

Kapitola 1

Tenzorový součin vektorových prostorů

1.1 Konstrukce tenzorového součinu, věta o univerzalitě

Značení 1.1.1. Buďte V, W vektorové prostory nad stejným tělesem. Symbol $\mathcal{L}(V, W)$ značí vektorový prostor všech lineárních zobrazení V do W .

Definice 1.1.2. Buďte V vektorový prostor, $M \subset V$ podmnožina (obecně i nekonečná). Řekneme, že množina M je *lineárně nezávislá* (LN), jestliže každá její konečná podmnožina je LN.

Definice 1.1.3. Buďte V vektorový prostor, $M \subset V$ podmnožina. Řekneme, že množina M je *Hamelova báze* prostoru V , jestliže

- (1) M je lineárně nezávislá,
- (2) $V = \text{span } M$ (= množina všech konečných lineárních kombinací prvků z M).

Ekvivalentně bychom mohli říci, že M je maximální (ve smyslu inkluze) lineárně nezávislá podmnožina ve V (rozmyslete si samostatně).

Věta 1.1.4. *Každá lineárně nezávislá podmnožina vektorového prostoru V je obsažena v nějaké Hamelově bázi.*

Důkaz. K důkazu je potřeba axiom výběru. Poměrně snadno lze větu dokázat například pomocí Zornova lemmatu. To je ponecháno na čtenáři jako cvičení. $\square$

Poznámka 1.1.5. Ve skutečnosti je věta 1.1.4 ekvivalentní s axiomem výběru.

Úmluva 1.1.6. Pokud nebude řečeno jinak, tak v této kapitole se všechny vektorové prostory uvažují nad stejným, ale jinak libovolným tělesem $\mathbb{F}$.

Definice 1.1.7. Buď M množina. Označme symbolem

$$\text{Fun}(M, \mathbb{F}) := \{f; f : M \rightarrow \mathbb{F}\}$$

vektorový prostor funkcí na M s hodnotami v $\mathbb{F}$. Pro funkci $f \in \text{Fun}(M, \mathbb{F})$ označme její *nosič* symbolem

$$\text{supp } f := \{x \in M; f(x) \neq 0\}.$$

Volný vektorový prostor generovaný M je podprostor $\mathcal{F}(M) \subset \text{Fun}(M, \mathbb{F})$ tvořený všemi funkcemi s konečným nosičem, to jest

$$\mathcal{F}(M) := \{f \in \text{Fun}(M, \mathbb{F}); |\text{supp } f| < \infty\}.$$

Značení 1.1.8. Při stejném značení jako v definici 1.1.7 definujeme funkci $\delta_x \in \mathcal{F}(M)$ vztahem

$$\forall y \in M, \delta_x(y) := \begin{cases} 1 & \text{pro } y = x \\ 0 & \text{pro } y \neq x \end{cases}.$$

Poznámka 1.1.9. M je stále nějaká daná množina. Zřejmě $\{\delta_x; x \in M\}$ je Hamelova báze v $\mathcal{F}(M)$. Určitě je tato množina lineárně nezávislá a každou funkci $f \in \mathcal{F}(M)$ můžeme vyjádřit jako

$$f = \sum_{x \in \text{supp } f} f(x) \delta_x. \quad (1.1)$$

Tvrzení 1.1.10. *Buďte M množina, U vektorový prostor a $F: M \rightarrow U$ libovolné zobrazení. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $\hat{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), U)$ takové, že*

$$\forall x \in M, \hat{F}(\delta_x) = F(x). \quad (1.2)$$

Důkaz. Libovolnou funkci $f \in \mathcal{F}(M)$ můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci Hamelovy báze $\{\delta_x; x \in M\}$ vztahem (1.1). Vzhledem k (1.2) musí být $\hat{F}$ definováno vztahem

$$\forall f \in \mathcal{F}(M), \hat{F}(f) := \sum_{x \in \text{supp } f} f(x) F(x). \quad (1.3)$$

Naopak takto definované zobrazení $\hat{F}: \mathcal{F}(M) \rightarrow U$ je lineární. K ověření stačí uvážit, že je-li $S \subset M$ konečná podmnožina splňující $\text{supp } f \subset S$, potom ve vztazích (1.1) a (1.3) můžeme $\text{supp } f$ nahradit všude množinou S . $\square$

Připomenutí 1.1.11. Buďte Z vektorový prostor, $\mathfrak{Z} \subset Z$ jeho podprostor. Relace

$$\forall u, v \in Z, u \sim v \stackrel{\text{DEF}}{\iff} u - v \in \mathfrak{Z},$$

je ekvivalence na Z . Faktorizací podle této ekvivalence dostáváme vektorový prostor $Z/\mathfrak{Z}$. Jeho prvky jsou třídy ekvivalence, což jsou vlastně afinní podprostory $u + \mathfrak{Z} \subset Z$, $u \in Z$. Faktorprostor $Z/\mathfrak{Z}$ je také vektorovým prostorem s operacemi

$$\lambda \cdot (u + \mathfrak{Z}) := \lambda u + \mathfrak{Z}, (u + \mathfrak{Z}) + (v + \mathfrak{Z}) := (u + v) + \mathfrak{Z} \text{ pro všechna } \lambda \in \mathbb{F}, u, v \in Z.$$

Projekce

$$\pi: Z \rightarrow Z/\mathfrak{Z} : u \mapsto u + \mathfrak{Z}$$

je lineární zobrazení, $\pi \in \mathcal{L}(Z, Z/\mathfrak{Z})$.

Definice 1.1.12. Buďte V, W vektorové prostory. Označme $\mathfrak{Z} \subset \mathcal{F}(V \times W)$ podprostor generovaný všemi funkcemi tvaru

$$\begin{aligned} \delta_{(\lambda v_1 + v_2, w)} - \lambda \delta_{(v_1, w)} - \delta_{(v_2, w)}, \quad \text{kde } \lambda \in \mathbb{F}, v_1, v_2 \in V, w \in W, \\ \delta_{(v, \lambda w_1 + w_2)} - \lambda \delta_{(v, w_1)} - \delta_{(v, w_2)}, \quad \text{kde } \lambda \in \mathbb{F}, v \in V, w_1, w_2 \in W. \end{aligned}$$

Tenzorový součin vektorových prostorů V, W definujeme jako faktorprostor

$$V \otimes W := \mathcal{F}(V \times W)/\mathfrak{Z}.$$

Příslušnou projekci (faktor zobrazení) označíme

$$\pi: \mathcal{F}(V \times W) \rightarrow V \otimes W.$$

Dále definujeme zobrazení

$$\tau: V \times W \rightarrow V \otimes W : (v, w) \mapsto \pi(\delta_{(v, w)})$$

a píšeme

$$\forall v \in V, \forall w \in W, v \otimes w := \tau(v, w) = \pi(\delta_{(v, w)}).$$

Říkáme, že $v \otimes w$ je tenzorový součin vektorů v a w .

Tvrzení 1.1.13. *Pro libovolné vektorové prostory V, W platí*

- (1) *zobrazení $\tau: V \times W \rightarrow V \otimes W : (v, w) \mapsto v \otimes w$ je bilineární,*
- (2) $V \otimes W = \text{span}\{v \otimes w; v \in V, w \in W\}.$

Důkaz. (1) Aplikujeme-li projekci π (viz definice 1.1.12) na vektory

$$\delta_{(\lambda v_1 + v_2, w)} - \lambda \delta_{(v_1, w)} - \delta_{(v_2, w)} \in \mathfrak{Z}, \quad \text{kde } \lambda \in \mathbb{F}, v_1, v_2 \in V, w \in W,$$

dostaneme rovnost

$$(\lambda v_1 + v_2) \otimes w - \lambda(v_1 \otimes w) - v_2 \otimes w = 0 \in V \otimes W.$$

To dokazuje linearitu v prvním argumentu tenzorového součinu. Linearitu ve druhém argumentu lze ověřit obdobně.

(2) Víme, že

$$\mathcal{F}(V \times W) = \text{span}\{\delta_{(v, w)}; v \in V, w \in W\}. \quad (1.4)$$

Dále víme, že projekce π je surjektivní. Stačí tedy aplikovat π na obě strany rovnosti (1.4). $\square$

Poznámka 1.1.14. Zřejmě platí:

jsou-li U, V, W vektorové prostory a $\tilde{\phi} \in \mathcal{L}(V \otimes W, U)$, pak zobrazení $\phi: V \times W \rightarrow U$ definované vztahem

$$\forall v \in V, \forall w \in W, \phi(v, w) := \tilde{\phi}(v \otimes w)$$

je bilineární.

Následující věta v podstatě tvrdí, že vztah mezi $\tilde{\phi}$ a ϕ z poznámky 1.1.14 lze obrátit.

Věta 1.1.15 (Univerzalita tenzorového součinu). *Budte V, W vektorové prostory a $\tau: V \times W \rightarrow V \otimes W$ zobrazení tenzorového součinu (podle definice 1.1.12). Potom ke každému bilineárnímu zobrazení $\phi: V \times W \rightarrow U$ do nějakého vektorového prostoru U existuje právě jedno lineární zobrazení $\tilde{\phi} \in \mathcal{L}(V \otimes W, U)$ takové, že následující diagram je komutativní*

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\tau} & V \otimes W \\ \phi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\ U & & \end{array}$$

Jinak řečeno, pro všechny vektory $v \in V, w \in W$ platí $\phi(v, w) = \tilde{\phi}(v \otimes w)$.

Důkaz. Existence. Podle tvrzení 1.1.10 k zobrazení $\phi: V \times W \rightarrow U$ existuje právě jedno lineární zobrazení $\hat{\phi} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(V \times W), U)$ takové, že

$$\forall v \in V, \forall w \in W, \hat{\phi}(\delta_{(v,w)}) = \phi(v, w).$$

Díky bilinearitě zobrazení ϕ je snadno vidět, že $\hat{\phi}$ nabývá hodnotu 0 na všech generátorech podprostoru $\mathfrak{Z} \subset \mathcal{F}(V \times W)$ (viz definice 1.1.12), tedy $\hat{\phi}|_{\mathfrak{Z}} = 0$. Proto můžeme definovat (připomeňme si, že pro $f \in \mathcal{F}(V \times W)$ je $\pi(f) = f + \mathfrak{Z} \subset \mathcal{F}(V \times W)$)

$$\forall f \in \mathcal{F}(V \times W), \tilde{\phi}(\pi(f)) := \hat{\phi}(f).$$

Jelikož obě zobrazení $\pi, \hat{\phi}$ jsou lineární, není těžké nahlédnout, že i $\tilde{\phi}$ je lineární. Přitom je splněno

$$\forall v \in V, \forall w \in W, \phi(v, w) = \hat{\phi}(\delta_{(v,w)}) = \tilde{\phi}(\pi(\delta_{(v,w)})) = \tilde{\phi}(v \otimes w).$$

Jednoznačnost je zřejmá, neboť $\tilde{\phi}$ je lineární a je předsáno na vektorech $v \otimes w$, kde v probíhá V , w probíhá W , a tyto vektory generují $V \otimes W$. $\square$

1.2 Důsledky věty o univerzalitě, základní vlastnosti

Důsledek 1.2.1. *Buďte V, W vektorové prostory. Potom existuje právě jeden lineární izomorfismus*

$$T: V \otimes W \rightarrow W \otimes V$$

takový, že

$$\forall v \in V, \forall w \in W, T v \otimes w = w \otimes v. \quad (1.5)$$

Máme tedy $V \otimes W \simeq W \otimes V$ (vektorové prostory jsou izomorfní).

Důkaz. Zobrazení

$$V \times W \rightarrow W \otimes V : (v, w) \mapsto w \otimes v$$

je bilineární. Podle věty o universalitě tenzorového součinu (věta 1.1.15) existuje právě jedno $T \in \mathcal{L}(V \otimes W, W \otimes V)$ splňující (1.5). Zaměníme-li V a W , zjistíme, že existuje právě jedno $S \in \mathcal{L}(W \otimes V, V \otimes W)$ splňující analogický vztah. Potom platí

$$\forall v \in V, \forall w \in W, ST v \otimes w = v \otimes w.$$

Z tvrzení 1.1.13 ad (2) plyne, že nutně $ST = I_{V \otimes W}$ (identické zobrazení). Obdobně $TS = I_{W \otimes V}$. Zobrazení T a S jsou tedy navzájem inverzní a T je izomorfismus. $\square$

Značení 1.2.2. Buď V vektorový prostor. Vektorový prostor všech lineárních funkcíonálů na V označíme

$$V^\# := \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$$

a nazveme ho *algebraickým duálním prostorem* k V .

Důsledek 1.2.3. *Buďte V, W vektorové prostory, $\varphi \in V^\#, \psi \in W^\#$. Potom existuje jednoznačně určený lineární funkcíonál $\tilde{\phi} \in (V \otimes W)^\#$ takový, že*

$$\forall v \in V, \forall w \in W, \tilde{\phi}(v \otimes w) = \varphi(v)\psi(w). \quad (1.6)$$

Důkaz. Zobrazení

$$\phi: V \times W \rightarrow \mathbb{F} : (v, w) \mapsto \varphi(v)\psi(w)$$

je bilineární. Existence a jednoznačnost lineárního funkcíonálu $\tilde{\phi}$ plyne okamžitě z věty 1.1.15. $\square$

Poznámka 1.2.4. Stejně jako v konečnorozměrném případě platí následující tvrzení, jak si čtenář sám snadno rozmyslí.

Buďte V vektorový prostor, $H \subset V$ Hamelova báze ve V , $x \in H$. Potom existuje právě

jeden lineární funkcionál $\varphi_x \in V^\#$ takový, že

$$\forall y \in H, \varphi_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y = x \\ 0 & \text{pro } y \neq x \end{cases}.$$

Věta 1.2.5. *Budte V, W vektorové prostory, $M \subset V, N \subset W$ lineárně nezávislé podmnožiny. Potom podmnožina*

$$\{v \otimes w; v \in M, w \in N\} \subset V \otimes W$$

je také lineárně nezávislá.

Důkaz. Vzhledem definici 1.1.2 zřejmě stačí dokázat, že pro každá $m, n \in \mathbb{N}$ a lineárně nezávislé podmnožiny

$$\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset M, \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset N$$

je

$$\{v_j \otimes w_k; 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\} \subset V \otimes W$$

také lineárně nezávislá podmnožina. Podle věty 1.1.4 můžeme zvolit Hamelovy báze $\tilde{M}$ ve V a $\tilde{N}$ ve W tak, aby $M \subset \tilde{M}, N \subset \tilde{N}$. Potom také

$$\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset \tilde{M}, \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset \tilde{N}.$$

Jak bylo zmíněno v poznámce 1.2.4, existují lineární funkcionály $\varphi_j \in V^\#, 1 \leq j \leq m$, a $\psi_k \in W^\#, 1 \leq k \leq n$, takové, že

$$\varphi_{j'}(v_j) = \delta_{j',j}, \psi_{k'}(w_k) = \delta_{k',k} \text{ pro } 1 \leq j, j' \leq m, 1 \leq k, k' \leq n.$$

Dále podle důsledku 1.2.3 existují $\tilde{\phi}_{j,k} \in (V \otimes W)^\#$ tak, že

$$\forall v \in V, \forall w \in W, \tilde{\phi}_{j,k}(v \otimes w) = \varphi_j(v)\psi_k(w).$$

Nechť nyní

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} v_j \otimes w_k = 0 \text{ pro nějaké koeficienty } \alpha_{j,k} \in \mathbb{F}.$$

Potom

$$0 = \tilde{\phi}_{j',k'} \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} v_j \otimes w_k \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} \varphi_{j'}(v_j) \psi_{k'}(w_k) = \alpha_{j',k'}$$

pro všechny indexy $j' = 1, 2, \dots, n$, $k' = 1, 2, \dots, n$. $\square$

Poznámka 1.2.6. Abychom si v dalším textu zjednodušili zápis, všimněme si, že pro vektorové prostory V, W lze každý prvek $x \in V \otimes W$ zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^n f_j \otimes g_j \text{ pro jisté } n \in \mathbb{N}, f_j \in V, g_j \in W.$$

Můžeme uvažovat i $n = 0$, přičemž prázdnou sumu v tomto případě chápeme podle konvence jako nulový vektor. Poznamenejme, že i $x = 0$ můžeme psát například jako $x = 0 \otimes 0$.

Skutečně, je-li $0 \neq x \in V \otimes W$, pak podle tvrzení 1.1.13 existují $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha_j \in \mathbb{F}$, $v_j \in V$, $w_j \in W$ pro $j = 1, 2, \dots, n$ takové, že

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \otimes w_j = \sum_{j=1}^n (\alpha_j v_j) \otimes w_j.$$

Stačí tedy položit $f_j := \alpha_j v_j$, $g_j := w_j$. Toto vyjádření samozřejmě není jednoznačné.

Poznámka 1.2.7. Pro vektorový prostor V máme izomorfismy vektorových prostorů

$$V \simeq \mathbb{F} \otimes V \simeq V \otimes \mathbb{F}.$$

Abychom ukázali první izomorfismus, stačí ověřit, že lineární zobrazení

$$V \rightarrow \mathbb{F} \otimes V : v \mapsto 1 \otimes v$$

je vzájemně jednoznačné. Skutečně je prosté, neboť pro $v \neq 0$ je podle věty 1.2.5 rovněž $1 \otimes v \neq 0$. Toto zobrazení je i surjektivní, neboť vzhledem k poznámce 1.2.6 lze každé $x \in \mathbb{F} \otimes V$ psát ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \otimes v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1 \otimes v_j = 1 \otimes \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right)$$

pro jistá $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{F}$, $v_j \in V$.

Izomorfismus $V \simeq V \otimes \mathbb{F}$ lze ověřit obdobně.

Věta 1.2.8. *Bud'te V, W vektorové prostory a $M \subset V$, $N \subset W$ podmnožiny. Jestliže $V = \text{span } M$, $W = \text{span } N$, pak*

$$V \otimes W = \text{span}\{v \otimes w; v \in M, w \in N\}.$$

Důkaz. Vzhledem k předpokladu a tvrzení 1.1.13 dostáváme (v druhé inkluzi je využita

bilinearita)

$$\begin{aligned} V \otimes W &= \text{span}\{v \otimes w; v \in V, w \in W\} \supset \text{span}\{v \otimes w; v \in M, w \in N\} \\ &\supset \text{span}\{v \otimes w; v \in \text{span } M, w \in \text{span } N\} \\ &= \text{span}\{v \otimes w; v \in V, w \in W\} = V \otimes W. \end{aligned}$$

Odtud plyne dokazovaná rovnost. $\square$

Věta 1.2.9. *Budte po řadě M, N Hamelovy báze ve vektorových prostorech V a W . Potom*

$$\{v \otimes w; v \in M, w \in N\}$$

je Hamelova báze ve $V \otimes W$.

Důkaz. Věta je bezprostředním důsledkem vět 1.2.5 a 1.2.8. $\square$

Z této věty okamžitě plyne následující tvrzení.

Důsledek 1.2.10. *Jsou-li V a W konečnorozměrné vektorové prostory, potom*

$$\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W.$$

Poznámka 1.2.11. Pro konečnorozměrné vektorové prostory V a W existuje „přirozený“ izomorfismus vektorových prostorů

$$V^\# \otimes W \simeq \mathcal{L}(V, W).$$

Tento izomorfismu se zkonstruuje následovně. Uvažme bilineární zobrazení

$$T: V^\# \times W \rightarrow \mathcal{L}(V, W) : (\varphi, w) \mapsto T_{\varphi, w} := \varphi(\cdot)w,$$

kde definice $T_{\varphi, w} \in \mathcal{L}(V, W)$ je míněna takto

$$\forall v \in V, \quad T_{\varphi, w}v = \varphi(v)w.$$

Pro $w \neq 0$ je zřejmě hodnota $T_{\varphi, w}$ rovna 1 (a $T_{\varphi, 0} = 0$ pro jakékoliv φ). Naopak je snadno vidět, že všechna lineární zobrazení z $\mathcal{L}(V, W)$ s hodnotí 1 jsou tohoto tvaru.

Podle věty 1.1.15 existuje právě jedno $\tilde{T} \in \mathcal{L}(V^\# \otimes W, \mathcal{L}(V, W))$ takové, že

$$\forall \varphi \in V^\#, \forall w \in W, \quad \tilde{T}(\varphi \otimes w) = \varphi(\cdot)w.$$

$\tilde{T}$ je surjektivní, neboť v konečnorozměrném případě lineární zobrazení hodnotí 1 generují

celý prostor $\mathcal{L}(V, W)$. Přitom platí

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W = \dim V^\# \cdot \dim W = \dim V^\# \otimes W,$$

a tedy $\tilde{T}$ je nutně i prosté.

Argument o surjektivitě můžeme rozvést ještě trochu podrobněji. Zvolme bázi $\{w_1, \dots, w_n\}$ ve W a buď $\{w_1^\#, \dots, w_n^\#\}$ odpovídající báze ze souřadnicových funkcionalů ve $W^\#$. Pro libovolné $A \in \mathcal{L}(V, W)$ máme

$$Av = \sum_{j=1}^n w_j^\#(Av) w_j = \sum_{j=1}^n \varphi_j(v) w_j = \left(\sum_{j=1}^n T_{\varphi_j, w_j} \right) v, \text{ kde } \varphi_j := w_j^\# \circ A \in V^\#.$$

Poznámka 1.2.12. Opět se omezíme na konečnorozměrné vektorové prostory V, W . Víme, že $V \otimes W = \text{span}\{v \otimes w; v \in V, w \in W\}$. Na druhé straně z poznámky 1.2.11 lze usoudit, že

$$V \otimes W \neq \{v \otimes w; v \in V, w \in W\}, \text{ pokud } \dim V > 1 \text{ a } \dim W > 1.$$

Například při izomorfismu $V^\# \otimes W \simeq \mathcal{L}(V, W)$ prvky tvaru $\varphi \otimes w$ v tenzorovém součinu $V^\# \otimes W$ odpovídají lineárním zobrazením v $\mathcal{L}(V, W)$, která mají hodnotu 1. Tato lineární zobrazení ovšem nevyčerpávají celý prostor $\mathcal{L}(V, W)$.

V dalším vztahu využijeme toho, že V lze přirozeně ztotožnit s druhým duálem $(V^\#)^\#$, čili máme k dispozici izomorfismus $V \simeq (V^\#)^\#$. Na základě poznámky 1.2.11 pak dostáváme izomorfismus

$$V \otimes W \simeq (V^\#)^\# \otimes W \simeq \mathcal{L}(V^\#, W).$$

Tento vztah v principu umožňuje alternativní zavedení tenzorového součinu $V \otimes W$. Zásadní nevýhodou takového zavedení (kromě toho, že se omezuje na konečnorozměrný případ) je asymetrie, s jakou vystupují prostory V a W ve výrazu $\mathcal{L}(V^\#, W)$.

Poznámka 1.2.13. Krátce naznačíme, jak souvisí zavedený tenzorový součin, opět v konečnorozměrném případě, s fyzikálním popisem tenzorů. Ve fyzikálním přístupu se tenzorem rozumí veličina závisající na jistém počtu horních a dolních indexů, která má předepsané transformační vlastnosti při přechodu od báze k bázi v daném vektorovém prostoru.

