Stokes : $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$

Lee - Introduction to Smooth Manifolds

Def: M je topologická varieta dimenze $n \in \mathbb{N}$ <=>

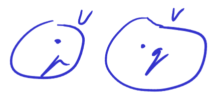
i) M je Hausdorffův prostor

ii) M má spočetnou top. bázi

iii) M je lokálně eukleidovský top. prostor, tj. M je lokálně homeomorfní otevřeným podmnožinám $\mathbb{R}^n$.

---

i) $\forall p, q \in M \quad \exists \; U, V$ okolí M : $p \in U,\ q \in V \wedge U \cap V = \emptyset$



→ jednoznačnost limity

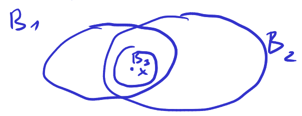
→ konečně-prvkové množiny jsou uzavřené

→ komp. mny jsou uzavřené

ii) (M, τ) ... top. prostor → báze $\mathcal{B} \subset \tau$: každý prvek τ lze zapsat jako sjednocení prvků z $\mathcal{B}$

I) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

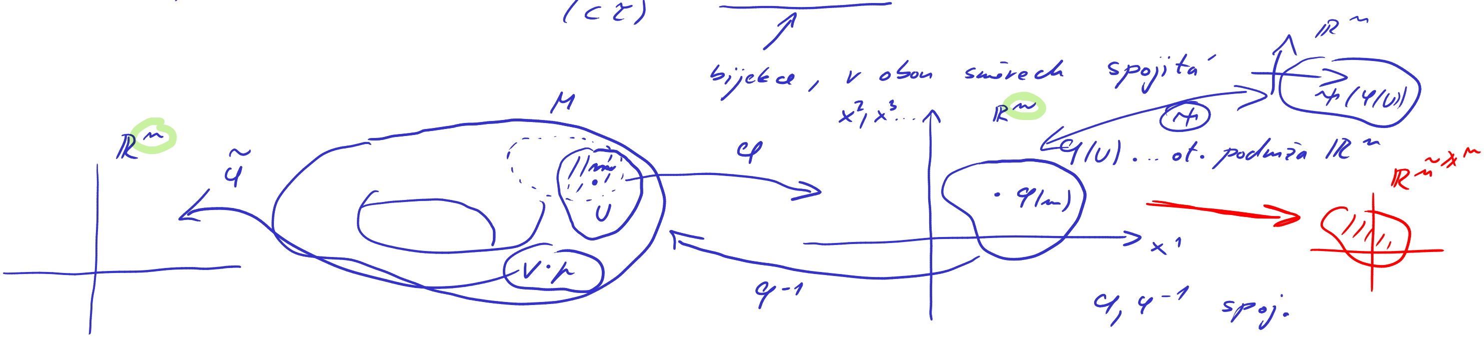
II) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$



→ $\mathcal{B}$ je báze topologie, která se dostane $\forall$ sjednoceními prvků $\mathcal{B}$

iii) $\forall m \in M \quad \exists \; U \subset M$ $(\subset \tau)$ homeomorfní ot. podmnožině $\mathbb{R}^n$

bijekce, v obou směrech spojitá



φ, φ^{-1} spoj.

U... souřadnicové okolí

φ... —//— zobrazení } (U, φ) .... (lokální) **mapa**

$m \in M \to \varphi(m) = (x^1(m), \dots, x^n(m))$ .. lokální souřadnice

Př: $\mathbb{R}^n$ (eukleidovský prostor) : i) metrický prostor ✓

ii) koule s rac. poloměry a středy

iii) glob. mapa $(\mathbb{R}^n, Id)$

- pozn.: $\mathbb{R}^1$ ⟶ glob. mapa $(\mathbb{R}, Id)$
glob. mapa $(\mathbb{R}, \varphi)$, kde $\varphi(x) = x^3$

(Pr:) lib. ot. podmnožina top. variety (s odpovídající "podtopologií")

(Pr:) graf spojité f-ce: $U^\circ = U \subset \mathbb{R}^n$, $F: U \to \mathbb{R}^k$ spojitá

$$\Gamma(F) = \{(x,y) : x \in U, y = F(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$$

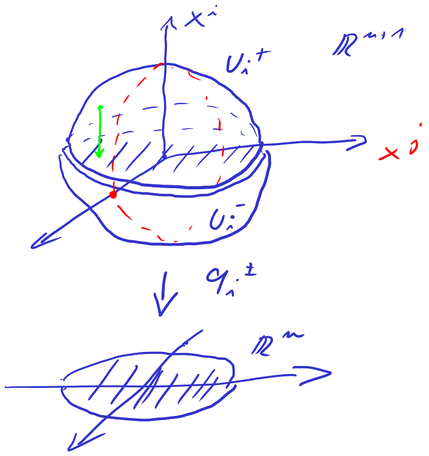
$$\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$$
$$(x,y) \mapsto x \quad \dots \text{ spojité}$$

$\varphi := \pi_1 |_{\Gamma(F)}$, tj: $\varphi(x, \underbrace{y}_{F(x)}) = x$ .... spoj.

$\varphi^{-1}(x) = (x, F(x))$ .... spoj. $\Leftarrow$ F spoj.

$\Rightarrow$ $(\Gamma(F), \varphi)$ .... globální mapa ✓

(Pr:) n-rozměrná sféra v $\mathbb{R}^{n+1}$: $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$



$(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)_{i=1}^{n+1}$ mapy na $\mathbb{R}^{n+1}$

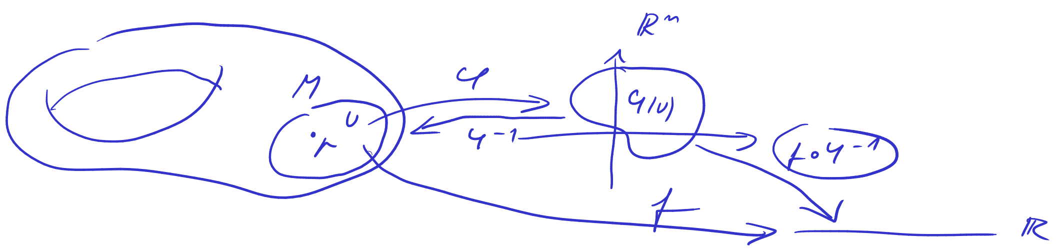
- pozn.: M top. varieta $\Rightarrow$ M je lokálně křivkově souvislá
$\Rightarrow$ (M je souvislá $\Leftrightarrow$ M je křivkově souvislá)
$\Rightarrow$ M má nejvýše spočetně mnoho komponent

Hladká varieta

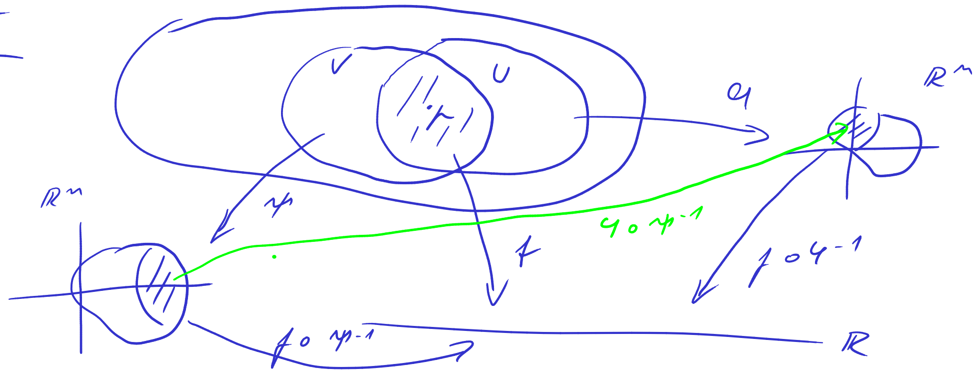
Motivace: $f : M \to \mathbb{R}$, jak derivovat f?
top. varieta
kdy je f hladká?

$p \in M$: (U, φ) mapa na M: $p \in U$

f je hladká na U $\Leftrightarrow$ $f \circ \varphi^{-1}$ je hladká na $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$



ALE



chceme, aby def. hladkosti f nezávisela na volbě mapy,
tj: aby $f\circ\psi^{-1}$ a $f\circ\varphi^{-1}$ byly hladké právě současně

$$f\circ\psi^{-1} = f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\psi^{-1} \quad \leftarrow \text{chci hladké}$$
$$f\circ\varphi^{-1} = f\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi^{-1}$$

$\varphi\circ\psi^{-1}$ ... přechodové zobrazení $\to$ budeme požadovat, aby se jednalo o <u>difeomorfismus</u> (v obou směrech <u>hladká</u> bijekce)

$\to$ mapy (U,φ) a (V,ψ) se potom nazývají <u>"hladce kompatibilní"</u> (tj. $\forall\, (U,\varphi), (V,\psi)$ mapy na M: $U\cap V \neq \emptyset$ platí, že $\psi\circ\varphi^{-1}: \varphi(U\cap V) \to \psi(U\cap V)$ je difeomorfismus)

<u>Def</u>: Mža map $\mathcal{A}$, které pokrývají top. varietu M se nazývá <u>atlas</u>.
Atlas se nazývá <u>hladký</u> $\iff$ lib. dvě mapy jsou hladce kompatibilní.

<u>Def</u>: $f: M \to \mathbb{R}$ je hladká $\iff$ $f\circ\varphi^{-1}$ je hladká pro lib. mapu z (hladkého) atlasu

! Různé hladké atlasy mohou dát různé mn. hl. f-cí!

Př: $\mathbb{R}$ ... top. varieta $\Rightarrow$ $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, Id)\}$
$\tilde{\mathcal{A}} = \{(\mathbb{R}, \varphi)\}$, $\varphi(x) = x^3$

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ a $\tilde{\mathcal{A}}$ nedávají stejnou množinu hl. f-cí

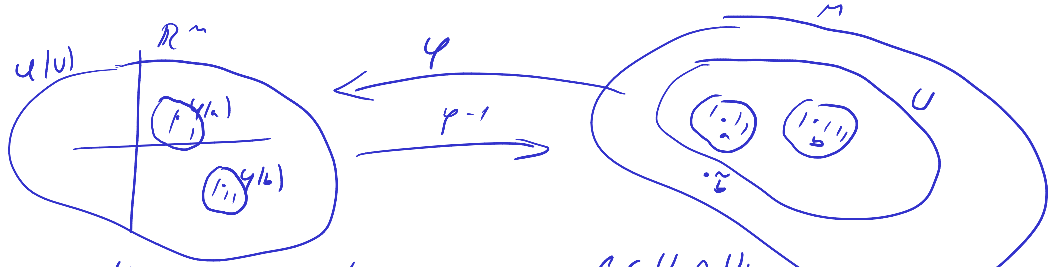
$f(x) = x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ hladká vůči $\mathcal{A}$

$(f\circ\varphi^{-1})(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ... není ani diferencovatelná v $x=0$

$\Rightarrow$ f není hladká vůči $\tilde{\mathcal{A}}$

→ K top. varietě definujeme doplňující "hladkou strukturu" := třída ekvivalence hl. atlasů, které dají stejnou mn. hl. f-cí

→ dvojice top. varieta + hl. struktura = <u>hl. varieta</u>



$U_{\varphi(a)} \cap U_{\varphi(b)} = \emptyset$

$c \in U_a \cap U_b$
$\Rightarrow \varphi(c) \in U_{\varphi(a)} \cap U_{\varphi(b)}$ ... spor

---

Lze M pokrýt konečně mnoho mapami?:

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ... ot. pokrytí M

každé lze zapsat jako sjednocení prvků báze $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$B_1 \to$ najdu U_{α_1} : $B_1 \subset U_{\alpha_1}$ $\to$ mapa $(B_1, \varphi_{\alpha_1}|_{B_1})$

$B_2 \to$ ......

(axiom výběru)

$\vdots$

Def: Hl. atlas je maximální $\Leftrightarrow$ není-li obsažen ve větším hl. atlasu.
Hl. strukturou na top. varietě M budeme rozumět maximální hl. atlas $\mathcal{A}$. Hl. varieta je dvojice $(M, \mathcal{A})$.

$\mathcal{A}_3 = \{(I, Id_I) : I \text{ ot. interval}\}$

Př: $M = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})\}$ $\to$ standardní hl. struktura

$(\mathbb{R}, \mathcal{A}_1)$
$(\mathbb{R}, \mathcal{A}_3)$

$\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, \psi)\}$, $\psi(x) = x^3$ ... homeomorfismus
$\hookrightarrow$ vede k jiné než st. hl. st.

nejsou hl. kompatibilní
$(Id_{\mathbb{R}} \circ \psi^{-1})(y) = y^{1/3}$ ... není hl. v $y = 0$

Tvrzení: Buď M top. varieta. Potom
a) Každý hl. atlas je obsažen v jednoznačném max. hl. atlase.
b) Dva hl. atlasy určují tentýž max. hl. atlas $\Leftrightarrow$ jejich sjednocení je opět hl. atlas.

DK $\Leftarrow$ návod: $(M, \mathcal{A}) \to \max$ $\bar{\mathcal{A}} := \{$ mža $\forall$ map, které jsou hl. komp. se všemi prvky $\mathcal{A}\}$

Př (hladká varieta): V .... normovaný konečnědim. VP nad $\mathbb{R}$
$\Downarrow$ topologie
$\searrow$ báze $(E_1, E_2, \dots, E_n)$

$x \in V \Rightarrow x = x^i E_i$ (Einsteinova suma)

↳ n-tice v $\mathbb{R}^n$

$E : \mathbb{R}^n \to V$, $(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto x^i E_i$ ... homeomorfismus

$\Rightarrow (V, E^{-1})$ ... globální mapa → hl. struktura

nezávisí na volbě báze:

$(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_n)$ ... jiná báze

invertibilní

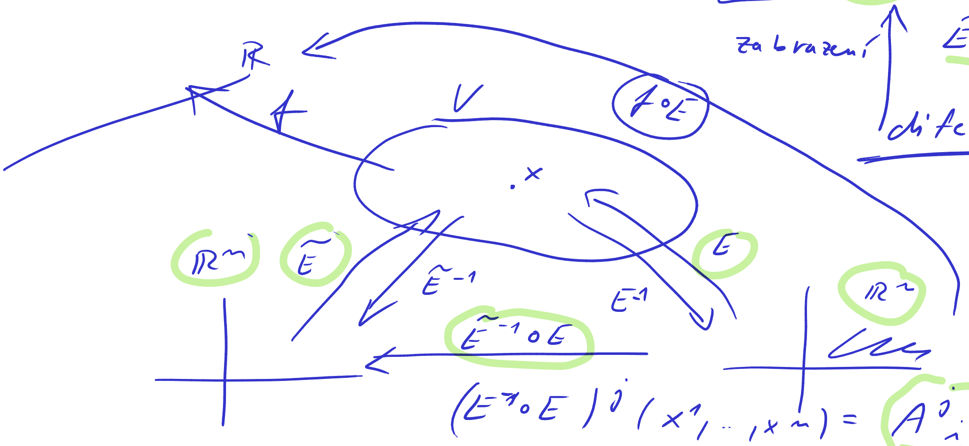
$E_i = A^j_i \tilde{E}_j$

$$\begin{cases} x = \tilde{x}^j \tilde{E}_j \\ \text{současně } x = x^i E_i \end{cases}$$

$\tilde{x}^j \tilde{E}_j = x^i E_i =$

$= x^i A^j_i \tilde{E}_j \Rightarrow \boxed{\tilde{x}^j = A^j_i x^i}$ ... přechodové zobrazení $\tilde{E}^{-1} \circ E$

difeomorfismus ⇒ glob. mapy jsou kompatibilní



$(\tilde{E}^{-1} \circ E)^j (x^1, \dots, x^n) = A^j_i x^i$

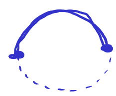
f hl. $\Leftrightarrow$ $f \circ E$ je hl.

$$f \circ \tilde{E} = f \circ E \circ (E^{-1} \circ \tilde{E})$$

Variety s krajem

D^n - uzavřená jednotková koule v $\mathbb{R}^n$

- uzavřená horní polokoule v S^n ... n-dim. sféra

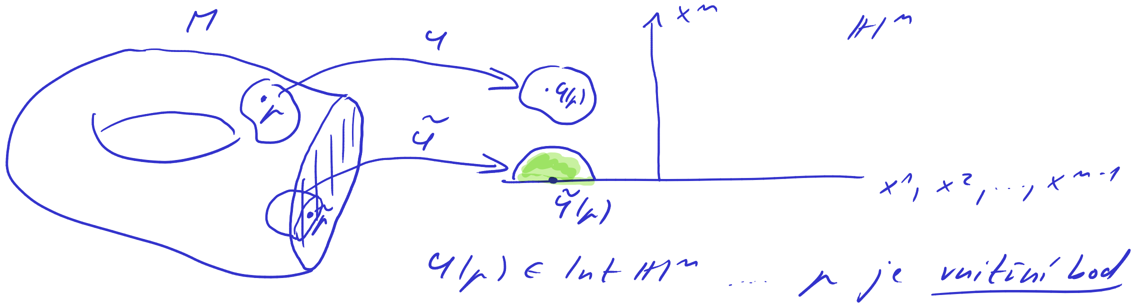


- model pro varietu s krajem: $\mathbb{H}^n := \{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0 \}$

$\mathrm{Int}\, \mathbb{H}^n := \{ \text{— // —} : x^n > 0 \}$

$\partial \mathbb{H}^n := \{ \text{— // —} : x^n = 0 \}$ ... kraj

Def: n-dim. top. var. s krajem je Hausdorffův prostor M se spoč. top. bází, jehož každý bod má okolí homeomorfní s (relativně) otevřenou podmnožinou $\mathbb{H}^n$.



