cdots > \lambda_l > 0$. To implikuje tvar kladných a prostých kořenů ve tvaru

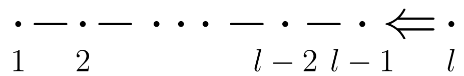
$$\begin{aligned} \Delta^+ &= \{\varphi_i + \varphi_j\}_{i<j} \cup \{\varphi_i - \varphi_j\}_{i<j} \cup \{\varphi_i\}\,, \\ \Delta^P &= \{\, \underbrace{\varphi_i - \varphi_{i+1}}_{\equiv\alpha_i} \,|\, i \in \widehat{l-1}\} \cup \{\, \underbrace{\varphi_l}_{\equiv\alpha_l} \,\}. \end{aligned}$$

Složky Cartanovy matice hledáme ze vztahu $a_{ij} = 1 - \#\{k|\alpha_i + k\alpha_j \in \Delta^+\}$

$$\begin{array}{lll} \alpha_{l-2} + k\alpha_l & = (\varphi_{l-2} - \varphi_{l-1}) + k\varphi_l & \Rightarrow \quad k = 0, \\ \alpha_{l-1} + k\alpha_l & = (\varphi_{l-1} - \varphi_l) + k\varphi_l & \Rightarrow \quad k = 0,1,2, \\ \alpha_l + k\alpha_{l-1} & = \varphi_l + k(\varphi_{l-1} - \varphi_l) & \Rightarrow \quad k = 0,1, \end{array}$$

což nám dává

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -2 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$



Kapitola 12

Reálné formy komplexních poloprostých Lieových algeber

V předchozí kapitole jsme dokončili klasifikaci všech konečněrozměrných poloprostých komplexních Lieových algeber (připomeňme, že poloprosté algebry jsou součtem prostých ideálů, ty jsou klasifikovány větou 11.13). V této kapitole se budeme zabývat otázkou, jak lze z této klasifikace odvodit klasifikaci reálných poloprostých algeber.

12.1 Konstrukce reálných forem

Z 2. Cartanova kritéria, tj. věty 8.5, víme, že reálná algebra je poloprostá právě tehdy, když její komplexifikace je poloprostá. (Je vhodné si zároveň uvědomit, že pro prosté algebry totéž neplatí, komplexifikace prosté algebry může mít netriviální prosté ideály, viz $\mathfrak{so}(1,3)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$.) Uvažme poloprostou reálnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus_{\mathbb{R}} \mathrm{i}\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$. Algebra $\mathfrak{g}$ se dá popsat jako reálná podalgebra v $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ charakterizovaná zobrazením ϕ:

$$\phi : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : \ \phi(u + \mathrm{i}v) = u - \mathrm{i}v, \ \forall u, v \in \mathfrak{g},$$
$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid \phi(X) = X\}.$$

Takto definované zobrazení ϕ má evidentně následující vlastnosti

- $\phi \circ \phi = \mathrm{id}$, tj. je **involutivní**,
- $\phi(\lambda X) = \overline{\lambda}\phi(X)$, $\phi(X + Y) = \phi(X) + \phi(Y)$, tj. je **antilineární**,
- $\phi\big([u_1 + \mathrm{i}v_1, u_2 + \mathrm{i}v_2]\big) = \phi\big(\,([u_1,u_2] - [v_1,v_2]) + \mathrm{i}\,([v_1,u_2] + [u_1,v_2])\,\big) =$
  $= ([u_1,u_2] - [v_1,v_2]) - \mathrm{i}\,([v_1,u_2] + [u_1,v_2]) = [u_1 - \mathrm{i}v_1, u_2 - \mathrm{i}v_2] =$
  $= \big[\phi(u_1 + \mathrm{i}v_1), \phi(u_2 + \mathrm{i}v_2)\big]$, tj. je **automorfismus**.

Naopak, mějme komplexní algebru $\mathfrak{g}$ a její involutivní antilineární automorfismus ϕ. Pak $\mathfrak{g}_\phi = \{X \in \mathfrak{g} \mid \phi(X) = X\}$ nám určuje reálnou podalgebru $\mathfrak{g}_\phi$ v $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : (\mathfrak{g}_\phi)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$.

Důkaz. Označme odpovídající $\mathbb{R}$–lineární zobrazení $\phi_{\mathbb{R}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ definované ve zvolené bázi $(e_j, \mathrm{i}e_j)_{j=1}^{l}$ algebry $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ předpisem $\phi_{\mathbb{R}}(e_i) = \phi(e_i) = a_i^j e_j +$

$b_i^j(\mathrm{i}e_j)$, $\phi_\mathbb{R}(\mathrm{i}e_i) = -\mathrm{i}\phi(e_i) = b_i^j e_j - a_i^j(\mathrm{i}e_j)$, kde $a_i^j, b_i^j \in \mathbb{R}$. Involutivnost evidentně zůstává zachována, $\phi_\mathbb{R} \circ \phi_\mathbb{R} = \mathrm{id}$, takže $\sigma(\phi_\mathbb{R}) \subset \{\pm 1\}$. Proto

$$\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \underbrace{\ker(\phi_\mathbb{R} - \mathbb{I})}_{\mathfrak{g}_\phi} \dot{+} \ker(\phi_\mathbb{R} + \mathbb{I}). \tag{12.1}$$

Vidíme, že pro každé $X \in \mathfrak{g}_\phi$, tj. $\phi(X) = X$, je $\phi(\mathrm{i}X) = -\mathrm{i}X$ tj. $\mathrm{i}X \in \ker(\phi_\mathbb{R} + \mathbb{I})$. Proto oba reálné podprostory v rozkladu (12.1) mají stejnou dimenzi a násobení imaginární jednotkou i v $\mathfrak{g}$ zobrazuje jeden na druhý, $\dim_\mathbb{R} \mathfrak{g}_\phi = \dim_\mathbb{C} \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\phi \dot{+}_\mathbb{R} \mathrm{i}\mathfrak{g}_\phi$. Protože platí $\phi\big([X,Y]\big) = [\phi(X), \phi(Y)] = [X,Y]$, je pro libovolná $X, Y \in \mathfrak{g}_\phi$ též $[X,Y] \in \mathfrak{g}_\phi$, tj. $\mathfrak{g}_\phi$ je reálná podalgebra $\mathfrak{g}$ taková, že $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\phi \dot{+}_\mathbb{R} \mathrm{i}\mathfrak{g}_\phi$. Jinými slovy, $\mathfrak{g}_\phi$ je reálná forma $\mathfrak{g}$. □

Takže jsme dokázali větu

Věta 12.1. Reálné formy komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ jsou popsány involutivními antilineárními automorfismy $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Příklad 12.2. Uvažme $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$ a několik involutivních antilineárních automorfismů $\phi : \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$. Tímto způsobem nacházíme následující reálné formy

$$\begin{aligned}
&\phi(X) = \overline{X}, && \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{R}),\\
&\phi(X) = -X^\dagger, && \mathfrak{g} = \big\{X \in \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C}) \mid -X^\dagger = X\big\} = \mathfrak{su}(l+1),\\
&\phi(A) = -JA^\dagger J, && \mathfrak{g} = \big\{X \in \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C}) \mid -JX^\dagger J = X\big\} = \mathfrak{su}(p,q),
\end{aligned}$$

kde $J = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{p}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{q})$, $p + q = l + 1$.

Větou 12.1 jsme konstrukci reálných forem převedli na hledání zobrazení s požadovanými vlastnostmi. Zůstává ovšem otázkou, jak lze involutivní antilineární automorfismy hledat a jak lze mezi nimi identifikovat ty, které vedou na izomorfní reálné formy. Tomuto problému se zde nebude podrobněji věnovat, ukážeme si pouze dvě reálné formy, které existují pro každou komplexní poloprostou algebru $\mathfrak{g}$.

Uvažujme komplexní poloprostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ vyjádřenou ve Weylově-Chevalley bázi, tj.

$$\begin{gathered}
\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta^P} \dot{+} \dot{+}_{\alpha\in\Delta} \mathrm{span}\{E_\alpha\},\\
[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha,\\
H \in \mathbb{R}\text{–}\mathrm{span}\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta^P} = \mathfrak{h} \quad \Rightarrow \quad \forall \alpha \in \Delta,\ \alpha(H) \in \mathbb{R}\\
[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \underbrace{K(E_\alpha, E_{-\alpha})}_{\in\mathbb{R}} H_\alpha,\\
[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta},\ N_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z},\ N_{(-\alpha)(-\beta)} = -N_{\alpha\beta}.
\end{gathered}$$

Označme

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{split}} = \mathbb{R}\text{–}\mathrm{span}\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta^P} \dot{+} \dot{+}_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}\text{–}\mathrm{span}\{E_\alpha\}.$$

Vidíme, že $\mathfrak{g}_{\mathrm{split}}$ je reálná forma algebry $\mathfrak{g}$, určená antilineárním automorfismem definovaným působením na bazické prvky $\phi(H_\alpha) = H_\alpha$, $\phi(E_\alpha) = E_\alpha$.

Vhodným nástrojem pro rozlišení reálných algeber je signatura Killingovy formy, neboť jako jediná ze zřejmých, na bázi nezávisejících charakteristik dané algebry nezůstává po komplexifikaci stejná.

Signatura Killingovy formy K algebry $\mathfrak{g}_{\mathrm{split}}$ plyne z následujících poznatků

- $K(H, E_\alpha) = 0$ protože $\mathfrak{h} \perp \operatorname{span}\{E_\alpha\}$,
- $K|_{\mathfrak{h}}$ je pozitivně definitní,
- $K(E_\alpha, E_\beta) = 0$ kdykoliv $\alpha + \beta \neq 0$.
- Buď $\alpha \in \Delta$, pak $\begin{pmatrix} K(E_\alpha, E_\alpha) & K(E_\alpha, E_{-\alpha}) \\ K(E_{-\alpha}, E_\alpha) & K(E_{-\alpha}, E_{-\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$, kde $\lambda \neq 0$. Proto je $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} K(E_\alpha, E_\alpha) & K(E_\alpha, E_{-\alpha}) \\ K(E_{-\alpha}, E_\alpha) & K(E_{-\alpha}, E_{-\alpha}) \end{pmatrix} = (1, 1, 0)$.

Z uvedených vztahů vyplývá, že ve zvolené bázi má při seřazení kořenů ve dvojicích $\alpha, -\alpha$ Killingova forma blokově diagonální tvar a její signatura je $\operatorname{sgn} K|_{\mathfrak{g}_{\text{split}}} = \left(\frac{n+l}{2}, \frac{n-l}{2}, 0\right)$.

Pro každou komplexní poloprostou algebru $\mathfrak{g}$ lze nalézt nejméně jednu další reálnou formu, značenou $\mathfrak{g}_{\text{komp}}$. Definujeme ji předpisem

$$\mathfrak{g}_{\text{komp}} := \underbrace{\mathbb{R}\text{–span}\{\mathrm{i}H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta^P}}_{i\mathfrak{h}} \dot{+} \dot{+}_{\alpha \in \Delta^+} \operatorname{span}\left\{ \frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}} \right\},$$

kde bázi kořenových vektorů jsme zvolili tak, že platí $K(E_\alpha, E_{-\alpha}) > 0$ pro všechna $\alpha \in \Delta^+$. Odpovídající zobrazení ϕ je určeno vztahy $\phi(H_\alpha) = -H_\alpha$, $\phi(E_\alpha) = -E_{-\alpha}$. Z jeho definice je evidentně $\phi^2 = \mathbb{I}$. Dále zjišťujeme, že

$$\begin{aligned}
\phi\big([H_\alpha, H_\beta]\big) &= [\phi(H_\alpha), \phi(H_\beta)] = 0, \\
\phi\big([H_\alpha, E_\beta]\big) &= \underbrace{\beta(H_\alpha)}_{\in\mathbb{R}} \phi(E_\beta) = -\beta(H_\alpha) E_{-\beta} = [H_\alpha, E_{-\beta}] = [\phi(H_\alpha), \phi(E_\beta)], \\
\phi\big([E_\alpha, E_\beta]\big) &= N_{\alpha\beta}\, \phi(E_{\alpha+\beta}) = -N_{\alpha\beta} E_{-\alpha-\beta} = N_{(-\alpha)(-\beta)} E_{-\alpha-\beta} = \\
&= [-E_{-\alpha}, -E_{-\beta}] = [\phi(E_\alpha), \phi(E_\beta)], \\
\phi\big([E_\alpha, E_{-\alpha}]\big) &= K(E_\alpha, E_{-\alpha}) \phi(H_\alpha) = -K(E_\alpha, E_{-\alpha}) H_\alpha = -[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \\
&= [-E_{-\alpha}, -E_\alpha] = [\phi(E_\alpha), \phi(E_{-\alpha})], \\
\phi\left(\frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \quad \phi\left(\frac{\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-\mathrm{i}(-E_{-\alpha} - E_\alpha)}{\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}} \\
\phi(\mathrm{i}H_\alpha) &= -\mathrm{i}(-H_\alpha) = \mathrm{i}H_\alpha,
\end{aligned}$$

tj. ϕ je antilineární involutivní automorfismus, jak je požadováno, a $\phi_{\mathfrak{g}_{\text{komp}}} = \mathbb{I}$. Signaturu Killingovy formy reálné algebry $\mathfrak{g}_{\text{komp}}$ určíme z toho, že $K|_{\mathrm{i}\mathfrak{h}}$ je negativně definitní a

$$\begin{aligned}
K\left(\frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}\right) &= -K(E_\alpha, E_{-\alpha}) < 0, \\
K\left(\frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}\right) &= 0, \\
K\left(\frac{i(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}\right) &= -K(E_\alpha, E_{-\alpha}) < 0.
\end{aligned}$$

Celkem tedy vidíme, že $K_{\mathfrak{g}_{\text{komp}}}$ je negativně definitní, $\operatorname{sgn} K_{\mathfrak{g}_{\text{komp}}} = (0, n, 0)$.