Buď V vektorový prostor, $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Vektory ve V , či přesněji jejich souřadnice v dané bázi představují kontravariantní tenzory prvního řádu. Abychom tento výrok upřesnili, uvažme dvě báze $(v_1, \dots, v_n)$ a $(v'_1, \dots, v'_n)$ ve V , které jsou spolu svázány rovnicemi

$$v'_k = \sum_{j=1}^n a_k^j v_j, \quad k = 1, \dots, n.$$

Zde $A = (a_k^j)$ je matice přechodu. Označme jako $\tilde{A} = (\tilde{a}_k^j)$ matici inverzní k A . Jsou-li pořadí (ξ^j) a (ξ'^j) souřadnice nějakého vektoru $x \in V$ vzhledem k těmto dvěma bázím, pak transformace mezi nimi má tvar

$$\xi'^j = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k^j \xi^k.$$

Kontravariantní tenzory druhého řádu odpovídají souřadnicím vektorů z prostoru $V \otimes V$ vzhledem k bázi $\{v_{j_1} \otimes v_{j_2}; 1 \leq j_1, j_2 \leq n\}$. Pro $x \in V \otimes V$ tedy píšeme

$$x = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \xi^{j_1 j_2} v_{j_1} \otimes v_{j_2}$$

a transformační rovnice pro tenzor $(\xi^{j_1 j_2})$ má tvar

$$\xi'^{j_1 j_2} = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \tilde{a}_{k_1}^{j_1} \tilde{a}_{k_2}^{j_2} \xi^{k_1 k_2}.$$

Tento postup lze snadno zobecnit na kontravariantní tenzory p -tého řádu, které odpovídají vektorům, přesněji jejich souřadnicím v odpovídající bázi, v p -násobném tenzorovém součinu $V \otimes \cdots \otimes V$.

Abychom získali také tenzory s dolními indexy, to jest kovariantní tenzory, do tohoto postupu musíme zahrnout i duální prostor $V^\#$. Je-li ve V zvolena báze $(v_1, \dots, v_n)$, pak ve $V^\#$ se volí duální báze $(v_1^\#, \dots, v_n^\#)$ tvořená souřadnicovými funkcionaly. Namísto $v_j^\#$ píšme v^j . Označíme-li jako (η_j) souřadnice vektoru $y \in V^\#$ v bázi $(v^1, \dots, v^n)$, pak transformační rovnice mají tvar

$$\eta'_j = \sum_{k=1}^n a_j^k \eta_k.$$

Popsaný postup lze zřejmě zobecnit na tenzorové součiny tvaru $V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^\# \otimes \cdots \otimes V^\#$. Další podrobnosti již vynecháváme.

Větu o univerzalitě tenzorového součinu (věta 1.1.15) lze s výhodou využít i při zavedení tenzorového součinu lineárních zobrazení.

Definice 1.2.14. Buďte V_1, V_2, W_1, W_2 vektorové prostory, $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, $B \in \mathcal{L}(W_1, W_2)$. Lineární zobrazení

$$A \otimes B \in \mathcal{L}(V_1 \otimes W_1, V_2 \otimes W_2) \tag{1.7}$$

definujeme následovně. Zobrazení

$$V_1 \times W_1 \rightarrow V_2 \otimes W_2 : (v, w) \mapsto Av \otimes Bw$$

je bilineární. Podle věty 1.1.15 existuje právě jedno lineární zobrazení (1.7), které splňuje

$$\forall v \in V, \forall w \in W, (A \otimes B)v \otimes w = Av \otimes Bw.$$

Poznámka 1.2.15. Ověření následujících jednoduchých vlastností tenzorového součinu lineárních zobrazení je přenecháno čtenáři.

(1) Buďte $V_1, V_2, V_3, W_1, W_2, W_3$ vektorové prostory, $A_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, $A_2 \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$, $B_1 \in \mathcal{L}(W_1, W_2)$, $B_2 \in \mathcal{L}(W_2, W_3)$. Potom

$$(A_2 \otimes B_2)(A_1 \otimes B_1) = A_2 A_1 \otimes B_2 B_1.$$

(2) Zobrazení

$$\mathcal{L}(V_1, V_2) \times \mathcal{L}(W_1, W_2) \rightarrow \mathcal{L}(V_1 \otimes W_1, V_2 \otimes W_2) : (A, B) \mapsto A \otimes B$$

je bilineární.

Značení 1.2.16. Buďte V, W vektorové prostory. Symbolem $\text{Mult}(V, W; \mathbb{F})$ označíme vektorový prostor všech bilineárních zobrazení $V \times W \rightarrow \mathbb{F}$.

Věta 1.2.17. Pro vektorové prostory V, W existuje „přirozený“ lineární izomorfismus

$$T: \text{Mult}(V, W; \mathbb{F}) \rightarrow (V \otimes W)^\#$$

jednoznačně určený vztahem

$$\forall \omega \in \text{Mult}(V, W; \mathbb{F}), \forall v \in V, \forall w \in W, T\omega(v \otimes w) = \omega(v, w).$$

Důkaz. Každé $\omega \in \text{Mult}(V, W; \mathbb{F})$ představuje bilineární zobrazení, a proto podle věty 1.1.15 existuje právě jedno lineární zobrazení $T\omega \in \mathcal{L}(V \otimes W, \mathbb{F}) = (V \otimes W)^\#$ takové, že

$$\forall v \in V, \forall w \in W, T\omega(v \otimes w) = \omega(v, w).$$

Tím je definováno zobrazení $T: \text{Mult}(V, W; \mathbb{F}) \rightarrow (V \otimes W)^\#$. Není těžké vidět, že toto zobrazení je lineární. Naopak definujeme zobrazení $S: (V \otimes W)^\# \rightarrow \text{Mult}(V, W; \mathbb{F})$ takto:

$$\forall \varphi \in (V \otimes W)^\#, \forall v \in V, \forall w \in W, S\varphi(v, w) := \varphi(v \otimes w).$$

Mějme $v \in V, w \in W$ libovolné vektory. Pro dané $\varphi \in (V \otimes W)^\#$ odvodíme

$$TS\varphi(v \otimes w) = S\varphi(v, w) = \varphi(v \otimes w).$$

Vzhledem k tvrzení 1.1.13 ad (2) odtud můžeme usoudit, že

$$\forall \varphi \in (V \otimes W)^\#, TS\varphi = \varphi, \text{ tedy } TS = I_{(V \otimes W)^\#}.$$

Naopak pro dané $\omega \in \text{Mult}(V, W; \mathbb{F})$ odvodíme

$$ST\omega(v, w) = T\omega(v \otimes w) = \omega(v, w).$$

To znamená, že

$$\forall \omega \in \text{Mult}(V, W; \mathbb{F}), ST\omega = \omega, \text{ tedy } ST = I_{\text{Mult}(V, W; \mathbb{F})}.$$

Dokázali jsme tak, že T a S jsou navzájem inverzní izomorfismy vektorových prostorů. $\square$

Poznámka 1.2.18. Jestliže navíc $\dim V < \infty, \dim W < \infty$, pak z věty 1.2.17 vyplývá existence izomorfismu

$$V \otimes W \simeq \text{Mult}(V, W; \mathbb{F})^\#.$$

Tento vztah představuje další množnost, jak poměrně jednoduše zavést tenzorový součin konečnorozměrných vektorových prostorů.

1.3 Tenzorový součin Hilbertových prostorů

V této podkapitole si již s čistě algebraickým přístupem nevystačíme. Těleso $\mathbb{F}$ nebude nadále libovolné, omezíme se pouze na tělesa $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Pro určitost ale budeme rovnou předpokládat, že $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Věta 1.3.1. *Budte $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ vektorové prostory se skalárním součinem (neboli unitární prostory). Potom na $V \otimes W$ existuje skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jednoznačně určený vztahem*

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall w_1, w_2 \in W, \langle v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle_V \langle w_1, w_2 \rangle_W. \quad (1.8)$$

Důkaz. Jednoznačnost je zřejmá, neboť skalární součin je předepsán na vektorech tvaru $v \otimes w$, kde v probíhá V , w probíhá W , a tyto vektory generují celý prostor $V \otimes W$.

Existence. Nejprve zavedeme hermitovskou (seskvilineární) formu $\mathfrak{s}$ na volném vektorovém prostoru $\mathcal{F}(V \times W)$,

$$\mathfrak{s}: \mathcal{F}(V \times W) \times \mathcal{F}(V \times W) \rightarrow \mathbb{C},$$

tak, že ji předepíšeme na Hamelově bázi $\{\delta_{(x,y)}; x \in V, y \in W\}$:

$$\forall x_1, x_2 \in V, \forall y_1, y_2 \in W, \mathfrak{s}(\delta_{(x_1,y_1)}, \delta_{(x_2,y_2)}) := \langle x_1, x_2 \rangle_V \langle y_1, y_2 \rangle_W.$$

Neboli při podrobnějším popisu této formy máme

$$\mathfrak{s}\left(\sum_j \alpha_j \delta_{(x_j, y_j)}, \sum_k \alpha'_k \delta_{(x'_k, y'_k)}\right) = \sum_j \sum_k \overline{\alpha_j} \alpha'_k \langle x_j, x'_k \rangle_V \langle y_j, y'_k \rangle_W,$$

kde $\alpha_j, \alpha'_k \in \mathbb{C}$ jsou libovolné koeficienty a všechny sumy zde se vyskytující jsou konečné.

Připomeňme si, že $V \otimes W = \mathcal{F}(V \times W)/\mathfrak{Z}$, kde podprostor $\mathfrak{Z} \subset \mathcal{F}(V \times W)$ byl zaveden v definici 1.1.12. Samostatným výpočtem čtenář snadno ověří, že

$$\forall f \in \mathcal{F}(V \times W), \forall g \in \mathfrak{Z}, \mathfrak{s}(f, g) = 0 \quad (1.9)$$

(odtud $\mathfrak{s}(f, g) = 0$, kdykoliv $f \in \mathfrak{Z}$ nebo $g \in \mathfrak{Z}$). Odtud plyne, volně řečeno, že $\mathfrak{s}$ „přežije“ faktorizaci podle podprostoru $\mathfrak{Z}$. Výslednou hermitovskou formu označíme $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pro přesnou formulaci opět využijeme projekci

$$\pi: \mathcal{F}(V \times W) \rightarrow V \otimes W = \mathcal{F}(V \times W)/\mathfrak{Z}.$$

Připomeneme-li si, že $\pi(f) = f + \mathfrak{Z}$, a vezmeme-li v úvahu (1.9), pak se snadno přesvědčíme,

že následující definice je korektní:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(V \times W), \langle \pi(f), \pi(g) \rangle := \mathfrak{s}(f, g).$$

Vzhledem k tomu, že podle definice $\pi(\delta_{(v,w)}) = v \otimes w$, je z této konstrukce přímo vidět, že vztah (1.8) je splněn.

Zbývá ověřit, že hermitovská forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na $V \otimes W$ je ve skutečnosti skalárním součinem. Buď $x \in V \otimes W$ libovolný nenulový prvek. Chceme ukázat, že $\langle x, x \rangle > 0$. Vektor x lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^p f_j \otimes g_j, \text{ kde } p \in \mathbb{N} \text{ a } f_j \in V, g_j \in W \text{ pro } j = 1, 2, \dots, p$$

(nutně existuje alespoň jeden index ℓ_0 takový, že $f_{\ell_0} \neq 0$ a $g_{\ell_0} \neq 0$). Zvolíme po řadě ortonormální báze $(v_1, \dots, v_m)$ a $(w_1, \dots, w_n)$ v podprostorech $\text{span}(f_1, \dots, f_p) \subset V$ a $\text{span}(g_1, \dots, g_p) \subset W$. Vyjádříme vektory f_j v bázi $(v_1, \dots, v_m)$ a vektory g_j v bázi $(w_1, \dots, w_n)$ a x přepíšeme ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} v_j \otimes w_k, \text{ kde } \alpha_{jk} \in \mathbb{C}.$$

Podle věty 1.2.5 je soubor vektorů $\{v_j \otimes w_k; 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}$ lineárně nezávislý. Protože $x \neq 0$, musí platit

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |\alpha_{jk}| > 0.$$

Snadným výpočtem s využitím ortonormality bází a vlastnosti (1.8) zjistíme, že

$$\langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |\alpha_{jk}|^2 > 0.$$

Tím je důkaz věty úplný. □

Poznámka 1.3.2. Jak se čtenář sám snadno přesvědčí, tenzorový součin prostorů se skalárním součinem V a W má následující vlastnosti.

- (1) $\forall v \in V, \forall w \in W, \|v \otimes w\| = \|v\| \|w\|$.
- (2) Jsou-li $M \subset V, N \subset W$ ortonormální podmnožiny, pak množina

$$\{v \otimes w; v \in M, w \in N\}$$

je ortonormální v prostoru $V \otimes W$.

Definice 1.3.3. Tenzorovým součinem Hilbertových prostorů $\mathfrak{H}$ a $\mathfrak{K}$ rozumíme zúplnění prostoru $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$ ($\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$ je pre-Hilbertův prostor). Toto zúplnění označíme $\hat{\mathfrak{H}} \hat{\otimes} \mathfrak{K}$.

Poznámka 1.3.4. V mnoha textech, ve kterých se pracuje s tenzorovým součinem Hilbertových prostorů, se implicitně předpokládá zúplnění a speciálně se nevyznačuje, to jest stříška nad $\otimes$ se nepíše.

Připomenutí 1.3.5. Připomeňme si některé pojmy a vlastnosti týkající se Hilbertova prostoru $\mathfrak{H}$.

- (1) Podmnožina $M \subset \mathfrak{H}$ je *totální*, jestliže $\overline{\text{span } M} = \mathfrak{H}$
- (2) Podmnožina $U \subset \mathfrak{H}$ je *ortonormální báze* v $\mathfrak{H}$, právě když je ortonormální a totální.

Věta 1.3.6. *Budte $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$ Hilbertovy prostory, $M \subset \mathfrak{H}$, $N \subset \mathfrak{K}$ totální podmnožiny. Potom množina*

$$\{x \otimes y; x \in M, y \in N\} \quad (1.10)$$

je totální v Hilbertově prostoru $\mathfrak{H} \hat{\otimes} \mathfrak{K}$.

Důkaz. Stačí ukázat, že lineární obal množiny (1.10) je hustý v $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$ (neboť $\overline{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}} = \mathfrak{H} \hat{\otimes} \mathfrak{K}$). Nechť je dán vektor $f \in \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$, který zapíšeme ve tvaru

$$f = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j, \text{ kde } n \in \mathbb{N}, x_j \in \mathfrak{H} \text{ a } y_j \in \mathfrak{K} \text{ pro } j = 1, \dots, n.$$

Dále nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolíme $\tilde{x}_j \in \text{span } M$, $\tilde{y}_j \in \text{span } N$ takové, že

$$\|x_j\| \|y_j - \tilde{y}_j\| < \frac{\varepsilon}{2n}, \quad \|\tilde{y}_j\| \|x_j - \tilde{x}_j\| < \frac{\varepsilon}{2n} \text{ pro } j = 1, \dots, n.$$

Potom

$$\tilde{f} := \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j \otimes \tilde{y}_j \in \text{span}\{x \otimes y; x \in M, y \in N\}$$

a

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{f}\| &= \left\| \sum_{j=1}^n x_j \otimes (y_j - \tilde{y}_j) + \sum_{j=1}^n (x_j - \tilde{x}_j) \otimes \tilde{y}_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n (\|x_j\| \|y_j - \tilde{y}_j\| + \|x_j - \tilde{x}_j\| \|\tilde{y}_j\|) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána. □

Okamžitým důsledkem této věty a poznámky 1.3.2 ad (2) je následující tvrzení.

Důsledek 1.3.7. *Jsou-li po řadě U a V ortonormální báze v Hilbertových prostorech $\mathfrak{H}$ a $\mathfrak{K}$, pak množina $\{u \otimes v; u \in U, v \in V\}$ je ortonormální báze v Hilbertově prostoru $\mathfrak{H} \hat{\otimes} \mathfrak{K}$.*

Poznámka 1.3.8. (1) Jsou-li $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ separabilní Hilbertovy prostory, pak Hilbertův prostor $\mathfrak{H} \hat{\otimes} \mathfrak{K}$ je separabilní.

(2) Jestliže $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ jsou separabilní Hilbertovy prostory, $A \in \mathcal{S}_2(\mathfrak{H})$, $B \in \mathcal{S}_2(\mathfrak{K})$ (Hilbertovy-Schmidtovy operátory), pak $A \otimes B \in \mathcal{S}_2(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K})$ a $\|A \otimes B\|_2 = \|A\|_2 \|B\|_2$ (Hilbertova-Schmidtova norma).

Bude rozebráno na cvičení.

Příklad 1.3.9. Buďte (M, μ) , (N, ν) prostory s mírou. Předpokládejme, že prostory $L^2(M, d\mu)$, $L^2(N, d\nu)$ jsou separabilní. Potom existuje izometrický izomorfismus

$$L^2(M, d\mu) \hat{\otimes} L^2(N, d\nu) \simeq L^2(M \times N, d\mu d\nu),$$

který je díky větě o univerzalitě jednoznačně určen předpisem

$$L^2(M, d\mu) \hat{\otimes} L^2(N, d\nu) \ni (\varphi, \psi) \mapsto \eta \in L^2(M \times N, d\mu d\nu), \text{ kde } \eta(x, y) := \varphi(x)\psi(y).$$

Snadným výpočtem se lze přesvědčit, že takto zadané lineární zobrazení zachovává skalární součin. Jedná se tedy o izometrii a tedy také o prosté zobrazení. Zbývá ověřit surjektivitu. Tu zřejmě zaručuje následující lemma.

Lemma 1.3.10. *Buďte (M, μ) , (N, ν) prostory s mírou. Nechť $\{\varphi_j; j \in \mathbb{N}\}$ a $\{\psi_k; k \in \mathbb{N}\}$ jsou po řadě ortonormální báze v prostorech $L^2(M, d\mu)$ a $L^2(N, d\nu)$. Potom*

$$\{\eta_{jk}; j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}, \text{ kde } \eta_{jk}(x, y) := \varphi_j(x)\psi_k(y), \quad (1.11)$$

je ON báze v prostoru $L^2(M \times N, d\mu d\nu)$.

Důkaz. Snadným výpočtem se ověří, že (1.11) je ON množina. Je třeba ukázat, že ortonormální doplněk této množiny je nulový. Nechť $\xi \in L^2(M \times N, d\mu d\nu)$ splňuje

$$\forall j, k \in \mathbb{N}, \langle \eta_{jk}, \xi \rangle = \int_M \int_N \overline{\varphi_j(x)\psi_k(y)} \xi(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = 0. \quad (1.12)$$

Zvolme pevně, ale libovolně $k \in \mathbb{N}$ a položme

$$f_k(x) := \int_N \overline{\psi_k(y)} \xi(x, y) d\nu(y).$$

Pomocí Schwarzovy nerovnosti se snadno ověří, že $f_k \in L^2(M, d\mu)$. Z předpokladu (1.12) plyne

$$\forall j \in \mathbb{N}, \langle \varphi_j, f_k \rangle = \int_M \overline{\varphi_j(x)} f_k(x) d\mu(x) = 0.$$

Jelikož $\{\varphi_j\}$ je ON báze, nutně $f_k = 0$ v prostoru $L^2(M, d\mu)$, to jest $f_k(x) = 0$ pro skoro

všechna (s.v.) $x \in M$. Protože $k \in \mathbb{N}$ bylo libovolné, dostáváme

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{ pro s.v. } x \in M, \int_N \overline{\psi_k(y)} \xi(x, y) d\nu(y) = 0.$$

Jelikož sjednocení spočetně mnoha množin míry 0 je množina míry 0, platí také

$$\text{pro s.v. } x \in M, \forall k \in \mathbb{N}, \int_N \overline{\psi_k(y)} \xi(x, y) d\nu(y) = 0.$$

Opět díky vlastnosti ON báze, v tomto případě $\{\psi_k\}$, dostáváme

$$\text{pro s.v. } x \in M, \text{ pro s.v. } y \in N, \xi(x, y) = 0.$$

Z Fubiniovy věty pak plyne, že pro s.v. $(x, y) \in M \times N$, $\xi(x, y) = 0$. To znamená, že $\xi = 0$ v prostoru $L^2(M \times N, d\mu d\nu)$. $\square$

Věta 1.3.11. *Buďte $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ Hilbertovy prostory, $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$. Potom $A \otimes B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H} \hat{\otimes} \mathfrak{K})$,*

$$\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|.$$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že $\|A \otimes B\| \geq \|A\| \|B\|$. Postupně odvodíme

$$\begin{aligned} \|A \otimes B\| &= \sup_{\substack{z \in \mathfrak{H} \hat{\otimes} \mathfrak{K} \\ z \neq 0}} \frac{\|(A \otimes B)z\|}{\|z\|} \geq \sup_{\substack{x \in \mathfrak{H}, y \in \mathfrak{K} \\ x \neq 0, y \neq 0}} \frac{\|(A \otimes B)x \otimes y\|}{\|x \otimes y\|} = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{H}, y \in \mathfrak{K} \\ x \neq 0, y \neq 0}} \frac{\|Ax \otimes By\|}{\|x \otimes y\|} \\ &= \sup_{\substack{x \in \mathfrak{H} \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \sup_{\substack{y \in \mathfrak{K} \\ y \neq 0}} \frac{\|By\|}{\|y\|} = \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

Dále odhadneme

$$\|A \otimes B\| = \|(A \otimes I)(I \otimes B)\| \leq \|A \otimes I\| \|I \otimes B\|.$$

Důkaz bude ukončen, jestliže ukážeme, že $\|A \otimes I\| = \|A\|$. Již víme, že

$$\|A \otimes I\| \geq \|A\| \|I\| = \|A\|.$$

Potřebujeme tedy dokázat opačnou nerovnost, což znamená dokázat, že

$$\forall z \in \mathfrak{H} \hat{\otimes} \mathfrak{K}, \|(A \otimes I)z\| \leq \|A\| \|z\|.$$

Přitom se ale můžeme omezit na vektory z probíhající hustý podprostor $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K} \subset \mathfrak{H} \hat{\otimes} \mathfrak{K}$.

Nechť z je tvaru

$$z = \sum_{j=1}^n f_j \otimes g_j, \text{ kde } n \in \mathbb{N}, f_j \in \mathfrak{H}, g_j \in \mathfrak{K}. \quad (1.13)$$

Všimněme si, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že soubor vektorů $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ je ortonormální. Kdyby tomu tak totiž nebylo, mohli bychom v prostoru $\text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ zvolit ON bázi, každý vektor g_j vyjádřit v této bázi a dosadit do (1.13) a poté využít bilinearity tenzorového součinu. Při tomto předpokladu máme

$$\forall j, k = 1, 2, \dots, n, \quad \langle f_j \otimes g_j, f_k \otimes g_k \rangle = \|f_j\|^2 \delta_{jk}.$$

Vypočteme

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = \sum_{j=1}^n \|f_j\|^2$$

a

$$\|(A \otimes I)z\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^n A f_j \otimes g_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|A f_j\|^2 \leq \sum_{j=1}^n \|A\|^2 \|f_j\|^2 = \|A\|^2 \|z\|^2.$$

Tím jsme dokázali požadovanou nerovnost. □

Kapitola 2

Kompaktní operátory

2.1 Základní vlastnosti kompaktních operátorů

Úmluva 2.1.1. (1) Pro určitost budeme všude předpokládat, pokud nebude řečené jinak, že Banachovy prostory $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \dots$ nebo Hilbertovy prostory $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \dots$ jsou nad $\mathbb{C}$. Většina výsledků, snad jen s výjimkou spektrálních vlastností, ale platí i pro reálné prostory.

