Z definice funkcí $\tanh t$ a $\tan t$

$$\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \qquad \tan t = \frac{1}{i}\frac{e^{it} - e^{-it}}{e^{it} + e^{-it}}$$

plyne $\tanh t = i \tan(-it)$. Ze známého rozvoje

$$\tan t = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + o(t^6) \qquad \text{pro } t \to 0$$

dostáváme

$$\tanh t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + o(t^6) \qquad \text{pro } t \to 0.$$

Z Watsonova lemmatu potom máme

$$F(x) = \frac{\Gamma(2)}{x^2} - \frac{1}{3}\frac{\Gamma(4)}{x^4} + \frac{2}{15}\frac{\Gamma(6)}{x^6} + o(x^{-7}) =$$
$$= \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4} + \frac{16}{x^6} + o(x^{-7}) \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Příklad. Nalezneme asymptotický rozvoj funkce

$$F(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{x(1-e^{3t})}\,dt \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Funkci F lze přepsat do tvaru

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{x(1-e^{3t})}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-x(e^{3t}-1)}\,dt = \begin{bmatrix} \tau = g(t) := e^{3t} - 1 \\ t = \frac{1}{3}\ln(\tau+1) \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\tau}}{\tau+1}\,d\tau.$$

Protože

$$f(t) = \frac{1}{1+t} \approx \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k \qquad \text{pro } t \to 0,$$

Watsonovo lemma poskytuje

$$F(x) \approx \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+1)}{x^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

14 **Příklad.** Nalezneme asymptotický rozvoj funkce

$$F(x) = \int\limits_0^{1} e^{x(2t^2+3t)}\,dt \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Funkce $h(t) := 2t^2 + 3t$ nabývá na intervalu $[0,1]$ maxima v bodě $t = 1$, přičemž $h(1) = 5$. Jediným dominantním bodem je tedy bod $t = 1$. V následujícím postupu budeme transformovat integrál tak, abychom mohli použít Watsonovo lemma - tzn.

1. budeme posunovat funkci h v exponentu tak, aby hodnota maxima po transformaci byla 0,
2. vhodnou substitucí přesuneme dominantní bod do nuly,
3. další substitucí uvedeme integrál do tvaru vyžadovaném ve Watsonově lemmatu.

Výpočet tedy probíhá takto

$$F(x) = \int\limits_0^1 e^{x(2t^2+3t)}\,dt = e^{5x}\int\limits_0^1 e^{-x(5-3t-2t^2)}\,dt = [\tau = 1 - t] =$$
$$= e^{5x}\int\limits_0^1 e^{-(7t-2t^2)x}\,dt = \begin{bmatrix} \tau = 7t - 2t^2 \\ t = \frac{7-\sqrt{49-8\tau}}{4} \\ dt = \frac{d\tau}{\sqrt{49-8\tau}} \end{bmatrix} = e^{5x}\int\limits_0^{1} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{49-8t}}\,dt.$$

Nyní už můžeme rozvinout funkci $f(t) = \frac{1}{\sqrt{49-8t}}$ v okolí nuly

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{49-8t}} = \frac{1}{7}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{8}{49}t}} = \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^k\frac{8^k}{49^k}t^k$$

a použít Watsonovo lemma:

$$F(x) \approx \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^k\frac{8^k}{49^k}\frac{k!}{x^{k+1}}\, e^{5x} \quad \text{pro } x \to +\infty.$$

Poznámka. Asymptotické rozvoje integrálů ve tvaru vyžadovaném ve Watsonově lemmatu lze často získat opakovanou integrací per-partes prováděnou tak, abychom funkci f derivovali a faktor e^{-xt} integrovali. Takto obdržíme

$$F(x) := \int\limits_0^b f(t)e^{-xt}\,dt = \left[f(t)\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^b + \frac{1}{x}\int\limits_0^b f'(t)e^{-xt}\,dt =$$
$$= f(0)\frac{1}{x} - f(b)\frac{e^{-xb}}{x} + \frac{1}{x}\int\limits_0^b f'(t)e^{-xt}\,dt.$$