Bez důkazu si uveďme větu dávající do souvislosti topologicky kompaktní Lieovy grupy a negativní definitnost Killingovy formy.

Věta 12.3 (Weylova o kompaktních Lieových grupách)**.** Buď $\mathfrak{g}$ reálná poloprostá Lieova algebra, G jí odpovídající souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa. Grupa G je kompaktní právě tehdy, když Killingova forma algebry $\mathfrak{g}$ je negativně definitní.

To je důvodem, proč reálné poloprosté Lieovy algebry s negativně definitní Killingovou formou nazýváme **kompaktní**.

12.2 Invariantní integrál na kompaktních Lieových grupách

Kompaktní Lieovy grupy mají jednu podstatnou vlastnost: lze na nich zavést způsob integrování, který je invariantní vůči levému i pravému přenásobení integrační proměnné prvkem grupy. To nám mj. umožňuje ukázat klíčový poznatek, že konečněrozměrné reprezentace kompaktní Lieovy grupy jsou úplně reducibilní.

Mějme $(X_j)_{j=1}^{\dim\mathfrak{g}}$ bázi $\mathfrak{g}$, a σ^k k ní duální diferenciální 1-formy v $\Gamma(T^*G)$. Jinými slovy, pro všechna $g, h \in G$ máme

$$L_{g*}\left(X_j|_h\right) = X_j|_{gh}\,, \quad \sigma^j\left(X_k|_g\right) = \delta^j{}_k, \quad L_g^*\left(\sigma^j|_{gh}\right)\left(X_k|_h\right) = \sigma^j\big|_{gh}\big(\underbrace{L_{g*}\left(X_k|_h\right)}_{X_k|_{gh}}\big) = \delta^j{}_k,$$

tj. $L_g^*\left(\sigma^j|_{gh}\right) = \sigma^j|_h\,.$

Definice 12.4. Diferenciální forma $\omega \in \Omega^\bullet(G)$ se nazývá **levoinvariantní** právě tehdy, když pro všechna $g, h \in G$ platí

$$L_g^*\left(\omega|_{gh}\right) = \omega|_h\,.$$

Formy σ^k duální k bázi $\mathfrak{g}$ jsou tedy levoinvariantní 1-formy a tvoří bázi prostoru všech levoinvariantních 1–forem na G. Diferenciální n–forma $\omega = \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n$, kde $n = \dim\mathfrak{g}$, je levoinvariantní objemový element na G, neboť je definovaná na celém G a je všude nenulová.

Poznámka 12.5. Levoinvariantní 1-formy (σ^k) duální k bázi (X_j) v $\mathfrak{g}$ se strukturními konstantami $c_{jk}{}^l$, tj. $[X_j, X_k] = \sum_m c_{jk}{}^l X_l$ vyhovují důležitému vztahu zvanému Maurer-Cartanova rovnice

$$\mathrm{d}\sigma^j = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} c_{kl}{}^j \sigma^k \wedge \sigma^l, \tag{12.2}$$

jenž plyne dosazením ze vztahu $\mathrm{d}\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$ platného pro libovolná $\omega \in \Omega^1(M)$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Uzavřenost 2-formy $\mathrm{d}\sigma^j$ je pak ekvivalentním vyjádřením Jacobiho identit

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}\sigma^j\right) &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l} c_{kl}{}^j\left(\mathrm{d}\sigma^k \wedge \sigma^l - \sigma^k \wedge \mathrm{d}\sigma^l\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} c_{kl}{}^j\left(\mathrm{d}\sigma^k \wedge \sigma^l - \mathrm{d}\sigma^l \wedge \sigma^k\right) = \\ &= -\sum_{k,l} c_{kl}{}^j\left(\mathrm{d}\sigma^k \wedge \sigma^l\right) = \frac{1}{2}\sum_{a,b,l}\sum_k c_{kl}{}^j c_{ab}{}^k \sigma^a \wedge \sigma^b \wedge \sigma^l = \\ &= \sum_{a<b<l}\sum_k \left(c_{kl}{}^j c_{ab}{}^k + c_{ka}{}^j c_{bl}{}^k + c_{kb}{}^j c_{la}{}^k\right)\sigma^a \wedge \sigma^b \wedge \sigma^l \end{aligned}$$

neboť $\left(\sigma^a \wedge \sigma^b \wedge \sigma^l\right)_{a<b<l}$ tvoří bázi prostoru 3–forem v libovolném zvoleném bodě $g \in G$.

Věta 12.6. Nechť G je kompaktní. Pak levoinvariantní objemový element $\omega = \sigma^1\wedge\cdots\wedge\sigma^n$ je současně pravoinvariantní, $R_g^*\omega = \omega$. Říkáme, že ω je **biinvariantní** objemový element či biinvariantní míra.

Důkaz. Sporem: Nechť $R^*_{g^{-1}}\omega \neq \omega$. Bez újmy na obecnosti (jinak zaměníme $g \to g^{-1}$) předpokládejme, že $\omega(X_1,\dots,X_n) = 1$ a $R^*_{g^{-1}}\omega(X_1,\dots,X_n)\Big|_h = c$, $|c| > 1$ pro zvolené prvky grupy $g, h \in G$ a bázi $(X_j)_{j=1}^n$ v $\mathfrak{g}$. V případě, že $c < -1$, nahradíme g prvkem g^2, abychom měli nové $c > 1$. Máme

$$[L_{g*}, R_{h*}] = 0 \quad \Rightarrow \quad L_h^*\left(R^*_{g^{-1}}\omega\right) = R^*_{g^{-1}}\big(\underbrace{L_h^*\omega}_{\omega}\big) = R^*_{g^{-1}}\omega,$$

tudíž forma $R^*_{g^{-1}}\omega$ je opět levoinvariantní, tj. při vyhodnocení $R^*_{g^{-1}}\omega(X_1,\dots,X_n)\Big|_h$ na výběru bodu h nezáleží, výsledek je stejný pro všechna $h \in G$. Zvolíme $h = e$. Protože $\mathrm{Ad}_g = L_{g*} \circ R_{g^{-1}*} : T_eG \to T_eG \equiv \mathfrak{g}$, máme

$$\begin{aligned} c = L_g^* R^*_{g^{-1}}\omega(X_1,\dots,X_n)\Big|_e &= \omega\left(L_{g*}R_{g^{-1}*}\left(X_1|_e\right),\dots,L_{g*}R_{g^{-1}*}\left(X_n|_e\right)\right) = \\ &= \omega\left(\mathrm{Ad}_g\left(X_1|_e\right),\dots,\mathrm{Ad}_g\left(X_n|_e\right)\right) = \det\mathrm{Ad}_g \cdot \underbrace{\omega\left(X_1|_e,\dots,X_n|_e\right)}_{=1} = \det\mathrm{Ad}_g. \end{aligned}$$

Vidíme, že pro všechny $g \in G$ je $R^*_{g^{-1}}\omega\left(X_1,\dots,X_n\right) = \det\mathrm{Ad}_g \equiv F(g)$, přičemž pro zvolené g je $F(g) > 1$. Ale zobrazení $F : G \to (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ je homomorfismus grup, neboť

$$F(g_1g_2) = \det\mathrm{Ad}_{g_1g_2} = \det\mathrm{Ad}_{g_1}\mathrm{Ad}_{g_2} = \det\left(\mathrm{Ad}_{g_1}\right)\det\left(\mathrm{Ad}_{g_2}\right) = F(g_1)F(g_2).$$

Tudíž $F(g^n) = c^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a v limitě $n \to +\infty$ máme $F(g^n) \to +\infty$. Ale F je hladká funkce na kompaktní varietě G, tj. je omezená a nabývá svého maxima a minima, což je hledaný spor. □

Poznámka 12.7. Buď G kompaktní, ω výše zavedený biinivariantní objemový element. Protože Lieova grupa je vždy orientovatelná, je integrál $\int\limits_G \omega$ definován až na volbu orientace a je konečný. Vhodným výběrem orientace lze docílit $0 < \int\limits_G \omega < \infty$.

Důsledek 12.8. Pro kompaktní Lieovu grupu G platí

- Pro libovolnou funkci $f \in C^\infty(G)$ je

$$\int\limits_G f\cdot\omega = \int\limits_G (f\circ L_g)\cdot\omega = \int\limits_G (f\circ R_g)\cdot\omega, \tag{12.3}$$

  protože

$$\int\limits_G (f\circ L_g)\,\omega = \int\limits_G \left(L_g^*f\right)\left(L_g^*\omega\right) = \int\limits_{L_g(G)} f\omega = \int\limits_G f\omega$$

  dle věty o substituci v integrálu, tj. $\int\limits_N \phi^*\kappa = \int\limits_{\phi(N)} \kappa$. Analogicky pro R_g.

- Pro $\rho : G \to GL(V)$, kde V má konečnou dimenzi, a jakýkoliv skalární součin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na V, zavedeme jeho zprůměrování přes grupu G,

$$\langle u, v\rangle_G := \int\limits_G \langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle \cdot \omega. \tag{12.4}$$

  Přímým dosazením je vidět, že se jedná opět o pozitivně definitní symetrickou formu, tj. skalární součin na V. Pro libovolné $\widetilde{g} \in G$ a $u, v \in V$ platí

$$\langle \rho(\widetilde{g})u, \rho(\widetilde{g})v\rangle_G = \int\limits_G \langle \rho(g)\rho(\widetilde{g})u, \rho(g)\rho(\widetilde{g})v\rangle \cdot \omega = \int\limits_G \langle \rho(g\widetilde{g})u, \rho(g\widetilde{g})v\rangle \cdot \omega =$$
$$= \int\limits_G R^*_{\widetilde{g}} \langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle \cdot \underbrace{\omega}_{=R^*_{\widetilde{g}}\omega} = \int\limits_{R_{\widetilde{g}}(G)} \langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle \cdot \omega = \langle u, v\rangle_G.$$

  Vidíme, že vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ je ρ unitární (ortogonální, dle tělesa V) reprezentace kompaktní grupy G na V.

Z toho vyplývá

Lemma 12.9. Konečněrozměrné reprezentace kompaktní Lieovy grupy G jsou unitární (ortogonální) vůči vhodně zvolenému skalárnímu součinu. Proto jsou též úplně reducibilní.

Věta 12.10 (Weylova)**.** Konečněrozměrné reprezentace komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ jsou úplně reducibilní.

Důkaz. Pro algebru $\mathfrak{g}$ a její reprezentaci $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ najdeme $\mathfrak{g}_{\text{komp}}$, $(\mathfrak{g}_{\text{komp}})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$ a $\rho|_{\mathfrak{g}_{\text{komp}}} : \mathfrak{g}_{\text{komp}} \to \mathfrak{gl}(V)$, máme tedy i reprezentaci příslušné kompaktní souvislé a jednoduše souvislé Lieovy grupy G, ta je úplně reducibilní. Proto máme ireducibilní invariantní podprostory pro G_{komp}, $\mathfrak{g}_{\text{komp}}$ i $\mathfrak{g}$. □

Tento přístup k důkazu úplné reducibility reprezentací poloprostých algeber oklikou přes reprezentace kompaktních grup se v literatuře obvykle nazývá Weylův unitární trik. Je to původní způsob odvození tohoto výsledku. Čistě algebraické důkazy, nevyužívající odpovídající Lieovu grupu, byly nalezeny až o několik desetiletí později.