(2) Mluvíme-li o konvergenci v Banachově prostoru bez dalšího přívlastku, myslí se tím implicitně silná konvergence, to jest konvergence vzhledem k normě.

Znovu uvádíme základní definice.

Definice 2.1.2. Buďte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Banachovy prostory. Říkáme, že lineární zobrazení $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ je *úplně (či totálně) spojitě*, jestliže zobrazuje slabě konvergentní posloupnosti na silně konvergentní, a říkáme, že je *kompaktní*, jestliže zobrazuje omezené množiny na prekompaktní.

Podmnožinu kompaktních lineárních zobrazení v $\mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ budeme značit $\mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, případně zkráceně $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$, pokud $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$.

Poznámka. O něco níže zdůvodníme, že $\mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \subset \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ je ve skutečnosti vektorový podprostor.

Poznámka 2.1.3. (1) Vektorový součet kompaktních (resp. prekompaktních) množin v T_1 topologickém vektorovém prostoru je množina kompaktní (resp. prekompaktní).

Nejprve si připomeňme, že každý topologický vektorový prostor V je regulární. Je-li navíc T_1 , je i T_3 , a tedy i T_2 neboli Hausdorffův. Nyní je snadno vidět uvedené tvrzení.

(i) Nejprve předpokládejme, že $K, L \subset V$ jsou kompaktní podmnožiny. Potom $K + L \subset V$ je obrazem kompaktní množiny $K \times L \subset V \times V$ při spojitěm zobrazení, kterým je operace sčítání $+: V \times V \rightarrow V$. Přitom spojitý obraz kompaktní množiny je zase kompaktní množina.

(ii) Nyní předpokládejme, že $M, N \subset V$ jsou prekompaktní podmnožiny. Potom podle bodu (i) je $\overline{M} + \overline{N} \subset V$ kompaktní, a tedy i uzavřená podmnožina (neboť jsme v Haus-

dorffově prostoru). Jistě $M + N \subset \overline{M} + \overline{N}$, a proto $\overline{M + N} \subset \overline{M} + \overline{N}$. Tedy $\overline{M + N}$ je uzavřená podmnožina kompaktní množiny, a proto je sama také kompaktní.

(2) Nadále předpokládáme, že V je topologický vektorový prostor (pro určitost) nad $\mathbb{C}$, a nechť $\lambda \in \mathbb{C}$. Potom platí následující tvrzení.

- (i) Je-li $K \subset V$ kompaktní množina, pak λK je kompaktní množina.
- (ii) Je-li $M \subset V$ prekompaktní množina, pak λM je prekompaktní množina.

Skutečně, obě tvrzení jsou zřejmá pro $\lambda = 0$. Pro $\lambda \neq 0$ je zobrazení

$$V \rightarrow V : x \mapsto \lambda x$$

spojité a invertovatelné a inverzní zobrazení je také spojitě. Čili je to homeomorfismus a ten zachovává všechny topologické vlastnosti.

Poznámka 2.1.4. Buďte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Banachovy prostory, $A, B \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Potom $A + B, \lambda A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. To znamená, že $\mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ je skutečně vektorový prostor.

Pro ověření uvažme $S \subset \mathfrak{X}$ omezenou množinu. Potom

$$(A + B)(S) \subset A(S) + B(S),$$

a tedy $(A + B)(S)$ je prekompaktní množina, neboť každá podmnožina prekompaktní množiny je sama také prekompaktní. Rovněž $(\lambda A)(S) = \lambda A(S)$ je prekompaktní množina.

Značení 2.1.5. Skutečnost, že nějaká posloupnost (x_n) v Banachově prostoru $\mathfrak{X}$ konverguje slabě k $x \in \mathfrak{X}$, budeme často zapisovat takto: $x_n \xrightarrow{w} x$ v $\mathfrak{X}$.

Připomenutí 2.1.6. Slabě konvergentní posloupnost v Banachově prostoru je omezená (důsledek principu stejnoměrné omezenosti). Každá posloupnost v Banachově prostoru může mít nejvýše jednu slabou limitu (důsledek Hahnovy-Banachovy věty).

V dalším budeme potřebovat následující lemma, které říká, že spojitě (omezené) lineární zobrazení převádí slabě konvergentní posloupnosti na slabě konvergentní posloupnosti.

Lemma 2.1.7. Buďte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Banachovy prostory, $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $(x_n) \subset \mathfrak{X}$ posloupnost, $x \in \mathfrak{X}$. Jestliže $x_n \xrightarrow{w} x$ v $\mathfrak{X}$, potom $Ax_n \xrightarrow{w} Ax$ v $\mathfrak{Y}$.

Důkaz. Pro libovolné $\psi \in \mathfrak{Y}^*$ položme $\varphi := \psi \circ A \in \mathfrak{X}^*$. Dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(Ax_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x) = \psi(Ax).$$

To dokazuje lemma. □

Věta 2.1.8. Buďte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Banachovy prostory, $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Je-li A kompaktní, pak A je úplně spojitě lineární zobrazení.

Důkaz. Důkaz rozdělíme na dvě části.

(I) Buď (x_n) libovolná slabě konvergentní posloupnost v $\mathfrak{X}$, $x_n \xrightarrow{w} x \in \mathfrak{X}$. Ukážeme, že existuje posloupnost (x'_n) vybraná z (x_n) taková, že $Ax'_n \rightarrow Ax$ (myslí se silná konvergence).

Ze slabé konvergence plyne, že množina $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ je omezená, a z předpokladu kompaktnosti pak dále, že $\{Ax_n; n \in \mathbb{N}\}$ je prekompaktní množina. Tudíž z posloupnosti (Ax_n) lze vybrat konvergentní podposloupnost, to jest existuje posloupnost (x'_n) vybraná z (x_n) taková, že $Ax'_n \rightarrow y \in \mathfrak{Y}$. Potom také $Ax'_n \xrightarrow{w} y$.

Na druhé straně slabá konvergence posloupnosti (x_n) implikuje $Ax_n \xrightarrow{w} Ax$, a proto také $Ax'_n \xrightarrow{w} Ax$. Po porovnání vidíme, že nutně $y = Ax$. Tedy $Ax'_n \rightarrow Ax$ v $\mathfrak{Y}$.

(II) V tomto kroku již dokážeme úplnou spojitost. Buď opět $(x_n) \subset \mathfrak{X}$ libovolná posloupnost taková, že $x_n \xrightarrow{w} x \in \mathfrak{X}$. Chceme ukázat, že $Ax_n \rightarrow Ax$ v $\mathfrak{Y}$.

Budeme postupovat sporem. Předpokládejme tedy, že existuje $\varepsilon > 0$ s vlastností

$$\|Ax_n - Ax\| \geq \varepsilon \text{ pro nekonečně mnoho } n \in \mathbb{N}.$$

V tom případě můžeme z (x_n) vybrat posloupnost (x'_n) takovou, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|Ax'_n - Ax\| \geq \varepsilon. \quad (2.1)$$

Ale současně jistě platí $x'_n \xrightarrow{w} x$ v $\mathfrak{X}$. Podle části (I) důkazu z (x'_n) lze vybrat podposloupnost (x''_n) takovou, že $Ax''_n \rightarrow Ax$ v $\mathfrak{Y}$. To je však ve sporu s (2.1). $\square$

Věta 2.1.9. *Z každé omezené posloupnosti v Hilbertově prostoru (ne nutně separabilním) lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Mějme dán Hilbertův prostor $\mathfrak{H}$ a v něm posloupnost (x_n) omezenou konstantou $M \geq 0$, to jest (x_n) splňuje

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M.$$

Máme ukázat, že existuje posloupnost (y_n) vybraná z (x_n) a $x_0 \in \mathfrak{H}$ tak, že platí

$$\forall z \in \mathfrak{H}, \lim_{n \rightarrow \infty} \langle z, y_n \rangle = \langle z, x_0 \rangle. \quad (2.2)$$

Důkaz provedeme v několika krocích.

(I) Nejprve budeme předpokládat, že $\mathfrak{H}$ je separabilní Hilbertův prostor (pro určitost nad $\mathbb{C}$). V $\mathfrak{H}$ zvolíme ortonormální bázi $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$. Tvrdíme, že existuje posloupnost (y_n) vybraná z (x_n) , která splňuje

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_k, y_n \rangle \in \mathbb{C} \text{ existuje.} \quad (2.3)$$

Vybranou posloupnost (y_n) nalezneme pomocí diagonálního výběru. Nejprve rekurzivně nalezneme posloupnost posloupností

$$(x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

takovou, že

- (i) $(x_n^{(0)})_{n \in \mathbb{N}}$ je totožná se zadanou posloupností $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
- (ii) pro všechna $k \geq 0$ je $(x_n^{(k+1)})_{n \in \mathbb{N}}$ vybraná z $(x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$,
- (iii) pro všechna $k \geq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_j, x_n^{(k)} \rangle \in \mathbb{C} \text{ existuje pro } j = 1, \dots, k.$$

První vybranou posloupnost $(x_n^{(1)})$ můžeme nalézt, neboť číselná posloupnost $(\langle u_1, x_n \rangle)$ je omezená, $|\langle u_1, x_n \rangle| \leq \|u_1\| \|x_n\| \leq \|u_1\| M$, a z omezené číselné posloupnosti lze vždy vybrat konvergentní podposloupnost.

Nechť posloupnost vektorů $(x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ splňující podmínku (iii) byla již nalezena. Z ní vybranou posloupnost $(x_n^{(k+1)})_{n \in \mathbb{N}}$ nalezneme s odvoláním na stejný argument, a sice že číselná posloupnost $(\langle u_{k+1}, x_n^{(k)} \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ je omezená (obdobný odhad), a lze z ní proto vybrat konvergentní podposloupnost. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_j, x_n^{(k+1)} \rangle \in \mathbb{C}$ existuje nejen pro $j = 1, \dots, k$, ale rovněž pro $j = k + 1$.

Nakonec položíme

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n := x_n^{(n)}.$$

Potom posloupnost (y_n) je vybraná z (x_n) a splňuje nejen (2.3), ale díky linearitě i o něco

obecnější podmínku

$$\forall u \in \text{span}\{u_k; k \in \mathbb{N}\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u, y_n \rangle \in \mathbb{C} \text{ existuje.}$$

(II) Tvrdíme, že posloupnost (y_n) nalezená v části (I) důkazu splňuje

$$\forall z \in \mathfrak{H}, (\langle z, y_n \rangle) \text{ je cauchyovská posloupnost.}$$

Mějme dáno $z \in \mathfrak{H}$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme $u \in \text{span}\{u_k; k \in \mathbb{N}\}$ (jedná se o podprostor hustý v $\mathfrak{H}$) tak, aby

$$\|z - u\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Pro $m, n \in \mathbb{N}$ odhadneme (posloupnost (y_n) je samozřejmě také omezená konstantou M)

$$\begin{aligned} |\langle z, y_n \rangle - \langle z, y_m \rangle| &\leq |\langle z - u, y_n - y_m \rangle| + |\langle u, y_n \rangle - \langle u, y_m \rangle| \\ &\leq \|z - u\|(\|y_n\| + \|y_m\|) + |\langle u, y_n \rangle - \langle u, y_m \rangle| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |\langle u, y_n \rangle - \langle u, y_m \rangle|. \end{aligned}$$

Posloupnost $(\langle u, y_n \rangle)$ je konvergentní, a tudíž cauchyovská. Proto

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0, |\langle u, y_n \rangle - \langle u, y_m \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tyto odhady dohromady dávají

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0, |\langle z, y_n \rangle - \langle z, y_m \rangle| < \varepsilon.$$

To znamená, že posloupnost $(\langle z, y_n \rangle)$ je skutečně cauchyovská.

(III) Abychom analýzu vybrané posloupnosti (y_n) dokončili, ukážeme, že slabě konverguje k nějakému vektoru $x_0 \in \mathfrak{H}$.

Prostor $\mathbb{C}$ je úplný, každá cauchyovská posloupnost v něm má limitu. Podle části (II) důkazu můžeme definovat lineární funkcionál φ na $\mathfrak{H}$ vztahem

$$\forall z \in \mathfrak{H}, \varphi(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, z \rangle.$$

Přitom pro všechny indexy n máme $|\langle y_n, z \rangle| \leq M\|z\|$, a proto $\forall z \in \mathfrak{H}, |\varphi(z)| \leq M\|z\|$, čili funkcionál φ je omezený. Podle Rieszovy věty o reprezentaci funkcionálu existuje právě jedno $x_0 \in \mathfrak{H}$ takové, že $\varphi(z) = \langle x_0, z \rangle$ pro všechna $z \in \mathfrak{H}$. Dostáváme tak vztah (2.2).

Tím je věta dokázána pro případ separabilního Hilbertova prostoru.

(IV) Nakonec ukážeme, že věta platí i pro obecný Hilbertův prostor $\mathfrak{H}$. Položme

$$\mathfrak{H}_1 := \overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}.$$

Potom $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1^\perp$, $\mathfrak{H}_1$ je separabilní Hilbertův prostor a $(x_n) \subset \mathfrak{H}_1$. Jak již bylo dokázáno, existují posloupnost (y_n) vybraná z (x_n) a $x_0 \in \mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ tak, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle z_1, y_n \rangle = \langle z_1, x_0 \rangle \text{ pro všechna } z_1 \in \mathfrak{H}_1.$$

Pro libovolné $z \in \mathfrak{H}$ můžeme psát $z = z_1 + z_2$, kde $z_1 \in \mathfrak{H}_1$ a $z_2 \in \mathfrak{H}_1^\perp$. Přitom $\langle z_2, y_n \rangle = 0$ pro všechna n , rovněž $\langle z_2, x_0 \rangle = 0$, a proto

$$\forall z \in \mathfrak{H}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle z, y_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle z_1, y_n \rangle + \langle z_2, y_n \rangle) = \langle z_1, x_0 \rangle = \langle z, x_0 \rangle.$$

To dokazuje, že posloupnost (y_n) konverguje slabě k x_0 i v obecném případě. $\square$

V Hilbertových prostorech platí i implikace opačná vzhledem k implikaci z věty 2.1.8.

Věta 2.1.10. *Buďte $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$ Hilbertovy prostory (ne nutně separabilní), $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$. Potom A je kompaktní, právě když A je úplně spojitě lineární zobrazení.*

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$ byla dokázána ve větě 2.1.8 dokonce i pro případ Banachových prostorů. Dokážeme implikaci $(\Leftarrow)$. Buďte A úplně spojitě lineární zobrazení, $S \subset \mathfrak{H}$ libovolná omezená množina. Máme ukázat, že $A(S)$ je prekompaktní množina.

Jelikož jsme v metrickém prostoru, k tomu stačí a je nutné, aby platilo, že z libovolné posloupnosti $(y_n) \subset A(S)$ lze vybrat konvergentní podposloupnost (limitní vektor nemusí ležet v $A(S)$). K posloupnosti (y_n) nalezneme posloupnost $(x_n) \subset S$ takovou, že $Ax_n = y_n$ pro všechna n . Podle věty 2.1.9 z (x_n) lze vybrat podposloupnost (x'_n) takovou, že $x'_n \xrightarrow{w} x_0 \in \mathfrak{H}$. Z úplné spojitosti pak plyne, že $y'_n = Ax'_n \rightarrow Ax_0$ (silně), což jsme měli dokázat. $\square$

Věta 2.1.11. *Buďte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Banachovy prostory. Potom podprostor $\mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \subset \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ je uzavřený.*

Důkaz. Máme dokázat, že jestliže libovolná posloupnost $(A_n) \subset \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ konverguje v $\mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, to jest $A_n \rightarrow A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, ekvivalentně $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$, potom limitní lineární zobrazení A leží v $\mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Abychom dokázali, že A je kompaktní, uvažíme libovolnou posloupnost $(x_n) \subset \mathfrak{X}$, která je omezena konstantou $M \geq 0$, to jest

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| \leq M.$$

Potřebujeme ukázat, že existuje posloupnost (y_n) vybraná z (x_n) taková, že posloupnost

(Ay_n) konverguje v prostoru $\mathfrak{Y}$. Vzhledem k úplnosti prostoru $\mathfrak{Y}$, stačí dokázat, že posloupnost (Ay_n) je cauchyovská.

(I) Tvrdíme, že existuje posloupnost (y_n) vybraná z (x_n) , která splňuje

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} A_k y_n \text{ existuje v } \mathfrak{Y}.$$

Vybranou posloupnost (y_n) lze zkonstruovat pomocí diagonálního výběru. Vzhledem k tomu, že se nyní jedná o rutinní postup, který byl již demonstrován v důkazech některých předešlých vět, jsou podrobnosti ponechány na čtenáři jako cvičení. Například se lze inspirovat důkazem věty 2.1.9. Zde je jen stručný návod.

Rekurzivně se nalezne posloupnost posloupností $(x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, taková, že $(x_n^{(0)})$ je totožná s posloupností (x_n) , z každé posloupnosti je vybrána ta následující tak, aby pro všechna $k \geq 1$ platilo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_j x_n^{(k)} \text{ existuje v } \mathfrak{Y} \text{ pro } j = 1, \dots, k.$$

Například první vybranou posloupnost $(x_n^{(1)})$ lze nalézt, neboť posloupnost (x_n) je omezená, A_1 je kompaktní, a proto $\{A_1 x_n; n \in \mathbb{N}\}$ je prekompaktní množina. Obdobný argument lze použít i v dalších krocích.

(II) Dokážeme, že posloupnost (Ay_n) je cauchyovská, kde (y_n) je vybraná posloupnost z kroku (I).

Bud' $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme $k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Posloupnost $(A_k y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je konvergentní, tudíž cauchyovská, a proto

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0, \|A_k y_m - A_k y_n\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Potom pro všechna $m, n \geq n_0$ dostáváme

$$\begin{aligned} \|Ay_m - Ay_n\| &\leq \|Ay_m - A_k y_m\| + \|A_k y_m - A_k y_n\| + \|A_k y_n - Ay_n\| \\ &\leq \|A - A_k\| \|y_m\| + \|A_k y_m - A_k y_n\| + \|A - A_k\| \|y_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. □

Následují výsledky, a sice lemma 2.1.12, důsledek 2.1.13, důsledek 2.1.14, tvrzení 2.1.15, věta 2.1.16, tvrzení 2.1.17 a věta 2.1.18, které byly již probrány i s důkazy ve Funkcionální analýze 2. Zde je opět připomínáme, avšak bez důkazů. Důkazy si ale připomeňte! Některé jednodušší důkazy byly uvedeny jako cvičení. Pokud zde zůstaly nejasnosti, můžeme je

probrat na cvičení letos.

Lemma 2.1.12. *Budte X normovaný vektorový prostor, $V \subset X$ konečnorozměrný podprostor a $x \in X$. Potom existuje $v \in V$ takové, že*

$$\text{dist}(x, V) = \|x - v\|.$$

Důsledek 2.1.13. *Budte X normovaný vektorový prostor a $V \subset X$ konečnorozměrný podprostor. Jestliže $V \neq X$, potom existuje $x \in X$ takový vektor, že*

$$\|x\| = 1 \text{ a } \text{dist}(x, V) = 1.$$

Důsledek 2.1.14. *V každém normovaném vektorovém prostoru X nekonečné dimenze existuje spočetná podmnožina M , která splňuje*

$$(1) \forall x \in M, \|x\| = 1,$$

$$(2) \forall x, y \in M, x \neq y \implies \|x - y\| \geq 1.$$

Tvrzení 2.1.15. *Jednotková koule B_1 v normovaném vektorovém prostoru X je prekompaktní, právě když $\dim X < \infty$.*

Věta 2.1.16. *Budte $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$, $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$. Potom $AB, BA \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$.*

Větu 2.1.16 můžeme zformulovat v algebraických pojmech. Říká nám, že podprostor $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ je *ideálem* (dvoustranným) v $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$.

Tvrzení 2.1.17. *Jednotkový operátor $I \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ je kompaktní, právě když $\dim \mathfrak{X} < \infty$.*

Věta 2.1.18. *Bud' $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$. Jestliže $\dim \mathfrak{X} = \infty$, potom $0 \in \sigma(A)$.*

Značení 2.1.19. Buďte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Banachovy prostory, $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Symbolem $A' \in \mathcal{B}(\mathfrak{Y}^*, \mathfrak{X}^*)$ označíme *algebraicky sdružený (adjungovaný) operátor*, který je definován

$$\forall \psi \in \mathfrak{Y}^*, \quad A'\psi := \psi \circ A$$

Tvrzení 2.1.20. Buďte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ Banachovy prostory. Potom platí

- (1) Zobrazení $\mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \ni A \mapsto A' \in \mathcal{B}(\mathfrak{Y}^*, \mathfrak{X}^*)$ je lineární,
- (2) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \quad \|A'\| = \|A\|,$
- (3) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \forall B \in \mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}), \quad (BA)' = A'B'.$

Důkaz. Body (1), (2) snadno plynou přímo z definice. Důkaz byl (2) bude proveden na cvičení. $\square$

Věta 2.1.21. Buďte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Banachovy prostory. Je-li $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, potom $A' \in \mathcal{K}(\mathfrak{Y}^*, \mathfrak{X}^*)$.

Důkaz. Označme

$$B_1 := \{x \in \mathfrak{X}; \|x\| < 1\}, \quad B'_1 := \{\psi \in \mathfrak{Y}^*; \|\psi\| < 1\}.$$

Chceme ukázat, že množina $A'(B'_1) \subset \mathfrak{X}^*$ je prekompaktní, což je totéž jako totálně omezená.

Položme

$$\Omega := \overline{A(B_1)} \subset \mathfrak{Y}.$$

Podle předpokladu je Ω kompaktní metrický prostor (vzdálenost dvou bodů $x_1, x_2 \in \Omega$ je rovna $\|x_1 - x_2\|$). Dále položíme

$$S := \{\psi|_{\Omega}; \psi \in B'_1\} \subset C(\Omega).$$

Tedy S je podmnožina Banachova prostoru spojitých funkcí na Ω .

(I) Tvrdíme, že S je totálně omezená množina.

Nejprve ukážeme, že S je omezená množina. Každou funkci $f \in S$ můžeme psát ve tvaru $f = \psi|_{\Omega}$ pro jisté $\psi \in B'_1$ (ψ ale nemusí být jednoznačně určené). Můžeme odhadnout normu v $C(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{C(\Omega)} &= \max_{x \in \Omega} |f(x)| = \sup_{x \in \overline{A(B_1)}} |\psi(x)| = \sup_{x \in A(B_1)} |\psi(x)| = \sup_{y \in B_1} |\psi(Ay)| \\ &\leq \sup_{y \in B_1} \|\psi\| \|A\| \|y\| \leq \|A\|. \end{aligned}$$

Dále ukážeme, že S je tvořena stejně spojitými funkcemi. Opět $f = \psi|_{\Omega}$, $\psi \in B'_1$. Pro $x_1, x_2 \in \Omega$ odhadneme

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\psi(x_1) - \psi(x_2)| = |\psi(x_1 - x_2)| \leq \|\psi\| \|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Odhad nezávisí na f a odtud plyne tvrzení. Pomocí limitního přechodu je okamžitě vidět, že rovněž množina $\overline{S} \subset C(\Omega)$ je omezená a tvořena stejně spojitými funkcemi.

Nyní se můžeme odvolat na větu Arzelà–Ascoli, podle které je $\overline{S}$ kompaktní množina, a proto S je prekompaktní, a tudíž totálně omezená množina.

