Hlavní fibrovaný prostor

Opakování: Lieovy grupy a akce na množině (varietě)

Příklad: Hopfova fibrace I: *

Uvažme grupu $G = SU(2) = \{A \in \mathbb{C}^{2,2} / A^+A = I \wedge \det A = 1\}$.

Snadno se ukáže, že $SU(2) \simeq S^3$, skutečně:

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & \lambda \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

$$\overbrace{A^{-1} = A^+ \wedge |\det A| = 1}^{A \in U(2)} \Rightarrow A = \exp\left(i\varphi \tfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\alpha & \lambda \\ -\lambda^* & \alpha^*\end{pmatrix} \quad *$$

$A \in SU(2)$, tj. navíc $\det A = 1$:

$$SU(2) = \left\{\begin{pmatrix}\alpha & \lambda \\ -\lambda^* & \alpha^*\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} / |\alpha|^2 + |\lambda|^2 = 1\right\} \simeq S^3 \quad *$$

Uvažujme nyní varietu $M = H_0(2,\mathbb{C})$ hermitovských matic 2×2 s nulovou stopou.
Tato množina tvoří vektorový prostor s hladkou strukturou.

$$H_0(2,\mathbb{C}) = \left\{\begin{pmatrix}x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} / x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Lineární isomorfismus $\mathbb{R}^3 \mapsto H_0(2,\mathbb{C})$ lze psát jako:

$$\varphi(x) := x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3. \quad *$$

Je snadné vidět, že $\det(\varphi(x)) = -\|x\|^2$.

Nyní definujme akci $SU(2)$ na $H_0(2,\mathbb{C})$ následovně:

$$\theta_A(H) := AHA^+ \;, \; \forall H \in H_0(2,\mathbb{C}) \qquad *$$

Snadno se ověří, že $\theta_A(H)$ je hermitovská a bezestopá.
Můžeme tedy tuto akci použít, abychom definovali akci $\hat{\theta}: SU(2) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vztahem

$$\hat{\theta}_A(x) := ~~-\det~~ - \Psi^{-1}(\theta_A(\Psi(x)))$$

$*$

$$\to \|\hat{\theta}_A(x)\|^2 = -\det(\theta_A(\Psi(x))) = -\det(A\Psi(x)A^+) = -\det(\Psi(x)) = \|x\|^2$$

$\hat{\theta}_A$ definuje ortogonální lineární transformace, a tedy elementy grupy $O(3)$.

Můžeme se dívat na $\hat{\theta}$ jako na zobrazení $\hat{\theta}: SU(2) \to O(3)$.

Ve skutečnosti má $\hat{\theta}$ hodnoty v grupě $SO(3)$.

iv) Na S^3 nalevo a transitivně podél vláken π působí Lieova grupa $U(1)$

$U(1) = \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^1 \simeq S^1\}$

$\xi \in S^3, \quad \xi \cdot e^{i\alpha} = e^{i\alpha} \cdot \xi$

$\|e^{i\alpha}\xi\| = \|\xi\| = 1$

$\pi(e^{i\alpha}x)_i = x^+ e^{-i\alpha} a_i e^{i\alpha} x = \pi(x)$

$\xi \in S^3 : \pi(\xi) = \vec{n}, \quad \Sigma := \vec{n}\vec{\sigma} = n_i a_i$

$\xi\xi^+ = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \Sigma)$

$\Sigma(\xi) = (2\xi\xi^+ - \mathbb{I})\xi = \xi$

~~...~~ Každý bod vlákna $\pi^{-1}(n)$ je vlastním vektorem operátoru $\Sigma := n_i a_i$ s vl. číslem 1

Zpětně: $\pi^{-1}(n) = \{\xi \in S^3 \mid \xi$ je vl. vektorem $\Sigma = n_i a_i$ s vl. číslem $+1\}$

$\xi' \in \pi^{-1}(n)$: $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ má vl. číslo $\{-1, 1\}$ a 1-rozměrné vl. podprostory

z 1-rozměrnosti $\Rightarrow \xi' = \lambda\xi, \lambda \in \mathbb{C}$

ale $\xi'^+\xi = |\lambda|^2 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

v) Dostáváme hlavní fibraci $\pi : S^3 \to S^2$

Příklad: hlavní fibrace repérů (frame bundle)
Každé varietě M je přiřazena

$$F(M) = \bigsqcup_{m \in M} \mathcal{E}(T_m M), \quad \mathcal{E}(V) = \text{množina bází}$$

$e \in F(M) \to e$ je báze tečného prostoru právě pro jedno $m \in M$: $\pi(e) := m$

Zjevně π je surjektivní

Nechť $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je atlas pro M, $\varphi_\alpha \sim (x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$
Strukturní grupa: $GL(n, \mathbb{R})$

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \times GL(n, \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

$$\Phi_\alpha(m, \mathbb{A}) = \partial^\alpha|_m \cdot \mathbb{A}, \quad \partial^\alpha|_m = \left(\frac{\partial}{\partial x^1_\alpha}\Big|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n_\alpha}\Big|_m\right) \in \mathcal{E}(T_m M)$$

7. přednáška + 8. přednáška

Příklad (Hopfova fibrace)

$\pi : S^3 \to S^2$

$S^1 \simeq U(1) \circlearrowright$

$SU(2) \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \quad \mathbb{A} x =: L_{\mathbb{A}}(x) \quad , \mathbb{A} \in SU(2),\ x \in \mathbb{C}^2$

$S_r^3 := \{ x \in \mathbb{C}^2 \mid x^+ x = r^2 \},\ r \geq 0 \ ,\ x^+ x = \|x\|^2$

$\cdot\ \mathbb{C}^2 / SU(2) = [0, +\infty)$

Orbity = sféry S^3

$\|\mathbb{A} x\| = \|x\| \Rightarrow$ každá orbita musí být obsažena v S_r^3 pro nějaké $r \geq 0$

$x \in S_r^3$, najdu $\mathbb{A} \in SU(2)$, že $x = \mathbb{A} x_0$, $x_0 = \binom{r}{0}$

$x = \binom{\alpha}{\lambda} \to \mathbb{A} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \alpha & -\lambda^* \\ \lambda & \alpha^* \end{pmatrix}$

$\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^3_i : \pi(x)_i := x^+ \sigma_i x$

i) π skoro zachovává normu

$\cdot\ x \in \mathbb{C}^2 \to x x^+ \in \mathbb{C}^{2,2}$ hermitovská

$\to x x^+ = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 \mathbb{I}_2 + \pi(x)_i \sigma_i\right) \to \|\pi(x)\|^2 = \|x\|^2 \quad \pi : S^3_{\sqrt{r}} \to S^2_r$

ii) π je ekvivariantní

$$\pi(L_{\mathbb{A}}(x)) = \hat{\theta}_{\mathbb{A}}(\pi(x)) \quad , \forall x \in \mathbb{C}^2, \forall \mathbb{A} \in SU(2)$$

$$\pi(L_{\mathbb{A}}(x))_i = \pi(\mathbb{A}x) = x^+\mathbb{A}^+\sigma_i \mathbb{A}x = Tr(x^+\mathbb{A}^+\sigma_i \mathbb{A}x) =$$

$$= Tr(\sigma_i \mathbb{A} x x^+ \mathbb{A}^+) = \frac{1}{2} Tr(\sigma_i \mathbb{A}(\|x\|^2 \mathbb{I} + \pi(x)_k \sigma_k)\mathbb{A}^+) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi(x)_k Tr(\sigma_i \mathbb{A} \sigma_k \mathbb{A}^+) = \hat{\theta}_{\mathbb{A}}(\pi(x))$$

iii) $\pi : S^3 \to S^2$ je surjektivní submerze

$\vec{n} \in S^2$: $\xi \in S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ je libovolný tak, že $\xi^+\xi = 1$
$\quad \vec{n}' := \pi(\xi) \in S^2$

$\to \exists B \in SO(3)$ tak, že $\vec{n} = \mathbb{B}\vec{n}'$

Měli jsme nahoře $\hat{\theta} : SU(2) \to SO(3)$ surjektivní

tj. $\exists \mathbb{A} \in SU(2)$: $\mathbb{B} = \hat{\theta}_{\mathbb{A}}$

$\overset{ii)}{\Rightarrow} \pi(L_{\mathbb{A}}(\xi)) = \hat{\theta}_{\mathbb{A}}(\pi(\xi)) = \mathbb{B}\vec{n}' = \vec{n} \Rightarrow \pi$ je surjektivní

π submerze:
Stačí ukázat, že má konstantní rank (global rank theorem)

Kapitola 1 - Lokální kalibrační invariance

• **Maxwellovy rovnice** *

Nechť (E, B) jsou vektory intenzity elektrického pole a magnetické indukce. Maxwellovy rovnice jsou:

$$\mathrm{rot}\, E + \partial_t B = 0, \qquad \mathrm{div}\, B = 0 \qquad \text{(homogenní rovnice)}$$
$$\mathrm{div}\, E = \rho, \qquad \mathrm{rot}\, B - \partial_t E = j \qquad \text{(nehomogenní rovnice)}$$

Chceme ukázat, že (E, B) lze zakódovat do 2-formy $F \in \Omega^2(\mathbb{E}^{1,3})$ na Minkowského varietě $(\mathbb{R}^4, \eta_{\mu\nu})$.

F se nazývá tensor elektromagnetického pole, Maxwellovy rovnice pak mají tvar:

$$dF = 0, \qquad \delta F = -j,$$

kde $j \in \Omega^1(\mathbb{E}^{1,3})$ je 1-forma proudu

• **Hodgeova dualita** *

Definice: Metrická forma objemu *

Nechť (M, g, o) je libovolná orientovaná varieta vybavená metrikou. Pak na (M, g, o) vždy existuje význačná všude nenulová n-forma, tzv. Metrická forma objemu ω_g:

$$\omega_g := o(x^1, \dots, x^4)\sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^4,$$

kde $|g| = |\det g_{ij}|$

Definice: Pole repérů (local frame) *

Nechť U je okolí bodu $p \in M$.
Potom $(e_1, \dots, e_n)$ nazýváme polem repérů (local frame), jestliže:
i) $e_i \in \mathfrak{X}(U)$
ii) $(e_1|_p, \dots, e_n|_p)$ tvoří bázi T_pM,

Pokud navíc $g(e_i, e_j) = \pm \delta_{ij}$, řekneme, že $(e_1, \dots, e_n)$ je ortonormální.

Pokud $(e_1|_p, \dots, e_n|_p)$ je pravotočivá báze T_pM, řekneme, že $(e_1, \dots, e_n)$ je pravotočivé.

