POZNÁMKY Z ASY

Definice 1 (Landauova symbolika). (1) $f(x) = o(g(x))$ pro $x \underset{M}{\longrightarrow} a$ (f je silně majorizována funkcí g), právě když

(a) $a \in (\mathcal{D}_f \cap M)'$, $\mathcal{D}_f \underset{(a)}{\subset} \mathcal{D}_g$

(b) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathrm{U}_{(a)})(\forall x \in \mathrm{U}_{(a)})(|f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|)$.

(2) $f(x) \sim g(x)$ pro $x \underset{M}{\longrightarrow} a$ (ekvivalence), právě když

(a) $\mathcal{D}_f \underset{(a)}{=} \mathcal{D}_g$,

(b) $f(x) - g(x) = o(g(x))$.

(3) $f(x) = O(g(x))$

(a) pro $x \in M$ (globálně), právě když $(\exists K)(\forall x \in M)(|f(x)| \leq K\, |g(x)|)$,

(b) pro $x \underset{M}{\longrightarrow} a$ (lokálně), právě když $(\exists K)(\exists \mathrm{U}_a)(\forall x \in \mathrm{U}_{(a)}^{f,M})(|f(x)| \leq K\, |g(x)|)$.

Poznámka. Relace $\sim$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní:

(1) Reflexivita je jasná.

(2) Symetrie: Nechť $f(x) - g(x) = o(g(x))$. Potom $|g(x)| = |g(x) - f(x) + f(x)| \leq \frac{1}{2}\, |g(x)| + |f(x)| \implies |g(x)| \leq 2\, |f(x)| \implies g(x) = O(f(x))$. Z toho plyne $f(x) - g(x) = o(f(x))$.

(3) Tranzitivita: $|f(x) - h(x)| = |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)| + \varepsilon\, |h(x)|$. Protože $g(x) \sim h(x)$, je $g(x) = O(h(x))$ a proto $f(x) \sim h(x)$.

Věta 1. Je-li f třídy $\mathcal{C}^{(n+1)}$, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ resp. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $|x| < R$, potom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + o(x^n)$$

pro každé $m \leq n$.

Důkaz. Zbytek v Taylorově rozvoji má tvar

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

a díky spojitosti $f^{(n+1)}$ je

$$\frac{r_n(x)}{x^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} x \to 0. \quad \square$$

Věta 2 (diskrétní l'Hospitalovo pravidlo). je-li (b_n) ryze monotonní, pak

$$\frac{a_n}{b_n} \simeq \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

pokud

(1) $\lim a_n = 0 = \lim b_n$ nebo

(2) $\lim |b_n| = +\infty$.

Důkaz. (1) Nechť $b_n \downarrow 0$,

$$\lambda > \overline{\lim} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Pak existuje n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ je

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < \lambda,$$

$a_{n+1} - a_n > \lambda(b_{n+1} - b_n) \implies a_{n+1} - \lambda b_{n+1} > a_n - \lambda b_n \implies (a_n - \lambda b_n) \uparrow 0 \implies a_n - \lambda b_n < 0 \implies \frac{a_n}{b_n} < \lambda \implies$

$$\overline{\lim} \frac{a_n}{b_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

(2) Nechť

$$\lambda < \underline{\lim} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

$a_{n+1} - a_n > \lambda b_{n+1} - \lambda b_n$, $a_{n+1} - \lambda b_{n+1} > a_n - \lambda b_n$. Z monotonie plyne existence L takového, že pro každé $n > n_0$ je $a_n - \lambda b_n \geq L$ a tedy

$$\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{L}{b_n} + \lambda \implies \underline{\lim} \frac{a_n}{b_n} \geq \lambda. \quad \square$$

Věta 3 (Cauchy, Maclaurin)**.** Buď $0 \leq f \downarrow$ na $[1, +\infty)$, $F = \int f$ na $[1, +\infty)$, $p_n = f(1) + \cdots + f(n) - F(n+1)$, $q_n = f(1) + \cdots + f(n) - F(n)$. Pak

(1) $p_n \uparrow$, $q_n \downarrow$, $p_n \leq q_n$ pro každé n, $0 \leq (q_n - p_n) \to f(+\infty)$.

(2) Je-li navíc $F(+\infty) = 0$, $S = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, potom existuje v_n, $0 < |v_n| < 1$ tak, že

$$S = s_n - \frac{F(n) + F(n+1)}{2} + v_n \frac{F(n+1) - F(n)}{2}.$$

Důkaz. (1) Z věty o střední hodnotě plyne

$$p_n - p_{n-1} = f(n) - F(n+1) + F(n) = f(n) - f(n + \xi_n) > 0,$$

$$q_n - q_{n+1} = -f(n+1) - F(n) + F(n+1) = f(n + \xi_n) - f(n+1) > 0,$$

takže $p_n \uparrow$, $q_n \downarrow$. Dále

$$q_n - p_n = -F(n) + F(n+1) = f(n + \xi_n) \to f(+\infty).$$

(2) $p_n \to s \leftarrow q_n$, $s \in (p_n, q_n)$, takže s můžeme zapsat jako

$$s = \frac{p_n + q_n}{2} + v_n \frac{q_n - p_n}{2} = s_n + \frac{-F(n+1) - F(n)}{2} + v_n \frac{F(n+1) - F(n)}{2}. \quad \square$$

Důsledek. (1) Posloupnosti (p_n), (q_n) konvergují a mají společnou limitu, pokud $f(+\infty) = 0$.