(II) Tvrdíme, že množiny S a $A'(B'_1)$ uvažované jako metrické prostory jsou izometrické.

Nejprve dokážeme rovnost

$$\|f_1 - f_2\|_{C(\Omega)} = \|A'\psi_1 - A'\psi_2\|, \text{ kde } f_j = \psi_j|_{\Omega}, \psi_j \in B'_1 \text{ pro } j = 1, 2. \quad (2.4)$$

Skutečně, postupně upravíme

$$\begin{aligned} \|f_1 - f_2\|_{C(\Omega)} &= \max_{x \in \Omega} |f_1(x) - f_2(x)| = \sup_{x \in A(B_1)} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \\ &= \sup_{y \in B_1} |\psi_1(Ay) - \psi_2(Ay)| = \sup_{y \in B_1} |A'(\psi_1 - \psi_2)(y)| \\ &= \|A'(\psi_1 - \psi_2)\| = \|A'\psi_1 - A'\psi_2\|. \end{aligned}$$

Nyní můžeme definovat zobrazení

$$\Phi: S \rightarrow A'(B'_1): f \mapsto A'\psi, \text{ kde } f = \psi|_{\Omega}, \psi \in B'_1.$$

Definice je korektní: jestliže $f = \psi_1|_{\Omega} = \psi_2|_{\Omega}$, potom z (2.4) dostáváme $A'\psi_1 = A'\psi_2$. Dále z (2.4) plyne, že zobrazení Φ je izometrické (zachovává metriku), a tudíž je i prosté. Φ je zřejmě také surjektivní, neboť

$$\Phi(S) = \{A'\psi; \psi \in B'_1\} = A'(B'_1).$$

(III) Nyní je snadné zdůvodnit, že metrický prostor $A'(B'_1)$ je totálně omezený, a tedy prekompaktní. Totální omezenost je metrická vlastnost (je vyjádřena pomocí metriky), a proto je invariantní vzhledem k izometrickým zobrazením. Prostor S je prekompaktní, a tudíž totálně omezený, a proto i prostor $A'(B'_1)$ je totálně omezený. $\square$

Nyní jsme schopni dokázat některé základní spektrální vlastnosti kompaktních operátorů. Nejprve jeden pomocný výsledek.

Lemma 2.1.22. *Bud'te X normovaný vektorový prostor a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posloupnost v X taková, že množina $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ je lineárně nezávislá. Položme $V_n := \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom v X existuje posloupnost $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s vlastnostmi*

- (1) $\forall n \in \mathbb{N}, \|y_n\| = 1,$
- (2) $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \text{span}\{y_1, y_2, \dots, y_n\},$
- (3) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \text{dist}(y_n, V_{n-1}) = 1.$

Důkaz. Posloupnost $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nalezneme rekurzivně. V prvním kroku položíme

$$y_1 := \frac{1}{\|x_1\|} x_1.$$

V n -tém kroku, $n \geq 2$, použijeme důsledek 2.1.13 pro $X = V_n$, $V = V_{n-1}$. Z tohoto důsledku plyne, že existuje vektor $y_n \in V_n$ s vlastnostmi (1) a (3). Navíc

$$\dim(V_{n-1} + \mathbb{C}y_n) = n = \dim V_n,$$

a proto $V_{n-1} + \mathbb{C}y_n = V_n$. Odtud již snadno pomocí matematické indukce plyne, že posloupnost $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ splňuje i (2). $\square$

Věta 2.1.23. *Bud' $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$, kde $\mathfrak{X}$ je Banachův prostor. Potom platí*

- (1) *pro všechna $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ je $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) < \infty$,*
- (2) *pro všechna $\delta > 0$ je množina $\{\lambda \in \sigma_p(A); |\lambda| \geq \delta\}$ konečná.*

Důkaz. (1) Označme

$$B'_1 := B_1 \cap \text{Ker}(A - \lambda I),$$

tedy B'_1 je jednotková koule ve vlastním podprostoru operátoru A příslušném vlastnímu číslu λ . Ukážeme, že B'_1 je prekompaktní množina. Ekvivalentní tvrzení je, že z libovolné posloupnosti (x_n) v B'_1 lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Protože A je kompaktní, $A(B_1)$ je prekompaktní množina, a proto z posloupnosti (Ax_n) lze vybrat konvergentní podposloupnost. Existuje tedy posloupnost (x'_n) vybraná z (x_n) taková, že $Ax'_n \rightarrow y \in \mathfrak{X}$. Protože $Ax'_n = \lambda x'_n$ pro všechna n , dostáváme $x'_n \rightarrow (1/\lambda)y$ v $\mathfrak{X}$.

Tím jsme ukázali, že jednotková koule B'_1 je prekompaktní, a odtud plyne, že vlastní podprostor $\text{Ker}(A - \lambda I)$ má konečnou dimenzi (viz tvrzení 2.1.15).

(2) Pro spor předpokládejme, že existují $\delta > 0$ a spočetně mnoho navzájem různých vlastních hodnot λ_n , $n \in \mathbb{N}$, operátoru A takových, že $|\lambda_n| \geq \delta$ pro všechna n . Ke každému vlastnímu číslu λ_n zvolíme vlastní vektor $x_n \neq 0$, $Ax_n = \lambda_n x_n$. Potom množina $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ je lineárně nezávislá (zdůvodněte samostatně tento známý fakt z lineární algebry!). Podle lemmatu 2.1.22 v $\mathfrak{X}$ existuje posloupnost $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s vlastnostmi

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, \|y_n\| = 1$,
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \text{span}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$,
- (iii) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \text{dist}(y_n, \text{span}\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}) = 1$.

Podle předpokladu máme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\| \frac{1}{\lambda_n} y_n \right\| \leq \frac{1}{\delta}.$$

a tedy množina

$$M := \left\{ \frac{1}{\lambda_n} y_n; n \in \mathbb{N} \right\}$$

je omezená. A je kompaktní, a proto množina

$$A(M) = \left\{ \frac{1}{\lambda_n} A y_n; n \in \mathbb{N} \right\}$$

je prekompaktní.

Na druhé straně tvrdíme, že platí

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n \implies \left\| \frac{1}{\lambda_n} A y_n - \frac{1}{\lambda_m} A y_m \right\| \geq 1. \quad (2.5)$$

Z nerovnosti (2.5) naopak plyne, že množina $A(M)$ nemůže být prekompaktní (zdůvodněte!), což znamená spor.

Abychom dokázali (2.5), pro dané $n \in \mathbb{N}$ vyjádříme

$$y_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

a upravíme

$$\frac{1}{\lambda_n} A y_n - y_n = \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} - 1 \right) x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - 1 \right) x_{n-1} + 0 \cdot x_n \in \text{span}\{y_1, \dots, y_{n-1}\}.$$

Můžeme tedy pro každý index n psát

$$\frac{1}{\lambda_n} A y_n = y_n + z_n, \text{ kde } z_n \in \text{span}\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$$

(pro $n = 1$ pokládáme $z_1 = 0$). Pro dva různé indexy $m, n \in \mathbb{N}$ pro určitost předpokládejme, že $n > m$. Dostáváme odhad

$$\left\| \frac{1}{\lambda_n} A y_n - \frac{1}{\lambda_m} A y_m \right\| = \|y_n + z_n - y_m - z_m\| \geq \text{dist}(y_n, \text{span}\{y_1, \dots, y_{n-1}\}) = 1,$$

neboť $z_n - y_m - z_m \in \text{span}\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$. □

Poznámka 2.1.24. Věta 2.1.23 nám říká a vyplývá z ní následující. Značení a předpoklady zůstávají stejné jako ve větě.

(1) Všechna nenulová vlastní čísla operátoru A mají konečnou (geometrickou) násobnost.

(2) Jediným hromadným bodem bodového spektra $\sigma_p(A)$ může (ale nemusí) být 0.

(3) Množina $\sigma_p(A) \setminus \{0\}$ (a tedy i $\sigma_p(A)$) je nejvýše spočetná.

Tvrzení (1), (2) vyplývají okamžitě z věty 2.1.23. K tvrzení (3) stačí poznamenat, že

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{C} \setminus B\left(0, \frac{1}{n}\right) \right),$$

přičemž množina $(\mathbb{C} \setminus B(0, 1/n)) \cap \sigma_p(A)$ je konečná pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Následující tvrzení již známe. Připomeňte si důkaz!

Tvrzení 2.1.25. *Budte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Banachovy prostory. Je-li $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ konečnorozměrné lineární zobrazení (to jest hodnost lineárního zobrazení A je konečná), potom $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.*

Tvrzení 2.1.26. *Budte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Banachovy prostory. Je-li $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, potom $\text{Ran } A$ je separabilní.*

Důkaz. Zapišme

$$\text{Ran } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B_n^X)$$

(kde $B_r^X = B^X(0, r)$ je koule v prostoru $\mathfrak{X}$). Přitom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $A(B_n^X) \subset \mathfrak{Y}$ prekompaktní, a tudíž totálně omezená a separabilní (totálně omezený metrický prostor je vždy separabilní). Spočetné sjednocení je pak také separabilní. $\square$

Poznámka 2.1.27. Budte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Banachovy prostory, $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Potom $\text{Ran}(A)$ má konečnou dimenzi, právě když buď $A = 0$ nebo pro jisté $n \in \mathbb{N}$ lze A zapsat ve tvaru

$$A = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\cdot) y_j, \quad (2.6)$$

kde $\varphi_j \in \mathfrak{X}^*$, $y_j \in \mathfrak{Y}$ pro $j = 1, \dots, n$. Zde tečka naznačuje místo ve výrazu, kam se dosazuje proměnná, to jest pro $x \in \mathfrak{X}$, $Ax = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) y_j$.

V případě Hilbertových prostorů $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$ namísto Banachových prostorů $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ a pro $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ lze využít Rieszovu větu o reprezentaci funkcionálu. Místo (2.6) pak můžeme A zapsat ve tvaru

$$A = \sum_{j=1}^n \langle x_j, \cdot \rangle y_j,$$

kde $x_j \in \mathfrak{H}$, $y_j \in \mathfrak{K}$ pro $j = 1, \dots, n$.

Při této příležitosti si povšimněme, že pokud navíc $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}$, to jest $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, potom

$$A^* = \sum_{j=1}^n \langle y_j, \cdot \rangle x_j.$$

Tedy hermitovsky sdružený operátor ke konečnorozměrnému operátoru je také konečnorozměrný.

Podrobnosti budou probrány na cvičení.

Věta 2.1.28. *V Hilbertově prostoru (ne nutně separabilním) konečnorozměrné operátory tvoří hustý podprostor v prostoru kompaktních operátorů (vzhledem k operátorové normě).*

Důkaz. Buď A libovolný kompaktní operátor na Hilbertově prostoru $\mathfrak{H}$. Chceme ukázat, že A lze libovolně přesně aproximovat konečnorozměrnými operátory ve smyslu operátorové normy. Pokud $\dim \operatorname{Ran} A < \infty$, je již operátor A sám konečnorozměrný. Uvažujme tedy případ, kdy $\dim \operatorname{Ran} A = \infty$. Víme ale, že $\operatorname{Ran} A \subset \mathfrak{H}$ je separabilní podprostor.

Zvolme ortonormální bázi $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ v $\overline{\operatorname{Ran} A}$ a označme jako P_n ortogonální projekci v $\mathfrak{H}$ na $\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože $P_n A$ je konečnorozměrný operátor, stačí dokázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - P_n A\| = 0$. Jistě platí

$$\forall z \in \overline{\operatorname{Ran} A}, \quad \|(I - P_n)z\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle u_k, z \rangle|^2 \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Dále je zřejmé, že $P_n P_{n+1} = P_{n+1} P_n = P_n$, a tedy $(I - P_{n+1})(I - P_n) = I - P_{n+1}$. Vezmeme v úvahu také fakt, že všechny nenulové ortogonální projekce mají normu rovnou 1. Dostáváme nerovnost

$$\begin{aligned} \|A - P_{n+1} A\| &= \|(I - P_{n+1})A\| = \|(I - P_{n+1})(I - P_n)A\| \leq \|I - P_{n+1}\| \|(I - P_n)A\| \\ &= \|A - P_n A\|. \end{aligned}$$

Díky monotonii tak existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - P_n A\| = \varepsilon \geq 0.$$

Ukážeme, že $\varepsilon = 0$.

Pro spor předpokládejme, že $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ můžeme zvolit

$$x_n \in \mathfrak{H} \text{ tak, že } \|x_n\| = 1 \text{ a } \|(I - P_n)Ax_n\| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Protože A je kompaktní, existuje vybraná posloupnost $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, pro kterou existuje

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Ax_{n_k} = y \in \overline{\operatorname{Ran} A}.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\frac{\varepsilon}{2} < \|(I - P_{n_k})Ax_{n_k}\| \leq \|(I - P_{n_k})(Ax_{n_k} - y)\| + \|(I - P_{n_k})y\| \leq \|Ax_{n_k} - y\| + \|(I - P_{n_k})y\|.$$

Přitom pravá strana v této nerovnosti konverguje k 0 pro $k \rightarrow \infty$, což je zjevně ve sporu s levou stranou. $\square$

Poznámka 2.1.29. V Banachových prostorech vlastnost z věty 2.1.28 obecně být splněna nemusí. Pokud splněna je, tak se někdy říká, že příslušný Banachův prostor má *vlastnost*

aproximace (Approximation Property).

Poznámka 2.1.30. Buď A omezený operátor na Hilbertově prostoru $\mathfrak{H}$. Vyjasněme vztah mezi hermitovsky sdruženým operátorem $A^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ a algebraicky sdruženým operátorem $A' \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}^*)$. Pro každé $x \in \mathfrak{H}$ označme symbolem $\hat{x} \in \mathfrak{H}^*$ lineární funkcionál definovaný vztahem

$$\forall y \in \mathfrak{H}, \quad \hat{x}(y) := \langle x, y \rangle.$$

Dále zavedeme zobrazení

$$U: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}^*: x \mapsto \hat{x}.$$

Podle Rieszovy věty o reprezentaci funkcionálu je zobrazení U anti-lineární izometrická bijekce.

Tvrdíme, že platí

$$U^{-1}A'U = A^*. \quad (2.7)$$

Ověření je přímočaré. Rovnici (2.7) lze ekvivalentně přepsat

$$\forall x, y \in \mathfrak{H}, \quad \langle U^{-1}A'Ux, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

Přitom pro libovolné $\varphi \in \mathfrak{H}^*$ a $y \in \mathfrak{H}$ platí $\langle U^{-1}\varphi, y \rangle = \varphi(y)$. Postupně upravíme

$$\langle U^{-1}A'Ux, y \rangle = (A'Ux)(y) = Ux(Ay) = \hat{x}(Ay) = \langle x, Ay \rangle.$$

Poznamenejme ještě, že pro Hilbertovy prostory ze vztahu (2.7) opět plyne rovnost $\|A'\| = \|A^*\| = \|A\|$. Obecněji rovnost $\|A'\| = \|A\|$ byla na cvičení dokázána i pro Banachovy prostory.

Následující větu můžeme dokázat dvěma různými způsoby.

Věta 2.1.31. *Buď $\mathfrak{H}$ Hilbertův prostor. Je-li $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$, potom rovněž $A^* \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$.*

Důkaz č. 1. Z věty 2.1.21 víme, že $A' \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}^*)$ je kompaktní. Přitom zobrazení U a U^{-1} zobrazují (jako každá izometrická zobrazení) omezené množiny na omezené a totálně omezené na totálně omezené. Přitom v úplném metrickém prostoru $\mathfrak{H}$ je podmnožina prekompaktní, právě když je totálně omezená. Z rovnosti (2.7) pak snadno plyne, že operátor A^* je také kompaktní. Doplnění podrobností je ponecháno na čtenáři. $\square$

Důkaz č. 2. Podle věty 2.1.28 existuje posloupnost (A_n) konečnorozměrných operátorů na $\mathfrak{H}$, pro kterou $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je rovněž A_n^* konečnorozměrný operátor, a tedy $A_n^* \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Přitom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^* - A_n^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0.$$

Podle věty 2.1.11 je $A^* \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. $\square$

Věta 2.1.32. *Bud' $\mathfrak{X}$ Banachův prostor. Potom pro všechny operátory $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$ a pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, je $\text{Ran}(A - \lambda I)$ uzavřený podprostor v $\mathfrak{X}$.*

Nejprve jeden pomocný výsledek.

Lemma 2.1.33. *Bud' $\mathfrak{X}$ Banachův prostor, $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$, $y \in \text{Ran } B$. Nechť $y \neq 0$. Potom existuje $x \in \mathfrak{X}$ tak, že*

$$(1) \ y = Bx,$$

$$(2) \ \|x\| < 2 \text{dist}(x, \text{Ker } B).$$

Důkaz. Zvolme $z \in \mathfrak{X}$, $y = Bz$. Nutně $z \notin \text{Ker } B$. $\text{Ker } B$ je uzavřený podprostor, a proto $\text{dist}(z, \text{Ker } B) > 0$. Existuje $v \in \text{Ker } B$ takové, že

$$\|z - v\| < 2 \text{dist}(z, \text{Ker } B) = 2 \text{dist}(z - v, \text{Ker } B).$$

Vektor $x := z - v$ má obě požadované vlastnosti. □

Důkaz věty 2.1.32. Pro $\lambda \neq 0$ zřejmě platí

$$\text{Ran}(A - \lambda I) = \text{Ran}\left(I - \frac{1}{\lambda} A\right) \text{ a dále } \text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}\left(I - \frac{1}{\lambda} A\right).$$

Proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lambda = 1$. Tvrdíme tedy, že pro $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$ je $\text{Ran}(I - A)$ uzavřený podprostor v $\mathfrak{X}$.

Mějme danu libovolnou konvergentní posloupnost $(y_n) \subset \text{Ran}(I - A)$, $y_n \rightarrow y$ v $\mathfrak{X}$. Máme ukázat, že $y \in \text{Ran}(I - A)$. V případě, kdy $y = 0$, je to určitě pravda. Uvažujme tedy případ, kdy $y \neq 0$. Potom pro všechny dostatečně velké indexy n musí být $y_n \neq 0$. Nic neztratíme na obecnosti, když budeme pro jednoduchost předpokládat, že $y_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Podle lemmatu 2.1.33 existuje v $\mathfrak{X}$ posloupnost (x_n) taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ y_n = (I - A)x_n \text{ a } \|x_n\| < 2 \text{dist}(x_n, \text{Ker}(I - A)).$$

Tvrdíme, že posloupnost (x_n) je omezená.

Pro spor předpokládejme, že z (x_n) lze vybrat posloupnost (x'_n) takovou, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n\| = \infty.$$

Posloupnost

$$\left(\frac{1}{\|x'_n\|} x'_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

je omezená, a proto vzhledem ke kompaktnosti operátoru A existuje posloupnost (x''_n)

vybraná z (x'_n) taková, že

$$A\left(\frac{1}{\|x''_n\|} x''_n\right) \rightarrow z \in \mathfrak{X} \text{ pro } n \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Položme $y''_n := (I - A)x''_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost (y''_n) je vybraná z (y_n) , a je tedy konvergentní (a omezená). Můžeme tak zdůvodnit existenci limity

$$\frac{1}{\|x''_n\|} x''_n = \frac{1}{\|x''_n\|} Ax''_n + \frac{1}{\|x''_n\|} y''_n \rightarrow z + 0 = z, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Ze spojitosti operátoru A pak plyne

$$A\left(\frac{1}{\|x''_n\|} x''_n\right) \rightarrow Az \text{ v } \mathfrak{X}. \quad (2.10)$$

Porovnáním (2.8) a (2.10) vidíme, že $z = Az$, to jest $z \in \text{Ker}(I - A)$. Dostáváme nerovnost

$$\|x''_n\| < 2 \text{ dist}(x''_n, \text{Ker}(I - A)) \leq 2 \|x''_n - \|x''_n\|z\|,$$

a odtud

$$\left\| \frac{1}{\|x''_n\|} x''_n - z \right\| > \frac{1}{2} \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

To je zřejmě ve sporu s (2.9).

Opět vzhledem ke kompaktnosti operátoru A můžeme z omezené posloupnosti (x_n) vybrat podposloupnost $(\tilde{x}_n)$ takovou, že

$$A\tilde{x}_n \rightarrow u \in \mathfrak{X} \text{ pro } n \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Položme $\tilde{y}_n := (I - A)\tilde{x}_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $(\tilde{y}_n)$ je vybraná z původní posloupnosti (y_n) , a proto $\tilde{y}_n \rightarrow y$ v $\mathfrak{X}$. Zjišťujeme, že existuje limita

$$\tilde{x}_n = A\tilde{x}_n + \tilde{y}_n \rightarrow u + y, \quad n \rightarrow \infty,$$

a díky spojitosti A také $A\tilde{x}_n \rightarrow A(u + y)$. Porovnáním s (2.11) dostáváme $u = A(u + y)$, čili

$$y = (I - A)(y + u) \in \text{Ran}(I - A).$$

Tím je důkaz úplný. □

Důsledek 2.1.34. *Buďte $\mathfrak{H}$ Hilbertův prostor, $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Potom*

$$\mathfrak{H} = \text{Ker}(A - \lambda I) \oplus \text{Ran}(A^* - \bar{\lambda}I) = \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) \oplus \text{Ran}(A - \lambda I).$$

Důkaz. Jak víme, obecně pro $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ platí $\mathfrak{H} = \text{Ker } B^* \oplus \overline{\text{Ran } B}$. Podle věty 2.1.32 je

$$\overline{\text{Ran}(A - \lambda I)} = \text{Ran}(A - \lambda I), \quad \overline{\text{Ran}(A^* - \bar{\lambda} I)} = \text{Ran}(A^* - \bar{\lambda} I).$$

□

2.2 Fredholmovy věty

Poznámka 2.2.1. Buďte V vektorový prostor, $T \in \mathcal{L}(V)$, to jest T je lineární všude definovaný operátor na V . Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ tedy existují mocniny T^n , $T^0 := I$. Obory hodnot mocnin operátoru T tvoří klesající posloupnost podprostorů

$$V = \text{Ran } T^0 \supset \text{Ran } T^1 \supset \text{Ran } T^2 \supset \text{Ran } T^3 \supset \dots,$$

jádra mocnin operátoru T tvoří rostoucí posloupnost podprostorů

$$\{0\} = \text{Ker } T^0 \subset \text{Ker } T^1 \subset \text{Ker } T^2 \subset \text{Ker } T^3 \subset \dots$$

Zmiňme základní vlastnosti těchto posloupností.

(1) Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ operátor T zobrazuje $\text{Ran } T^n$ na $\text{Ran } T^{n+1}$ (surjektivně).

Skutečně, $T(\text{Ran } T^n) = T(T^n(V)) = T^{n+1}(V) = \text{Ran } T^{n+1}$.

(2) Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ operátor T zobrazuje $\text{Ker } T^{n+1}$ do $\text{Ker } T^n$.

Skutečně, je-li $x \in \text{Ker } T^{n+1}$, pak $T^n(Tx) = T^{n+1}x = 0$, tedy $Tx \in \text{Ker } T^n$.

(3) Podle bodu (2) pro každé $n \geq 1$ dostáváme po faktorizaci lineární zobrazení

$$\tilde{T}: \text{Ker } T^{n+1} / \text{Ker } T^n \rightarrow \text{Ker } T^n / \text{Ker } T^{n-1}.$$

Toto zobrazení je prosté.