Definice: Duální pole repérů *

Duálním polem repérů $(e^1, \dots, e^n)$ nazýváme 1-formy $e^i \in \Omega^1(M)$ splňující $e^i(e_j) = \delta^i_j, \forall j$ v každém bodě tvoří duální bázi k $(e_1|_p, \dots, e_n|_p)$

Tvrzení: *

Nechť $(e_1, \dots, e_n)$ je pravotočivé pole repérů, potom:

$$\omega_g = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$$

Definice: Hodgeova dualita *

Nechť (M, g, o) je orientovaná varieta s metrikou.
Hodgeova dualita je lineární zobrazení $*_{g,o} : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$, definované jako

$$(*_{g,o}\alpha)_{i_1 \dots i_{n-p}} := \frac{1}{p!} \alpha^{k_1 \dots k_p} (\omega_g)_{k_1 \dots k_p i_1 \dots i_{n-p}},$$

kde $\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{j_1 \dots j_p} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_p}$ je p-forma zapsaná v bázi libovolného pole repérů a $\alpha^{k_1 \dots k_p} = g^{k_1 j_1} \dots g^{k_p j_p} \alpha_{j_1 \dots j_p}$ jsou komponenty zdvižené metrikou.
Dále budeme psát $* \equiv *_{g,o}$

Věta: Vlastnosti Hodgeovy duality

1) $\star : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ je lineární isomorfismus vektorových prostorů, přičemž $\star^{-1} = \mathrm{sgn}(g) \star \hat{\eta}^{n+1}$, kde $\hat{\eta}(\alpha) := (-1)^p \alpha$, pro $\alpha \in \Omega^p(M)$

2) Pracujeme-li v pravotočivém ortogonálním poli repérů, máme:

$$(\star\alpha)_{i_1 \dots i_{n-p}} = \frac{1}{p!} \eta^{k_1 j_1} \cdots \eta^{k_p j_p} \alpha_{j_1 \dots j_p} \varepsilon_{k_1 \dots k_p i_1 \dots i_{n-p}}$$

3) Ve speciálních případech $p=0, p=n$ dostáváme:

$$\star(1) = \omega_g, \qquad \star(\omega_g) = \mathrm{sgn}(g)$$

Definice: Kodiferenciál

Nechť (M, g, o) je orientovaná ~~metrika~~ varieta s metrikou. Kodiferenciál $\delta : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ je lineární zobrazení definované jako:

$$\delta := \star^{-1} d \star \hat{\eta}.$$

Kodiferenciál splňuje $\delta^2 = 0$.

Definice: Laplaceův - de Rhamův operátor

Při stejných předpokladech definujeme Laplaceův - de Rhamův operátor Δ jako

$$\Delta := -(\delta d + d\delta)$$

- Vektorová analýza v $\mathbb{R}^3(\mathbb{E}^3)$ *

Místo obecných souřadnicových vyjádření použijeme Hodgeovu dualitu, ko-diferenciál a Laplaceův de-Rhamův operátor v euklidovském prostoru $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, g)$ se standardní metrikou a orientací $o(x,y,z) = +1$.

Metrika nám umožňuje jednoduše ztotožnit vektorová pole a 1-formy. Máme tedy zobrazení:

$$\# : \Omega^1(\mathbb{E}^3) \to \mathfrak{X}(\mathbb{E}^3), \qquad \flat : \mathfrak{X}(\mathbb{E}^3) \to \Omega^1(\mathbb{E}^3).$$

V souřadnicích (x^1, x^2, x^3) máme:

$$\#(\alpha_i dx^i) = g^{ij} \alpha_j \partial_i$$

$$\flat(X^i \partial_i) = g_{ij} X^j dx^i$$

Na druhou stranu jsme právě objevili, že Hodgeova dualita nám umožní (kanonicky) ztotožnit prostory $\Omega^1(\mathbb{E}^3)$ a $\Omega^{3-1}(\mathbb{E}^3) = \Omega^2(\mathbb{E}^3)$.

Podobně lze ztotožnit $\Omega^0(\mathbb{E}^3) = C^\infty(\mathbb{E}^3)$ a $\Omega^3(\mathbb{E}^3)$

Poznámka:
(x^1, x^2, x^3) mohou být libovolné souřadnice na $\mathbb{R}^3$

Jak vypadá $*$ explicitně? $*$

Zavedme následující (standardní) značení:

$dV := \omega_g = \frac{1}{3!}\omega_{ijk}\, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ (element objemu)

$dS_i := \frac{1}{2}\omega_{ijk}\, dx^j \wedge dx^k$ (element plochy)

Víme, že explicitně $\omega_{ijk} = \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{ijk}$ a $*(1) = \omega_g = dV$.

$$(*dx^i)_{jk} = \frac{1}{1!}(dx^i)^m \omega_{mjk} = g^{mn}(dx^i)_n\, \omega_{mjk} = g^{mn}\delta^i{}_n \omega_{mjk} =$$

$$= g^{im}\omega_{mjk}$$

Celá 2-forma $*(dx^i)$ má tedy souřadnicové vyjádření

$$*(dx^i) = \frac{1}{2}(*(dx^i))_{jk}\, dx^j \wedge dx^k = g^{im}\left(\frac{1}{2}\omega_{mjk}\, dx^j \wedge dx^k\right) =$$

$$= g^{im}\, dS_m$$

Mimo jiné vidíme, že (dS_1, dS_2, dS_3) tvoří v každém bodě bázi $\Omega^2(\mathbb{E}^3)$. To nás vede na následující značení:

1. Každou 1-formu můžeme psát jako $A \cdot dr = A_i\, dx^i = g_{ij} A^j dx^i$

2. Každou 2-formu můžeme psát jako $B \cdot dS = B^i dS_i$

3. Každou 3-formu můžeme psát jako $h\, dV$, $h \in C^\infty(\mathbb{E}^3)$

Důvodem je, že A, B skutečně tvoří vektorová pole na $\mathbb{E}^3$.

Tvrzení: *

S použitím předchozí notace má operátor Hodgeovy duality $*$ tvar:

$$*(f) = f\,dV, \quad *(h\,dV) = h$$

$$*(A\cdot d\mathbf{r}) = A\,d\mathbf{S}, \quad *(B\cdot d\mathbf{S}) = B\cdot d\mathbf{r}$$

Nechť $A = A^i\partial_i$, $B = B^i\partial_i$.

Potom $A\,d\mathbf{r} = \flat(A)$ a $B\,d\mathbf{S} = *\flat(B)$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(E^3) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "1"'] & \Omega^1(E^3) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\#"] & \Omega^2(E^3) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\#*"] & \Omega^3(E^3) \arrow[d, "*"] \\
C^\infty(E^3) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & \mathfrak{X}(E^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] & \mathfrak{X}(E^3) \arrow[r, "\mathrm{div}"] & C^\infty(E^3)
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{grad} = \#d, \quad \mathrm{rot} = \#*d\flat, \quad \mathrm{div} = *d*\flat = -\delta\flat$$

tj. $df = \mathrm{grad}f\,d\mathbf{r}$, $\quad d(A\,d\mathbf{r}) = (\mathrm{rot}\,A)\,d\mathbf{S}$

$$d(B\,d\mathbf{S}) = \mathrm{div}\,B\,dV, \quad d(h\,dV) = 0$$

$$\delta f = 0, \qquad \delta(A\,d\mathbf{r}) = -\mathrm{div}\,A$$

$$\delta(B\,d\mathbf{S}) = (\mathrm{rot}\,B)\cdot d\mathbf{r}, \quad \delta(h\,dV) = -(\mathrm{grad}\,h)\cdot d\mathbf{S}$$

- ## Modifikace pro $\mathbb{E}^{1,3}$ *

Nyní bychom chtěli odvodit obdobné výrazy pro Minkowského prostor $\mathbb{E}^{1,3} = (\mathbb{R}^4, g_{\mu\nu})$.
Místo libovolných souřadnic nyní budeme pracovat ve standardních kartézských souřadnicích $(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.
Přičemž $\sigma(t, x, y, z) := +1$.
Naším cílem je vyjádřit diferenciál a kodiferenciál libovolné 2-formy.

Lemma: *

Nechť $\alpha \in \Omega^p(\mathbb{E}^{1,3})$
Potom existují jednoznačné formy $\hat{r} \in \Omega^p(\mathbb{E}^{1,3})$ a $\hat{s} \in \Omega^{p-1}(\mathbb{E}^{1,3})$, tak že $i_{\partial_t}(\hat{r}) = i_{\partial_t}(\hat{s}) = 0$ a

$$\alpha = dt \wedge \hat{s} + \hat{r}.$$

Jinými slovy, rozklady forem $\hat{r}$ a $\hat{s}$ do souřadnicové báze neobsahují 1-formu dt

0-formy : $\alpha = f$ *
1-formy : $\alpha = f dt + a dr$
2-formy : $\alpha = dt \wedge (a\, dr) + b \cdot dS$
3-formy : $\alpha = dt \wedge (b\, dS) + h\, dV$
4-formy : $\alpha = dt \wedge (h\, dV)$

Tvrzení: *

Nechť $\alpha = dt \wedge \hat{s} + \hat{r}$, potom platí:

i) $d\alpha = dt \wedge (\partial_t \hat{r} - d\hat{s}) + d\hat{r}$

ii) $*\alpha = dt \wedge *\hat{r} + *\eta\hat{s}$

iii) $\delta\alpha = dt \wedge \delta\hat{s} + (-\partial_t \hat{s} - \delta\hat{r})$

Důsledek: *

- $df = (\partial_t f)dt + (\operatorname{grad} f)\cdot dr$

$d(f\,dt + a\,dr) = dt \wedge (\partial_t a - \operatorname{grad} f)dr + (\operatorname{rot} a)dS$

$d(dt \wedge (a\,dr) + b\,dS) = dt \wedge (\partial_t b - \operatorname{rot} a)dS + (\operatorname{div} B)dV$

$d(dt \wedge b\,dS + h\,dV) = dt \wedge (\partial_t h - \operatorname{div} b)dV$

- $\delta(f\,dt + a\,dr) = -\partial_t f + \operatorname{div} a$

$\delta(dt \wedge (a\,dr) + b\,dS) = -(\operatorname{div} a)dt - (\partial_t a + \operatorname{rot} b)dr$

$\delta(dt \wedge (b\,dS) + h\,dV) = dt \wedge (\operatorname{rot} b)dr + (-\partial_t b + \operatorname{grad} h)dS$

$\delta(dt \wedge (h\,dV)) = dt \wedge (-\operatorname{grad} h\,dS) - (\partial_t h)dV$

- Maxwellovy rovnice pomocí forem *

Definujme 1-formu proudu jako $j := \rho\,dt - j\,dx$, obecnou 2-formu $F \in \Omega^2(\mathbb{E}^{1,3})$ lze parametrizovat jako

$$F = dt \wedge (E\,dx) - B\,dS$$

Věta: *
Maxwellovy rovnice jsou ekvivalentní soustavě rovnic

$$dF = 0, \qquad \delta F = -j.$$

Nepředpokládáme-li žádná další topologická omezení na $\mathbb{R}^4$, automaticky existuje $A \in \Omega^1(\mathbb{E}^{1,3})$ tak, že $dA = F$, kterou lze parametrizovat jako

$$A = \varphi\,dt - A\,dx$$

Potom $dA = dt \wedge (-\partial_t A - \mathrm{grad}\,\varphi)\,dx - (\mathrm{rot}\,A)\,dS$, porovnáním s definicí F máme:

$$E = -\partial_t A - \mathrm{grad}\,\varphi, \qquad B = \mathrm{rot}\,A.$$

Uzavřenost 2-formy F a Poincarého lemma tedy společně implikují existenci elektromagnetického 4-potenciálu. Forma A však není určena jednoznačně, lze k ní zjevně přičíst libovolnou uzavřenou 1-formu. Ta je však vždy (alespoň lokálně) exaktní. Stačí tedy uvažovat

$$A' = A + d\chi, \qquad \chi \in C^\infty(\mathbb{E}^{1,3}).$$

- Elektřina, magnetismus a akce *

Další užitečná aplikace Hodgeovy duality je zápis Maxwellových rovnic pomocí variace akčního funkcionálu.