(2) Integrální kritérium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konverguje} \iff F(+\infty) \in \mathbb{R}.$$

Definice 2. Buď $f(x, \cdot) \in \mathrm{L}(a, b)$ pro každé $x \in M$. Řekneme, že $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ konverguje stejnoměrně na M při $\beta \to b-$, platí-li

$$\int_a^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}t \underset{x \in M}{\rightrightarrows} \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t,$$

tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \beta_\varepsilon < b)(\forall \beta \in (\beta_\varepsilon, b))(\forall x \in M) \left(\left| \int_\beta^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon \right).$$

Věta 4 (BC pro stejnoměrnou konvergenci)**.** Buď $f(x,\cdot) \in \mathrm{L}(a,b)$ pro každé $x \in M$. Potom

$$\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \underset{x\in M}{\rightrightarrows},$$

právě když

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\beta < b)(\forall\beta',\beta'' \in (\beta,b))(\forall x \in M)\left(\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon\right).$$

Věta 5 (Abel a Dirichlet pro zobecněný Lebesgueův integrál)**.** Nechť f je monotonní a omezená na (a,b), $g \in \mathrm{L}(a,b-)$. Jestliže

(1) (Abel) $g \in \mathrm{L}(a,b)$ nebo
(2) (Dirichlet) $\beta \mapsto \int_a^\beta g$ je omezená na (a,b), $f(b-) = 0$,

pak $\int_a^b fg$ konverguje.

Důkaz. Z 2. věty o střední hodnotě a BC

$$\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|f(\beta')\int_{\beta'}^{\xi} g(t)\,\mathrm{d}t + f(\beta'')\int_{\xi}^{\beta''} g(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon. \quad\square$$

Lemma 1. Nechť $f_n(x) \underset{x\in M}{\rightrightarrows} f(x)$ pro $n \to \infty$ a $(\forall n)(\exists \lim_{x\to x_0, x\in M}) f_n(x) = d_n \in \mathbb{C}$. Potom existuje $\lim d_n = d \in \mathbb{C}$ a $\lim_{x\to x_0,x\in M} f(x) = d$.

Věta 6 (Slabá varianta Abelova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci)**.** Buď

$$F(x) = \int_a^b f(t)g(x,t)\,\mathrm{d}t$$

a nechť platí

(1) $f \in \mathrm{L}(a,b)^*$,
(2) $(\exists\widehat{\mathrm{U}}^M_{(x_0)})(\exists K)(\forall x \in \widehat{\mathrm{U}}^M_{(x_0)})(\text{s.v. } t \in (a,b))(|g(x,t)| \le K)$,
(3) $g(x,\cdot)$ je monotonní na jistém (c,b).

Pak $F(x)$ konverguje v horní mezi stejnoměrně.

Důkaz. Použijeme opět BC a 2. větu o střední hodnotě:

$$\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(t)g(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \le |g(x,\beta')|\left|\int_{\beta'}^{\xi} f(t)\,\mathrm{d}t\right| + |g(x,\beta'')|\left|\int_{\xi}^{\beta''} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon. \quad\square$$

Poznámka (Abel a Dirichlet pro komplexní řady). Nechť $\sum_{k=1}^\infty |b_n - b_{n+1}|$ konverguje a

(1) (Abel) $\sum a_k$ konverguje nebo
(2) (Dirichlet) $\sum a_k$ má omezené částečné součty a $b_n \to 0$.

Pak $\sum a_n b_n$ konverguje.

Důkaz.

$$\left|\sum_p^q a_n b_n\right| = \left|\sum_p^q (A_n - A_{n-1}) b_n\right| = \left|\sum_p^q A_n b_n - \sum_{p+1}^{q+1} A_n b_{n+1}\right| =$$
$$= \left|\sum_p^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right| \leq$$
$$\leq A \sum_p^{q-1} |b_n - b_{n+1}| + |(A_q - A_p)|\,|b_q| + |b_q - b_p|\,|A_{p-1}|. \quad \square$$

Věta 7 (o limitním přechodu v zobecněném Lebesguově integrálu)**.** Buď

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t,$$

$x_0 \in M'$, nechť existuje $\widehat{\mathrm{U}}_{x_0}^M$ tak, že platí

(1) $\lim_{x \to x_0, x \in M} f(x,t) = \varphi(t)$ pro s.v. $t \in (a,b)$,
(2) existuje $g \in \mathrm{L}(a,b)$, $|f(x,t)| \leq g(t)$ pro s.v. $t \in (a,b)$, $\forall x \in \widehat{U}_{(x_0)}^M$,
(3) $F(x)$ konverguje stejnoměrně v horní mezi na $\widehat{\mathrm{U}}_{(x_0)}^M$.