12.3 Cvičení

Cvičení 12.1. Uvažujte Lieovu grupu $Af(1)$ a sestavte na ní bazické levoinvariantní 1–formy σ^i, ověřte na nich Maurer–Cartanovy rovnice a sestavte levoinvariantní objemový element ω. Je v tomto případě též pravoinvariantní?
Řešení. Máme $[X_1, X_2] = X_2$, $X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}$,

$$L_{(a,b)}(x, y) = (ax, ay + b), \qquad R_{(a,b)}(x, y) = (xa, xb + y).$$

Tudíž duální levoinvariantní 1–formy a objemový element mají tvar

$$\sigma^1 = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \qquad \sigma^2 = \frac{\mathrm{d}y}{x}, \qquad \omega = \sigma^1 \wedge \sigma^2 = \frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{x^2}.$$

Maurer–Cartanovy rovnice jsou

$$\mathrm{d}\sigma^1 = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = 0 = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} c_{kl}{}^1\sigma^k \wedge \sigma^l, \ (\text{neboť } c_{kl}{}^1 = 0),$$

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{x}\right) = -\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{x^2} = -\sigma^1 \wedge \sigma^2 = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} c_{kl}{}^2\sigma^k \wedge \sigma^l.$$

Levoinvarianci a případnou pravoinvarianci můžeme ověřit následovně:

$$L^*_{(a,b)}\sigma^1 = \frac{\mathrm{d}(ax)}{ax} = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \sigma^1, \qquad R^*_{(a,b)}\sigma^1 = \frac{\mathrm{d}(xa)}{xa} = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \sigma^1,$$

$$L^*_{(a,b)}\sigma^2 = \frac{\mathrm{d}(ay+b)}{ax} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \sigma^2, \qquad R^*_{(a,b)}\sigma^2 = \frac{\mathrm{d}(xb+y)}{ax} = \frac{b\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{ax} \neq \sigma^2,$$

$$L^*_{(a,b)}\omega = \omega, \qquad R^*_{(a,b)}\omega = \frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{ax^2} \neq \omega.$$

Kapitola 13

Reprezentace poloprostých Lieových algeber

V aplikacích se většinou setkáme s Lieovými grupami nikoliv jako s abstraktními matematickými objekty, ale jako se strukturami působícími na nějakém prostoru prostřednictvím své akce. Mezi nimi nejvýznačnější místo zaujímají lineární akce na vektorových prostorech, tj. reprezentace. Proto je teorie reprezentací zcela zásadní pro využití Lieových grup a algeber v aplikacích. V této kapitole si stručně nastíníme základy teorie reprezentací poloprostých Lieových algeber (a tedy i jim odpovídajících jednoduše souvislých Lieových grup).

13.1 Váhy a váhové podprostory dané reprezentace

Uvažujme komplexní poloprostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{g}_0$ a kořenovým systémem Δ spolu s její reprezentací ρ na komplexním vektorovém prostoru V konečné dimenze.

Buď $\alpha, \beta \in \Delta$. Pak odpovídající $T_\alpha, T_\beta \in \mathfrak{g}_0$ komutují, neboť $[T_\alpha, T_\beta] = 0$. Proto $\rho(\mathfrak{g}_0) = \{\rho(H) \mid H \in \mathfrak{g}_0\}$ je podprostor v $\mathcal{L}(V)$ tvořený komutujícími operátory. Rádi bychom ukázali, že jsou diagonalizovatelné, protože v takovém případě lze V vyjádřit jako direktní součet společných vlastních podprostorů.

Uvažujme $\alpha \in \Delta$. Pak span $\{X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]\}$ je podalgebra izomorfní $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ a tedy $\rho(X_\alpha)$, $\rho(X_{-\alpha})$, $\rho(T_\alpha)$ definuje reprezentaci algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ na V, ta je dle Weylovy věty 12.10 úplně reducibilní, tj. je direktním součtem ireducibilních reprezentací $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, v každé z nich dle věty 9.25 působí $\rho(T_\alpha)$ diagonálně. Proto je operátor $\rho(T_\alpha)$ na V diagonalizovatelný a celá $\rho(\mathfrak{g}_0)$ je množinou komutujících diagonalizovatelných operátorů. Vektorový prostor V lze proto rozložit na společné vlastní podprostory $\rho(\mathfrak{g}_0)$

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{g}_0^*} V_\lambda, \qquad V_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker\left(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{I}\right).$$

Definice 13.1. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{g}_0$ a kořenovým systémem Δ a ρ její reprezentace na komplexním vektorovém prostoru V konečné dimenze.

- **Váha** reprezentace ρ je každý funkcionál $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ takový, že

$$V_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker\left(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{I}\right) \neq \{0\}.$$

- Příslušný V_λ nazýváme **váhový podprostor** reprezentace ρ příslušný váze λ.
- **Váhový diagram** reprezentace ρ jsou všechny její váhy vyjádřené jako vektory v Euklidově prostoru $\mathfrak{h}^*$.
- **Váhová mřížka** je množina $\mathcal{J} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(T_\alpha) \in \mathbb{Z},\ \forall \alpha \in \Delta\} \subset \mathfrak{h}^*$.

Poznámka 13.2. Váhy leží v reálném prostoru $\mathfrak{h}^*$, protože $\sigma\left(\rho(T_\alpha)\right) \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ dle věty 9.25.

Příklad 13.3. Pro adjungovanou reprezentaci ($\rho = \mathrm{ad}$) jsou nenulové váhy kořeny a V_0 je Cartanova podalgebra.

Poznámka 13.4. Váhová mřížka $\mathcal{J}$ je mřížkou ve smyslu

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{J},\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \in \mathcal{J}.$$

Bázi $(\lambda_j)_{j=1}^l$ mřížky $\mathcal{J}$ tvoří $\lambda_j \in \mathcal{J}$ taková, že pro každé $\lambda \in \mathcal{J}$ existují $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{Z}$ splňující $\lambda = \sum_{j=1}^l m_j\lambda_j$. Později uvidíme, že bázi (λ_j) váhové mřížky $\mathcal{J}$ lze volit ve tvaru $\lambda_j(T_{\alpha_k}) = \delta_{jk},\ \forall \alpha_k \in \Delta^P$.

Věta 13.5. Mějme ρ reprezentaci komplexní poloprosté algebry $\mathfrak{g}$ na vektorovém prostoru V. Nechť Λ_ρ je množina všech jejích vah, $\Lambda_\rho = \left\{\lambda \in \mathfrak{g}_0^* \mid V_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker\left(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{I}\right) \neq 0\right\}$. Pak $\Lambda_\rho \subset \mathcal{J},\ V = \bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda_\rho} V_\lambda$ a Λ_ρ je invariantní vzhledem k působení Weylovy grupy $\mathcal{W}$ kořenového systému Δ, tj. pokud je $\alpha \in \Delta$, $\lambda \in \Lambda_\rho$, pak $S_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha \in \Lambda_\rho$. Pro libovolné $\lambda \in \Lambda_\rho$, $\varepsilon = \operatorname{sgn} \lambda(T_\alpha)$ dokonce platí $\{\lambda, \lambda - \varepsilon\alpha, \ldots, \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha = S_\alpha(\lambda)\} \subset \Lambda_\rho$ a $\dim V_\lambda = \dim V_{S_\alpha(\lambda)}$.

Důkaz. Už víme, že $V = \bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda_\rho} V_\lambda$ a $\sigma\left(\rho(T_\alpha)\right) \subset \mathbb{Z}$, protože $\rho(T_\alpha)$ patří do vhodné reprezentace algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Proto je $\Lambda_\rho \subset \mathcal{J}$. Pro $\alpha \in \Delta$ označme $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha = \operatorname{span}\{X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha\}$. Vezměme $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$. Pak pro všechny $H \in \mathfrak{g}_0$ máme $\rho(H)v = \lambda(H)v$ a platí

$$\rho(H)\left(\rho(X_{\pm\alpha})v\right) = \rho\big(\underbrace{[H, X_{\pm\alpha}]}_{\pm\alpha(H)X_{\pm\alpha}}\big)v + \rho(X_{\pm\alpha})(\lambda(H)v) = \left(\lambda(H) \pm \alpha(H)\right)\left(\rho(X_{\pm\alpha})v\right). \tag{13.1}$$

Vidíme, že je-li $\rho(X_{\pm\alpha})v \neq 0$, pak $\lambda \pm \alpha \in \Lambda_\rho$ a $\rho(X_{\pm\alpha})v \in V_{\lambda\pm\alpha}$. Máme-li $\lambda \in \Lambda_\rho$ a $\alpha \in \Delta$, pak vždy najdeme ireducibilní reprezentaci $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ na nějakém $\tilde{V} \subset V$ takovou, že $\lambda|_{(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha)_0}$ je vahou této reprezentace, tj. existuje nenulový vektor $v \in \tilde{V} \cap V_\lambda$ takový, že $\rho(T_\alpha)v = \lambda(T_\alpha)v$. Z věty 9.25 vidíme, že $\lambda(T_\alpha) \in \{-r, -r+2, \ldots, r\} = \sigma(\rho(T_\alpha)|_{\tilde{V}})$, tj.

$$\{\lambda(T_\alpha), \lambda(T_\alpha) - \underbrace{\varepsilon\alpha(T_\alpha)}_{2\varepsilon}, \ldots, \lambda(T_\alpha) - 2\lambda(T_\alpha) = -\lambda(T_\alpha)\} \subset \{-r, \ldots, r\}$$

a vektory $\rho(X_{-\varepsilon\alpha})v, \big(\rho(X_{-\varepsilon\alpha})\big)^2 v, \ldots, \big(\rho(X_{-\varepsilon\alpha})\big)^{|\lambda(T_\alpha)|} v$ jsou díky vlastnostem ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ nenulové vlastní vektory operátoru $\rho(T_\alpha)|_{\tilde{V}}$. Proto jsou podprostory $V_{\lambda-\varepsilon\alpha}, \ldots, V_{\lambda-\lambda(T_\alpha)\alpha}$ nenulové, tj. s využitím rovnice (13.1) vidíme, že $\lambda - \varepsilon\alpha, \ldots, \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha$ jsou váhy. Z jednorozměrnosti váhových podprostorů ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ vidíme, že pro lineárně nezávislé vektory z V_λ nacházíme různé ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$, každá zobrazuje vzájemně jednoznačně vektory $v \leftrightarrow \big(\rho(E_{-\varepsilon\alpha})\big)^{|\lambda(T_\alpha)|} v \in V_{S_\alpha(\lambda)}$. Proto musí být $\dim V_\lambda \leq \dim V_{S_\alpha(\lambda)}$ Využitím $S_\alpha^2 = \mathbb{I}$ vidíme, že nerovnost lze obrátit, musí tedy platit rovnost $\dim V_\lambda = \dim V_{S_\alpha(\lambda)}$. $\square$

Definice 13.6. Pro $\lambda \in \Lambda_\rho$ dimenzi $\dim V_\lambda \equiv n_\lambda$ nazýváme **násobnost** váhy λ.

Definice 13.7. Váha $\lambda \in \Lambda_\rho$ je **dominantní** právě tehdy, když pro všechny $\alpha \in \Delta^+$ je $\lambda(T_\alpha) \geq 0$ (tj. $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$). Stejně definujeme dominantní prvky váhové mřížky $\mathcal{J}$.

Definice 13.8. Váha $\lambda \in \Lambda_\rho$ je **nejvyšší** právě tehdy, když pro všechny $\alpha \in \Delta^+$ platí, že $\lambda + \alpha$ není vahou reprezentace ρ.

Poznámka 13.9. Evidentně díky konečné dimenzi V každá reprezentace $\mathfrak{g}$ na V má alespoň jednu nejvyšší váhu.

Definice 13.10. Pro reprezentaci $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ a její nejvyšší váhu λ zvolíme vektor $v \in V_\lambda,\ v \neq 0$ a definujeme

$$R_\lambda = \operatorname{span}\{\rho(X_1)\dots\rho(X_k)v \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ X_j \in \mathfrak{g}\},$$

tj. $R_\lambda \subset\subset V$ a $\rho(X)R_\lambda \subset R_\lambda$ pro všechna $X \in \mathfrak{g}$.

Věta 13.11. R_λ je invariantní podprostor reprezentace ρ, $\rho|_{R_\lambda} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(R_\lambda)$ je ireducibilní, $\dim R_\lambda \cap V_\lambda = 1$, tj. $R_\lambda \cap V_\lambda = \operatorname{span}\{v\}$.

Důkaz. V definici R_λ stačí uvažovat $X_i = E_\alpha,\ \alpha \in \Delta$ a $X_i = H,\ H \in \mathfrak{g}_0$, cokoliv jiného získáváme lineární kombinací. Uvažujme $\alpha, \dots, \omega \in \Delta$, pak opakovaným využitím $\rho\big([H, E_\alpha]\big) = \alpha(H)\rho(E_\alpha)$ zjišťujeme, že

$$\rho(H)\big(\rho(E_\alpha)\dots\rho(E_\omega)v\big) = \big(\lambda(H) + \alpha(H) + \dots + \omega(H)\big)\big(\rho(E_\alpha)\dots\rho(E_\omega)v\big). \qquad (13.2)$$

Proto $\rho(E_\alpha)\dots\rho(E_\omega)v \in V_{\lambda+\alpha+\dots+\omega}$, a v definici R_λ stačí uvažovat $X_i = E_\alpha,\ \alpha \in \Delta$. Operátory $\rho(H)$ na R_λ působí diagonálně v bázi vybrané z prvků tvaru $\rho(E_\alpha)\dots\rho(E_\omega)v$.

