1. přednáška

Definice: Lineárně nezávislá množina

Buďte V vektorový prostor, $M \subset V$ podmnožina (obecně i nekonečná).
Řekneme, že M je lineárně nezávislá, jestliže každá její konečná podmnožina je lineárně nezávislá.

Definice: Hamelova báze

Buďte V vektorový prostor, $M \subset V$ podmnožina.
Řekneme, že M je Hamelova báze prostoru V, jestliže:
i) M je lineárně nezávislá
ii) $\operatorname{span} M = V$

Věta: (*)

Každá lineárně nezávislá podmnožina je obsažena v nějaké Hamelově bázi.

Poznámka:

- Věta (*) je ekvivalentní axiomu výběru.
- Nebude-li řečeno jinak budou všechny vektorové prostory uvažovány nad stejným, ale jinak libovolným tělesem $\mathbb{F}$.

Definice: Volný vektorový prostor

Buď M množina.
Označme symbolem $Fun(M,\mathbb{F}) := \{f \mid f: M \to \mathbb{F}\}$ vektorový prostor funkcí na M s hodnotami v $\mathbb{F}$.
Pro funkci $f \in Fun(M,\mathbb{F})$ označme její nosič jako $\operatorname{supp}(f) := \{x \in M \mid f(x) \neq 0\}$.
Pak definujeme volný vektorový prostor generovaný M jako

$$\mathcal{F}(M) := \{f \in Fun(M,\mathbb{F}) \mid |\operatorname{supp}(f)| < \infty\}$$

Definice : δ_x

Při stejném značení jako v předchozí definici definujeme funkci $\delta_x \in \mathcal{F}(M)$ vztahem:

$$\forall y \in M: \delta_x(y) := \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}.$$

Věta:

Množina $\{\delta_x \mid x \in M\}$ je Hamelova báze $\mathcal{F}(M)$

Důkaz

Množina $\{\delta_x \mid x \in M\}$ je zřejmě lineárně nezávislá a pro všechna $f \in \mathcal{F}(M)$ platí:

$$f = \sum_{\text{supp}(f)} f(x)\delta_x$$

Věta:

Buďte M množina, U vektorový prostor a $F: M \to U$ zobrazení. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $\hat{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), U)$ takové, že

$$\forall x \in M: \hat{F}(\delta_x) = F(x).$$

Důkaz:

Libovolnou funkci $f \in \mathcal{F}(M)$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci Hamelovy báze $\{\delta_x \mid x \in M\}$.

$$\rightarrow \forall f \in \mathcal{F}(M): \hat{F}(f) := \sum_{x \in \text{supp}(f)} f(x) F(x)$$

A takto definované zobrazení je lineární

Poznámka: (Připomenutí)
Buďte Z vektorový prostor, $\mathfrak{Z} \subset Z$ jeho podprostor.
Relace: $\forall u, v \in Z: u \sim v \iff u - v \in \mathfrak{Z}$ je ekvivalence na Z.

Faktorizací podle této ekvivalence dostáváme vektorový prostor $Z/\mathfrak{Z}$.
Jeho prvky jsou třídy ekvivalence, což jsou vlastně afinní ~~prostory~~ podprostory $u + \mathfrak{Z} \subset Z$, $u \in Z$.

Faktorprostor $Z/\mathfrak{Z}$ je také vektorovým prostorem s operacemi
i) $\lambda(u+\mathfrak{Z}) := \lambda u + \mathfrak{Z}$
ii) $(u+\mathfrak{Z}) + (v+\mathfrak{Z}) := (u+v) + \mathfrak{Z}$

Projekce $\pi: Z \to Z/\mathfrak{Z}: u \mapsto u + \mathfrak{Z}$ je lineární zobrazení, $\pi \in \mathcal{L}(Z, Z/\mathfrak{Z})$.

Definice: Tensorový součin
Buďte V, W vektorové prostory. Označme $\mathfrak{Z} \subset \mathcal{F}(V \times W)$ podprostor generovaný všemi funkcemi tvaru:

$$\delta_{(\lambda v_1 + v_2, w)} - \lambda\delta_{(v_1, w)} - \delta_{(v_2, w)}, \text{ kde } \lambda \in \mathbb{F}, v_1, v_2 \in V, w \in W$$
$$\delta_{(v, \lambda w_1 + w_2)} - \lambda\delta_{(v, w_1)} - \delta_{(v, w_2)}, \text{ kde } \lambda \in \mathbb{F}, v \in V, w_1, w_2 \in W.$$

Tensorový součin prostorů V, W potom definujeme jako faktorprostor

$$V \otimes W := \mathcal{F}(V \times W)/\mathfrak{Z}.$$

Příslušnou projekci značíme jako $\pi: \mathcal{F}(V \times W) \to V \otimes W$.
Dále definujeme $\mathcal{T}: V \times W \to V \otimes W: (v, w) \mapsto \pi(\delta_{(v,w)})$ a píšeme:

$$\forall v \in V, \forall w \in W: v \otimes w := \mathcal{T}(v, w) = \pi(\delta_{(v,w)}).$$

Tvrzení:

Pro libovolné vektorové prostory V, W platí

i) zobrazení $\tau: V \times W \to V \otimes W : (v, w) \mapsto v \otimes w$ je bilineární

ii) $V \otimes W = \operatorname{span}\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$

Důkaz:

i) Buďte $\lambda \in \mathbb{F}, v_1, v_2 \in V, w \in W$ libovolné:

$$\pi(\underbrace{\delta_{(\lambda v_1 + v_2, w)} - \lambda \delta_{(v_1, w)} - \delta_{(v_2, w)}}_{\in \mathcal{Z}}) = \pi(\delta_{(\lambda v_1 + v_2, w)}) - \lambda \pi(\delta_{(v_1, w)}) - \pi(\delta_{(v_2, w)}) =$$

$$= (\lambda v_1 + v_2) \otimes w - \lambda v_1 \otimes w - v_2 \otimes w = 0 \in V \otimes W$$

ii) Víme, že $\mathcal{F}(V \times W) = \operatorname{span}\{\delta_{(v,w)} \mid v \in V, w \in W\}$ a zároveň projekce π je surjektivní, tj.:

$$\pi(\mathcal{F}(V \times W)) = V \otimes W = \operatorname{span}\{\pi(\delta_{(v,w)}) \mid v \in V, w \in W\} =$$

$$= \operatorname{span}\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$$

Poznámka:

Jsou-li U, V, W vektorové prostory a $\tilde{\phi} \in \mathcal{L}(V \otimes W, U)$ pak zřejmě platí, že zobrazení $\phi : V \times W \to U$ definované vztahem

$$\forall v \in V, \forall w \in W : \quad \phi(v, w) := \tilde{\phi}(v \otimes w)$$

je bilineární

Věta: Universalita tensorového součinu

Buďte V, W vektorové prostory a $\tau: V \times W \to V \otimes W$.
Potom ke každému bilineárnímu zobrazení $\phi: V \times W \to U$ do nějakého vektorového prostoru U existuje právě jedno lineární zobrazení $\tilde{\phi} \in \mathcal{L}(V \otimes W, U)$ takové, že následující diagram je komutativní.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi"'] & V \otimes W \arrow[dl, "\tilde{\phi}"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Tj.: pro všechny vektory $v \in V, w \in W$ platí: $\phi(v, w) = \tilde{\phi}(v \otimes w)$.

Důkaz:

- Existence:

Víme, že existuje právě jedno zobrazení $\hat{\phi} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(V \times W), U)$ tak, že:

$$\forall v \in V, \forall w \in W: \hat{\phi}(\delta_{(v,w)}) = \phi(v, w).$$

Je zřejmé, že $\hat{\phi}$ nabývá hodnoty 0 na generátorech Z, tj.: $\hat{\phi}|_Z = 0$.
Definujme proto zobrazení $\tilde{\phi}$ jako:

$$\forall f \in \mathcal{F}(V \times W): \tilde{\phi}(\pi(f)) := \hat{\phi}(f).$$

Takové zobrazení je jistě lineární a platí:

$$\forall v \in V, \forall w \in W: \phi(v, w) = \hat{\phi}(\delta_{(v,w)}) = \tilde{\phi}(\pi(\delta_{(v,w)})) = \tilde{\phi}(v \otimes w).$$

- Jednoznačnost:

Jednoznačnost je zřejmá, neboť $\tilde{\phi}$ je předepsáno na vektorech $v \otimes w$, které generují $V \otimes W$.

Důsledek:
Buďte V, W vektorové prostory.
Potom existuje právě jeden lineární isomorfismus $T: V \otimes W \to W \otimes V$,
takový, že:
$$\forall v \in V, \forall w \in W: T v \otimes w = w \otimes v.$$

Prostory $V \otimes W$, $W \otimes V$ jsou tedy isomorfní.

Důkaz:
Zobrazení $V \times W \to W \otimes V: (v, w) \mapsto w \otimes v$ je bilineární.
Podle věty o universalitě existuje právě jedno $T \in \mathcal{L}(V \otimes W, W \otimes V)$,
tak, že:
$$\forall v \in V, \forall w \in W: T v \otimes w = w \otimes v.$$

Zaměníme-li pořadí V a W zjistíme, že existuje právě jedno
$S \in \mathcal{L}(W \otimes V, V \otimes W): \forall v \in V, \forall w \in W: S w \otimes v = v \otimes w$.
Pak ale nutně platí:
$$ST = \mathbb{I}_{V \otimes W}, \quad TS = \mathbb{I}_{W \otimes V}.$$

$\to S = T^{-1}$ a T je isomorfismus

Definice: Algebraický duální prostor
Buď V vektorový prostor.
Vektorový prostor všech lineárních funkcionálů na V označíme:

$$V^{\#} := \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$$

a nazveme ho algebraickým duálním prostorem k V.

Důsledek:

Buďte V, W vektorové prostory, $\varphi \in V^\#$, $\psi \in W^\#$.
Pak existuje právě jeden lineární funkcionál $\tilde{\Phi} \in (V \otimes W)^\#$ tak, že:

$$\forall v \in V, \forall w \in W: \tilde{\Phi}(v \otimes w) = \varphi(v)\,\psi(w).$$

Důkaz:

Zobrazení $\Phi(V \times W) \to \mathbb{F}: (v, w) \mapsto \varphi(v)\psi(w)$ je bilineární.
Podle věty o universalitě tedy existuje právě jedno zobrazení $\tilde{\Phi} \in \mathcal{L}(V \otimes W; \mathbb{F})$ tak, že:

$$\forall v \in V, \forall w \in W: \tilde{\Phi}(v \otimes w) = \varphi(v)\,\psi(w)$$

2. přednáška

Věta:
Buďte V, W vektorové prostory, $M \subset V$, $N \subset W$ LN podmnožiny.
Pak $\{v \otimes w \mid v \in M, w \in N\} \subset V \otimes W$ je LN.

Důkaz:
Stačí ukázat: $\{v_1, \dots, v_m\} \subset M$, $\{w_1, \dots, w_n\} \subset N$ libovolné konečné podmnožiny, pak $\{v_i \otimes w_j \mid i \in \hat{m}, j \in \hat{n}\}$ je LN

- $\exists$ Hamelovy báze $\tilde{M}$ ve V, $\tilde{N}$ ve W: $M \subset \tilde{M}$, $N \subset \tilde{N}$

- $\exists\, \varphi_1, \dots, \varphi_m \in V^\#$, $\psi_1, \dots, \psi_n \in W^\#$: $\forall x \in \tilde{M}: \varphi_j(x) = \delta_{x, v_j} \wedge \forall y \in \tilde{N}: \psi_k(y) = \delta_{y, w_k}$

- $\exists\, J_{jk} \in (V \otimes W)^\#$: $\forall a \in V: \forall b \in W: J_{jk}(a \otimes b) = \varphi_j(a)\, \psi_k(b)$

  tj.: speciálně $J_{jk}(v_{j'} \otimes w_{k'}) = \delta_{jj'} \delta_{kk'}$

Nyní uvažujme libovolnou LK $\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\, v_j \otimes w_k = 0$:

$$J_{j'k'}\Big(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\, v_j \otimes w_k\Big) = \sum_{jk} \alpha_{jk} \underbrace{J_{j'k'}(v_j \otimes w_k)}_{\delta_{jj'}\delta_{kk'}} = \alpha_{j'k'} = 0$$

Poznámka:

- $V \otimes W = \operatorname{span}\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$, $x \in V \otimes W$

  Pak $x = \sum \alpha_{jk}\, v_j \otimes w_k$, $v_j \in V$, $w_k \in W$

  konečná suma

  $$\| \quad \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\alpha_i v_i}_{f_i} \otimes \underbrace{w_i}_{g_i} = \sum_{i=1}^{m} f_i \otimes g_i$$

- $\mathbb{F} \otimes V \simeq V \otimes \mathbb{F} \simeq \cancel{\mathbb{F}}V$: $V \to \mathbb{F} \otimes V : v \mapsto 1 \otimes v$: i) lineární
  ii) prosté (*)
  iii) surjektivní (#)

(*): $v \neq 0 \Rightarrow \{1\} \subset \mathbb{F}$, $\{v\} \subset V$ jsou LN $\Rightarrow \{1 \otimes v\}$ LN

(#): $x \in \mathbb{F} \otimes V$ libovolný: $x = \sum_{k=1}^{n} f_k \otimes g_k = \sum_{k=1}^{n} f_k (1 \otimes g_k) = 1 \otimes \sum_{k=1}^{n} f_k g_k$

Věta:
Buďte V, W vektorové prostory, $M \subset V$, $N \subset W$.
Nechť $V = \operatorname{span} M$, $W = \operatorname{span} N$.
Potom $V \otimes W = \operatorname{span}\{v \otimes w \mid v \in M, w \in N\}$

Důkaz:
- $V \otimes W = \operatorname{span}\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\} =$
  $= \operatorname{span}\{v \otimes w \mid v \in \operatorname{span} M, w \in \operatorname{span} N\} =$
  $\subseteq \operatorname{span}\{v \otimes w \mid v \in M, w \in N\}$ //

bilinearita $\subset \operatorname{span}\{v \otimes w \mid v \in V, w \in N\}$

Důsledek:
Je-li M Hamelova báze ve V, N Hamelova báze ve W, potom $\{v \otimes w \mid v \in M, w \in N\}$ je Hamelova báze $V \otimes W$.