Pak

(1) $\varphi \in \mathrm{L}(a,b)^*$,
(2)
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M}} F(x) = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Zvolme $b_n \to b$ libovolně, označme

$$F_n(x) := \int_a^{b_n} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Podle předpokladu 3. je $F_n(x) \rightrightarrows F(x)$. Podle 2. je pro s.v. $t \in (a, b_n)$ $|f(x,t)| \leq g(t) \in \mathrm{L}(a.b_n)$ a z Lebesguovy věty plyne existence

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M}} F_n(x) = c_n = \int_a^{b_n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Z lemmatu 1 plyne konvergence $c_n \to c$ a tedy

$$c = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

přičemž c nezávisí na volbě b_n (důkaz smícháním dvou posloupností). $\square$

Definice 3. (1) Posloupnost $(\varphi_n)_{n \geq q}$ funkcí je **asymptotická při** $x \underset{M}{\longrightarrow} x_0$, právě když pro každé $n > q$ $\varphi_n(x) = o(\varphi_{n-1}(x))$ při $x \underset{M}{\longrightarrow} x_0$.

(2) Jestliže (φ_n) je asymptotická a

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x))$$

při $x \underset{M}{\longrightarrow} x_0$ (pro jistá a_k), říkáme, že f má **asymptotický rozvoj do n-tého členu dle** (φ_n)**.**

(3) Je-li (φ_n) nekonečná a platí-li 2. pro každé n, pak f má asymptotický rozvoj dle (φ_n), značíme
$$f \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n.$$

Věta 8 (Jednoznačnost a Mackieova věta). (1) (jednoznačnost) Nechť $(\varphi_n)_1^N$ je asymptotická posloupnost:
$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x) + o(\varphi_N(x)),$$
$x_0 \in M_n'$, $M_n = \{x | \varphi_n(x) \neq 0\}$. Potom pro každé $n \leq N$ existují konečné limity
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} = a_n.$$

(2) (Mackieova věta) Nechť (φ_n) jsou nenulové na jistém $\widehat{\mathrm{U}}_{(x_0)}$ a nechť pro každé $n = 1, 2, \dots$ existují konečné nenulové limity
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} = a_n.$$
Potom (φ_n) tvoří asymptotickou posloupnost a
$$f \approx \sum_{k \geq 1} a_k \varphi_k.$$

Důkaz. (1) Z předpokladu plyne
$$\frac{f(x)}{\varphi_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} + \frac{o(\varphi_n(x))}{\varphi_n(x)} + a_n$$
$$a_n = \frac{1}{\varphi_n(x)} \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x) \right] + o(1).$$
Z toho plyne, že limita pravé strany existuje a je rovna a_n.

(2) Nechť platí
$$\frac{1}{\varphi_n(x)} \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x) \right] = a_n + o(1).$$
Potom
$$f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) = o(1)\varphi_n(x) = o(\varphi_n(x))$$
pro každé n. Je to tedy asymptotický rozvoj, pokud φ_n je asymptotická posloupnost. Ještě zbývá dokázat $\varphi_n(x) = o(\varphi_{n-1}(x))$ pro $x \to x_0$. Víme, že
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) + \underbrace{o(\varphi_n(x))}_{g(x)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) + a_{n+1}\varphi_{n+1}(x) + o(\varphi_{n+1}(x))$$
$$o(\varphi_n(x)) = a_{n+1}\varphi_{n+1}(x) + \underbrace{o(\varphi_{n+1}(x))}_{\varphi_{n+1}(x) o(1)} = \varphi_{n+1}(x)[a_{n+1} + o(1)]$$
Chceme dokázat, že $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathrm{W}_{(x_0)})(|\varphi_{n+1}(x)| \leq \varepsilon \, |\varphi_n(x)| \,,\ \forall x \in W_{(x_0)})$. Víme, že
$$(\exists \mathrm{U}_{x_0})(\forall x \in \mathrm{U}_{(x_0)}) \left(|g(x)| \leq \frac{\varepsilon \, |a_{n+1}|}{2} \, |\varphi_n(x)| \right).$$

Dále, protože

$$\lim_{x\to x_0}[a_{n+1}+o(1)] = a_{n+1} \neq 0,$$

existuje $\mathrm{V}_{(x_0)}$ tak, že

$$|a_{n+1}+o(1)| > \frac{|a_{n+1}|}{2}.$$

Položíme-li $\mathrm{W}_{x_0} := \mathrm{U}_{x_0} \cap \mathrm{V}_{x_0}$, pro každé $x \in \mathrm{W}_{(x_0)}$ platí

$$|\varphi_{n+1}(x)| = \frac{|g(x)|}{|a_{n+1}+o(1)|}\,\frac{\varepsilon\frac{|a_{n+1}|}{2}\,|\varphi_n(x)|}{\frac{|a_{n+1}|}{2}} = \varepsilon\,|\varphi_n(x)|\,. \quad \square$$

Poznámka. Vlastnosti o, O:

(1) $o_1(g(x)) + o_2(g(x)) = o(g(x))$;
(2) $O_1(g(x)) + O_2(g(x)) = O(g(x))$;
(3) $o_1(g(x)) + O_2(g(x)) = O(g(x))$;
(4) $o_1(g(x))O_2(g(x)) = o(g(x))$.
(5) Nechť $f(x) = (o|O)(g(x))$, $x \underset{M}{\longrightarrow} x_0$. Je-li $h(x) \neq 0$ na jistém $\widehat{\mathrm{U}}^M_{(x_0)}$, potom $h(x)f(x) = (o|O)(h(x)g(x))$.
(6) Nechť $f(x) = (o|O)(g(x))$, $h(t) \underset{M}{\longrightarrow} x_0$, pro $t \underset{Q}{\longrightarrow} t_0$. Potom

$$f(h(t)) = (o|O)(g(h(t))),$$

je-li $h(t) \neq 0$ pro $t \in U^Q_{(t_0)}$.