Nechť (M,g,o) je orientovaná varieta s metrikou. Pro libovolné $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ máme $\alpha \wedge * \beta \in \Omega^n(M)$. Jako každá n-forma je i tato násobkem formy objemu ω_g.
Můžeme tedy definovat funkci $(\alpha,\beta)_g \in C^\infty(M)$ vztahem:

$$\alpha \wedge * \beta =: (\alpha,\beta)_g \, \omega_g$$

a platí: $$(\alpha,\beta)_g = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} \beta^{i_1 \dots i_p}$$

Je-li $(\alpha,\beta)_g = 0$ pro všechna $\beta \in \Omega^p(M)$, je nutně i $\alpha = 0$.
Důležité je, že d a δ tvoří „téměř" sdružené operátory.

Tvrzení: *
Pro libovolnou (M,g,o) a dvojici forem $\alpha \in \Omega^p(M)$ a $\beta \in \Omega^{p+1}(M)$ platí:
$$\left[(d\alpha,\beta)_g - (\alpha,\delta\beta)_g\right] \cdot \omega_g = d(\alpha \wedge * \beta).$$

S použitím Stokesovy věty pak dostáváme:

$$\int_M (d\alpha,\beta)_g \, \omega_g = \int_M (\alpha,\delta\beta)_g \, \omega_g + \int_{\partial M} \alpha \wedge * \beta$$

Pokud $\partial M = 0$ nebo je některá z forem na hranici nulová, máme:

$$\int_M (d\alpha,\beta)_g \cdot \omega_g = \int_M (\alpha,\delta\beta) \cdot \omega_g$$

Pokud má integrování smysl, definujeme skalární součin (opovolický) jako integrál:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_g := \int_M (\alpha, \beta)_g \, \omega_g$$

Věta: *

Nechť $A \in \Omega^1(M)$ a $j \in \Omega^1(M)$ jsou libovolné 1-formy.
Potom funkcionál

$$S[A] = -\frac{1}{2} \langle dA, dA \rangle_g - \langle A, j \rangle_g$$

je extremální pro $F = dA$ splňující nehomogenní Maxwellovy rovnice.
Funkcionál je kalibračně invariantní pokud j splňuje rovnici kontinuity: $\delta j = 0$

- Komplexní skalární pole *

Uvažujme opět libovolnou varietu (M, g, o) a teorii komplexního skalárního pole.

Geometricky tedy máme $\phi \in \Omega^p(M) \otimes \mathbb{C}$, což můžeme interpretovat jako hladkou funkci (komplexní) reálné proměnné x.
Tj: $\phi = \phi_0 + i\phi_1$, $\phi_i \in \Omega^p(M)$
Komplexní skalární součin $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ definujeme jako:

$$\langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle = \int_M (\bar{\alpha}, \beta)_g \, \omega_g$$

Buď $m \geq 0$, pak funkcionál komplexního skalárního pole je:

$$S[\phi] = \langle\langle d\phi, d\phi \rangle\rangle - m^2 \langle\langle \phi, \phi \rangle\rangle$$

V obvyklém značení na $\mathbb{E}^{1,3}$ máme $d\phi = \partial_\mu \phi dx^\mu$ a funkcionál má obvyklý tvar:

$$S_0[\phi] = \int_M (\partial^\mu \bar{\phi} \partial_\mu \phi - m^2 \bar{\phi} \phi) dx^4. \quad *$$

V tomto případě musíme být opatrnější, jelikož skalární součin dvou různých forem není obecně reálné číslo, místo toho dostaneme podmínku

$$\langle\langle \Delta\phi + m^2\phi, \beta \rangle\rangle + \overline{\langle\langle \Delta\phi + m^2\phi, \beta \rangle\rangle} = 0 \quad *$$

Volbou reálného nebo ryze imaginárního β dostaneme podmínky

$$Re(\Delta\phi + m^2\phi) = 0, \; Im(\Delta\phi + m^2\phi) = 0. \quad *$$

$\to \Delta\phi + m^2\phi = 0$

Tento problém se často řeší považováním $\phi, \bar{\phi}$ za nezávislé proměnné. V $\mathbb{E}^{1,3}$ je Laplaceův-de Rhamův operátor Δ d'Alembertův operátor $\Box$ →

$\to \Box\phi + m^2\phi, \quad *$

získáváme tedy Klein-Gordonovu rovnici

Funkcionál S_0 i pohybové rovnice jsou evidentně invariantní vůči transformacím tvaru $\phi \mapsto \phi' := e^{-i\alpha}\phi$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
(Globální kalibrační transformace) *

Nyní uvažujme transformace tvaru $\phi \mapsto \phi'_\varepsilon(x) := e^{-i\varepsilon\alpha(x)}\phi(x)$, $\alpha \in C_0^\infty(M)$.
(Lokální kalibrační transformace) *

vůči těm již S_0 a priori invariantní není, avšak ji můžeme využít pro odhalení zachovávajících se veličin teorie komplexního skalárního pole. Dosazením ϕ'_ε obdržíme:

$$S_0[\phi'_\varepsilon] = \langle\langle d(e^{-i\varepsilon\alpha}\phi), d(e^{-i\varepsilon\alpha}\phi)\rangle\rangle - m^2\langle\langle e^{-i\varepsilon\alpha}\phi, e^{-i\varepsilon\alpha}\phi\rangle\rangle =$$

$$= S_0[\phi] + \varepsilon\langle\langle d\alpha, i(\bar{\phi}\, d\phi - \phi\, d\bar{\phi})\rangle\rangle + O(\varepsilon^2). \quad *$$

Nechť ϕ řeší pohybové rovnice, potom pro řešení ϕ musí platit

$$\langle\langle d\alpha, i(\bar{\phi}\, d\phi - \phi\, d\bar{\phi})\rangle\rangle = 0. \quad *$$

Jak jsme již zmínili, $\alpha \in C_0^\infty(M)$, tedy je nulová na hranici, a proto δ a d jsou „sdružené". Označme $j := i(\bar{\phi}\, d\phi - \phi\, d\bar{\phi})$, pak musí platit, že

$$\delta j = 0. \quad *$$

Pro $M = \mathbb{E}^{1,3}$ není $\delta j = 0$ nic jiného, než rovnice kontinuity.
Označme $J := *j \to dJ = 0$

$$j = i(\bar{\phi}\partial_t\phi - \phi\partial_t\bar{\phi}) + i(\bar{\phi}\,\mathrm{grad}\,\phi - \phi\,\mathrm{grad}\,\bar{\phi})\,dr$$

$$\rightarrow J = *j = i(\bar{\phi}\,\mathrm{grad}\,\phi - \phi\,\mathrm{grad}\,\bar{\phi})\,dt \wedge dS + i(\bar{\phi}\partial_t\phi - \phi\partial_t\bar{\phi})\,dV$$

a definujme náboj Q jako integrál z J přes „plochy" $\{t\}\times\mathbb{E}^3$:

$$Q(t) = \int_{\{t\}\times\mathbb{E}^3} J = \int_{\mathbb{E}^3} i(\bar{\phi}\partial_t\phi - \phi\partial_t\bar{\phi})\,dV =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} i(\bar{\phi}\partial_t\phi - \phi\partial_t\bar{\phi})(t,x,y,z)\,dr. \quad *$$

Pomocí Stokesovy věty se dá ukázat, že $\dot{Q}(t) = 0$ a tedy jde o integrál pohybu.

- Minimální interakce *

Chceme Lagrangián, který je invariantní vůči lokální kalibrační transformaci. Problém nastává u členu s vnější derivací. Řešení:

- vnější derivace $d \longrightarrow$ kovariantní derivace D,

tak, aby $D\phi'(x) = e^{-i\alpha(x)} D\phi(x)$

$$D\phi := d\phi + A\phi \;, \quad A \in \Omega^1(M)\otimes\mathbb{C} \quad *$$

$$\rightarrow S_0[\phi] = \langle\langle D\phi, D\phi\rangle\rangle - m^2\langle\langle\phi,\phi\rangle\rangle \quad *$$

Zatím A je pouze „pozadí", ale není problém ho povýšit na dynamické pole a definovat:

$$S[\phi, A] = -\frac{1}{2}\langle dA, dA\rangle_g + \langle\!\langle D\phi, D\phi\rangle\!\rangle - m^2\langle\!\langle \phi, \phi\rangle\!\rangle.$$

Výsledné akci se říká Minimální lokální kalibračně invariantní model, přičemž interakční členy obsahující ϕ i A současně se nazývají minimální interakce.

2. Kapitola - Hlavní fibrovaný prostor

Definice: (Levá) akce Lieovy grupy *

Nechť G je Lieova grupa, M hladká varieta.
Řekneme, že zobrazení $\theta: G \times M \to M$ je (levá) akce Lieovy grupy na varietě M, jestliže je hladké a platí:

i) $\theta(e, m) = m, \quad \forall m \in M$

ii) $\theta(g_1, \theta(g_2, m)) = \theta(g_1 g_2, m)$

Tvrzení: *

Pro každé $g \in G$ je $\theta(g, \cdot)$ difeomorfismus M na M.

Definice: Reprezentace Lieovy algebry *

Je-li $M = V$ vektorový prostor a pro každé $g \in G$ máme $\theta(g, \cdot) \in GL(M)$, používá se ~~zobrazení~~ značení $\rho(g) = \theta(g, \cdot)$ a zobrazení

$$\rho: G \to GL(V)$$

se nazývá reprezentace Lieovy algebry G na vektorovém prostoru V.