$\varphi(p) \in \operatorname{Int} \mathbb{H}^m$ ... p je vnitřní bod ($p \in \operatorname{Int} M$)

$\tilde\varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^m$ ... p je hraniční/krajní bod ($p \in \partial M$)

- pozn. (hl. struktura): $f : M \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$... hl. atlas na M

$F := f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$

není nutně ot. v $\mathbb{R}^m$

F je hl. $\iff \forall x \in \varphi(U)\ \exists\ V = V^0 \subset \mathbb{R}^m$: $x \in V$, $\exists$ hl. $\tilde F : V \to \mathbb{R}$ tak, že $\tilde F|_{V \cap \mathbb{H}^m} = F|_{V \cap \mathbb{H}^m}$

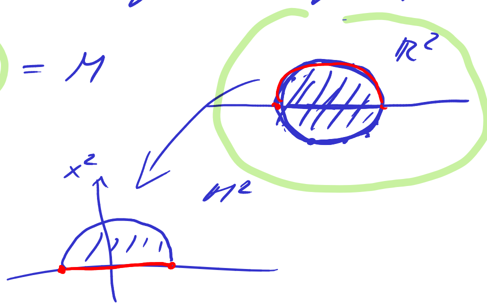
POZOR: Rozdíl mezi hranicí/vnitřkem top. prostoru a krajem = hranicí/vnitřkem hl. variety ve smyslu výše!

Př: uzavřený jednotkový disk $\overline{\mathbb{B}^2} = M$

∂M (jakožto variety) $= S^1$

∂M (topologická v $\mathbb{R}^2$) $= S^1$

∂M (topologická v $\mathbb{R}^3$) $= \overline{\mathbb{B}^2}$



- pozn.: Každá hl. varieta může být považována za varietu s krajem:

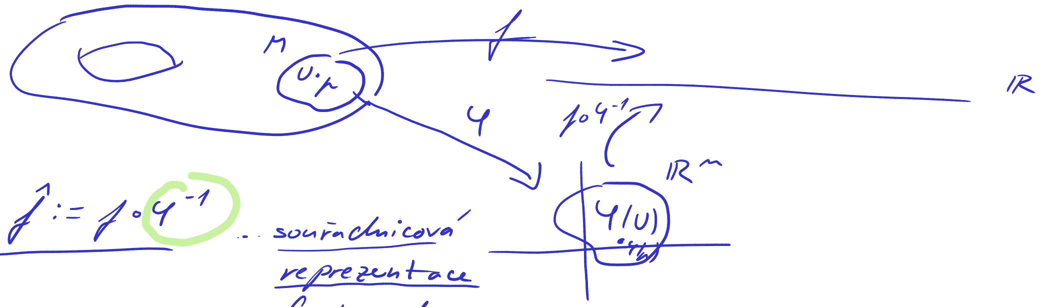
každou mapu složím s difeomorfismem $\mathbb{R}^m \to \mathbb{H}^m$,

$(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^{m-1}, \underbrace{e^{x^m}}_{>0})$

$\Rightarrow$ kraj je prázdná mna

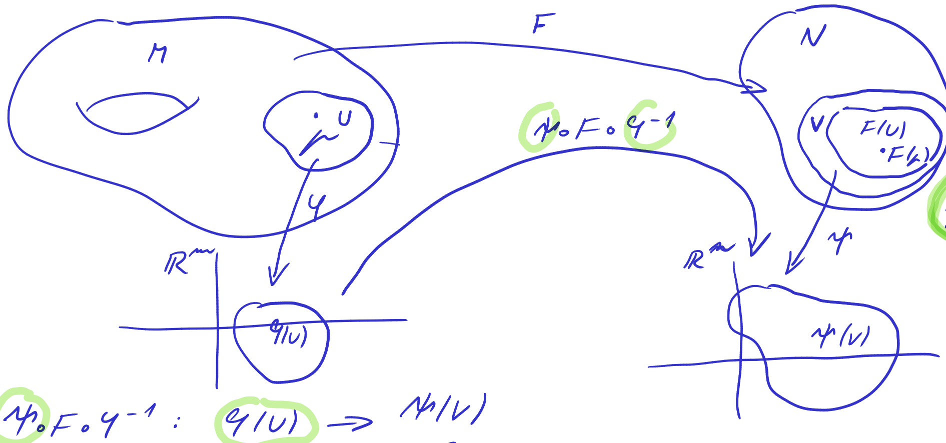
NB: M … hl. varieta

$f: M \to \mathbb{R}$ je hl. na $M \iff (\forall p \in M)(\exists (U, \varphi))$
$(p \in U \wedge f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U)))$.



$\hat{f} := f \circ \varphi^{-1}$ … souřadnicová reprezentace funkce f

Hladké zobrazení



$F(U) \subset V$

$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{\varphi(U)}} \to \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\psi(V)}}$

Def: M, N … hl. variety. $F: M \to N$ je hl. zobr. $\iff (\forall p \in M)(\exists (U, \varphi)$ … mapa na M, $\exists (V, \psi)$ … mapa na $N)(p \in U, F(U) \subset V,$
$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ je hl. zobr. $\varphi(U) \to \psi(V))$.

Lemma: Hl. zobrazení mezi hl. varietami je spojité. ("v top. smyslu")

Dk: $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ je hl. $\Rightarrow \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ je spoj. zobr. $\varphi(U) \to \psi(V)$
φ, ψ … homeomorfismy

$F|_U = \underline{\psi^{-1}} \circ \underline{\psi \circ F \circ \varphi^{-1}} \circ \underline{\varphi}$ … spoj. na U $\Rightarrow F$ je spoj.
spoj.

Q.E.D.

Lemma: $F: M \to N$ spoj. $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ atlasy na M, resp. N. Pokud $\forall \alpha, \beta$: $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ je hladké na svém def. oboru, potom F je hladké.

DK: $p \in M \Rightarrow (U_\alpha, \varphi_\alpha),\ (V_\beta, \psi_\beta)$: $p \in U_\alpha,\ F(p) \in V_\beta$

$$U := \underbrace{U_\alpha \cap \underbrace{F^{-1}(V_\beta)}_{\text{ot.}}}_{\text{ot.}}, \text{ zjevně } F(U) \subset V_\beta$$

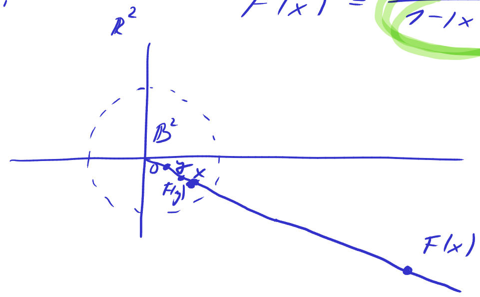
$\Rightarrow$ mapy $(U, \varphi_\alpha|_U)$, (V_β, ψ_β) vyhovují def.

Q.E.D.

Def: $F: M \to N$ se nazývá difeomorfismus $\Leftrightarrow$ F je hl. bijekce s hl. inverzním zobrazením.

Př: $B^n \approx \mathbb{R}^n$ „difeomorfní" $\qquad F: B^n \to \mathbb{R}^n$

$$F(x) = \frac{x}{1-|x|^2}$$



Př: (U, φ) ... mapa, $\varphi: U \to \varphi(U)$ je difeomorfismus,

neboť $\varphi \circ \varphi^{-1} = Id|_{\varphi(U)}$ ... hl.
$\qquad\qquad\qquad\qquad \cap\ \mathbb{R}^n$

a $\varphi \circ \varphi^{-1} = Id|_{\varphi(U)}$ ... hl.

Př: $\mathbb{R}$ ... hl. varieta se std. hl. strukturou

$\tilde{\mathbb{R}}$ ... s hl. atlasem $\{(\mathbb{R}, \psi)\}$, $\psi(x) = x^3$

$F: \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$, $F(x) = x^{1/3}$, $F^{-1}(y) = y^3$

$\hat{F}(t) = \psi \circ F \circ Id_{\mathbb{R}}^{-1}(t) = t$ ... hladké

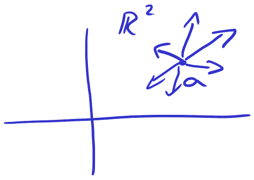
$(Id \circ F^{-1} \circ \psi^{-1})(t) = t$ ... — // —

$\Rightarrow \mathbb{R} \approx \tilde{\mathbb{R}}$.

- pozn.: (konec 20. st.) $n \neq 4$: $\mathbb{R}^n$ má jednoznačnou hl. strukturu (mod difeomorfismy); pro $\mathbb{R}^4$ ex. nespočetně mnoho nedif. hl. struktur!

TEČNÝ VEKTOR / PROSTOR

Motivace: $\mathbb{R}^n \ni a$ „geometrický" tečný vektor v a



$\mathbb{R}^n_a := \{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a,v) : v \in \mathbb{R}^n\}$

$(a,v) \equiv v_a \equiv v|_a$

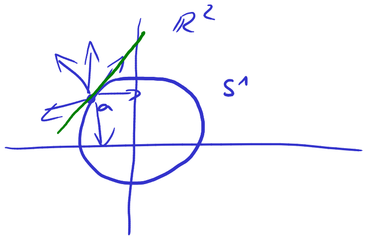
$\left.\begin{array}{l} v_a + w_a := (v+w)_a \\ \alpha \cdot v_a := (\alpha v)_a \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R}^n_a \ldots$ VP

izomorfní $\mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

$e_i|_a,\ i \in \hat{n} \ldots$ báze $\mathbb{R}^n_a$

$a \neq b$: $\mathbb{R}^n_a \cap \mathbb{R}^n_b = \emptyset$



tečný vektor v_a $\Leftrightarrow$ směrová derivace v a ve směru v

$v_a \in \mathbb{R}^n_a \Leftrightarrow D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$D_v|_a f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a+tv)$

$D_v|_a$: i) lineární

ii) Leibnitzovo pravidlo:

$D_v|_a (f \cdot g) = f(a)\, D_v|_a g + g(a)\, D_v|_a f$

$v_a = v^i e_i|_a \Rightarrow D_v|_a = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_a$

→ obecný pojem derivace

Def: $a \in \mathbb{R}^n$, lin. zobrazení $X : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ se nazývá derivace (v bodě a), pokud splňuje Leibnitzovo pravidlo:

$X(f \cdot g) = f(a) Xg + g(a) Xf$.

$T_a(\mathbb{R}^n) \ldots$ mža $\forall$ derivací v bodě a

$X, Y \in T_a(\mathbb{R}^n)$: $\left.\begin{array}{l} (X+Y)f := Xf + Yf \\ (cX)f := c(Xf) \end{array}\right\} \Rightarrow T_a(\mathbb{R}^n)$ je VP

Lemma: $a \in \mathbb{R}^n$, $X \in T_a(\mathbb{R}^n)$. Potom

i) $f = \text{konst.} \Rightarrow Xf = 0$

ii) $f(a) = g(a) = 0 \Rightarrow X(fg) = 0$

DK: ii) $\Leftarrow$ L. pravidlo

i) $f(x) = 1$, $X(f) = X(f \cdot f) = 1\,Xf + 1\,Xf = 2Xf$

$\Rightarrow Xf = 0$

$f(x) = c \in \mathbb{R}$, $X(f) = X(c \cdot 1) = c\,X(1) = c \cdot 0 = 0$

Q.E.D.

Tvrzení: $a \in \mathbb{R}^n$, zobrazení $v_a \mapsto D_v|_a$ je izomorfismus ($=$ lin. bijekce) $\mathbb{R}^n_a$ na $T_a(\mathbb{R}^n)$.

DK: linearita: $\alpha v_a + w_a \mapsto D_{\alpha v + w}|_a = (\alpha v + w)^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_a =$

$= \alpha v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_a + w^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_a = \alpha D_v|_a + D_w|_a$ ✓

injektivita: $D_v|_a = 0 \overset{?}{\Rightarrow} v|_a = 0$

$\Updownarrow$

$(\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n))\ (D_v|_a f = 0)$

$v_a = v^i e_i|_a \Rightarrow \;=\; v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_a f$

$f(x) \overset{!}{=} x^j \Rightarrow D_v|_a f = v^j = 0 \quad (\forall j \in \hat{n})$

$\Rightarrow v_a = 0$

surjektivita: $X \in T_a(\mathbb{R}^n)$ libovolné $\overset{?}{\Rightarrow} \exists v|_a : X = D_v|_a$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$ Taylor: $f(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i) +$

$+ g_i(x)(x^i - a^i)$

hl. fce, $g_i(a) = 0$ $(\forall i \in \hat{n})$

$Xf = \overbrace{X(f(a))}^{=0} + \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)\, X(x^i - a^i) + \underbrace{g_i(a)}_{=0} X(x^i - a^i) +$

$+ \underbrace{(x^i - a^i)}_{=0}\Big|_{x=a} X g_i$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)\left(X(x^i) - \underbrace{X a^i}_{=0}\right) = \underbrace{X(x^i)}_{= v^i} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_a f$$

$$v^i := X(x^i) \implies X = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_a = D_v\big|_a$$

Q.E.D.

Důsledek: $\dim T_a(\mathbb{R}^n) = n$

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_a \right\}_{i=1}^{n}$ tvoří bázi $T_a(\mathbb{R}^n)$

$\mathbb{R}^m_a = \{a\} \times \mathbb{R}^m \quad \ni (a, v) \equiv v|_a$

$\updownarrow \leftarrow$ izomorfismus

$D_v|_a \in T_a(\mathbb{R}^m)$ ... mža $\forall$ derivací v bodě a

$\nearrow$ lin. zobr. + Leibnitz

$\to$ důsledek: báze na $\mathbb{R}^m_a \ldots \{e_i|_a\}_{i=1}^m \to$ báze na $T_a(\mathbb{R}^m) \ldots \{\frac{\partial}{\partial x^i}|_a\}_{i=1}^m$

$(\dim T_a(\mathbb{R}^m) = m)$

Tečný prostor k hl. varietě

$p \in M$ ... hl. varieta

Def: $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ se nazývá derivace (v bodě p) $\Leftrightarrow$ X je lin. zobrazení splňující Leibnitzovo pravidlo (v bodě p).

Tečný prostor k M v p je mža $\forall$ derivací (v bodě p).

Značíme ho T_pM. Prvky T_pM nazýváme tečné vektory.

(je to VP)

- pozn.: a) $f = \text{konst. na } M \Rightarrow \underset{\in T_pM}{X} f = 0$

b) $f(p) = g(p) = 0 \Rightarrow X(fg) = 0$

} DK stejně jako pro $T_a\mathbb{R}^m$

Tečné zobrazení (push-forward)

M, N ... hl. variety, $F : M \to N$ hl. zobrazení

$p \in M$ fixní: $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N \overset{?}{\underset{\in}{}} T_{F(p)}N$

$\forall f \in C^\infty(N) : (F_* \underset{\in T_pM}{X}) f = X(\underset{\in C^\infty(M)}{f \circ F})$

ad (?): a) F_*X je lin.:

$(F_*X)(\alpha f + g) = X((\alpha f + g) \circ F) = X(\alpha f \circ F + g \circ F)$ ($\uparrow$ lin.)

$= \alpha X(f \circ F) + X(g \circ F) =$

$= \alpha (F_*X)(f) + (F_*X)(g)$ ✓

b) F_*X splňuje L. pravidlo:

$(F_*X)(f \cdot g) = X((f \circ F) \cdot (g \circ F)) \overset{X \text{ splňuje L. pravidlo}}{=} (f \circ F)(p)\, X(g \circ F) +$

$+ (g \circ F)(p)\, X(f \circ F) = f(F(p))(F_*X)(g) +$

$+ g(F(p))(F_*X)(f)$ ✓

Lemma (vlastnosti tečného zobrazení): $F: M \to N$, $G: N \to P$ hl.,

$p \in M$. Potom

a) $F_*: T_pM \to T_{F(p)}N$ je lineární.