Je-li f dostatečně hladká, můžeme pokračovat v per-partes dále. Po n-násobné integraci per-partes dostaneme

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n}\left[f^{(k-1)}(t)\frac{e^{-xt}}{-x^k}\right]_0^b + \frac{1}{x^n}\int\limits_0^b f^{(n)}(t)e^{-xt}\,dt =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0)\frac{1}{x^k} - \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(b)\frac{e^{-xb}}{x^k} + \frac{1}{x^n}\int\limits_0^b f^{(n)}(t)e^{-xt}\,dt. \tag{4.2}$$

Má-li funkce f mocninný rozvoj tvaru

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n) \qquad \text{pro } t \to 0,$$

pak platí $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, a tedy první suma na pravé straně (4.2) přechází na tvar

$$\sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0)\frac{1}{x^k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Vzhledem k tomu, že $b > 0$, členy 2. sumy na pravé straně (4.2) klesají k nule rychleji než libovolná mocnina x, a tedy

$$\sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(b)\frac{e^{-xb}}{x^k} = o(x^{-\infty}) \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Velmi často lze ukázat, že integrál ve 3. členu na pravé straně rovnice (4.2) jde k nule pro $x \to +\infty$. To nastane například, pokud

- $b \in \mathbb{R}$ a $f \in C([0,b])$, nebo
- $b = +\infty$, $f \in C([0,b])$ a $f(t) = \mathcal{O}(e^{\sigma t})$ pro $t \to +\infty$ a nějaké $\sigma \in \mathbb{R}$.

Potom platí, že

$$\frac{1}{x^n}\int_0^b f^{(n)}(t)e^{-xt}\,dt = o\left(\frac{1}{x^n}\right) \qquad \text{pro } x \to +\infty,$$

a tedy (4.2) přechází do tvaru

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \qquad \text{pro } x \to +\infty,$$

který přesně odpovídá rozvoji (4.1) z Watsonova lemmatu.

4.3 Laplaceova věta

V mnoha aplikacích není potřeba určovat celý asymptotický rozvoj integrálů Laplaceova typu, ale postačuje vyšetřit vedoucí člen. I pro tuto úlohu je možno použít Watsonovo lemma, nicméně, jak bylo vidět v předchozích příkladech, často je pro jeho aplikaci nutno převádět integrál do požadovaného tvaru, což může být pracné. Naproti tomu Laplaceova věta umožňuje určit vedoucí člen integrálů Laplaceova typu v obecném tvaru.

Definice 8. *Laplaceovský bod* $d \in \overline{\mathbb{R}}$ je izolovaný dominantní bod $F(x)$, v němž mají funkce f i g mocninné chování, tj. existují $A \neq 0, B, \lambda, \mu > 0$ takové že

- je-li $d \in \mathbb{R}$, pak
$$f(t) \sim A|t-d|^{\lambda-1} \qquad g(t) \sim B|t-d|^{\mu} \qquad \text{pro } t \to d,$$
- je-li $d = \pm\infty$, pak
$$f(t) \sim \frac{A}{|t|^{\lambda-1}} \qquad g(t) \sim \frac{B}{|t|^{\mu}} \qquad \text{pro } t \to d.$$

Věta 39 (Laplaceova)**.** Buď $f \in \mathcal{L}^g_{x_0}(a,b)$ a nechť a je jediný laplaceovský bod. Položme

$$F(x) := \int_a^b f(t)e^{-xg(t)}\,dt.$$

Potom

$$F(x) \sim \frac{A\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{\mu(Bx)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \qquad \text{pro } x \to +\infty. \tag{4.3}$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti položme $A = 1$ (jinak zavedeme substituci $f \mapsto \frac{f}{A}$), $a = 0, b > 0, B = 1$ (jinak zavedeme substituci $\tau = B(t-a)$ pro $b > a$, resp. $\tau = B(a-t)$ pro $b < a$). Protože $a = 0$ je laplaceovský bod, existuje $c \in (0,b)$ tak, že pro $t \in (0,c)$ platí

$$0 < |f(t)| \leq 2|t|^{\lambda-1} \quad \text{a} \quad g(t) \geq \frac{1}{2}t^{\mu}. \tag{4.4}$$