Důsledek:
Je-li $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$, potom $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$

Poznámka:
Nechť $\dim V = m \in \mathbb{N}$, $\dim W = n \in \mathbb{N}$.
Potom existuje (přirozený) isomorfismus $V^{\#} \otimes W \simeq \mathcal{L}(V, W)$

Konstrukce: $T : V^{\#} \times W \to \mathcal{L}(V, W) : (\varphi, w) \mapsto T_{\varphi, w} := \varphi(\cdot) w$

Potom existuje právě jedno zobrazení $\tilde{T} \in \mathcal{L}(V^{\#} \otimes W, \mathcal{L}(V, W))$, tak, že

$\forall \varphi \in V^{\#} \; \forall w \in W : \tilde{T}\, \varphi \otimes w = T_{\varphi, w}$

$\dim V^{\#} \otimes W = \dim V^{\#} \cdot \dim W = \dim V \cdot \dim W = \dim \mathcal{L}(V, W)$
→ stačí ukázat, že $\tilde{T}$ je surjektivní ($\Rightarrow \tilde{T}$ je isomorfismus)

Buď $A \in \mathcal{L}(V,W)$ libovolné, zvolíme báze $(v_1,\dots,v_m)$, báze V
$(w_1,\dots,w_n)$, báze W

$\to$ $(v_1^\#,\dots,v_m^\#)$ báze $V^\#$, $(w_1^\#,\dots,w_n^\#)$ báze $W^\#$

$\to$ $\forall x \in V: \; Ax = \sum_{j=1}^{n} w_j^\#(Ax)w_j = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) w_j = \sum_{j=1}^{n} T_{\varphi_j, w_j} x =$

$= \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{T} \varphi_j \otimes w_j\right) x \to A = \sum_{j=1}^{n} \tilde{T} \varphi_j \otimes w_j,$

kde $\varphi_j := w_j^\# \circ A \in V^\#$

V případě, že $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$: $(V^\#)^\# \simeq V$ platí:

$$V \otimes W \simeq \mathcal{L}(V^\#, W)$$

Poznámka:

$V \otimes W = \operatorname{span}\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$

pro $1 < \dim V < \infty$, $1 < \dim W < \infty$ $\;V \otimes W \supsetneq \{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$

$\mathcal{L}(V^\#, W) \supsetneq$ lin. zobrazení hodnosti 1

Poznámka: Pozorování's funktory

V, $(v_1,\dots,v_m)$, $(v_1',\dots,v_m')$ báze

$v_k' = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j{}_k v_j$, $\; A := (\alpha^j{}_k)$ matice přechodu
$A^{-1} = \tilde{A} = (\tilde{\alpha}^j{}_k)$

$x \in V: \; x = \sum_{j=1}^{m} \xi^j v_j = \sum_{k=1}^{m} \xi'^k v_k'$ $\quad (\xi^j)$ kontravariantní tenzor 1. řádu

$\to \xi^j = \sum_{k=1}^{m} \alpha^j{}_k \xi'^k$, $\; \xi'^k = \sum_{j=1}^{m} \tilde{\alpha}^k{}_j \xi^j$

• $V\otimes V$, $(v_j\otimes v_k)_{j,k=1}^{m}$ báze

$L\in V\otimes V$: $L=\sum_{j,k=1}^{m}\gamma^{jk}v_j\otimes v_k=\sum_{j,k=1}^{m}\gamma'^{jk}v_j'\otimes v_k'$

$\to \gamma'^{k_1k_2}=\sum_{j_1,j_2=1}^{m}\tilde{\alpha}^{k_1}_{j_1}\tilde{\alpha}^{k_2}_{j_2}\gamma^{j_1j_2}$

(γ^{j_1,j_2}) kontravariantní tensor 2. řádu

• $(v_1^{\#},\dots,v_m^{\#})$ báze $V^{\#}$, přeznačíme $v_i^{\#}=:v^i$

$x\in V$: $x=\sum_{j=1}^{m}\xi^j v_j$; $\xi^j=v^j(x)=\sum_{k=1}^{m}\alpha^j_k\xi'^k=\sum_{k=1}^{m}\alpha^j_k v'^k(x)$

$\to v^j=\sum_{k=1}^{m}\alpha^j_k v'^k$

$\varphi\in V^{\#}$: $\varphi=\sum_{j=1}^{m}\eta_j v^j=\sum_{k=1}^{m}\eta'_k v'^k$

$\to \eta'_k=\sum_{j=1}^{m}\alpha^j_k\eta_j$, (η_j) kovariantní tensor 1. řádu

Tensor obecného typu: $\underbrace{V\otimes\dots\otimes V}_{m}\otimes\underbrace{V^{\#}\otimes\dots\otimes V^{\#}}_{n}$

Definice: Tensorový součin zobrazení

Buďte V_1,V_2,W_1,W_2 vektorové prostory, $A_1\in\mathcal{L}(V_1,W_1)$, $A_2\in\mathcal{L}(V_2,W_2)$ a zobrazení

$$V_1\otimes V_2\to W_1\otimes W_2:(v_1,v_2)\mapsto A_1v_1\otimes A_2v_2.$$

Z věty o universalitě existuje právě jedno zobrazení $A_1\otimes A_2\in\mathcal{L}(V_1\otimes V_2,W_1\otimes W_2)$

$\forall v_1\in V_1:\forall v_2\in V_2:(A_1\otimes A_2)v_1\otimes v_2=A_1v_1\otimes A_2v_2$

Poznámka: Vlastnosti (při stejném značení)

i) $\mathcal{L}(V_1,W_1) \otimes \mathcal{L}(V_2,W_2) \to \mathcal{L}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2) : (A_1,A_2) \mapsto A_1 \otimes A_2$ je bilineární

ii) $A_1 \in \mathcal{L}(V_1,W_1), B_1 \in \mathcal{L}(W_1,Z_1), \Rightarrow B_1 A_1 \in \mathcal{L}(V_1,Z_1)$

$A_2 \in \mathcal{L}(V_2,W_2), B_2 \in \mathcal{L}(W_2,Z_2) \Rightarrow B_2 A_2 \in \mathcal{L}(V_2,Z_2)$

$A_1 \otimes A_2 \in \mathcal{L}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2),\ B_1 \otimes B_2 \in \mathcal{L}(W_1 \otimes W_2, Z_1 \otimes Z_2)$

Pak $(B_1 \otimes B_2)(A_1 \otimes A_2) = B_1 A_1 \otimes B_2 A_2$

4

• Značení:

V, W vektorové prostory

$Mult(V,W;\mathbb{F}) =:$ vektorový prostor bilineárních zobrazení $V \times W \to \mathbb{F}$

(Příště: $V \otimes W \simeq Mult(V,W;\mathbb{F})$)

3. přednáška

Věta:
Buďte W, V vektorové prostory.
Pak existuje (přirozený) isomorfismus $T : Mult(V, W | \mathbb{F}) \to (V \otimes W)^{\#}$,
určený vztahem:

$$\forall \omega \in Mult(V, W | \mathbb{F}) : \forall v \in V : \forall w \in W : T\omega(v \otimes w) = \omega(v, w).$$

Důkaz:
Z věty o univerzalitě: Buď $\omega \in Mult(V, W | \mathbb{F})$:
$\omega : V \times W \to \mathbb{F} : (v, w) \mapsto \omega(v, w)$

$\to \exists! \; T\omega \in \mathcal{L}(V \otimes W, \mathbb{F}) : T\omega(v \otimes w) = \omega(v, w)$

Navíc $\omega \mapsto T\omega$ je lineární

- Inverzní zobrazení: $S : (V \otimes W)^{\#} \to Mult(V, W | \mathbb{F})$:

$$\forall \varphi \in (V \otimes W)^{\#} : \forall v \in V : \forall w \in W : S\varphi(v, w) := \varphi(v \otimes w)$$

ST:
$\forall \omega \in Mult(V, W | \mathbb{F}) : \forall v \in V : \forall w \in W : ST\omega(v, w) = T\omega(v \otimes w) = \omega(v, w)$
$\to ST\omega = \omega \to ST = \mathbb{I}$

TS:
$\forall \varphi \in (V \otimes W)^{\#} : \forall v \in V : \forall w \in W : TS\varphi(v \otimes w) = S\varphi(v, w) = \varphi(v \otimes w)$
$\to TS\varphi = \varphi \to TS = \mathbb{I}$

Poznámka:

Speciální případ: $\dim V < \infty, \dim W < \infty \Rightarrow \dim V \otimes W < \infty$

$$\rightarrow V \otimes W \simeq ((V \otimes W)^{\#})^{\#} \simeq Mult(V, W | \mathbb{F})^{\#}$$

Věta:

Buďte $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V), (W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ vektorové prostory nad $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ se skalárním součinem.

Potom na $V \otimes W$ existuje skalární součin jednoznačně určený vztahem ⊛

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall w_1, w_2 \in W : \langle v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle_V \langle w_1, w_2 \rangle_W \quad ⊛$$

Důkaz:

i) Jednoznačnost:

Nechť existuje skalární součin splňující ⊛:

- $\operatorname{span}\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\} = V \otimes W$ ✓

ii) Existence:

- $V \otimes W = \mathcal{F}(V \times W) / \mathcal{Z}$
- definujeme hermitovskou formu s na $\mathcal{F}(V \times W)$:

$$\forall v_1, v_2 \in V : \forall w_1, w_2 \in W : s(\delta_{(v_1, w_1)}, \delta_{(v_2, w_2)}) := \langle v_1, v_2 \rangle_V \langle w_1, w_2 \rangle$$

Potom $\forall f \in \mathcal{Z} : \forall g \in \mathcal{F}(V \times W) : s(f, g) = s(g, f) = 0$

Nyní definujeme $\tilde{s}$ na $\mathcal{F}(V \times W) / \mathcal{Z} = V \otimes W$:

$$\forall g, h \in \mathcal{F}(V \times W) : \tilde{s}(\pi(g), \pi(h)) := s(g, h)$$

Takováto definice je korektní!

Vlastnosti:

i) $\tilde{s}$ je lineární ve 2. argumentu

ii) $\tilde{s}(a,b) = \overline{\tilde{s}(a,b)}$

iii) $\tilde{s}$ splňuje ⊛:

$\tilde{s}(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2) = \tilde{s}(\pi(\delta_{(v_1,w_1)}), \pi(\delta_{(v_2,w_2)})) = s(\delta_{(v_1,w_1)}, \delta_{(v_2,w_2)}) = \langle v_1, v_2\rangle_V \langle w_1, w_2\rangle_W$

iv) $\tilde{s}$ je pozitivně definitní:

pro $a \in V \otimes W$ platí: $a = \sum_{j=1}^{n} f_j \otimes g_j$, $f_j \in V$, $g_j \in W$

• zvolím ON bázi $\{v_1, \dots, v_p\}$ podprostoru $\mathrm{span}\{f_1, \dots, f_n\} \subset V$ $(p \leq n)$

$\{w_1, \dots, w_q\}$ $\mathrm{span}\{g_1, \dots, g_n\} \subset W$ $(q \leq n)$

$\rightarrow a = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_{k\ell} v_k \otimes w_\ell$, $\alpha_{k\ell} \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$:

$\tilde{s}(v_k \otimes w_\ell, v_{k'} \otimes w_{\ell'}) = \langle v_k, v_{k'}\rangle_V \langle w_\ell, w_{\ell'}\rangle = \delta_{kk'} \delta_{\ell\ell'}$

$\tilde{s}(a,a) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} |\alpha_{k\ell}|^2 \geq 0$

$\tilde{s}(a,a) = 0 \Rightarrow \alpha_{k\ell} = 0$ pro $k \in \hat{p}, \ell \in \hat{q} \Rightarrow a = 0$

Nadále píšeme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ místo $\tilde{s}(\cdot, \cdot)$.

Poznámka:

i) $\forall v \in V, \forall w \in W: \|v \otimes w\| = \|v\| \|w\| \Leftarrow$ ⊛

ii) $M \subset V$, $N \subset W$ ON podmnožiny

$\Rightarrow \{v \otimes w \mid v \in M, w \in N\} \subset V \otimes W$ je ON

Definice: Zúplnění tenzorového součinu Hilbertových prostorů

Buďte $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilbertovy prostory.
Označíme $\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{K}$ zúplnění prostoru $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$

Věta:
Buďte $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilbertovy prostory, $M \subset \mathcal{H}, N \subset \mathcal{K}$.
Pokud M, N jsou totální, pak $\underbrace{\{x \otimes y \mid x \in M, y \in N\}}_{Q} \subset \mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{K}$ je totální.

Důkaz:

- $\overline{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}} = \mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{K}$
- $\rightarrow$ stačí ukázat, že span Q je hustý v $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$

Buď $f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ libovolný pevný:

$$f = \sum_{j=1}^{\hat{m}} x_j \otimes y_j \ , \ x_j \in \mathcal{H}, y_j \in \mathcal{K} \qquad \|x_j'\| \leq \|x_j\| + \varepsilon \leq \|x_j\| + 1$$

Pro $\varepsilon > 0$ libovolné zvolíme $x_j' \in \operatorname{span} M : \|x_j - x_j'\| < \varepsilon, \ \forall j \in \hat{m}$
$(\varepsilon \leq 1)$ $\qquad y_j' \in \operatorname{span} N : \|y_j - y_j'\| < \varepsilon, \ \forall j \in \hat{m}$

$$\|f - \sum_{j=1}^{\hat{m}} x_j' \otimes y_j'\| = \|\sum_{j=1}^{\hat{m}} x_j \otimes y_j - \sum_{j=1}^{\hat{m}} x_j' \otimes y_j'\| = \|\sum_{j=1}^{\hat{m}} (x_j - x_j') \otimes y_j - \sum_{j=1}^{\hat{m}} x_j' \otimes (y_j - y_j')\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\hat{m}} (\|x_j - x_j'\| \|y_j\| + \|x_j'\| \|y_j - y_j'\|) \leq \left(\sum_{j=1}^{\hat{m}} (\|y_j\| + \|x_j\| + 1)\right) \varepsilon$$

Důsledek:
Nechť $U \subset \mathcal{H}, V \subset \mathcal{K}$ jsou ON báze, pak $\{x \otimes y \mid x \in U, y \in V\}$ je ON báze $\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{K}$.