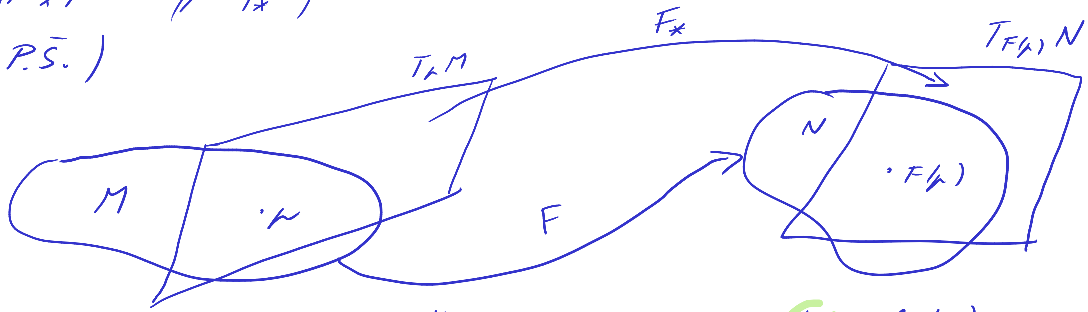
b) $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$

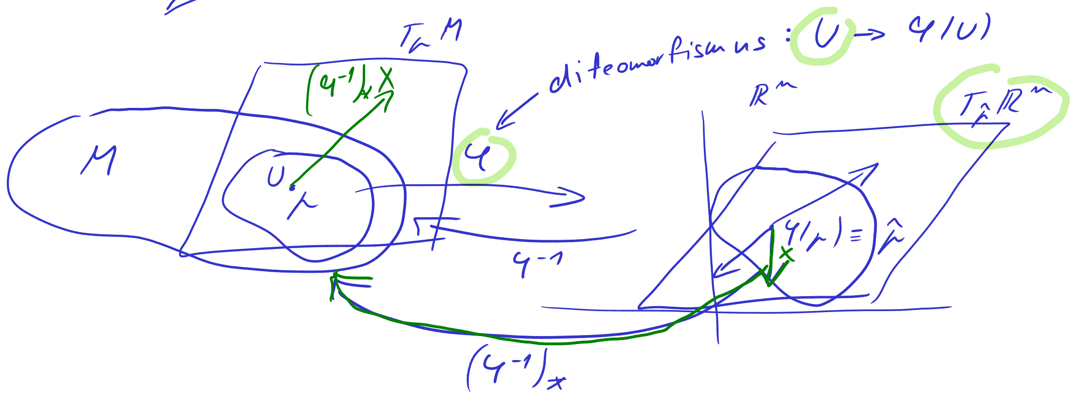
c) $(Id_M)_* = Id_{T_pM}$

d) F...difeomorfismus $\Rightarrow$ $F_*: T_pM \to T_{F(p)}N$... izomorfismus

$\left((F_*)^{-1} = (F^{-1})_* \right)$

DC: (P.Š.)





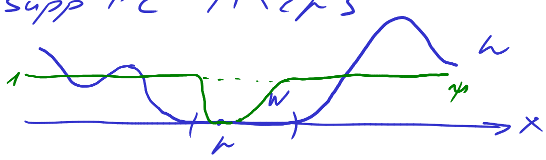
Tvrzení: $p \in M$... hl. varieta, $X \in T_pM$, $f, g \in C^\infty(M)$ splývají na nějakém okolí bodu p $\Rightarrow$ $Xf = Xg$.

DK: $h := f - g \overset{?}{\Rightarrow} Xh = 0$

$h \equiv 0$ na okolí $W = W^\circ \ni p$

Zavedu $\psi \in C^\infty(M)$: $\psi(x) = 1$ ... $x \in M \setminus W$

$\operatorname{supp} \psi \subset M \setminus \{p\}$



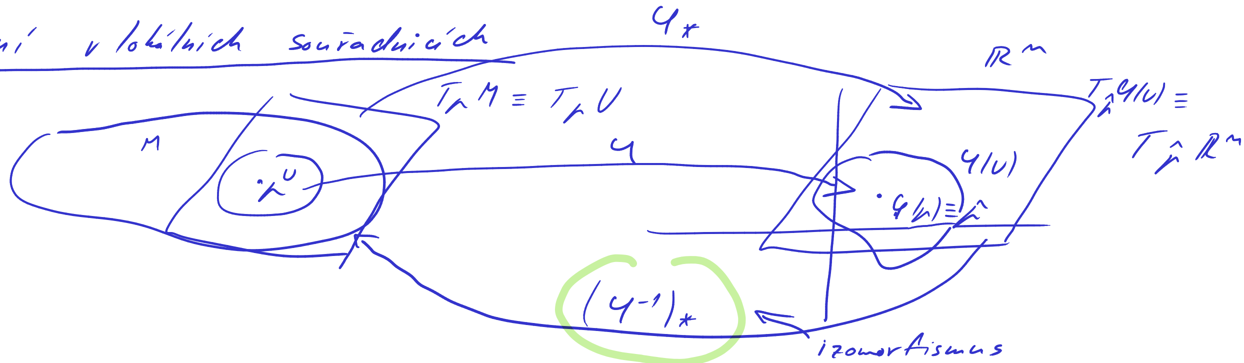
$$X(h) = X(\psi \cdot h) = \underset{=0}{\psi(p)}\, X(h) + \underset{=0}{h(p)}\, X(\psi) = 0$$

Q.E.D.

Důsledek: Identifikujeme $T_pU \leftrightarrow T_pM$ a $T_{\hat{p}}\varphi(U) \leftrightarrow T_{\hat{p}}\mathbb{R}^n$.

(detailněji: inkluze $\iota: U \to M$
$\iota_*: T_pU \to T_pM$ je izomorfismus)

Počítání v lokálních souřadnicích



NB: $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$ má bázi $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\hat{p}} \right\}_{i=1}^m =: \mathcal{B}$

$(\varphi^{-1})_* \mathcal{B}$ ... báze $T_p M$

$\Rightarrow$ $\boxed{\dim T_p M = m}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p := (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}}$$ ... "souřadnicový tečný vektor"

__akce $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$__ : $f \in C^\infty(U)$: $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f = \left((\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\right) f =$

$= \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\hat{p}} \hat{f} \equiv \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\hat{p})$

$f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U)) \subset \mathbb{R}^m$, $\hat{p} := \varphi(p)$

$\hat{f} := f \circ \varphi^{-1}$

$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right\}_{i=1}^m$ ... báze $T_p M$: $X \in T_p M$

$\Rightarrow X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$

komponenty X vzhledem k daným lokálním souřadnicím

$\to$ výpočet komponent: x^j ... j-tá souřadnicová f-ce na U

$x^j : p \mapsto (\hat{p})^j$, $p \in M$

$$\underline{\underline{X(x^j)}} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p x^j = X^i \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) =$$

$$= \underline{\underline{X^j}}$$

Akce tečného zobrazení

(I) $F : U \to V$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^m \leftrightarrow$ souř. $(x^1, \dots, x^m)$; $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$ souř. $(y^1, \dots, y^n)$

$T_p U$ .. báze $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right\}_{i=1}^{n}$

$$\underline{\left(F_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)} \underset{C^\infty(V)}{\underset{\Uparrow}{f}} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (\underset{C^\infty(U)}{\underset{\Uparrow}{f \circ F}}) = \frac{\partial f}{\partial y^j}(F(p)) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) =$$

$$= \underline{\left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(p)}\right)} f$$

$\hookrightarrow$ matice F_* v bazích $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right\}$ a $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(p)} \right\}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m}(p) \end{pmatrix} \dots \underline{\text{Jacobiho matice } F}$$

$$\Rightarrow \underline{F_* \leftrightarrow dF|_p} \quad (DF|_p)$$

(II) $F: M \to N$ hl., $p \in M$

mapa (U, φ), $U \ni p$; mapa (V, ψ), $V \ni F(p)$

$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(U \cap F^{-1}(V))}_{\ni p} \to \psi(V)$ .. "souř. repr. zobr. F", ($\varphi(\dots) \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$)

$\overset{\text{dle (I)}}{\Rightarrow}$ $\hat{F}_*$ je reprezentováno Jacobiho maticí f-ce $\hat{F}$

$$\underline{F_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p} = F_*\left(\varphi^{-1}_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\right) = \underbrace{(F_* \circ \varphi^{-1}_*)}_{(F \circ \varphi^{-1})_* = (\psi^{-1} \circ \hat{F})_* = \psi^{-1}_* \hat{F}_*} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \circledeq$$

$$\circledeq \psi^{-1}_* \hat{F}_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \overset{(I)}{=} \psi^{-1}_* \left(\frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\hat{F} \circ \varphi(p)} \right) =$$

$$= \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \underbrace{\psi^{-1}_* \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{(\hat{F} \circ \varphi)(p)}}_{\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\underbrace{\psi^{-1} \circ \hat{F} \circ \varphi}_{F}(p)}} = \underline{\frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(p)}}$$

$\Rightarrow$ F_* je reprezentováno Jacobiho maticí $\hat{F}$ v odpovídající souř. repr., tj. tečné zobrazení dává na souř. nezávislý smysl pojmu $\underline{\text{Jacobiho matice hl. zobrazení}}$ = lin. aproximace

$\to$ jiné značení F_* : dF, DF
$dF|_p$, $DF|_p$

Záměna souřadnic : (U,φ) , (V,ψ) ... hl. mapy na M ; $p \in U \cap V$

$(U,\varphi) \leftrightarrow (x^i)$, $(V,\psi) \leftrightarrow (\tilde{x}^i)$

tečné vektory $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_p$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = A^j_i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_p , \quad A^j_i = ?$$

DC : $A^j_i = ?$, $X \in T_p M$: $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \tilde{X}^j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_p$, $\tilde{X}^j = ?$ v termínech X^i

(F.N.)

$$X^j = \tilde X^i \frac{\partial x^j}{\partial \tilde x^i}$$

$F: M \to N \Rightarrow F_* \ldots$ Jac. matice v lok. souř.

Id zapíšeme $\tilde x = \tilde x(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = Id_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial \tilde x^j}{\partial x^i}(\hat p)\, \frac{\partial}{\partial \tilde x^j}\Big|_p$$

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \tilde X^j \frac{\partial}{\partial \tilde x^j}\Big|_p$$

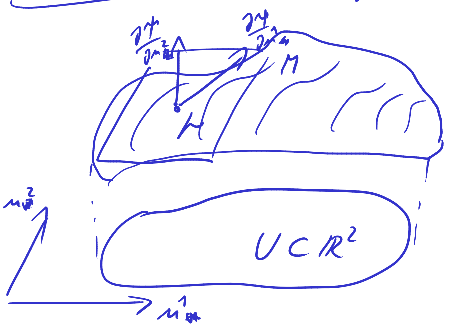
$$= X^i \frac{\partial \tilde x^j}{\partial x^i}(\hat p)\, \frac{\partial}{\partial \tilde x^j}\Big|_p$$

inverzní k $\left(\frac{\partial x^j}{\partial \tilde x^i}\right)$

vektory = kontravariantní vektory : $\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial \tilde x^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial \tilde x^i}$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f = \frac{\partial \hat f}{\partial x^i}(\hat p)$$

Porovnání s tečnými vektory k plochám



parametrizace

$\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ hl.

$$M = \{\varphi(\underbrace{u^1, u^2}_{u}) : u \in U\}$$

tečné vektory: $\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial u^2} \ldots$ 3 komponenty

×

abstraktní pojetí: M hl. varieta s globální mapou (M, φ^{-1}) hl.

$\Rightarrow T_pM$ je nabalen na vektory $\frac{\partial}{\partial u^1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial u^2}\Big|_p \ldots$ 2 komponenty

dim $M = 2 \Rightarrow$ dim $T_pM = 2$

"inkluze" $\iota: M \to \mathbb{R}^3$ (obecně: $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p := (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}$) $(\iota\circ\varphi)_*$

$$\left(\iota_* \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p\right)(f) = \left(\iota_* \varphi_* \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_{\underbrace{\varphi^{-1}(p)}_{u}}\right) f =$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$= \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_u (f\circ\iota\circ\varphi) = \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial(\iota\circ\varphi)^j}{\partial u^i} = \frac{\partial\varphi^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^j} f$$

$(\iota\circ\varphi)^j =: \varphi^j$

$\iota\circ\varphi: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$

složky $\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}$

Tečný vektor ke křivce

Def: $M \ldots$ hl. varieta, $J = J^\circ \subset \mathbb{R}$ interval

křivka $:= \gamma: J \to M$

Def: $\gamma \ldots$ hl. křivka na hl. variétě M, vektor $\gamma'(t_0) := \gamma_* \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} \in T_{\gamma(t_0)}M$, $t_0 \in J$

se nazývá tečný vektor ke γ v t_0.

V souřadnicích: $f\in C^\infty(M)$: $\gamma'(t_0)f = \left(\gamma_* \frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right)f = \frac{d}{dt}\Big|_{t_0}(\underbrace{f\circ\gamma}_{J\to\mathbb{R}})$

derivace podél křivky γ

(U,φ) ... hl. mapa: $\gamma(t_0)\in U$, souř. $(x^i)_{i=1}^m$

$$\gamma'(t_0)f = \frac{d}{dt}\Big|_{t_0}(f\circ\gamma) = \frac{d}{dt}\Big|_{t_0}(\underbrace{f\circ\varphi^{-1}}_{\hat f}\circ\underbrace{\varphi\circ\gamma}_{\hat\gamma}) = \qquad \hat\gamma: I\to\mathbb{R}^m$$

$$= \frac{\partial \hat f}{\partial x^i}(\hat\gamma(t_0))\,\frac{d\hat\gamma^i}{dt}(t_0) = \frac{d\hat\gamma^i}{dt}(t_0)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t_0)} f$$

$(\hat\gamma^i)'(t_0) =$ komponenty tečného vektoru

Tvrzení: každý $X\in T_pM$ je tečný vektor k nějaké hl. křivce na M.

Dk: (U,φ) ... hl mapa, $p\in U$ $\to$ $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$

$\to$ zavedeme $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$, $\hat\gamma(t):=(tX^1,\dots,tX^m)+\hat p$

$\gamma(t):=\varphi^{-1}\circ\hat\gamma(t)$

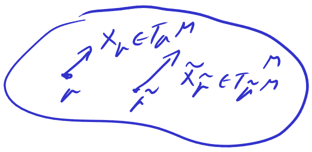
$\hookrightarrow$ $\gamma(0)=p$

$\gamma'(0) = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\underbrace{\gamma(0)}_{=p}} = X$ ✓

Q.E.D.

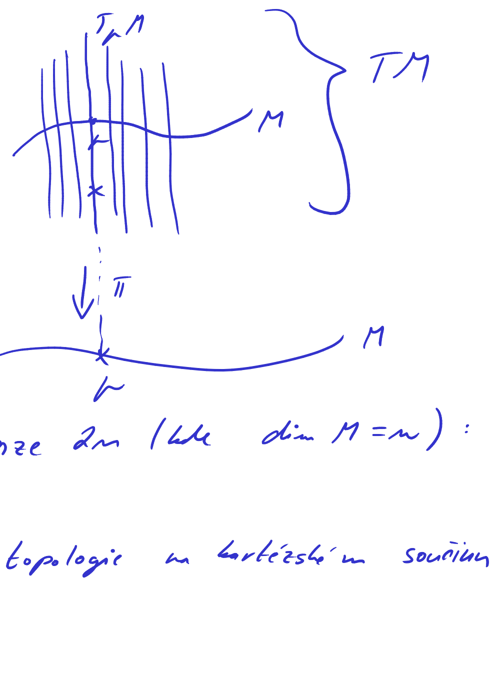
Vektorová pole

= zobrazení $p\mapsto X_p$, $p\in M$, $X_p\in T_pM$



– jaký je obor hodnot? $\to$ tzv. „tečný bundle": $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM \ni (p,X)$, $X\in T_pM$

ad tečné bundly: π ... projekce $TM\to M$
$(p,X)\mapsto p$



TM má (přirozenou) strukturu hl. variety dimenze $2m$ (kde $\dim M = m$):

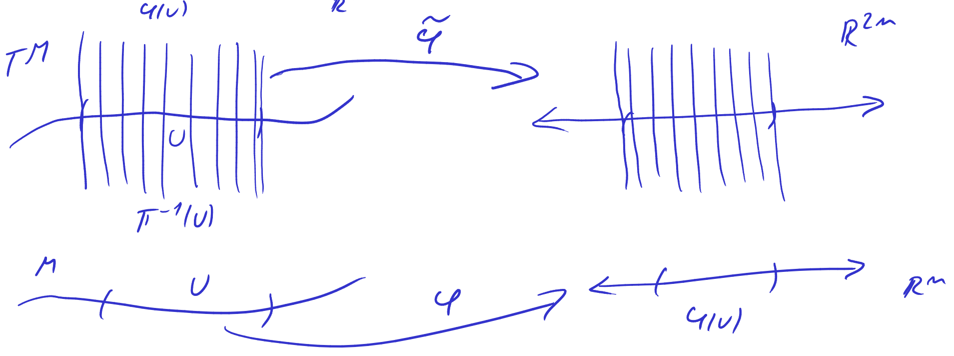
1) topologie na TM := produktová topologie na kartézském součinu ot. množin

2) hl. struktura : na M .... (U, φ) mapy
$\updownarrow$
souř. (x^i)

$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2m}$ (na ot. podmn.)

$$\tilde{\varphi}\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = (\underbrace{x^1(p), \dots x^m(p)}_{\hat{p}}, v^1, \dots, v^m) \in \underset{\text{ot.}}{\varphi(U)} \times \mathbb{R}^m$$

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\underbrace{x^1, \dots, x^m}_{\varphi(U)}, \underbrace{v^1, \dots, v^m}_{\mathbb{R}^m}) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi^{-1}(x)}$$



<u>Def</u> : (hladké) vektorové pole na M je (hladké) zobrazení $X : M \to TM$ s vlastností $\pi \circ X = Id_M$.

vektorové pole Y, lok. souř. $\{x^i\}$ → $Y(p) = Y^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$
$\updownarrow$
(U, φ)
f-u na $U \subset M$

Tvrzení: M ... hl. varieta, $Y: M \to TM$ ... vektorové pole, $(U, (x^i))$ ... hl. mapa na M.
Potom Y je hl. na U ⟺ ∀ komponenty (tj. f-ce Y^i) pole Y jsou (vzhledem k této mapě) hladké.