Vezměme $w \in R_\lambda \cap V_\lambda$ ve tvaru $w = \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \Delta \\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}}} \text{konst.}\, \rho(E_{\alpha_1})\dots\rho(E_{\alpha_k})v$. Protože v každém členu je dle rovnice (13.2) váhový vektor, váhové podprostory mají nulový průnik a chceme, aby výsledkem byl vektor s vahou λ, musí po případném vyrušení opakujících se členů v lineární kombinaci být pro každý člen $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$. Proto některé z kořenů v součtu musí být kladné, některé záporné. Kladné prokomutujeme doprava pomocí vztahů $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$, resp. $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \text{konst.}\, H_\alpha$. Nakonec jsou všechny kladné kořeny napravo a z maximality λ pro $\alpha \in \Delta^+$ platí $\rho(E_\alpha)v = 0$. Tudíž nyní jsou v součtu jen záporné kořeny, ale stále platí $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$. Proto $k = 0$, $w = \text{konst.}\, v$, $R_\lambda \cap V_\lambda = \operatorname{span}\{v\}$.

Ireducibilitu dokážeme sporem: mějme invariantní podprostor $W \subset\subset R_\lambda$ takový, že $W \cap (R_\lambda \cap V_\lambda) = \{0\}$. Podprostor W musí být rozložitelný do váhových podprostorů reprezentace ρ na R_λ. Proto má nenulový průnik s nějakými V_κ, $\kappa \neq \lambda$, $\kappa \in \Lambda_{\rho|_{R_\lambda}}$. Označme $W_\kappa = W \cap V_\kappa$. Pak platí $W = \dot{+} W_\kappa$. Z úplné reducibility reprezentace $\rho|_{R_\lambda}$ ale vyplývá, že z $v \in V_\lambda$ se nelze dostat do W_κ působením $\rho(X)$, tj. $W_\kappa \cap R_\lambda = 0$, $W = \{0\}$. $\square$

Důsledek 13.12. Ireducibilní reprezentace ρ poloprosté komplexní algebry na V s nejvyšší vahou λ je nutně totožná s příslušným R_λ, tj. $V = R_\lambda$.

Věta 13.13. Buďte $\rho, \widetilde{\rho}$ ireducibilní reprezentace dané komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na vektorových prostorech $V, \widetilde{V}$ se stejnou nejvyšší vahou λ. Pak jsou reprezentace $\rho, \widetilde{\rho}$ ekvivalentní, tj. existuje lineární bijekce $T : V \to \widetilde{V}$ taková, že pro všechna $X \in \mathfrak{g}$ platí

$$\widetilde{\rho}(X) \circ T = T \circ \rho(X).$$

Důkaz. Z předpokládané ireducibility plyne $V = R_\lambda, \widetilde{V} = \widetilde{R}_\lambda$. Definujeme nekonečněrozměrný prostor $\mathcal{V}^\lambda$ nazývaný **Verma modul** s nejvyšší vahou λ a reprezentaci algebry $\mathfrak{g}$ na něm následujícím způsobem. Buď $\Delta^P = \{\alpha_j\}_{j=1}^l$, $E_{\pm j} \equiv E_{\pm\alpha_j}$ a v_0 abstraktní vektor. $\mathcal{V}^\lambda$ získáme jako lineární obal všech vícenásobných formálních aplikací E_{-j} na vektor v_0

$$\mathcal{V}^\lambda := \operatorname{span}\left\{E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0 \mid j_1,\dots,j_k \in \{1,\dots,l\},\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\},$$

Protože span $\left\{E_\alpha, E_{-\alpha} \mid \alpha\in\Delta^P\right\}$ generuje pomocí komutátorů celou algebru $\mathfrak{g}$, je libovolná reprezentace algebry $\mathfrak{g}$ určená působením $E_{\pm\alpha}$, $\alpha\in\Delta^P$.

Nejprve definujeme působení algebry $\mathfrak{g}$ na v_0:

$$\begin{aligned} &T_\alpha(v_0) = \lambda(T_\alpha)v_0, && \forall\alpha\in\Delta, \\ &E_j(v_0) = 0, && E_{-j}(v_0) = E_{-j}v_0, \qquad \forall j\in\ \{1,\dots,l\}. \end{aligned}$$

Obdobně definujeme

$$E_{-j}\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) = E_{-j}E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0.$$

Konzistentnost takto definované reprezentace vyžaduje

$$\begin{aligned} T_\beta\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) &= \left(\lambda(T_\beta) - \alpha_{j_1}(T_\beta) - \dots - \alpha_{-j_k}(T_\beta)\right)E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0, \\ E_j\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) &= \delta_{jj_1}\underbrace{T_{\alpha_j}\left(E_{-j_2}\dots E_{-j_k}v_0\right)}_{\left(\lambda(T_{\alpha_j})-\alpha_{j_2}(T_{\alpha_j})-\dots-\alpha_{-j_k}(T_{\alpha_j})\right)E_{-j_2}\dots E_{-j_k}v_0} + \\ &\quad + \delta_{jj_2}E_{-j_1}\left(\lambda\left(T_{\alpha_j}\right) - \alpha_{j_3}\left(T_{\alpha_j}\right) - \dots - \alpha_{-j_k}\left(T_{\alpha_j}\right)\right)E_{-j_3}\dots E_{-j_k}v_0 + \\ &\quad + \dots + \delta_{jj_k}\lambda\left(T_{\alpha_j}\right)E_{-j_1}\dots E_{-j_{k-1}}v_0. \end{aligned}$$

Lze ukázat, že tímto způsobem definované působení span$\{E_\alpha, E_{-\alpha} \mid \alpha\in\Delta^P\}$ na V_λ definuje konzistentním způsobem reprezentaci $\mathfrak{g}$ na $\mathcal{V}^\lambda$.

Nyní můžeme definovat lineární zobrazení $\pi : \mathcal{V}^\lambda \to R_\lambda$, $\widetilde{\pi} : \mathcal{V}^\lambda \to \widetilde{R}_\lambda$ předpisem

$$\begin{aligned} \pi\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) &= \rho\left(E_{-j_1}\right)\dots\rho\left(E_{-j_k}\right)v, \\ \widetilde{\pi}\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) &= \widetilde{\rho}\left(E_{-j_1}\right)\dots\widetilde{\rho}\left(E_{-j_k}\right)\widetilde{v}. \end{aligned}$$

Protože span $\left\{E_\alpha, E_{-\alpha} \mid \alpha\in\Delta^P\right\}$ generuje pomocí komutátorů celou algebru $\mathfrak{g}$, jsou zobrazení $\pi, \widetilde{\pi}$ surjektivní. Z konstrukce $\mathcal{V}^\lambda$ pro libovolné $X\in\mathfrak{g}$ platí $\rho(X)\circ\pi = \pi\circ X$, $\widetilde{\rho}(X)\circ\widetilde{\pi} = \widetilde{\pi}\circ X$ a π, $\widetilde{\pi}$ zobrazují váhové podprostory reprezentace na $\mathcal{V}^\lambda$ na váhové podprostory $\rho, \widetilde{\rho}$.

V důsledku pro všechna $X\in\mathfrak{g}$ platí $X(\ker\pi)\subset\ker\pi$ a podobně pro $\ker\widetilde{\pi}$, tj. $\ker\pi$ a $\ker\widetilde{\pi}$ jsou invariantní podprostory $\mathcal{V}^\lambda$. Jejich zobrazením projekcemi $\pi, \widetilde{\pi}$ získáváme podprostory

$$\widetilde{\pi}(\ker\pi) = \operatorname{span}\left\{\widetilde{\pi}(Z) \mid Z\in\ker\pi,\ \text{tj. } \pi(Z) = 0\right\}$$

a podobně $\pi(\ker\widetilde{\pi})$. Vzhledem k tomu, že

$$\widetilde{\rho}(X)\left(\widetilde{\pi}(\ker\pi)\right) = \widetilde{\pi}(X\ker\pi)\subset\widetilde{\pi}(\ker\pi), \qquad \forall X\in\mathfrak{g}$$

jsou to invariantní podprostory reprezentace $\widetilde{\rho}$, resp. ρ. Obě reprezentace ρ, $\widetilde{\rho}$ jsou ireducibilní a jednorozměrné váhové podprostory span$\{v\} = \pi\left(\text{span}\{v_0\}\right)$, span$\{\widetilde{v}\} = \widetilde{\pi}\left(\text{span}\{v_0\}\right)$ z definice neleží v $\pi(\ker\widetilde{\pi})$, resp. $\widetilde{\pi}(\ker\pi)$, neboť $v_0\notin\ker\pi$, resp. $v_0\notin\ker\widetilde{\pi}$. Proto je

$\widetilde{\pi}(\ker \pi) = \{0\}$ a $\pi(\ker \widetilde{\pi}) = \{0\}$. Definujeme $T : R_\lambda \to \widetilde{R}_\lambda$ následovně: $T(w)=\widetilde{\pi}(W)$, kde $W \in \mathcal{V}^\lambda$ je libovolný vektor splňující $w = \pi(W) \in R_\lambda$. Ověřme konzistenci této definice: buď $W_0 \in \ker \pi$, $W' = W + W_0$, pak $w = \pi(W')$ a

$$\widetilde{\pi}(W') = \widetilde{\pi}(W + W_0) = \widetilde{\pi}(W) + \underbrace{\widetilde{\pi}(W_0)}_{=0} = \widetilde{\pi}(W) = T(w).$$

Evidentně k T existuje inverzní zobrazení záměnou π a $\widetilde{\pi}$ v jeho definici, tj. T je bijekce. Protože pro libovolné $X \in \mathfrak{g}$ platí

$$T\big(\rho(X)w\big) = T\big(\rho(X)\pi(W)\big) = T\big(\pi(XW)\big) = \widetilde{\pi}(XW) = \widetilde{\rho}(X)\widetilde{\pi}(W) = \widetilde{\rho}(X)T(w),$$

je $T \circ \rho(X) = \widetilde{\rho}(X) \circ T$. □

Důsledek 13.14. Ireducibilní reprezentace ρ je plně určena svou nejvyšší vahou λ.

Definice 13.15. Mějme komplexní poloprostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{g}_0$ a systémem kořenů $\Delta \supset \Delta^+ \supset \Delta^P = \{\alpha_j\}_{j=1}^l$. Definujeme $\lambda_j \in \mathcal{J} \subset \mathfrak{h}^*$: $\lambda_j\left(T_{\alpha_k}\right) = \delta_{jk}$. Funkcionály λ_j nazýváme **fundamentální váhy** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, jim příslušející reprezentace nazýváme **fundamentální reprezentace**.

Poznámka 13.16. To, že $\lambda_j \in \mathcal{J}$ a že existují příslušné reprezentace je třeba ukázat. Obecný důkaz je poněkud náročnější, proto tak učiníme pro jednotlivé klasické série algeber.

Poznámka 13.17. Fundamentální váhy lze určit z Cartanovy matice vztahem $\lambda_j = \mathcal{M}_{jk}\alpha_k$, kde $\mathcal{M}_{jk} = \mathcal{A}^{-1}$ je inverze Cartanovy matice, neboť $\alpha_j = a_{jk}\lambda_k$ ze vztahu

$$\alpha_i\left(T_{\alpha_k}\right) = a_{ik} = a_{ij}\delta_{jk} = a_{ij}\lambda_j\left(T_{\alpha_k}\right).$$

Věta 13.18. Ke každé l–tici nezáporných celých čísel $m_1, \dots, m_l$ existuje právě jedna ireducibilní reprezentace poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, jejíž nejvyšší váha je $\lambda = \sum_{j=1}^l m_j\lambda_j$.

Důkaz. To, že může být nejvýše jedna jsme již ukázali, existenci ukážeme konstrukcí pro jednotlivé klasické série algeber, pro výjimečné algebry ponecháme bez důkazu. □

Cvičení 13.1. Popište strukturu adjungované a definující reprezentace prostých Lieových algeber $A_l = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$. Najděte fundamentální váhy.

Řešení.
- Adjungovaná reprezentace: váhy jsou kořeny, viz cvičení 11.3 (a nulový funkcionál odpovídající Cartanově podalgebře), tj. $\alpha_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$. Z výběru uspořádání pomocí vektoru H_0 plyne, že nejvyšší váha je $\varphi_1 - \varphi_{l+1} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_l$, kde $\alpha_i = \varphi_i - \varphi_{i+1}$ jsou prosté kořeny.