Označíme $[z]$ třídu ekvivalence v příslušném faktorprostoru. O jaký faktorprostor se konkrétně jedná, by mělo být zřejmé z kontextu. Pro $x \in \text{Ker } T^{n+1}$ je

$$[x] = x + \text{Ker } T^n \in \text{Ker } T^{n+1} / \text{Ker } T^n, \quad \tilde{T}[x] := [Tx] = Tx + \text{Ker } T^{n-1} \in \text{Ker } T^n / \text{Ker } T^{n-1}.$$

Je-li $\tilde{T}[x] = [Tx] = 0$, čili $Tx \in \text{Ker } T^{n-1}$, pak $T^{n-1}(Tx) = T^n x = 0$, tedy $x \in \text{Ker } T^n$ a $[x] = 0$.

Tvrzení 2.2.2. Při stejných předpokladech a značení jako v poznámce 2.2.1 platí:

(1) Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$ je $\text{Ran } T^{n+1} = \text{Ran } T^n$, potom $\text{Ran } T^{m+1} = \text{Ran } T^m$ pro všechna $m \geq n$, a tedy

$$\text{Ran } T^n = \text{Ran } T^{n+1} = \text{Ran } T^{n+2} = \dots$$

(2) Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$ je $\text{Ker } T^{n+1} = \text{Ker } T^n$, potom $\text{Ker } T^{m+1} = \text{Ker } T^m$ pro všechna $m \geq n$, a tedy

$$\text{Ker } T^n = \text{Ker } T^{n+1} = \text{Ker } T^{n+2} = \dots$$

Důkaz. Důkaz bude rozebrán na cvičení. □

Poznámka 2.2.3. Při stále stejných předpokladech a značení jako v poznámce 2.2.1 a v tvrzení 2.2.2 navíc předpokládejme, že existují $n', n'' \in \mathbb{N}_0$ takové, že

$$\text{Ran } T^{n'+1} = \text{Ran } T^{n'} \text{ a } \text{Ker } T^{n''+1} = \text{Ker } T^{n''}.$$

Položme

$$n_R := \min\{n \in \mathbb{N}_0; \text{Ran } T^{n+1} = \text{Ran } T^n\}, \quad n_K := \min\{n \in \mathbb{N}_0; \text{Ker } T^{n+1} = \text{Ker } T^n\}.$$

Lze ukázat, že potom $n_R = n_K$. Podrobnosti jsou uvedeny například v [?, § 5.41] XXX[Taylor].

Lemma 2.2.4. *Budťte X normovaný vektorový prostor, $V \subset X$ uzavřený podprostor. Je-li $V \neq X$, potom platí*

$$\forall \delta \in (0, 1), \exists x \in X, \|x\| = 1 \text{ a } \text{dist}(x, V) \geq \delta.$$

Poznámka. Jak jsme uvedli již dříve v důsledku 2.1.13, je-li $\dim V < \infty$, potom lze volit x dokonce tak, aby $\|x\| = 1$ a $\text{dist}(x, V) = 1$.

Důkaz. Důkaz bude rozebrán na cvičení. □

Tvrzení 2.2.5. *Budte $\mathfrak{X}$ Banachův prostor, $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Potom*

- (1) $\exists n \in \mathbb{N}_0$, $\text{Ran}(A - \lambda I)^{n+1} = \text{Ran}(A - \lambda I)^n$,
 (2) $\exists n \in \mathbb{N}_0$, $\text{Ker}(A - \lambda I)^{n+1} = \text{Ker}(A - \lambda I)^n$.

Důkaz. (1) Důkaz provedeme sporem. Pro stručnost označme

$$\mathfrak{R}_n := \text{Ran}(A - \lambda I)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Předpokládáme tedy, že

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{R}_0 \subsetneq \mathfrak{R}_1 \subsetneq \mathfrak{R}_2 \subsetneq \mathfrak{R}_3 \subsetneq \dots$$

Všimněme si, že všechny $\mathfrak{R}_n$ jsou uzavřené podprostory. Skutečně, snadným výpočtem zjistíme, že pro $n \geq 1$ je

$$\mathfrak{R}_n = \text{Ran}(A_n - \lambda_n I), \quad \text{kde } A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-\lambda)^k A^{n-k} \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}), \quad \lambda_n = (-\lambda)^{n+1} \neq 0.$$

Uzavřenost plyne z věty 2.1.32. Vzhledem k lemmatu 2.2.4 můžeme pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ zvolit

$$x_n \in \mathfrak{R}_n, \quad \|x_n\| = 1 \quad \text{a} \quad \text{dist}(x_n, \mathfrak{R}_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Pro dva různé indexy $m, n \in \mathbb{N}_0$ pro určitost předpokládáme, že $n > m$, a odhadneme

$$\begin{aligned} \|Ax_m - Ax_n\| &= \|(A - \lambda I)x_m - (A - \lambda I)x_n + \lambda(x_m - x_n)\| \\ &= |\lambda| \left\| x_m - x_n + \frac{1}{\lambda}(A - \lambda I)x_m - \frac{1}{\lambda}(A - \lambda I)x_n \right\| \\ &\geq |\lambda| \text{dist}(x_m, \mathfrak{R}_{m+1}) \\ &\geq \frac{1}{2} |\lambda|, \end{aligned}$$

neboť

$$x_n - \frac{1}{\lambda}(A - \lambda I)x_m + \frac{1}{\lambda}(A - \lambda I)x_n \in \mathfrak{R}_{m+1}.$$

Z tohoto odhadu je patrné, že z posloupnosti (Ax_n) nelze vybrat cauchyovskou, a tedy rovněž ne konvergentní podposloupnost. Současně posloupnost (x_n) je omezená, A je kompaktní operátor, a proto z posloupnosti (Ax_n) musí být možné vybrat konvergentní podposloupnost. Dostáváme spor.

(2) Důkaz provedeme opět sporem. Pro stručnost označme

$$\mathfrak{K}_n := \text{Ker}(A - \lambda I)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Předpokládáme tedy, že

$$\{0\} = \mathfrak{K}_0 \subsetneq \mathfrak{K}_1 \subsetneq \mathfrak{K}_2 \subsetneq \mathfrak{K}_3 \subsetneq \dots$$

Ze spojitosti zobrazení A plyne, že všechny $\mathfrak{K}_n$ jsou uzavřené podprostory. Vzhledem k lemmatu 2.2.4 můžeme pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolit

$$x_n \in \mathfrak{K}_n, \quad \|x_n\| = 1 \quad \text{a} \quad \text{dist}(x_n, \mathfrak{K}_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Pro dva různé indexy $m, n \in \mathbb{N}_0$ pro určitost předpokládáme, že $m > n$, a odhadneme

$$\begin{aligned} \|Ax_m - Ax_n\| &= \|(A - \lambda I)x_m - (A - \lambda I)x_n + \lambda(x_m - x_n)\| \\ &= |\lambda| \left\| x_m - x_n + \frac{1}{\lambda} (A - \lambda I)x_m - \frac{1}{\lambda} (A - \lambda I)x_n \right\| \\ &\geq |\lambda| \text{dist}(x_m, \mathfrak{K}_{m-1}) \\ &\geq \frac{1}{2} |\lambda|, \end{aligned}$$

neboť

$$x_m - \frac{1}{\lambda} (A - \lambda I)x_m + \frac{1}{\lambda} (A - \lambda I)x_n \in \mathfrak{K}_{m-1}.$$

Z tohoto odhadu je patrné, že z posloupnosti (Ax_n) nelze vybrat cauchyovskou, a tedy rovněž ne konvergentní podposloupnost. Dostáváme tak spor s kompaktností operátoru A obdobně jako v části (1) důkazu. $\square$

Fredholmovy věty byly vysloveny již ve Funkcionální analýze 2. Zde je uvádíme znovu, tentokrát s úplným důkazem.

Věta 2.2.6 (Fredholmovy věty). *Buďte $\mathfrak{X}$ Banachův prostor, $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Potom platí:*

1. věta (Fredholmova alternativa). *Buď rovnice*

$$Ax - \lambda x = f$$

má řešení $x \in \mathfrak{X}$ pro každou pravou stranu $f \in \mathfrak{X}$, a potom řešení existuje právě jedno, nebo homogenní rovnice

$$Ax - \lambda x = 0$$

má netriviální řešení $x \in \mathfrak{X}$, $x \neq 0$.

Přeformulováno: *Operátor $A - \lambda I$ je surjektivní, právě když je prostý.*

Je-li navíc $\mathfrak{X} = \mathfrak{H}$ Hilbertův prostor, potom platí:

2. věta. *Řešení $x \in \mathfrak{H}$ rovnice*

$$Ax - \lambda x = f$$

existuje, právě když pravá strana $f \in \mathfrak{H}$ je kolmá na všechna řešení homogenní sdružené rovnice

$$A^*x - \bar{\lambda}x = 0.$$

Přeformulováno: $\text{Ran}(A - \lambda I) = \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)^\perp$.

3. věta. Homogenní rovnice

$$Ax - \lambda x = 0, \quad A^*x - \bar{\lambda}x = 0$$

mají stejný a přitom konečný počet lineárně nezávislých řešení.

Přeformulováno: $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = \dim \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) < \infty$.

Důkaz 1. Fredholmovy věty. (I) Předpokládejme, že operátor $A - \lambda I$ je prostý. Chceme ukázat, že je také surjektivní.

Pro stručnost označme

$$\mathfrak{R}_n := \text{Ran}(A - \lambda I)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Pro spor předpokládejme, že $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{X} \neq \mathfrak{R}_1 = \text{Ran}(A - \lambda I)$. Matematickou indukcí lze ukázat, že potom

$$\mathfrak{R}_n \neq \mathfrak{R}_{n+1} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.12)$$

Skutečně, v indukčním kroku $n \rightarrow n + 1$ využijeme předpokladu, že operátor $A - \lambda I$ je prostý, a dostáváme

$$\mathfrak{R}_n \neq \mathfrak{R}_{n+1} \implies \mathfrak{R}_{n+1} = (A - \lambda I)(\mathfrak{R}_n) \neq (A - \lambda I)(\mathfrak{R}_{n+1}) = \mathfrak{R}_{n+2}.$$

Vlastnost (2.12) je ale ve sporu s tvrzením 2.2.5 ad (1).

(II) Předpokládejme nyní, že operátor $A - \lambda I$ není prostý. Chceme ukázat, že nemůže být ani surjektivní.

Pro stručnost označme

$$T := A - \lambda I, \quad \mathfrak{K}_n := \text{Ker}(A - \lambda I)^n \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots$$

Pro spor předpokládejme, že operátor T je surjektivní. Jak bylo rozebráno v poznámce 2.2.1 ad (3), T zobrazuje $\mathfrak{K}_{n+1}$ do $\mathfrak{K}_n$ a po faktorizaci dostáváme prosté zobrazení

$$\tilde{T}: \mathfrak{K}_{n+1}/\mathfrak{K}_n \rightarrow \mathfrak{K}_n/\mathfrak{K}_{n-1} \quad \text{pro } n \geq 1. \quad (2.13)$$

Tvrdíme, že T zobrazuje $\mathfrak{K}_{n+1}$ na $\mathfrak{K}_n$. Skutečně, buď $x \in \mathfrak{K}_n$ libovolný vektor. Podle předpokladu je T surjektivní, a proto existuje $y \in \mathfrak{X}$, $x = Ty$. Potom ale $0 = T^n x = T^{n+1}y$, a tedy $y \in \mathfrak{K}_{n+1}$.

Zjišťujeme tak, že zobrazení $\tilde{T}$ v (2.13) je lineární izomorfismus. Proto

$$\dim(\mathfrak{K}_{n+1}/\mathfrak{K}_n) = \dim(\mathfrak{K}_n/\mathfrak{K}_{n-1}) \text{ pro } n \geq 1.$$

Odtud snadno plyne, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, \dim(\mathfrak{K}_n/\mathfrak{K}_{n-1}) = \dim(\mathfrak{K}_1/\mathfrak{K}_0) = \dim(\text{Ker}(A - \lambda I)/\{0\}) = \dim \text{Ker}(A - \lambda I) > 0.$$

To znamená, že $\mathfrak{K}_n \neq \mathfrak{K}_{n-1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což je ve sporu s tvrzením 2.2.5 ad (2). $\square$

Důkaz 2. Fredholmovy věty. Vzhledem k větě 2.1.32 a důsledku 2.1.34 máme

$$\text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)^\perp = \overline{\text{Ran}(A - \lambda I)} = \text{Ran}(A - \lambda I).$$

To dokazuje větu. $\square$

Důkaz 3. Fredholmovy věty. Z věty 2.1.23 již víme, že

$$m := \dim \text{Ker}(A - \lambda I) < \infty, \quad n := \dim \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) < \infty.$$

Role operátorů A a A^* lze zaměnit, neboť $(A^*)^* = A$, a tak $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$, právě když $A^* \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Proto pro určitost můžeme předpokládat, že $m \leq n$.

Uvažme nejprve případ, kdy $m = 0$. Podle 1. Fredholmovy věty je $A - \lambda I$ surjektivní. Potom

$$\text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) = \text{Ran}(A - \lambda I)^\perp = \mathfrak{H}^\perp = \{0\},$$

a tedy $n = 0$.

Nadále předpokládáme, že $m \in \mathbb{N}$. Zvolme po řadě

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ a } (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

báze v $\text{Ker}(A - \lambda I)$ a $\text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)$. Definujeme operátor $P \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ vztahem

$$\forall z \in \mathfrak{H}, \quad Pz := \sum_{j=1}^m \langle x_j, z \rangle y_j.$$

Operátor P je konečnorozměrný, a tedy $P \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Dále je z definice zřejmé, že

$$\text{Ran } P \subset \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I), \quad \text{Ker } P = \text{Ker}(A - \lambda I)^\perp = \text{Ran}(A^* - \bar{\lambda}I).$$

Tvrdíme, že operátor $A - P - \lambda I$ je izomorfismus na $\mathfrak{H}$. Podle 1. Fredholmovy věty stačí ukázat, že je prostý.

Nechť $(A - P - \lambda I)z = 0$ pro jisté $z \in \mathfrak{H}$. Potom

$$(A - \lambda I)z = Pz \in \text{Ran}(A - \lambda I) \cap \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) = \{0\},$$

neboť podprostory $\text{Ran}(A - \lambda I)$ a $\text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)$ jsou na sebe kolmé. To znamená, že současně

$$z \in \text{Ker}(A - \lambda I) \text{ a } z \in \text{Ker} P = \text{Ker}(A - \lambda I)^\perp,$$

a tedy $z = 0$.

Dále tvrdíme, že operátor $A - P - \lambda I$ zobrazuje podprostor $\text{Ker}(A - \lambda I)$ na podprostor $\text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)$, a tudíž tyto podprostory jsou izomorfní.

Je-li $z \in \text{Ker}(A - \lambda I)$, potom

$$(A - P - \lambda I)z = -Pz \in \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I).$$

Na druhé straně k danému $u \in \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)$ podle předešlého existuje $z \in \mathfrak{H}$ tak, že $(A - P - \lambda I)z = u$. Odtud dostáváme

$$(A - \lambda I)z = Pz + u \in \text{Ran}(A - \lambda I) \cap \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) = \{0\},$$

čili $z \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Nyní můžeme důkaz uzavřít s tím, že z existence izomorfismu mezi podprostory $\text{Ker}(A - \lambda I)$ a $\text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)$ plyne $m = n$. $\square$

Jako okamžitý důsledek 1. Fredholmovy věty dostáváme následující informaci o charakteru spektra kompaktního operátoru.

Věta 2.2.7. *Budte $\mathfrak{X}$ Banachův prostor, $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$. Potom pro každé nenulové $\lambda \in \mathbb{C}$ je buď $\lambda \in \varrho(A)$, nebo $\lambda \in \sigma_p(A)$. Ekvivalentně zapsáno*

$$\sigma(A) \cap (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \subset \sigma_p(A).$$

Důkaz. Mějme dáno $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Mohou nastat právě dva případy. Buď operátor $A - \lambda I$ není prostý. V tom případě je $\lambda \in \sigma_p(A)$. Nebo operátor $A - \lambda I$ je prostý. Potom podle 1. Fredholmovy věty je také surjektivní a $\lambda \in \varrho(A)$. $\square$

Poznámka 2.2.8. Shrňme získané poznatky o spektru kompaktních operátorů na Banachových prostorech, jak byly uvedeny ve větách 2.1.23 a 2.2.7. Buď $\mathfrak{X}$ Banachův prostor, $\dim \mathfrak{X} = \infty$. Potom pro každý operátor $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$ platí

- (1) $0 \in \sigma(A)$,
- (2) $\sigma(A)$ je nejvýše spočetná množina
- (3) množina $\sigma(A)$ nemá hromadné body různé od 0,
- (4) $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(A)$,
- (5) $\forall \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}, \dim \text{Ker}(A - \lambda I) < \infty$.

2.3 Kompaktní samosdružené operátory

Připomenutí 2.3.1. Buďte $\mathfrak{H}$ komplexní Hilbertův prostor, $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Je-li operátor A normální, potom $\sigma_r(A) = \emptyset$. Je-li operátor A samosdružený, potom $r_\sigma(A) = \|A\|$.

Úmluva 2.3.2. Symbol $\mathfrak{H}$ v této kapitole značí všude komplexní separabilní Hilbertův prostor, $\dim \mathfrak{H} = \infty$. Všechny ortonormální báze v $\mathfrak{H}$ jsou tedy spočetné.

Následují výsledky, které byly dokázány v rámci cvičení. Zde již důkazy z části neuvádíme.

Lemma 2.3.3. *Buď $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $A = A^*$. Potom $\sigma(A) = \{0\}$, právě když $A = 0$.*

Lemma 2.3.4. *Buďte $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $V \subset \mathfrak{H}$ podprostor. Jestliže operátor A je samosdružený a podprostor V je A -invariantní, potom $V^\perp$ je také A -invariantní podprostor.*

Tvrzení 2.3.5. *Buďte $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $V \subset \mathfrak{H}$ podprostor. Nechť operátor A je samosdružený a podprostor V je A -invariantní. Položme*

$$\mathfrak{H}_1 := \overline{V}, \quad \mathfrak{H}_2 := V^\perp, \quad A_1 := A|_{\mathfrak{H}_1}, \quad A_2 := A|_{\mathfrak{H}_2}.$$

Potom

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2).$$

Definice 2.3.6. Buď $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $A = A^*$. Řekneme, že A má čistě bodové spektrum, jestliže v $\mathfrak{H}$ existuje ortonormální báze sestavená z vlastních vektorů operátoru A .

Tvrzení 2.3.7. *Buď $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $A = A^*$. Jestliže operátor A má čistě bodové spektrum, potom*

$$\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)}$$

(ale nemusí platit $\sigma(A) = \sigma_p(A)$).

Důkaz. Jistě $\overline{\sigma_p(A)} \subset \sigma(A)$. Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ nepatří do $\overline{\sigma_p(A)}$. Chceme ukázat, že $\lambda \in \rho(A)$. Položme

$$d := \text{dist}(\lambda, \sigma_p(A)) = \text{dist}(\lambda, \overline{\sigma_p(A)}) > 0.$$

Podle předpokladu je podprostor

$$V := \text{span} \left(\bigcup_{\mu \in \sigma_p(A)} \text{Ker}(A - \mu I) \right)$$

hustý v $\mathfrak{H}$. Libovolný vektor $x \in V$, $x \neq 0$, můžeme zapsat ve tvaru

$$x = x_1 + \cdots + x_n, \text{ kde } n \in \mathbb{N}$$

a $x_1, \dots, x_n$ jsou vlastní vektory operátoru A příslušné po řadě navzájem různým vlastním číslům $\mu_1, \dots, \mu_n$. Potom vektory $x_1, \dots, x_n$ jsou navzájem kolmé a

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Dále

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)x\|^2 &= \|(\mu_1 - \lambda)x_1 + \cdots + (\mu_n - \lambda)x_n\|^2 \\ &= |\mu_1 - \lambda|^2 \|x_1\|^2 + \cdots + |\mu_n - \lambda|^2 \|x_n\|^2 \\ &\geq d^2 (\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2) = d^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Ze spojitosti operátoru A plyne, že $\|(A - \lambda I)x\| \geq d\|x\|$ pro všechny vektory $x \in \mathfrak{H}$. Weylovo kritérium nám pak říká, že skutečně $\lambda \in \varrho(A)$. $\square$

Lemma 2.3.8. *Bud' $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $A = A^*$. Položme*

$$V := \text{span} \left(\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A)} \text{Ker}(A - \lambda I) \right)$$

(podprostor V je zřejmě A -invariantní) a dále

$$\mathfrak{H}_1 := \overline{V}, \quad \mathfrak{H}_2 := V^\perp, \quad A_1 := A|_{\mathfrak{H}_1}, \quad A_2 := A|_{\mathfrak{H}_2}.$$

Potom operátor A_1 má čistě bodové spektrum a

$$\sigma(A_1) = \overline{\sigma_p(A)}, \quad \sigma_p(A_2) = \emptyset.$$

Důkaz. (I) V každém vlastním podprostoru $\text{Ker}(A - \lambda I)$, $\lambda \in \sigma_p(A)$, zvolíme ortonormální bázi. Jejich sjednocením zřejmě dostaneme ortonormální bázi v $\mathfrak{H}_1$, neboť vlastní podprostory odpovídající různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

(II) Pro zúžení A_1 určitě platí $\sigma_p(A_1) \subset \sigma_p(A)$. Z konstrukce podprostoru V je naopak patrné, že $\sigma_p(A) \subset \sigma_p(A_1)$. Platí tedy rovnost a podle tvrzení 2.3.7 a podle části (I) důkazu

dostáváme

$$\sigma(A_1) = \overline{\sigma_p(A_1)} = \overline{\sigma_p(A)}.$$

(III) Pro spor předpokládejme, že $x \in \mathfrak{H}_2$, $x \neq 0$, je vlastním vektorem operátoru A_2 . Potom samozřejmě je x rovněž vlastním vektorem operátoru A , a tedy $x \in V \subset \mathfrak{H}_1$. To je ovšem spor, neboť $\mathfrak{H}_1 \perp \mathfrak{H}_2$. $\square$

Věta 2.3.9 (Hilbertova-Schmidtova věta). *Buď $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Je-li operátor A samosdružený, potom má čistě bodové spektrum.*

Důkaz. Symboly V , $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, A_1 , A_2 mají stejný význam jako v lemmatu 2.3.8. Stačí ukázat, že $\mathfrak{H}_2 = \{0\}$, a tedy $A = A_1$.

Zúžení A_2 představuje rovněž kompaktní samosdružený operátor. Protože A_2 má prázdné bodové spektrum, nutně $\sigma(A_2) = \{0\}$. Podle lemmatu 2.3.3 je $A_2 = 0$. Ale ani 0 nemůže být vlastní hodnotou operátoru A_2 , a proto $\mathfrak{H}_2 = \{0\}$. $\square$

Poznámka 2.3.10. Buď $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $A = A^*$. Nechť A má čistě bodové spektrum. Potom spektrální rozklad operátoru A , který byl popsán ve Funkcionální analýze 2 a který je založen na pojmu rozkladu jedničky a je vyjádřen pomocí integrálu, lze zjednodušit a integrální vyjádření nahradit sumou.