DK: souřadnicová reprezentace Y: $\hat{Y}(\hat{p}) = (\underbrace{x^1(p), \dots, x^m(p)}_{\text{složky } \hat{p}}, Y^1(p), \dots, Y^m(p))$ ← hladké
$\hat{p} \in \varphi(U)$

hl. zobr. ⟺ hl. souř. reprezentace
⟺ $Y^i(p)$ jsou hl.

Q.E.D.

KOTEČNÝ PROSTOR

review LA: V ... lin. VP, $\dim V = m < +\infty$, báze $(E_1, \dots, E_m)$
→ V^* ... duální prostor – tvořen lin. f-cionály $\omega: V \to \mathbb{R}$
→ duální báze $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m)$: $\varepsilon^i(E_j) = \delta^i{}_j$

$\omega \in V^* \Rightarrow \omega = \omega_j \varepsilon^j$, $\omega_j = \omega(E_j)$
$X \in V \Rightarrow X = X^i E_i$
$\omega(X) = \omega(X^i E_i) = X^i \omega_i =$
$= \langle \omega, X \rangle$
$(= \langle X, \omega \rangle)$

V, W ... lin. VP
$A: V \to W$ lin.
↳ duální zobrazení: $A^*: W^* \to V^*$

$$(\underset{W^*}{A^*\omega})(\underset{V}{X}) := \omega(\underset{W}{AX}) \quad (\forall \omega \in W^*, \forall X \in V)$$

– pozn.: V, W ... H. - prostory
Riesz: $V \updownarrow V^*$, $W \updownarrow W^* \ni \omega$, $\omega \updownarrow_{\text{Riesz}} Y$

$$\langle A^* Y, X \rangle_V = \langle Y, AX \rangle_W$$

– druhý duální prostor: $(V^*)^* = V^{**} \leftrightarrow V$
"kanonický" (na bázi nezávislý) izomorfismus $\xi: V \to V^{**}$

$$\xi(\underset{V}{X})(\underset{V^*}{\omega}) := \omega(X)$$

je to skutečně izomorfismus:
1) linearita ✓

2) bijektivita – stačí ukázat injektivitu

$X \in V \neq 0 \to$ doplním na bázi

$(X \equiv E_1, E_2, \dots, E_n)$

$\to$ duální báze $(\mathcal{E}^1, \dots, \mathcal{E}^n)$

$\xi(X) \neq 0$ protože $\xi(X)(\mathcal{E}^1) =$

$= \xi(E_1)(\mathcal{E}^1) = \mathcal{E}^1(E_1) = 1 \neq 0$ ✓

$\Rightarrow V^{**} \simeq V$

$p \in M$ ... hl. varieta

T_pM ... tečný prostor k M v p

$T_p^*M := (T_pM)^*$ ... kotečný prostor, $\dim T_p^*M = \dim T_pM = \dim M = n$

$\omega \in T_p^*M$

„kotečný vektor" = „kovektor"

$(U,(x^i))$ ... mapa na M $\to$ $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)_{i=1}^n$ ... báze T_pM

↳ duální báze $\left(\lambda^i|_p\right)_{i=1}^n$ ... báze T_p^*M

$\left(\Leftrightarrow dx^i\right)$

$$\omega = \omega_i \lambda^i|_p, \quad \omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)$$

Transformační vztahy do jiných souřadnic

duální báze k $\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_p\right)$

$$\omega = \omega_i \lambda^i|_p = \tilde{\omega}_j \tilde{\lambda}^j|_p$$

$$\omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \omega\left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\,\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_p\right) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\,\underbrace{\omega\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_p\right)}_{=\tilde{\omega}_j}$$

NB:
$$\omega_i = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\,\tilde{\omega}_j \to \text{kovektory = „kovariantní vektory"}$$
$$X^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}(p)\,\tilde{X}^j \to \text{„kontravariantní vektory"}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}$$

Kovektorové pole: $\omega : \underset{M}{p \in} \mapsto \omega_p \in T_p^*M$ (tzv. 1-forma)

↳ v souřadnicích $(U,(x^i))$: $\omega = \omega_i \lambda^i$

$\omega_p = \omega_i(p)\,\lambda^i|_p$

$\omega_i : U \to \mathbb{R}$

$$\omega_i(p) = \omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)$$

Def: Kovektorové pole ω na M je hladké $\Leftrightarrow$ $(\forall p \in M)(\exists (U,\varphi))$ $(p \in U \wedge \omega_i \in C^\infty(U))$.

-pozn.:

$$\omega_i = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\tilde{\omega}_j \quad \Rightarrow \left(\omega_i \in C^\infty(U\cap V) \Leftrightarrow \tilde{\omega}_j \in C^\infty(U\cap V)\right)$$

$\uparrow$ vždy hladké, s hl. inverzí

Tvrzení: Kov. pole ω je hladké $\Leftrightarrow$ $\forall$ hl. v. pole X je funkce $\langle \omega, X\rangle \equiv \omega(X)$ hladká.

DK: $(U,(x^i))$… hl. mapa na M

$$\langle \omega, X\rangle(p) = \langle \omega_p, X_p\rangle = \omega_p(X_p) = \omega_i(p)\lambda^i|_p\left(X^j(p)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right)$$

$$= \omega_i(p) X^i(p)$$

ω hl. $\Rightarrow$ $\omega_i(p)$ hl. $\Rightarrow$ $\langle \omega, X\rangle(p)$ hl.

$\langle \omega, X\rangle$ hl. $\to$ volím $X^i = \delta^i_j$ $\left(X = \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ $\nwarrow$ fixní

$\Leftrightarrow$ $\langle \omega, X\rangle(p) = \omega_j(p)$

$\Rightarrow$ ω_j je hl. $\Rightarrow$ ω hl. Q.E.D.

$\to$ **notace:** $\mathfrak{T}M$ … VP všech hl. vekt. polí na M : $(X+Y)_p = X_p + Y_p$

$\mathfrak{T}^*M$ … VP všech hl. kovekt. polí na M

$(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f)$

DIFERENCIÁL F-CE

Motivace: grad f … vektor parciálních derivací, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

tak se ale netransformuje:

$$\text{"grad} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}\text{"}$$

Př.: $f(x,y) = x^2$ $\quad$ grad $f = (2x, 0) \overset{\text{vektor?}}{\Leftrightarrow} X = 2x\frac{\partial}{\partial x}$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow X = 2r\cos\varphi\left(\underset{\cos\varphi}{\underset{\|}{\frac{\partial r}{\partial x}}}\frac{\partial}{\partial r} + \underset{-\frac{\sin\varphi}{r}}{\underset{\|}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\neq \frac{\partial r^2\cos^2\varphi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial r^2\cos^2\varphi}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi} = 2r\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial r} + - r^2\sin(2\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$\nearrow$

$f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = r^2\cos^2\varphi$

→ řešení: složky grad f lze interpretovat jako komponenty kovektorového pole!

Diferenciál f-ce: $f \in C^\infty(M)$

df … kovektorové pole $(\in \mathcal{T}^* M)$, tzv. dif. f-ce

$p \in M$: $\underbrace{df_p(X_p) := \underbrace{X_p f}_{\in \mathbb{R}}}$ $\quad (\forall X_p \in T_p M)$

Tvrzení: df je skutečně hl. kovek. pole.

DK: • df_p je lin. ✓

• $X \in \mathcal{T} M \;\rightarrow\; df(X) = X f^{\;\in C^\infty(M)}$

$\langle df, X\rangle(p) = df_p(X_p) = (Xf)_p = \underset{\in C^\infty(M)}{X_p f}$

$\Rightarrow df \in \mathcal{T}^* M$.

df v souřadnicích: $(U,(x^i))$ … hl. mapa $\rightarrow$ λ^i … souřadnicová kovektorová pole

$(\forall p \in U)$ $\quad df_p = A_i(p)\, \lambda^i|_p$, kde

$A_i(p) = df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\hat{p})$

$\Rightarrow \underbrace{df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, \lambda^i|_p}$

složky gradientu

→ volím $f(p) = x^i(p)$ … souřadnicová f-ce na U

$\underline{\underline{dx^i|_p}} = \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p)}_{\delta^i_j} \lambda^j|_p = \underline{\underline{\lambda^i|_p}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{df|_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, dx^i|_p}$$

DC1: (vlastnosti dif.): $f, g \in C^\infty(M)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
(LH)

a) $d(\alpha f + \beta g) = \alpha\, df + \beta\, dg$

b) $d(f \cdot g) = f\, dg + g\, df$ (Leibniz)

c) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\, df - f\, dg}{g^2}$ $\quad (g \neq 0)$

d) $f = \text{konst.} \Rightarrow df = 0$; $\quad$ DC2: $df = 0 \Leftrightarrow f = \text{konst.}$ na každé komponentě M
(MS)

$$\underset{\in T_p^*M}{(df)}(\underset{\in T_pM}{X}) := \underset{\in\mathbb{R}}{Xf}$$

$$\underline{d\left(\tfrac{f}{g}\right)X} = X\left(\tfrac{f}{g}\right) = X\left(f\cdot\tfrac{1}{g}\right) = f(p)\,X\left(\tfrac{1}{g}\right) + \tfrac{1}{g(p)}X(f) \;=$$

$$\underline{0} = X(1) = X\left(\tfrac{g}{g}\right) = X\left(g\cdot\tfrac{1}{g}\right) = g(p)\,X\left(\tfrac{1}{g}\right) + \tfrac{1}{g(p)}X(g)$$

$$X\left(\tfrac{1}{g}\right) = -\frac{X(g)}{g(p)^2}$$

$$= \frac{g(p)X(f) - f(p)X(g)}{g(p)^2} = \frac{g(p)\,df(X) - f(p)\,dg(X)}{g(p)^2}$$

$$X \in T_pM \quad\to\quad X = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\hat{p}} \equiv \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$$

$$\omega \in T_p^*M \quad\to\quad \omega = \omega_i\, dx^i|_p$$

$$dx^i(X) = X(x^i)$$

$$df|_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, dx^i|_p$$

<u>Tvrzení (derivace f-ce podél křivky):</u> M ... hl. varieta, $\gamma: J \to M$ hl. křivka, $f \in C^\infty(M)$. Potom $(f\circ\gamma)'(\underset{\in J}{t}) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$.

tečný vektor ke křivce:

$$\gamma_* \frac{d}{dt} =: \gamma'(t)$$

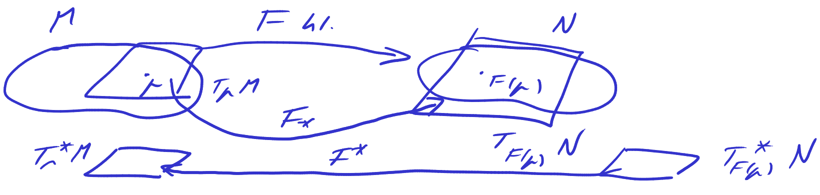
<u>Dk</u>: $t_0 \in J$: $df_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0)) = \gamma'(t_0)(f) = \left(\gamma_* \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right)(f) =$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}(f\circ\gamma) = (f\circ\gamma)'(t_0) \checkmark$$

<u>Notace</u>: hl. vektorová pole ... $\mathcal{T}M$

hl. kovektorová pole ... $\mathcal{T}^*M$

<u>PULL BACK kovektorových polí</u>



$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$

duální zobrazení $(F_*)^* \equiv F^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_pM$ ... pullback

$p \in M$ pevné: $\underbrace{(F^*\omega)}_{\in T^*_{F(p)}N}(\underbrace{X}_{\in T_pM}) := \omega(\underbrace{F_* X}_{\in T_{F(p)}N})$

$\omega \in \mathcal{T}^*N$: $(F^*\omega)_{p \in M} := F^*(\omega_{F(p)})$

Lemma: $F: M \to N$ hl., $f \in C^\infty(N)$, $\omega \in \mathcal{T}^*N$. Potom

a) $F^* df = d(f \circ F)$

b) $F^*(\underbrace{f\omega}_{\text{def. bodově: } (f\omega)_p = f(p)\omega_p}) = (f \circ F)\, F^*\omega$

DK: $X \in T_pM$

a) $(F^*df)_p X = F^*(df_{F(p)}) X = df_{F(p)}(F_* X) = (F_* X) f =$

$= X(f \circ F) = d(f \circ F)_p(X)$

b) $(F^*(f\omega))_p = F^*(\underbrace{(f\omega)_{F(p)}}_{f(F(p))\,\omega_{F(p)}}) = f(F(p))\, F^*\omega_{F(p)} =$

$= ((f \circ F)\, F^*\omega)_p$ Q.E.D.

Tvrzení: $F: M \to N$ hl., $\omega \in \mathcal{T}^*N$. Potom $F^*\omega \in \mathcal{T}^*M$.

DK: $p \in M \to$ $(U, (x^i))$ mapa na M: $p \in U$

$(V, (y^j))$ mapa na N: $F(p) \in V$

$\omega = \underbrace{\omega_j}_{\text{hl. f-ce na } V} dy^j$

$F^*\omega = F^*(\omega_j dy^j) = (\omega_j \circ F)\, F^* dy^j = (\underbrace{\omega_j \circ F}_{\text{hl.}})\, d(\underbrace{y^j \circ F}_{F^j})$ $\Leftrightarrow$

$y^j \circ F : \underset{M}{U} \to \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (\omega_j \circ F) \underbrace{\frac{\partial F^j}{\partial x^i} dx^i}_{\text{hl.}} \Longrightarrow F^*\omega \in \mathcal{T}^*M$ ✓

Q.E.D.

$$F^*(\omega_j\, dy^j) = (\omega_j \circ F)\, d(y^j \circ F) = \underbrace{(\omega_j \circ F)\, \frac{\partial (\overbrace{y^j \circ F}^{F^j})}{\partial x^i}}\, dx^i$$

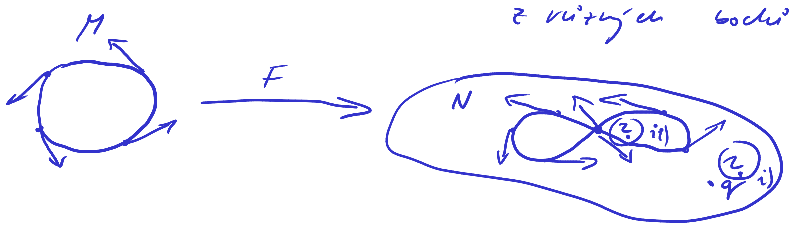
POZOR: Tečné zobrazení obecně nezobrazuje hl. vektorová pole na hl. vekt. pole!