  Vektory $T_j = \mathrm{diag}(t_{j,1}, \dots, t_{j,l+1})$ jsou určeny vztahem $\alpha_i(T_j) = a_{ij}$, kde a_{ij} jsou složky Cartanovy matice. K jejich explicitnímu nalezení využijeme, že $\alpha_i(T_j) = a_{ij} = t_{j,i} - t_{j,i+1} \neq 0$ pouze pro $i = j-1, j, j+1$,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{j-1}(T_j) &= t_{j,j-1} - t_{j,j} = -1, \\ \alpha_j(T_j) &= t_{j,j} - t_{j,j+1} = 2, \\ \alpha_{j+1}(T_j) &= t_{j,j+1} - t_{j,j+2} = -1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad T_j = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & -1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

- Fundamentální váhy jsou určené vztahem $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad \lambda_1 \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \varphi_1,$$

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = 1, \qquad \lambda_2 \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} = 0$$

  implikuje $\lambda_2 = \varphi_1 + \varphi_2$. Obdobně zjišťujeme, že $\lambda_i = \varphi_1 + \cdots + \varphi_i$. Snadno lze ověřit, že $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$.

- Definující reprezentace: Mějme definující reprezentaci v standardní bázi $(e_j)_{j=1}^{l+1} \subset \mathbb{C}^{l+1}$, $D \in \mathfrak{g}_0$, $\quad De_j = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{l+1} \end{pmatrix} \cdot e_j = d_j e_j$. Její váhy tudíž jsou $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{l+1}\}$, kde $\varphi_{l+1} = -(\varphi_1 + \cdots + \varphi_l)$. Lze je vyjádřit ve tvaru $\{\varphi_1, \varphi_1 - \alpha_1, \varphi_1 - \alpha_1 - \alpha_2, \ldots, \varphi_1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_l\}$. Nejvyšší váha je proto $\varphi_1 = \lambda_1$, všechny násobnosti vah jsou 1.

Cvičení 13.2. Popište strukturu definující reprezentace algebry $C_l = \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C})$. Najděte fundamentální váhy této algebry.

Řešení.

- Definující reprezentace: $D \in \mathfrak{g}_0$:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_l & & & \\ & & & -d_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -d_l \end{pmatrix}, \quad \varphi_i(D) = d_i.$$

  Definující reprezentace má váhy $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_l, -\varphi_1, \ldots, -\varphi_l\}$, její dimenze je $2l$, nejvyšší váha je v uspořádání dle cvičení 11.4 rovna φ_1.

- Máme prosté kořeny $\alpha_i = \varphi_i - \varphi_{i+1},\ i \leq l-1,\ \alpha_l = 2\varphi_l$. Tudíž vektory T_j určené vztahem $\alpha_i(T_j) = a_{ij}$ jsou

$$T_j = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & -1 & & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & 0 & & & & & \\ & & & & & & & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow l+j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}, \quad \text{kde } j \leq l-1,$$

a

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i(T_l) &= 0,\ i < l-1 \\ \alpha_{l-1}(T_l) &= -1 \\ \alpha_l(T_l) &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad T_l = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow l \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} .$$

Fundamentální váhy určené vztahem $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$ jsou

$$\lambda_i = \varphi_1 + \dots + \varphi_i,\ i \in \hat{l}.$$

Cvičení 13.3. Najděte fundamentální váhy algebry $D_l = \mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$.
Řešení. Z výsledku cvičení 11.5 máme

$$H = \begin{pmatrix} d_1\sigma_2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_l\sigma_2 \end{pmatrix} \equiv H(d_1, \dots, d_l), \qquad \varphi_i(H) = d_i,$$

prosté kořeny jsou $\alpha_i = \varphi_i - \varphi_{i+1}$ pro $i \le l-1$ a $\alpha_l = \varphi_{l-1} + \varphi_l$, vektory

$$T_i = H(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, \underset{i+1}{-1}, 0, \dots, 0) \text{ pro } i \le l-1.$$

Vektor T_l je vztahy

$$\alpha_{l-2}(T_l) = -1 = d_{l-2} - d_{l-1}, \quad \alpha_{l-1}(T_l) = 0 = d_{l-1} - d_l, \quad \alpha_l(T_l) = 2 = d_{l-1} + d_l$$

určen ve tvaru

$$T_l = H(0, \dots, 0, 1, 1).$$

Rovnice $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$ určuje fundamentální váhy

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \varphi_1, \\ \lambda_i &= \varphi_1 + \dots + \varphi_i,\ i \le l-2, \\ \lambda_{l-1} &= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \dots + \varphi_{l-1} - \varphi_l), \\ \lambda_l &= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \dots + \varphi_l). \end{aligned}$$

Definující reprezentace na $\mathbb{C}^{2l}$ má váhy $\{\varphi_1, \dots, \varphi_l, -\varphi_1, \dots, -\varphi_l\}$, tj. její nejvyšší váha je $\lambda_1 = \varphi_1$.
Cvičení 13.4. Najděte fundamentální váhy algebry $B_l = \mathfrak{so}(2l+1, \mathbb{C})$.
Řešení. Z výsledků cvičení 11.6 máme

$$H = \begin{pmatrix} d_1\sigma_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_l\sigma_2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_i(H) = d_i,$$

prosté kořeny $\alpha_i = \varphi_i - \varphi_{i+1}$, kde $i \leq l-1$, a $\alpha_l = \varphi_l$. Podobně jako pro $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$ máme $T_i = H(0,\dots,0,\underset{i}{1},\underset{i+1}{-1},0,\dots,0)$ pro $i \leq l-1$. Vektor T_l je určen rovnicemi

$$\alpha_{l-1}(T_l) = -2, \qquad\qquad \alpha_l(T_l) = 2,$$

jež implikují $T_l = H(0,\dots,0,2)$. Fundamentální váhy určené $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$ jsou

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \varphi_1 + \dots + \varphi_i, \ \ i \leq l-1, \\ \lambda_l &= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \dots + \varphi_l). \end{aligned}$$

13.2 Konstrukce ireducibilní reprezentace se zadanou nejvyšší vahou

Zabývejme se nyní otázkou, jak k zadané nejvyšší váze $\lambda = \sum_{j=1}^{l} m_j \lambda_j \in \mathcal{J}$ najít příslušnou ireducibilní reprezentaci s touto nejvyšší vahou. K tomu je dobré si uvědomit, jaké váhy má tenzorový součin dvou reprezentací.

Mějme reprezentace $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, $\widetilde{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\left(\widetilde{V}\right)$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na vektorových prostorech V, $\widetilde{V}$. Na tenzorovém součinu $V \otimes \widetilde{V}$ definujeme reprezentaci $\rho \otimes \widetilde{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\left(V \otimes \widetilde{V}\right)$, zvanou **tenzorový součin** reprezentací ρ a $\widetilde{\rho}$, předpisem

$$(\rho \otimes \widetilde{\rho})(X) = \rho(X) \otimes \mathbb{I}|_{\widetilde{V}} + \mathbb{I}|_V \otimes \widetilde{\rho}(X), \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Snadno ověříme, že $\rho \otimes \widetilde{\rho}$ je homomorfismus $\mathfrak{g}$ do $\mathfrak{gl}\left(V \otimes \widetilde{V}\right)$

$$\begin{aligned} &[(\rho \otimes \widetilde{\rho})(X), (\rho \otimes \widetilde{\rho})(Y)](v \otimes \widetilde{v}) = \\ &= (\rho \otimes \widetilde{\rho})(X)\big(\rho(Y)v \otimes \widetilde{v} + v \otimes \widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v}\big) - (\rho \otimes \widetilde{\rho})(Y)\big(\rho(X)v \otimes \widetilde{v} + v \otimes \widetilde{\rho}(X)\widetilde{v}\big) = \\ &= \rho(X)\rho(Y)v \otimes \widetilde{v} + \rho(Y)v \otimes \widetilde{\rho}(X)\widetilde{v} + \rho(X)v \otimes \widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v} + v \otimes \widetilde{\rho}(X)\widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v} - \\ &- \rho(Y)\rho(X)v \otimes \widetilde{v} - \rho(X)v \otimes \widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v} - \rho(Y)v \otimes \widetilde{\rho}(X)\widetilde{v} - v \otimes \widetilde{\rho}(Y)\widetilde{\rho}(X)\widetilde{v} = \\ &= \big(\rho\big([X,Y]\big)v\big) \otimes \widetilde{v} + v \otimes \big(\widetilde{\rho}\big([X,Y]\big)\widetilde{v}\big) = (\rho \otimes \widetilde{\rho})\big([X,Y]\big)v \otimes \widetilde{v}. \end{aligned}$$

Buď nadále $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra a Λ_ρ, $\Lambda_{\widetilde{\rho}}$ odpovídající systémy vah reprezentací $\rho, \widetilde{\rho}$. Pro libovolná $\lambda \in \Lambda_\rho$, $v \in V_\lambda$, $\mu \in \Lambda_{\widetilde{\rho}}$, $\widetilde{v} \in \widetilde{V}_\mu$ a $H \in \mathfrak{g}_0$ máme

$$(\rho \otimes \widetilde{\rho})(H)v \otimes \widetilde{v} = \underbrace{\rho(H)v}_{\lambda(H)v} \otimes \widetilde{v} + v \otimes \underbrace{\widetilde{\rho}(H)\widetilde{v}}_{\mu(H)\widetilde{v}} = (\lambda + \mu)(H)v \otimes \widetilde{v},$$

tudíž $\lambda + \mu$ je váhou reprezentace $\rho \otimes \widetilde{\rho}$, $\Lambda_{\rho\otimes\widetilde{\rho}} = \{\lambda + \mu \mid \lambda \in \Lambda_\rho, \mu \in \Lambda_{\widetilde{\rho}}\}$ a máme rozklad $V \otimes \widetilde{V}$ do odpovídajících váhových podprostorů $V_{\lambda+\mu}$, $\lambda \in \Lambda_\rho$, $\mu \in \Lambda_{\widetilde{\rho}}$.

Speciálně pokud $\lambda_{\max}$, $\mu_{\max}$ jsou nejvyšší váhy uvedených reprezentací, pak $\lambda_{\max} + \mu_{\max}$ je nejvyšší vahou reprezentace $\rho \otimes \widetilde{\rho}$.

Příklad 13.19. Buď D^j $(2j+1)$–rozměrná reprezentace algebry $\mathfrak{so}(3)$, kde $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$. Pak lze rozložit

$$D^j \otimes D^k = D^{j+k} \oplus \dots \oplus D^{|j-k|}.$$

Jedná se o Clebsch–Gordanův rozklad známý z teorie momentu hybnosti v kvantové mechanice.

Reprezentace $\rho\otimes\widetilde{\rho}$ je v naprosté většině případů reducibilní. Její rozklad na ireducibilní reprezentace je obecně netriviální kombinatorická úloha. Určitě je v $V \otimes \widetilde{V}$ obsažena ireducibilní reprezentace s nejvyšší vahou $\lambda_{\max} + \mu_{\max}$.

Pokud speciálně $\widetilde{V} = V$, můžeme uvažovat lineární operátor

$$S_{12} : V \otimes V \to V \otimes V : S_{12}(u \otimes v) = v \otimes u.$$

Vidíme, že $S_{12}^2 = \mathbb{I}$, tudíž $\sigma(S_{12}) = \{\pm 1\}$, a pro libovolné $X \in \mathfrak{g}$ platí

$$\begin{aligned}[S_{12}, (\rho \otimes \rho)(X)](u \otimes v) &= S_{12}\big(\rho(X)u \otimes v + u \otimes \rho(X)v\big) - (\rho \otimes \rho)(X)(v \otimes u) = \\ &= v \otimes \rho(X)u + \rho(X)v \otimes u - \rho(X)v \otimes u - v \otimes \rho(X)u = 0,\end{aligned}$$

tj.

$$[S_{12}, (\rho \otimes \rho)(X)] = 0.$$

Proto lze reprezentaci $\rho \otimes \rho$ zúžit na vlastní podprostory S_{12}

$$\begin{aligned} V \otimes_S V &= \operatorname{span}\{u \otimes v + v \otimes u \mid u, v \in V\}, & S_{12}|_{V \otimes_S V} &= \mathbb{I}|_{V \otimes_S V}, \\ V \wedge V &= \operatorname{span}\{u \otimes v - v \otimes u \mid u, v \in V\}, & S_{12}|_{V \wedge V} &= -\mathbb{I}|_{V \wedge V}. \end{aligned}$$

Takto definované reprezentace na $V \otimes_S V$, resp. $V \wedge V$ nazýváme **symetrický**, resp. **antisymetrický tenzorový součin** reprezentace ρ se sebou samotnou a značíme je $\rho \otimes_S \rho$, resp. $\rho \wedge \rho$.

Symetrizace resp. antisymetrizace nám určuje, které váhové podprostory v $V \otimes_S V$, resp. $V \wedge V$, zůstanou. Pokud λ je nejvyšší váha a μ druhá nejvyšší váha reprezentace ρ na V, pak

- $\rho \otimes_S \rho$ na $V \otimes_S V$ má nejvyšší váhu 2λ,
- $\rho \wedge \rho$ na $V \wedge V$ má nejvyšší váhu $\lambda + \mu$.

