# Diferenciální počet na varietách

**Goal: Stokes theorem :** $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$

## Definice: Topologická varieta

$M$ je topologická varieta dimenze $n \in \mathbb{N}$, jestliže:

i) $M$ je Hausdorffův prostor

ii) $M$ má spočetnou bázi topologie

iii) $M$ je lokálně eukleidovský topologický prostor, tj.:

$M$ je lokálně homeomorfní otevřeným podmnožinám $\mathbb{R}^n$

## Poznámka: Lokální souřadnice

iii) $\Leftrightarrow$ $\forall m \in M : \exists U_m \subset \mathcal{T}(M) : \exists \varphi : U_m \to \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ homeomorfismus


$\left.\begin{array}{ll} U & \text{souřadnicové okolí} \\ \varphi & \text{souřadnicové zobrazení} \end{array}\right\}$ $(U, \varphi)$ lokální mapa

$m \in M \mapsto \varphi(m) = (x^1(m), \dots, x^n(m))$ lokální souřadnice

## Poznámka:

Nechť $M$ je topologická varieta, pak

- $M$ je lokálně křivkově souvislá
- $M$ je souvislá $\Leftrightarrow$ $M$ je křivkově souvislá
- $M$ má nejvýše spočetně mnoho komponent

## Motivace: Hladká varieta

Uvažujme topologickou varietu $M$ a $f: M \to \mathbb{R}$,

Jak derivovat $f$? Kdy je $f$ hladká funkce?

Pro $p \in M$ a $(U_p, \varphi)$ mapu $M$ klademe:
$f$ je hladká na $U_p \iff f \circ \varphi^{-1}$ je hladká na $\varphi(U_p) \subset \mathbb{R}^n$

Je takový pojem dobře definovaný?
Nechť $p \in U_p \cap V_p$ pro mapy $(U_p, \varphi), (V_p, \psi)$, pak přirozeně požadujeme, aby $f \circ \psi^{-1}$ a $f \circ \varphi^{-1}$ byly hladké současně

→ $f \circ \psi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1}$
$f \circ \varphi^{-1} = f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1}$

→ Budeme tedy požadovat, aby $\varphi \circ \psi^{-1}$ (přechodové zobrazení) byl difeomorfismus. Mapy $(U_p, \psi), (V_p, \varphi)$ se pak nazývají „hladce kompatibilní".

## Definice: (Hladký) atlas

Množina map, které pokrývají topologickou varietu $M$ se nazývá atlas.
Atlas se nazývá hladký, jestliže každé dvě mapy jsou hladce kompatibilní!

## Definice: Hladká funkce

$f: M \to \mathbb{R}$ se nazývá hladká, jestliže $f \circ \varphi^{-1}$ je hladká pro libovolnou mapu z hladkého atlasu.

## Poznámka:

Různé atlasy dávají různé množiny hladkých funkcí!

Poznámka:

K topologické varietě definujeme dodatečnou „hladkou strukturu"
jako třídu ekvivalence hladkých atlasů, které dávají tutéž
množinu hladkých funkcí

Definice: Hladká varieta

Hladký atlas je maximální <=> není-li obsažen ve větším hladkém atlasu.
Hladkou strukturou na topologické varietě M budeme rozumět maximální
hladký atlas $\mathcal{A}$.
Hladká varieta je dvojice $(M, \mathcal{A})$

Tvrzení:

Buď M topologická varieta, potom:
i) Každý atlas je obsažen v jednoznačném hladkém atlase.
ii) Dva hladké atlasy určují tentýž maximální hladký atlas
  <=> jejich sjednocení je opět hladký atlas

# Variety s hranicí

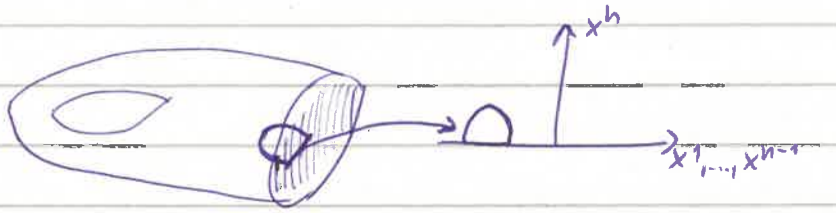
Model pro varietu s hranicí $\mathbb{H}^n := \{(x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$,

$$\operatorname{Int}\mathbb{H}^n = \{(x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$$

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n \mid x^n = 0\}$$

**Definice: Topologická varieta s hranicí**

Topologická varieta s hranicí dimenze $n\in\mathbb{N}$ je Hausdorffův prostor se spočetnou bází, jehož každý bod má okolí homeomorfní s otevřenou množinou v $\mathbb{H}^n$.