$X \in \mathcal{T}M$

$F_* X_x \in T_{F(x)} N$, $x \in M$ → obecně neurčuje vekt. pole na celém N

i) F není surj. → nevím jaký vektor přidělit bodu $q \in N \setminus F(M)$

ii) F není prosté → dostanu víc obrazů z různých bodů M



F difeomorfismus → potom obraz hl. v. pole je hl. v. pole

Př: záměna souřadnic : $M = N = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$(x, y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$\omega = x\,dy - y\,dx$

↓

zápis v souř. (r, θ):

$$\mathrm{Id}^*\omega = \mathrm{Id}(x\,dy - y\,dx) = r\cos\theta\, d(r\sin\theta) - r\sin\theta\, d(r\cos\theta)$$
$$= r\cos\theta(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) - r\sin\theta(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)$$
$$= r^2\, d\theta$$

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

- motivace : $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ → st. souřadnice (t)

$\omega \in \mathcal{T}^*\langle a, b\rangle$ → $\omega = f(t)\,dt$

f … hl. f-ce na $\langle a, b\rangle$

$$\int_{\langle a,b\rangle} \omega := \int_a^b f(t)\,dt$$

dt … int. symbol

Tvrzení (invariance při difeomorfismech): $\omega \in \mathcal{T}^*\langle a,b\rangle$, $\varphi: \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$ rostoucí difeomorfismus. Potom $\int_{\langle c,d\rangle} \varphi^*\omega = \int_{\langle a,b\rangle} \omega$.

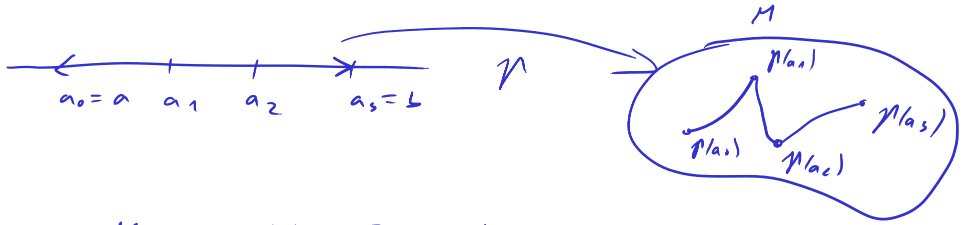
DK: $\int_{\langle c,d\rangle} \varphi^*\omega \underset{\omega = f(t)\,dt}{=} \int_{\langle c,d\rangle} \varphi^*(f(t)\,dt) = \int_{\langle c,d\rangle} (f\circ\varphi)\,d\varphi = \int_{\langle c,d\rangle} (f\circ\varphi)\underbrace{\frac{d\varphi}{ds}}_{=\varphi'(s)}\,ds =$

$= \int_c^d (f\circ\varphi)(s)\,\varphi'(s)\,ds = \left| \varphi(s) = t \right| = \int_a^b f(t)\,dt = \int_{\langle a,b\rangle} \omega.$

PŘIPOMENUTÍ: křivka γ … zobrazení $\langle a,b\rangle \to M$

γ je hl. $\Leftrightarrow$ má-li hl. rozšíření na ot. interval obsahující $\langle a,b\rangle$

γ je po částech hladká $\Leftrightarrow$ $\exists$ rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$: $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ tak, že $\gamma|_{\langle a_i, a_{i+1}\rangle}$ je hl. $(\forall i \in \{0,1,\dots,k-1\})$



– pozn.: M … souvislá. Potom lib. dva body M lze spojit po částech hl. křivkou.

(DK (idea): $p \in M$ pevný
$C := \{ q \in M : \exists$ po č. hl. kř. z p do $q\}$ je obojetná)

Def: $\gamma: \langle a,b\rangle \to M$ hl. křivka, $\omega \in \mathcal{T}^*M$.
Křivkový integrál z ω podél γ def. jako $\boxed{\int_\gamma \omega := \int_{\langle a,b\rangle} \gamma^*\omega.}$

– pozn.: γ po částech hl. křivka: $\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\langle a_i, a_{i+1}\rangle} \gamma^*\omega$

– pozn.: Def. výše dává smysl křivkovým int. v $\mathbb{R}^n$, např. $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$, $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

DC (vlastnosti křivkového $\int$): a) $\int_\gamma (c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1\int_\gamma \omega_1 + c_2 \int_\gamma \omega_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) $\gamma = \text{konst.} \Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$

c) $a < c < b \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma|_{\langle a,c\rangle}} \omega + \int_{\gamma|_{\langle c,b\rangle}} \omega .$

křivkový $\int$ - cont.

1) $M = \langle a,b\rangle$, std. souř. $(\langle a,b\rangle, t)$

$\omega \in \mathcal{T}^*M \;\to\; \omega = f(t)\,dt$ (f hladká)

$$\int_M \omega = \int_a^b f(t)\,dt$$

$\varphi : \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$ difeom. $\Rightarrow$

$$\int_{\langle c,d\rangle} \varphi^*\omega = \pm \int_{\langle a,b\rangle} \omega$$

$+$ … φ rost., $-$ … φ kles.

2) M obecná hl. var., $\gamma : \langle a,b\rangle \to M$

$\omega \in \mathcal{T}^*M$

$$\boxed{\int_\gamma \omega := \int_{\langle a,b\rangle} \gamma^*\omega}$$

$$\int_{\langle c,d\rangle} \varphi^*\omega \overset{f\,dt}{=} \int_c^d (f\circ\varphi)\,\varphi'(s)\,ds = /\text{sub } \varphi(s) = t/ = \pm\int_a^b f(t)\,dt$$

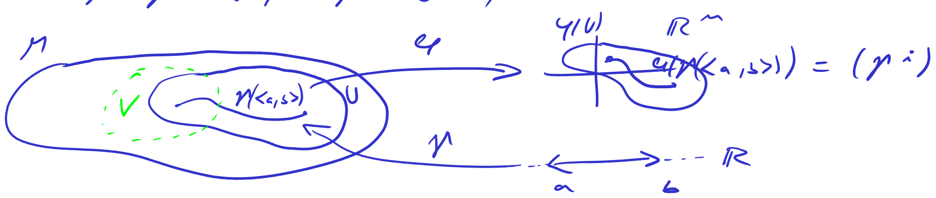
Tvrzení: $\gamma : \langle a,b\rangle \to M$. Potom

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,dt.$$

$$\left(= \lim_{c\to b-} \int_a^b \underbrace{\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,\chi_{\langle a,c\rangle}(t)}\,dt\right)$$

$$|-||-| \le \sup_{t\in\langle a,b\rangle} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

DK: 1) γ hl., $\gamma(\langle a,b\rangle) \subset U$, kde $(U,(x^i))$ … hl. mapa na M



$\omega = \omega_i\,dx^i$, $\omega_i \in C^\infty(U)$

$\gamma \equiv (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$

$\gamma' \equiv ((\gamma^1(t))', \dots, (\gamma^n(t))')$

$$(\gamma^*\omega)_t = (\gamma^*\,\omega_i\,dx^i)_t = \gamma^*(\omega_i|_{\gamma(t)}\,dx^i|_{\gamma(t)}) =$$

$$= \omega_i(\gamma(t))\,\gamma^*dx^i|_{\gamma(t)} = \omega_i(\gamma(t))\,d(\underbrace{x^i\circ\gamma}_{=\gamma^i})_t =$$

$$= \omega_i(\gamma(t))\,(\gamma^i(t))'\,dt$$

$$\int_\gamma \omega = \int_{\langle a,b\rangle} \gamma^*\omega = \int_a^b \underbrace{\omega_i(\gamma(t))(\gamma^i(t))'}\,dt = \int_a^b \omega(\gamma'(t))\,dt$$

$$\underbrace{\omega_i(\gamma(t))\,dx^i}_{\omega}(\gamma'(t))$$

$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ $/dx^j$

$X^i = dx^i(X)$

$dx^j(X) = X^i\, \underbrace{dx^j \tfrac{\partial}{\partial x^i}}_{=\delta^j_i} = X^j$

2) rozsekání na případy à la 1)

Q.E.D.

– pozn.: $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ v $\mathbb{R}^3$

$$= \int_a^b (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)(\gamma_x'(t), \gamma_y'(t), \gamma_z'(t))\,dt =$$

podél $\gamma(t)$

$$= \int_a^b (P \circ \gamma(t))\,\gamma_x'(t) + (Q \circ \gamma(t))\,\gamma_y'(t) + (R \circ \gamma(t))\,\gamma_z'(t)\,dt$$

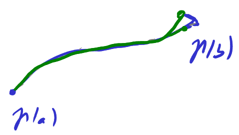
Reparametrizace γ: $\gamma : \langle a,b\rangle \to M$

$\tilde{\gamma} : \langle c,d\rangle \to M$

$\tilde{\gamma}$ je rep. γ $\Leftrightarrow$ $\exists$ difeom. $\varphi : \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$

tak, že $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

rost. → dopředná, kles. → zpětná repar.



Tvrzení + DK: $\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\langle c,d\rangle} \tilde{\gamma}^* \omega = \int_{\langle c,d\rangle} \underbrace{(\gamma \circ \varphi)^*}_{= \varphi^* \gamma^*} \omega = \int_{\langle c,d\rangle} \varphi^* (\gamma^* \omega) =$

integrace forem na intervalu

$$= \pm \int_{\langle a,b\rangle} \gamma^* \omega = \pm \int_\gamma \omega$$

V (fundamentální V kalkulu pro křiv. $\int$): M... hl. var., $f \in C^\infty(M)$,

$\gamma : \langle a,b\rangle \to M$ hl. křivka. Potom $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

DK: $\int_\gamma df = \int_{\langle a,b\rangle} \gamma^* df = \int_{\langle a,b\rangle} d(f \circ \gamma) = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)\,dt =$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \checkmark$$

TENZORY

V... VP konečné dim

Def: Kovariantní k-tenzor na V je reálná multilineární funkce

$$T : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k\text{-krát}} \to \mathbb{R}.$$

k... stupeň / řád tenzoru

Př: sk. součin = 2-tenzor
determinant matice $n \times n$ = n-tenzor
lin. f-cionál = 1-tenzor
$a \in \mathbb{R}$ = 0-tenzor

$\rightarrow$ VP k-tenzorů ... $T^k(V)$

(spec. $T^1(V) \equiv V^*$)

Def: $S \in T^k(V)$, $T \in T^l(V)$. Zobrazení $S \otimes T : \overbrace{V \times V \times \dots \times V}^{(k+l)\text{-krát}} \rightarrow \mathbb{R}$

def. jako $S \otimes T(X_1, \dots, X_{k+l}) := S(X_1, \dots, X_k)\, T(X_{k+1}, \dots, X_{k+l})$

se nazývá tenzorový součin S a T.

$\rightarrow$ $S \otimes T \in T^{k+l}(V)$

- pozn.: i) $S \otimes T$ závisí lin. na S a T,

tj. např. $(\alpha S + \tilde{S}) \otimes T =$

$= \alpha (S \otimes T) + \tilde{S} \otimes T$

ii) $(S \otimes T) \otimes R = S \otimes (T \otimes R)$

Tvrzení: $\dim V = n$, $\{E_i\}$ ... báze V, $\{\varepsilon^i\}$ ... duální báze.

Potom $\{\underset{\in V^*}{\varepsilon^{i_1}} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_k}\}_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n}$ je báze $T^k(V)$.

($\Rightarrow \dim T^k(V) = n^k$).

- pozn.: $T^k(V) \equiv \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k\text{-krát}}$

nezávislé?

DK: $T \in T^k(V) \overset{?}{\Rightarrow} T = T_{i_1, \dots, i_k}\, \varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_k}$

1) daná mn. generuje $T^k V$: $T_{i_1, \dots, i_k} = T(E_{i_1}, \dots, E_{i_k})$

$\underset{T^k V}{T} \overset{?}{=} \underbrace{T_{i_1, \dots, i_k}\, \underset{T^k V}{\varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_k}}}_{T^k V}$ ... stačí ověřit na bazických vektorech

$/ (E_{j_1}, \dots, E_{j_k})$

$T_{j_1, \dots, j_k} = T_{i_1, \dots, i_k}\, \underbrace{\varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_k}(E_{j_1}, \dots, E_{j_k})}$

$\varepsilon^{i_1}(E_{j_1})\, \varepsilon^{i_2}(E_{j_2}) \dots \varepsilon^{i_k}(E_{j_k})$

$= \delta^{i_1}{}_{j_1}\, \delta^{i_2}{}_{j_2} \dots \delta^{i_k}{}_{j_k}$

$$T_{j_1,\dots,j_k} = T_{j_1,\dots,j_k} \checkmark$$

2) je daná mža LN ? :

$$c_{i_1,\dots,i_k}\, \mathcal{E}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{E}^{i_k} = \phi \quad \underline{(E_{j_1},\dots,E_{j_k})}$$

$$\underline{c_{j_1,\dots,j_k} = 0}$$

Q.E.D.

pozn.: $\underline{T^k V \equiv V^* \otimes \dots \otimes V^*}$

$\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{l\text{-krát}} \equiv T_l(V)$ … l-kontravariantní tenzory

$\qquad \qquad \qquad ||$

multilineární funkce na $\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l\text{-krát}}$

$\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k\text{-krát}} \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{l\text{-krát}} \equiv T^k_l(V)$ … k-kovariantní a l-kontravariantní tenzory

$\qquad \qquad \qquad //$

multilin. f-ce na $V \times \dots \times V \times V^* \times \dots \times V^*$

Tenzorová pole na varietě

$p \in M$ … hl. varieta $\rightarrow T_p M \rightarrow T^k(T_p M)$

tenzorové pole $\sigma: \underset{\underset{M}{\cap}}{p} \longmapsto \underset{\underset{T^k(T_p M)}{\cap}}{\sigma_p}$

v lok. souřadnicích : $p \in U \Leftrightarrow (U, (x^i))$ … mapa na M

$T^k(T_p M)$ má bázi $\{dx^{i_1}|_p \otimes dx^{i_2}|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_k}|_p\}$

$$\Leftrightarrow \sigma = \underset{\uparrow}{\sigma_{i_1,\dots,i_k}}\, dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$$

"komponenty tenzorového pole"

Def: σ … (k-kovariantní) tenzorové pole; σ je hladké $:\Leftrightarrow$ $\forall p \in M$ ex. mapa (U, φ) tak, že komponenty σ v odpovídající souř. reprezentaci jsou hladké, tj. $\sigma_{i_1,\dots,j_k} \in C^\infty(U)$.

→ notace : $\mathcal{T}^k M$ … VP hladkých k-kovariantních tenzorových polí

spec. : $\mathcal{T}^1 M \equiv \mathcal{T}^* M$ … 1-formy

$\mathcal{T}^0 M \equiv C^\infty(M)$

Tvrzení : σ … k-kovariantní tenzorové pole. $\sigma \in \mathcal{T}^k M \Leftrightarrow$ $\forall$ hl. vekt. pole $X_1,\dots,X_k$ je f-ce $\sigma(X_1,\dots,X_k)$ hladká.

$$(\sigma(X_1,\dots,X_k))|_p := \sigma_p(X_1|_p,\dots,X_k|_p)$$

DK: viz $k=1$.

Def: V … VP kon. dim.
$T \in T^k(V)$ je <u>antisymetrický</u> $:\Leftrightarrow$ $\forall$ k-tice $x_1, \dots, x_k \in V$
platí $T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = -T(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k)$.

Lemma: Následující tvrzení jsou ekviv.:

a) T je antisym. (podle def.)

b) $\forall x_1, \dots, x_k \in V$, $\forall \sigma \in S_k$: $T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}\sigma \, T(x_1, \dots, x_k)$

c) $T(x_1, \dots, y, \dots, y, \dots, x_k) = 0$ (pro lib. 2 shodné arg.)

d) $\forall x_1, \dots, x_k \in V$ LZ vektorů: $T(x_1, \dots, x_k) = 0$

e) komponenty T v nějaké bázi mění znaménko při záměně indexů, $T_{i_1, \dots, i_k}$.

(SH)

$\underbrace{T(x_1, \dots, x_k)}_{\leq k} = 0$

$\{E_i\}$ báze $\rightarrow$ duální báze $\{\varepsilon^i\}$ $\rightarrow$ $T = T_{i_1, \dots, i_k} \varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_k}$

$T_{i_1, \dots, i_k} = T(E_{i_1}, \dots, E_{i_k})$

$0 = T(E_{i_1}, \dots, E_{i_j} + E_{i_l}, \dots, E_{i_k} + E_{i_l}, \dots, E_{i_k})$

Alt: $T \in T^k(V) \rightarrow \Lambda^k(V)$ ... antisym. k-tenzory

alternující projekce, antisymetrizace

$$\mathrm{Alt}(T) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot {}^{\sigma}T \in \Lambda^k(V) \checkmark$$

$${}^{\sigma}T(x_1, \dots, x_k) := T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

Lemma: $T \in \Lambda^k(V) \Leftrightarrow T = \mathrm{Alt}(T)$.