Příklad 13.20. V případě algebry $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$ a třírozměrné reprezentace $V = D^1$ máme váhy

$$\underset{\text{váhy:}}{D^1 \otimes D^1} = \underset{\mathbf{5}}{D^2} \oplus \underset{\mathbf{3}}{D^1} \oplus \underset{\mathbf{1}}{D^0} = \underbrace{\underset{\mathbf{6}}{D^1 \otimes_S D^1}}_{D^2 \oplus D^0} \oplus \underbrace{\underset{\mathbf{3}}{D^1 \wedge D^1}}_{D^1},$$

kde první rovnost odpovídá Clebsch–Gordanovu rozkladu, druhá rozkladu do symetrické a antisymetrické části tenzorového součinu.

Zobecněním tohoto postupu je rozklad vyšších tenzorových mocnin reprezentací, tj. $\rho^{\otimes k} = \rho \otimes \rho \otimes \cdots \otimes \rho$ na $V^{\otimes k} = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$. Reprezentace $\rho^{\otimes k}$ je definována předpisem

$$(\rho \otimes \cdots \otimes \rho)(X) = \rho(X) \otimes \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \rho(X) \otimes \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I} + \cdots + \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I} \otimes \rho(X).$$

Definujeme operátor $S_{ij} : V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$ zaměňující i–tou a $j-$tou složku tenzorového součinu,

$$S_{ij}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_i \otimes \cdots \otimes u_j \otimes \cdots \otimes u_k) = u_1 \otimes \cdots \otimes u_j \otimes \cdots \otimes u_i \otimes \cdots \otimes u_k.$$

Podobně jako výše zjišťujeme, že

$$[S_{ij}, (\rho \otimes \cdots \otimes \rho)(X)] = 0,$$

tj. operátory $\rho^{\otimes k}(X)$ komutují s přirozenou reprezentací symetrické grupy S_k na $V^{\otimes k}$ zaměňující pořadí složek v tenzorovém součinu. Protože grupa S_k, kde $k > 2$, není abelovská, pro $k > 2$ již neexistuje rozklad $V^{\otimes k}$ do společných vlastních podprostorů S_{ij}. Složitější postup vycházející z teorie reprezentací symetrické grupy (tzv. Youngovy tabulky) je zapotřebí, pokud se mají identifikovat všechny možné invariantní podprostory. Nicméně, dva společné vlastní podprostory vždy existují:

- $V^{\otimes_S k} = V \otimes_S \cdots \otimes_S V, \ S_{ij}|_{V^{\otimes_S k}} = \mathbb{I}|_{V^{\otimes_S k}}$,
- $V^{\wedge k} = V \wedge \cdots \wedge V, \ S_{ij}|_{V^{\wedge k}} = -\mathbb{I}|_{V^{\wedge k}}$.

Příslušné reprezentace algebry $\mathfrak{g}$ značíme $\rho^{\otimes_S k}, \ \rho^{\wedge k}$. Ze struktury váhových podprostorů vidíme, že pokud ρ je ireducibilní s vahami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, přičemž $\lambda_1(H_0) > \lambda_2(H_0) \geq \cdots \geq \lambda_n(H_0)$, pak:

- $\rho^{\otimes_S k}$ má nejvyšší váhu $k\lambda_1$,
- $\rho^{\wedge k}$ má nejvyšší váhu $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ po zohlednění případných násobností.

Na závěr si stručně shrňme celý postup vysvětlený v této kapitole. Mějme komplexní poloprostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$, její fundamentální váhy $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathcal{J}$ a příslušné fundamentální reprezentace ρ_j na V_j. Nechť $\lambda = \sum_j m_j \lambda_j$, kde $m_j \in \mathbb{N}_0$. Příslušnou ireducibilní reprezentaci s nejvyšší vahou λ najdeme v $(\rho_1)^{\otimes_S m_1} \otimes (\rho_2)^{\otimes_S m_2} \otimes \cdots \otimes (\rho_l)^{\otimes_S m_l}$. Jednorozměrný váhový podprostor V_λ, příslušející nejvyšší váze λ je roven tenzorovému součinu podprostorů $V_{\lambda_j}^{\otimes m_j} = \underbrace{V_{\lambda_j} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_j}}_{m_j-\text{krát}}$. Z něj lze získat celou reprezentaci určením invariantního podprostoru R_λ.

Cvičení 13.5. Uvažujme algebru $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ s Lieovými závorkami $[L_3, L_\pm] = \pm L_\pm$, $[L_+, L_-] = 2L_3$. Její fundamentální reprezentace $\rho \equiv D^{1/2}$ na $D^{1/2} = \operatorname{span}\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ má tvar

$$\begin{aligned}
&\rho(L_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, && \rho(L_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, && \rho(L_-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\rho(L_3)|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle, && \rho(L_3)|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle, && \text{váhy: } \lambda = \pm\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

Explicitně rozložte tenzorový součin ρ se sebou samou na ireducibilní reprezentace.

Řešení.

$$(\rho \otimes \rho)(L_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

působí na bazické vektory následovně

$$\begin{aligned}
&(\rho \otimes \rho)(L_3)|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, && (\rho \otimes \rho)(L_3)|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{2}|\uparrow\downarrow\rangle = 0, \\
&(\rho \otimes \rho)(L_3)|\downarrow\downarrow\rangle = -|\downarrow\downarrow\rangle, && (\rho \otimes \rho)(L_3)|\downarrow\uparrow\rangle = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\rho \otimes \rho)(L_-)|\uparrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle, && (\rho \otimes \rho)(L_-)\big(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\big) = 2|\downarrow\downarrow\rangle, \\
&(\rho \otimes \rho)(L_-)|\downarrow\downarrow\rangle = 0, && (\rho \otimes \rho)(L_-)\big(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle\big) = |\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle = 0,
\end{aligned}$$

a podobně pro $(\rho \otimes \rho)(L_+)$. Váhy jsou $\pm 2\lambda, 0$, násobnosti $n_{\pm 2\lambda} = 1, \ n_0 = 2$.

Ireducibilní podprostory jsou symetrizovaný a antisymetrizovaný tenzorový součin,

$$D^1 = \operatorname{span}\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}, \qquad D^0 = \operatorname{span}\{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\}.$$

Cvičení 13.6. Nalezněte pomocí tenzorových mocnin definující reprezentace všechny fundamentální reprezentace algebry $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$.

Řešení. Víme, že první fundamentální reprezentace ρ_1 je definující reprezentace, $\dim\rho_1 = l+1$, viz cvičení 13.1. Pro antisymetrizovaný tenzorový součin $\rho_1 \wedge \rho_1$ máme

$$\begin{aligned}(\rho_1 \wedge \rho_1)(D)(e_i \wedge e_j) &= (\rho_1(D) \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \rho_1(D))(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) = \\ &= d_i e_i \otimes e_j - d_j e_j \otimes e_i + e_i \otimes d_j e_j - e_j \otimes d_i e_i = (d_i + d_j)(e_i \wedge e_j),\end{aligned}$$

tj. váhy jsou $\{\varphi_i + \varphi_j \mid i \neq j\}$, $\dim\rho\wedge\rho = \binom{l+1}{2}$, nejvyšší je $\varphi_1 + \varphi_2$.

Pro $\rho^{\wedge j}$ jsou váhy $\left\{\varphi_{i_1} + \dots + \varphi_{i_j} \mid i_1 < \dots < i_j\right\}$, $\dim\rho^{\wedge j} = \binom{l+1}{j}$, nejvyšší váha je $\lambda_j = \varphi_1 + \dots + \varphi_j$.

Pro $\rho^{\wedge l}$ jsou váhy $\left\{\sum_{i\neq 1}\varphi_i, \dots, \sum_{i\neq l+1}\varphi_i\right\} = \{-\varphi_1, \dots, -\varphi_{l+1}\}$. Poznamenejme, že pro $l > 1$ to je množina vah různá od vah definující reprezentace $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{l+1}\}$, tj. jedná se o jinou, neekvivalentní reprezentaci stejné dimenze $l+1$. Nejvyšší váha této reprezentace je λ_{l+1}. V případě, že $l = 1$, je $\rho^{\wedge l=1} \simeq \rho$, tj. $\rho^{\wedge l=1}$ je totožná s definující reprezentací.

Tím jsme zkonstruovali všechny fundamentální reprezentace algebry $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$.

Cvičení 13.7. Určete, které z fundamentálních reprezentací algeber B_l, C_l a D_l lze zkonstruovat tenzorovými mocninami z příslušných definujících reprezentací.

Řešení. Všechny kromě

- B_l reprezentace s nejvyšší vahou $\lambda_l = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \dots + \varphi_{l-1} + \varphi_l)$,
- D_l reprezentace s nejvyššími vahami

$$\lambda_{l-1} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \dots + \varphi_{l-1} - \varphi_l), \qquad \lambda_l = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \dots + \varphi_{l-1} + \varphi_l).$$

Zdůvodněte.

13.3 Spinorové reprezentace

Při studiu příkladů jsme zjistili, že většinu fundamentálních reprezentací klasických sérií prostých algeber lze získat z definující reprezentace antisymetrizovanými tenzorovými součiny. Reprezentacím, které umíme získat tenzorovými součiny z definující maticové reprezentace na příslušném vektorovém prostoru, říkáme **vektorové**. V případě sérií $B_l = \mathfrak{so}(2l+1,\mathbb{C})$, $D_l = \mathfrak{so}(2l,\mathbb{C})$ ale existují i fundamentální váhy a jim odpovídající reprezentace, které takto získat nelze. Příslušné tzv. **spinorové** reprezentace konstruujeme následujícím postupem, s využitím pojmu Cliffordovy algebry.

Definice 13.21. Uvažujme 2^n–rozměrnou asociativní algebru

$$\mathcal{C}\ell(n) = \operatorname{span}\{\mathbb{I}, \gamma^{a_1}\dots\gamma^{a_k} \mid 1 \leq k \leq n,\ a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$$

s asociativním násobením určeným antikomutačním vztahem

$$\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} \equiv \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\delta^{ab}\mathbb{I},$$

který nám umožňuje výsledek násobení vždy zapsat jako prvek $\mathcal{C}\ell(n)$ prokomutováním do patřičného pořadí generátorů γ^{a_j}. Tuto algebru nazýváme **Cliffordova algebra** s n generátory.

V Cliffordově algebře $\mathcal{C}\ell(n)$ lze definovat vektory

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{2}\gamma^a\gamma^b = \frac{1}{4}\left[\gamma^a, \gamma^b\right], \qquad a \neq b, \qquad \Sigma^{ab} = -\Sigma^{ba},$$

které vyhovují komutačním relacím

$$\begin{aligned}\left[\Sigma^{ab}, \Sigma^{cd}\right] &= \frac{1}{4}\left(\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d - \gamma^c\gamma^d\gamma^a\gamma^b\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(2\delta^{bc}\gamma^a\gamma^d - 2\delta^{ac}\gamma^b\gamma^d + 2\delta^{bd}\gamma^c\gamma^a - 2\delta^{ad}\gamma^c\gamma^b\right) = \\ &= \delta^{bc}\Sigma^{ad} - \delta^{ac}\Sigma^{bd} - \delta^{bd}\Sigma^{ac} + \delta^{ad}\Sigma^{bc}\end{aligned}$$

Pro porovnání si uvědomme, že v algebře $\mathfrak{so}(n)$ obvyklá báze $\left(S^{ab} = E^{ab} - E^{ba}\right)_{a<b}$ (kde E^{ab} je matice s jednotkou na pozici (a, b) a nulami všude jinde) má stejné komutační relace:

$$\left[S^{ab}, S^{cd}\right] = \delta^{bc}S^{ad} - \delta^{ac}S^{bd} - \delta^{bd}S^{ac} + \delta^{ad}S^{bc}.$$

Proto libovolná reprezentace asociativní Cliffordovy algebry $\mathcal{C}\ell(n)$ definuje též reprezentaci Lieovy algebry $\mathfrak{so}(n)$. Uvažme dva případy podle parity dimenze n.

- $n = 2l$. Přejděme k nové bázi Cliffordovy algebry $\mathcal{C}\ell(2l)$

  $$\sigma_j = \frac{\gamma^{2j-1} + \mathrm{i}\gamma^{2j}}{2}, \qquad \sigma_j^* = \frac{\gamma^{2j-1} - \mathrm{i}\gamma^{2j}}{2} \tag{13.3}$$

  s antikomutátory popsanými rovnicemi

  $$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 0 = \{\sigma_j^*, \sigma_k^*\}, \qquad \{\sigma_j, \sigma_k^*\} = \delta_{jk}\mathbb{I}. \tag{13.4}$$

  Vidíme, že máme algebru l fermionových kreačních a anihilačních operátorů. Jejich reprezentace se dá přirozeně zkonstruovat na 2^l–rozměrném vektorovém prostoru

  $$V = \operatorname{span}\left\{\sigma_{a_1}^* \dots \sigma_{a_k}^*|0\rangle \mid 0 \leq k \leq l,\ 1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq l\right\},$$

  kde působení anihilačních operátorů plyne z $\sigma_a|0\rangle = 0$ a rovnic (13.4). Tím získáváme též reprezentaci Lieovy algebry $\mathfrak{so}(2l)$ na V. Protože prvky $\mathfrak{so}(2l)$ jsou reprezentovány kvadratickými výrazy v σ_j, σ_k^*, vektorový prostor V se z hlediska reprezentace $\mathfrak{so}(2l)$ rozpadá na dva invariantní podprostory, se sudým, resp. lichým, počtem σ^* působících na $|0\rangle$.