Definice: Translace, Konjugace *

Nechť G je libovolná Lieova grupa a $M := G$
Potom levá (pravá) translace tvoří levou (pravou) akci. $L_g(h) = gh$
Konjugace $C_g(h) = ghg^{-1}$ tvoří levou akci G na G.

Definice: Orbitové zobrazení, orbita bodu *

Nechť $\theta: G \times M \to M$ je akce G na M, $m \in M$.
Orbitové zobrazení $\theta^{(m)}: G \to M$ příslušné ~~zobrazení~~ bodu m definované jako $\theta^{(m)}(g) = \theta(g, m)$.
Jeho obrazem $\theta^{(m)}(G)$ je orbita bodu m označovaná jako $G \cdot m \subseteq M$.

$$G \cdot m = \{m' \in M \mid \exists g \in G : m' = g \cdot m\}$$

Tvrzení: *

Nechť θ je akce grupy G na M.
Definujme následující relaci na množině M:

$$m \sim m' \iff m, m' \text{ leží v orbitě stejného bodu.}$$

Potom $\sim$ je relace ekvivalence.

Definice: Stabilizátor bodu *

Nechť θ je akce grupy G na M, $m \in M$.
Potom stabilizátorem bodu m rozumíme množinu

$$G_m = \{g \in G \mid g \cdot m = m\}$$

Někdy se také nazývá grupa isotropie bodu m.

Definice: Tranzitivní / volná / efektivní akce *

Nechť θ je akce grupy G na M, řekneme, že akce je:

i) Tranzitivní $\iff \forall m, m' \in M : \exists g \in G : g \cdot m = m'$

ii) Volná $\iff \forall m \in M : \forall g, g' \in G : (g \cdot m = g' \cdot m \implies g = g')$

iii) Efektivní $\iff \forall g \in G, g \neq e : \exists m \in M : g \cdot m \neq m$

Definice: Centrum grupy *

Buď G Lieova grupa, její centrum je definováno jako:

$$Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg, \ \forall h \in G\}$$

Definice : Ekvivariantní zobrazení *
Nechť θ, θ' jsou akce Lieovy grupy G na varietách M, M' a nechť $\varphi : M \to M'$ je hladké zobrazení.
Řekneme, že φ je G-ekvivariantní, je-li

$$\varphi(\theta(g,m)) = \theta'(g, \varphi(m))$$

tj. $\varphi(g \cdot m) = g \cdot \varphi(m)$

- Fibrované prostory *

Definice : Lokální trivializace, Fibrovaný prostor *
Nechť $\pi : E \to M$ je hladké surjektivní zobrazení dvou hladkých variet E a M nazývaných totální prostor E a bazická varieta M.
Zobrazení π se nazývá projekce.

Nechť $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí M a $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ je kolekce hladkých difeomorfismů $\phi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, kde F je hladká varieta nazvaná typické vlákno takové, že platí

$$\pi \circ \phi_\alpha = \pi_1 ,$$

kde $\pi_1 : U_\alpha \times F \to U_\alpha$ je projekce.

Potom $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ se nazývá lokální trivializace.

Řekneme, že trojice (E, M, π) se nazývá fibrovaný prostor, pokud existuje nějaká lokální trivializace.
Často píšeme jen $\pi : E \to M$

Vláknem fibrace nad M rozumíme množinu $E_m := \pi^{-1}(m)$.
Zásadním poznatkem je, že každé vlákno E_m je vnořená podvarieta E difeomorfní typickému vláknu F. Každé m je tudíž ~~obsaženo~~ v U_α pro nějaké $\alpha \in I$ a $\phi_\alpha(m,\cdot): F \to E_m$ je hledaný difeomorfismus.
Může se ale stát, že taková **přechodová zobrazení** definovaná pro $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ jako:

$$(g_{\alpha\beta}(m))(f) = \pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(m,f)), \quad *$$

kde $\pi_2 : U_\alpha \times F \to F$ je projekce.
Z konstrukce je zobrazení $g_{\alpha\beta}(m)$ pro každé m hladkým zobrazením z F do F.

$\rightarrow$ $g_{\alpha\alpha}(m) = \mathbb{1}_F$, $g_{\alpha\beta}(m) = (g_{\beta\alpha}(m))^{-1}$. *

Může se stát, že $m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ $\rightarrow$ **kocyklová podmínka**

$$g_{\alpha\beta}(m) \circ g_{\beta\gamma}(m) = g_{\alpha\gamma}(m) \quad *$$

Tvrzení: *
Nechť $\pi : E \to M$ je zobrazení z množiny E do hl. variety M a nechť F je hl. varieta. Mějme zadaná bijektivní zobrazení $\phi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ taková, že $\pi \circ \phi_\alpha = \pi_1$ a $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí M.

Pokud jsou všechna přechodová zobrazení hladká, existují unikátní topologie a hladká struktura na E, že $\pi : E \to M$ je hladké a $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ tvoří lokální trivializaci pro fibrovaný prostor $\pi: E \to M$ s typickým vláknem F.

Definice: Vektorový fibrovaný prostor (vektorový bundle) *

Nechť $\pi : E \to M$ je fibrovaný prostor, kde $F = V$ je vektorový prostor. Řekneme, že E je vektorový bundle, jestliže přechodová zobrazení $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(V)$ mají hodnoty v $GL(V)$, a navíc pro každé $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ je $g_{\alpha\beta}(m)$ lineární isomorfismus.

Často je lineární struktura na vláknech dopředu zadaná, viz konstrukce TM. Potom stačí ověřit, že je trivializující zobrazení $\Phi_\alpha(m,\cdot)$ lineární. Potom je automaticky lineární isomorfismus a přechodové funkce jsou lineární isomorfismy.

Dalším důležitým konceptem jsou lokální řezy fibrovaného prostoru. Kromě jejich přímočaré geometrické interpretace (např. lokální vektorová pole) často mohou posloužit ke konstrukci lokální trivializace.

Definice: Lokální řez fibrace, globální řez *

Nechť $\pi : E \to M$ je fibrovaný prostor.
Řekneme, že hladké zobrazení $\sigma : U \to E$ je lokální řez fibrace π, pokud $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$. Prostor lokálních řezů na okolí U se označuje jako $\Gamma_U(E)$. Pokud $U = M$, říkáme, že σ je globální řez a píšeme $\Gamma(E)$ pro jejich množinu.

- Principiální fibrace *

Centrálním ~~případem~~ objektem této přednášky bude další speciální případ fibrovaného prostoru.
Uvažujme nyní případ, kdy $F = G$, kde G je Lieova grupa.

Jak omezit přechodová zobrazení nyní?

Stačí si uvědomit, že G samotná tvoří podgrupu $\mathrm{Diff}(G)$. Vskutku, každému $g \in G$ můžeme přiřadit unikátní levou translaci $L_g \in \mathrm{Diff}(G)$.
Přiřazení $g \mapsto L_g$ je grupový monomorfismus, protože $L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$, $L_e = \mathbb{1}_G$ a $L_g = \mathbb{1}_G \Rightarrow g = e$.

Budeme se nyní zabývat ~~[illegible]~~ fibrovanými prostory, jejichž přechodová zobrazení leží v této podgrupě

Definice: Principiální lokální trivializace *
Nechť $\pi : P \to M$ je fibrovaný prostor s typickým vláknem G, kde G je Lieova grupa. Nechť $R : P \times G \to P$ je pravá akce Lieovy grupy G na P a nechť platí:

i) Akce R je volná a působí podél vláken, tj.: $\pi \circ R_g = \pi$, $\forall g \in G$.

ii) Zúžení akce R na každé vlákno je tranzitivní

iii) Existuje lokální trivializace $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in I}$, jejíž zobrazení jsou ekvivariantní

Takovou lok. trivializaci nazýváme principiální.

V duchu předchozí definice se fibrovaný prostor (P, M, π, R) nazývá hlavní fibrovaný prostor nebo též principiální G-bundle, principiální fibrovaný prostor.

Tvrzení: *

Nechť (P, M, π, R) je hlavní fibrovaný prostor.
Potom přechodová zobrazení principiální trivializace mají hodnoty v podgrupě $G \subset Diff(G)$.

Příklad: *

Nechť $P = M \times G$ je triviální fibrovaný prostor, $\pi : M \times G \to M$ projekce.
Definujme $R_g(m, h) = (m, h \cdot g)$.
Potom identické zobrazení $\Phi : M \times G \to M \times G$ je principiální lokální (zde globální) trivializace a $\pi : M \times G \to M$ je hlavní fibrovaný prostor.

Tvrzení: *

Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor.
Nechť $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí M a $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ je kolekce hladkých lokálních řezů $a_\alpha \in \Gamma_{U_\alpha}(P)$.
Potom $\Phi_\alpha' : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ definované jako $\Phi_\alpha'(m, g) = a_\alpha(m) \cdot g$ definuje principiální lokální trivializaci P.

Důsledek: *

Hlavní fibrovaný prostor je trivializovatelný, právě když existuje nějaký globální řez.

• Fundamentální vektorová pole *

Připomenutí:

• Buď G Lieova ~~alg~~ grupa, pak příslušná Lieova algebra, $Lie(G) =: \mathfrak{g}$ je definována jako $\mathfrak{g} := T_eG$. *

• $\mathfrak{g}$ je isomorfní podprostoru $\mathfrak{X}_L(G)$ nekonečně rozměrné Lieovy algebry $\mathfrak{X}(G)$ tvořenému levo-invariantními vektorovými poli. Isomorfismus přiřadí každému $x \in \mathfrak{g}$ příslušné levo-invariantní vektorové pole x^L definované jako

$$x^L|_g := L_{g*}(x) \equiv [T_e(L_g)](x) \quad *$$

Jelikož x^L je vektorové pole jako každé jiné, existují i jeho integrální křivky.
Jeho integrální křivka $\gamma : \mathbb{R} \to G$ startující v $t=0$ z bodu e se označuje jako $\gamma(t) = \exp(tx)$, tj.:

$$\exp(0\cdot x) = e, \quad \frac{d}{dt}\exp(tx) = x^L|_{\exp(tx)} \quad *$$

Nyní položme:

i) $\#X|_m := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(m\cdot\exp(tx)) \in T_mP, \ \forall m \in M$

ii) $\phi^{\#x}(t,m) := m\cdot\exp(tx)$

$\phi^{\#x}$ je tok pole $\#x$.

Definice: Fundamentální vektorové pole *

Pro každé $x \in \mathfrak{g}$ ~~je~~ se $\#x$ nazývá fundamentální vektorové pole prvku x.

Přiřazení fundamentálního vektorového pole $X \mapsto \# X$, můžeme interpretovat jako zobrazení $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$.
Často se nazývá infinitesimální generátor akce R.