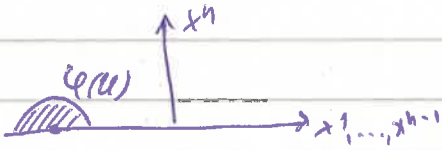



**Poznámka: Hladká struktura na $\mathbb{H}^n$**

$f: M\to\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ hladký atlas na $M$

není nutně otevřené v $\mathbb{R}^n$

$$F := f\circ\varphi^{-1}: \varphi(U)\to\mathbb{R}$$




$F$ je hladká $\iff \forall x\in\varphi(U): \exists V\in\mathcal{T}(\mathbb{R}^n): \exists \tilde{F}: V\to\mathbb{R}$ hladká: $\tilde{F}|_{V\cap\mathbb{H}^n} = F|_{\varphi(U)}$

POZOR!

Pojem hranice variety a hranice jakožto topologického pojmu není identický!!

$\overline{B^2} = M \to \partial M|_{\text{varieta}} = S^1$

$\partial M|_{\text{topologie } \mathbb{R}^2} = S^1$

$\partial M|_{\text{topologie } \mathbb{R}^3} = \overline{B^2} = M$

**Poznámka:**
Každá hladká varieta může být považovaná za varietu s hranicí;

$$(x^1, \dots, x^n) \longmapsto (x^1, \dots, x^{n-1}, e^{x^n})$$

**Definice: Hladké zobrazení**
Nechť $M, N$ jsou hladké variety.
$F: M \to N$ je hladké zobrazení $\Leftrightarrow \forall p \in M: \exists (U_p, \varphi)$ mapa na $M$, $(V, \psi)$ mapa na $N$:
$F(U) \subset V \wedge \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ je hladké zobrazení

**Definice: Difeomorfismus**
$F: M \to N$ se nazývá difeomorfismus $\Leftrightarrow$ $F$ je hladká bijekce s hladkým inverzním zobrazením

**Příklad:**

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \varphi: U \to \varphi(U) \\ \bullet\ F: \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n: x \longmapsto \dfrac{x}{1-|x|^2} \end{array}\right\} \text{ je difeomorfismus}$$

# Tečný vektor / prostor

## Motivace:

$a \in \mathbb{R}^n$, „geometrický" tečný vektor v $a$:

$$\mathbb{R}^n_a := \{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a,v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$

$$(a,v) \equiv v_a \equiv v|_a \to \left.\begin{array}{l} v_a + w_a := (v+w)_a \\ \alpha v_a := (\alpha v)_a \end{array}\right\} \mathbb{R}^n_a \text{ je VP izomorfní } \mathbb{R}^n$$

$$a \neq b \to \mathbb{R}^n_a \cap \mathbb{R}^n_b = \emptyset$$

Tečný vektor $v_a \leftrightarrow$ směrová derivace v $a$ ve směru $v$

$$v_a \in \mathbb{R}^n_a \leftrightarrow D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

$$\to D_v|_a f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(a+tv)$$

$D_v|_a$ : i) lineární

ii) Leibnitzovo pravidlo

## Definice: Derivace

Buď $a \in \mathbb{R}^n$, lineární zobrazení $X : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ se nazývá derivace v bodě $a$, jestliže splňuje Leibnitzovo pravidlo:

$$X(f \cdot g) = f(a) Xg + g(a) Xf$$

Množinu všech derivací označujeme jako $T_a(\mathbb{R}^n)$.
$T_a(\mathbb{R}^n)$ je vektorový prostor

## Tvrzení:

Nechť $a \in \mathbb{R}^n$, zobrazení $v_a \mapsto D_v|_a$ je isomorfismus $\mathbb{R}^n_a$ na $T_a(\mathbb{R}^n)$.

# Tečný prostor k hladké varietě

## Definice: Tečný prostor k varietě

Buďte $M$ hladká varieta, $p \in M$.

$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ se nazývá derivace v bodě $p$, jestliže $X_p$ je lineární a splňuje Leibnitzovo pravidlo.

Tečný prostor k $M$ v bodě $p$ je množina všech derivací v bodě $p$, značíme jej $T_pM$.