  Přímým výpočtem zjišťujeme, že bázi algebry $\mathfrak{so}(2l)$ ve tvaru F_{ij} ,$F_{ij}^\dagger$, G_{ij}, $H(\kappa_1, \dots, \kappa_l)$ reprezentujeme operátory

  $$F_{ij} = \sigma_i^*\sigma_j^*, \quad F_{ij}^\dagger = \sigma_i\sigma_j, \quad G_{ij} = \sigma_i^*\sigma_j, \quad H(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \sum_{j=1}^{l}\kappa_j\left(\sigma_j^*\sigma_j - \frac{1}{2}\right).$$

  Protože

  $$H(\kappa_1, \dots, \kappa_l)\sigma_{a_1}^* \dots \sigma_{a_k}^*|0\rangle = \sum_{j=1}^{l}\kappa_j\left(n_j - \frac{1}{2}\right)\sigma_{a_1}^* \dots \sigma_{a_k}^*|0\rangle.$$

jsou bazické vektory $\sigma^*_{a_1} \dots \sigma^*_{a_k}|0\rangle \in V$ současně váhovými vektory konstruované reprezentace algebry $\mathfrak{so}(2l)$, s vahou $\sum_{j=1}^{l} \left(n_j - \frac{1}{2}\right) \varphi_j$. Vektor $\sigma^*_1 \dots \sigma^*_l|0\rangle \in V$ je váhový vektor s nejvyšší vahou, která je rovna $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \ldots + \varphi_l)$. Tato váha je současně nejvyšší vahou ireducibilní **spinorové reprezentace** na podprostoru

$$V_1 = \operatorname{span}\left\{\sigma^*_{a_1} \dots \sigma^*_{a_k}|0\rangle \mid 0 \le k \le l,\ 1 \le a_1 < \dots < a_k \le l\right\}, \quad 2 \,|\, l-k.$$

Pro podprostor

$$V_2 = \operatorname{span}\left\{\sigma^*_{a_1} \dots \sigma^*_{a_k}|0\rangle \mid 0 \le k \le l,\ 1 \le a_1 < \dots < a_k \le l\right\}, \quad 2 \not| \, l-k$$

s opačnou paritou vektorů máme váhy $\sum_{j=1}^{l} \left(n_j - \frac{1}{2}\right) \varphi_j$, kde

$$k = \sum_{j=1}^{l} n_j \in \{l-1, l-3, \dots, 0 \vee 1 \text{ (dle parity } l)\}.$$

Nejvyšší váha této **spinorové reprezentace** je při našem uspořádání rovna $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \dots + \varphi_{l-1} - \varphi_l)$. Odpovídá váhovému vektoru $\sigma^*_1 \dots \sigma^*_{l-1}|0\rangle$. Poznamenejme, že $\dim V_1 = \dim V_2 = 2^{l-1}$.

- $n = 2l+1$. Postupujeme obdobně, ale při změně báze (13.3) nám přebývá γ^{2l+1} vyhovující

$$\left\{\gamma^{2l+1}, \sigma_j\right\} = 0 = \left\{\gamma^{2l+1}, \sigma^*_j\right\}. \tag{13.5}$$

Vybudujeme stejně jako výše reprezentaci vektorů σ_j, σ^*_j na 2^l–rozměrném vektorovém prostoru V. Působení generátoru γ^{2l+1} v souladu s antikomutátory (13.5) definujeme předpisem

$$\gamma^{2l+1}|0\rangle = |0\rangle, \qquad \gamma^{2l+1}\left(\sigma^*_{a_1} \dots \sigma^*_{a_k}|0\rangle\right) = (-1)^k \left(\sigma^*_{a_1} \dots \sigma^*_{a_k}|0\rangle\right).$$

Prvky představující bazické vektory algebry $\mathfrak{so}(2l+1, \mathbb{C})$ v Cliffordově algebře $\mathcal{C}\ell(2l+1)$ nyní obsahují γ^{2l+1}, proto operátory reprezentující Lieovu algebru $\mathfrak{so}(2l+1, \mathbb{C})$ na V nejsou výlučně kvadratické v fermionových kreačních a anihilačních operátorech σ_j, σ^*_j. V důsledku vektorový prostor V neobsahuje invariantní podprostory, tudíž **spinorová reprezentace** Lieovy algebry $\mathfrak{so}(2l+1)$ na V je ireducibilní s nejvyšší vahou $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \dots + \varphi_l)$. Její dimenze je 2^l.

Kapitola 14

Reprezentace algebry $\mathfrak{su}(3)$ v částicové fyzice

Jako příklad využití teorie reprezentací poloprostých Lieových algeber si nyní nastíníme ve zjednodušené a historicky ne zcela přesné podobě cestu, po níž fyzikové dospěli ke kvarkovému modelu silně interagujících částic, tzv. hadronů. V této kapitole předpokládáme, že čtenář má základní znalosti kvantové mechaniky.

14.1 Symetrie a integrály pohybu

V klasické mechanice spojité symetrie, tj. invariance teorie vůči spojitým grupám transformací, implikují existenci a konkrétní tvar integrálů pohybu. Toto tvrzení je obsahem tzv. věty Noetherové.

V kvantové mechanice se tato korespondence stává mnohem přirozenější: generátory 1-parametrických grup symetrií Hamiltoniánu reprezentované (anti)samosdruženými operátory na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ přímo jsou integrály pohybu, tj. pozorovatelné komutující s Hamiltoniánem (vynásobené imaginární jednotkou, viz poznámka 4.8). Množina antisamosdružených operátorů komutujících s Hamiltoniánem je uzavřená vzhledem ke komutátoru a reálným lineárním kombinacím, proto máme reálnou Lieovu algebru integrálů pohybu.

Uvažujme nadále případ, kdy Lieova algebra integrálů pohybu je konečněrozměrná kompaktní Lieova algebra. Pak lze ukázat, že i pro nekonečněrozměrný Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ je její antisamosdružená reprezentace na $\mathscr{H}$ direktním součtem konečněrozměrných ireducibilních reprezentací, tj. v $\mathscr{H}$ existuje báze tvořená váhovými vektory. Cartanova podalgebra je tvořena komutujícími operátory, ty současně komutují s Hamiltonánem. Pokud Lieova algebra integrálů pohybu je dostatečně velká, pak Cartanova podalgebra společně s Hamiltoniánem může definovat úplnou množinu pozorovatelných, tj. ireducibilní reprezentace jsou určené energií a váhové vektory jsou vektory s přesně určenými hodnotami úplné množiny pozorovatelných tvořené Cartanovou podalgebrou a Hamiltoniánem.

14.2 Izospin

Je experimentálně zjištěným faktem, že proton a neutron se z hlediska silné jaderné interakce chovají v podstatě stejně. Proto W. Heisenberg počátkem 30. let 20. století zkusil zformulovat teorii jaderných sil založenou na předpokladu, že p a n jsou 2 stavy jediné částice zvané nukleon. Tj. předpokládal, že existuje nějaký vnitřní stupeň volnosti nukleonu, jemu odpovídající Hilbertův prostor můžeme chápat jako $\mathbb{C}^2$, se ztotožněním $|p\rangle = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ a $|n\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$. Teorii jaderné interakce pak budujeme jako invariantní vůči jejich libovolnému míšení zachovávajícímu normu, tj. grupě $SU(2)$. Proto uvažujeme 2–rozměrnou reprezentaci $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$, což je dvojznačná reprezentace grupy $SO(3)$, tj. reprezentace poločíselného spinu. Tento spin je ve vnitřním Hilbertově prostoru nesouvisejícím s prostoročasovými vlastnostmi, momentem hybnosti apod. a rozlišuje mezi různými nukleony. Proto ho nazýváme **izotopický spin** neboli **isospin**. Z teorie reprezentací momentu hybnosti víme, že na $\mathscr{H}$ máme dva komutující operátory I^2, I_3, které v bázi $(|p\rangle, |n\rangle)$ působí

$$I^2|p\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|p\rangle, \qquad I_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle,$$
$$I^2|n\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|n\rangle, \qquad I_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle.$$

Vidíme, že elektrický náboj nukleonů lze vyjádřit vztahem

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}.$$

Postupně byly objeveny další silně interagující částice: antinukleony, piony aj. K popisu této pozorované různorodosti bylo zavedeno baryonové číslo B, tj. počet nukleonů, které se dle výsledků experimentů zachovává při všech interakcích. Jednotlivé druhy částic byly zařazeny do vhodně vybraných reprezentací isospinové algebry $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$. Pionům byla přiřazena vektorová reprezentace $\mathfrak{so}(3)$, tj. $l = 1$, $m = -1, 0, 1$, antinukleonům reprezentace sdružená k nukleonové spinové reprezentaci. Hodnota baryonového čísla je dána zvolenou reprezentací a pro elektrický náboj platí

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B.$$

Konkrétně máme pro

- nukleony $B = 1$, $\sigma(I_3) = \{\pm\frac{1}{2}\}$, $Q \in \{0, 1\}$,
- piony $B = 0$, $\sigma(I_3) = \{-1, 0, 1\}$, $Q \in \{-1, 0, 1\}$,
- antinukleony: $B = -1$, $\sigma(I_3) = \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$, $Q \in \{0, -1\}$

Situace se dále zkomplikovala objevem kaonů, které se rozpadají na tehdy již známé částice, ale podstatně pomaleji, než fyzikové očekávali. To vedlo k poznání, že jsou dva druhy jaderných interakcí, nyní zvané silná a slabá, a že se kaony rozpadají pod vlivem slabé interakce, nikoliv silné. Proto byla zavedena nová veličina zachovávající se při silných jaderných interakcích, nazvaná ze zřejmého důvodu **podivnost**. Elektrický náboj pak byl vyjádřen Gell-Mann-Nishijimovým vzorcem

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y, \text{ kde } Y = S + B \text{ je tzv. hypernáboj.} \tag{14.1}$$

Tento vzorec vedl k pokusům najít popis silných jaderných interakcí, v němž by I_3 a Y byly komutující prvky jedné větší algebry integrálů pohybu, nejlépe prosté kompaktní.

Po několika neúspěšných pokusech (ve smyslu dávajících předpovědi v rozporu s tehdy prováděnými experimenty) v roce 1964 nezávisle na sobě dva fyzikové, M. Gell-Mann a G. Zweig, přišli s ekvivalentními teoriemi využívajícími algebru $\mathfrak{su}(3)$ a myšlenku nukleonů složených z hypotetických komponent, které byly později experimentálně prokázány a v souladu s Gell-Mannovým popisem nazvány kvarky.