Poznámka:
i) $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ separabilní $\Rightarrow \mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{K}$ separabilní
ii) $A \in \mathcal{J}_2(\mathcal{H}), B \in \mathcal{J}_2(\mathcal{K}) \Rightarrow A \otimes B \in \mathcal{J}_2(\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{K}) \wedge \|A \otimes B\|_2 = \|A\| \, \|B\|$

Příklad:

Buďte $(M,\mu),(N,\nu)$ prostory s mírou a nechť $L^2(M,d\mu), L^2(N,d\nu)$ jsou separabilní.
Potom existuje (přirozený) isometrický isomorfismus

$$L^2(M,d\mu)\hat{\otimes}L^2(N,d\nu) \to L^2(M\times N, d\mu\, d\nu)$$

jednoznačně určený vztahem

$$L^2(M,d\mu)\otimes L^2(N,d\nu) \ni \varphi\otimes\psi \mapsto \eta \in L^2(M\times N, d\mu\, d\nu)$$

$$\uparrow \eta(x,y) := \varphi(x)\psi(y)$$

Skutečně:

$L^2(M,d\mu) \times L^2(N,d\nu) \ni (\varphi,\psi) \mapsto \eta \in L^2(M\times N, d\mu\, d\nu)$ je bilineární

Universalita => zobrazení existuje

Izometrie: $\|\eta\| = \|\varphi\|\,\|\psi\|$ <= výpočtem

$\Downarrow$ proto zobrazení a jednoznačně se prodlužuje na $L^2(M,d\mu)\hat{\otimes}L^2(N,d\nu)$

- Obor hodnot isometrie je úplný a tedy uzavřený prostor
- → Stačí ukázat, že span$\{\varphi(x)\psi(y) \mid \varphi\in L^2(M,d\mu), \psi\in L^2(N,d\mu)\}$ je hustý v $L^2(M\times N, d\mu d\nu)$.

Pro to stačí ukázat, že $\xi(x,y)\in L^2(M\times N, d\mu d\nu)$ libovolné splňující

$$\int_{M\times N} \overline{\varphi(x)\psi(y)}\,\xi(x,y)\, d\mu\, d\nu = 0, \ \forall\varphi\in L^2(M,d\mu), \forall\psi\in L^2(N,d\nu) \Rightarrow \xi(x,y)=0$$

4. přednáška

Z minule: $L^2(M, d\mu) \hat{\otimes} L^2(N, d\nu) \simeq L^2(M\times N, d\mu d\nu)$
stačí ukázat, že span $\{\varphi(x)\psi(y) \mid \varphi\in L^2(M,d\mu), \psi\in L^2(N,d\nu)\} =: K$
je hustý v $L^2(M\times N, d\mu d\nu) \iff K^\perp = \{0\}$

Nechť $\xi(x,y) \in L^2(M\times N, d\mu d\nu)$ libovolné, splňuje

$\forall \varphi\in L^2(M,d\mu); \forall\psi\in L^2(N,d\nu): (\xi(x,y), \varphi(x)\psi(y)) = 0 = (*)$

$$(*) = \int_{M\times N} \overline{\varphi(x)\psi(y)}\, \xi(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) =$$

$$= \int_M \overline{\varphi}(x) \underbrace{\left(\int_N \overline{\psi(y)}\, \xi(x,y)\, d\nu(y)\right)}_{f(x)} d\mu(x)$$

Fubini: $\xi\in L^2(M\times N, d\mu d\nu) \Rightarrow$ s.v. $x\in M$: $\xi(x,\cdot)\in L^2(N,d\nu)$

Pozmámka:
$x \mapsto \int_N |\xi(x,y)|^2 d\nu(y) \in L^1(N,d\nu)$

$$|f(x)|^2 \le \left(\int_N |\psi(y)\xi(x,y)| d\nu\, d\mu\right)^2 \le \int_N |\psi(y)|^2 d\nu(y) \int_N |\xi(x,y)|^2 d\nu(y) < \infty$$

$\to \int_M |f(x)|^2 d\mu(x) \le \int_N |\psi(y)|^2 d\nu(y) \int_{M\times N} |\xi(x,y)|^2 d\nu(y)\, d\mu(x) < \infty$

$\to f\in L^2(M,d\mu)$

$\to f(x) = 0$ s.v. $x\in M \to \int_N \overline{\psi(y)}\, \xi(x,y)\, d\nu(y) = 0$ $\forall\psi\in L^2(N,d\nu)$

$\to$ s.v. $x\in M$, s.v. $y\in N$: $\xi(x,y) = 0 \underset{\text{cvičení}}{\Rightarrow}$ s.v. $(x,y)\in M\times N$: $\xi(x,y) = 0$

Věta:

Buďte $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ hilbertovy prostory $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$

Potom $A \otimes B \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{K}) \wedge \|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$

Důkaz: (cvičení)

Kompaktní operátory

Poznámka: Úmluva značení

i) $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Banachovy prostory nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

ii) $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilbertovy prostory nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

iii) $\mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \mid A \text{ je kompaktní}\}$

Definice: Kompaktní operátor

Řekneme, že $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ je kompaktní operátor, jestliže zobrazuje omezené množiny na prekompaktní.

Poznámka:

Buď V $\overbrace{T_1\text{- topologický vektorový prostor}}^{\text{regulární}}$, ~~potom~~ V je $T_3 \Rightarrow V$ je T_2

i) $M, N \subset V$ (pre)kompaktní $\Rightarrow M+N$ (pre)kompaktní

ii) $M, N \subset V$ kompaktní $\Rightarrow M+N \subset V \times V$ kompaktní

iii) M, N prekompaktní $\Leftrightarrow \overline{M}, \overline{N}$ kompaktní $\Rightarrow \overline{M}+\overline{N}$ kompaktní $\Rightarrow \overline{M}+\overline{N}$ uzavřená

iv) $M+N \subset \overline{M}+\overline{N} \Rightarrow \overline{M+N} \subset \overline{M}+\overline{N}$, protože $\overline{M}+\overline{N}$ kompaktní, pak $M+N$ prekompaktní

v) $M \subset V$ (pre)kompaktní $\Rightarrow \lambda M$ (pre)kompaktní

Věta:

Množina $\mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ je podprostor $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Poznámka:

i) $x_n \xrightarrow{w} x$ v $\mathcal{X} \Rightarrow \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omezená

ii) $(x_n) \subset \mathcal{X} \Rightarrow (x_n)$ má nejvýše jednu slabou limitu

} Cvičení

Lemma:

Buďte $(x_n) \subset \mathcal{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Potom $x_n \xrightarrow{w} x$ v $\mathcal{X} \Rightarrow Ax_n \xrightarrow{w} Ax$ v $\mathcal{Y}$.

Důkaz:

Buď $\psi \in \mathcal{Y}^*$ libovolné, pak $\psi \circ A =: \varphi \in \mathcal{X}^*$.

$\rightarrow \forall \psi \in \mathcal{Y}^*: \lim_{n\to\infty} \psi(Ax_n) = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{\psi\circ A}_{\in \mathcal{X}^*})(x_n) = (\psi\circ A)(x) = \psi(Ax)$

Věta:

Buď $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, pak A je úplně (silně) spojité lineární zobrazení.

Důkaz:

A je úplně spojité $:\Leftrightarrow$ A zobrazuje slabě konvergentní posloupnost na silně konvergentní posloupnost.

Buď $(x_n) \subset \mathcal{X}$: $x_n \xrightarrow{w} x$ v $\mathcal{X}$ libovolná:

I. Existuje vybraná posloupnost (x_n'): $Ax_n' \to Ax$ v $\mathcal{Y}$ (silně)

Z předpokladu plyne, že $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ je omezená $\Rightarrow$ $\{Ax_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ je prekompaktní

$\rightarrow$ $\{Ax_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ je kompaktní $\xrightarrow{\text{sekvenciální kompaktnost}}$ $\exists (x_n')\subset(x_n): Ax_n' \to y \in \mathcal{Y} \Rightarrow Ax_n' \xrightarrow{w} y \in \mathcal{Y}$

Současně $Ax_n \xrightarrow{w} Ax \Rightarrow Ax_n' \xrightarrow{w} Ax$ $\rightarrow$ $y = Ax$

II. $Ax_n \to Ax$ v $\mathcal{Y}$ (sporem)

Nechť $\exists \varepsilon>0: \exists_\infty n\in\mathbb{N}: \|Ax_n - Ax\| \geq \varepsilon$:

$\rightarrow$ $\exists (x_n')\subset(x_n): \forall n\in\mathbb{N}: \|Ax_n' - Ax\| \geq \varepsilon$ (*)

určitě ale $Ax_n' \xrightarrow{w} Ax \overset{I}{\Rightarrow} \exists (x_n'')\subset(x_n'): Ax_n'' \to Ax$ v $\mathcal{Y}$, spor s (*).

Věta:

Buď $(x_n) \subset \mathcal{H}$ omezená. ($\mathcal{H}$ nemusí být separabilní)

Potom existuje $(x_n') \subset (x_n)$ vybraná posloupnost: $x_n' \overset{w}{\rightharpoonup} x$ v $\mathcal{H}$.

Důkaz:

Z předpokladu $\exists M > 0: \forall n \in \mathbb{N}: \|x_n\| \leq M$.

I. $\mathcal{H}$ je separabilní

$\to$ $\exists$ spočetná ortonormální báze $\{u_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (stačí totální)

Tvrzení:

$\exists (y_n) \subset (x_n)$ vybraná: $\forall k \in \mathbb{N}: \exists \lim_{n \to \infty} (u_k, y_n) \in \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$

Diagonální výběr: $(x_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

- $(x_n^{(0)}) := (x_n)$

požadujeme: i) $\forall k \in \mathbb{N}: (x_n^{(k)})_{n=1}^{\infty} \subset (x_n^{(k-1)})_{n=1}^{\infty}$

ii) $\forall k \in \mathbb{N}: \exists \lim_{n \to \infty} (u_j, x_n^{(k)}) \in \mathbb{C}$ pro $1 \leq j \leq k$.

- $k-1 \rightsquigarrow k$: nalezeno $(x_n^{(j)})$, $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ splňující i), ii)

$\left((u_k, x_n^{(k-1)})\right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená: $|(u_k, x_n^{(k-1)})| \leq \|u_k\| \|x_n^{(k-1)}\| \leq M$

$\to$ $\exists (x_n^{(k)}) \subset (x_n^{(k-1)})$: $\exists \lim_{n \to \infty} (u_k, x_n^{(k)}) \in \mathbb{C}$

- $y_n := x_n^{(n)}$ $\to$ $(y_n) \subset (x_n)$ $\wedge$ $\forall k \in \mathbb{N}: \exists \lim_{n \to \infty} (u_k, y_n) \in \mathbb{C}$

Tvrzení:

$\forall z \in \mathcal{H}: \exists \lim_{n \to \infty} (z, y_n) \in \mathbb{C}$

určitě platí: $\forall u \in \mathrm{span}\{u_k \,/\, k \in \mathbb{N}\} : \exists \lim_{n\to+\infty} (u, y_n) \in \mathbb{C}$

Buď nyní $z \in \mathcal{H}$ libovolné a zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně pevně a zvolíme $u \in \mathrm{span}\{u_k \,/\, k \in \mathbb{N}\}$: $\|z - u\| < \frac{\varepsilon}{3M}$

• $((u, y_n))_{n \geq 1}$ je cauchyovská $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n > n_0 : |(u, y_n) - (u, y_m)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Potom $\forall m, n > n_0$ platí:

$$|(z, y_m) - (z, y_n)| \leq |(u, y_n) - (u, y_m)| + |(z, y_n) - (u, y_n)| + |(z, y_m) - (u, y_m)| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{\|z - u\|}_{< \frac{\varepsilon}{3M}} \underbrace{\|y_n\|}_{< M} + \underbrace{\|z - u\|}_{< \frac{\varepsilon}{3M}} \underbrace{\|y_m\|}_{M} < \varepsilon$$

→ $((z, y_n))_{n \geq 1}$ je cauchyovská → $\exists \lim_{n\to+\infty} (z, y_n)$

Tvrzení:
$\exists x \in \mathcal{H} : y_n \xrightarrow{w} x$

$\forall z \in \mathcal{H}$ definujeme $\varphi(z) := \lim_{n\to+\infty} (y_n, z) \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } \varphi \text{ je lineární funkcionál} \\ \text{ii) } \varphi \text{ je omezený funkcionál} \end{array}\right\} \varphi \in \mathcal{H}^{\#}$$

Z Rieszovy věty o reprezentaci $\exists x \in \mathcal{H} : \forall z \in \mathcal{H} : \langle x, z \rangle$

→ $\forall z \in \mathcal{H} : \lim_{n\to+\infty} (z, y_n) = (z, x) \Leftrightarrow y_n \xrightarrow{w} x$

5. přednáška

II. $\mathcal{H}$ je obecně neseparabilní:

Položme $\mathcal{H}_1 := \overline{\text{span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$,

potom $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^{\perp}$.

Zřejmě $\mathcal{H}_1$ je separabilní Hilbertův prostor a $(x_n) \subset \mathcal{H}_1$.

Podle bodu I. pak existuje vybraná podposloupnost $(y_n) \subset (x_n)$ taková, že:

$\forall z_1 \in \mathcal{H}_1: \lim_{n \to \infty} (z_1, y_n) = (z_1, x_0)$, $x_0 \in \mathcal{H}_1$.

Pro libovolné $z \in \mathcal{H}$ můžeme psát $z = z_1 + z_2$, $z_1 \in \mathcal{H}_1$, $z_2 \in \mathcal{H}_1^{\perp}$ a platí:

$$\forall z \in \mathcal{H}: \lim_{n \to \infty} (z, y_n) = \lim_{n \to \infty} \left((z_1, y_n) + \underbrace{(z_2, y_n)}_{0} \right) = (z_1, x_0) = (z, x_0).$$

Věta:
Buďte $\mathcal{K}, \mathcal{H}$ Hilbertovy prostory (ne nutně separabilní), $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.
Potom A je kompaktní právě tehdy, když A je úplně spojité lineární zobrazení.

Důkaz:
$\Rightarrow$: Platí pro obecné Banachovy prostory ✓

$\Leftarrow$: Nechť A je úplně spojité lineární zobrazení; $S \subset \mathcal{H}$ omezená množina:
Máme ukázat, že $A(S)$ je relativně kompaktní:

Protože jsme na metrickém prostoru, je kompaktnost ekvivalentní sekvenciální kompaktnosti:

Buď $(y_n) \subset A(S)$ libovolná posloupnost:

K této posloupnosti nalezneme posloupnost $(x_n) \subset S$ t.ž, že platí

$Ax_n = y_n$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Podle předchozí věty lze vybrat posloupnost $(x_n') \subset (x_n)$ tak, že

$x_n' \xrightarrow{w} x_0 \in \mathcal{H}$.

Z úplné spojitosti pak plyne, že $y_n' = Ax_n' \to Ax_0$ (silně).

Věta:

Buďte $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Banachovy prostory.
Potom podprostor $\mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ je uzavřený.

Důkaz:

Máme ukázat, že jestliže libovolná posloupnost $(A_n) \subset \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ konverguje v $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, tj.: $A_n \to A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ($\|A_n - A\| \to 0$), potom $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Uvažujme libovolnou omezenou posloupnost $(x_n) \subset \mathcal{X}$, tj.: $\forall n \in \mathbb{N}: \|x_n\| \leq M$.