Prvky $T_pM$ nazýváme tečné vektory.

## Definice: Tečné zobrazení

Nechť $M, N$ jsou hladké variety, $F : M \to N$ hladké zobrazení, $p \in M$.

Pak tečným zobrazením k zobrazení $F$ rozumíme $F_*$ definované:

$$(F_* X)f := X(f \circ F), \quad \forall f \in C^\infty(M),$$

pro všechna $X \in T_pM$, tj. $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$

## Věta: Vlastnosti tečného zobrazení

Nechť $F : M \to N$, $G : N \to P$ jsou hladká zobrazení, $p \in M$, potom

i) $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ je lineární

ii) $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$

iii) $(Id_M)_* = Id_{T_pM}$

iv) $F$ difeomorfismus $\Rightarrow$ $F_* T_pM \to T_{F(p)}N$ isomorfismus

## Tvrzení:

Nechť $f$ a $g$ splývají na nějakém okolí $p \in M$, pak pro všechna $X_p \in T_pM$: $Xf = Xg$.

Akce tečného zobrazení

I. $F: \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{U}} \to \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cap}{V}}$, $p \in U$

souřadnice $(x^1, \dots, x^n)$ souřadnice $(y^1, \dots, y^m)$

$T_pU$ má bázi $\{ \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \}_{i=1}^n$

$$\left(F_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) f = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (f \circ F) = \frac{\partial f}{\partial y^j}(F(p)) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) =$$

$$= \left( \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(p)} \right) f$$

matice $F_*$ v bázích $\{ \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \}_{i=1}^n$ a $\{ \frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p)} \}_{j=1}^m$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}\Big|_p & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}\Big|_p \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}\Big|_p & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}\Big|_p \end{pmatrix}$$ Jacobiho matice $F$

$F_* \leftrightarrow dF|_p$

II. $F: M \to N$, $p \in M$

mapa $(U, \varphi)$ $p \in U$ mapa $(V, \psi)$ $F(p) \in V$

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$$ ($\varphi(U \cap F^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^n$, $\psi(V) \subset \mathbb{R}^m$)

(souřadnicová reprezentace $F$)

Podle I. je $\hat{F}_*$ reprezentováno Jacobiho maticí funkce $\hat{F}$,

$$F_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = F_*\left(\varphi^{-1}{}_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\right) = \underbrace{(F_* \circ \varphi^{-1}{}_*)}_{(\psi^{-1} \circ \hat{F})_*} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} =$$

$$= \psi^{-1}_* \hat F_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\psi(p)} \overset{I.}{=} \psi^{-1}_* \left( \frac{\partial \hat F^j}{\partial x^i}(\psi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{(\hat F\circ\psi)(p)} \right) =$$

$$= \frac{\partial \hat F^j}{\partial x^i}(\psi(p))\, \psi^{-1}_* \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{(\hat F\circ\psi)(p)} \} = \frac{\partial \hat F^j}{\partial x^i}(p)\, \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(p)}$$

→ $F_*$ je reprezentováno Jacobiho maticí $\hat F$ v odpovídající souřadnicové reprezentaci, tj. tečné zobrazení dává na souřadnicích nezávislý smysl pojmu Jacobiho matice hladkého zobrazení!

Záměna souřadnic:

$p \in U \cap V$, $(U,\varphi), (V,\psi)$ hladké mapy na $M$

$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ $\quad \frac{\partial}{\partial \tilde x^j}\Big|_p$ $\qquad$ Uvažujme $X_p \in T_pM$

$\| $

$A^j_i \frac{\partial}{\partial \tilde x^j}\Big|_p$

$$X_p = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \tilde X^j \frac{\partial}{\partial \tilde x^j}\Big|_p = X^i \frac{\partial \tilde x^j}{\partial x^i}\Big|_p \frac{\partial}{\partial \tilde x^j}\Big|_p$$

$$\rightarrow \tilde X^j = X^i \frac{\partial \tilde x^j}{\partial x^i}\Big|_p$$

# Tečný vektor ke křivce

**Definice: Křivka**
Buďte $M$ hladká varieta, $J \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ interval.
Pak křivkou rozumíme spojité zobrazení $\gamma : J \to M$.

**Definice: Tečný vektor ke křivce**
Buď $\gamma : J \to M$ hladká křivka.
Vektor $\gamma'(t_0) := \gamma_* \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} \in T_{\gamma(t_0)} M$ se nazývá tečný vektor ke $\gamma$ v $t_0$.