Tvrzení: Vlastnosti $\#$ *

Zobrazení $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ je lineární.
Pro každé $m \in P$ definuje $\#_m : \mathfrak{g} \to T_m P$

i) Je-li $G_m = \{e\}$ je $\#_m$ monomorfismus

ii) Existuje-li otevřené okolí bodu m, kde je akce R tranzitivní, je $\#_m$ epimorfismus

Důsledek: *
Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s akcí R.
Potom je pro každé $p \in P$ zobrazení $\#_p : \mathfrak{g} \to T_p P$ monomorfní.

Orbity akce R jsou vložené podvariety vlákem $\pi^{-1}(m)$.
Potom pro každé $p \in P$ a $m = \pi(p)$, $\#_p : \mathfrak{g} \to T_p(\pi^{-1}(m))$ je lineární isomorfismus

Definice: φ-vstažená pole *
Nechť M a N jsou libovolné hladké variety, $\varphi : M \to N$.
Nechť $X \in \mathfrak{X}(M)$ a $Y \in \mathfrak{X}(N)$.
Řekneme, že X, Y jsou φ-vstažená, jestliže

$$\varphi_* (X)_m = Y_{\varphi(m)},$$

píšeme $X \sim_\varphi Y$

Lemma: *
Nechť $\varphi: M \to N$ jako v předchozí definici.
Nechť $X \sim_\varphi Y$ a $X' \sim_\varphi Y'$, potom

$$[X, X'] \sim_\varphi [Y, Y'].$$

Tvrzení: Infinitesimální generátor je homomorfismus *
Nechť $R: P \times G \to P$ je pravá akce Lieovy grupy G na P.
Potom zobrazení $\#: \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ je homomorfismus Lieových ~~grup~~ algeber, tj. pro každé $x, y \in \mathfrak{g}$ platí rovnost.

$$[\#x, \#y] = \#[x, y]_{\mathfrak{g}}$$

Připomeňme si definici adjungované reprezentace.
Pro každé $g \in G$ máme příslušnou konjugaci $I_g: G \to G$.
Platí: $I_g(e) = e$. Jelikož $\mathfrak{g} = T_e G$, příslušné tečné zobrazení I_{g*} definuje lineární isomorfismus Lieovy algebry $\mathfrak{g}$.

Definujme $Ad_g(x) := I_{g*}(x)$:

$$Ad_g(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} I_g(\exp(tx)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g \exp(tx) g^{-1}$$

Lemma: *
Pro všechny $g \in G$, $x \in \mathfrak{g}$ a $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$\exp(t Ad_g(x)) = g \exp(tx) g^{-1}$$

Tvrzení: *

Nechť $R: P \times G \to P$ je pravá akce Lieovy grupy G na P a $\#: \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ je příslušný infinitezimální generátor. Potom pro každé $g \in G$ a $X \in \mathfrak{g}$ platí:

$$R_{g*}(\# X) = \#(Ad_{g^{-1}}(X))$$

Definice: Vertikální tečný podprostor *

Nechť $\pi: P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor se strukturní grupou G. Pro každé $p \in P$ definujeme vertikální tečný podprostor, jehož prvky nazýváme vertikální vektory, jako jádro tečného zobrazení k projekci, tj.:

$$Ver_p(P) = \{X \in T_pP \mid \pi_*(X) = 0\} = \ker T_p\pi$$

Jelikož π je vždy hladká submerze, máme

$$\dim(Ver_p(P)) = \dim P - \dim M$$

Tvrzení: *

Nechť $\pi: P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s akcí R. Potom pro každé $p \in P$ je zobrazení $\#_p: \mathfrak{g} \to Ver_p(P)$ lineární isomorfismus.

Definice: Vertikální pole *

Nechť $X \in \mathfrak{X}(P)$ je hladké vektorové pole. Řekneme, že X je vertikální, jestliže $X|_p \in Ver_p(P)$, $\forall p \in P$.

Pro každé $X \in \mathfrak{X}(P)$ existují $X^\mu \in C^\infty(P)$: $X = X^\mu \# t_\mu$, $(t_\mu)_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ je lib. báze $\mathfrak{g}$.

lemma: *

Pro libovolné $p \in P$ a $g \in G$ platí: $R_{g*}(Ver_p(P)) = Ver_{p \cdot g}(P)$

3. Kapitola - Forma konexe

- **Formy s hodnotami ve vektorovém prostoru** *

Při studiu fibrových fibrovaných prostorů často narazíme na diferenciální formy, jejichž hodnoty na vektorová pole leží v konečně-rozměrném vektorovém prostoru:

Definice: Diferenciální p-forma s hodnotami ve V *
Nechť M je hladká varieta, $\dim V < \infty$ vektorový prostor. Řekneme, že ω je diferenciální p-forma s hodnotami ve V, je-li

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{p\text{-krát}} \to C^\infty(M,V)$$

totálně antisymetrické zobrazení, které je $C^\infty(M)$-lineární v každém argumentu. Prostor všech takových forem značíme $\Omega^p(M,V)$

Buď $(E_\mu)_{\mu=1}^{\dim V}$ báze V, pak každé $\omega \in \Omega^p(M,V)$ lze psát jako:

$$\omega = \omega^\mu E_\mu, \quad \omega^\mu \in \Omega^p(M)$$

Definice: Vnější derivace, vnitřní součin a Lieova derivace na $\Omega^p(M,V)$ *
i) $d\omega := (d\omega^\mu)E_\mu$
ii) $i_v \omega := (i_v \omega^\mu)E_\mu$
iii) $\mathcal{L}_v \omega = (\mathcal{L}_v \omega^\mu)E_\mu$

Definice: Vnější součin *
Nechť V je násobení algebra. Potom na $\Omega^p(M,V)$ zavádíme vnější součin jako

$$\omega \dot\wedge \mathcal{J} = \omega^\mu \wedge \mathcal{J}^\nu (E_\mu \cdot E_\nu)$$

Pro obecnou algebru však $\wedge$ není asociativní ani graduovaně antisymetrický.

i) součin $\circ$ je asociativní => $\wedge$ je asociativní *
ii) součin $\circ$ je komutativní => $\wedge$ je graduovaně antisymetrický *

Nechť $V = \mathfrak{g}$ je Lieova algebra se závorkou $[\,;\,]_{\mathfrak{g}}$.
Pak se používá značení

$$[\omega \wedge \vartheta]_{\mathfrak{g}} = \omega^{\mu} \wedge \vartheta^{\nu} [E_{\mu}, E_{\nu}]_{\mathfrak{g}} \quad *$$

Součin sice není asociativní, ale můžeme něco říct o výsledku pohozených argumentů:

$$[\omega \wedge \vartheta]_{\mathfrak{g}} = (-1)^{pq+1} [\vartheta \wedge \omega]_{\mathfrak{g}} \quad *$$

- Formy afinní konexe *

Definice: Afinní konexe, kovariantní derivace *
Nechť M je hladká varieta.
Afinní konexí na M rozumíme $\mathbb{R}$-bilineární zobrazení $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, které pro všechny $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ a $f \in C^{\infty}(M)$ splňuje:

i) $\quad \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ *

ii) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (X(f)) Y$, *

kde $\nabla_X := \nabla(X, \,)$ se nazývá operátor kovariantní derivace ve směru X.

Definice: Christoffelovy symboly 2. druhu *

Nechť $(e_1,\dots,e_n)$ je libovolné pole repérů definované lokálně na okolí $\mathcal{U} \subset M$. Potom Christoffelovy symboly 2. druhu vzhledem k repérovému poli $(e_1,\dots,e_n)$ jsou hladké funkce na $\mathcal{U}$ definované vztahem

$$\nabla_{e_\alpha}(e_\beta) = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\, e_\gamma \quad *$$

$\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}$ nejsou komponenty tensoru.

Definice: Lokální 1-formy konexe *

Při stejných předpokladech definujeme lokální 1-formy konexe:

$$\hat\omega^\gamma_\beta(X) := (e^\gamma, \nabla_X e_\beta), \quad *$$

pro všechny $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Nechť $(E^\gamma_\beta)^n_{\gamma,\beta=1}$ je standardní báze $\mathbb{R}^{n,n} = gl(n,\mathbb{R})$.
Pak definujeme (jednu) lokální 1-formu konexe $\hat\omega \in \Omega^1(\mathcal{U}, gl(n,\mathbb{R}))$

$$\hat\omega := \hat\omega^\gamma_\beta E^\gamma_\beta \quad *$$

Pro změnu repérového pole platí $(e' = e\cdot A)$, $A \in GL(\mathbb{R}^n)$

$$\Gamma'^\gamma_{\beta\alpha} = (A^{-1})^\gamma_\mu A^\nu_\beta A^\lambda_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + (A^{-1})^\gamma_\mu A^\nu_\alpha (e_\nu A^\mu_\beta) \quad *$$

$$\to \hat\omega'^\gamma_\beta = (A^{-1})^\gamma_\mu \hat\omega^\mu_\lambda A^\lambda_\beta + (A^{-1})^\gamma_\mu dA^\mu_\beta \quad *$$

Transformační matici lze interpretovat jako 0-formu s hodnotami v $GL(n,\mathbb{R})$, tj: $A \in C^\infty(U, GL(n,\mathbb{R}))$.

Definice: Lokální formy křivosti a torze: *

Při stejných předpokladech jako výše definujeme lokální formy křivosti a torze jako:

$$\hat{\Omega}^\gamma{}_\beta(X,Y) := (e^\gamma, R(X,Y)e_\beta) \quad *$$

$$\hat{T}^\gamma(X,Y) := (e^\gamma, T(X,Y)) \quad *$$

$$\rightarrow \hat{\Omega} := \hat{\Omega}^\gamma{}_\beta E^\beta{}_\gamma, \quad \hat{T} := \hat{T}^\gamma E_\gamma \quad *$$

$$\rightarrow \hat{\Omega}' = A^{-1}\hat{\Omega}A, \quad \hat{T}' = A^{-1}\hat{T} \quad *$$

Věta: Cartanovy strukturní rovnice *

Nechť $(e_1, \dots, e_n)$ je pole repérů na U a nechť $\hat{\omega}$ jsou odpovídající lokální formy konexe na U. Potom platí:

$$\hat{\Omega}^\alpha{}_\beta = d\hat{\omega}^\alpha{}_\beta + \hat{\omega}^\alpha{}_\gamma \wedge \hat{\omega}^\gamma{}_\beta \quad *$$

$$\hat{T}^\alpha = de^\alpha + \hat{\omega}^\alpha{}_\beta \wedge e^\beta, \quad *$$

kde $(e^\alpha)^n_{\alpha=1}$ je odpovídající duální pole repérů.
Položíme-li $e^\# = e^\alpha E_\alpha \in \Omega^1(U,\mathbb{R}^n)$ pak lze psát:

$$\hat{\Omega} = d\hat{\omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\omega} \quad *$$

$$\hat{T} = de^\# + \hat{\omega} \wedge e^\# \quad *$$

Důsledek: Bianchiho identity *

Pro libovolnou konexi ∇ platí:

i) $d\hat{\Omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\Omega} - \hat{\Omega} \wedge \hat{\omega} = 0$ *

ii) $\hat{\Omega} \wedge e^{\#} - \hat{\omega} \wedge \hat{T} = d\hat{T}$ *

• Forma konexe na hlavním fibrovaném prostoru *

V této sekci si definujeme fundamentální objekt teorie hlavních fibrovaných prostorů, tzv. formu konexe. Jelikož její definice může na první pohled působit nepřehledně, budeme si její vlastnosti v první řadě demonstrovat na příkladu $P = F(M)$.