Věta 9 (operace s asymptotickými rozvoji)**.** (1) Buďte $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(x) + o(\varphi_n(x))$, $g(x) = \sum_{k=1}^n b_k\varphi_k(x) + o(\varphi_n(x))$, potom

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k)\varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)).$$

(2) Buďte $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$, $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$, potom

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n),$$

kde $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$, tedy

$$f(x)g(x)|_{\leq n} = f_n(x)g_n(x)|_{\leq n}\,,$$

tj. asymptotický rozvoj součinu do n-tého řádu dostaneme vynásobením asymptotických rozvojů do n-tého řádu a vyhozením členů vyššího řádu než n.

(3) Nechť $f(x) \approx \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $x \to 0+$, $g(t) \approx \sum_{k=1}^n b_k t^k$, $t \to 0+, \exists l : b_l \neq 0$. Pak

$$f(g(t)) \approx \sum_{k=0}^n d_k x^k \equiv f_n(g_n(t))|_{\leq n}$$

Důkaz. Po dosazení a vyhození mocnin vyšších než t^n a členů s $o(t^n)$ dostaneme

$$f(g(t)) = \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{l=1}^n b_l t^l + o(t^n)\right)^k + o(g^n(t)) = \sum_{k=0}^n d_k t^k + o(g^n(t)).$$

Položme $m = \min\{k | b_k \neq 0\}$. Potom $(t \to 0)$.

$$g^n(t) = t^{mn}\underbrace{\left(\sum_{k=m}^n b_n t^{k-m}\right)}_{\to b_m}$$

Protože $b_0 = 0$, je $g^n(t) = o(t^n)$. □

(4) Nechť $f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $g(x) \approx \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, pak
$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \sum_{k=0}^{n} e_k x^k,$$
kde e_k dostaneme formálním dělením.

Důkaz. Stačí předpokládat $b_0 = 1$:
$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{1-h(x)} = \frac{1-h(x)^n}{1-h(x)} + \frac{h(x)^n}{1-h(x)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} h(x)^k + \underbrace{x^{n+1}O(1)}_{o(x^n)} = \sum_{k=0}^{n} e_k x^k + o(x^n),$$
přičemž $h(x) = -\sum_{k=1}^{n} b_k x^k + o(x^n)$. □

Lemma 2. Buď f holomorfní, $f'(0) \neq 0$, $f(0) = 0$. Označme $f(z) = t$. Pak $o(z^n)$ a $o(t^n)$ jsou zaměnitelné, tzn.
$$h(z) = o(z^n) \iff \tilde{h}(t) = h(f^{-1}(t)) = o(t^n).$$

Důkaz. Protože f je holomorfní, je spojitá. Jelikož $f'(0) \neq 0$, je f na nějakém okolí 0 prostá a z teorie holomorfních funkcí plyne, že na tomto okolí je to otevřené zobrazení, tj. zobrazuje okolí na okolí a současně f^{-1} je holomorfní. Nechť platí $h(z) = o(z^n)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom existuje okolí $\mathrm{U}_{(0)}$: $|h(z)| \leq \varepsilon\,|z^n|$, zvolíme ho dostatečně malé, aby bylo $f(\mathrm{U}_{(0)})$ taky okolí 0. Potom pro každé $t \in f(\mathrm{U}_{(0)})$ platí $\left|h(f^{-1}(t))\right| \leq \varepsilon \left|(f^{-1}(t))^n\right|$. Jelikož $f^{-1}(0) = 0$, je $f^{-1}(t) = O(t)$. Z toho plyne jeden směr implikace. Druhý se dokáže stejně. □

Věta 10 (o neadekvátnosti okolí v asymptotice holomorfních funkcí)**.** Buď f holomorfní na $U = \{z | 0 < |z| < \varrho\}$ resp. $\{z | \varrho < |z| < +\infty\}$, $\varrho > 0$ a nechť
$$f(z) \approx \sum_{n \geq q} a_n z^n$$
resp.
$$f(z) \approx \sum_{n \geq q} \frac{a_n}{z^n}$$
pro $z \to 0$ resp. $z \to \infty$. Pak místo $\approx$ platí $=$.