V souřadnicích:
$f \in C^\infty(M)$ : $\gamma'(t_0) f = (\gamma_* \frac{d}{dt}\Big|_{t_0}) f = \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} (f \circ \gamma)$
(derivace podél křivky $\gamma$)

Nechť $(U, \varphi)$ je hladká mapa, tž. že $\gamma(t_0) \in U$

$$\gamma'(t_0) f = \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} (f \circ \gamma) = \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} (\overbrace{f \circ \varphi^{-1}}^{\hat{f}} \circ \overbrace{\varphi \circ \gamma}^{\hat{\gamma}}) =$$

$$= \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\hat{\gamma}(t_0)) \frac{d\hat{\gamma}^i}{dt}(t_0) = \underbrace{\frac{d\hat{\gamma}^i}{dt}(t_0)}_{\text{komponenty tečného vektoru}} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t_0)} f$$

**Tvrzení:**
Každý $X \in T_p M$ je tečný vektor z nějaké křivky na $M$

**Důkaz:**
BÚNO $t_0 = 0$, pro $X \in T_p M$ pak položme $\hat{\gamma}(t) := (tX^1, \dots, tX^n) + \hat{p}$

# Vektorové pole

**Definice: Tečný bundle**

Pro danou hladkou varietu, dim $M=n$ je tečný bundle množina

$$TM := \bigcup_{p\in M} T_pM.$$

Na $TM$ existuje přirozená hladká struktura, dim $TM = 2n$.

**Definice: (Hladké) vektorové pole**

(Hladké) vektorové pole na $M$ je (hladké) zobrazení $X: M \to TM$, takové, že $\pi \circ X = Id_M$.

$$\pi: TM \to M : T_pM \mapsto p$$

**Tvrzení:**

Nechť $X$ je vektorové pole na $M$, $(U,\varphi)$ hladká mapa na $M$.
Pak $X$ je hladké $\overset{\text{na } U}{\Longleftrightarrow}$ všechny jeho komponenty v lokálních souřadnicích jsou hladké funkce.

tj.: $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $X^i \in C^\infty(M)$

# Kotečný prostor

**Definice: Kotečný prostor variety**
Buďte $M$ hladká varieta, $p \in M$.
Pak kotečným prostorem $M$ v bodě $p$ rozumíme duální prostor tečného prostoru $M$ v bodě $p$, tj. $(T_pM)^* =: T_p^*M$

**Definice: Kotečný bundle**
Při stejných předpokladech a značení jako v předcházející definici definujeme kotečný bundle jako $T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M$

**Definice: Kovektorové pole**
Zobrazení $\omega : M \to T^*M$ je kovektorové pole, jestliže $\pi \circ \omega = \mathbb{1}_M$.

**Poznámka:**
- Prvky kotečného prostoru se nazývají kovektory,

$$\omega \in T_p^*M : \omega = \omega_i \lambda^i|_p, \text{ na } (U, \varphi)$$

Speciálně uvažujeme $df|_p \in T_p^*M$ pro $f \in C^\infty(M)$; $df|_p(X) := X|_p(f), \forall X \in T_pM$

$$\to df|_p = \alpha_i \lambda^i|_p, \quad \alpha_i = df|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_p \to df|_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_p \lambda^i|_p$$

$$f(x) := x^j \to df|_p = dx^j|_p = \lambda^j|_p, \forall j \in \hat{n}$$

$$\to \omega = \omega_i dx^i$$

- $df|_p$ dává na souřadnicích nezávislý smysl gradientu; $df|_p =: \nabla f$

## Věta: Vlastnosti diferenciálu

Pro $f,g \in C^\infty(M)$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

i) $d(\alpha f + g) = \alpha\, df + dg$

ii) $d(f \cdot g) = f\,dg + g\,df$

iii) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(g\,df - f\,dg)$

iv) $f = const \Rightarrow df = 0$

## * Definice: Hladké kovektorové pole

$\omega \in M \to T^*M$ je hladké $\Leftrightarrow$ jeho komponenty jsou hladké po všech mapy.

## Tvrzení: derivace podél křivky

Nechť $\gamma : J \to M$ je hladká křivka.

Potom $(f \circ \gamma)'(t) = df|_{\gamma(t)} (\gamma'(t))$.