Ukážeme, že existuje vybraná posloupnost $(y_n) \subset (x_n)$: (Ay_n) je cauchyovská.

i) Existuje vybraná posloupnost $(y_n) \subset (x_n)$ tak, že:

$\forall k \in \mathbb{N}: \lim_{n \to \infty} A_k y_n$ existuje v $\mathcal{Y}$ (diagonálním výběrem)

ii) Buď $\varepsilon > 0$ libovolné:
Zvolíme $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{3M}$

· Posloupnost $(A_k y_m)$ je konvergentní a tedy cauchyovská, a proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall m, n > n_0$ platí:

$$\|A_k y_m - A_k y_n\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pro všechna $m, n > n_0$ potom platí:

$$\|A y_m - A y_n\| \leq \|A y_m - A_k y_m\| + \|A y_n - A_k y_n\| + \|A_k y_m - A_k y_n\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Poznámka: Opakování funkcionální analýzy 2

Lemma:
Buďte X normovaný vektorový prostor, $V \subset X$ konečně rozměrný podprostor a $x \in X$.
Potom existuje $v \in V$ takové, že $\operatorname{dist}(x, V) = \|x - v\|$.

Důsledek: (XX)
Buďte X normovaný vektorový prostor, $V \subset X$ konečně rozměrný podprostor. ~~Když~~
Jestliže $V \neq X$, potom existuje $x \in X$, tak že:

$$\|x\| = 1 \wedge \operatorname{dist}(x, V) = 1$$

Důsledek:
V každém normovaném prostoru X nekonečné dimense existuje spočetná množina M, která splňuje
i) $\forall x \in M: \|x\| = 1$
ii) $\forall x, y \in M, x \neq y \Rightarrow \|x - y\| \geq 1$

Tvrzení:
Jednotková koule $B(0,1)$ v normovaném prostoru X je kompaktní právě tehdy, když $\dim X < \infty$.

Věta:
Buďte $A \in \mathscr{K}(\mathscr{X})$, $B \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$.
Potom $AB, BA \in \mathscr{K}(\mathscr{X})$.
($\mathscr{K}(\mathscr{X})$ je oboustranným ideálem $\mathscr{B}(\mathscr{X})$).

Tvrzení:
Jednotkový operátor $\mathbb{I} \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ je kompaktní právě tehdy, když $\dim \mathscr{X} < \infty$.

Věta:
Buď $A \in \mathscr{K}(\mathscr{X})$,
Jestliže $\dim \mathscr{X} = \infty$, potom $0 \in \sigma(A)$.

Definice: Algebraicky sdružený operátor
Buďte $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ Banachovy prostory, $A \in \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.
Potom algebraicky sdruženým operátorem operátoru A rozumíme $A' \in \mathscr{B}(\mathscr{Y}^{\#}, \mathscr{X}^{\#})$ definovaný jako:

$$\forall \psi \in \mathscr{Y}^{\#}: A'\psi := \psi \circ A$$

Věta: Vlastnosti algebraicky sdruženého operátoru

Buďte $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ Banachovy prostory, potom platí:

i) Zobrazení $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to \mathcal{B}(\mathcal{Y}^{\#},\mathcal{X}^{\#}) : A \mapsto A'$ je lineární

ii) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) : \|A\| = \|A'\|$

iii) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) : \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{Z}) : (BA)' = A'B'$

Důkaz: Cvičení

Věta:

Buďte $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Banachovy prostory.
Je-li $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, potom $A' \in \mathcal{K}(\mathcal{Y}^{\#},\mathcal{X}^{\#})$.

Důkaz:

Označme: $B_1 := \{x \in \mathcal{X} \mid \|x\| < 1\}$
$B_1' := \{\psi \in \mathcal{Y}^{\#} \mid \|\psi\| < 1\}$.

Chceme ukázat, že množina $A'(B_1') \subset \mathcal{X}^{\#}$ je prekompaktní, což je totéž jako totálně omezená.

Položme $\Omega := \overline{A(B_1)} \subset \mathcal{Y}$, $S := \{\psi|_{\Omega} \mid \psi \in B_1'\} \subset C(\Omega)$

Podle předpokladu je Ω kompaktní metrický prostor a S je podmnožina Banachova prostoru spojitých funkcí na Ω.

I) S je totálně omezená:

i) S je omezená:

Každá funkce $f \in S$ je jednoznačně určená jako $f = \psi|_{\Omega}$

$$\forall f \in S : \|f\|_{C(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |f(x)| = \sup_{x \in \overline{A(B_1)}} |\psi(x)| = \sup_{x \in A(B_1)} |\psi(x)| = \sup_{y \in B_1} |\psi(Ay)| \leq$$

$$\leq \sup_{y \in B_1} \|\psi\| \|A\| \|y\| \leq \|A\|$$

6. přednáška

ii) S je tvořena stejně spojitými funkcemi:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\psi(x_1) - \psi(x_2)| = |\psi(x_1 - x_2)| \leq \|\psi\| \, \|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Přičemž odhad je nezávislý na volbě f, odtud plyne ii).

- Pomocí limitního přechodu je snadno vidět, že i uzávěr $\overline{S}$ je omezená a tvořena stejně spojitými funkcemi.

→ Arzelà-Ascoli $\Rightarrow$ $\overline{S}$ je kompaktní

I. S a $A'(B_1')$ jsou isometrické

(*) $= \|f_1 - f_2\|_{C(\Omega)} = \|A'\psi_1 - A'\psi_2\|$, $f_j = \psi_j|_\Omega$, $\psi_j \in B_1'$ pro $j = 1,2$:

$$\|f_1 - f_2\|_{C(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |f_1(x) - f_2(x)| = \sup_{x \in A(B_1)} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| =$$

$$= \sup_{y \in B_1} |\psi_1(Ay) - \psi_2(Ay)| = \sup_{y \in B_1} |A'(\psi_1 - \psi_2)(y)| =$$

$$= \|A'(\psi_1 - \psi_2)\| = \|A'\psi_1 - A'\psi_2\|$$

Nyní definujme zobrazení $\Phi : S \to A'(B_1') : f \mapsto A'\psi$, kde $f = \psi|_\Omega$, $\psi \in B_1'$.

Ze vztahu (*) plyne, že Φ je isometrie a tudíž prostá.
Zřejmě je i surjektivní, neboť platí:

$$\Phi(S) = \{A'\psi \mid \psi \in B_1'\} = A'(B_1').$$

Lemma:

Buďte X normovaný prostor, $(x_n) \subset X$ posloupnost splňující předpoklad, že $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je lineárně nezávislá.

Položme $V_n := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Potom v X existuje posloupnost $(y_n)_n \subset X$ tak, že

i) $\forall n \in \mathbb{N} : \|y_n\| = 1$

ii) $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\}$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \operatorname{dist}(y_n, V_{n-1}) = 1$

Důkaz:

Posloupnost (y_n) nalezneme rekurzivně:

i) $y_1 := \frac{1}{\|x_1\|} x_1$

ii) Aplikujeme důsledek (**) : $X := V_n$, $V := V_{n-1}$, pro $n \geq 2$.

Věta:

Buď $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$, kde $\mathcal{X}$ je Banachův prostor, potom platí:

i) pro všechny $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ je $\dim \ker(A - \lambda \mathbb{I}) < \infty$

ii) pro všechna $\delta > 0$ je množina $\{\lambda \in \sigma_p(A) \mid |\lambda| \geq \delta\}$ je konečná

Důkaz:

i) Označme $B_1' := B_1 \cap \ker(A - \lambda \mathbb{I})$,

tj.: B_1' je jednotková koule ve vlastním podprostoru operátoru A příslušnému vlastnímu číslu λ.

Ukážeme, že B_1' je relativně kompaktní množina, což je ekvivalentní sekvenciální kompaktnosti.

- A je kompaktní $\Rightarrow A(B_1)$ je překompaktní

→ Z libovolné posloupnosti (Ax_n), kde $(x_n) \subset B_1$, lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Existuje tedy vybraná posloupnost $(x_n') \subset (x_n)$ tak, že $Ax_n' \to y \in X$.

Protože $Ax_n' = \lambda x_n'$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, dostáváme $x_n' \to \frac{1}{\lambda} y \in X$.
→ B_1' je překompaktní $\Rightarrow Ker(A - \lambda I)$ má konečnou dimensi.

ii) Sporem)
Pro spor předpokládejme, že existují $\delta > 0$ a spočetně mnoho navzájem různých vlastních hodnot λ_n, $n \in \mathbb{N}$, operátoru A takových, že $|\lambda_n| \geq \delta$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Ke každému vlastnímu číslu λ_n, zvolíme vlastní vektor $x_n \neq 0$, $Ax_n = \lambda x_n$.
Potom množina $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ je lineárně nezávislá.

Podle lemmatu existuje posloupnost (y_n) s vlastnostmi:
i) $\forall n \in \mathbb{N}: \|y_n\| = 1$
ii) $\forall n \in \mathbb{N}: span\{x_1, \dots, x_n\} = span\{y_1, \dots, y_n\}$
iii) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: dist(y_n, span\{y_1, \dots, y_{n-1}\}) = 1$

- Podle předpokladu máme: $\forall n \in \mathbb{N}: \|\frac{1}{\lambda_n} y_n\| \leq \frac{1}{\delta}$ a tedy množina

$M := \{\frac{1}{\lambda_n} y_n / n \in \mathbb{N}\}$ je omezená $\Rightarrow A(M)$ je překompaktní

Na druhé straně platí: $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n: \|\frac{1}{\lambda_n} Ay_n - \frac{1}{\lambda_m} Ay_m\| \geq 1$, (*)
což je spor s překompaktností.

Zdůvodnění ⊛:

$y_n = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}:$

$\frac{1}{\lambda_n} A y_n - y_n = \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} - 1\right) x_1 + \dots + \alpha_{n-1} \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - 1\right) x_{n-1} + 0 \cdot x_n \in \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$

$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n} A y_n = y_n + z_n, \; z_n \in \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_{n-1}\} \; (n = 1 \Rightarrow z_1 = 0)$

Pro $n, m \in \mathbb{N}, n > m$ pak platí:

$\| \frac{1}{\lambda_n} A y_n - \frac{1}{\lambda_m} A y_m \| = \| y_n + z_n - y_m - z_m \| \geq \operatorname{dist}(y_n, \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_{n-1}\}) = 1$

Poznámka:

i) Všechna nenulová čísla operátoru A mají konečnou geometrickou násobnost.

ii) Jediným hromadným bodem bodového spektra $\sigma_p(A)$ může (ale nemusí) být 0.

iii) Množina $\sigma_p(A) \setminus \{0\}$ (a tedy i $\sigma_p(A)$) je nejvýše spočetná.

Tvrzení:

Buďte X, Y Banachovy prostory.

Je-li $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ konečně rozměrné lineární zobrazení, potom $A \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Tvrzení:

Buďte X, Y Banachovy prostory.

Je-li $A \in \mathcal{K}(X, Y)$, potom $\operatorname{Ran} A$ je separabilní.

Důkaz:

Zapišme $\operatorname{Ran} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B(0,n))$.

Přitom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $\overline{A(B(0,n))} \subset \mathcal{Y}$ kompaktní, a tudíž totálně omezená a separabilní.

Spočetné sjednocení je pak také separabilní.

Věta:

V Hilbertově prostoru (ne nutně separabilním) konečněrozměrné operátory tvoří hustý podprostor v prostoru kompaktních operátorů (vzhledem k operátorové normě)

Důkaz:

Buď $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ libovolný:
BÚNO nechť $\dim \operatorname{Ran} A = +\infty$.

Z předchozího tvrzení víme, že $\operatorname{Ran} A$ je separabilní podprostor.
Zvolme ortonormální bázi $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ v $\operatorname{Ran} A$ a označme jako P_n ortogonální projekci v $\mathcal{H}$ na $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$, pro $n \in \mathbb{N}$.

Protože $P_n A$ je konečněrozměrný operátor, stačí ukázat, že $\lim_{n \to +\infty} \|A - P_n A\| = 0$.

Určitě platí: $\forall z \in \overline{\operatorname{Ran} A} : \|(\mathbb{I} - P_n)z\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |(u_k, z)|^2 \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

• Platí:

$P_n P_{n+1} = P_{n+1} P_n = P_n \rightarrow (\mathbb{I} - P_{n+1})(\mathbb{I} - P_n) = \mathbb{I} - P_{n+1}$

7. přednáška

$$\|A-P_{n+1}A\| = \|(\mathbb{I}-P_{n+1})A\| = \|(\mathbb{I}-P_{n+1})(\mathbb{I}-P_n)A\| \le \|(\mathbb{I}-P_{n+1})\|\|(\mathbb{I}-P_n)A\| =$$

$$= \|A-P_nA\|$$

Díky monotonii tedy víme, že existuje limita:

$$\lim_{n\to+\infty}\|A-P_nA\| = \varepsilon \ge 0 .$$

Ukážeme, že $\varepsilon = 0$:

Pro spor předpokládejme, že $\varepsilon > 0$:

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ můžeme zvolit $x_n \in \mathcal{H}$ tak, že:

$$\|x_n\| = 1 \wedge \|(\mathbb{I}-P_n)Ax_n\| > \frac{\varepsilon}{2} .$$

Protože A je kompaktní, existuje vybraná posloupnost $(x_{n_k}) \subset (x_n)$, pro kterou existuje limita

$$\lim_{k\to+\infty} Ax_{n_k} = y \in \overline{\operatorname{Ran} A} .$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\frac{\varepsilon}{2} < \|(\mathbb{I}-P_{n_k})Ax_{n_k}\| \le \|(\mathbb{I}-P_{n_k})(Ax_{n_k}-y)\| + \|(\mathbb{I}-P_{n_k})y\| \le$$

$$\le \|Ax_{n_k}-y\| + \|(\mathbb{I}-P_{n_k})y\| \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \text{ , spor}$$

Poznámka: Souvislost mezi A' a A^*

Buď A omezený operátor na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$.
Pro každé $x \in \mathcal{H}$ zavedeme $\hat{x} \in \mathcal{H}^\# : \forall y \in \mathcal{H} : \hat{x}(y) := (x,y)$.