Důkaz. Nechť f je holomorfní v ∞. Z Laurentovy věty plyne
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$
pro $|z| > \varrho$, přičemž
$$b_n = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint\limits_{|z|=r>\varrho} f(z) z^{n-1}\,\mathrm{d}z.$$
Z předpokladu plyne $f(z) = O(z^{-q})$, takže pro $n < q$ platí
$$|b_n| \leq \left|\frac{1}{2\pi \mathbf{i}}\right| \oint\limits_{|z|=r>\varrho} O(z^{-q}) z^{n-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{|z|=r>\varrho} O\left(\frac{1}{z^{q-n+1}}\right) \mathrm{d}z \leq$$
$$\leq 2\pi r \frac{L}{r^{q-n+1}} \leq \frac{2\pi L}{r} \to 0.$$
Z věty 1 a věty o jednoznačnosti plyne tvrzení věty. □

Věta 11. Je-li $(a_n)_{n\geq 0}$ libovolná posloupnost v $\mathbb{C}$, pak existuje funkce $f(z)$ taková, že

$$f(z) \approx \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{z^n},$$

tj. každou asymptotickou řadu lze sečíst.

Důkaz. Definujme

$$n_z := \max\{n \,|\, |a_0| + \cdots + |a_n| + n \leq |z|\}.$$

n_z je neklesající funkcí $|z|$, $n_z \to +\infty$ při $z \to \infty$. Položme

$$f(z) := \sum_{n=1}^{n_z} \frac{a_n}{z^n}.$$

Pro $|z| > r_n = |a_0| + \cdots + |a_{n+2}|$ platí $n_z \geq n+2$ a tedy

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k} \right| = \left| \sum_{n+1}^{n_z} \frac{a_k}{z^k} \right| \leq \frac{|a_{n+1}|}{|z|^{n+1}} + \frac{1}{|z|^{n+1}} \sum_{n+2}^{n_z} |a_k| \leq$$

$$\leq \frac{|a_{n+1}|}{|z^{n+1}|} + \frac{|z|}{|z|^{n+2}} = \frac{|a_{n+1}|+1}{|z|^{n+1}} = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right). \quad \square$$

Lemma 3. Jestliže f' je monotonní na $(a, +\infty)$, pak

$$f'(x) \begin{cases} \leq \frac{f(t)-f(x)}{t-x} & t > x > a \\ \geq \frac{f(t)-f(x)}{t-x} & x > t > a \end{cases}$$

Důkaz. Plyne z věty o přírůstku funkce. $\square$

Věta 12. Je-li f diferencovatelná na $(a, +\infty)$, $a > 0$ a f' je monotonní tamtéž, pak z $f(x) \underset{O}{\overset{\circ}{\sim}} x^\lambda$, $x \to +\infty$ plyne $f'(x) \underset{O}{\overset{\circ}{\sim}} \lambda x^{\lambda-1}$, $x \to +\infty$. Specielně je-li $f(x) \sim$ konst., je $f'(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Důkaz. Buď $f(x) \sim x^\lambda$, $x \to +\infty$, např. $f \uparrow$, $\overline{\lim}$ (ostatní případy analogicky). V předchozím lemmatu položíme $t = cx$, $c > 1$:

$$f'(x) \leq \frac{f(cx) - f(x)}{(c-1)x}.$$

Po vynásobení $\frac{1}{x^{\lambda-1}}$

$$\frac{f'(x)}{x^{\lambda-1}} \leq \frac{1}{c-1} \left(\frac{f(cx)}{(cx)^\lambda} c^\lambda - \frac{f(x)}{x^\lambda} \right).$$

Potom

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f'(x)}{x^{\lambda-1}} \leq \frac{c^\lambda - 1}{c-1}.$$

Limitním přechodem $c \to 1+$ dostáváme

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f'(x)}{x^{\lambda-1}} \leq \lambda. \quad \square$$

Důsledek. Nechť

$$f(x) \approx \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

pro $x \to 0$ a f'' je monotonní. Potom

$$f'(x) \approx \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Věta 13. Nechť
$$f(x) \approx \sum_{n\geq 0} a_n x^n, \quad f'(x) \approx \sum_{n\geq 0} b_n x^n$$
pro $x \to 0$. Potom $b_n = (n+1)a_{n+1}$.

Důkaz. Označme
$$g_n(x) := f(x) - \left(b_0 x + \frac{b_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{b_n x^{n+1}}{n+1}\right),$$
$$g_n'(x) = f'(x) - (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) = o(x^n).$$
Podle věty o přírůstku funkce je
$$g_n(x) - g_n(0) = x g_n'(\tilde{x}) = x o(x^n) = o(x^{n+1}),$$
kde $\tilde{x} \in (0, x)$. Z toho plyne
$$f(x) \approx f(0) + \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}.$$
Tvrzení této věty pak plyne z věty o jednoznačnosti. □

Věta 14. Nechť f je holomorfní v sektoru S v 0 nebo ∞, $f(z) \underset{O}{\overset{\circ}{\sim}} z^\lambda$, $z \underset{S}{\to} 0, \infty$. Potom $f'(z) \underset{O}{\overset{\circ}{\sim}} \lambda z^{\lambda-1}$, $z \underset{S_1}{\longrightarrow} 0, \infty$, kde $S_1 \Subset S$ libovolně zvolený.

Důkaz. Důkaz provedeme pro O a ∞. Nechť $f \sim z^\lambda$, potom
$$\left|f^{(k)}(z)\right| = \left|\frac{k!}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{K_z} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\right| \mathrm{d}\xi \leq k! \sup_{\xi\in K_z} \frac{|f(\xi)|}{|z|^k \sin^k \delta} \leq k! \frac{L\,|z|^\lambda\,(1+\sin|\delta|)^\lambda}{|z|^n \sin^n \delta} = \widehat{L}\,|z|^{\lambda-n},$$
takže $f^{(k)}(z) = O(z^{\lambda-k})$. □

Věta 15. Buďte f, g měřitelné na (a, b), $g \geq 0$, $f(x) \underset{O}{\overset{\circ}{\sim}} g(x)$, $x \to b-$.