## Definice: Kotečné zobrazení (pull-back)

Nechť $M, N$ jsou hladké variety, $F : M \to N$ hladké zobrazení.

Pod kotečným zobrazením k $F$ rozumíme $F^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_p M$

předepsané jako:

$$(F^* \omega_p) X := \omega_p (F_* X), \quad \forall X \in T_p M,$$

pro všechna $\omega_p \in T^*_p N$.

## Lemma

hladké pole

Buďte $F : M \to N$ hladké, $f \in C^\infty(N)$, $\omega \in \mathcal{T}^* N$.

Potom platí: i) $F^* df = d(f \circ F)$

ii) $F^*(f\omega) = (f \circ F) F^* \omega$

## Tvrzení:

Je-li $F : M \to N$ hladké a $\omega \in \mathcal{T}^* N$.

Potom $F^* \omega \in \mathcal{T}^* M$.

# Křivkový integrál

motivace:

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompaktní se souřadnicemi $(\mathbb{R}, t)$

$\omega$ hladké kovektorové pole na $[a,b]$ (tj. $\omega$ lze hladce rozšířit)

$\rightarrow \omega = f(t)\,dt$, $f \in C^\infty([a,b])$

Integrál z $\omega$ přes $[a,b]$ definujeme jako:

$$\int_{[a,b]} \omega := \int_a^b f(t)\,dt$$

Tvrzení:

Nechť $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ je rostoucí / klesající difeomorfismus.

Potom

$$\int_{[a,b]} \omega = \pm \int_{[c,d]} \varphi^*_* \omega$$

Definice: Křivkový integrál 1-formy

Buďte $M$ hladká varieta, $\gamma : [a,b] \to M$ hladká křivka a $\omega \in \mathcal{X}^*(M)$;

pak klademe

$$\int_\gamma \omega := \int_{[a,b]} \gamma^* \omega$$

Věta: Vlastnosti $\int \omega$

i) $\int_\gamma (\alpha \omega_1 + \omega_2) = \alpha \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2$

ii) $\gamma = \text{konst}$ : $\int_\gamma \omega = 0$

iii) $a < c < b$ : $\int_\gamma \omega = \int_{[a,c]} \omega + \int_{[c,b]} \omega$

Věta: Výpočet $\int_\gamma \omega$

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))\, \gamma'(t)\,dt$$

**Poznámka: Reparametrizace křivky**

$\left.\begin{array}{l}\gamma:[a,b]\to M\\ \tilde{\gamma}:[c,d]\to M\end{array}\right\}$ $\tilde{\gamma}$ je reparametrizace $\gamma$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ difeomorfismus $\varphi:[c,d]\to[a,b]$,
$$\gamma\circ\varphi=\tilde{\gamma}$$

Reparametrizaci rozdělujeme na
i) dopřednou $\Leftrightarrow$ $\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$
ii) zpětnou $\Leftrightarrow$ $\varphi(c)=b$, $\varphi(d)=a$

**Tvrzení**

$$\int_{\tilde{\gamma}}\omega=\begin{cases}+\int_{\gamma}\omega & \text{(dopředná transformace)}\\ -\int_{\gamma}\omega & \text{(zpětná transformace)}\end{cases}$$

**Věta: Fundamentální věta kalkulu**

Nechť $M$ je hladká varieta, $f\in C^\infty(M)$, $\gamma:[a,b]\to M$ hladká křivka.
Potom
$$\int_{\gamma}df=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$$

# Tensory

## Definice: Kovariantní $k$-tenzor

Nechť $V$ je VP, $\dim V = n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$.
Kovariantním $k$-tenzorem rozumíme multilineární zobrazení $T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-krát}} \to \mathbb{R}$

$k$ nazýváme řádem (stupněm) tenzoru
$T^k(V) :=$ vektorový prostor $k$-tenzorů

## Definice: Tenzorový součin

Nechť $T \in T^k(V)$, $S \in T^\ell(V)$ jsou tenzory stupně $k$, resp. $\ell$.
Tenzorovým součinem $T$ a $S$ rozumíme $(k+\ell)$-tenzor $T \otimes S$, definovaným jako

$$(T \otimes S)(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_\ell) := T(x_1, \dots, x_k)\, S(y_1, \dots, y_\ell)$$

## Věta: Vlastnosti $\otimes$

i) $(S \otimes T) \otimes L = S \otimes (T \otimes L)$
ii) $(\alpha S) \otimes T = S \otimes (\alpha T) = \alpha (S \otimes T)$
iii) $(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T$