Nechť $(f_1, \dots, f_n) \in \Gamma_U(F(M))$ je pole repérů na okolí U. Nechť $\pi : F(M) \to M$ je hlavní fibrace repérů. Na $\pi^{-1}(U) \subset F(M)$ můžeme zavést funkce $y^\beta_\alpha : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ podobně jsme zaváděli lokální souřadnice (označené stejně), tj. každý bod $e \in \pi^{-1}(U)$ odpovídající bázi $(e_1, \dots, e_n)$ v tečném prostoru $T_m M$ pro $m = \pi(e)$ lze nakombinovat jako

$$e_\alpha = y^\beta_\alpha(e) \cdot f_\beta|_m$$

Nechť ∇ je afinní konexe na M a $\hat{\omega} \in \Omega^1(U, gl(n,\mathbb{R}))$ je lokální forma konexe příslušná $(f_1, \dots, f_n)$. Definujeme jinou lokální 1-formu ω:

$$\omega^\alpha_\beta|_e = (y^{-1})^\alpha_\gamma(e) \cdot \pi^*(\hat{\omega}^\gamma_\delta)|_e \cdot y^\delta_\beta(e) + (y^{-1})^\alpha_\gamma(e)\, dy^\gamma_\beta|_e \qquad (\#)$$

Tvrzení: *

Nechť $(f_1', \dots, f_n')$ je libovolné jiné pole repérů na okolí $\mathcal{U}'$, a nechť $\hat{\omega}'$ je příslušná lokální forma konexe.
Je-li $\omega' \in \pi^{-1}(\mathcal{U}')$ definovaná jako (#). Potom na $\pi^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')$ platí

$$\omega' = \omega .$$

Zejména nezávisí na konkrétním výběru pole repérů při konstrukci ω.
Jelikož def. obory lokálních řezů můžeme pokrýt M, dostáváme:
$\omega \in \Omega^1(F(M), gl(n,\mathbb{R}))$ tzv. globální formu afinní konexe.

Tvrzení: Charakteristické vlastnosti formy konexe *

Nechť $\omega \in \Omega^1(F(M), gl(n,\mathbb{R}))$ je (globální) forma afinní konexe, pak

i) $\omega(\# X) = X, \quad \forall X \in gl(n,\mathbb{R})$

$\quad \omega^\alpha_\beta(\# X) = X^\alpha_\beta$

ii) $R^*_A(\omega) = A^{-1}\omega A = Ad_{A^{-1}}(\omega), \quad \forall A \in GL(n,\mathbb{R})$

Definice Forma konexe na hlavním fibrovaném prostoru *

Nechť $\pi: P \to M$ je hlavní fibrovaný G-prostor a $\mathfrak{g} = Lie(G)$.
Potom 1-formu $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ nazýváme formou konexe na hlavním fibrovaném prostoru, jestliže:

i) $A(\# X) = X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}$

ii) $R^*_g(A) = Ad_{g^{-1}}(A), \quad \forall g \in G$

4. Kapitola - Horizontální distribuce a zdvih

• Hladké distribuce a jejich integrabilita *

Nechť M je hladká varieta. V každém bodě $m \in M$ můžeme vybrat nějaký k-rozměrný podprostor $D_m \subset T_m M$. Potom D se nazývá k-rozměrná distribuce v M. Pochopitelně nás zajímají takové distribuce, kde závislost D_m na m je v nějakém smyslu hladká.

Definice: Hladká distribuce *

Nechť D je k-rozměrná distribuce v M.
Řekneme, že D je hladká, pokud pro každý bod m, existuje okolí U_m a k-tice vektorových polí $(V_1, \dots, V_k)$ definovaných na okolí U, tak že:

$$D_p = \mathbb{R}\{V_1|_p, \dots, V_k|_p\}, \quad \forall p \in U. \quad *$$

Říkáme, že $(V_1, \dots, V_k)$ lokálně generují D.

Příklad: *

Nechť $\pi: P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor. Potom $D_p := Ver_p(P)$ je k-rozměrná distribuce, $k := \dim \mathfrak{g}$.
Stačí zvolit bázi $(\xi_j)_{j=1}^k$. Potom $(\#\xi_1, \dots, \#\xi_k)$ lokálně generuje D. $Ver(P)$ se nazývá vertikální distribuce v P.

Jedním z nejčastějších způsobů zadání podprostoru vektorového prostoru je jako řešení homogenní SLR.

Tvrzení: *

Nechť $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ je soubor q 1-forem na varietě M lineárně nezávislých v $m \in M$, $\forall j: \alpha_j \in \Omega^1(M)$

$$\lambda^i \alpha_i|_m = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 .$$

Definujme $D_m = \bigcap_{i=1}^{q} \ker(\alpha_i|_m) \subset T_m M$. *

Potom D je hladká $(n-q)$-rozměrná distribuce na M.

Definice: Integrální podvarieta distribuce *

Nechť D je hladká k-rozměrná distribuce.
Řekneme, že vnořená podvarieta $N \subset M$ je integrální podvarieta distribuce D, jestliže pro všechna $n \in N$ platí $T_n N = D_n$.
Řekneme, že distribuce D je integrabilní, pokud každý bod $m \in M$ je obsažen v nějaké integrální podvarietě D.

Definice: Lokální řez distribuce, involutivní distribuce *

Nechť D je hladká k-rozměrná distribuce.
Řekneme, že vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(U)$, pro $U \subset M$ je lokální řez distribuce D, pokud pro všechny $m \in U$ platí $X|_m \in D_m$.

Řekneme, že D je involutivní distribuce, pokud pro každé dva její lokální řezy $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ je i komutátor $[X,Y]$ lokální řez D.

Tvrzení: *
Nechť $\mathcal{D}$ je k-rozměrná hladká distribuce.
Potom $\mathcal{D}$ je involutivní $\Leftrightarrow$ $\forall m \in M : \exists (V_1, \ldots, V_k)$ lokálně generující $\mathcal{D}$
splňující: $[V_i, V_j]|_m \in \mathcal{D}_m$, $\forall$

Tvrzení: *
Každá hladká integrabilní k-rozměrná distribuce je involutivní.

Věta: Frobenius *
Každá hladká involutivní k-rozměrná distribuce je integrabilní.

Tvrzení: *
Nechť $\mathcal{D}$ je zadána ~~jako~~ pomocí LN 1-forem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$.
Potom $\mathcal{D}$ je involutivní právě tehdy, když

$$d\alpha_i(X,Y) = 0, \quad \forall i \in \hat{q}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(U) \text{ lokální řezy } \mathcal{D}.$$

- **Horizontální distribuce** *

Definice: Horizontální tečný podprostor *
Nechť $p \in P$ je libovolný bod hlavního fibrovaného prostoru $\pi : P \to M$. Potom:

$$Hor_p(P) := \{ X \in T_pP \mid A|_p(X) = 0 \} \subset T_pP \quad *$$

nazýváme horizontální tečný podprostor v bodě p,
kde $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je forma konexe

Tvrzení: Charakteristické vlastnosti horizontální distribuce *

Nechť $Hor_p(P)$ je horizontální tečný podprostor příslušný dané formě konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Potom

i) Přiřazení $D_p = Hor_p P$ definuje hladkou (n-dim $\mathfrak{g}$)-rozměrnou distribuci na P, kterou budeme nazývat horizontální distribucí příslušnou konexi A.

ii) Horizontální podprostor je komplementární k vertikálnímu podprostoru, tj.:

$$T_p P = Ver_p P \oplus Hor_p P \quad *$$

iii) $R_{g*}(Hor_p P) = Hor_{pg} P$, $\forall p \in P, \forall g \in G$ *

Tvrzení: Konexe jsou horizontální distribuce *

Nechť D je hladká k-rozměrná distribuce na P splňující podmínky

$$T_p P = Ver_p P \oplus D_p, \quad R_{g*}(D_p) = D_{p \cdot g} \quad *$$

Potom existuje právě jedna forma konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, tak že $D_p = Hor_p P$

Příklad *

Nechť $\pi: P \to M$ je libovolná hlavní fibrace a h Riemannovská metrika na P: $R_{g*} h = h, \forall g \in G$.

Dokonce $Hor_p P = Ver_p P^{\perp_h}$ je konexe na P.

Jelikož taková h vždy existuje, existuje vždy i konexe na P.

Tvrzení: *

Nechť $\pi: P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s konexí $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Potom pro každý tečný vektor $X \in T_m M$ a daný bod $p \in P_m$ ve vlákně nad m existuje právě jeden horizontální tečný vektor $X^h_p \in Hor_p P$ takový, že $\pi_*(X^h_p) = X$.

Potom X^h_p se nazývá horizontální zdvih vektoru X do bodu $p \in P$. *

Zobrazení $X \mapsto X^h_p$ je lineární isomorfismus $T_m M$ a $Hor_p P$.

Lemma:

Pro libovolné body $p \in P$ a $g \in G$ a libovolný $X \in T_m M$, kde $m = \pi(p)$ platí:

$$X^h_{p \cdot g} = R_{g*}(X^h_p)$$

Tvrzení: *

Nechť $X \in \mathfrak{X}(M)$ je hladké vektorové pole.
Potom existuje právě jedno hladké vektorové pole $X^h \in \mathfrak{X}(P)$, které je horizontální a π-vztažené s X, tj: $\pi_*(X^h|_p) = X_{\pi(p)}$.

Vektorové pole X^h se nazývá horizontálním zdvihem vektorového pole X.

Důsledek:

Horizontální zdvih je G invariantní vektorového pole a platí:

$$[X^h, Y^h] \sim_\pi [X, Y]$$

Věta: Paralelní přenos *

Nechť $\gamma: I \to M$ je hladká a $\gamma(0) = m$ a $p \in P_m$ libovolný:

Potom existuje právě jedna hladká křivka $\gamma^h: I \to P$ taková, že

$$\pi \circ \gamma^h = \gamma \quad ; \quad \gamma^h(0) = p$$

a pro každé $t \in I$: $\dot{\gamma}^h \in Hor_{\gamma^h(t)} P$.