Označme $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^\# : x \mapsto \hat{x}$, potom U je anti-lineární isometrická bijekce a platí:

$$U^{-1} A' U = A^* . \quad (*)$$

$\to \|A\| = \|A^*\| = \|A'\|$

Věta:

Buď $\mathcal{H}$ Hilbertův prostor.
Je-li $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, pak rovněž $A^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Důkaz č. 1:
Víme, že pokud $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, pak $A' \in \mathcal{K}(\mathcal{H}^\#)$.
Přitom U, U^{-1} zobrazují (jako každá isometrie) omezené množiny na omezené množiny a totálně omezené množiny na totálně omezené množiny.

Odtud již tvrzení snadno plyne $(*)$.

Důkaz č. 2:
Existuje posloupnost konečně rozměrných operátorů $(A_n) : \|A - A_n\| \to 0$, pak ale platí:

$$\lim_{n\to\infty} \|A^* - A_n^*\| = \lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0 \checkmark$$

Věta:

Buď $\mathcal{X}$ Banachův prostor.
Potom pro všechny $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ a pro každé $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
je $\operatorname{Ran}(A - \lambda \mathbb{I})$ uzavřený podprostor v $\mathcal{X}$.

Lemma:

Buďte $\mathcal{X}$ Banachův prostor, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $y \in \operatorname{Ran} B$ a nechť $y \neq 0$, potom existuje $x \in \mathcal{X}$ tak, že

i) $y = Bx$

ii) $\|x\| < 2 \operatorname{dist}(x, \ker B)$

Důkaz (lemma):

Zvolme $z \in \mathcal{X}$ libovolně tak, že $Bz = y$.
Nutně pak $z \notin \ker B$, přitom $\ker B$ je uzavřený podprostor,
a proto $\operatorname{dist}(z, \ker B) > 0$.

Jistě existuje $v \in \ker B$ takové, že:

$$\|z - v\| < 2 \operatorname{dist}(z, \ker B) = 2 \operatorname{dist}(z - v, \ker B).$$

Nyní stačí položit $x := z - v$.

Důkaz (věta):

Pro $\lambda \neq 0$ zřejmě platí:

$$\operatorname{Ran}(A - \lambda \mathbb{I}) = \operatorname{Ran}(\mathbb{I} - \tfrac{1}{\lambda} A), \ \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{I}) = \ker(\mathbb{I} - \tfrac{1}{\lambda} A).$$

Proto BÚNO můžeme předpokládat, že $\lambda = 1$:

Buď $(y_n) \subset Ran(\mathbb{I}-A)$ libovolná konvergentní posloupnost, tj.: $y_n \to y \in \mathcal{X}$.

i) $y = 0$: triviálně platí $y = 0 \in Ran(\mathbb{I}-A)$

ii) $y \neq 0$: BÚNO předpokládejme, že $y_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pak podle předchozího lemmatu existuje posloupnost $(x_n) \subset \mathcal{X}$, taková, že: i) $y_n = Ax_n$

ii) $\|x_n\| < 2\, dist(x_n, ker(\mathbb{I}-A))$

Tvrzení: (x_n) je omezená:

Pro spor předpokládejme opak, tj., že existuje $(x_n') \subset (x_n)$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n'\| = +\infty .$$

Potom ale $\left(\frac{1}{\|x_n'\|} x_n'\right)$ je omezená posloupnost a vzhledem ke kompaktnosti operátoru A existuje $(x_n'') \subset (x_n')$ tak, že

$$A\left(\frac{1}{\|x_n''\|} x_n''\right) \xrightarrow{n\to\infty} z \in \mathcal{X} .$$

Položme $y_n'' := (\mathbb{I}-A)x_n''$, pro $n \in \mathbb{N}$

Evidentně $(y_n'') \subset (y_n)$ a je tedy konvergentní (a omezená), tj:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|x_n''\|} x_n'' = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\|x_n''\|} Ax_n'' + \frac{1}{\|x_n''\|} y_n''\right) = z + 0 = z$$

$\Rightarrow$ $z = Az$ (ze spojitosti) $\Rightarrow$ $z \in ker(\mathbb{I}-A)$

$\rightarrow \|x_n''\| < 2\,\mathrm{dist}(x_n'', \ker(\mathbb{I}-A)) \leq 2\,\| x_n'' - \|x_n''\| z \|$

$\rightarrow \left\| \frac{1}{\|x_n''\|} x_n'' - z \right\| > \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, což je spor.

$\longrightarrow (x_n)$ je omezená:

Pak tedy (vzhledem ke kompaktnosti A) lze vybrat $(\tilde{x}_n) \subset (x_n)$ tak, že

$\lim_{n\to\infty} A\tilde{x}_n = u \in \mathcal{X}$

Položme $\tilde{y}_n := (\mathbb{I}-A)\tilde{x}_n$, evidentně $(\tilde{y}_n) \subset (y_n)$ a tedy platí:

$\lim_{n\to\infty} \tilde{y}_n = y \rightarrow \tilde{x}_n = A\tilde{x}_n + \tilde{y}_n \xrightarrow{n\to\infty} u+y$

$\rightarrow u = A(u+y) \rightarrow y = (\mathbb{I}-A)(y+u) \in \mathrm{Ran}(\mathbb{I}-A)$

Důsledek:
Buďte $\mathcal{H}$ Hilbertův prostor, $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, potom:

$\mathcal{H} = \ker(A-\lambda\mathbb{I}) \oplus \mathrm{Ran}(A^+ - \bar{\lambda}\mathbb{I}) = \ker(A^+ - \bar{\lambda}\mathbb{I}) \oplus \mathrm{Ran}(A - \lambda\mathbb{I})$

Důkaz:
Obecně platí $\mathcal{H} = \ker B^+ \oplus \mathrm{Ran}\, B$, pro $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

kombinací s předchozí větou je tvrzení dokázané.

8. přednáška

Poznámka:

Buďte V vektorový prostor, $T \in \mathcal{L}(V)$, tj. T je lineární operátor všude definovaný. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ tedy existují mocniny T^n, $T^0 := \mathbb{I}$.

Obecně platí:

i) $V = \operatorname{Ran} T^0 \supset \operatorname{Ran} T^1 \supset \operatorname{Ran} T^2 \supset \dots$

ii) $\{0\} = \ker T^0 \subset \ker T^1 \subset \ker T^2 \subset \dots$

Tvrzení:

Při stejných předpokladech a značení jako v předchozí poznámce platí:

i) Jestliže pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}_0$ je $\operatorname{Ran} T^{n_0+1} = \operatorname{Ran} T^{n_0}$, pak pro všechna $m \geq n_0$: $\operatorname{Ran} T^m = \operatorname{Ran} T^{n_0}$.

ii) Jestliže pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}_0$ je $\ker T^{n_0+1} = \ker T^{n_0}$, pak pro všechna $m \geq n_0$: $\ker T^m = \ker T^{n_0}$.

Důkaz:

i) Buď $m \geq n_0$ libovolné.

$$\operatorname{Ran} T^m = T^m(V) = T^{m-n_0}(T^{n_0}(V)) = T^{m-n_0-1}(T^{n_0+1}(V)) = T^{m-n_0-1}(T^{n_0}(V)) =$$
$$= \dots = T^{n_0}(V) = \operatorname{Ran} T^{n_0}$$

ii)

Lemma: (∄)
Buď X normovaný vektorový prostor, $V \subset X$ uzavřený podprostor.
Je-li $V \neq X$, potom platí:

$$\forall \delta \in (0,1) : \exists x \in X : \|x\| = 1 \wedge \mathrm{dist}(x, V) \geq \delta$$

Důkaz: (cvičení)

Tvrzení:
Buď $\mathcal{X}$ Banachův prostor, $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, potom
i) $\exists n \in \mathbb{N}_0 : \mathrm{Ran}(A - \lambda \mathbb{I})^{n+1} = \mathrm{Ran}(A - \lambda \mathbb{I})^n$
ii) $\exists n \in \mathbb{N}_0 : \ker(A - \lambda \mathbb{I})^{n+1} = \ker(A - \lambda \mathbb{I})^n$

Důkaz: (sporem)
i) Pro stručnost označme $\mathcal{R}_n := \mathrm{Ran}(A - \lambda \mathbb{I})$,
předpokládáme tedy, že platí:

$$\mathcal{X} \supseteq \mathcal{R}_0 \supsetneq \mathcal{R}_1 \supsetneq \mathcal{R}_2 \supsetneq \mathcal{R}_3 \supsetneq \dots$$

Všimněme si, že $\mathcal{R}_n$ jsou uzavřené podprostory,
Skutečně, snadným výpočtem zjistíme, že pro $n \geq 1$ je:

$$\mathcal{R}_n = \mathrm{Ran}(A - \lambda \mathbb{I})^n = \mathrm{Ran}(A_n - \lambda_n \mathbb{I}),$$

$$\text{kde } A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-\lambda)^k A^{n-k} \in \mathcal{K}(\mathcal{X}), \ \lambda_n = (-\lambda)^{n+1} \neq 0.$$

Podle lemmatu (∄) můžeme pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ zvolit

$$x_n \in \mathcal{R}_n : \|x_n\| = 1 \wedge \mathrm{dist}(x_n, \mathcal{R}_{n+1}) \geq \tfrac{1}{2}$$

Pro dva různé indexy $m, n \in \mathbb{N}_0$, BÚNO $n > m$ máme:

$$\|Ax_m - Ax_n\| = \|(A-\lambda\mathbb{I})x_m - (A-\lambda\mathbb{I})x_n + \lambda(x_m - x_n)\| =$$

$$= |\lambda| \, \| x_m - x_n + \tfrac{1}{\lambda}(A-\lambda\mathbb{I})x_m - \tfrac{1}{\lambda}(A-\lambda\mathbb{I})x_n \| \geq$$

$$\geq |\lambda| \operatorname{dist}(x_m, \mathcal{R}_{m+1}) \geq \tfrac{1}{2}|\lambda|,$$

neboť $x_n - \frac{1}{\lambda}(A-\lambda\mathbb{I})x_m + \frac{1}{\lambda}(A-\lambda\mathbb{I})x_n \in \mathcal{R}_{m+1}$.

Z tohoto odhadu je patrné, že z posloupnosti (Ax_n) nelze vybrat cauchyovskou posloupnost, a tedy rovněž ne konvergentní posloupnost.
Současně posloupnost (x_n) je omezená a A je kompaktní operátor, a proto z posloupnosti (Ax_n) musí být možné vybrat konvergentní podposloupnost a to je spor.

ii) Opět pro stručnost označme $K_n := \ker(A-\lambda\mathbb{I})^n$, pro $n \in \mathbb{N}_0$, předpokládáme, že platí:

$$\{0\} = \ker \{0\} = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq K_3 \subsetneq \dots$$

Ze spojitosti A plyne, že všechny K_n jsou uzavřené podprostory.
Opět, z lemmatu ⊕ plyne, že existují $x_n \in K_n$,

$$\|x_n\| = 1 \wedge \operatorname{dist}(x_n, K_{n-1}) \geq \tfrac{1}{2}, \text{ pro } n \in \mathbb{N}$$

Analogicky také platí: $\|Ax_m - Ax_n\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|$ a dostáváme spor jako v případě i).

Věta: Fredholmovy věty

Buďte $\mathcal{X}$ Banachův prostor, $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, potom platí:

i) 1. Fredholmova věta

Buď rovnice $Ax - \lambda x = f$ má řešení pro každou pravou stranu $f \in \mathcal{X}$, a pak řešení existuje právě jedno, nebo homogenní rovnice $Ax - \lambda x = 0$ má netriviální řešení.

tj.: Operátor $A - \lambda \mathbb{I}$ je surjektivní, právě když je prostý.

Je-li navíc $\mathcal{X} = \mathcal{H}$ hilbertův prostor, pak platí:

ii) 2. Fredholmova věta

Řešení $x \in \mathcal{H}$ rovnice $Ax - \lambda x = f$ existuje, právě když pravá strana $f \in \mathcal{H}$ je kolmá na všechna řešení homogenní sdružené rovnice $A^* x - \bar{\lambda} x = 0$.

tj.: $\operatorname{Ran}(A - \lambda \mathbb{I}) = \ker(A^* - \bar{\lambda} \mathbb{I})^\perp$

iii) 3. Fredholmova věta

Homogenní rovnice $Ax - \lambda x = 0$, $A^* x - \bar{\lambda} x = 0$ mají stejný a přitom konečný počet lineárně nezávislých řešení.

tj.: $\dim \ker(A - \lambda \mathbb{I}) = \dim \ker(A^* - \bar{\lambda} \mathbb{I}) < \infty$

9. přednáška

Důkaz (Fredholm):

i) $\Leftarrow$: Nechť $(A-\lambda I)$ je surjektivní (sporem)

Pro spor předpokládejme, že $A-\lambda I$ není prostý

Označme $T := (A-\lambda I)$, $K_n := \ker T^n$, pro $n \in \mathbb{N}_0$ ($K_0 := \{0\}$)

$\tilde{T}_n := K_{n+1}/K_n \to K_n/K_{n-1} : [x] \mapsto [Tx]$

(Platí: $\{0\} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$)

- $\tilde{T}_n$ je prostý:

nechť $x \in K_{n+1}$: $\tilde{T}_n[x] = 0 = [Tx]$

tj.: $Tx \in K_{n-1} \Rightarrow T^{n-1}(Tx) = T^n x = 0 \Rightarrow x \in K_n \Rightarrow [x] = 0$

- T je surjektivní $\Rightarrow \tilde{T}_n$ je surjektivní:

Buď $u \in K_n/K_{n-1}$, tj.: $u = [y]$, $y \in K_n$

$\Rightarrow \exists x \in X : Tx = y \Rightarrow T^n(Tx) = T^{n+1}x = T^n y = 0 \Rightarrow x \in K_{n+1}$

$\Rightarrow \tilde{T}_n[x] = [Tx] = [y]$

$\Rightarrow \tilde{T}_n$ je isomorfismus, $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow K_1/K_0 \simeq K_2/K_1 \simeq K_3/K_2 \simeq \dots$

Ale $K_1/K_0 = \ker(A-\lambda I)/\{0\} \simeq \ker(A-\lambda I) \neq \{0\}$

Odud dostáváme:

$\Downarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ker(A-\lambda I)^{n+1}/\ker(A-\lambda I)^n \neq \{0\}$

tj.: $\ker(A-\lambda I)^n \subsetneq \ker(A-\lambda I)^{n+1}$, spor

$\Rightarrow$: Nechť $A-\lambda\mathbb{I}$ je prostý (spojen)
Pro spor předpokládejme, že $Ran(A-\lambda\mathbb{I}) \neq \mathcal{H}$.