## Poznámka:

$(E_i)_{i=1}^n$ báze $V \to (\varepsilon^i)_{i=1}^n$ báze $V^*$

$\to \{\varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_k} \mid i_k \in \hat{n}\}$ báze $T^k(V) \to \dim T^k(V) = n^k$

## Definice: Tenzorové pole

Nechť $M$ je hladká varieta, $p \in M$, $S : M \to \bigcup_{p \in M} T^k(T_p M)$.
Řekneme, že $S$ je tenzorové pole, jestliže $\forall p \in M : S(p) \in T^k(T_p M)$

## Definice: Hladké tenzorové pole

Nechť $S$ je $k$-kovariantní tenzorové pole na $M$.
Potom $S$ je hladké $\iff$ jeho komponenty jsou hladké funkce,
v libovolných lokálních souřadnicích.

Dále zavádíme značení:
$\mathcal{T}^k M$ – prostor hladkých $k$-kovariantních tenzorových polí
$\mathcal{T}^1 M = \mathcal{T}^* M$
$\mathcal{T}^0 M = C^\infty(M)$

## Věta: Vlastnosti tenzorových polí

i) $F^*S(X_1, \dots, X_k) := S(F_* X_1, \dots, F_* X_k)$
ii) $F^* : T^k(T_{F(p)}N) \to T^k(T_p M)$ je lineární
iii) $F^*(S \otimes T) = F^*S \otimes F^*T$
iv) $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$
v) $\mathrm{Id}^* S = S$

## Definice: Antisymetrické $k$-kovariantní tenzory

Nechť $T \in \mathcal{T}^k(V)$.
Řekneme, že $T$ je antisymetrický, jestliže pro všechna $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$
a pro všechna $i, j \in \hat{k}$, $i \neq j$:

$$T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots X_k) = (-1)\, T(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots X_k).$$

Prostor všech antisymetrických tenzorů se značí $\Lambda^k(V)$.

**Lemma:**
Nechť $T \in T^k(V)$, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:
i) $T \in \Lambda^k(V)$
ii) Pro všechna $X_1, \dots, X_k \in V$ $\forall \pi \in S_k : T(X_1, \dots, X_k) = \operatorname{sgn}\pi \, T(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)})$
iii) $T(X_1, \dots, X_k) = 0$ kdykoliv $X_i = X_j$ pro nějaké $i, j \in \hat{k}$.
iv) $T(X_1, \dots, X_k) = 0$ kdykoliv jsou $X_1, \dots, X_k$ LZ
v) Komponenty $T$ v libovolné bázi jsou antisymetrické

**Definice: Antisymetrická projekce**
Definujeme antisymetrickou projekci $\mathrm{Alt} : T^k(V) \to \Lambda^k(V)$ jako:

$$\mathrm{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn}\pi \; {}^{\pi}T,$$

kde ${}^{\pi}T(X_1, \dots, X_k) := T(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)})$

Dále označme $I = (i_1, \dots, i_k)$ a pro $\pi \in S_k$: $I_\pi := (i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(k)})$.

$$\varepsilon^I(X_1, \dots, X_k) := \det \begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(X_1) & \dots & \varepsilon^{i_1}(X_k) \\ \vdots & & \\ \varepsilon^{i_k}(X_1) & \dots & \varepsilon^{i_k}(X_k) \end{pmatrix} \in \Lambda^k(V)$$

**Věta:**
$\{ \varepsilon^I \mid I$ má ostře rostoucí multiindex $\}$ je báze $\Lambda^k(V)$

**Důsledek:**
$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$

**Lemma:**
$\omega(AX_1, \dots, AX_k) = \det A \; \omega(X_1, \dots, X_k)$

**Definice: Vnější součin (wedge product)**

Buďte $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$.

Vnějším součinem $\omega \wedge \eta$ rozumíme:

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

**Věta: Vlastnosti vnějšího součinu**

i) linearita

ii) asociativita

iii) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$

iv) $\varepsilon^I = \varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_k}$

v) $\omega_1, \dots, \omega_k \in V^* = T^1(V)$, $X_1, \dots, X_k \in V$

$\rightarrow \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k (X_1, \dots, X_k) := \det(\omega_i(X_j))$

**Definice: Diferenciální formy**

Nechť $M$ je hladká varieta.