γ^h se nazývá horizontální zdvih křivky γ a samotný proces konstrukce horizontálního zdvihu se nazývá paralelní přenos podél křivky γ.

- **Veličiny typu ρ a jejich paralelní přenos** *

Definice: p-forma typu ρ, veličina typu ρ *

Nechť $\pi: P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor a nechť (V, ρ) je konečně rozměrná reprezentace Lieovy grupy G na prostoru V.

Řekneme, že $\alpha \in \Omega^p(P, V)$ je p-forma typu ρ, jestliže

$$R_g^*(\alpha) = \rho(g^{-1})\alpha \, . \quad *$$

Jejich prostor označujeme $\Omega^p_\rho(P, V)$.
Speciálně 0-formy typu ρ nazýváme veličiny typu ρ.

Příklad:

Forma konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je 1-forma ρ, kde $(V, \rho) = (\mathfrak{g}, Ad)$.
Říkáme, že A je 1-forma typu Ad.

Definice: Autoparalelní veličina podél křivky *

Nechť $\phi \in \Omega^0(P,V)$ je veličina typu ρ, kde (V,ρ) je libovolná konečně-rozměrná reprezentace G na V a $\gamma: I \to M$ hladká křivka.

Řekneme, že ϕ je autoparalelní veličina podél γ, jestliže

$\phi \circ \gamma^h : I \to V$ je konstantní, tj.:

$$0 = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma^h(t)) = \dot{\gamma}^h(t) \cdot \phi$$

5. Kapitola: Vnější kovariantní derivace, forma křivosti

Nechť $\pi: P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor vybavený formou konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Dostáváme tedy rozklad

$$T_p P = \mathrm{Ver}_p P \oplus \mathrm{Hor}_p P \quad *$$

pro každý bod $p \in P$. Máme tedy dobře definovaný projektor

$$\mathrm{hor}_p : T_p P \to \mathrm{Hor}_p P .$$

Vzhledem k tomu, že $\mathrm{Hor}\, P$ je hladká distribuce, dá se ukázat, že vše funguje na úrovni vektorových polí, tj. pro každé $X \in \mathfrak{X}(P)$ a $p \in P$ definujeme

$$(\mathrm{hor}\, X)|_p := \mathrm{hor}_p(X|_p) \quad *$$

a výsledek $\mathrm{hor}\, X \in \mathfrak{X}(P)$ je hladké horizontální vektorové pole na P. Dostáváme tedy $C^\infty(P)$-lineární projektor

$$\mathrm{hor} : \mathfrak{X}(P) \to \mathfrak{X}(P)$$

a $\mathrm{hor}\, X$ nazýváme horizontální částí vektorového pole X.

Lemma:

Pro horizontální část vektorového pole platí vztah

$$R_{g*}((\mathrm{hor}\, X)|_p) = (\mathrm{hor}\, R_{g*}(X))|_{pg} ,$$

pro všechna $p \in P, g \in G$.

Definice: Horizontální část formy *

Nechť $\alpha \in \Omega^p(M,V)$ je p-forma s hodnotami ve V.
Horizontální část $\mathrm{hor}\,\alpha$ formy α definujeme vztahem

$$(\mathrm{hor}\,\alpha)(X_1,\dots,X_p) := \alpha(\mathrm{hor}\,X_1,\dots,\mathrm{hor}\,X_p).$$ *

Řekneme, že α je horizontální p-forma, jestliže $\mathrm{hor}\,\alpha = \alpha$.

Teorém: Vlastnosti hor *

i) $\mathrm{hor}: \Omega^p(P,V) \to \cancel{\mathrm{hor}}\ \Omega^p_{\mathrm{hor}}(P,V)$ je projektor *

ii) hor je ekvivariantní vzhledem k pravé akci grupy G na $\Omega^p(P,V)$, tj.

$$R_g^*(\mathrm{hor}\,\alpha) = \mathrm{hor}(R_g^*\alpha)$$ *

iii) Operátor hor zachovává p-formy typu ρ, tj.:

$$\mathrm{hor}(\Omega^p_\rho(P,V)) \subset \Omega^p_\rho(P,V)$$ *

iv) hor se chová pěkně vůči $\wedge$ (má-li to smysl):

$$\mathrm{hor}(\alpha\wedge\beta) = \mathrm{hor}\,\alpha \wedge \mathrm{hor}\,\beta$$ *

v) Forma α je horizontální $\iff i_W(\alpha)=0,\ \forall W \in \mathrm{Ver}P$
$\iff i_{\#X}(\alpha)=0,\ \forall X \in \mathfrak{g}.$ *

- Vnější kovariantní derivace *

Definice: Vnější kovariantní derivace *

Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s konexí $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$.
Operátor D vnější kovariantní derivace definujeme jako

$$D = hor \circ d$$ *

Tvrzení: Vlastnosti vnější kovariantní derivace *

i) $D : \Omega^p(P,V) \to \Omega^{p+1}_{hor}(P,V)$ je $\mathbb{R}$-lineární operátor *

ii) D je ekvivariantní vzhledem k pravé akci grupy G na $\Omega^p(P,V)$:

$$R_g^* \circ D = D \circ R_g^*$$ *

iii) D zachovává formy typu ρ, tj: *

$$D(\Omega^p_\rho(P,V)) \subset \Omega^{p+1}_\rho(P,V)$$ *

iv) Na vnějším součinu (má-li to smysl) platí: *

$$D(\alpha \dot{\wedge} \beta) = D(\alpha) \dot{\wedge} hor(\beta) + \hat{\eta}(hor\, \alpha) \dot{\wedge} D(\beta)$$

Tvrzení: *

Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s konexí $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ a nechť $\phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$ je veličina typu ρ, kde (V,ρ) je reprezentace G na V.

Nechť $U \subseteq M$ je otevřená a $D\phi = 0$ na $\pi^{-1}(U)$.
Potom ϕ je autoparalelní podél libovolné $\gamma : I \to M$

• Forma křivosti

Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s konexí $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Ukázali jsme, že vertikální distribuce $\mathrm{Ver}\, P$ tvoří standardní příklad integrální distribuce. Je tedy přirozené pokusit rovněž integrabilitu horizontální distribuce odpovídající konexi A. Definujme:

$$\Omega(X,Y) := dA(\mathrm{hor}\, X, \mathrm{hor}\, Y) \equiv DA(X,Y).$$

Potom $\Omega = DA \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ se nazývá **forma křivosti konexe A.**

Tvrzení: Integrabilita horizontální distribuce

Horizontální distribuce je integrabilní $\Leftrightarrow \Omega = 0$,

$\Leftrightarrow$ konexe A je **plochá**

Tvrzení: Vlastnosti formy křivosti

Nechť $\Omega = DA$ je forma křivosti konexe A, potom:

i) Ω je 2-forma s hodnotami v $\mathfrak{g}$ typu Ad, tj.:

$$R_g^* \Omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \Omega$$

ii) $\mathrm{hor}\, \Omega = \Omega$

Lemma:

Nechť $\alpha \in \Omega^p_\rho(P,V)$ je p-forma typu ρ, kde (V,ρ) je reprezentace, nechť $\rho' : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ je přidružená reprezentace $\mathfrak{g}$.
$\rho'(x)(v) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \rho(\exp(tx))(v)$, potom platí:

$$\mathcal{L}_{\#x}\alpha = -\rho'(x)(\alpha)$$

Tvrzení: Výpočet formy křivosti *

Nechť $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je forma konexe a $\Omega = DA$ je forma křivosti.
Pak

$$\Omega = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]_{\mathfrak{g}} \quad *$$

Této rovnici se říká Cartanova strukturní rovnice.

Přímo čarým důsledkem je Bianchiho identita.

$$D\Omega = DD\cancel{A} = 0$$

Příklad: Maurerova-Cartanova 1-forma *

Nechť G je Lieova grupa; $\mathfrak{g} := Lie(G)$.
Levá Maurerova-Cartanova 1-forma $\theta_L \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ je definovaná jako:

$$\theta_L(X^L) = X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \quad *$$

θ_L splňuje následující vlastnosti:

i) θ_L splňuje Maurer-Cartanovu rovnici

$$d\theta_L + \frac{1}{2}[\theta_L \wedge \theta_L] = 0 \quad *$$

ii) θ_L je levo-invariantní a Ad-ekvivariantní vůči pravé translaci

$$L_g^*(\theta_L) = \theta_L, \quad R_g^*(\theta_L) = Ad_{g^{-1}}\theta_L \quad *$$

Příklad: Triviální hlavní fibrace $\ast$

Spočítáme si nyní nejobecnější formu konexe a křivosti na triviálním hlavním fibrovaném prostoru $P = M \times G$.

Nejdřív je třeba si uvědomit, že pro každé $p = (m, g)$ máme

$$T_{(m,g)} P = T_m M \oplus T_g G . \quad \ast$$

Tečné vektory v (m,g) tedy budeme psát jako uspořádané dvojice vzhledem k tomuto rozkladu.

Fundamentální vektorová pole:

$$\# X|_{(m,g)} = \frac{d}{dt}(m, g\exp(tX)) = \left(0_m, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\exp(tX)\right) = (0_m, X^L|_g), \quad \ast$$

kde $X^L \in \mathfrak{X}(G)$ je levo-invariantní vektorové pole na G příslušné $X \in \mathfrak{g}$.