Dále

$$F(x) = \int_0^c f(t)e^{-xg(t)}\,dt + \underbrace{\int_c^b f(t)e^{-xg(t)}\,dt}_{\substack{o(x^{-\infty})\\ \text{Věta 35}}}.$$

pozn. za V. 35

Vynásobením $x^{\frac{\lambda}{\mu}}$ dostaneme

$$x^{\frac{\lambda}{\mu}}F(x) = x^{\frac{\lambda}{\mu}}\int_0^c f(t)e^{-xg(t)}\,dt + o(x^{-\infty}) = \left[\begin{smallmatrix} t=\tau x^{-\frac{1}{\mu}} \\ dt=d\tau x^{-\frac{1}{\mu}} \end{smallmatrix}\right] =$$
$$= x^{\frac{\lambda-1}{\mu}}\int_0^{cx^{\frac{1}{\mu}}} f\left(\frac{t}{x^{1/\mu}}\right)e^{-xg\left(\frac{t}{x^{1/\mu}}\right)}\,dt + o(x^{-\infty}).$$

V integrálu teď provedeme limitní přechod pro $x \to +\infty$. Využijeme toho, že platí

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(\frac{t}{x^{1/\mu}}\right)}{\left(\frac{t}{x^{1/\mu}}\right)^{\lambda-1}}t^{\lambda-1} = t^{\lambda-1}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{g\left(\frac{t}{x^{1/\mu}}\right)}{\left(\frac{t}{x^{1/\mu}}\right)^{\mu}}t^{\mu} = t^{\mu}.$$

lze říci bez tohoto?

Pokud lze tedy provádět limitu pro $x \to +\infty$ za znamením integrálu, pak

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{\lambda}{\mu}}F(x) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-t^{\mu}}\,dt = \left[\begin{smallmatrix} \tau=t^{\mu} \\ t=\tau^{\frac{1}{\mu}} \\ dt=\frac{1}{\mu}\tau^{\frac{1}{\mu}-1}d\tau \end{smallmatrix}\right] =$$
$$= \int_0^{+\infty} t^{\frac{\lambda-1}{\mu}}e^{-t}\frac{dt}{\mu t^{\frac{\mu-1}{\mu}}} = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} t^{\frac{\lambda}{\mu}-1}e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{\mu}.$$

Zbývá ověřit korektnost záměny limity a integrálu. Pro $t \in [0, cx^{\frac{1}{\mu}}]$ leží hodnoty výrazu $\frac{t}{x^{\frac{1}{\mu}}}$ v intervalu $[0, c]$. Integrand je tedy možno odhadnout s využitím (4.4)

$$\left| x^{\frac{\lambda-1}{\mu}} f\left(\frac{t}{\sqrt[\mu]{x}}\right) e^{-xg\left(\frac{t}{\sqrt[\mu]{x}}\right)} \right| \le 2\left(\frac{t}{\sqrt[\mu]{x}}\right)^{\lambda-1} x^{\frac{\lambda-1}{\mu}} e^{-x\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt[\mu]{x}}\right)^{\mu}} = $$
$$= 2t^{\lambda-1}e^{-\frac{1}{2}t^{\mu}}.$$

Přitom platí

$$\int_0^{+\infty} 2t^{\lambda-1}e^{-\frac{1}{2}t^{\mu}}\, dt = \left[\begin{smallmatrix} \tau=\frac{t^{\mu}}{2} \\ t=(2\tau)^{\frac{1}{\mu}} \\ dt=\frac{2}{\mu}(2\tau)^{\frac{1}{\mu}-1}d\tau \end{smallmatrix}\right] = \frac{2^{\frac{\lambda}{\mu}+1}}{\mu}\int_0^{+\infty} t^{\frac{\lambda}{\mu}-1}e^{-t}\, dt =$$
$$= \frac{2^{\frac{\lambda}{\mu}+1}}{\mu}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \in \mathbb{R},$$

takže funkce $2t^{\lambda-1}e^{-\frac{1}{2}t^{\mu}}$ je integrabilní majorantou a z Lebesgueovy věty plyne, že záměna limity a integrálu byla oprávněná. □