(1) Nechť $g \in \mathrm{L}(a, b)$, potom
$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{O}{\overset{\circ}{\sim}} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) Nechť $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$. Pak
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{O}{\overset{\circ}{\sim}} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. (1) Zvolme $\varepsilon > 0$, potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že pro každé $t \in (c, b)$ je $|f(t)| \leq \varepsilon\,|g(t)|$. Integrací $\int_x^b$ obdržíme
$$\left|\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^b |f|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon \int_x^b g.$$

(2) Nechť $x > c$. Pak
$$\left|\int_a^x f\right| = \left|\int_a^c f + \int_c^x f\right| \leq \left|\int_a^c f\right| + \varepsilon \int_c^x g = \left|\int_a^c f\right| - \varepsilon \int_a^c g + \varepsilon \int_a^x g =$$
$$= \left(\int_a^x g\right)\left(\varepsilon + \frac{L}{\int_a^x g}\right) < 2\varepsilon \int_a^x g. \quad \square$$

Důsledek. Je-li f měřitelná pro $x > a > 0$,

$$f(x) \approx \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{x^n}$$

při $x \to +\infty$. Potom

$$\int_x^{+\infty} \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t}\right) \mathrm{d}t \approx \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+1}}{nx^n}.$$

Důkaz. Z předpokladu

$$\left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t}\right) = O(t^{-2}) \in \mathrm{L}(a, +\infty).$$

Podle předchozí věty je

$$\int_x^{+\infty} \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t}\right) \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{t^k} \mathrm{d}t + o(x^{-n+1}). \quad \square$$

Věta 16 (asymptotika posloupností)**.** Buď $a_n > 0$. Jestliže

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{O(1)}{n^\alpha}\right),$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\alpha > 1$, pak existuje $A > 0$ takové, že

$$a_n \sim \frac{A}{\lambda^n n^\mu}.$$

Důkaz. Nejprve uvažujme $\lambda = 1$. Potom existuje k tak, že pro každé $n > k$ je $\left|\xi_n := \frac{\mu}{n} + \frac{O(1)}{n^\alpha}\right| < \frac{1}{2}$. Potom (za použití $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\varphi(x)$, kde $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 1$) máme

$$\ln a_k - \ln a_n = \sum_{j=k}^{n-1} \ln \frac{a_j}{a_{j+1}} = \sum_{j=k}^{n-1} \ln(1 + \xi_j) =$$
$$= \mu \left(\sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{j} - \ln n\right) + \ln n^\mu + \sum_{j=k}^{n-1} \frac{O(1)}{n^\beta},$$

přičemž $\beta = \min\{2, \alpha\}$. Proto první a třetí sčítanec mají pro $n \to \infty$ konečnou limitu — označme ji $-B$. Odtud $\lim(a_n n^\mu) = a_k e^B =: A$. Případ $\lambda \neq 1$ dostaneme aplikací předchozího postupu na posloupnost $b_n = a_n \lambda^n$. $\square$

Věta 17 (asymptotika součtů)**.** Jestliže $x_n > 0$, k pevné

$$x_n = \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \cdots + \frac{a_k}{n^k} + o(n^{-k}),$$

$n \to \infty$ a označíme-li

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

pak existují čísla $b_1, \ldots, b_{k-1}$,

$$b_p = \frac{1}{p} \left(a_{p+1} - \sum_{l=1}^{p-1} \binom{p}{l-1} b_l\right),$$

pro která platí

$$S - \sum_{j=1}^{n} x^j = \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{n^{k-1}} + o(n^{-k+1}).$$

Důkaz. Použijeme indukci a diskrétní l'Hospitalovo pravidlo:

$$b_1 = \lim_{n\to\infty} nr_n \simeq \frac{r_n}{\frac{1}{n}} \simeq \frac{r_n - r_{n+1}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} \simeq n^2 x_n \to a_2.$$

Buď $p \leq k-1$ a nechť tvrzení platí pro $1,\dots,p-1$. Potom

$$b_p = \lim_{n\to\infty} n^p \left(r_n - \frac{b_1}{n} - \dots - \frac{b_{p-1}}{n^{p-1}} \right) \simeq \frac{x_n - \sum_{l=1}^{p-1} \left(\frac{1}{(n-1)^l} - \frac{1}{n^l} \right) b_l}{\frac{1}{(n-1)^p} - \frac{1}{n^p}}.$$

Výraz $\frac{1}{(n+x)^l}$ rozvineme do Taylorovy řady v bodu 0 do členu n^{-p-1} a dosadíme $x := -1$. Zbytek je pak $O(n^{-p-2})$, takže jej nemusíme psát, protože po vynásobení n^{p+1} to jde k 0. Po odečtení $\frac{1}{n^l}$ a posunutí indexu dostaneme

$$\frac{n^{p+1}}{p} \left(x_n - \sum_{l=1}^{p-1} b_l \sum_{j=l+1}^{p+1} \frac{l(l+1)\dots(j-1)}{(j-l)!} \frac{1}{n^j} \right).$$