Označme $T := A-\lambda\mathbb{I}$, $\mathcal{R}_n := Ran\, T^n$

Matematickou indukcí: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{R}_{n+1} \neq \mathcal{R}_n$
Indukční krok $n \sim n+1$:

$$\mathcal{R}_{n+2} = T^{n+2}(\mathcal{H}) = T(T^{n+1}(\mathcal{H})) = T(\underbrace{\mathcal{R}_{n+1}}_{\neq \mathcal{R}_n}) \neq T(\mathcal{R}_n) = \mathcal{R}_{n+1}$$

ii) $\ker(A^*-\bar{\lambda}\mathbb{I})^\perp = \overline{Ran(A-\lambda\mathbb{I})}$ (Obecně)

platí však, že $Ran(A-\lambda\mathbb{I})$ je uzavřený pro $\lambda \neq 0$

iii) Víme, že $m := \dim \ker(A-\lambda\mathbb{I}) \in \mathbb{N}_0$
$n := \dim \ker(A^*-\bar{\lambda}\mathbb{I}) \in \mathbb{N}_0$

Máme ukázat, že $m = n$:

$(A^*)^* = A \Rightarrow$ BÚNO $m \leq n$

- $m = 0 :\Rightarrow \ker(A-\lambda\mathbb{I}) = \{0\} \overset{i)}{\Rightarrow} Ran(A-\lambda\mathbb{I}) = \mathcal{H}$
$\Rightarrow \ker(A^*-\bar{\lambda}\mathbb{I}) = Ran(A-\lambda\mathbb{I})^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\} \Rightarrow n = 0$

- $m > 0$: Zvolíme ON bázi $(x_1, \dots, x_m)$ v $\ker(A-\lambda\mathbb{I})$
Dále zvolíme $(y_1, \dots, y_m)$ ON soubor v $\ker(A^*-\bar{\lambda}\mathbb{I})$

Definujme $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$\forall z \in \mathcal{H}: \; Pz := \sum_{j=1}^{m} (x_j, z)\, y_j$ $(\dim \operatorname{Ran} P = m)$ $\wedge$ $P \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$

Platí: $A-\underbrace{P}_{\in \mathcal{K}(\mathcal{H})}-\lambda I$ je isomorfismus na $\mathcal{H}$

$\overset{(i)}{\iff}$ $A-P-\lambda I$ je prostý

Poznámka:

$\operatorname{Ran} P \subset \ker(A^*-\bar\lambda I)$, $\ker P = \ker(A-\lambda I)^\perp = \operatorname{Ran}(A^*-\bar\lambda I)$

Nechť $z \in \mathcal{H}$: $(A-P-\lambda I)z = 0$ tj. $(A-\lambda I)z = Pz \in \underbrace{\operatorname{Ran}(A-\lambda I) \cap \ker(A^*-\bar\lambda I)}_{\{0\}}$

$\to (A-\lambda I)z = 0 \to z \in \ker(A-\lambda I)$

$Pz = 0 \to z \in \operatorname{Ran}(A^*-\bar\lambda I)$

$\to z = 0$

Tvrzení:

$A-P-\lambda I$ zobrazuje $\ker(A-\lambda I)$ do $\ker(A^*-\bar\lambda I)$

Důkaz:

$z \in \ker(A-\lambda I) \Rightarrow (A-P-\lambda I)z = -Pz \in \ker(A^*-\bar\lambda I)$

Tvrzení:

$A-P-\lambda I$ zobrazuje $\ker(A-\lambda I)$ na $\ker(A^*-\bar\lambda I)$

Důkaz:

Nechť $w \in \ker(A^*-\bar\lambda I)$, hledáme $z \in \ker(A-\lambda I)$: $(A-P-\lambda I)z = w$

$A-P-\lambda I$ isomorfismus: $\exists u \in \mathcal{H}: (A-P-\lambda I)u = w \to \underbrace{(A-\lambda I)u}_{\in \operatorname{Ran}(A-\lambda I)} = \underbrace{Pu+w}_{\in \ker(A^*-\bar\lambda I)}$

$\operatorname{Ran}(A-\lambda I)^\perp = \ker(A^*-\bar\lambda I) \Rightarrow (A-\lambda I)u = 0 \;\wedge\; Pu = -w$

To už dokazuje, že $m = n$.

Věta:

Nechť $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$, ~~potom~~

Potom nenulové prvky spektra jsou vlastní hodnoty.

tj.: $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A)$

Důkaz:

Buď $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, potom z 1. Fredholmovy věty, potom buď

i) $A - \lambda \mathbb{I}$ je isomorfismus $\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$

nebo

ii) $\ker(A - \lambda \mathbb{I}) \neq \{0\} \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$

Poznámka: Shrnutí

Nechť $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$, $\dim \mathcal{X} = \infty$, potom:

i) $0 \in \sigma(A)$

ii) $\sigma(A)$ je nejvýše spočetná množina

iii) jediným hromadným bodem spektra může být 0

iv) $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A)$

v) všechny nenulové vlastní hodnoty mají konečnou geometrickou násobnost

Kompaktní samosdružené operátory

Poznámka:
Neuvede-li řečeno jinak, uvažujeme $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$, $\dim \mathcal{H} = \infty$ a $\mathcal{H}$ separabilní.

Lemma:
Nechť $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
Potom $\sigma(A) = \{0\} \iff A = 0$

Lemma:
Nechť $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $V \subset \mathcal{H}$ podprostor.
V je A-invariantní $\iff$ $V^\perp$ je A-invariantní

Tvrzení:
Nechť $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $V \subset \mathcal{H}$ je A-invariantní podprostor.
Položíme-li $\mathcal{H}_1 := \overline{V}$, $\mathcal{H}_2 := V^\perp$,
$$A_1 := A/_{\mathcal{H}_1}, \quad A_2 := A/_{\mathcal{H}_2}$$

Potom $\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$

Definice: Čistě bodové spektrum
Nechť $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
Řekneme, že A má čistě bodové spektrum, jestliže existuje ON báze $\mathcal{H}$ tvořená vlastními vektory A.

Ekvivalentně:
$\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A)} \ker(A - \lambda I)$ je totální množina v $\mathcal{H}$

Tvrzení:
$A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, A má čistě bodové spektrum
Potom $\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)}$

Lemma:
Nechť $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
Položme $V := \operatorname{span} \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A)} \ker(A - \lambda \mathbb{I})$, $\mathcal{H}_1 = \overline{V}$, $\mathcal{H}_2 = V^\perp$.
$A_1 := A|_{\mathcal{H}_1}$, $A_2 = A|_{\mathcal{H}_2}$

Potom A_1 má čistě bodové spektrum, tj.: $\sigma_p(A_1) = \sigma_p(A)$
a $\sigma_p(A_2) = \emptyset$.

Věta: Hilbert-Schmidt
Nechť $A = A^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.
Potom A má čistě bodové spektrum.

Poznámka: Spektrální rozklad
Nechť $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ s čistě bodovým spektrem.
Buď $(x_n)_{n=1}^\infty$ ON báze, $Ax_n = \lambda_n x_n$, $\lambda_n \in \sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$
Položíme P_n = OG projekce na $\mathbb{C}x_n$,

tj.: $P_n = (x_n, \cdot) x_n$.

Potom $A = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n P_n$ a nezáleží na pořadí sčítanců.

- $z \in \mathcal{H}$ libovolné,

$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n (x_n, z) x_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 |(x_n, z)|^2$

- $(A - \lambda \mathbb{I})^{-1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n - \lambda} P_n$, $\lambda \in \rho(A)$

Poznámka:

Nechť $A = A^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$,

Buď posloupnost (λ_n) posloupnost, $\lambda_n \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

$\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ se opakují tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Potom v $(\ker(A))^{\perp}$ lze zvolit ON bázi (x_n): $Ax_n = \lambda x_n$.

10. přednáška: Ideály kompaktních operátorů v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Poznámka:

- Nadále uvažujeme hilbertův prostor $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$, separabilní a $\dim \mathcal{H} = \infty$.

- Připomenutí:
  Pro $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ klademe $|A| := (A^*A)^{\frac{1}{2}}$, potom:
  $\forall x \in \mathcal{H}: \| |A|x \| = \|Ax\|$
  $\rightarrow \| |A| \| = \|A\| \wedge \ker |A| = \ker A$

Lemma:

i) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ A^*A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \Rightarrow A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$
ii) $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}),\ A \geq 0 \Rightarrow A^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$
iii) $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \Rightarrow |A| \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$

Lemma:

Nechť X, Y jsou isometricky normované vektorové prostory.
Pak i) X je úplný $\Rightarrow$ Y je úplný.
ii) $V \subset X$ podprostor, $\overline{V} = X \Rightarrow \overline{U(V)} = Y$, U isometrie

Definice: Částečná isometrie

$U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je částečná isometrie, jestliže existuje uzavřený podprostor $V = \overline{V} \subset \mathcal{H}$ tak, že:
i) $\forall x \in V: \|Ux\| = \|x\|$ $(\Leftrightarrow \forall x, y \in V: (Ux, Uy) = (x, y))$
ii) $\forall x \in V^\perp: Ux = 0$

Lemma:

Při stejném značení platí pro $W := \operatorname{Ran} U = U(V)$
i) U^* je částečná isometrie s podprostorem W
ii) $W = \overline{W}$
iii) U^*U je OG projektor na V
iv) UU^* je OG projektor na W

Věta:

Buď $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Potom existuje právě jedna částečná isometrie U tak, že: $A = U|A|$, $\ker U = \ker A$ $(= \ker A)$ a platí:

i) $\forall x \in \overline{\operatorname{Ran}|A|} : \|Ux\| = \|x\|$

ii) $\operatorname{Ran} U = \overline{\operatorname{Ran} A}$

Důkaz:

I. Jednoznačnost:

U je předepsáno na $\operatorname{Ran}|A| \wedge \forall x \in \mathcal{H} : U(|A|x) = Ax$

Ze spojitosti U plyne, že je předepsáno na $\overline{\operatorname{Ran}|A|}$ a také na $(\operatorname{Ran}|A|)^{\perp} = \ker|A|$

II. Existence:

Definujeme $\forall x \in \ker A = (\operatorname{Ran}|A|)^{\perp} : Ux := 0$

$\forall x \in \mathcal{H} : U(|A|x) := Ax$

Korektnost definice:

$\underbrace{|A|x_1 = |A|x_2}$ $\overset{?}{\Rightarrow} Ax_1 = Ax_2$

$x_1 - x_2 \in \ker|A| = \ker A \Rightarrow Ax_1 = Ax_2$

i) Stačí ukázat $\forall x \in \operatorname{Ran}|A| : \|Ux\| = \|x\|$:

Napíšeme $x = |A|y$: $\|U|A|y\| = \|Ay\| = \||A|y\| = \|x\|$

ii) U dodefinujeme spojitě na $\overline{\operatorname{Ran}|A|}$

$\Rightarrow \operatorname{Ran} U = U(\underbrace{\overline{\operatorname{Ran}|A|}}_{\text{úplný}}) \Rightarrow \operatorname{Ran} U$ je úplný $\Rightarrow \operatorname{Ran} U$ je uzavřený

Zřejmě $U(\operatorname{Ran}|A|) = \operatorname{Ran} A$ (z definice U)

$\operatorname{Ran}|A|$ je hustý v $\overline{\operatorname{Ran}|A|} \Rightarrow \operatorname{Ran} A$ je hustý v $\operatorname{Ran} U \Rightarrow \overline{\operatorname{Ran} A} = \operatorname{Ran} U$

Definice: Polární rozklad

Rozklad $A = U|A|$ z předchozí věty se nazývá polární rozklad.

Poznámka:

i) U částečná isometrie, U^*U OG projekce na V.
Potom $V \neq \{0\} \Rightarrow \|U\| = 1$

ii) $A = U|A|$ polární rozklad, $V = \operatorname{Ran}|A|$,
potom U^*U je OG projekce na V a platí:
$U^*A = U^*U|A| = |A|$, tj.: $U^*A = |A|$

Definice: Singulární čísla

Nechť $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Označme $(s_j(A))_{j=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ posloupnost kladných vlastních čísel $|A|$, každé vlastní číslo se opakuje tolikrát, kolik je jeho násobnost.

$(N = 0 \Leftrightarrow A = 0)$

$s_j = s_j(A)$ jsou singulární čísla (hodnoty) operátoru A

Definice: $\mathcal{J}_p$ - prostory

Buďte $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $(s_j)_{j=1}^{N}$ jeho singulární čísla.
Pro $1 \leq p$ položme

$$\|A\|_p := \left(\sum_{j=1}^{N} s_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty)$$

$$\mathcal{J}_p = \mathcal{J}_p(\mathcal{H}) := \{A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \mid \|A\|_p < \infty\}$$

$$\mathcal{J}_\infty := \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

Poznámka:

i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\ \forall p \geq 1 : \|\lambda A\|_p = |\lambda| \, \|A_p\|$

ii) pro $1 \leq p \leq q$ je $\mathcal{J}_p \subset \mathcal{J}_q$

iii) $A \in \mathcal{J}_2 \Leftrightarrow A$ je Hilbert-Schmidtův operátor $\wedge \ \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{HS}$

iv) $\forall A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \|A\|_1 = \| |A|^{\frac{1}{2}} \|_2^2$

$\to A \in \mathcal{J}_1 \Leftrightarrow |A|^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{J}_2$

Věta:

Buď $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $(s_j)_{j=1}^N$ jeho singulární čísla.
Potom existují ON soubory $(x_j)_{j=1}^N$, $(y_j)_{j=1}^N$, tak, že:

i) $A = \sum_{j=1}^N s_j (x_j, \cdot) y_j$

ii) $A^* = \sum_{j=1}^N s_j (y_j, \cdot) x_j$

iii) $|A| = \sum_{j=1}^N s_j (x_j, \cdot) x_j$

iv) $|A^*| = \sum_{j=1}^N s_j (y_j, \cdot) y_j$

Důkaz:

$(x_j)_{j=1}^N$ zvolíme jako ON bázi vlastních podprostorů nenulových vlastních čísel $|A|$

$\cdot\ A = U|A|$ polární rozklad $\Rightarrow y_j := U x_j$, $\forall j \in \{1, \dots, N\}$

iii) triviální ✓

i) $A = U|A| = \sum_{j=1}^N s_j (x_j, \cdot) y_j$ ✓

$\Downarrow$

ii) $A^* = \sum_{j=1}^N s_j (y_j, \cdot) x_j$ ✓ $\Rightarrow$ iv) $AA^* = \sum_{j=1}^N s_j^2 (y_j, \cdot) y_j \to |A^*| = |AA^*|^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^N s_j (y_j, \cdot) y_j$

11. přednáška

Důsledek:
Je-li $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, potom operátory A a A^* mají stejné singulární hodnoty.