Poznámka (Jak se přišlo na vzorec (4.3)?). Laplaceova věta říká, že za uvedených předpokladů můžeme při vyšetřování asymptotiky integrálu

$$F(x) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\sim|t-a|^{\lambda-1}}\, e^{-x\overbrace{g(t)}^{\sim|t-a|^{\mu}}}\, dt \qquad \text{pro } x \to +\infty$$

nahradit funkce f a g příslušnými vedoucími členy jejich asymptotických rozvojů pro $t \to a+$ a přitom platí

$$F(x) \sim A\int_a^b (t-a)^{\lambda-1}\, e^{-xB(t-a)^{\mu}}\, dt \qquad \text{pro } x \to +\infty$$

Integrál na pravé straně je však pro $x \to +\infty$ asymptoticky ekvivalentní funkci dané vzorcem (4.3). Pokud tomu nevěříte, projděte si znovu důkaz Laplaceovy věty.

Příklad. Nalezneme vedoucí člen asymptotického rozvoje funkce

$$F(x) = \int_0^2 e^{-x(2\sqrt{t}-t)}\, dt \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Funkce $h(t) = -(2\sqrt{t} - t)$ nabývá maxima v bodě $t = 0$, přičemž $h(0) = 0$. Bod nula (dolní mez integrálu) je tedy jediným dominantním bodem funkce h, a proto můžeme ihned aplikovat Laplaceovu větu. Protože $f(t) = 1, g(t) = 2\sqrt{t} - t$, dostaneme $A = 1, \lambda = 1, B = 2, \mu = \frac{1}{2}$, a tedy

$$F(x) \sim \frac{\Gamma(2)}{\frac{1}{2}(2x)^2} = \frac{1}{2x^2} \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Příklad. Nalezneme vedoucí člen asymptotického rozvoje funkce

$$F(x) = \int_0^2 e^{x(2t-t^2)}\, dt \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Funkce $h(t) = 2t - t^2$ nabývá maxima v bodě $t = 1$, přičemž $h(1) = 1$. Nejprve převedeme úlohou na normalizovaný tvar

$$F(x) = \int_0^2 e^{x(2t-t^2)}\, dt = e^x\int_0^2 e^{-x(t^2-2t+1)}\, dt = e^x\int_{-1}^1 e^{-xt^2}\, dt = 2e^x\int_0^1 e^{-xt^2}\, dt.$$

Všimněte si, že dominantní bod ležící uvnitř integračního oboru dává dvojnásobný příspěvek ve srovnání s dominantními body ležícími na okraji (jeden zleva, druhý zprava). Nyní již lze použít Laplaceovu větu.

$$F(x) = 2e^x\int_0^1 e^{-xt^2}\, dt = \left[\begin{smallmatrix} A=1, & \lambda=1 \\ B=1, & \mu=2 \end{smallmatrix}\right] \sim \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{x^{\frac{1}{2}}}e^x = \sqrt{\frac{\pi}{x}}e^x \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Úloha. Nalezněte vedoucí člen asymptotického rozvoje funkce

$$F(x) = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}e^{x(2t^3-3t^2)}\, dt \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Úloha. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{10} e^{-x\tanh t} \arctan t\, dt}{\int_0^{\frac{3}{2}} e^{-x\tan t} \arcsin t\, dt}$$

15 **Příklad.** Vyšetříme asymptotické chování funkce

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{xt-t^2}\, dt \qquad \text{pro } x \to +\infty. \tag{4.5}$$

Funkce F nesplňuje základní požadavky kladené na integrály Laplaceova typu (v rovnici (4.5) je $f(t) = e^{-t^2}, h(t) = t$, a tedy $\operatorname{supess}_{(0,+\infty)} h = +\infty$). Můžeme však vyšetřovat funkci $h(x,t) = xt - t^2$ a zjistíme, že nabývá maxima pro $t = \frac{x}{2}$. Poloha extrému tedy závisí na zvoleném x. Budeme hledat takovou substituci, po které už poloha maxima funkce v exponentu nebude záviset na x. Takovou substitucí je např. $t = \tau x$, pro niž platí, že v bodě maxima $t = x$ je $\tau = \frac{1}{2}$ nezávisle na x. Abychom posunuli extrém do nuly, zavedeme substituci $t = (\tau + \frac{1}{2})x$ (v obecnějším případě, kdy extrém nastává pro $t = ax^{\lambda}$,