Dále platí

$$\frac{l(l+1)\dots(j-1)}{(j-l)!} = \binom{j-1}{j-l} = \binom{j-1}{l-1}.$$

A teď …trocha šachování se sumami:

$$\frac{n^{p+1}}{p} \left(x_n - \sum_{l=1}^{p-1} b_l \sum_{j=l+1}^{p+1} \binom{j-1}{l-1} \frac{1}{n^j} \right) =$$

$$= \frac{n^{p+1}}{p} \left(x_n - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{1}{n^j} \sum_{l=1}^{\min\{j-1,p-1\}} \binom{j-1}{l-1} b_l \right) =$$

$$= \frac{n^{p+1}}{p} \left(x_n - \sum_{j=2}^{p} \frac{1}{n^j} \sum_{l=1}^{j-1} \binom{j-1}{l-1} b_l \right) - \frac{n^{p+1}}{p} \frac{1}{n^{p+1}} \underbrace{\sum_{l=1}^{p-1} \binom{p}{l-1} b_l}_{c_p} =$$

$$= \frac{n^{p+1}}{p} \left(x_n - \sum_{j=2}^{p} \frac{1}{n^j} b_{j-1} - \sum_{j=2}^{p} \frac{1}{n^j} \sum_{l=1}^{j-2} \binom{j-1}{l-1} b_l \right) - \frac{c_p}{p} =$$

$$= \frac{n^{p+1}}{p} \left(x_n - \sum_{j=2}^{p} \frac{a_j}{n_j} + \sum_{j=2}^{p} \frac{1}{n^j} \sum_{l=1}^{j-2} \binom{j-1}{l-1} b_j - \sum_{j=2}^{p} \sum_{l=1}^{j-2} \cdots \right) - \frac{c_p}{p} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{p} \left(a_{p+1} - \sum_{l=1}^{p-1} \binom{p}{l-1} b_l \right). \quad \square$$

Věta 18 (o hrubém leadingu)**.** Buďte f, h měřitelné funkce na (a,b),

$$S = \operatorname*{sup\,ess}_{(a,b)} h < +\infty,$$

$$F(x) := \int_a^b f(t) e^{xh(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Nechť existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že buď

(1) $fe^{x_0 h} \in \mathrm{L}(a,b)$ nebo
(2) $fe^{x_0 h} \in \mathrm{L}(a,b)^*$ a h je monotonní na jistém (c,b).

Potom

(1) $e^{-Sx} F(x)$ konverguje stejnoměrně při $x \to +\infty$ a

(2) $\lim_{x\to\infty} e^{-Sx}F(x) = \int_a^b f_S$, kde

$$f_S(t) = \begin{cases} f(t) & h(t) = S, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Důkaz.

$$e^{-Sx}F(x) = \int\limits_a^b f(t)e^{x(h(t)-S)}\,\mathrm{d}t = e^{-x_0 S}\int\limits_a^b \underbrace{f(t)e^{x_0 h(t)}}_{\int \text{ konverguje}}\underbrace{e^{(x-x_0)(h(t)-S)}}_{|\,|\le 1\ (+\text{ mon.})}\,\mathrm{d}t.$$

Z Abelova kritéria potom plyne stejnoměrná konvergence pro $x \to +\infty$. Po záměně limity a integrálu dostaneme bod 2. □

Věta 19 (Erdélyiovo lemma)**.** Buďte

(1) $f_i \in \mathcal{L}_{x_0}^{-g}(a, b_i)$, $i = 1, 2$ pro jisté x_0,
(2) $(\forall c \in (a, b_1))(\exists \gamma_C > 0)(g(t) \ge \gamma_C$ s.v. $t \in (c, b_1))$,
(3) $f_2 \ge 0$, $f_1(t) = o(f_2(t))$, $t \to 0+$,
(4) $(\forall \varrho > 0)(e^{\varrho x}F_2(x) \to +\infty$ pro $x \to +\infty)$,

položme

$$F_i(x) := \int\limits_a^{b_i} f(t)e^{-\lambda g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Potom $F_1(x) = o(F_2(x))$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ pevně. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $|f_1(t)| \le \frac{\varepsilon}{2} f_2(t)$ pro $t \in (a, c)$. Dále je

$$|F_1(x)| = \left|\int\limits_a^c + \int\limits_c^{b_1}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_a^c f_2(t)e^{-xg(t)}\,\mathrm{d}t + \left|\int\limits_c^{b_1} f_1(t)e^{-xg(t)}\,\mathrm{d}t\right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2}F_2(x) + \left|\int\limits_c^{b_1} f_1(t)e^{-xg(t)}\,\mathrm{d}t\right| = F_2(x)\left[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\int_c^{b_1} f_1(t)e^{-xg(t)}\,\mathrm{d}t}{F_2(x)}\right]$$

Protože $-S = \sup\operatorname{ess}_{(c,b_1)} -g(t) \le -\gamma_C$, podle věty 18 je

$$\int\limits_c^{b_1} f_1(t)e^{-xg(t)}\,\mathrm{d}t = O(e^{-Sx})$$

a

$$\frac{\int_c^{b_1} f_1(t)e^{-xg(t)}\,\mathrm{d}t}{F_2(x)} \le \frac{L}{e^{Sx}F_2(x)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \square$$