Mějme danu ortonormální bázi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v prostoru $\mathfrak{H}$, která je tvořena vlastními vektory operátoru A , $Ax_n = \lambda_n x_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Označme P_n ortogonální projekci na jednorozměrný podprostor $\mathbb{C}x_n$, tedy

$$\forall y \in \mathbb{C}, P_n y = \langle x_n, y \rangle x_n.$$

Dále označme

$$\mathcal{A} := \{n \in \mathbb{N}; \lambda_n \neq 0\}.$$

Potom

$$A = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n P_n = \sum_{n \in \mathcal{A}} \lambda_n P_n,$$

kde řada konverguje v silném smyslu a součet nezávisí na pořadí sčítanců.

Skutečně, silná konvergence znamená, že

$$\forall y \in \mathfrak{H}, Ay = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n P_n y = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle x_n, y \rangle x_n.$$

Jak bylo dokázáno ve funkcionální analýze 1, nutnou a postačující podmínkou konvergence je

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n \langle x_n, y \rangle|^2 < \infty.$$

V kladném případě pak součet nezávisí na pořadí sčítanců. Tato podmínka je ale splněna díky odhadu $|\lambda_n| \leq \|A\|$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a díky Parsevalově identitě (nebo Besselově nerovnosti).

Pomocí uvedeného spektrálního rozkladu pak můžeme například vyjádřit rezolventu operátoru A . Pro $\lambda \in \varrho(A) = \mathbb{C} \setminus \overline{\sigma_p(A)}$, to jest pokud $\text{dist}(\lambda, \overline{\sigma_p(A)}) > 0$, platí

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle x_n, \cdot \rangle x_n.$$

Řada konverguje opět v silném smyslu. Doplnění podrobností je ponecháno na čtenáři.

Poznámka 2.3.11. Speciálním případem předchozí poznámky 2.3.10 jsou kompaktní samosdružené operátory. Buď $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$, $A = A^*$. Z nenulových vlastních čísel operátoru A lze sestavit posloupnost $(\lambda_n)_{n=1}^N$, která je nerostoucí v absolutní hodnotě,

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots,$$

přičemž každé vlastní číslo se v posloupnosti opakuje tolikrát, kolik je jeho (geometrická) násobnost. Obecně $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ($N = 0$ znamená, že tato posloupnost je prázdná, a to je, právě když $A = 0$). Poznamenejme, že pro $N = \infty$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$. K vlastním číslům λ_n lze přiřadit vlastní vektory x_n tak, že soubor $(x_n)_{n=1}^N$ je ortonormální; $(x_n)_{n=1}^N$ je pak ortonormální bází podprostoru $(\text{Ker } A)^\perp$. O rovnosti

$$A = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle x_n, \cdot \rangle x_n$$

se v tomto případě mluví jako o *kanonickém tvaru kompaktního samosdruženého operátoru* A .

2.4 Ideály kompaktních operátorů v $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$

$\mathfrak{H}$ stále značí komplexní separabilní Hilbertův prostor, $\dim \mathfrak{H} = \infty$. Zatím jsme se seznámili s dvěma ideály v $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ tvořenými kompaktními operátory. Celý prostor kompaktních operátorů $\mathcal{K}(\mathfrak{H})$ je ideálem v $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Dalším ideálem je prostor Hilbertových-Schmidtových operátorů $\mathcal{S}_2$. Jak uvidíme níže, dokonce lze zavést jednoparametrickou množinu ideálů kompaktních operátorů, která závisí na parametru $p \geq 1$. Tato parametrizace připomíná L^p prostory, $p \geq 1$, na dané množině s mírou.

Připomenutí 2.4.1. Pro $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ pokládáme

$$|A| := (A^* A)^{1/2}.$$

Snadným výpočtem se lze přesvědčit, že

$$\forall x \in \mathfrak{H}, \quad \| |A| x \| = \| A x \|. \quad (2.14)$$

Odtud plyne

$$\| |A| \| = \|A\|, \quad \text{Ker } |A| = \text{Ker } A.$$

Následující pomocné výsledky byly dokázány na cvičení.

Lemma 2.4.2. (1) Jestliže pro $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ je $A^*A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$, potom rovněž $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$.
 (2) Jestliže operátor $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$ je pozitivní, potom $A^{1/2} \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$.
 (3) Pro každý operátor $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$ je $|A| \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$.

Následující lemma je v podstatě zřejmé a jeho důkaz je ponechán na čtenáři.

Lemma 2.4.3. Budte X, Y metrické prostory, U izometrické zobrazení X na Y . Potom platí následující tvrzení.

- (1) Je-li prostor X úplný, je rovněž prostor Y úplný.
- (2) Je-li $V \subset X$ hustá podmnožina, potom rovněž $U(V) \subset Y$ je hustá podmnožina.

Definice 2.4.4. Řekneme, že $U \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ je *částečná izometrie*, jestliže existuje uzavřený podprostor $V \subset \mathfrak{H}$ takový, že

- (1) $\forall x \in V, \|Ux\| = \|x\|$,
- (2) $\forall x \in V^\perp, Ux = 0$.

Poznámka 2.4.5. Při stejném značení jako v definici 2.4.4 položme

$$W := U(V) = \text{Ran } U.$$

Potom $W \subset \mathfrak{H}$ je uzavřený podprostor a U^* je částečná izometrie na $\mathfrak{H}$, pro kterou platí

- (1) $\forall y \in W, \|U^*y\| = \|y\|$,
- (2) $\forall y \in W^\perp, U^*y = 0$.

Dále U^*U je ortogonální projekce na V , UU^* je ortogonální projekce na W . Speciálně odsud plyne, že pro danou částečnou izometrii U je podprostor V z definice 2.4.4 určen jednoznačně.

Skutečně, podprostor W je podle lemmatu 2.4.3 úplný, a tedy uzavřený, neboť V je úplný prostor (podmnožina úplného metrického prostoru je sama úplným metrickým prostorem, právě když je uzavřená).

Dále ukážeme, že U^*U je ortogonální projekce na V , čili $U^*Ux = 0$ pro každé $x \in V^\perp$ a $U^*Ux = x$ pro každé $x \in V$. První rovnost je zřejmá z definice částečné izometrie. Druhá rovnost je ekvivalentní se vztahem

$$\forall z \in \mathfrak{H}, \langle Uz, Ux \rangle = \langle z, x \rangle.$$

Zde stačí uvážit případy $z \in V$ a $z \in V^\perp$.

Víme-li, že U^*U je ortogonální projekce na V , potom

$$\forall x \in V, \|U^*Ux\| = \|x\| = \|Ux\|,$$

a tedy $\|U^*y\| = \|y\|$ pro každé $y \in W = U(V)$. Současně

$$\operatorname{Ker} U^* = (\operatorname{Ran} U)^\perp = W^\perp.$$

Zbývá ukázat, že UU^* je ortogonální projekce na W . To ale plyne z předešlého, jestliže zaměníme U za U^* a V za W .

Věta 2.4.6. Buď $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Potom existuje právě jedna částečná izometrie U na $\mathfrak{H}$ taková, že

$$A = U|A|, \quad \text{Ker } U = \text{Ker } A. \quad (2.15)$$

Přitom U splňuje

- (1) $\forall x \in \overline{\text{Ran } |A|}, \|Ux\| = \|x\|,$
 (2) $\text{Ran } U = U(\overline{\text{Ran } |A|}) = \overline{\text{Ran } A}.$

Důkaz. (I) Jednoznačnost. Ze vztahu (2.15) je patrné, že operátor U je předepsán jednak na $\text{Ran } |A|$, a díky spojitosti rovněž na $\overline{\text{Ran } |A|}$, a dále na $\text{Ker } A = \text{Ker } |A| = (\text{Ran } |A|)^\perp$. Je tedy předepsán na celém Hilbertově prostoru $\mathfrak{H}$.

(II) Existence. Jelikož $\text{Ker } |A| = \text{Ker } A$, z rovnosti $|A|x_1 = |A|x_2$ pro $x_1, x_2 \in \mathfrak{H}$ plyne $Ax_1 = Ax_2$. Můžeme proto definovat

$$\forall x \in \mathfrak{H}, \quad U(|A|x) := Ax.$$

Dále pokládáme $Ux = 0$ pro $x \in (\text{Ran } |A|)^\perp = \text{Ker } A$. Z (2.14) pak plyne, že U se jednoznačně prodlužuje jako spojitě zobrazení na $\overline{\text{Ran } |A|}$ a přitom U je částečná izometrie. Je zřejmé, že rovnosti (2.15) jsou splněny.

(III) Podle definice operátoru U máme $\text{Ran } U = U(\overline{\text{Ran } |A|})$ a $U(\text{Ran } |A|) = \text{Ran } A$. Podle lemmatu 2.4.3 je podprostor $\text{Ran } U \subset \mathfrak{H}$ uzavřený a podprostor $\text{Ran } A$ je hustý v $\text{Ran } U$, tedy $\overline{\text{Ran } A} = \text{Ran } U$. $\square$

Definice 2.4.7. Buď $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Rovnost $A = U|A|$, kde U je částečná izometrie z věty 2.4.6, se nazývá *polární rozklad* operátoru A .

Poznámka 2.4.8. Uvažme polární rozklad $A = U|A|$ operátoru $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Podle poznámky 2.4.5 je U^*U ortogonální projekce na $\overline{\text{Ran } |A|}$. Odtud plyne, že naopak

$$|A| = U^*A.$$

Definice 2.4.9. Buď $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Označme $(s_j(A))_{j=1}^N$, $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, posloupnost kladných vlastních čísel operátoru $|A|$, ve které se každá vlastní hodnota opakuje tolikrát, kolik je její násobnost (případ $N = 0$ nastane, právě když $A = 0$). Je-li zřejmé, o jaký operátor se jedná, píšeme stručně s_j namísto $s_j(A)$. Čísla $s_j(A)$ se nazývají *singulární čísla* (nebo *hodnoty*) operátoru A .

Definice 2.4.10. Pro $1 \leq p < \infty$ položme

$$\forall A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H}), \quad \|A\|_p := \left(\sum_{j=1}^N s_j(A)^p \right)^{1/p},$$

kde $(s_j(A))_{j=1}^N$ je posloupnost singulárních čísel operátoru A . Definujeme

$$\mathcal{I}_p(\mathfrak{H}) := \{A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H}); \|A\|_p < \infty\}.$$

Bude-li zřejmé, o jaký Hilbertův prostor se jedná, budeme psát stručně $\mathcal{I}_p$ namísto $\mathcal{I}_p(\mathfrak{H})$.

Poznámka 2.4.11. (1) Někdy se pokládá $\mathcal{I}_\infty := \mathcal{K}(\mathfrak{H})$.

(2) Zřejmě $\forall A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H}), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda A\|_p = |\lambda| \|A\|_p$ (pokud položíme $0 \cdot \infty := 0$).

(3) Pro $1 \leq p \leq q < \infty$ je $\mathcal{I}_p \subset \mathcal{I}_q$.

Skutečně, buď $(s_j)_{j=1}^N$ posloupnost singulárních čísel pro daný operátor $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Buď je $N < \infty$, a potom $A \in \mathcal{I}_p$ pro každé $p \in [1, \infty)$. Nebo je $N = \infty$. V tom případě z podmínky $\|A\|_p < \infty$ plyne, že nutně existuje $j_0 \in \mathbb{N}_0$ takové, že $s_j < 1$ pro všechny indexy $j \geq j_0$. Je-li $p \leq q$, potom $s_j^q \leq s_j^p$ pro $j \geq j_0$, a tak rovněž $\|A\|_q < \infty$.

(4) Platí $A \in \mathcal{I}_2$, právě když A je Hilbertův-Schmidtův operátor, a $\|\cdot\|_2$ je norma v prostoru Hilbertových-Schmidtových operátorů.

Skutečně, buď opět $(s_j)_{j=1}^N$ posloupnost singulárních čísel pro daný operátor $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Můžeme zvolit ortonormální soubor $(x_j)_{j=1}^N$ tak, že $|A|x_j = s_j x_j$ pro každý index j . Dále zvolme ortonormální bázi $(y_k)_{k=1}^M$ v $\text{Ker } A = \text{Ker } |A|$. Zde také $M \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Sjednocení souborů $(x_j)_{j=1}^N$ a $(y_k)_{k=1}^M$ představuje ortonormální bázi v celém Hilbertově prostoru $\mathfrak{H}$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \|A\|_2^2 &= \sum_{j=1}^N s_j^2 = \sum_{j=1}^N \| |A|x_j \|^2 = \sum_{j=1}^N \| |A|x_j \|^2 + \sum_{k=1}^M \| |A|y_k \|^2 \\ &= \sum_{j=1}^N \|Ax_j\|^2 + \sum_{k=1}^M \|Ay_k\|^2. \end{aligned}$$

Odtud je již tvrzení zřejmé.

(5) Pro $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$ je $\|A\|_1 = \| |A|^{1/2} \|_2^2$. Platí tedy, že $A \in \mathcal{I}_1$, právě když $|A|^{1/2}$ je Hilbertův-Schmidtův operátor.

Značení zůstává stejné jako v předcházejícím bodě (4). Vzhledem k bodu (4) dostáváme

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \sum_{j=1}^N s_j = \sum_{j=1}^N \langle x_j, |A|x_j \rangle + \sum_{k=1}^M \langle y_k, |A|y_k \rangle = \sum_{j=1}^N \| |A|^{1/2} x_j \|^2 + \sum_{k=1}^M \| |A|^{1/2} y_k \|^2 \\ &= \| |A|^{1/2} \|_2^2. \end{aligned}$$

Tedy $\|A\|_1 < \infty$, právě když $\| |A|^{1/2} \|_2 < \infty$.

Věta 2.4.12. Buď $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$ a necht $(s_j)_{j=1}^N$, $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, jsou singulární hodnoty operátoru A . Potom v $\mathfrak{H}$ existují ortonormální soubory $(x_j)_{j=1}^N$, $(y_j)_{j=1}^N$ takové, že pro každý

vektor $v \in \mathfrak{H}$ platí

$$(1) \quad Av = \sum_{j=1}^N s_j \langle x_j, v \rangle y_j,$$

$$(2) \quad A^*v = \sum_{j=1}^N s_j \langle y_j, v \rangle x_j,$$

$$(3) \quad |A|v = \sum_{j=1}^N s_j \langle x_j, v \rangle x_j,$$

$$(4) \quad |A^*|v = \sum_{j=1}^N s_j \langle y_j, v \rangle y_j.$$

Důkaz. Ortonormální soubor $(x_j)_{j=1}^N$ je tvořen vlastními vektory operátoru $|A|$, které odpovídají vlastním číslům s_j . Speciálně $(x_j)_{j=1}^N$ je ortonormální báze v podprostoru $\overline{\text{Ran } |A|}$. Rovnost (3) je pak kanonický tvar operátoru $|A|$ ve smyslu poznámky 2.3.11.

Buď $A = U|A|$ polární rozklad operátoru A , viz věta 2.4.6 a definice 2.4.7. Pro každý index j položíme $y_j := Ux_j$. Potom $(y_j)_{j=1}^N$ je ortonormální báze v podprostoru $\overline{\text{Ran } A}$.

Při této volbě rovnost (1) vyplývá z rovnosti (3),

$$Av = U|A|v = U \left(\sum_{j=1}^N s_j \langle x_j, v \rangle x_j \right) = \sum_{j=1}^N s_j \langle x_j, v \rangle y_j.$$

Rovnost (2) okamžitě vyplývá z (1), neboť

$$(\langle x_j, \cdot \rangle y_j)^* = \langle y_j, \cdot \rangle x_j.$$

Abychom odvodili rovnost (4), vyjádříme nejprve AA^* s využitím již dokázaných rovností,

$$AA^*v = U|A| \left(\sum_{j=1}^N s_j \langle y_j, v \rangle x_j \right) = U \left(\sum_{j=1}^N s_j^2 \langle y_j, v \rangle x_j \right) = \sum_{j=1}^N s_j^2 \langle y_j, v \rangle y_j.$$

Definujme $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ vztahem

$$\forall v \in \mathfrak{H}, \quad \sum_{j=1}^N s_j \langle y_j, v \rangle y_j.$$

Pro každé $z \in \mathfrak{H}$, $\langle z, Bz \rangle = \sum_{j=1}^N s_j |\langle y_j, z \rangle|^2 \geq 0$, tedy B je pozitivní operátor. Snadným výpočtem zjistíme, že $B^2 = AA^*$. Tedy $B = (AA^*)^{1/2} = |A^*|$ (neboť $A^{**} = A$). Rovnost (4) je vlastně kanonický tvar operátoru $|A^*|$. $\square$

Věta 2.4.12 má následující okamžitý důsledek.

Důsledek 2.4.13. Je-li $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$, potom operátory A a A^* mají stejné singulární hodnoty, a tedy

$$\forall p \in [1, \infty), \quad \|A\|_p = \|A^*\|_p.$$

Věta 2.4.14. Pro každé p , $1 \leq p < \infty$, je $\mathcal{I}_p = \mathcal{I}_p(\mathfrak{H})$ vektorový prostor a $\|\cdot\|_p$ je norma na $\mathcal{I}_p$. Přitom normovaný vektorový prostor $(\mathcal{I}_p, \|\cdot\|_p)$ je Banachův. Navíc $\mathcal{I}_p$ je (dvoustranným) $*$ -ideálem v $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$.

Tuto větu nebudeme dokazovat pro obecné p , omezíme se jen na dva speciální případy. Příklad $p = 2$ se týká Hilbertových-Schmidtových operátorů a byl podrobně rozebrán ve Funkcionální analýze 2. Případu $p = 1$ se budeme věnovat v podkapitole 2.5.

Poznámka 2.4.15. V nekonečnorozměrném případě a pro konečné p podprostor $\mathcal{I}_p \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ není uzavřený. To je patrné z toho, že prostor konečnorozměrných operátorů je obsažen v $\mathcal{I}_p$ pro každé p a jeho uzávěr je roven $\mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Tedy také $\overline{\mathcal{I}_p} = \mathcal{K}(\mathfrak{H})$ pro každé p .

2.5 Prostor operátorů se stopou

Z ideálů kompaktních operátorů $\mathcal{I}_p(\mathfrak{H})$, $p \geq 1$, jsou pro aplikace patrně nevýznamnější ideály $\mathcal{I}_2(\mathfrak{H})$ a $\mathcal{I}_1(\mathfrak{H})$. Ideál $\mathcal{I}_1(\mathfrak{H})$ můžeme nazvat prostorem operátorů se stopou (anglicky trace class), neboť pro operátory z tohoto prostoru lze korektně zavést pojem stopa, jak uvidíme dále.

Poznámka 2.5.1. Buďte $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ pozitivní operátor, (z_j) libovolná ortonormální báze v $\mathfrak{H}$. Potom podle poznámky 2.4.11 ad (5) máme

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle z_j, Az_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \|A^{1/2} z_j\|^2 = \|A^{1/2}\|_2^2 = \|A\|_1.$$

Tedy suma na levé straně nezávisí na volbě ortonormální báze a pro $A \geq 0$ máme

$$A \in \mathcal{I}_1 \iff \|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle z_j, Az_j \rangle < \infty.$$

Připomenutí 2.5.2. (1) $(\mathcal{I}_2(\mathfrak{H}), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ je Hilbertův prostor, kde skalární součin je definován vztahem

$$\forall B, C \in \mathcal{I}_2, \quad \langle B, C \rangle_2 := \sum_{j=1}^{\infty} \langle Bx_j, Cx_j \rangle$$

pro libovolnou ortonormální bázi (x_j) v $\mathfrak{H}$. Přitom řada konverguje absolutně,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle Bx_j, Cx_j \rangle| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|Bx_j\| \|Cx_j\| \leq \|B\|_2 \|C\|_2.$$

(2) $\mathcal{I}_2$ je ideál v $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ a platí

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \forall C \in \mathcal{I}_2, \quad \|BC\|_2 \leq \|B\| \|C\|_2, \quad \|CB\|_2 \leq \|B\| \|C\|_2.$$

Lemma 2.5.3. *Budte $B, C \in \mathcal{I}_2(\mathfrak{H})$. Potom $A := BC \in \mathcal{I}_1(\mathfrak{H})$ a pro každou ortonormální bázi (x_j) v $\mathfrak{H}$ platí*

$$\|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_j, |A|x_j \rangle \leq \|B\|_2 \|C\|_2.$$

Důkaz. Použijeme polární rozklad podle věty 2.4.6 a definice 2.4.7, $A = BC = U|A|$ a naopak $|A| = U^*A = U^*BC$. Pro částečnou izometrii U jistě platí $\|U\| \leq 1$. Podle poznámky 2.4.11 ad (5) máme

$$\|A\|_1 = \| |A|^{1/2} \|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_j, |A|x_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_j, U^*BCx_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle B^*Ux_j, Cx_j \rangle.$$

Na základě této rovnosti můžeme odhadnout

$$\|A\|_1 \leq \|B^*U\|_2 \|C\|_2 \leq \|B^*\|_2 \|U\| \|C\|_2 \leq \|B\|_2 \|C\|_2.$$

To dokazuje lemma. □

Věta 2.5.4. *Bud' $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Potom následující výroky jsou ekvivalentní*

- (1) $A \in \mathcal{I}_1$,
- (2) $|A|^{1/2} \in \mathcal{I}_2$,
- (3) $\exists B, C \in \mathcal{I}_2, A = BC$.

Důkaz. Ekvivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) plyne z rovnosti $\|A\|_1 = \| |A| \|_2^2$, viz poznámka 2.4.11 ad (5).

Pro důkaz implikace (2) $\Rightarrow$ (3) stačí vyjít z polárního rozkladu $A = U|A|$ a položit $B := U|A|^{1/2}$, $C := |A|^{1/2}$. Potom $B, C \in \mathcal{I}_2$ a $A = BC$.

Implikace (3) $\Rightarrow$ (1) je obsažena v lemmatu 2.5.3. □

Věta 2.5.5. *Pro všechny operátory $A \in \mathcal{I}_1$, $D \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ je $DA, AD \in \mathcal{I}_1$. Přitom platí nerovnosti*

$$\|DA\|_1 \leq \|D\| \|A\|_1, \quad \|AD\|_1 \leq \|D\| \|A\|_1.$$

Poznámka 2.5.6. Vzhledm k větě 2.4.14 můžeme také říci, že $\mathcal{I}_1$ je (dvoustranným) ideálem v $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$.

Důkaz. Z uvedených nerovností již plyne $DA, AD \in \mathcal{I}_1$. Pro důkaz první nerovnosti opět vyjdeme z polárního rozkladu $A = U|A|$ a položíme $B := U|A|^{1/2}$, $C := |A|^{1/2}$. Potom

$A = BC$, $B, C \in \mathcal{J}_2$, rovněž $DB \in \mathcal{J}_2$, a podle lemmatu 2.5.3 máme

$$\|DA\|_1 = \|(DB)C\|_1 \leq \|DB\|_2 \|C\|_2 \leq \|D\| \|B\|_2 \|C\|_2 = \|D\| \|U|A|^{1/2}\|_2 \| |A|^{1/2} \|_2.$$

Poslední výraz můžeme dále odhadnout a dostáváme

$$\|DA\|_1 \leq \|D\| \|U\| \| |A|^{1/2} \|_2^2 \leq \|D\| \| |A|^{1/2} \|_2^2 = \|D\| \|A\|_1.$$

Z dokázané první nerovnosti lze snadno odvodit druhou nerovnost, jestliže využijeme invariance norem $\|\cdot\|_p$ vzhledem k hermitovskému sdružení. Upravíme

$$\|AD\|_1 = \|D^*A^*\|_1 \leq \|D^*\| \|A^*\|_1 = \|D\| \|A\|_1.$$

Věta je dokázána. □

Věta 2.5.7. Pro každý operátor $A \in \mathcal{J}_1(\mathfrak{H})$ a libovolnou ortonormální bázi (x_j) v $\mathfrak{H}$ řada

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle x_j, Ax_j \rangle$$

konverguje absolutně a její součet nezávisí na volbě ortonormální báze.