Pak diferenciální $k$-forma je zobrazení $\omega : M \to \bigcup_{p \in M} T^k_p(T_pM)$, splňující $\omega(p) \in \Lambda^k(T_pM)$, $\forall p \in M$.

Množinu všech hladkých $k$-forem značíme $\Omega^k(M)$

**Poznámka:**

$\omega \in \Omega^k(M) \rightarrow \omega = \sum_I' \omega_I \, dx^I$, $F : M \to N$

$$F^*\omega = F^*\Big(\sum_I' \omega_I \, dx^I\Big) = \sum_I' (\omega_I \circ F)\, d(y^I \circ F)$$

**Definice: Vnější derivace**

Vnější derivace je zobrazení $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ působící:

$$d\omega := d\Big(\sum_I \omega_I \, dx^I\Big) = \sum_I' d\omega_I \wedge dx^I, \quad \text{kde } d\omega_I := \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} dx^j$$

**Věta: Vlastnosti vnější derivace**

i) linearita

ii) $f \in C^\infty(M) \Rightarrow (df)(X) = X(f)$

iii) $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M) \Rightarrow d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$

iv) $d^2 = d \circ d = 0$

**Definice: Uzavřená / exaktní forma**

Diferenciální $k$-forma $\omega \in \Omega^k(M)$ je

i) uzavřená $\Leftrightarrow d\omega = 0$

ii) exaktní $:\Leftrightarrow \exists \eta \in \Omega^{k-1}(M) : d\eta = \omega$

**Poznámka**

Jestliže $M$ je jednoduše souvislá, pak uzavřenost je ekvivalentní exaktnosti.

# Orientace

motivace:

$(E_1,\dots,E_n)$, $(\tilde{E}_1,\dots,\tilde{E}_n)$ báze $V$

$\to \exists B \in \mathbb{R}^{n,n} : \tilde{E}_i = B_{ij} E_j$, $\det B \neq 0$

$\to \det B = \begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$

**Definice: Shodně orientované báze**

$(E_i)_{i=1}^n$, $(\tilde{E}_j)_{j=1}^n$ jsou shodně orientovány $\iff \det B > 0$.

Dále definujeme relaci ekvivalence na množině bází:

$$(E_i)_{i=1}^n \sim (\tilde{E}_j)_{j=1}^n \iff \text{jsou shodně orientované}$$

**Definice: Orientace vektorového prostoru**

Orientace je třída ekvivalence shodně orientovaných bází.

Daná uspořádaná báze $(E_i)_{i=1}^n$ jí určuje orientaci $\sigma$.

Orientovaný VP je pak uspořádaná dvojice $(V,\sigma)$.

**Lemma:**

Nechť je dána $\Omega \in \Lambda^n(V) \setminus \{0\}$.

Pak množina uspořádaných bází $(E_1,\dots,E_n)$ tak, že $\Omega(E_1,\dots,E_n) > 0$ je orientace na $V$.

**Definice: Orientovatelná varieta**

Souřadnicový frame $(E_1,\dots,E_n)$ je orientovaný $\iff (E_1|_p,\dots,E_n|_p)$ je kladně orientovaná báze $T_pM$. Bodová orientace je hladká $\iff$ každý bod $M$ leží v definičním oboru nějakého hladkého souřadnicového framu.

Orientací variety rozumíme hladkou bodovou orientaci.

Varieta $M$ je orientovatelná $\iff$ existuje hladká bodová orientace

**Poznámka:**
Nechť $M$ je hladká varieta dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $\Omega \in \Omega^n(M)$ nikde nulová.
Potom $\Omega$ definuje jednoznačnou orientaci $M$ tak, že
$\Omega$ je orientovaná v každém bodě.
Naopak, jestliže $M$ je orientovatelná, existuje $\Omega \in \Omega^n(M)$ nikde nenulová, která je orientovaná.

**Definice: Orientaci zachovávající zobrazení**
Nechť $M, N$ jsou orientované variety, $F: M \to N$ lokální difeomorfismus.
$F$ je orientaci zachovávající zobrazení $\Leftrightarrow \forall p \in M: F_*$ zobrazuje orientovanou bázi $T_pM$ ~~na~~ orientovanou bázi $T_{F(p)}N$.