Věta 20 (Watsonovo lemma)**.** Buď $f \in \mathcal{L}_{x_0}^{-\mathrm{id}}(0, b) \equiv \mathcal{L}_{x_0}(0, b)$,

$$f(t) = a_1 t^{\lambda_1 - 1} + \dots + a_n t^{\lambda_n - 1} + o(t^{\lambda_n - 1}),$$

kde $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Položme

$$F(x) := \int\limits_0^b f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Pak

$$F(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k \Gamma(\lambda_k)}{x^{\lambda_k}} + o(x^{-\lambda_n})$$

pro $x \to +\infty$.

Důkaz.

$$f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k t^{\lambda_k - 1} = o(t^{\lambda_n - 1}).$$

Protože $t^{\lambda_n - 1} e^{-xt} \in \mathrm{L}(0, +\infty)$, z věty 19 plyne

$$\int_0^b f(t) e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{\lambda_k - 1} e^{-xt}\,\mathrm{d}t}_{\frac{\Gamma(\lambda_k)}{x^{\lambda_k}}} - \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{\int_b^{+\infty} t^{\lambda_k - 1} e^{-xt}\,\mathrm{d}t}_{\text{V18} \Longrightarrow O(e^{-bx})} +$$

$$+ \underbrace{o\left(\int_0^{+\infty} t^{\lambda_n - 1} e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right)}_{o(x^{-\lambda_n})}. \quad \square$$

Věta 21 (o zbytku)**.** Buď $f \in \mathcal{L}^{-g}_{x_0}(0, b)$, UDP$_0$. Potom pro každé $c \in (0, b)$ platí

$$\int_c^b f(t) e^{-xg(t)}\,\mathrm{d}t = O(e^{-\gamma_C x}) = o(x^{-\infty}).$$

Důkaz. Platí $S = \sup\mathrm{ess}_{(c,b)} -g(t) \leq -\gamma_C$. Z věty 18 plyne $\int_c^b f(t) e^{-xg(t)}\,\mathrm{d}t = O(e^{-\gamma_C x})$. $\square$

Věta 22. Buď $f \in \mathcal{L}^{-g}_{x_0}(0, b)$, UDP$_0$. Buďte $f(t) \sim A t^{\lambda - 1}$, $g(t) \sim B t^{\mu}$ pro $t \to 0+$, $A \neq 0$, $B, \lambda, \mu > 0$. Položme

$$F(x) := \int_0^b f(t) e^{-xg(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Potom $F(x) \sim A \int_0^{+\infty} t^{\lambda - 1} e^{-Bxt^{\mu}}\,\mathrm{d}t$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti položme $A = 1$ (jinak zavedeme substituci $f \mapsto \frac{f}{A}$). Existuje $c \in (0, b)$ tak, že $|f(t)| \leq A^+ t^{\lambda - 1}$, $g(t) \geq B^- t^{\mu}$ pro $t \in (0, c)$. $A^+ > 1$, $B^- \in (0, B)$. Dále

$$F(x) = \int_0^c f(t) e^{-xg(t)}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_c^b f(t) e^{-xg(t)}\,\mathrm{d}t}_{\text{V21} = o(x^{-\infty})}.$$

Vynásobením $x^{\frac{\lambda}{\mu}}$ dostaneme

$$x^{\frac{\lambda}{\mu}} F(x) = x^{\frac{\lambda}{\mu}} \int_0^c f(t) e^{-xg(t)} + o(x^{-\infty}) = \left\{ t = \frac{\tau}{x^{\frac{1}{\mu}}} \right\} =$$

$$= x^{\frac{\lambda - 1}{\mu}} \int_0^{cx^{\frac{1}{\mu}}} f\left(\frac{t}{x^{1/\mu}}\right) e^{-xg\left(\frac{t}{x^{1/\mu}}\right)}\,\mathrm{d}t + o(x^{-\infty}).$$

V integrálu teď provedeme limitní přechod

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f\left(\frac{t}{x^{1/\mu}}\right)}{\left(\frac{t}{x^{1/\mu}}\right)^{\lambda - 1}} t^{\lambda - 1} = t^{\lambda - 1}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{g\left(\frac{t}{x^{1/\mu}}\right)}{\left(\frac{t}{x^{1/\mu}}\right)^{\mu}} t^{\mu} = B t^{\mu}.$$

Ještě musíme ověřit korektnost:

$$\left| x^{\frac{\lambda-1}{\mu}} f\left(\frac{t}{\sqrt[\mu]{x}}\right) e^{-xg\left(\frac{t}{\sqrt[\mu]{x}}\right)} \right| \leq A^{+} \left(\frac{t}{\sqrt[\mu]{x}}\right)^{\lambda-1} x^{\frac{\lambda-1}{\mu}} e^{-xB^{-}} \left(\frac{t}{\sqrt[\mu]{x}}\right)^{\mu} =$$
$$= A^{+} t^{\lambda-1} e^{-B^{-} t^{\mu}}. \quad \square$$