Dk: $(\Leftarrow)$ $\checkmark$

$(\Rightarrow)$ $\mathrm{Alt}\,T(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \underbrace{T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})}_{= \operatorname{sgn}\sigma\, T(x_1, \dots, x_k)} = T(x_1, \dots, x_k)$ ∎

Elementární antisym. tenzory

V ... VP, $\dim V = n$

$I = (i_1, \dots, i_k)$, kde $i_j \in \hat{n}$, ... "multiindex" $\qquad I_\sigma := (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)})$

$$\delta^I_J = \begin{cases} \operatorname{sgn}\sigma & \dots\ I \text{ ani } J \text{ neobsahují 2 stejné indexy a platí } J = I_\sigma \\ 0 & \dots\ \text{jinak} \end{cases}$$

(E_i) ... báze na V $\rightarrow$ (ε^i) ... duální báze na V^* : $\varepsilon^i(E_j) = \delta^i_j$

e.a.t.: $\varepsilon^I(x_1, \dots, x_k) := \det \begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(x_1) & \dots & \varepsilon^{i_1}(x_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}(x_1) & \dots & \varepsilon^{i_k}(x_k) \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\varepsilon^I \in \Lambda^k(V)$, $x_j \in V$

$\boxed{k \leq n}$ $\rightarrow$ jinak $\varepsilon^I = \emptyset$

Lemma: 1) I obsahuje opakující se index $\Rightarrow \varepsilon^I = \emptyset$

2) $J = I_\sigma \Rightarrow \varepsilon^I = \operatorname{sgn}\sigma\, \varepsilon^J$

3) $\varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \delta^I_J$

Dk: 1) 2 stejné řádky v matici pro výpočet $\varepsilon^I(x_1, \dots, x_k)$ $\checkmark$

2) z vlastností det $\checkmark$

3) a) I obsahuje opakující se index : $0 = 0$ $\checkmark$

b) J —//——— : $0 = 0$

stejné sloupce

c) I, J bez opakujícího se indexu, ale J není permutací I

$\rightarrow$ nulový sloupec $\Rightarrow LS = 0$, $PS = 0$

d) —//— , $I = J$: $PS = 1$, $LS = \det\left(\varepsilon^{i_k}(E_{i_j})\right)_{k,j=1}^{k}$

$= \det(\mathrm{diag}(1, \dots, 1)) = 1$ ✓

e) —//— , $J = I_\sigma$: $PS = \mathrm{sgn}\,\sigma$, $LS = \mathrm{sgn}\,\sigma$ ✓

$\Uparrow$

ε^I je antisym.

V : $\forall k \le n$ je mža $\{\varepsilon^I \mid I$ je rostoucí multiindex stupně $k\}$ bází prostoru $\Lambda^k(V)$ $\left(\Rightarrow \dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}\right)$

$1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$

- pozn.: $\dim \Lambda^n(V) = 1$

- pozn.: $T \in \Lambda^k(V) \Rightarrow \sum\limits_{\substack{I:\\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}} T_I \varepsilon^I =: \sum\limits_I{}' T_I \varepsilon^I$

DK : $k \le n$: $T \in \Lambda^k(V) \overset{?}{\Rightarrow} T = \sum\limits_I{}' T_I \varepsilon^I$

tvrdím: $T_I = T(E_{i_1}, \dots, E_{i_k})$

ověření: obě strany multilin. a antisym.

identitu ověřím jen na bazických vektor:

identitu lze ověřovat jen na k-ticích baz. vekt. s rostoucím multiindexem

$T(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \sum\limits_I{}' T_I \underbrace{\varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k})}_{\delta^I_J} =$

nenulový jen pro jeden člen

$= T_J$ ✓

LN : $(\varepsilon^I)_{I \text{ rostoucí}}$

$\sum\limits_I{}' c_I \varepsilon^I = \theta \;/\; (E_{j_1}, \dots, E_{j_k})$ J rostoucí

$\sum\limits_I{}' c_I \delta^I_J = c_J = 0$ $(\forall J)$

Vnější součin

$\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^\ell(V)$; $k,\ell \le n$

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} \operatorname{Alt}(\underbrace{\omega \otimes \eta}_{\in\, T^{k+\ell}(V)}) \in \Lambda^{k+\ell}(V) \quad ; \quad \operatorname{Alt}(\omega\otimes\eta) = \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \overbrace{\sigma}^{\operatorname{sgn}\sigma}(\omega\otimes\eta)$$

Lemma: $\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ}$

$I=(i_1,\dots,i_k)$, $J=(j_1,\dots,j_\ell)$ $\Rightarrow$ $IJ = (i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_\ell)$

Dk: $P=(\mu_1,\dots,\mu_{k+\ell})$, obě strany pustíme na $(E_{\mu_1}, E_{\mu_2},\dots, E_{\mu_{k+\ell}})$

1) P má opakující se index : $0 = 0$

2) neplatí 1), ale P obsahuje index, který neleží ani v I ani v J:

$PS = \delta^{IJ}{}_P = 0$, $LS =$ suma nul $= 0$

3) neplatí 1), ale $P = IJ$: $PS = \delta^{IJ}{}_P = 1$

$$LS = \varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{\mu_1},\dots,E_{\mu_{k+\ell}}) = \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma\in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}\sigma\; \varepsilon^I(E_{\mu_{\sigma(1)}},\dots,E_{\mu_{\sigma(k)}}) \cdot \varepsilon^J(E_{\mu_{\sigma(k+1)}},\dots,E_{\mu_{\sigma(k+\ell)}}) =$$

přispívají jen ty permutace, které permutují zvlášť prvních k a zbývajících ℓ prvků

$$= \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\substack{\tau\in S_k\\ \eta\in S_\ell}} \operatorname{sgn}\tau \operatorname{sgn}\eta\; \underbrace{\varepsilon^I(E_{\mu_{\tau(1)}},\dots,E_{\mu_{\tau(k)}})}_{\text{permutace } I \;=\; \operatorname{sgn}\tau\, \underbrace{\varepsilon^I(E_{i_1},\dots,E_{i_k})}_{1}} \cdot \underbrace{\varepsilon^J(E_{\mu_{\eta(k+1)}},\dots,E_{\mu_{\eta(k+\ell)}})}_{\text{permutace } J \;=\; \operatorname{sgn}\eta\cdot \varepsilon^J(E_{j_1},\dots,E_{j_\ell})}$$

$$= \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\substack{\tau\in S_k\\ \eta\in S_\ell}} 1 = 1$$

4) neplatí 1) a $P=(IJ)_\sigma$: $LS = PS = \operatorname{sgn}\sigma$

3) + antisym.

∎

$$\mathrm{alt}(\omega\otimes\eta) = \frac{1}{(k+\ell)!}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}\sigma \; {}^{\sigma}(\omega\otimes\eta)$$

Vlastnosti vnějšího součinu: $\omega\wedge\eta = \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\,\mathrm{alt}(\omega\otimes\eta)$

a) bilinearita: $(a\omega + a'\omega')\wedge\eta = a\,\omega\wedge\eta + a'\omega'\wedge\eta$ ✓

b) asociativita: $\omega\wedge(\eta\wedge\zeta) = (\omega\wedge\eta)\wedge\zeta$:

obě strany bilineární → stačí pracovat s bazickými k-kovektory (antisym. k-kovariantní tenzory)

$$\varepsilon^I\wedge(\varepsilon^J\wedge\varepsilon^K) = \varepsilon^I\wedge\varepsilon^{JK} = \varepsilon^{IJK} = \varepsilon^{IJ}\wedge\varepsilon^K = (\varepsilon^I\wedge\varepsilon^J)\wedge\varepsilon^K$$ ✓

c) antikomutativita: $\omega\in\Lambda^k(V)$, $\eta\in\Lambda^\ell(V)$, $\omega\wedge\eta = (-1)^{k\cdot\ell}\,\eta\wedge\omega$:

opět jen pro bazické k-kovektory:

$$\varepsilon^I\wedge\varepsilon^J = \varepsilon^{IJ} = (-1)^{k\cdot\ell}\,\varepsilon^{JI} = (-1)^{k\ell}\,\varepsilon^J\wedge\varepsilon^I$$ ✓

$$\varepsilon^I(X_1,\dots,X_k) = \det\begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(X_1) & \cdots & \varepsilon^{i_1}(X_k) \\ \vdots & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

d) NB: $\varepsilon^I\wedge\varepsilon^J = \varepsilon^{IJ}$, spec. $\varepsilon^{i_1}\wedge\varepsilon^{i_2} = \varepsilon^{(i_1,i_2)}$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon^{i_1}\wedge\varepsilon^{i_2}\wedge\dots\wedge\varepsilon^{i_k} = \varepsilon^I}$$

e) $\omega_1,\dots,\omega_k\in V^*$; $X_1,\dots,X_k\in V$

$$\boxed{\omega_1\wedge\omega_2\wedge\dots\wedge\omega_k(X_1,\dots,X_k) = \det(\omega_j(X_i))}\quad !\ :$$

$\Uparrow$ a) + d)

$V_1\oplus V_2 = \{(x_1,x_2) : x_1\in V_1,\ x_2\in V_2\}$

báze $\{(e_i,0),\ (0,f_j)\}$ — e_i báze V_1, f_j báze V_2

pozn.: vnější algebra … $\Lambda^*(V) = \bigoplus_{i=0}^{n}\Lambda^i(V)$

$\dim\Lambda^i(V) = \binom{n}{i} \Rightarrow \dim\Lambda^*(V) = 2^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$

→ násobení $\wedge$: $\Lambda^k(V)\wedge\Lambda^\ell(V) \to \Lambda^{k+\ell}(V)$

graduovaná algebra

Diferenciální formy na varietách

M … hl. varieta dim. n

$p\in M$

$T_pM \doteq V$

k-forma : $p \longmapsto \Lambda^k(T_pM)$, $p\in M$ — hladce

$$\omega = \sum_I{}' \omega_I\, dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

$\omega_I \in C^\infty(U)$, kde $(U,(x^i))$ mapa, $p\in U$

→ VP k-forem označíme $\Omega^k M$

pozn.: 1-formy = kovektorová pole, tj. $\Omega^1 M = \mathcal{T}^* M$
0-formy = hladké f-ce, tj. $\Omega^0 M = C^\infty(M)$

pozn.: $\omega_I = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right)$, protože $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) = \delta^I_J$

pozn.: vnější násobení zavedeme "bodově", tj. $(\underset{\Omega^k M}{\omega} \wedge \underset{\Omega^\ell M}{\eta})_p := \omega_p \wedge \eta_p$

konvence: $\underset{C^\infty(M)}{f} \wedge \overset{\Omega^k M}{\omega} := f \cdot \omega$

Pullback: $F: M \to N$ hladké, $\omega \in \Omega^k N$

$(F^*\omega)_{p \in M} := F^*(\omega_{F(p)})$

$(F^*\omega)_p(\underset{T_p M}{X_1}, \dots, X_k) = \omega_{F(p)}(\underset{T_{F(p)} N}{F_* X_1}, \dots, F_* X_k)$

→ vlastnosti: viz k-kovariantní tenzorová pole + navíc

1) $F^*: \Omega^k N \to \Omega^k M$: (zatím víme jen, že mapuje do $\mathcal{T}^k M$):

$(F^*\omega)_p(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \omega_{F(p)}(F_* X_{\sigma(1)}, \dots, F_* X_{\sigma(k)}) =$

$= \operatorname{sgn}\sigma \; \omega_{F(p)}(F_* X_1, \dots, F_* X_k) = \operatorname{sgn}(F^*\omega)_p(X_1, \dots, X_k)$ ✓

2) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$: (zatím víme, že $F^*(\omega \otimes \eta) = F^*\omega \otimes F^*\eta$):

$F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\left(\frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} \operatorname{Alt} \omega \otimes \eta\right) = F^*\left(\frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}\sigma \; {}^\sigma(\omega \otimes \eta)\right)$

$= F^* \, {}^\sigma(\omega \otimes \eta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) = {}^\sigma(\omega \otimes \eta)(F_* X_1, \dots, F_* X_{k+\ell}) =$

$= \omega \otimes \eta(F_* X_{\sigma(1)}, \dots, F_* X_{\sigma(k+\ell)}) = F^*(\omega \otimes \eta)(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}) =$

$= {}^\sigma(F^*(\omega \otimes \eta))(X_1, \dots, X_{k+\ell})$ /

$= \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}\sigma \; {}^\sigma(\underbrace{F^*(\omega \otimes \eta)}_{F^*\omega \otimes F^*\eta}) = \dots = F^*\omega \wedge F^*\eta$

3) $F^*\left(\sum_I{}' \omega_I \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) = \sum_I{}' (\omega_I \circ F) \, d(\overbrace{x^{i_1} \circ F}^{F^{i_1}}) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F)$:

NB: $F^*(\sigma_{j_1 \dots j_k} dy^{j_1} \otimes \dots \otimes dy^{j_k}) =$

$= (\sigma_{j_1 \dots j_k} \circ F) \, d(y^{j_1} \circ F) \otimes \dots \otimes d(y^{j_k} \circ F)$

linearita + vlastnost: $F^* \, {}^\sigma(dy^i \otimes dy^j) = {}^\sigma(F^* dy^i \otimes F^* dy^j)$

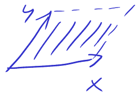
$= {}^\sigma(d(y^i \circ F) \otimes d(y^j \circ F))$

Př: $M = \mathbb{R}^2 \to$ std. báze $T_pM = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\} \to$ duální báze $\{dx, dy\}$

$\omega = dx \wedge dy \in \Omega^2 M$
$X, Y \in T_pM$
$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x} + X^2 \frac{\partial}{\partial y}$

$$\omega(X,Y) = dx \wedge dy\,(X,Y) = \det\begin{pmatrix} dx(X) & dx(Y) \\ dy(X) & dy(Y) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} X^1 & Y^1 \\ X^2 & Y^2 \end{pmatrix} = X^1Y^2 - Y^1X^2$$

(znaménkový) objem rovnoběžníku



$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$$\Rightarrow \omega = d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) = (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) \wedge (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) = \cos\theta\sin\theta\, \underbrace{dr \wedge dr}_{=0} + r\cos^2\theta\, dr\wedge d\theta - r\sin^2\theta\, \underbrace{d\theta \wedge dr}_{= -dr\wedge d\theta} - r^2 \sin\theta\cos\theta\, \underbrace{d\theta\wedge d\theta}_{=0}$$

$\Leftarrow dr \wedge dr = (-1)^{1\cdot 1} dr\wedge dr$

$$= r\, dr \wedge d\theta$$

Tvrzení: $F: M \to N$ hl., $\dim M = \dim N = n$, (x^i) a (y^j) ... hl. souřadnice na $U \subset M$ a $V \subset N$, $u \in C^\infty(V)$. Potom na $U \cap F^{-1}(V)$ platí

$$F^*(u\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n) = (u \circ F) \det(\underbrace{D\hat{F}}_{\text{Jacobiho matice}})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Vnější derivace

$d: \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$

v lok. souř. $\quad d\left(\sum_J{}' \omega_J dx^J\right) := \overbrace{\sum_J{}' \underbrace{d\omega_J}_{\Omega^1(M)} \wedge \underbrace{dx^J}_{\Omega^k(M)}}^{\Omega^{k+1}(M)}$

DC 1): a) $f \in C^\infty(M)$: $(df)(X) = X(f)$ $(\forall X \in T_p(M))$, vnější der. na f-ci = diferenciál

(MS)

b) $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M) \Rightarrow d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$
(antiderivace)

c) $d \circ d = 0$

DC 2) $G: M \to N$ hl. zobrazení, $\omega \in \Omega^k(N)$
(FN) $\Rightarrow G^*(d\omega) = d(G^*\omega)$

Tvrzení: $F: M \to N$ hl., $\dim M = \dim N = n$, (x^i) a (y^j) ... hl. souřadnice na $U \subset M$ a $V \subset N$, $u \in C^\infty(V)$. Potom na $U \cap F^{-1}(V)$ platí

$$F^*(u\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = (u\circ F)\det(\underbrace{D\hat F}_{\text{Jacobiho matice}})\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$$

DK: $F^*(u\, dy^1\wedge\dots\wedge dy^n) = (u\circ F)\, dF^1\wedge\dots\wedge dF^n$

$$dF^1\wedge\dots\wedge dF^n\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \det\Big(\underbrace{dF^j\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}\right)}_{=\frac{\partial F^j}{\partial x^i}}\Big) = \det(D\hat F)$$

na PS: $\det(D\hat F)\underbrace{dx^1\wedge\dots\wedge dx^n\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)}_{\det I} = \det(D\hat F)$ ✓

Q.E.D.