Důkaz. Zapišme $A = BC$, kde $B, C \in \mathcal{J}_2$. Potom

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle x_j, Ax_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle B^* x_j, Cx_j \rangle = \langle B^*, C \rangle_2.$$

Přitom víme, že řada definující skalární součin $\langle B^*, C \rangle_2$ konverguje absolutně a nezávisí na volbě ortonormální báze. $\square$

Tato věta nás opravňuje zavést následující definici.

Definice 2.5.8. Pro operátor $A \in \mathcal{J}_1(\mathfrak{H})$ definujeme jeho *stopu* vztahem

$$\mathrm{Tr} A := \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_j, Ax_j \rangle,$$

kde (x_j) je libovolná ortonormální báze v $\mathfrak{H}$.

Poznámka 2.5.9. V důkazu věty 2.5.7 jsem zjistili, že

$$\forall B, C \in \mathcal{J}_2, \quad \mathrm{Tr}(BC) = \langle B^*, C \rangle_2.$$

Připomenutí 2.5.10. (1) Pro všechny operátory $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ platí $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Je-li speciálně $T^* = T$, pak $\|T^2\| = \|T\|^2$.

(2) $\forall T \in \mathcal{J}_2(\mathfrak{H}), \quad \|T\| \leq \|T\|_2$.

Věta 2.5.11. Pro všechny operátory $A \in \mathcal{J}_1(\mathfrak{H})$ platí

$$(1) \quad |\mathrm{Tr} A| \leq \mathrm{Tr} |A| = \|A\|_1,$$

$$(2) \quad \|A\| \leq \|A\|_1.$$

Důkaz. Dokážeme vztah (1). Uvažme polární rozklad $A = U|A|$ a položme $B := U|A|^{1/2}$, $C := |A|^{1/2}$. Potom $A = BC$ a $B, C \in \mathcal{J}_2$. Odhadneme

$$\begin{aligned} |\mathrm{Tr} A| &= |\langle |A|^{1/2} U^*, |A|^{1/2} \rangle_2| \leq \| |A|^{1/2} U^* \|_2 \| |A|^{1/2} \|_2 \leq \|U^*\| \| |A|^{1/2} \|_2^2 \leq \| |A|^{1/2} \|_2^2 \\ &= \|A\|_1. \end{aligned}$$

Přitom

$$\| |A|^{1/2} \|_2^2 = \langle |A|^{1/2}, |A|^{1/2} \rangle_2 = \mathrm{Tr} |A|.$$

Dokážeme vztah (2). Máme

$$\|A\| = \||A|\| = \||A|^{1/2}\|^2 \leq \||A|^{1/2}\|_2^2 = \|A\|_1.$$

Tím je věta dokázána. $\square$

Nyní jsme schopni postupně dokázat větu 2.4.14 pro případ $p = 1$, viz též věta 2.5.5.

Věta 2.5.12. $\mathcal{S}_1(\mathfrak{H})$ je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$ je norma na $\mathcal{S}_1(\mathfrak{H})$.

Důkaz. Pro $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ je zřejmě $|\lambda A| = |\lambda||A|$. Odtud je patrné, že pokud $A \in \mathcal{S}_1$, potom $\lambda A \in \mathcal{S}_1$ a $\|\lambda A\|_1 = |\lambda|\|A\|_1$. Rovněž není těžké nahlédnout, že $\|A\|_1 = 0$, právě když $|A| = 0$, a tedy $A = 0$. Zbývá ukázat, že součet dvou operátorů z $\mathcal{S}_1$ opět patří do $\mathcal{S}_1$ a že zobrazení $\|\cdot\|_1$ splňuje trojúhelníkovou nerovnost. Tyto dvě vlastnosti lze dokázat současně.

Mějme dány dva libovolné operátory $B, C \in \mathcal{S}_1$ a položme $A := B + C$. Zapišme A v polárním rozkladu, $A = U|A|$. Potom $|A| = U^*B + U^*C$, kde $U^*B, U^*C \in \mathcal{S}_1$ podle věty 2.5.5. Vzhledem k větě 2.5.11 dostáváme

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \operatorname{Tr}|A| = \operatorname{Tr}(U^*B) + \operatorname{Tr}(U^*C) \leq \|U^*B\|_1 + \|U^*C\|_1 \leq \|U^*\|(\|B\|_1 + \|C\|_1) \\ &\leq \|B\|_1 + \|C\|_1. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $\|A\|_1 < \infty$, a tedy $A \in \mathcal{S}_1$. Současně jsme dokázali i trojúhelníkovou nerovnost. $\square$

Ukazuje se, že normovaný vektorový prostor $(\mathcal{S}_1(\mathfrak{H}), \|\cdot\|_1)$ můžeme ztotožnit s duálním prostorem k prostoru kompaktních operátorů na $\mathfrak{H}$.

Věta 2.5.13. Pro libovolný operátor $A \in \mathcal{S}_1$ definujme lineární funkcionál Φ_A na $\mathcal{K}(\mathfrak{H})$ vztahem

$$\forall K \in \mathcal{K}(\mathfrak{H}), \quad \Phi_A(K) := \operatorname{Tr}(AK).$$

Potom $\Phi_A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})^*$ a lineární zobrazení

$$\Phi: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{H})^*: A \mapsto \Phi_A$$

je izometrický izomorfismus.

Důkaz. (I) Tvrdíme, že pro každé $A \in \mathcal{S}_1$ je $\Phi_A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})^*$ a $\|\Phi_A\| \leq \|A\|_1$.

Toto tvrzení plyne přímo z odhadu

$$\forall K \in \mathcal{K}(\mathfrak{H}), \quad |\Phi_A(K)| = |\operatorname{Tr}(AK)| \leq \|AK\|_1 \leq \|A\|_1 \|K\|.$$

(II) Tvrdíme, že pro každé $A \in \mathcal{J}_1$ je $\|\Phi_A\| \geq \|A\|_1$. Vzhledem k části (I) důkazu pak odsud plyne rovnost $\|\Phi_A\| = \|A\|_1$. To znamená, že zobrazení Φ je izometrické, a tudíž prosté.

Toto tvrzení je zřejmé pro $A = 0$, neboť $\Phi_0 = 0$. Předpokládejme dále, že operátor A je nenulový a zapišme ho ve shodě s větou 2.4.12 ve tvaru

$$A = \sum_{j=1}^N s_j \langle x_j, \cdot \rangle y_j,$$

kde $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $(s_j)_{j=1}^N$ jsou singulární hodnoty operátoru A a $(x_j)_{j=1}^N$, $(y_j)_{j=1}^N$ jsou nějaké ortonormální soubory v $\mathfrak{H}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \leq N$, položme

$$K_n := \sum_{j=1}^n \langle y_j, \cdot \rangle x_j \in \mathcal{K}(\mathfrak{H}).$$

Upravíme

$$\forall v \in \mathfrak{H}, \quad AK_n = A \left(\sum_{k=1}^n \langle y_k, v \rangle x_k \right) = \sum_{j=1}^N s_j \left(\sum_{k=1}^n \langle y_k, v \rangle \langle x_j, x_k \rangle \right) y_j.$$

Jelikož $\langle x_j, x_k \rangle = \delta_{j,k}$, dostáváme vyjádření

$$AK_n = \sum_{j=1}^n s_j \langle y_j, \cdot \rangle y_j,$$

což znamená, že AK_n je pozitivní konečnorozměrný operátor zapsaný již v kanonickém (tj. diagonálním) tvaru. Odtud

$$\Phi_A(K_n) = \text{Tr}(AK_n) = \sum_{j=1}^n s_j.$$

Obdobným výpočtem snadno ověříme, že

$$K_n^* = \sum_{j=1}^n \langle x_j, \cdot \rangle y_j, \quad K_n^* K_n = \sum_{j=1}^n \langle y_j, \cdot \rangle y_j.$$

To znamená, že $K_n^* K_n$ je ortogonální projekce na podprostor $\text{span}\{y_1, \dots, y_n\}$, a proto

$$\|K_n\|^2 = \|K_n^* K_n\| = 1.$$

Nakonec můžeme odhadnout

$$\|A\|_1 = \sum_{j=1}^N s_j = \sup_{n \in \mathbb{N}, n \leq N} \sum_{j=1}^n s_j = \sup_{n \in \mathbb{N}, n \leq N} \frac{|\Phi_A(K_n)|}{\|K_n\|} \leq \|\Phi_A\|.$$

(III) Ukážeme, že zobrazení Φ je surjektivní.

Nechť je dán funkcionál $\varphi \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})^*$. Zřejmě stačí vyšetřit případ $\varphi \neq 0$. Na podprostoru $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{K}(\mathfrak{H})$ dostáváme

$$\forall B \in \mathcal{I}_2, \quad |\varphi(B)| \leq \|\varphi\| \|B\| \leq \|\varphi\| \|B\|_2. \quad (2.16)$$

Označme zúžení

$$\tilde{\varphi} := \varphi|_{\mathcal{I}_2}.$$

Podle (2.16) je lineární funkcionál $\tilde{\varphi}$ na $\mathcal{I}_2$ omezený vzhledem k Hilbertově-Schmidtově normě $\|\cdot\|_2$, to jest $\tilde{\varphi} \in \mathcal{I}_2^*$ (a navíc $\|\tilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$). Ale $\mathcal{I}_2$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ je Hilbertův prostor, a proto podle Rieszovy věty existuje (právě jedno) $\tilde{A} \in \mathcal{I}_2$ takové, že

$$\forall B \in \mathcal{I}_2, \quad \tilde{\varphi}(B) = \langle \tilde{A}, B \rangle_2 = \text{Tr}(\tilde{A}^* B).$$

Položme $A := \tilde{A}^* \in \mathcal{I}_2$. Opět podle věty 2.4.12 můžeme zapsat A ve tvaru

$$A = \sum_{j=1}^N s_j \langle x_j, \cdot \rangle y_j,$$

kde $(s_j)_{j=1}^N$ jsou singulární hodnoty operátoru A a $(x_j)_{j=1}^N, (y_j)_{j=1}^N$ jsou ortonormální soubory. Stejně jako v části (II) důkazu pro každé $n \in \mathbb{N}, n \leq N$, a

$$K_n := \sum_{j=1}^n \langle y_j, \cdot \rangle x_j \in \mathcal{I}_2$$

platí

$$AK_n = \sum_{j=1}^n s_j \langle y_j, \cdot \rangle y_j, \quad \|K_n\| = 1.$$

Odhadneme

$$\sum_{j=1}^n s_j = \text{Tr}(AK_n) = \tilde{\varphi}(K_n) = \varphi(K_n) \leq \|\varphi\| \|K_n\| = \|\varphi\|.$$

Odsud plyne $\sum_{j=1}^N s_j \leq \|\varphi\|$, a tedy $A \in \mathcal{I}_1$. Porovnání s definicí lineárního funkcionálu Φ_A vede na rovnost

$$\Phi_A|_{\mathcal{I}_2} = \tilde{\varphi} = \varphi|_{\mathcal{I}_2}.$$

Přitom, jak bylo zmíněno v poznámce 2.4.15, podprostor $\mathcal{I}_2$ je hustý v $\mathcal{K}(\mathfrak{H})$, a tak ze spojitosti obou funkcionalů plyne, že $\Phi_A = \varphi$. $\square$

Vzhledem k tomu, že duální prostor $\mathcal{K}(\mathfrak{H})^*$ je úplný, dostáváme okamžitě tento důsledek.

Důsledek 2.5.14. *Normovaný vektorový prostor $(\mathcal{I}_1(\mathfrak{H}), \|\cdot\|_1)$ je Banachovým prostorem.*

Kapitola 3

Neomezené samosdružené operátory

3.1 Sdružený operátor k neomezenému operátoru

I nadále pracujeme se separabilními komplexními Hilbertovými prostory nekonečné dimenze. V této podkapitole zavedeme pojem sdruženého operátoru k obecně neomezenému, ale hustě definovanému operátoru a vyšetříme jeho základní vlastnosti.

Definice 3.1.1. Buď A operátor na $\mathfrak{H}$ a necht $\overline{\text{Dom } A} = \mathfrak{H}$. *Sdružený operátor* k operátoru A , který označíme A^* , je definován takto: $\text{Dom } A^*$ je tvořen právě těmi vektory $y \in \mathfrak{H}$, pro které existuje $z \in \mathfrak{H}$ splňující

$$\forall x \in \text{Dom } A, \quad \langle y, Ax \rangle = \langle z, x \rangle. \quad (3.1)$$

Pokud takový vektor z existuje, tak je určen jednoznačně, a můžeme proto položit $A^*y := z$.

Poznámka. Je ponecháno na čtenáři, aby zdůvodnil, že k danému $y \in \mathfrak{H}$ existuje nejvýše jedno $z \in \mathfrak{H}$ splňující (3.1). Díky aditivitě skalárního součinu v prvním argumentu stačí uvážit případ $y = 0$ spolu s předpokladem, že A je hustě definovaný operátor.

Poznámka 3.1.2. (1) Podle definice sdruženého operátoru máme

$$\forall x \in \text{Dom } A, \forall y \in \text{Dom } A^*, \quad \langle y, Ax \rangle = \langle A^*y, x \rangle.$$

Přitom pro dané A je A^* největší operátor (vzhledem k uspořádání $\subset$) s touto vlastností. Skutečně, jestliže nějaký operátor D také splňuje

$$\forall x \in \text{Dom } A, \forall y \in \text{Dom } D, \quad \langle y, Ax \rangle = \langle Dy, x \rangle,$$

potom pro $y \in \text{Dom } D$ je $y \in \text{Dom } A^*$ a $A^*y = Dy$, tedy $D \subset A^*$.

(2) Je-li $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, potom definice operátoru A^* se shoduje s původní definicí hermitovsky sdruženého operátoru pro omezené operátory. Rovněž zdůvodnění tohoto tvrzení

je ponecháno na čtenáři.

Tvrzení 3.1.3. *Pro hustě definované operátory A, B na $\mathfrak{H}$ a pro $\lambda \in \mathfrak{H}$ platí*

- (1) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$,
- (2) je-li $\overline{\text{Dom}(A+B)} = \mathfrak{H}$, pak $(A+B)^* \supset A^* + B^*$,
- (3) je-li $\overline{\text{Dom } AB} = \mathfrak{H}$, pak $(AB)^* \supset B^* A^*$,
- (4) $A \subset B \implies B^* \subset A^*$.

Důkaz. Dokážeme pouze bod (2). Důkaz ostatních bodů je ponechán na čtenáři jako cvičení.

Dostáváme, že

$$\forall x \in \text{Dom}(A+B) = \text{Dom}(A) \cap \text{Dom}(B), \forall y \in \text{Dom}(A^* + B^*) = \text{Dom}(A^*) \cap \text{Dom}(B^*)$$

platí

$$\langle y, (A+B)x \rangle = \langle y, Ax \rangle + \langle y, Bx \rangle = \langle A^*y, x \rangle + \langle B^*y, x \rangle = \langle (A^* + B^*)y, x \rangle.$$

Tvrzení pak plyne z poznámky 3.1.2 ad (1), jestliže zde všude napíšeme $A+B$ namísto A a $A^* + B^*$ namísto D . $\square$

Věta 3.1.4. *Bud' A hustě definovaný operátor na $\mathfrak{H}$. Nechť inverzní operátor A^{-1} existuje a je hustě definovaný. Potom $(A^*)^{-1}$ existuje a platí*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Důkaz. Nechť $y \in \text{Dom}(A^{-1})^*$. Pro $x \in \text{Dom } A$ je $Ax \in \text{Dom } A^{-1}$, a proto

$$\forall x \in \text{Dom } A, \langle (A^{-1})^*y, Ax \rangle = \langle y, A^{-1}Ax \rangle = \langle y, x \rangle.$$

To znamená, že $(A^{-1})^*y \in \text{Dom } A^*$ a $A^*(A^{-1})^*y = y$. Role operátorů A a A^{-1} můžeme zaměnit a dostáváme, že pro každé $y \in \text{Dom } A^*$ je $A^*y \in \text{Dom}(A^{-1})^*$ a $(A^{-1})^*A^*y = y$. Odvozené vztahy můžeme přepsat

$$A^*(A^{-1})^* = I|_{\text{Dom}(A^{-1})^*}, \quad (A^{-1})^*A^* = I|_{\text{Dom } A^*}.$$

Odsud již plyne tvrzení věty. $\square$

Věta 3.1.5. *Bud' A hustě definovaný operátor na $\mathfrak{H}$. Potom*

$$\text{Ker } A^* = (\text{Ran } A)^\perp.$$

Důkaz. Podle definice sdruženého operátoru je $y \in \text{Ker } A^*$, právě když pro všechna $x \in \text{Dom } A$ platí $\langle y, Ax \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$. To ovšem přesně znamená, že $y \in (\text{Ran } A)^\perp$. $\square$

Připomenutí 3.1.6. $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathfrak{H}, \quad \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle := \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle.$$

Tento Hilbertův prostor se také někdy zapisuje jako ortogonální součet $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$, když první sčítanec se ztotožňuje s podprostorem $\mathfrak{H} \times \{0\}$ a druhý s podprostorem $\{0\} \times \mathfrak{H}$. Je-li A operátor na $\mathfrak{H}$, potom jeho graf je podprostor v $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, který i nadále budeme značit symbolem $\Gamma(A)$.

Reprezentování operátorů pomocí jejich grafů nám umožňuje uplatnit geometrický přístup. Ten se ukazuje být velmi užitečným v případě sdružených operátorů.

Tvrzení 3.1.7. *Definujme unitární operátor $U \in \mathcal{B}(\mathfrak{H} \times \mathfrak{H})$ vztahem*

$$\forall (x, y) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}, \quad U(x, y) := (y, -x).$$

Potom pro libovolný hustě definovaný operátor A na $\mathfrak{H}$ platí

$$\Gamma(A^*) := [U(\Gamma(A))]^\perp. \quad (3.2)$$

Důkaz. Podle definice sdruženého operátoru $(y, z) \in \Gamma(A^*)$, to jest $y \in \text{Dom}(A^*)$ a $A^*y = z$, právě když

$$\forall x \in \text{Dom}(A), \quad \langle y, Ax \rangle - \langle z, x \rangle = 0.$$

To můžeme ekvivalentně přepsat

$$\forall x \in \text{Dom}(A), \quad \langle (y, z), (Ax, -x) \rangle = \langle (y, z), U(x, Ax) \rangle = 0.$$

To je ovšem ekvivalentní se vztahem $(y, z) \perp U(\Gamma(A))$. □

Důsledek 3.1.8. *Je-li A hustě definovaný operátor na $\mathfrak{H}$, potom operátor A^* je uzavřený.*

Důkaz. Graf $\Gamma(A^*)$ je uzavřený, neboť je roven ortogonálnímu doplňku nějakého podprostoru v $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. □

Důsledek 3.1.9. *Jestliže pro hustě definovaný operátor A na $\mathfrak{H}$ existuje $\overline{A}$, to jest je-li A uzavíratelný, potom $(\overline{A})^* = A^*$.*

Důkaz. Podle definice uzávěru je $\Gamma(\overline{A}) := \overline{\Gamma(A)}$, pokud pravá strana je grafem nějakého operátoru. Dále unitární zobrazení je homeomorfismus, a tedy převádí uzávěr v uzávěr. Ze vztahy (3.2) dostáváme

$$\Gamma((\overline{A})^*) = [U(\Gamma(\overline{A}))]^\perp = [U(\overline{\Gamma(A)})]^\perp = [\overline{U(\Gamma(A))}]^\perp = [U(\Gamma(A))]^\perp = \Gamma(A^*).$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Věta 3.1.10. *Bud' A hustě definovaný operátor na $\mathfrak{H}$. Potom operátor A je uzavíratelný, právě když existuje $A^{**} := (A^*)^*$. V kladném případě platí rovnost*

$$A^{**} = \overline{A}.$$

Důkaz. Symbol U má stejný význam jako v tvrzení 3.1.7. Všimněme si, že zobrazení U splňuje $U^* = U^{-1} = -U$. Podle zmíněného tvrzení máme

$$\mathfrak{H} \times \mathfrak{H} = \Gamma(A^*) \oplus \overline{U(\Gamma(A))}.$$

Aplikujeme-li zobrazení U na tuto rovnost (a zaměníme pořadí sčítanců), dostáváme

$$\mathfrak{H} \times \mathfrak{H} = \overline{\Gamma(A)} \oplus U(\Gamma(A^*)). \quad (3.3)$$

Operátor A^{**} existuje, právě když $\text{Dom } A^*$ je hustý podprostor v $\mathfrak{H}$, neboli právě když $\text{Dom}(A^*)^\perp = \{0\}$. Ukážeme, že

$$z \in \text{Dom}(A^*)^\perp \iff (0, z) \in \overline{\Gamma(A)}. \quad (3.4)$$

To pak znamená, že $\text{Dom}(A^*)^\perp = \{0\}$, právě když $\overline{\Gamma(A)}$ je grafem nějakého operátoru, a tedy právě když A je uzavíratelný.

Skutečně, $z \in \text{Dom}(A^*)^\perp$, právě když pro všechny vektory $y \in \text{Dom } A^*$ je $\langle y, z \rangle = 0$, což můžeme přepsat

$$\forall y \in \text{Dom } A^*, \langle (A^*y, -y), (0, z) \rangle = \langle U(y, A^*y), (0, z) \rangle = 0.$$

To ale přesně znamená, že $(0, z) \in [U(\Gamma(A^*))]^\perp = \overline{\Gamma(A)}$, viz (3.3).

Jak jsme objasnili, dokázaná ekvivalence (3.4) nám říká, že A^{**} existuje, právě když A je uzavíratelný. V tom případě z (3.3) a (3.2) plyne

$$\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)} = [U(\Gamma(A^*))]^\perp = \Gamma(A^{**}).$$

Tím je důkaz věty úplný. □

Důsledek 3.1.11. *Bud' A hustě definovaný operátor na $\mathfrak{H}$. Je-li A uzavřený operátor, potom $\text{Ker } A \subset \mathfrak{H}$ je uzavřený podprostor.*

Důkaz. Máme $A = \overline{A} = A^{**}$. Odtud plyne

$$\text{Ker } A = \text{Ker } A^{**} = (\text{Ran } A^*)^\perp.$$

Podprostor $\text{Ker } A$ je tedy uzavřený. □

Poznámka 3.1.12. Důsledek 3.1.11 lze snadno dokázat také přímo i bez předpokladu

o hustém definičním oboru. Je-li (x_n) konvergentní posloupnost ležící celá v $\text{Ker } A$, $x_n \rightarrow x \in \mathfrak{H}$, potom (Ax_n) je konstantní posloupnost, a tedy $Ax_n \rightarrow 0$ v $\mathfrak{H}$. Z uzavřenosti operátoru A plyne, že $x \in \text{Dom } A$ a $Ax = 0$.