Tj: $\forall p \in [1, +\infty): \|A\|_p = \|A^*\|_p$

Věta:
Pro každé $p \in [1, +\infty)$ je $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ vektorový prostor a $\|\cdot\|_p$ je norma na $\mathcal{B}_p$. Přitom normovaný vektorový prostor $(\mathcal{B}_p, \|\cdot\|_p)$ je Banachův prostor a $\mathcal{B}_p$ je oboustranným $*$-ideálem v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Poznámka:
Tuto větu nebudeme dokazovat pro obecné $p \in [1, +\infty)$.
Omezíme se jen na dva případy.
Případ $p = 2$ se týká Hilbert-Schmidtových operátorů a byl podrobně rozebrán na Funkcionální analýze 2.
Případu $p = 1$ se budeme věnovat v následující kapitole.

Poznámka:
V nekonečně-rozměrném případě a pro konečné $p \in [1, +\infty)$ není podprostor $\mathcal{B}_p$ uzavřený v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Prostor operátorů se stopou

Z ideálů kompaktních operátorů $\mathcal{J}_p(\mathcal{H})$, $p \geq 1$, jsou aplikace patrně nejvýznamější ideály $\mathcal{J}_2(\mathcal{H})$ a $\mathcal{J}_1(\mathcal{H})$.
Ideál $\mathcal{J}_1(\mathcal{H})$ můžeme nazvat prostorem operátorů se stopou (trace class), neboť operátory z tohoto prostoru lze korektně zavést pojem stopa.

Poznámka:
Buďte $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ positivní operátor, $(z_j)_{j=1}^{\dim \mathcal{H}}$ libovolná ON báze $\mathcal{H}$.
Potom platí:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (z_j, Az_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \| A^{\frac{1}{2}} z_j \|^2 = \| A^{\frac{1}{2}} \|_2^2 = \| A \|_1$$

- Suma nezávisí na výběru ON báze a pro $A \geq 0$ máme:

$$A \in \mathcal{J}_1 \iff \sum_{j=1}^{\infty} (z_j, Az_j) < \infty$$

Poznámka: připomenutí

- $(\mathcal{J}_2(\mathcal{H}), (\cdot,\cdot)_2)$ je hilbertův prostor, kde skalární součin je definovaný vztahem:

$$(H_1, H_2)_2 := \sum_{j=1}^{\infty} (H_1 x_j, H_2 x_j), \quad \forall H_1, H_2 \in \mathcal{J}_2(\mathcal{H}),$$

pro libovolnou ON bázi $(x_j)_{j=1}^{\dim \mathcal{H}}$.

Přitom řada konverguje absolutně:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(H_1 x_j, H_2 x_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \| H_1 x_j \| \, \| H_2 x_j \| \leq \| H_1 \|_2 \, \| H_2 \|_2$$

Poznámka: připomenutí

- $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ je ideál v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a platí:

$$\forall H \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \forall K \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) : \|HK\|_2 \leq \|H\| \, \|K\|_2 \wedge \|KH\|_2 \leq \|H\| \, \|K\|_2$$

Lemma: (*)

Buďte $B, C \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$.

Potom $A := BC \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ a pro každou ON bázi $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ v $\mathcal{H}$ platí:

$$\|A_1\| = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, |A| x_j) \leq \|B\|_2 \|C\|_2$$

Důkaz:

Použijeme polární rozklad: $A = BC = U|A|$

$$|A| = U^* A = U^* BC$$

Pro částečnou izometrii U jistě platí $\|U\| \leq 1$ a tak máme:

$$\|A\|_1 = \| \, |A|^{\frac{1}{2}} \|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, |A| x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, U^* BC x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (B^* U x_j, C x_j)$$

$$\rightarrow \|A\|_1 \leq \|B^* U\|_2 \|C\| \leq \|B^*\|_2 \|U\| \, \|C\|_2 \leq \|B^*\|_2 \|C\|_2$$

Věta:

Buď $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Potom následující výroky jsou ekvivalentní.

i) $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$

ii) $|A|^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$

iii) $\exists B, C \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) : A = BC$

Důkaz:

- Ekvivalence i) <=> ii) plyne z rovnosti $\|A\|_1 = \||A|^{\frac{1}{2}}\|_2^2$
- Pro důkaz implikace ii) => iii) stačí vyjít z rozkladu $A = U|A|$ a položit $B := U|A|^{\frac{1}{2}}$, $C := |A|^{\frac{1}{2}}$
- Implikace iii) => i) je obsažena v předchozím lemmatu.

Věta:

Pro všechny operátory $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$, $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je $DA, AD \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$.
Přitom platí nerovnosti:

$$\|DA\|_1 \le \|D\|\,\|A\|_1, \quad \|AD\|_1 \le \|D\|\,\|A\|_1$$

Důkaz:

Stačí dokázat nerovnosti, z nich již tvrzení věty plyne.

- Pro důkaz první nerovnosti opět vyjdeme z polárního rozkladu $A = U|A|$ a položíme $B := U|A|^{\frac{1}{2}}$, $C := |A|^{\frac{1}{2}}$

Potom $A = BC$, $B, C \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ a rovněž $DB \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$,

Podle lemmatu (*) pak máme:

$$\|DA\|_1 = \|(DB)C\|_1 \le \|DB\|_2 \|C\|_2 \le \|D\|\,\|B\|_2 \|C\|_2 =$$

$$= \|D\|\,\|U|A|^{\frac{1}{2}}\|_2 \,\||A|^{\frac{1}{2}}\|_2 \le \|D\|\,\|A\|_1$$

Z invariance normy vůči hermitovskému sdružení máme:

$\|AD\|_1 = \|D^*A^*\|_1 \le \|D^*\|\,\|A^*\|_1 = \|D\|\,\|A\|_1$

Věta:
Pro každý operátor $A \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ a libovolnou ortonormální bázi (x_j) v $\mathcal{H}$, řada

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x_j, Ax_j)$$

konverguje absolutně a její součet nezávisí na volbě ON báze.

Důkaz:
Zapišme $A = BC$, $B, C \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$, potom

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x_j, Ax_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (B^* x_j, C x_j) = (B^*, C)_2 .$$

Přitom víme, že řada definující skalární součin $(B^*, C)_2$ konverguje absolutně a nezávisí na volbě ON báze.

Definice: Stopa operátoru
~~Napišme~~ Pro operátor $A \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ definujeme stopu A vztahem

$$\mathrm{Tr}\, A := \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, Ax_j),$$

kde (x_j) je libovolná ON báze $\mathcal{H}$.

Poznámka: připomenutí

- Pro všechny operátory $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ platí: $\|T^* T\| = \|T\|^2$. Je-li speciálně $T = T^*$, pak $\|T^2\| = \|T\|^2$
- Pro všechna $T \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ platí: $\|T\| \leq \|T\|_2$.

Věta:

Pro všechny operátory $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ platí

i) $|\mathrm{Tr}\, A| \leq \mathrm{Tr}\, |A| = \|A\|_1$

ii) $\|A\| \leq \|A\|_1$

Důkaz:

i) Uvažme polární rozklad $A = U|A|$ a položme $B := U|A|^{\frac{1}{2}}$, $C := |A|^{\frac{1}{2}}$, potom $A = BC$, $B, C \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ a platí:

$$|\mathrm{Tr}\, A| = |(|A|^{\frac{1}{2}} U^*, |A|^{\frac{1}{2}})_2| \leq \| |A|^{\frac{1}{2}} U^* \|_2 \, \| |A|^{\frac{1}{2}} \|_2 \leq \|U^*\| \, \| |A|^{\frac{1}{2}} \|_2^2 = \|A\|_1$$

Přitom $\| |A|^{\frac{1}{2}} \|_2^2 = (|A|^{\frac{1}{2}}, |A|^{\frac{1}{2}})_2 = \mathrm{Tr}\, |A|$

ii) $\|A\| = \| |A| \| = \| |A|^{\frac{1}{2}} \|^2 \leq \| |A|^{\frac{1}{2}} \|_2^2 = \|A\|_1$

12. přednáška

Věta:

$\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$ je norma na $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$

Důkaz:

Pro $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ je zřejmě $|\lambda A| = |\lambda||A|$.

- Odtud je vidět, že pokud $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$, pak $\lambda A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ a

$$\|\lambda A\|_1 = |\lambda| \|A\|_1$$

- $\|A\|_1 = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

- Uvažujme $B, C \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ libovolné:

Položme $A := B + C$ a zapišme $A = U|A|$

$\rightarrow |A| = U^*B + U^*C$,

přičemž $U^*B \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$, $U^*C \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$

$$\rightarrow \|A\|_1 = \operatorname{Tr}|A| = \operatorname{Tr}(U^*B) + \operatorname{Tr}(U^*C) \leq \|U^*B\|_1 + \|U^*C\|_1 \leq$$

$$\leq \|U^*\| (\|B\|_1 + \|C\|_1) \leq \|B\|_1 + \|C\|_1$$

Poznámka:

Ukazuje se, že normovaný vektorový prostor $(\mathcal{B}_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ lze ztotožnit s duálním prostorem kompaktních operátorů na $\mathcal{H}$.

Věta:

Pro libovolný operátor $A \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ definujme lineární funkcionál Φ_A na $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ vztahem

$$\Phi_A(K) := \operatorname{Tr}(AK), \quad \forall K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Potom $\Phi_A \in (\mathcal{K}(\mathcal{H}))^*$ a lineární zobrazení

$$\Phi : \mathcal{S}_1(\mathcal{H}) \to (\mathcal{K}(\mathcal{H}))^* : A \mapsto \Phi_A$$

je isometrický isomorfismus.

Důkaz:

I. Pro každé $A \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ je $\Phi_A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^*$ a $\|\Phi_A\| \le \|A\|_1$

Pro všechna $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ máme:

$$|\Phi_A(K)| = |\operatorname{Tr}(AK)| \le \|AK\|_1 \le \|A\|_1 \|K\|$$

II. Pro každé $A \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ je $\|\Phi_A\| \ge \|A\|_1$

Zapišme A jako $A = \sum_{n=1}^{\infty} s_n (x_n, \cdot) y_n$

Položme $K_m := \sum_{n=1}^{m} (y_n, \cdot) x_n \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$

$\to AK_m = \sum_{n=1}^{m} s_n (y_n, \cdot) y_n \to \Phi_A(K_m) = \sum_{n=1}^{m} s_n$

$\to K_m^* = \sum_{n=1}^{m} (x_n, \cdot) y_n \to K_m^* K_m = \sum_{n=1}^{m} (y_n, \cdot) y_n$ je projektor na span$\{y_1, \dots, y_m\}$

$$\|A\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{m} s_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{|\Phi_A(K_m)|}{\|K_m\|} \leq \|\Phi_A\|$$

$\Rightarrow$ Φ je isometrie ($\|\Phi_A\| = \|A\|_1$)

III. Φ je surjektivní

Nechť je dán funkcionál $\varphi \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^*$.

Na podprostoru $\mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ dostáváme:

$$|\varphi(B)| \leq \|\varphi\| \, \|B\| \leq \|\varphi\| \, \|B\|_2 \quad , \forall B \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}).$$

Označme zúžení $\tilde{\varphi} := \varphi|_{\mathcal{B}_2(\mathcal{H})}$

$\Rightarrow$ $\tilde{\varphi}$ je omezený lineární funkcionál na $\mathcal{B}_2$, to jest na hilbertově prostoru. Z Rieszovy věty o reprezentaci existuje právě jedno $\tilde{A} \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ takové, že:

$$\check{\varphi}(B) = \langle \tilde{A}, B \rangle_2 = Tr(\tilde{A}^* B) \quad , \forall B \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$$

Položme $A := \tilde{A} \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$, pak jej lze psát ve tvaru

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} s_n (x_n, \cdot) y_n$$

a stejně jako v předchozím, označme:

$$K_m := \sum_{n=1}^{m} s_n (y_n, \cdot) x_n \Rightarrow AK_m = \sum_{n=1}^{m} s_n (y_n, \cdot) y_n \ \wedge \ \|K_m\| = 1$$

$$\to \sum_{n=1}^{m} s_n = Tr(AK_m) = \tilde{\varphi}(K_m) = \varphi(K_m) \leq \|\varphi\| \|K_m\| = \|\varphi\|$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} s_n \leq \|\varphi\| \to A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$$

$$\to \Phi_A\big|_{\mathcal{B}_2} = \tilde{\varphi} = \varphi\big|_{\mathcal{B}_2}$$

Přitom $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ je hustý v $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ a tak ze spojitosti obou funkcionálů plyne, že

$$\Phi_A = \varphi.$$

Vzhledem k tomu, že duální prostor $\mathcal{K}(\mathcal{H})^*$ je úplný dostáváme okamžitě následující důsledek:

Důsledek:

Normovaný vektorový prostor $(\mathcal{B}_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ je Banachovým prostorem.

Neomezené samosdružené operátory

Definice: Sdružený operátor
Buď A hustě definovaný operátor na $\mathcal{H}$.
Pak sdružený operátor A^* definujeme následovně:

$$\mathrm{dom}\, A^* := \{z \in \mathcal{H} \mid \exists y \in \mathcal{H} : \forall x \in \mathrm{dom}\, A : (z, Ax) = (y, x)\}$$

$$A^* z := y$$

Tvrzení:
i) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$
ii) $\mathrm{dom}(A+B) = \mathcal{H} \Rightarrow (A+B)^* \supset A^* + B^*$
iii) $\mathrm{dom}(AB) = \mathcal{H} \Rightarrow (AB)^* \supset B^* A^*$
iv) $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$

Důkaz: (cvičení)

Věta:
Buď A hustě definovaný operátor na $\mathcal{H}$.
Potom $\ker A^* = (\mathrm{Ran}\, A)^\perp$

Důkaz:
Podle definice sdruženého operátoru je $y \in \ker A^*$, právě když pro všechna $x \in \mathrm{dom}\, A$ platí:

$$(y, Ax) = (0, x) = 0,$$

to ale znamená, že $y \in (\mathrm{Ran}\, A)^\perp$

Poznámka: připomenutí
$\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ je hilbertův prostor se skalárním součinem

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := (x_1,y_1) + (x_2,y_2).$$

Tento hilbertův prostor se také někdy zapisuje jako ortogonální součet $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.
První sčítanec se ztotožňuje s podprostorem $\mathcal{H} \times \{0\}$ a druhý s podprostorem ~~$\mathcal{H} \times$~~ $\{0\} \times \mathcal{H}$.

Je-li operátor A na $\mathcal{H}$, potom jeho graf je podprostor v $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, který i nadále budeme značit symbolem $\Gamma(A)$.