Důsledek: $M=N$, $F=Id$, $u\equiv 1$

$$d\tilde x^1\wedge\dots\wedge d\tilde x^n = \det\left(\frac{\partial \tilde x^j}{\partial x^i}\right) dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$$

Vnější derivace

$$d: \underbrace{\Omega^k(M)}_{k\text{-formy na } M} \to \Omega^{k+1}(M)$$

$$d\Big(\sum_J{}' \underbrace{\omega_J}_{\in C^\infty(U)} \underbrace{dx^J}_{=dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_k}}\Big) := \sum_J{}' d\omega_J\wedge dx^J = \sum_J{}'\sum_i \underbrace{\frac{\partial\omega_J}{\partial x^i}}_{\in C^\infty(U)} dx^i\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_k}$$

$$d\circ d\omega = \sum_J{}'\Big(\sum_\ell\sum_i \underbrace{\frac{\partial^2\omega_J}{\partial x^\ell\partial x^i}}_{\text{sym. } \ell\leftrightarrow i} \underbrace{dx^\ell\wedge dx^i}_{\text{antisym. } \ell\leftrightarrow i}\Big)\wedge dx^J = 0$$

Př: $M=\mathbb R^3$, $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz \in \Omega^1(\mathbb R^3)$

$$d\omega = dP\wedge dx + dQ\wedge dy + dR\wedge dz = \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\wedge dx +$$

$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$, $\quad dy\wedge dx = -dx\wedge dy$

$$+\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z}\,dz\wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x}\,dx\wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}\,dy\wedge dz =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\underbrace{dx\wedge dy}_{=*dz} + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\underbrace{dy\wedge dz}_{=*dx} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\underbrace{dx\wedge dz}_{=-*dy}$$

Hodge: $*dz$, $*dx$, $-*dy$

Def: $\omega \in \Omega^k(M)$ je uzavřená $\Leftrightarrow d\omega = 0$

je exaktní $\Leftrightarrow \exists\, \eta \in \Omega^{k-1}(M) : d\eta = \omega$.

- pozn.: ω exaktní $\Rightarrow \omega = d\eta \Rightarrow d\omega = d \circ d\eta = 0 \Rightarrow \omega$ uzavřená

→ v souřadnicích nezávislé vyjádření vnější derivace:

Tvrzení: $\omega \in \Omega^1(M) = \mathcal{T}^*M$; $X, Y \in \mathcal{T}(M)$:

$$d\omega(X,Y) = X(\underbrace{\omega(Y)}_{\in C^\infty(M)}) - Y(\underbrace{\omega(X)}_{\in C^\infty(M)}) - \omega([X,Y])$$

$[X,Y]$ "=" $XY - YX$

$$[X,Y]v = X(\underbrace{Yv}_{\in C^\infty(M)}) - Y(\underbrace{Xv}_{\in C^\infty(M)})$$

DK: ω lze zapsat LK výrazů typu $u\,dv$

$$d(u\,dv)(X,Y) \overset{def.}{=} du \wedge dv\,(X,Y) = \det\begin{pmatrix} du(X) & du(Y) \\ dv(X) & dv(Y) \end{pmatrix} =$$

$$= Xu\,Yv - Yu\,Xv$$

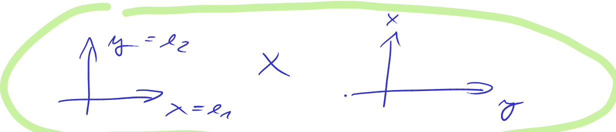
$$X(u\,\underbrace{dv(Y)}_{Y(v)}) - Y(u\,\underbrace{dv(X)}_{=X(v)}) - u\,dv([X,Y]) = Xu\,Yv + u\,XYv -$$

$$- Yu\,Xv - u\,YXv - u\,XYv + u\,YXv = Xu\,Yv - Yu\,Xv$$

Q.E.D.

Orientace VP

$V \dots$ VP, $\dim V = n < +\infty$



Def: Uspořádané báze $(E_1, \dots, E_n)$ a $(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n)$ jsou shodně orientovány $\Leftrightarrow$ matice přechodu B^j_i $(E_i = B^j_i \tilde{E}_j)$ má kladný determinant.

- pozn.: identifikace $(E_i) \sim (\tilde{E}_j) \Leftrightarrow \det B^j_i > 0$ je ekvivalence

i) $E_i = B^j_i \tilde{E}_j = \underbrace{B^j_i C^k_j}_{= \delta^k_i} E_k \Rightarrow \det C = \frac{1}{\det B} > 0$

ii) $E_i \sim E_i$: $B = I$, $\det I = 1$ ✓

iii) tranzitivita: $\det(B \cdot C) = \underbrace{\det B}_{>0} \cdot \underbrace{\det C}_{>0} > 0$

- pozn.: $\det B \neq 0 \Rightarrow \det B \gtrless 0 \Rightarrow$ 2 třídy ekvivalence

Def: Orientace V je třída ekvivalence shodně or. bazí.

i

Orientace, orientovaná varieta

Orientace VP

V ... VP $\dim n < \infty$

Def: Uspořádané báze $(E_1, \dots, E_n)$ a $(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n)$ jsou **shodně orientovány** $\Leftrightarrow$ matice přechodu B^j_i $(E_i = B^j_i \tilde{E}_j)$ má kladný determinant.

- pozn.: Identifikace $(E_i) \sim (\tilde{E}_j) \Leftrightarrow \det B^j_i > 0$ je ekvivalence : i) $E_i = B^j_i \tilde{E}_j = \underbrace{B^j_i C^k_j}_{\delta^k_i} E_k \Rightarrow \det C = \frac{1}{\det B} > 0$

ii) $(E_i) \sim (E_i)$, neboť $\det I > 0$

iii) tranzitivita z vlastnosti $\det(B \cdot C) = \underbrace{\det B}_{>0} \cdot \underbrace{\det C}_{>0} > 0$.

Navíc matice přechodu je vždy regulární, tj: $\det B \gtrless 0$

$\Rightarrow$ 2 třídy ekvivalence.

Def: Orientace V je třída ekvivalence shodně or. bází. Je-li $(E_1, \dots, E_n)$ uspořádaná báze, potom orientaci, již určuje, značíme $[E_1, \dots, E_n]$. VP + zvolená orientace $\Rightarrow$ or. VP. Libovolná báze, která leží v orientaci VP, se nazývá orientovaná (pozitivně or.). Báze, která není or., se nazývá negativně or.

Př.: $\mathbb{R}^n$: $[e_1, \dots, e_n]$ ... standardní or.

Lemma: $0 \neq \Omega \in \Lambda^n(V)$. Potom mna uspořádaných bází $(E_1, \dots, E_n)$ takových, že $\Omega(E_1, \dots, E_n) > 0$ je orientace pro V.

DK: $E_i = B^j_i \tilde{E}_j$, $\Omega(E_1, \dots, E_n) = B^{j_1}_1 B^{j_2}_2 \dots B^{j_n}_n \cdot \Omega(\tilde{E}_{j_1}, \dots, \tilde{E}_{j_n}) = \underbrace{\sum_{J,\ \text{různé indexy}} B^{j_1}_1 B^{j_2}_2 \dots B^{j_n}_n \operatorname{sgn} J}_{= \det B} \Omega(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n)$

Q.E.D.

stejné znaménko $\Leftrightarrow$ stejná shodná or.

$\Rightarrow \Omega$ se nazývá or. korektor

(11)

Orientace variety

M... hl. varieta dim $m < \infty$

Def: Bodovou orientací M se rozumí volba orientace tečného prostoru v každém bodě M.

→ ta se ale mění (obecně) bod od bodu bez nějakého vztahu mezi sebou

→ ? podmínka zajišťující, že "blízké" tečné prostory jsou shodně orientovány ?

→ zavede se pomocí pojmu: lokální souřadný systém (coordinate frame): LSS

$\exists\, U \supset (E_i)_{i=1}^m$ je LSS na ot. mže $U \subset M \iff (\forall p \in U)\big((E_i|_p)_{i=1}^m$ je báze $T_pM\big)$ (s notací výše)

Def: LSS je (poz.) or. $\iff$ $(E_1|_p, \dots, E_m|_p)$ je poz. or. báze pro T_pM v každém bodě $p \in U$. Podobně zavedeme neg. or. LSS.
Bodová or. se nazývá spojitá $\iff$ každý bod M leží v def. oboru nějakého or. LSS. Orientací variety rozumíme spojitou bodovou orientaci. Orientovaná varieta je hl. varieta spolu s vybranou or. Říkáme, že varieta je orientovatelná $\iff$ $\exists$-li pro ni orientace, v opačném případě se nazývá neorientovatelná.

- pozn.: M... or. varieta. Potom každý LSS se souvislým definičním oborem (ten je vždy otevřený) je buď poz. nebo neg. or.

DK: (E_i)... LSS na U... souvislá ot.

$A_{+\,(-)} := \{p \in U : (E_i|_p)$ je poz. (neg.) or.$\}$

buď např. $A_+ \neq \emptyset$ (jinak jsme hotovi): $p \in A_+ \subset U$

$\xrightarrow{\text{Mor.}}$ $\exists$ (ot.)okolí bodu p, řekněme W_p, a LSS $(\tilde{E}_j)$ na W_p, jenž je poz. or.

⇒ buď B matice přechodu mezi (E_i) a $(\tilde{E}_j)$

$p \in V = \underbrace{U \cap W_p}_{\text{ot.}}$ ot. a volím ji souvislou

→ $\det B$: spoj. zobrazení $V \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (souvislá; nesouvislá)

⇒ $\det B$ nemůže měnit znaménko, neboť spojitý obraz souvislé mn. je souvislý

(iii) $\Rightarrow V \subset A_+ \Rightarrow A_+$ je ot., podobně A_- je ot.

ale $\underbrace{A_+ \cup A_-}_{\text{ot., disj.}} = \underbrace{U}_{\text{souvislá}} \Rightarrow A_+ = \emptyset \vee A_- = \emptyset$

Q.E.D.

Def: Hl. mapa na or. varietě se nazývá orientovaná $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ je (poz.) or. LSS a neg. or. $\Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ je neg. or. LSS.

Soubor map je shodně orientován $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta$: $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ má kladný jakobián všude na $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. $\tilde{x}^i(x)$

pozn.: (To) nastává $\Leftrightarrow \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)$ má kl. jakobián, neboť $\frac{\partial}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$

matice přechodu mezi bázemi

Tvrzení: M...hl. varieta, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$...pokrytí M shodně orientovanými mapami. Potom $\exists_1$ orientace M s vlastností, že každá mapa φ_α je or. Obráceně, je-li M orientovaná, potom soubor všech or. hl. map je shodně or. pokrytí M.

Dk: i) $p \in M \to$ or. zaveden bodově pomocí nějaké mapy: $p \in U_\alpha$ (díky shodné or. tato or. nezávisí na konkrétní volbě mapy), z konstrukce je tato or. spojitá

ii) $p \in M$... or. $\Rightarrow \exists$ (E_a) or. LSS na nějakém okolí p

$p \in U_i$, $i = 1,2$ pro mapy $(U_i, \varphi_i) \Leftrightarrow$ souřadnice $(x^j_{(i)})$

$\Rightarrow B^{(i)}$...matice přechodu mezi (E_a) a $\left(\frac{\partial}{\partial x^j_{(i)}}\right)$

$\det B^{(i)} > 0$

$\Rightarrow$ matice přechodu mezi $\left(\frac{\partial}{\partial x^j_{(1)}}\right)$ a $\left(\frac{\partial}{\partial x^j_{(2)}}\right)$: $B^{(2)}(B^{(1)})^{-1}$

$\det$ —//— > 0

Q.E.D.

Tvrzení: M... hl. varieta, $\Omega \in \mathcal{A}^n(M)$ všude nenulová. Potom Ω určuje jednoznačnou or. M, pro níž je Ω or. v každém bodě. Obráceně, je-li M or., $\exists$ $\Omega \in \mathcal{A}^n(M)$ všude nenulová tak, že je or. v každém bodě.

(iv) Dk (jen první části): $\mu \in M \Rightarrow$ najdeme U... st. souvislé : $\mu \in U$ a
(x^i) souřadnice na U

$\rightarrow \Omega = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$

$f \in C^\infty(U)$, $f(\mu) \neq 0$

$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_\mu, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_\mu\right) = f(\mu) \gtrless 0 \quad (\forall \mu \in U)$... ze souvislosti U

$\Rightarrow (x^i)$ je poz. v neg. or. LSS ; pokud by byl neg. or. prohodím znaménko jedné koordináty $\Rightarrow$ dostávám LSS z def. orientovatelné variety.

polo Q.E.D.

- pozn.: Ω z tvrzení se nazývá orientaci zadávající forma

Def: M, N... or. variety, $F: M \to N$ lokální difeomorfismus. Říkáme, že F zachovává orientaci $\Leftrightarrow (\forall \mu \in M)$ F_* převádí or. bázi $T_\mu M$ na or. bázi $T_{F(\mu)} N$. Podobně F převrací orientaci $\Leftrightarrow$ F_* převádí or. bázi na neg. or. bázi.

- pozn.: F zachovává (převrací) or. $\Leftrightarrow$ jakobián F v lib. or. mapách je kladný (záporný)

Dk: (E_i)... or. báze $T_\mu M \xrightarrow{F \text{ difeomorfismus}} (F_* E_i)$... báze $T_{F(\mu)} N$ $\Rightarrow F_*$ ... isomorfismus

orientaci zadávající formy: $\omega = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ na M

$\eta = g\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m$ na N

$\eta(F_* E_1, \dots, F_* E_m) = (F^* \eta)(E_1, \dots, E_m) = (g \circ \hat{F})\, d\hat{F}^1 \wedge \dots \wedge d\hat{F}^m (-\|-) =$

$= (g \circ \hat{F}) \underbrace{\frac{\partial \hat{F}^1}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial \hat{F}^2}{\partial x^{k_2}} \dots \frac{\partial \hat{F}^m}{\partial x^{k_m}}} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_m} (-\|-) =$

$= (g \circ \hat{F}) \sum_{K} -\|- \operatorname{sgn} K\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m (-\|-) =$

různé indexy

$= \left(\frac{g \circ \hat{F}}{f}\right) \omega(E_1, \dots, E_m) \left(\det\left(\frac{\partial \hat{F}^i}{\partial x^j}\right)\right)$

0

zachování či převrácení je dáno znaménkem det

Q.E.D.

(V)

Orientace nadploch, orientace kraje

Odbočka č. 1: Kontrakce

(I) pro k-kovariantní tenzory: $V \dots VP$: $\dim V < \infty$

$X \in V$ ... pevný

Def: zobrazení $\iota_X : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k-1}(V)$ působící jako

$$\iota_X(\omega)(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}) \quad (\forall Y_1, \dots, Y_{k-1} \in V)$$

se nazývá kontrakce s X.

- pozn.
  - $\iota_X(\omega) \equiv X \lrcorner \omega$
  - na 0-tenzorech klademe $\iota_X M \equiv 0$

Vlastnosti:
i) $\iota_X \circ \iota_X = 0$ ✓
ii) $\iota_X(\omega \wedge \eta) = (\iota_X \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (\iota_X \eta)$

Dk (ii): každý kovektor rozložíme do báze elem. kovektorů
$\to$ BÚNO lze za ω a η volit rozložitelné antisym. tenzory
$\to$ pro rozložitelný tenzor máme:

$$X \lrcorner \mu^1 \wedge \dots \wedge \mu^k (Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \mu^1 \wedge \dots \wedge \mu^k (X, Y_1, \dots, Y_{k-1}) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \mu^1(X) & \mu^1(Y_1) & \cdots & \mu^1(Y_{k-1}) \\ \vdots & & & \\ \mu^k(X) & \mu^k(Y_1) & \cdots & \mu^k(Y_{k-1}) \end{pmatrix} \underset{\text{rozvoj dle 1. sloupce}}{=} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \mu^i(X)$$

$$\mu^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mu^i} \wedge \dots \wedge \mu^k (Y_1, \dots, Y_{k-1})$$

$\to$ proto:

$$X \lrcorner (\omega \wedge \eta) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \omega^i(X) \omega^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \dots \wedge \omega^k \wedge$$

$$\wedge \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^l + \sum_{i=1}^{l} (-1)^{k+i+1} \eta^i(X) \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k \wedge \eta^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\eta^i} \wedge \dots \wedge \eta^l$$

$$= (X \lrcorner \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (X \lrcorner \eta)$$

Q.E.D.