$\frac{x}{2}$

bychom mohli použít substituci $t = (\tau + a)x^\lambda)$. Zavedeme-li tedy substituci $t = (\tau + \frac{1}{2})x$, dostaneme

$$F(x) = x \int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{x^2[\frac{1}{4}-\tau^2]}\, d\tau.$$

Abychom dostali integrál Laplaceova typu, budeme vyšetřovat

$$F(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{-x[\tau^2-\frac{1}{4}]}\, d\tau \sim 2\sqrt{x}e^{\frac{x}{4}} \int_0^{+\infty} e^{-x\tau^2}\, d\tau \sim$$

$$\sim \left[\begin{smallmatrix} A=1,\lambda=1 \\ B=1,\mu=2 \end{smallmatrix}\right] \sim 2\sqrt{x}e^{\frac{x}{4}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}e^{\frac{x}{4}} \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Odtud již snadno plyne, že

$$F(x) \sim \sqrt{\pi}e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Příklad (Asymptotické chování funkce $\Gamma(x+1)$ pro $x \to +\infty$). Vyšetříme asymptotické chování funkce

$$F(x) = \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Při vyšetřování se stačí omezit na $x > 0$. Funkci $F(x)$ lze přepsat do tvaru

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{x \ln t - t}\, dt, \tag{4.6}$$

z něhož je vidět, že opět nejsou splněny základní předpoklady potřebné k vyšetřování asymptotiky integrálů Laplaceova typu (v rovnici(4.6) je $f(t) = e^{-t}$, $h(t) = \ln t$, a tedy $\operatorname{supess}_{(0,+\infty)} h = +\infty$). Můžeme však vyšetřit funkci

$$h(x,t) = x \ln t - t$$

a zjistíme, že pro libovolné pevné x nabývá funkce $h(x,t)$ maxima pro $t = x$, přičemž $h(x,x) = x \ln x - x$. Poloha extrému tedy závisí na zvoleném x. Zavedeme tedy substituci $t = (\tau + 1)x$ (viz předchozí příklad). Po této substituci dostáváme

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{x \ln t - t}\, dt = \left[\begin{smallmatrix} t=(\tau+1)x \\ dt = x d\tau \end{smallmatrix}\right] = x \int_{0}^{+\infty} e^{x\ln(\tau+1) + x \ln x - (\tau+1)x}\, d\tau =$$

$$= xe^{x(\ln x - 1)} \int_{-1}^{+\infty} e^{x\ln(\tau+1) - \tau x}\, d\tau = x\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-1}^{+\infty} e^{-x(\tau - \ln(\tau+1))}\, d\tau$$

Funkce $g(t) = t - \ln(t+1)$ nabývá svého minima v bodě $\tau = 0$, přičemž $g(0) = 0$. Jediným dominantním bodem je tedy nula. Vzhledem k tomu, že nula je vnitřním bodem integračního intervalu $[-1, +\infty)$ a $\ln(1+\tau) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$ pro $t \to 0$, dostáváme z Laplaceovy věty τ !

$$F(x) \sim 2x \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x\tau^2}{2}}\, d\tau \sim 2x \left(\frac{x}{e}\right)^x \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \quad \text{pro } x \to +\infty.$$

Tímto jsme dospěli ke spojité verzi Stirlingovy formule

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \qquad \text{pro } x \to +\infty.$$

Úloha. Vyšetřete asymptotické chování posloupnosti (a_n) zadané předpisem

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} k! \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \qquad \text{pro } n \to +\infty. \qquad \lambda \neq 0\,?$$

Návod: Dosazením za $k! = \Gamma(k+1) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$ a použitím binomické věty převeďte vyšetřování asymptotiky posloupnosti (a_n) na vyšetřování asymptotiky integrálů Laplaceova typu.