Reprezentování operátorů pomocí grafů nám umožňuje uplatnit geometrický přístup. Ten se ukazuje být velmi užitečným v případě sdružených operátorů

Tvrzení:
Definujme unitární operátor $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \times \mathcal{H})$ vztahem:

$$U(x,y) := (y,-x), \quad \forall (x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}.$$

Potom pro libovolný operátor platí: $\Gamma(A^*) = [U(\Gamma(A))]^\perp$

Důkaz:
Podle definice sdruženého operátoru $(y,z) \in \Gamma(A^*)$, právě když

$$(y, Ax) - (z, x) = 0, \quad \forall x \in \operatorname{dom} A.$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \operatorname{dom} A \ ((y,z),(Ax,-x)) = ((y,z), U(x,Ax)) = 0.$$

Důsledek:

Je-li A hustě definovaný operátor na $\mathcal{H}$, potom operátor A^* je uzavřený.

Důkaz:

Graf $\Gamma(A^*)$ je uzavřený, neboť je roven ortogonálnímu doplňku nějakého podprostoru v $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$

Důsledek:

Jestliže pro hustě definovaný operátor A na $\mathcal{H}$ existuje $\bar{A}$, tj. jest je-li A uzavíratelný, potom $(\bar{A})^* = A^*$

Důkaz:

Podle definice uzávěru je $\Gamma(\bar{A}) = \overline{\Gamma(A)}$, přičemž pravá strana je grafem nějakého operátoru.

Unitární zobrazení je homeomorfismus, a tedy převádí uzávěr na uzávěr.

$$\Rightarrow \Gamma((\bar{A})^*) = [U(\Gamma(\bar{A}))]^\perp = [U(\overline{\Gamma(A)})]^\perp = [\overline{U(\Gamma(A))}]^\perp = \Gamma(A^*)$$

Věta:

Buď A hustě definovaný operátor na $\mathcal{H}$.
Potom operátor A je uzavíratelný, právě když existuje $A^{**} = (A^*)^*$.
V kladném případě pak platí

$$A^{**} = \bar{A}$$

Důkaz:

Platí: $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \Gamma(A^*) \oplus \overline{U(\Gamma(A))}$,

aplikací U na obě strany získáme: $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \overline{\Gamma(A)} \oplus U(\Gamma(A^*))$

Operátor A^{**} existuje, právě když $\mathrm{dom}\, A^*$ je hustý podprostor v $\mathcal{H}$, neboli právě když $(\mathrm{dom}(A^*))^{\perp} = \{0\}$.

Ukažme, že: $z \in (\mathrm{dom}(A^*))^{\perp} \iff (0,z) \in \overline{\Gamma(A)}$.

To pak znamená, že $(\mathrm{dom}(A^*))^{\perp} = \{0\}$, právě když $\overline{\Gamma(A)}$ je grafem nějakého operátoru.

Skutečně:

$z \in (\mathrm{dom}(A^*))^{\perp} \iff \forall y \in \mathrm{dom}\, A^* : (y,z) = 0$

tj: $\forall y \in \mathrm{dom}\, A^* : ((A^*y,-y),(0,z)) = (U(y,A^*y),(0,z)) = 0$.

To ale přesně znamená, že $(0,z) \in \overline{\Gamma(A)} = [U(\Gamma(A^*))]^{\perp}$

Důsledek:

Buď A hustě definovaný operátor na $\mathcal{H}$.
Je-li A uzavřený operátor, pak $\ker A \subset \mathcal{H}$ je uzavřený podprostor.

Důkaz:

$\ker A = \ker (A^*)^* = (\mathrm{Ran}\, A^*)^{\perp}$

Poznámka:

Předpoklad hustého definičního oboru je nadbytečný:
$(x_n) \subset \ker A$, $x_n \to x$ in $\mathcal{H}$: (Ax_n) je konstantní posloupnost $\Rightarrow x \in \ker A$ ■

Symetrické samosdružené operátory

Definice: Rozklad jednotky

Řekneme, že jednoparametrická množina $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ OG pojekcí v $\mathcal{H}$ je rozklad jednotky, jestliže platí:

i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \leq \mu \Rightarrow P_\lambda \leq P_\mu$ (monotonie)

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}: s\text{-}\lim_{\mu \to \lambda_-} P_\mu = P_\lambda$ (silná spojitost zleva)

iii) $s\text{-}\lim_{\lambda \to -\infty} P_\lambda = 0$, $s\text{-}\lim_{\lambda \to +\infty} P_\lambda = \mathbb{I}$

Věta:

Ke každému samosdruženému operátoru na $\mathcal{H}$ existuje právě jeden rozklad jednotky $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ takový, že:

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dP_\lambda$$

Definice: Symetrický operátor, Samosdružený operátor

Buď A hustě definovaný operátor na $\mathcal{H}$.

Řekneme, že A je symetrický, jestliže

$$(x, Ay) = (Ax, y), \quad \forall x, y \in \operatorname{dom} A.$$

Řekneme, že A je samosdružený operátor, jestliže $A = A^*$

Poznámka:

i) Alternativně lze říci, že A je symetrický, když jeho přidružená kvadratická forma je reálná, tj.: $(x, Ax) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \operatorname{dom} A$.

ii) Vlastní hodnoty takového operátoru musí být reálné!

Tvrzení:

i) Hustě definovaný operátor je symetrický, právě když $A \subset A^*$.
ii) Každý (hustě definovaný) symetrický operátor je uzavíratelný.

Věta:

Nechť operátor A na $\mathcal{H}$ je symetrický a $\text{dom}\, A = \mathcal{H}$.
Potom nutně $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a $A = A^*$

Věta:

Každý samosdružený operátor na $\mathcal{H}$ má prázdné reziduální spektrum.

Důkaz:

Stačí ukázat, že pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí:
Jestliže $\overline{\text{Ran}(A-\lambda\mathbb{I})} \neq \mathcal{H}$, potom $\lambda \in \sigma_p(A)$.

Buď $x \in \text{Ran}(A-\lambda\mathbb{I})^\perp$, $x \neq 0$, pak $x \in \ker(A^*-\overline{\lambda}\mathbb{I}) = \ker(A-\lambda\mathbb{I})$. ✓

Věta: Weylovo kritérium

Buď A samosdružený (normální) operátor na $\mathcal{H}$, potom platí:
i) $\lambda \in \rho(A)$, právě když existuje konstanta $m > 0$ taková, že:

$$\|(A-\lambda\mathbb{I})x\| \geq m\|x\|, \quad \forall x \in \text{dom}\, A$$

ii) $\lambda \in \sigma(A)$, právě když existuje $(x_n) \subset \text{dom}\, A$, $\|x_n\| = 1$ taková, že:

$$\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda\mathbb{I})x_n\| = 0$$

Důkaz:

Ve skutečnosti i) <=> ii), ukážeme pouze i):

=>: Nechť $\lambda \in \rho(A)$:

Položme $m^{-1} := \|(A-\lambda I)^{-1}\|$, pro všechna $x \in \mathrm{dom}\, A$, pak máme:

$$\|x\| = \|(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)x\| \leq \frac{1}{m}\|(A-\lambda I)x\|$$

<=: Nechť $\exists m > 0 : \forall x \in \mathrm{dom}\, A : \|(A-\lambda I)x\| \geq m\|x\|$

$\Rightarrow \ker(A-\lambda I) = \{0\} \Rightarrow (A-\lambda I)^{-1}$ existuje a je to uzavřený operátor, který je navíc omezený a hustě všude definovaný

Věta:

Spektrum každého samosdruženého operátoru je reálné

Důkaz:

Buďte A samosdružený operátor a $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$:

$$\|(A-\lambda I)x\|^2 = \|(A-\lambda_1 I)x\|^2 + \lambda_2^2\|x\|^2 \geq \lambda_2^2\|x\|^2$$

Samosdružená rozšíření symetrických operátorů

Poznámka:
Mějme dán symetrický operátor A na $\mathcal{H}$.
Potom každé symetrické rozšíření B operátoru A splňuje:

$$A \subset B \subset B^* \subset A^*$$

Každé takové symetrické rozšíření je jednoznačně určeno podprostorem $V \subset \mathcal{H}$, který vyhovuje podmínce

$$\operatorname{dom} A \subset V \subset \Theta(A),$$

kde $\Theta(A) := \{x \in \operatorname{dom}(A^*) \mid (x, A^* x) \in \mathbb{R}\}$,

jestliže položíme $B := A^*|_V$. Naopak $V = \operatorname{dom} B$.

Poznamenejme, že $\Theta(A)$ není podprostor.
Podle předpokladu máme $A \subset A^*$, $B \subset B^*$ a $A \subset B$, to znamená, že B^* je zúžení A^* a $V := \operatorname{dom} B$ musí splňovat $\operatorname{dom} A \subset V \subset \operatorname{dom} A^*$.

Přitom kvadratická forma symetrického operátoru je reálná, a proto pro každé $x \in V$ je $(x, A^* x) = (x, Bx) \in \mathbb{R}$

Tvrzení:
Buďte A symetrický operátor na $\mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Je-li $\Im \lambda = 0$, potom operátor A je uzavřený, právě když podprostor $\operatorname{Ran}(A - \lambda \mathbb{I})$ je uzavřený.

To znamená, že pro symetrický uzavřený platí

$$\mathcal{H} = \operatorname{Ran}(A - \lambda \mathbb{I}) \oplus \ker(A^* - \bar{\lambda} \mathbb{I})$$

Důkaz:
Pro všechna $x \in \operatorname{dom} A$ máme:

$$\|(A - \lambda \mathbb{I})x\|^2 \geq |\Im \lambda|^2 \|x\|^2$$

Odtud plyne, že pro $\Im \lambda \neq 0$ existuje inverzní operátor $(A - \lambda \mathbb{I})^{-1}$ a je omezený! Přitom operátor A je uzavřený, právě když $A - \lambda \mathbb{I}$ je uzavřený.
Omezený operátor je ale uzavřený, právě když jeho definiční obor je uzavřený a přitom $\operatorname{dom}(A - \lambda \mathbb{I})^{-1} = \operatorname{Ran}(A - \lambda \mathbb{I})$.

Věta:
Buď A symetrický operátor na $\mathcal{H}$, potom:

$$\operatorname{dom} A^* = \operatorname{dom} \bar{A} \dot{+} \ker(A^* - i\mathbb{I}) \dot{+} \ker(A^* + i\mathbb{I})$$

Důkaz:
Vzhledem k rovnosti $A^* = (\bar{A})^*$ stačí, když větu dokážeme za dodatečného předpokladu, že A je uzavřený operátor.

Buď $y \in \operatorname{dom} A^*$ libovolný vektor:

Chceme ukázat, že y lze ~~[illegible]~~ jednoznačně zapsat ve tvaru:

$$y = x + z_+ + z_-,$$

$x \in \operatorname{dom} A$, $z_\pm \in \ker(A \mp i\mathbb{I})$

I. Jednoznačnost

Uvažujme takový rozklad:

$$(A^* - i\mathbb{I})y = (A - i\mathbb{I})x - 2iz_- \in \operatorname{Ran}(A - i\mathbb{I}) \oplus \ker(A^* + i\mathbb{I}) = \mathcal{H}$$

Analogicky pro z_+ a tudíž i x je určen jednoznačně.

II. Existence

Předchozí postup lze obrátit:

$$(A^* - i\mathbb{I})y \in \operatorname{Ran}(A - i\mathbb{I}) \oplus \ker(A^* + i\mathbb{I}) = \mathcal{H},$$

a proto můžeme psát

$$(A^* - i\mathbb{I})y = (A - i\mathbb{I})x - 2iz_-,$$

pro jisté vektory $x \in \operatorname{dom} A$, $z_- \in \ker(A^* + i\mathbb{I})$

Položme $z_+ := y - x - z_-$.

Definice: Defektní podprostory

Buď A symetrický operátor na $\mathcal{H}$.
Podprostory $\ker(A^* \mp i\mathbb{I})$, tedy vlastní podprostory operátoru A^* příslušné vlastním číslům $\pm i$ nazýváme defektními podprostory.

Čísla $\delta_\pm(A) := \dim \ker(A^* \mp i\mathbb{I}) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ nazýváme indexy defektu symetrického operátoru A.

Poznámka:

Lze ukázat, že v případě symetrického operátoru A na $\mathcal{H}$ je

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \dim \ker(A^* - z\mathbb{I}) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

zobrazení konstantní na každé z polorovin $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$.

Definice: Esenciální samosdruženost

Operátor A na $\mathcal{H}$ je esenciálně samosdružený, jestliže jeho uzávěr je samosdružený operátor.

Důsledek:

i) Uzavřený symetrický operátor je samosdružený, právě když oba jeho indexy defektu jsou nulové.

ii) Je-li A symetrický operátor na $\mathcal{H}$, ale ne nutně samosdružený, potom rovnosti $\delta_+(A) = \delta_-(A) = 0$ jsou ekvivalentní s tvrzením, že A je esenciálně samosdružený.

Lemma:
Buďte A symetrický operátor na $\mathcal{H}$, $y \in \operatorname{dom} A^*$.
Nechť symbol $\theta(A)$ značí $\theta(A) := \{x \in \operatorname{dom} A^* \mid (x, A^* x) \in \mathbb{R}\}$ a zapišme y jako

$$y = x + z_+ + z_-.$$

Potom $y \in \theta(A)$, právě když $\|z_+\| = \|z_-\|$

Důkaz:
Důkaz je založen na přímém výpočtu:

$$(y, A^* y) = (x + z_+ + z_-, \bar{A}x + iz_+ - iz_-) = \ldots = (x, \bar{A}x) + i(\|z_+\|^2 - \|z_-\|^2)$$

Lemma:
Buďte A symetrický operátor na $\mathcal{H}$ a B jeho samosdružené rozšíření.
Potom ke každému $z \in \ker(A^* - i\mathbb{I})$ existuje právě jedno $\hat{z} \in \ker(A^* + i\mathbb{I})$ takové, že $z + \hat{z} \in \operatorname{dom} B$.

Věta:
Buď A symetrický operátor na $\mathcal{H}$.
Potom samosdružené rozšíření existuje, právě když indexy defektu $d_+(A)$ a $d_-(A)$ jsou si rovny.

V takovém případě jsou různá samosdružená rozšíření operátoru A ve vzájemně jednoznačném vztahu s unitárními zobrazeními $U : \ker(A^* - i\mathbb{I}) \to \ker(A^* + i\mathbb{I})$.

$\operatorname{dom} B_U := \operatorname{dom} \bar{A} + (\mathbb{I} + U)(\ker(A^* - i\mathbb{I}))$
$B(x + z + Uz) := \bar{A}x + iz - iUz$
$\blacksquare$