(II) pro k-formy: M ... hl. varieta

$X \in \mathcal{T}M$, $\omega \in \Omega^k(M)$

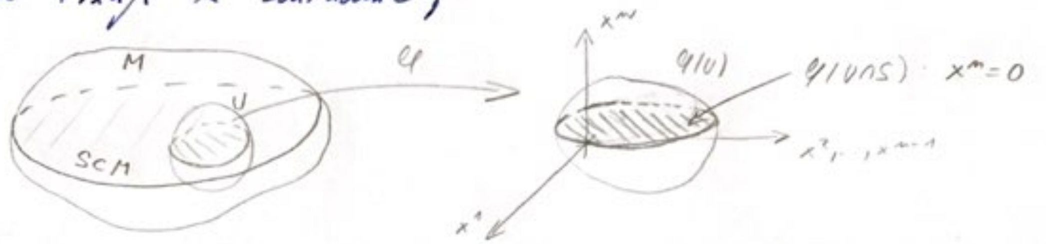
$\to$ klademe $\boxed{(X \lrcorner \omega)_p = X_p \lrcorner \omega_p} \quad (\forall p \in M)$

(vi)

<u>Odbočka č. 2</u> : <u>Vložené nadplochy</u>

= <u>vložená</u> (embedded) <u>podvarieta</u> kodimenze 1, tj: $S \subset M$ taková, že $(\forall p \in S)\,(\exists (U,\varphi)\ldots$ mapa na $M)\,(p \in U \wedge \varphi(U \cap S) =$
$= \{ x \in \varphi(U) : x^m = \underset{\substack{\| \\ 0}}{\text{konst.}} \}$. $\in$ BÚNO

(def. vložené podvariety kodimenze $k < \dim M$ vypadá analogicky, jen se fixuje k souřadnic)



- <u>pozn.</u>: S je sama o sobě varietou → topologickou: s rel. topologií od M
  $\Rightarrow$ hl.: $(x^1, \ldots, x^m)$ souř. na M $\Rightarrow$ $(x^1, \ldots, x^{m-1})$ souř. na S
  ↳ musí se ukázat, že jsou opět hl. kompatibilní (Lee: Theorem 8.2)
  ↳ takto vzniklá hl. struktura na S je jediná s vlastností, že "vložení" $S \hookrightarrow M$ je <u>hladké vložení</u> (opět Theorem 8.2)

<u>Def</u>: $M, N \ldots$ hl. variety, $F : M \to N$ hl., potom <u>hodností F</u> v $p \in M$ rozumíme rank F_* v p. F se nazývá <u>vnoření</u> (immersion) $\Leftrightarrow$ $(\forall p \in M)$ (rank $F = \dim M$, tj F_* je prosté). Je-li vnoření navíc topologické vložení (embedding), tj: homeomorfismus M na $F(M)$ (s relativní topologií od N), potom F nazýváme <u>hladké vložení</u> (smooth embedding).

- <u>pozn</u>: Platí dokonce, že obrazy hladkých vložení jsou právě vložené podvariety. (Lee: Corollary 8.4)

(vii)

Tečný vektor k vložené podvarietě

$\iota: S \hookrightarrow M$ ... hl. vložení , $p \in S$

$\Downarrow$

ι_* je isomorfismus $\Rightarrow \iota_*: T_p S \to T_p M$ je prosté

$\Rightarrow$ identifikujeme $\underbrace{T_p S \Leftrightarrow \iota_* T_p S}_{} \underset{\uparrow \text{podprostor}}{\subset} T_p M$

? jak funguje ~~.....~~ $\tilde{X} \in \iota_* T_p S$? :

$X \in T_p S \Rightarrow \tilde{X} = \iota_* X \in T_p M$, $f \in C^\infty(M)$

$\Rightarrow \underline{\tilde{X} f} = (\iota_* X) f = X(f \circ \iota) = \underline{X(f|_S)}$

Tvrzení : $S \subset M$ vložená podvarieta , $p \in S$. Jakožto podprostor $T_p M$ lze $T_p S$ identifikovat s množinou $\{X \in T_p M : Xf = 0$ pro $\forall f \in C^\infty(M) : f|_S \equiv 0\} =: (*)$

Dk: $X \in$ "$T_p S$" ~~...~~ $X = \iota_* Y$ pro nějaké $Y \in T_p S$

$f \in C^\infty(M) \Rightarrow Xf = Y(f|_S) = 0$ pro $f|_S \equiv 0$

$\Rightarrow X \in (*)$

$\Rightarrow$ buď naopak $X \in (*)$: hledáme $Y \in T_p S : X = \iota_* Y$

$p \in U$ a na němž máme souř. (x^i) takové, že

$\varphi(U \cap S) = \{p \in \varphi(U) : x^{k+1} = \ldots = x^m = 0\} \Rightarrow (x^1, \ldots, x^k)$... souřadnice pro $U \cap S$

$\iota: S \cap U \hookrightarrow M$ má souř. reprezentaci

$$\iota(x^1, \ldots, x^k) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)$$

$\Rightarrow \iota_* T_p S$ má bázi $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p$

$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \Rightarrow$ ukážeme, že $(\forall i > k)(X^i = 0)$:

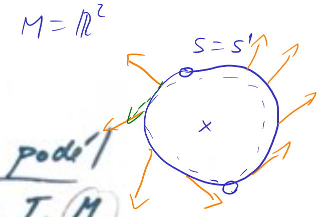
$\psi \in C_c^\infty(U)$: $\psi = 1$ na okolí p

$f(x) := \psi(x) \cdot x^{\underset{\uparrow j > k}{j}}$ (rozšíříme nulou na M) $\Rightarrow f|_S \equiv 0$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} 0 = Xf = X^j$ ✓

Q.E.D.

(viii) 9 ORIENTACE cont.



• **Def**: M... hl. varieta, $S \subset M$ vložená nadplocha. **Vektorové pole podél S** je spojité zobrazení $N: S \to TM$ s vlastností $N_p \in T_p M$ $(\forall p \in S)$.

nikoliv S

Vektor $N_p \in T_p M$ $(p \in S)$ se nazývá **příčný k S** $\Leftrightarrow$ $T_p M = \operatorname{span}\{N_p, T_p S\}$.

Vektorové pole podél S tvořené v každém bodě příčnými vektory se nazývá příčné podél S.

Tvrzení: M... or. hl. varieta, S... vložená nadplocha, N... příčné vektorové pole podél S. Potom S má jednoznačně danou orientaci s vlastností, že $(E_1, \dots, E_{n-1})$ je orientovaná báze $T_p S$ $\Leftrightarrow$ $(N_p, E_1, \dots, E_{n-1})$ je orientovaná báze $T_p M$.

Pokud forma Ω udává or. na M, potom $(N \lrcorner \Omega)|_S$ udává orientaci na S.

DK: Ω udává or. na M $\to$ $\omega := (N \lrcorner \Omega)|_S$ je $(n-1)$-forma na S

$(E_1, \dots, E_{n-1})$ lib. báze $T_p S$

N příčné $\Rightarrow$ $(N_p, E_1, \dots, E_{n-1})$ báze $T_p M$

$$\underbrace{\omega_p(E_1, \dots, E_{n-1})}_{>0} = \underbrace{\Omega_p(N_p, E_1, \dots, E_{n-1})}_{>0} \neq 0 \Rightarrow \omega \text{ všude nenulová}$$

$>0 \Leftrightarrow >0$ $\Leftarrow$ navíc $\Leftarrow$ udává or. na S

$\to$ je to právě or. z tvrzení

Q.E.D.

- pozn. (bez DK) (postačující podmínka orientovatelnosti): M... or. hl. varieta, $S \subset M$... regulární ekvipotenciální hladina f-ce $f \in C^\infty(M)$, tj. $S = \{x \in M \mid f(x) = \text{konst.}\}$.

Potom S je orientovatelná.

Př: S^n v $\mathbb{R}^{n+1}$

sféra

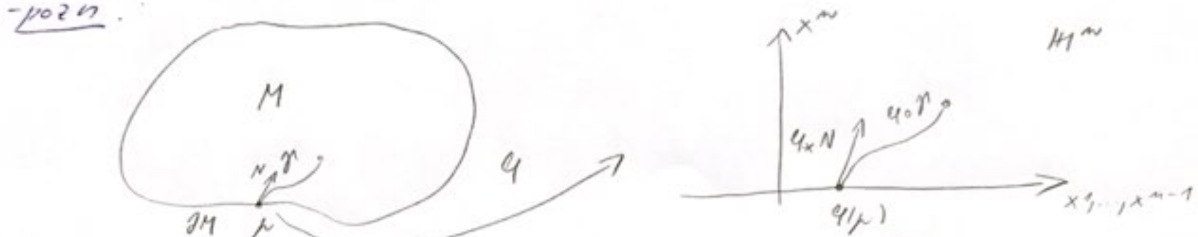
(ix)

ORIENTACE KRAJE

M ... hl. varieta s krajem $\Rightarrow$ ∂M ... vložená nadplocha v M
($x^m = \text{konst.}$)

<u>Def</u>: $p \in \partial M$. Říkáme, že vektor $N \in T_p M$ <u>směřuje dovnitř</u>, pokud $N \notin T_p \partial M$ a pro nějaké $\varepsilon > 0$ ex. hl. křivka $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$ tak, že $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = N$. Podobně N <u>směřuje ven</u>, pokud $-N$ směřuje dovnitř.

<u>pozn.</u>:



$$\varphi_* N = N^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ dx^m(N)}}{N^m} \geq 0$$

pokud $N^m = 0$, potom $N \in T_p \partial M \Rightarrow \boxed{N^m > 0}$

! $\Rightarrow$ $N \in T_p M$ směřuje dovnitř (ven) $\Leftrightarrow$ jeho m-tá komponenta je kladná (záporná)

<u>pozn.</u>: V. pole podél ∂M směřuje dovnitř/ven $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ má-li danou vlastnost v každém bodě.

(máme tedy přirozené pole $\Rightarrow$ ∂M je orientovatelná)

<u>Lemma</u>: M ... hl. varieta (nyní nevyžadujeme ani vnitřní or.) s krajem. Potom existuje hl. vektorové pole podél ∂M směřující ven.

<u>DK</u>: $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ... mapy pokrývající ∂M

$\to$ na U_α můžeme ono pole volit jako $N_\alpha := -\frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_{\partial M \cap U_\alpha}$ ✓

$\to$ na celou M rozšíříme pomocí rozkladu jednotky pro $\{U_\alpha \cap \partial M\}_\alpha$

⊗

VSUVKA (rozklad jednotky): N ... top. prostor, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jeho libovolné otevřené pokrytí, potom rozklad jednotky je mža spojitých f-cí $\{\psi_\alpha : N \to \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ s vlastnostmi:

i) $(\forall \alpha \in A)(\forall x \in N)\ (0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1)$

ii) $\operatorname{supp} \psi_\alpha \subset X_\alpha$

iii) mža $\{\operatorname{supp} \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je lokálně konečná, tj pro každý bod ex. jeho okolí obsažené jen v konečně mnoha $\operatorname{supp} \psi_\alpha$

iv) $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1 \quad (\forall x \in N)$

$\nwarrow$ iii) v každém bodě konečná suma

Platí, že pro hl. varietu existuje hl. rozklad jednotky. (Lee: Theorem 2.25).

$\xrightarrow{\text{DK pokračuje}}$ $N := \sum_\alpha \psi_\alpha N_\alpha$ ... hladké ✓

$\uparrow$ odpovídající rozklad jednotky

? vně smířující: $dy^m(N_p) = \sum_\alpha \underbrace{\psi_\alpha(p)}_{\substack{\text{VI} \\ 0}} dy^m(N_\alpha|_p) < 0$ (nějaký člen nenulový)

$dy^m\left(-\frac{\partial}{\partial y^m}\right) = -1 < 0$

$dy^m\left(-\frac{\partial}{\partial x^m}\right) = dy^m\left(-\frac{\partial y^j}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\frac{\partial y^m}{\partial x^m}$

$\uparrow$ jiné překrývající se souřadnice

$\nearrow \substack{\text{VI} \\ 0}$ y^m roste od kraje směrem dovnitř M

Q.E.D.

!V (indukovaná or.): M .. or. hl. varieta s krajem. Potom ∂M je ~~orie~~ or. a orientace určená vně směřujícím vektorovým polem podél ∂M je nezávislá na konkrétní volbě tohoto pole.

- pozn: Tato or. ∂M se nazývá indukovaná či Stokesova.

(xi)

$\underline{DK}$: $\dim M = m$, Ω ... forma zadávající na M or.

$\to$ podle lemmatu ex. hl. vně směřující pole N podél ∂M

$\to (N \lrcorner \Omega)|_{\partial M}$ ... forma zavádějící or. na ∂M

($\cancel{\Rightarrow \partial M \text{ je or.}}$) $\Rightarrow \partial M$ je or.

$\to$ zbývá ukázat, že tato or. nezávisí na konkrétní volbě N:

$(x^i)_{i=1}^m$ ... lok. souřadnice na okolí v M bodu $p \in \partial M$

BÚNO: $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ je poz. or. (jinak $x^1 \Leftrightarrow -x^1$)

$\Rightarrow \Omega = \underset{>0}{f}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$

$\Rightarrow x^m = 0$ podél $\partial M \Rightarrow \boxed{dx^m|_{\partial M} = 0}$, $(\star)$

/ $\underline{\text{podDK}}$: vložení $\iota: \partial M \to M$

$dx^m|_M \equiv \iota^* dx^m$

$\to \forall\, (X \in T_p \partial M)$ ub.: $(\iota^* dx^m) X = dx^m(\iota_* X) =$

$= (\iota_* X)^m = 0$

neboť $X \in T_p \partial M \overset{(ii)}{\Leftrightarrow}$ jako podprostor $T_p M$

$X(f) = 0$ pro $\forall f \in C^\infty(M)$: $f|_{\partial M} \equiv 0$

volme $f = x^m$ /

vlastnost antiderivace

$$(N \lrcorner \Omega)|_{\partial M} = f \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \underbrace{dx^i(N)}_{= N \lrcorner dx^i} dx^1|_{\partial M} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i}|_{\partial M} \wedge \dots \wedge \underbrace{dx^m|_{\partial M}}_{= 0 \ (\star)} =$$

$$= f (-1)^{m-1} \underbrace{dx^m(N)}_{= N^m < 0} dx^1|_{\partial M} \wedge \dots \wedge dx^{m-1}|_{\partial M}$$

$N^m < 0 \Leftarrow N$ je vně směřující

$\Rightarrow (N \lrcorner \Omega)|_{\partial M}$ je kladný násobek $(-1)^m dx^1|_{\partial M} \wedge \dots \wedge dx^{m-1}|_{\partial M}$

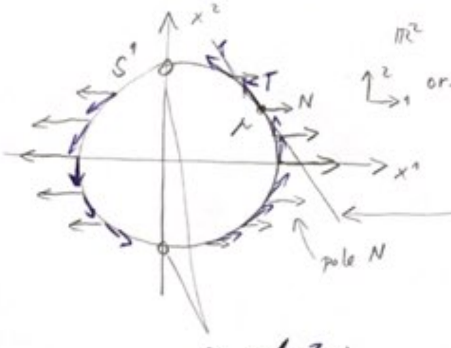
$\to$ stejný výpočet se stejným závěrem pro jiné vně směřující vektorové pole $\tilde{N} \Rightarrow (\tilde{N} \lrcorner \Omega)|_{\partial M}$ je kladný násobek $(N \lrcorner \Omega)|_{\partial M} \Rightarrow$ zadávají stejnou orientaci

Q.E.D.

(xii) (Př:) orientace S^n → pro názornost položíme $n = 1$

a) S^1 jako vložená nadplocha v $\mathbb{R}^2$ se stand. or., tj. $\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right]$

$N := x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}$ ... příčné pole pro $x^1 \neq 0$



chceme $[N, T] = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right]$

$T_p S^1 \equiv \underbrace{\imath_* T_p S^1}_{\shortparallel} \subset\subset T_p M$

$\{X \in T_p M : Xf = 0$ pro $\forall f \in C^\infty(M) : f|_{S^1} \equiv 0\}$

co zde?:

$\tilde{N} = x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ → na překryvech map dá stejnou orientaci

→ za příčné hl. pole volím $\varphi N + \tilde{\varphi} \tilde{N}$ ... konvexní kombinace

rozklad jednotky (tolik, kolik máme map)

b) $S^1 = \partial \overline{B}^2$ ... ~~koule~~ kraj uzavřené koule, tj. hledáme indukovanou orientaci

→ příčné pole sestavené v a) je vně směřující

⇒ stejná or. jako v a) ✓

(Př:) indukovaná orientace ∂H^m

"standardní or."

→ or. na H^m poděděná od $\mathbb{R}^m$, tj. $\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right]$

$N = -\frac{\partial}{\partial x^m}$ ... vně směřující

⇒ indukovaná or. ∂H^m je stejná se stand. or. $\mathbb{R}^{m-1}$

právě tehdy, pokud

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right]$$

$\Updownarrow$

m sudé, pro m liché opačná or.