14.3 Reprezentace $\mathfrak{su}(3)$

Uvažujme bázi Lieovy algebry $\mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ ve tvaru tzv. Gell-Mannových matic

$$I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{pmatrix}, \qquad Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}, \tag{14.2}$$

$$I_+ = E_{12} = E_\alpha = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad U_+ = E_{23} = E_\beta = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$V_+ = [I_+, U_+] = E_{13} = E_{\alpha+\beta}, \qquad I_- = (I_+)^T, \qquad U_- = (U_+)^T, \qquad V_- = (V_+)^T$$

s komutačními relacemi

$$\begin{aligned}
&[I_+, V_+] = 0, && [U_+, V_+] = 0, && [I_3, Y] = 0\\
&[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm, && [I_3, U_\pm] = \mp\frac{1}{2}U_\pm, && [I_3, V_\pm] = \pm\frac{1}{2}V_\pm,\\
&[Y, I_\pm] = 0, && [Y, U_\pm] = \pm U_\pm, && [Y, V_\pm] = \pm V_\pm,\\
&[I_+, I_-] = 2I_3, && [U_+, U_-] = -I_3 + \frac{3}{2}Y, && [V_+, V_-] = I_3 + \frac{3}{2}Y.
\end{aligned} \tag{14.3}$$

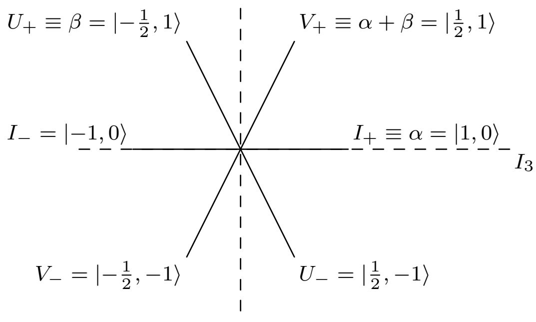
Cartanova podalgebra je $\mathfrak{g}_0 = \operatorname{span}\{I_3, Y\}$, se skalárním součinem na $\mathfrak{h}$ daným

$$K(I_3, Y) = 0 \qquad K(I_3, I_3) = c\frac{1}{2} \qquad K(Y, Y) = c\frac{2}{3}, \tag{14.4}$$

kde c je nějaká pro další úvahy nepodstatná nenulová konstanta. Tj. bazické vektory I_3 a Y jsou ortogonální, ale nejsou normalizované na stejnou délku. Proto v kořenových a váhových diagramech vynášíme hodnoty odpovídajících funkcionálů na kolmé osy, ale v různých měřítkách, jejichž poměr $\frac{\sqrt{3}}{2}$ odpovídá poměru norem vektorů I_3 a Y vzhledem ke Killingově formě v (14.4). Kořenové a váhové vektory značíme hodnotami vlastních čísel operátorů I_3 a Y v odpovídající reprezentaci

$$|\lambda, \mu\rangle : \qquad I_3|\lambda, \mu\rangle = \lambda|\lambda, \mu\rangle, \qquad Y|\lambda, \mu\rangle = \mu|\lambda, \mu\rangle.$$

Kořenový diagram s uvedením kořenových vektorů na místě jim odpovídajících kořenů má následující tvar

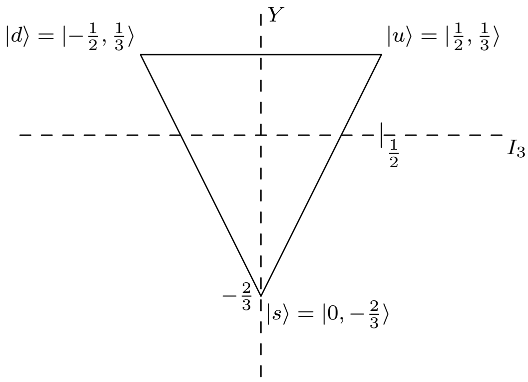


odpovídající komutačním relacím v (14.3) a jimi určeným vlastním hodnotám operátorů ad_{I_3}, ad_Y. Adjungovanou reprezentaci algebry $\mathfrak{su}(3)$ vzhledem k její dimenzi obvykle značíme **8**.

Definující vektorová reprezentace $\mathfrak{su}(3)$ na $\mathbb{C}^3$, obvykle značená **3**, je současně fundamentální reprezentace algebry $\mathfrak{su}(3)_\mathbb{C} = \mathfrak{sl}(3)$. V Gell-Mannově kvarkovém modelu se v ní transformují částice zvané kvarky

$$|u\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle, \qquad |d\rangle = |-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \qquad |s\rangle = |0, -\frac{2}{3}\rangle$$

mající baryonové číslo $B = \frac{1}{3}$. Její váhový diagram je

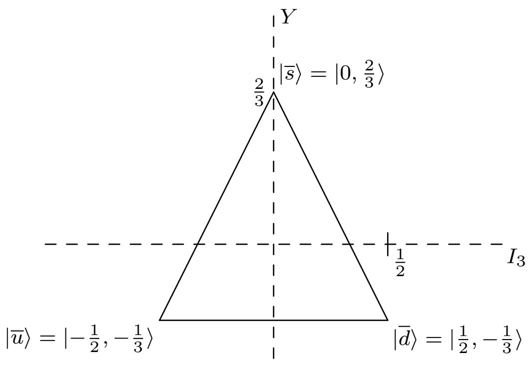


jak plyne z hodnot vlastních čísel odpovídajících společným vlastním vektorům matic I_3 a Y v (14.2).

Druhá fundamentální (též zvaná antifundamentální) reprezentace $\bar{\mathbf{3}}$ algebry $\mathfrak{su}(3)_\mathbb{C}$ je reprezentace **sdružená** k vektorové reprezentaci **3** ve smyslu

$$\overline{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V^*) \qquad \left(\overline{\rho(X)}\phi\right)(v) = -\phi\left(\rho(X)v\right), \qquad \forall X \in \mathfrak{g}, v \in V, \phi \in V^*.$$

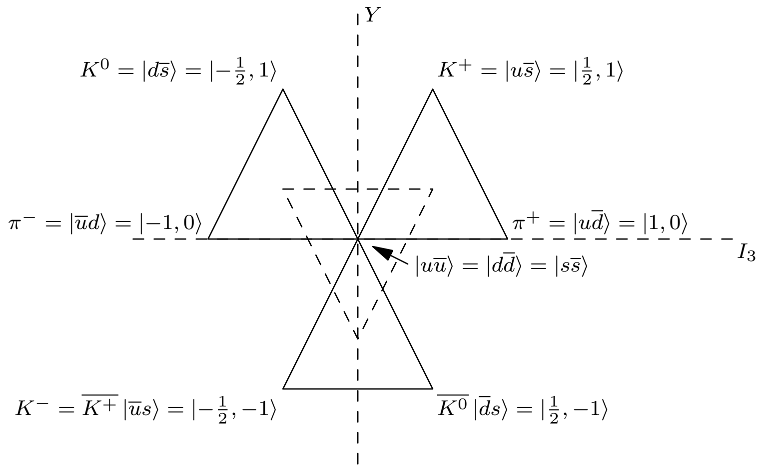
(Opačné znaménko v definici je třeba proto, abychom získali opět reprezentaci algebry $\mathfrak{g}$.) Váhový diagram $\bar{\mathbf{3}}$ je dán opačnými hodnotami vlastních čísel, tj. je z diagramu pro **3** získán inverzí vzhledem k počátku souřadných os,



V této reprezentaci se transformují částice zvané **antikvarky**, značené $|\bar{u}\rangle$, $|\bar{d}\rangle$, $|\bar{s}\rangle$, mající baryonové číslo $B = -\frac{1}{3}$.

V přírodě pozorované částice mají celočíselný elektrický náboj. Proto experimentálně detekované částice hledáme v reprezentacích, jimž odpovídá celočíselný náboj dle Gell-Mann-Nishijimova vzorce (14.1).

Vázané stavy kvark–antikvark jsou popsány reprezentací $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$, jejíž rozklad na ireducibilní reprezentace je $\mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$:

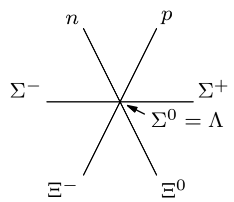


kde

$$\pi^0 = \frac{|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle}{\sqrt{6}}, \quad 1 = \operatorname{span}\left\{\eta' = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}}\right\}.$$

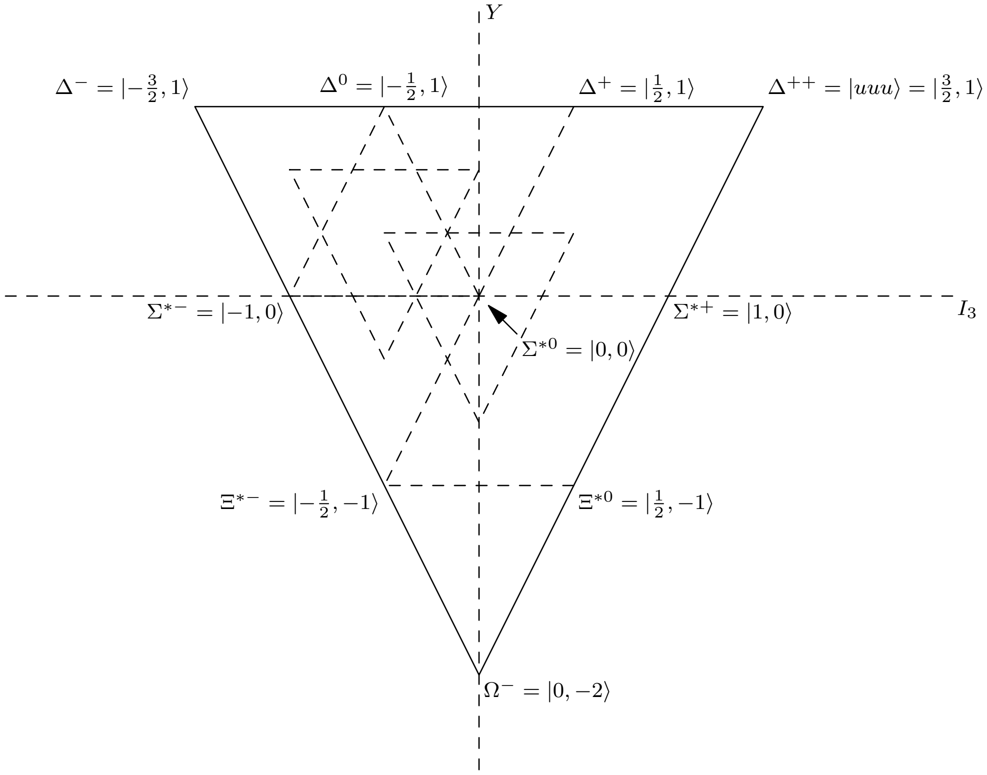
Tyto částice mají baryonové číslo $B = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$. To, že $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$ v sobě musí obsahovat $\mathbf{8}$ plyne z nejvyšší váhy tenzorového součinu $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$, singletová reprezentace $\mathbf{1}$ tam pak musí být z rozměrových důvodů.

Reprezentace vedoucí na vázané stavy trojice kvarků je $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$, s hodnotou baryonového čísla $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Její ireducibilní složky zjistíme následovně: nejvyšší váha odpovídá totálně symetrizovanému tenzorovému součinu $\mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3}$, z počtu kombinací s opakováním zjišťujeme její dimenzi $\binom{5}{3} = 10$, jednorozměrné váhové podprostory pak dokládají její ireducibilitu (nic nelze vynechat, aniž bychom narušili známé vlastnosti váhových diagramů dle věty 13.5). Tj. máme reprezentaci $\mathbf{10}$. Dále v rozkladu musí být totálně antisymetrizovaný tenzorový součin $\mathbf{3} \wedge \mathbf{3} \wedge \mathbf{3} = \mathbf{1}$. Ze skládání vah, viz obrázek 14.1, pak vidíme, že doplňkový podprostor v $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ má stejné váhy jako adjungovaná reprezentace a že každý váhový podprostor má dvojnásobnou dimenzi oproti odpovídajícímu podprostoru v $\mathbf{8}$. Tudíž máme v rozkladu ještě dvě kopie adjungované reprezentace, tj. $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$. Jedna z $\mathbf{8}$ obsahuje proton a neutron,



ostatní obsahují exotičtější částice. Pro úspěch kvarkového modelu je podstatná zejména reprezentace $\mathbf{10}$, viz obrázek 14.1. V době, kdy Gell-Mann a Zweig vytvořili tuto teorii, byly známé všechny částice s odpovídajícími hodnotami nábojů, s výjimkou částice označené v diagramu jako Ω^-. Její předpověď na základě kvarkového modelu byla záhy experimentálně potvrzena.

Dnes je tato teorie, zvaná $\mathfrak{su}(3)$ teorie vůní, již zastaralá, protože kvarků, resp. z nich složených částic, je známo víc. Současný, tzv. standardní model elementárních částic, je uspořádán jinak. Gell-Mannův kvarkový model zůstává použitelným přiblížením při experimentech s dostatečně nízkou energií, vylučující vznik dalších, jím nepopsaných, kvarků.



Obrázek 14.1: Konstrukce vah reprezentace $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ a v ní obsažené ireducibilní reprezentace $\mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3} = \mathbf{10}$

Rejstřík

Literatura

[1] A. Arvanitoyeorgos: *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, American Mathematical Society 2003.

[2] A. Borel: *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups*, American Mathematical Society 2001.

[3] K. Erdmann, M. J. Wildon: *Introduction to Lie Algebras*, Springer Verlag 2006.

[4] M. Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, IRIS 2007.

[5] Th. Frankel: *The Geometry of Physics*, Cambridge University Press 1999, 2003, 2011.

[6] N. Jacobson: *Lie Algebras*, Dover Publications 1979.

[7] A. W. Knapp: *Lie Groups: Beyond an Introduction*, Birkhäuser 2002.

[8] Y. Kosmann-Schwarzbach: *Groups and symmetries*, Springer 2010.

[9] R. Penrose: *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Knopf 2005.

[10] H. Samelson: *Notes on Lie algebras*, Springer Verlag 1990.

[11] D.H. Sattinger, O.L. Weaver: *Lie Groups and Algebras*, Springer Verlag 1986.

[12] L. Šnobl and P. Winternitz: *Classification and Identification of Lie Algebras*, American Mathematical Society and Centre de Recherches Mathématiques 2014.

[13] K. Tapp: *Matrix Groups for Undergraduates*, 2nd Edition, American Mathematical Society 2016.