**Definice: Vnější/vnitřní ~~normála~~ tečna**
Buďte $M$ hladká varieta s hranicí, $p \in \partial M$, $N \in T_pM$.
Řekneme, že $N$ je vnitřní tečna $\Leftrightarrow N \notin T_p\partial M \wedge \forall \varepsilon > 0: \forall \gamma: [0,\varepsilon] \to M:$
$\gamma(0) = p \wedge \gamma'(0) = N$
$N$ je vnější tečna $\Leftrightarrow -N$ je vnitřní tečna.

V lokálních souřadnicích: $N$ je vnitřní tečna $\Leftrightarrow x^n > 0$

**Poznámka:**
$F$ zachovává orientaci $\Leftrightarrow \det F_* > 0$ v libovolné bázi

**Definice: Vložená podvarieta**
Nechť $M$ je hladká varieta, $S \subset M$.
$S$ je vložená varieta (podvarieta), jestliže $\forall p \in S: \exists (U, \varphi): p \in U$
$\wedge \varphi(U \cap S) = \{x \in \varphi(U) \mid x^n = const\}$

## Definice: Transverzální vektorové pole

Nechť $M$ je hladká varieta, $S \subset M$ vnořená podvarieta.
Vektorové pole $N: S \to TM$ se nazývá transverzální,
jestliže $T_pM = \mathrm{span}\{T_pS, N_p\}$

## Poznámka:

Buďte $M$ hladká orientovaná varieta, $S \subset M$ vnořená podvarieta
a $N$ transverzální vektorové pole.
Potom $S$ má jednoznačnou orientaci s vlastností,
že $(E_1, \dots, E_{n-1})$ je orientovaná báze $T_pS \iff (N, E_1, \dots, E_{n-1})$ je orientovaná báze $T_pM$

## Příklad: (důležitý)

Uvažujme varietu $\mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

i) standardní orientace: $\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right]$


ii) indukovaná orientace: $N := -\frac{\partial}{\partial x^n}$

→ $\left[\left(-\frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right)\right] = (-1)^n \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right]$

→ indukovaná a standardní reprezentace se shodují
pouze v sudých dimenzích

# Integrace forem

## I. Integrace forem v $\mathbb{R}^n$

Nechť supp $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ je kompaktní

tj. pro $\omega = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ klademe

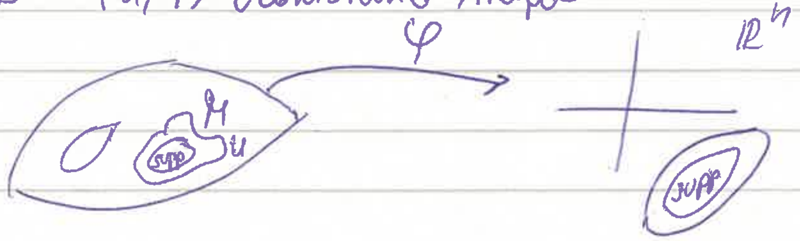
$$\int_A \omega := \int_A f\, dx^1 \dots dx^n$$

$a: D \to E$ hladký difeomorfismus, pak

$$\int_E \omega = \begin{cases} +\int a^*\omega \\ -\int a^*\omega \end{cases}$$

## II. Integrace na $M$

Uvažujme formu $\omega = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega^n(M)$, tak že
supp $\subset (\mathcal{U}, \varphi)$ orientovaná mapa




$$\int_M \omega := \int_{\varphi(\mathcal{U})} (\varphi^{-1})^* \omega$$

## III. supp $\omega$ je pokryt konečně mnoha mapami $((\mathcal{U}_i, \varphi_i))_{i=1}^m$

$(\mathcal{U}_i)_{i=1}^m$ ~ rozklad jednotky $(\psi_i)_{i=1}^m$ tak, že:

i) $\psi_i \in C^\infty(\mathcal{U}_i)$

ii) supp $\psi_i \subset \mathcal{U}_i$

iii) $0 \leq \psi_i \leq 1$

iv) $\sum_{i=1}^m \psi_i(x) = 1, \ \forall x \in \text{supp } \omega$

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^m \int_M \psi_i \omega$$

# Stokesův teorém

Nechť $M$ je hladká orientovaná varieta s hranicí, $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$, supp $\omega$ kompaktní.
Potom:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

indukovaná orientace

## Poznámka:

- $\partial M = \emptyset \Rightarrow \int_M d\omega = 0$

- Green: $D \subset \mathbb{R}^2$, $\omega = P\,dx + Q\,dy$

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D d(P\,dx + Q\,dy) = \int_D dP \wedge dx + dQ \wedge dy =$$

$$= \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$