3.2 Symetrické a samosdružené operátory

Pojem samosdruženého operátoru můžeme nyní zobecnit i na neomezené operátory, u kterých je ale nutné předpokládat, že jsou alespoň hustě definovány. Do takto vybudované teorie je pak možné zahrnout i diferenciální operátory, které jsou typickými představiteli neomezených operátorů. Význačnou vlastností samosdružených operátorů je, že i v případě, kdy jsou neomezené, zůstává v platnosti věta o spektrálním rozkladu. Tuto větu je však třeba oproti neomezenému případu mírně modifikovat. Zde ji uvádíme jen pro informaci a jako motivaci pro studium samosdružených operátorů a nebudeme se ji dále podrobně věnovat. Je možné ji odvodit ze známého výsledku pro omezený případ.

Definice 3.2.1. Řekneme, že jednoparametrická množina $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ ortogonálních projekcí v $\mathfrak{H}$ je *rozklad jedničky* (anglicky *resolution of unity* nebo *resolution of the identity*), jestliže splňuje

- (1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \leq \mu \implies P_\lambda \leq P_\mu$ (monotonie),
- (2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{s-}\lim_{\mu \rightarrow \lambda^-} P_\mu = P_\lambda$ (silná spojitost zleva),
- (3) $\text{s-}\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} P_\lambda = 0, \text{s-}\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P_\lambda = I$ (limitní hodnoty v silném smyslu v $-\infty$ a $+\infty$).

Věta 3.2.2. Ke každému samosdruženému operátoru A na $\mathfrak{H}$ existuje právě jeden rozklad jedničky $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ takový, že

$$A = \int \lambda dP_\lambda.$$

Definice 3.2.3. Buď A hustě definovaný operátor na $\mathfrak{H}$. Řekneme, že operátor A je *symetrický*, jestliže

$$\forall x, y \in \text{Dom } A, \langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle.$$

Řekneme, že operátor A je *samosdružený*, jestliže $A^* = A$.

Poznámka 3.2.4. (1) Můžeme také říci, že hustě definovaný operátor A na $\mathfrak{H}$ je symetrický, právě když jeho kvadratická forma je reálná, to jest

$$\forall x \in \text{Dom } A, \langle x, Ax \rangle \in \mathbb{R}.$$

Odtud okamžitě plyne, že symetrický operátor může mít pouze reálné vlastní hodnoty.

(2) Buďte A symetrický operátor na $\mathfrak{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Pišme $\alpha := \text{Re } \lambda$, $\beta := \text{Im } \lambda$. Potom

$$\forall x \in \text{Dom } A, \|(A - \lambda I)x\|^2 = \|(A - \alpha I)x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2.$$

Výpočet je naprosto stejný jako pro omezené samosdružené operátory.

Tvrzení 3.2.5. *Hustě definovaný operátor A na $\mathfrak{H}$ je symetrický, právě když $A \subset A^*$.*

Důkaz. Důkaz spočívá pouze v porovnání definic a je odložen na cvičení. $\square$

Věta 3.2.6. *Každý symetrický (hustě definovaný) operátor na $\mathfrak{H}$ je uzavíratelný.*

Důkaz. Buď A symetrický operátor na $\mathfrak{H}$. Podle tvrzení 3.2.5 je $A \subset A^*$ a podle důsledku 3.1.8 je operátor A^* uzavřený. A má tedy uzavřené rozšíření. $\square$

Poznámka 3.2.7. Uzávěr symetrického operátoru na $\mathfrak{H}$ je také symetrický operátor.

Skutečně, z $A \subset A^*$ a z uzavřenosti operátoru A^* plyne

$$\overline{A} \subset A^* = (\overline{A})^*,$$

viz též důsledek 3.1.9.

Věta 3.2.8. *Je-li operátor A na $\mathfrak{H}$ symetrický a současně $\text{Dom } A = \mathfrak{H}$, potom $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ a $A^* = A$.*

Důkaz. Podle předpokladu je $A \subset A^*$ a $\text{Dom } A = \mathfrak{H}$. Nutně $A = A^*$. Operátor A je tedy uzavřený a všude definovaný. Podle věty o uzavřeném grafu je A také omezený. $\square$

Obecně i pro neomezené operátory lze zavést pojem „normální operátor“, což je obecnější pojem než „samosdružený operátor“. Následující tvrzení o reziduálním spektru a také Weylovo kritérium platí obecně pro normální operátory. Normálními operátory se zde ale zabývat nebudeme a spokojíme se s tím, že zmíněné výsledky vyslovíme pro samosdružené operátory.

Věta 3.2.9. *Každý samosdružený operátor na $\mathfrak{H}$ má prázdné reziduální spektrum.*

Důkaz. Buď A samosdružený operátor na $\mathfrak{H}$. Stačí ukázat, že pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ platí: jestliže $\overline{\text{Ran}(A - \lambda I)} \neq \mathfrak{H}$, potom $\lambda \in \sigma_p(A)$. Odtud plyne, že pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \sigma_r(A)$.

Předpokládejme, že $x \in \text{Ran}(A - \lambda I)^\perp$, $x \neq 0$. To znamená, že

$$x \in \text{Ker}(A^* - \overline{\lambda}I) = \text{Ker}(A - \overline{\lambda}I).$$

Všechna vlastní čísla operátoru A jsou reálná, a proto $\overline{\lambda} = \lambda \in \sigma_p(A)$. $\square$

Věta 3.2.10 (Weylovo kritérium). *Buď A samosdružený operátor na $\mathfrak{H}$. Potom platí:*

(1) $\lambda \in \varrho(A)$, právě když existuje konstanta $m > 0$ taková, že

$$\forall x \in \text{Dom } A, \quad \|(A - \lambda I)x\| \geq m\|x\|, \quad (3.5)$$

(2) $\lambda \in \sigma(A)$, právě když existuje posloupnost $(x_n) \subset \text{Dom } A$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda I)x_n\| = 0.$$

Důkaz. Důkaz je prakticky stejný jako pro omezené samosdružené nebo normální operátory. Výroky (1) a (2) jsou ekvivalentní. Stačí tedy dokázat výrok (1).

($\Rightarrow$) Pro $\lambda \in \varrho(A)$ položíme $m := 1/\|(A - \lambda I)^{-1}\|$. Potom

$$\forall x \in \text{Dom } A, \|x\| = \|(A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)x\| \leq (1/m) \|(A - \lambda I)x\|.$$

($\Leftarrow$) Z (3.5) plyne, že $\text{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$. Tedy $(A - \lambda I)^{-1}$ existuje. Navíc se jedná o uzavřený operátor. Z (3.5) lze také usoudit, že $(A - \lambda I)^{-1}$ je omezený operátor. Z těchto vlastností dále plyne, že $\text{Dom}(A - \lambda I)^{-1} = \text{Ran}(A - \lambda I)$ je uzavřený podprostor v $\mathfrak{H}$ (bylo rozebráno na cvičení). Navíc reziduální spektrum operátoru A je prázdné, a proto $\text{Ran}(A - \lambda I)$ je hustý podprostor v $\mathfrak{H}$. Nutně $\text{Ran}(A - \lambda I) = \mathfrak{H}$ a $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$. $\square$

Věta 3.2.11. *Spektrum každého samosdruženého operátoru na $\mathfrak{H}$ je reálné.*

Důkaz. Buďte A samosdružený operátor na $\mathfrak{H}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Máme ukázat, že pokud $\text{Im } \lambda \neq 0$, potom $\lambda \in \varrho(A)$. To přímo vyplývá z poznámky 3.2.4 ad (2) a z Weylova kritéria. Postup je prakticky stejný jako v případě omezených samosdružených operátorů. Doplnění podrobností je ponecháno na čtenáři. $\square$

3.3 Samosdružená rozšíření symetrických operátorů

Cílem této podkapitoly je zodpovědět otázku, zda pro daný symetrický operátor existuje nějaké jeho samosdružené rozšíření, a pokud ano, jak popsat všechna takováto rozšíření. Je účelné tuto otázku ještě trochu zobecnit a zkoumat symetrická rozšíření symetrického operátoru. Základní výchozí pozorování je popsáno v následující poznámce.

Poznámka 3.3.1. Mějme dán symetrický operátor A na $\mathfrak{H}$. Potom každé symetrické rozšíření B operátoru A splňuje

$$A \subset B \subset B^* \subset A^*.$$

Každé takové symetrické rozšíření je jednoznačně určeno podprostorem $V \subset \mathfrak{H}$, který vyhovuje podmínce

$$\text{Dom } A \subset V \subset \Theta(A), \text{ kde } \Theta(A) := \{x \in \text{Dom}(A^*); \langle x, A^*x \rangle \in \mathbb{R}\}, \quad (3.6)$$

jestliže položíme

$$B := A^*|_V.$$

Naopak $V = \text{Dom } B$.

Poznamenejme, že $\Theta(A)$ není podprostor. Podle předpokladu máme $A \subset A^*$, $B \subset B^*$ a $A \subset B$. Z posledního vztahu ale plyne $B^* \subset A^*$. To také znamená, že B je zúžením

A^* a $V := \text{Dom } B$ musí splňovat $\text{Dom } A \subset V \subset \text{Dom } A^*$. Přitom kvadratická forma symetrického operátoru je reálná, a proto pro každé $x \in V$ je $\langle x, A^*x \rangle = \langle x, Bx \rangle \in \mathbb{R}$.

Tuto úvahu lze zřejmě obrátit. Jestliže podprostor V splňuje (3.6) a B je zúžením operátoru A^* na V , potom B je rozšířením operátoru A a kvadratická forma pro B je reálná, tedy operátor B je symetrický.

Předchozí úvaha naznačuje, že pro řešení našeho problému je důležité popsat definiční obor $\text{Dom } A^*$ pro daný symetrický operátor A . Nejprve jeden předběžný výsledek.

Tvrzení 3.3.2. *Budť A symetrický operátor na $\mathfrak{H}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Je-li $\text{Im } \lambda \neq 0$, potom operátor A je uzavřený, právě když podprostor $\text{Ran}(A - \lambda I)$ je uzavřený. Pro uzavřený symetrický operátor tedy platí*

$$\mathfrak{H} = \text{Ran}(A - \lambda I) \oplus \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I). \quad (3.7)$$

Důkaz. Stejně jako v poznámce 3.2.4 ad (2) máme

$$\forall x \in \text{Dom } A, \quad \|(A - \lambda I)x\|^2 \geq |\text{Im } \lambda|^2 \|x\|^2.$$

Odtud plyne, že pro $\text{Im } \lambda \neq 0$ existuje inverzní operátor $(A - \lambda I)^{-1}$ a je omezený. Přitom operátor A je uzavřený, právě když $A - \lambda I$ je uzavřený, a to je, právě když $(A - \lambda I)^{-1}$ je uzavřený. Omezený operátor je ale uzavřený, právě když jeho definiční obor je uzavřený (probráno na cvičení). To znamená, že $(A - \lambda I)^{-1}$ je uzavřený, právě když $\text{Dom}(A - \lambda I)^{-1} = \text{Ran}(A - \lambda I)$ je uzavřený podprostor. $\square$

Věta 3.3.3. *Budť A symetrický operátor na $\mathfrak{H}$. Potom*

$$\text{Dom } A^* = \text{Dom } \bar{A} \dot{+} \text{Ker}(A^* - iI) \dot{+} \text{Ker}(A^* + iI).$$

Poznámka. Tečka nad $+$ znamená, že se jedná o direktní součet.

Důkaz. Vzhledem k rovnosti $A^* = (\bar{A})^*$ stačí, když větu dokážeme za předpokladu, že A je uzavřený operátor. Budť $y \in \text{Dom } A^*$ libovolný vektor. Chceme ukázat, že y lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$y = x + z_+ + z_-, \text{ kde } x \in \text{Dom } A, z_{\pm} \in \text{Ker}(A^* \mp iI). \quad (3.8)$$

(I) *Jednoznačnost.* Nechť platí (3.8). Podle tvrzení 3.3.2 máme

$$(A^* - iI)y = (A - iI)x - 2iz_- \in \text{Ran}(A - iI) \oplus \text{Ker}(A^* + iI) = \mathfrak{H}.$$

Odtud plyne, že sčítanec z_- v (3.8) je pro daný vektor y určen jednoznačně. Obdobně lze zdůvodnit, že i sčítanec z_+ určen jednoznačně. Potom je nutně určen jednoznačně také prvek x .

(I) *Existence*. Předcházející postup lze obrátit. Podle (3.7) je

$$(A^* - iI)y \in \text{Ran}(A - iI) \oplus \text{Ker}(A^* + iI) = \mathfrak{H},$$

a proto můžeme psát

$$(A^* - iI)y = (A - iI)x - 2iz_-, \text{ pro jisté vektory } x \in \text{Dom } A, z_- \in \text{Ker}(A^* + iI).$$

Položme $z_+ := y - x - z_-$. K dokončení důkazu stačí ukázat, že $z_+ \in \text{Ker}(A^* - iI)$. Vypočteme

$$\begin{aligned} (A^* - iI)z_+ &= (A^* - iI)y - (A - iI)x + 2iz_- \\ &= (A - iI)x - 2iz_- - (A - iI)x + 2iz_- \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tím je věta úplně dokázána. $\square$

Definice 3.3.4. Buď A symetrický operátor na $\mathfrak{H}$. Podprostory $\text{Ker}(A^* \mp iI)$, tedy vlastní podprostory operátoru A^* příslušné vlastním číslům $\pm i$, nazveme *defektními podprostory*. Čísla

$$\delta_{\pm}(A) := \dim \text{Ker}(A^* \mp iI) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

nazveme *indexy defektu* symetrického operátoru A .

Poznámka 3.3.5. Lze ukázat, že v případě symetrického operátoru A na $\mathfrak{H}$ zobrazení

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \dim \text{Ker}(A^* - zI) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

je konstantní na každé z polorovin $\text{Im } z > 0$ a $\text{Im } z < 0$. Důkaz zde neuvádíme.

Definice 3.3.6. Buď A symetrický operátor na $\mathfrak{H}$. Řekneme, že operátor A je *v podstatě samosdružený*, je-li operátor $\overline{A}$ samosdružený.

Jako okamžitý důsledek věty 3.3.3 dostáváme následující kritérium.

Důsledek 3.3.7. *Uzavřený symetrický operátor je samosdružený, právě když oba jeho indexy defektu jsou nulové. Je-li A symetrický operátor na $\mathfrak{H}$, ale ne nutně samosdružený, potom rovnosti $\delta_+(A) = \delta_-(A) = 0$ jsou ekvivalentní s tvrzením, že A je v podstatě samosdružený.*

Lemma 3.3.8. *Buďte A symetrický operátor na $\mathfrak{H}$, $y \in \text{Dom } A^*$. Nechť symbol $\Theta(A)$ má stejný význam jako v (3.6). Ve shodě s větou 3.3.3 zapišme y ve tvaru*

$$y = x + z_+ + z_-, \text{ kde } x \in \text{Dom } \overline{A}, z_{\pm} \in \text{Ker}(A^* \mp iI).$$

Potom $y \in \Theta(A)$, právě když $\|z_+\| = \|z_-\|$.

Důkaz. Důkaz je založen na přímém výpočtu. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\langle y, A^*y \rangle &= \langle x + z_+ + z_-, \overline{Ax} + iz_+ - iz_- \rangle \\
&= \langle x, \overline{Ax} \rangle + \langle z_+ + z_-, \overline{Ax} \rangle + i \langle x, z_+ - z_- \rangle + i \langle z_+ + z_-, z_+ - z_- \rangle \\
&= \langle x, \overline{Ax} \rangle + \langle A^*(z_+ + z_-), x \rangle + i \langle x, z_+ - z_- \rangle + i (\langle z_-, z_+ \rangle - \langle z_+, z_- \rangle) \\
&\quad + i (\|z_+\|^2 - \|z_-\|^2) \\
&= \langle x, \overline{Ax} \rangle + i (\langle x, z_+ - z_- \rangle - \langle z_+ - z_-, x \rangle) + i (\langle z_-, z_+ \rangle - \langle z_+, z_- \rangle) \\
&\quad + i (\|z_+\|^2 - \|z_-\|^2).
\end{aligned}$$

Odtud je již zřejmé, že $\langle y, A^*y \rangle \in \mathbb{R}$, právě když $\|z_+\| = \|z_-\|$. $\square$

Lemma 3.3.9. *Budťe A symetrický operátor na $\mathfrak{H}$ a B jeho samosdružené rozšíření. Potom ke každému $z \in \text{Ker}(A^* - iI)$ existuje právě jedno $\tilde{z} \in \text{Ker}(A^* + iI)$ takové, že $z + \tilde{z} \in \text{Dom } B$.*

Důkaz. Podle předpokladu máme $A \subset B = B^* \subset A^*$. Mějme dán vektor $z \in \text{Ker}(A^* - iI)$.

(I) *Existence.* Podle věty je $-i \in \varrho(B)$. Položme

$$\tilde{z} := 2i(B + iI)^{-1}z - z.$$

Potom

$$z + \tilde{z} \in \text{Ran}(B + iI)^{-1} = \text{Dom } B \subset \text{Dom } A^*.$$

Určitě $\tilde{z} \in \text{Dom } A^*$. Jelikož operátor B je zúžením A^* , dostáváme

$$(A^* + iI)\tilde{z} = 2i(A^* + iI)(B + iI)^{-1}z - 2iz = 2i(B + iI)(B + iI)^{-1}z - 2iz = 0.$$

Tedy $\tilde{z} \in \text{Ker}(A^* + iI)$.

(II) *Jednoznačnost.* Nechť $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in \text{Ker}(A^* + iI)$ jsou vektory, pro které

$$z + \tilde{z}_1, z + \tilde{z}_2 \in \text{Dom } B.$$

Potom $\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2 \in \text{Dom}(B) \cap \text{Ker}(A^* + iI)$. Protože podle poznámky 3.3.1 je $\text{Dom } B \subset \Theta(A)$, z lemmatu 3.3.8 plyne $\|\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2\| = 0$.

Jednoznačnost můžeme také zdůvodnit následovně. Operátor B je zúžením A^* , a tak $\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2 \in \text{Ker}(B + iI)$. Vzhledem k tomu, že samosdružený operátor může mít pouze reálná vlastní čísla, je $\text{Ker}(B + iI) = \{0\}$. $\square$

Následující základní výsledek, který se týká samosdružených rozšíření symetrických operátorů, je připisován J. von Neumannovi (1903-1957).

Věta 3.3.10. *Bud' A symetrický operátor na $\mathfrak{H}$. Potom samosdružené rozšíření operátoru A existuje, právě když indexy defektu $\delta_+(A)$ a $\delta_-(A)$ jsou si rovny, to jest*

$$\dim \operatorname{Ker}(A^* - iI) = \dim \operatorname{Ker}(A^* + iI).$$

Jestliže $\delta_+(A) = \delta_-(A)$, potom samosdružená rozšíření operátoru A jsou ve vzájemně jednoznačném vztahu s unitárními zobrazeními

$$U: \operatorname{Ker}(A^* - iI) \rightarrow \operatorname{Ker}(A^* + iI). \quad (3.9)$$

Samosdružené rozšíření $B = B_U$ operátoru A příslušné unitárnímu zobrazení U (3.9) je určeno takto:

$$\operatorname{Dom} B := \operatorname{Dom} \bar{A} \dot{+} (I + U)(\operatorname{Ker}(A^* - iI)) \quad (3.10)$$

a

$$\forall x \in \operatorname{Dom} \bar{A}, \forall z \in \operatorname{Ker}(A^* - iI), \quad B(x + z + Uz) := \bar{A}x + iz - iUz. \quad (3.11)$$

Důkaz. Každé samosdružené rozšíření operátoru A je současně samosdruženým rozšířením operátoru $\bar{A}$. A tak opět bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A je uzavřený operátor.

(I) Nejprve dokážeme, že operátor B definovaný vztahy (3.10), (3.11), kde U je nějaké unitární zobrazení (3.9), je samosdružený. Přitom je zřejmé, že B je rozšířením operátoru A a současně zúžením operátoru A^* .

Vzhledem k unitaritě zobrazení U je podle lemmatu 3.3.8 $\operatorname{Dom} B \subset \Theta(A)$, a proto B je symetrický operátor, neboť jeho kvadratická forma je reálná, viz poznámka 3.3.1.

Dále ze vztahu (3.11) vyplývá, že

$$\operatorname{Ran}(B + iI) = \operatorname{Ran}(A + iI) \oplus \operatorname{Ker}(A^* - iI) = \mathfrak{H}$$

(při předpokladu $\bar{A} = A$). Odsud na základě tvrzení 3.3.2 můžeme usoudit, že operátor B je uzavřený. Navíc tato rovnost implikuje, že $\operatorname{Ker}(B^* - iI) = \{0\}$. Obdobně lze zdůvodnit, že $\operatorname{Ker}(B^* + iI) = \{0\}$. Důsledek 3.3.7 nám pak říká, že B je samosdružený operátor.

Poznamenejme ještě, že přiřazení $U \mapsto B = B_U$ je prosté. Skutečně, podle (3.10) různým unitárním zobrazením odpovídají různé definiční obory $\operatorname{Dom} B_U$, a tedy různá samosdružená rozšíření B_U .

(II) Naopak z již dokázaných výsledků vyplývá, že každé samosdružené rozšíření B operátoru A je tvaru (3.10), (3.11) a (3.9).

Podle lemmatu 3.3.9 každé samosdružené rozšíření B jednoznačně určuje zobrazení

$$U: \operatorname{Ker}(A^* - iI) \rightarrow \operatorname{Ker}(A^* + iI)$$

splňující podmínku $z + Uz \in \operatorname{Dom} B$ pro všechna $z \in \operatorname{Ker}(A^* - iI)$. Není těžké nahlédnout,

že zobrazení U je lineární. Podle lemmatu 3.3.8 U nutně splňuje $\|Uz\| = \|z\|$ pro všechna $z \in \text{Ker}(A^* - iI)$. Projdeme-li si důkaz lemmatu 3.3.9, zjistíme, že lemma zůstává v platnosti, jestliže v něm zaměníme navzájem vlastní hodnoty i a $-i$ operátoru A^* . Ve svém důsledku to znamená, že zobrazení U je také surjektivní. Vzhledem k větě 3.3.3 tak dostáváme

$$\text{Dom } B = \{x + z + Uz; x \in \text{Dom } A, z \in \text{Ker}(A^* - iI)\},$$

čili platí (3.10). Přitom samosdružené rozšíření B je svým definičním oborem určeno jednoznačně, neboť je zúžením operátoru A^* (viz poznámka 3.3.1), a odtud plyne (3.11).

(III) Nakonec můžeme shrnout, že pokud operátor A má samosdružené rozšíření, potom podle části (II) důkazu existuje unitární zobrazení mezi defektními podprostory $\text{Ker}(A^* - iI)$ a $\text{Ker}(A^* + iI)$, a proto tyto podprostory mají stejnou dimenzi.

Naopak, pokud jsou indexy defektu shodné, existuje alespoň jedno unitární zobrazení (3.9) a podle části (I) důkazu existuje samosdružené rozšíření operátoru A . Speciálně pro $\delta_+(A) = \delta_-(A) = 0$ je A samo sobě svým jediným samosdruženým rozšířením (při předpokladu $\overline{A} = A$). $\square$

Poznámka 3.3.11. Nechť symetrický operátor A má shodné a přitom konečné indexy defektu, $\delta_+(A) = \delta_-(A) =: n \in \mathbb{N}$. Unitární grupa na n -rozměrném (komplexním) Hilbertově prostoru je hladká reálná varieta dimenze n^2 . V tomto případě lze tedy množinu všech samosdružených rozšíření operátoru A parametrizovat pomocí n^2 reálných parametrů.