Nechť $(X, Y^L|_g) \in T_m M \oplus T_g G$ je nejobecnější tečný vektor z $T_{(m,g)} P$. Působení pravé akce R_{h*} na $(X, Y^L|_g)$ je následující:

$$R_{h*}(X, Y^L|_g) = (X, R_{h*} Y^L|_g) = (X, (Ad_{h^{-1}}(Y))^L|_{gh}) \quad \ast$$

Konexe:

$$A|_{(m,g)} := (A'|_{(m,g)}, A''|_{(m,g)}), \quad A'|_{(m,g)} : T_m M \to \mathfrak{g}$$

$$A''|_{(m,g)} : T_g G \to \mathfrak{g}$$

i) $A(\#X) \overset{!}{=} X$ *

$\to X = A|_{(m,g)}(\#X|_{(m,g)}) = A'|_{(m,g)}(0_m) + A''|_{(m,g)}(X^L|_g) =$

$= A''_{(m,g)}(X^L|_g)$

$\to A'' = \theta_L$

ii) $R_h^*(A|_{(m,gh)}) = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} A|_{(m,g)}$ *

$\to (R_h^*(A|_{(m,gh)}))(X, Y^L|_g) = A|_{(m,gh)}(X, (\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(Y))^L|_{gh}) =$

$= A'|_{(m,gh)}(X) + \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(Y)$

$\to A'|_{(m,gh)} = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} A'|_{(m,g)} \to A'|_m := A'|_{(m,e)}$

$\to A|_{(m,g)} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \pi_1^*(A')|_{(m,g)} + \pi_2^*(\theta_L)|_{(m,g)}$

Horizontální zdvih: *

Pro $X \in \mathfrak{X}(M)$ máme:

$X^h|_{(m,g)} = (X'|_{(m,g)}, X''|_{(m,g)})$, $X'|_{(m,g)} \in T_m M$, $X''|_{(m,g)} \in T_g G$

$X''|_{(m,g)}$ lze psát jako $Y(m,g)^L|_g$, kde $Y(m,g) \in \mathfrak{g}$

i) $\pi_*(X^h|_{(m,g)}) = X|_m \Rightarrow X'|_{(m,g)} = X|_m$

ii) $A|_{(m,g)}(X^h|_{(m,g)}) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ad}_{g^{-1}} A'|_m(X|_m) + Y(m,g) = 0$

$\cancel{X^{h}|_{(m,g)} = (X'^{h}|_{(m,g)}, X''^{h}|_{(m,g)})}$

$\to X^{h}|_{(m,g)} = \left(X|_{m}, -(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\langle A, X\rangle(m))^{L}|_{g}\right)$

• Kovariantní derivace forem typu ρ

Tvrzení:
Nechť $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$ je horizontální p-forma typu ρ, pak:

$$D\alpha = d\alpha + \rho'(A) \dot\wedge \alpha \, ,$$

Speciálně pro veličiny ϕ typu ρ platí

$$D\phi = d\phi + \rho'(A)\phi \, ,$$

kde ρ' je přidružená reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na V
a $\rho'(A) \dot\wedge \alpha = A^\mu \wedge \alpha^i \cdot \rho'(t_\mu) E_i$,
kde $(t_\mu)_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ a $(E_i)_{i=1}^{\dim V}$

Důsledek: Vyjádření Bianchiho identity
Forma křivosti Ω konexe A splňuje:

$$d\Omega + [A \wedge \Omega]_{\mathfrak{g}} = 0$$

Tvrzení: Ricciho identita
Pro libovolnou horizontální formu α typu ρ platí:

$$D^2\alpha = \rho'(\Omega) \dot\wedge \alpha \, ,$$

kde $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ je forma křivosti.

- Integrabilita paralelního přenosu, holonomie

Definice: k-rozměrná foliace, listy foliace
Nechť M je hladká varieta.
Potom $\mathcal{F}$ se nazývá k-rozměrná foliace M, jestliže $\mathcal{F}$ je soubor vzájemně disjunktních neprázdných souvislých množných k-rozměrných podvariet M, takových, že

$$M = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$$

Každý bod $m \in M$ navíc musí souřadnicové okolí $(U, \varphi) = (U, (x^1, \dots, x^n))$ takové, že $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ je n-rozměrná krychle a pro každé $F \in \mathcal{F}$ je $F \cap U$ buď prázdná množina, nebo spočetné sjednocení k-rozměrných „plátů" ve tvaru

$$S = \{ q \in U \mid x^{k+1}(q) = c^1(q), \dots, x^n(q) = c^n(q) \}$$

Podvarietám $F \in \mathcal{F}$ se říká listy foliace.

Věta: Globální Frobeniova distribuce
Nechť D je integrabilní distribuce (k-rozměrná).
Potom

$$\mathcal{F}_D := \{ N \subset M \mid N \text{ je maximální souvislá integrabilní podvarieta distribuce } D \}$$

je k-rozměrná foliace M.

6. Kapitola - Kalibrační teorie

- **Lokální formy, kalibrační transformace** $\ast$

Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s konexí $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ a nechť $\sigma : U \to P$ je lokální řez hlavní fibrace. Výběru takového řezu říkáme volba kalibrace na U. Pomocí řezu můžeme udělat pullback forem konexe a křivosti. Definujme:

$$\mathcal{A} = \sigma^*(A), \quad \mathcal{F} = \sigma^*(\Omega). \quad \ast$$

Potom $\mathcal{A} \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ a $\mathcal{F} \in \Omega^2(U, \mathfrak{g})$ se nazývají lokální formy konexe a křivosti.

Příklad: $\ast$

Pro $\pi : F(M) \to M$ odpovídá volba kalibrace volbě repérového pole $(e_1, \dots, e_n)$ na okolí U, kde $\sigma(m) = (e_1|_m, \dots, e_n|_m)$ a

$$\sigma^*(A) = \hat{\omega}, \quad \sigma^*(\Omega) = \hat{\Omega},$$

$\hat{\omega}$ a $\hat{\Omega}$ jsou odpovídající lokální formy konexe a křivosti vzhledem k repérovému poli $(e_1, \dots, e_n)$

Nejdůležitější otázkou je pochopitelně transformace $\mathcal{A}$ při změně řezu σ.

Nechť $\sigma' : U' \to P$ je jiný lokální řez takový, že $U \cap U' \neq \emptyset$. Potom pro každý $m \in U \cap U'$, $\sigma(m)$ a $\sigma'(m)$ jsou ve stejném vlákně. Existuje tedy funkce $g : U \cap U' \to G : \sigma'(m) = \sigma(m)\, g(m)$.

Zobrazení g se nazývá lokální kalibrační transformace.

Nejprve si musíme vyjasnit, že g definuje hladké zobrazení, to však plyne z toho, že g odpovídá přechodovým zobrazením.

Tvrzení:

Nechť $\sigma: U \to P$ a $\sigma': U' \to P$ jsou dva lokální řezy, $g: U \cap U' \to G$ je příslušná kalibrační transformace.
Potom pro $\mathcal{A}' = \sigma'^*(A)$ a $\mathcal{A} = \sigma^*(A)$ platí na $U \cap U'$ vztah:

$$\mathcal{A}' = Ad_{g^{-1}}(\mathcal{A}) + g^*(\theta_L)$$

Poznámka:

Pro maticové grupy G je Ad konjugace matic a platí:

$$\mathcal{A}' = g^{-1}\mathcal{A}g + g^{-1}dg$$

Tvrzení:

Nechť $\alpha \in \Omega^p_\rho(P,V)$ je horizontální p-forma typu ρ a nechť $a = \sigma^*(\alpha)$ a $a' = \sigma'^*(\alpha)$ jsou příslušné lokální formy.
Potom na $U \cap U'$ platí:

$$a' = \rho(g^{-1})a.$$

Speciálně pro lokální formy konexe tedy $\mathcal{F}' = Ad_{g^{-1}}(\mathcal{F})$

Tvrzení:

Nechť $A \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$ je forma konexe a $\Omega = DA$ odpovídající 2-forma křivosti a nechť $\sigma: U \to P$ je lokální řez, přičemž $\mathcal{A} = \sigma^*(A)$ a $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$ jsou lokální formy konexe a křivosti, pak:

$$\mathcal{F} = DA = d\mathcal{A} + \tfrac{1}{2}[\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}]_{\mathfrak{g}}.$$

$\alpha \in \Omega^p_{\rho,hor}(P,V)$, $a = \sigma^*(\alpha) \Rightarrow Da = da + \rho'(\mathcal{A}) \dot\wedge a$

Tvrzení: *

Nechť $(\sigma_\alpha)_{\alpha\in I}$ je kolekce hladkých řezů hlavní fibrace $\pi: P \to M$ takových, že jejich definiční obory tvoří otevřené pokrytí báze M. Máme tedy hladká zobrazení $\sigma_\alpha: U_\alpha \to P, \pi\circ\sigma_\alpha = \mathbb{1}_{U_\alpha}$ a můžeme psát $M = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$.

Pro každý neprázdný průnik $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ definujeme zobrazení $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to G$ vztahem

$$\sigma_\beta(m) = \sigma_\alpha(m) g_{\alpha\beta}(m). \quad *$$

Jinými slovy, $g_{\alpha\beta}$ je změna kalibrace $\sigma_\alpha \mapsto \sigma_\beta$ na $U_\alpha \cap U_\beta$.
Nechť $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ je kolekce lokálně definovaných 1-forem s hodnotami v $\mathfrak{g}$; $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$ takových, že na $U_\alpha \cap U_\beta$ platí

$$A_\beta = \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}^{-1}}(A_\alpha) + g_{\alpha\beta}^*(\theta), \quad *$$

pro každý neprázdný průnik $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Potom existuje unikátní forma konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}): A_\alpha = \sigma_\alpha^*(A)$.

Příklad: Maxwellovo pole *

Uvažujme triviální hlavní fibrovaný prostor $P = \mathbb{E}^{1,3} \times U(1)$.

Nechť $\omega \in \Omega^1(\mathbb{E}^{1,3}, \mathfrak{u}(1))$ je forma konexe na P a nechť $\sigma: \mathbb{E}^{1,3} \to P$ je globální řez $\sigma(m) = (m, e)$ a nechť $\mathcal{A} = \sigma^*(\omega)$ je příslušná lokální forma konexe na $\mathbb{E}^{1,3}$.
Nyní je třeba si uvědomit, že $\mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}\{i\}$. Potom se $\mathcal{A}$ rozkládá jako $\mathcal{A} = iA$, $A \in \Omega^1(\mathbb{E}^{1,3})$

Kalibrační transformace je hladké zobrazení $g : U \to G = U(1)$.
Pro jednoduchost $U = \mathbb{E}^{1,3}$. Protože $U(1) = S^1 \subset \mathbb{C}$ je jednotková kružnice, můžeme psát $g(m) = \exp(i\chi(m))$, pro $\chi : \mathbb{E}^{1,3} \to \mathbb{R}$.

Dostáváme tedy kalibrační transformaci $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ve tvaru

$$\mathcal{A}' = Ad_{g^{-1}}\mathcal{A} + g^{-1}dg = \mathcal{A} + i\,d\chi$$

$$\to \quad A' = A + d\chi$$

Což není nic jiného, než kalibrační transformace Maxwellova 4-potenciálu.

Nyní uvažujme formu křivosti a její lokální podobu $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$.
Opět označme $\mathcal{F} = iF$, $F \in \Omega^2(\mathbb{E}^{1,3})$.

$$\to \quad \mathcal{F} = D\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \tfrac{1}{2}[\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}]_{\mathfrak{g}} = d\mathcal{A} \to F = dA$$

Kalibračně invariantní účinek

Nyní bychom chtěli nalézt univerzální návod jak z lokálních veličin $\mathcal{F}, \mathcal{A}$ a případně hmotových polí odpovídajících lokálním verzím veličin typu ρ vyrobit funkcionál akce invariantní vůči lokálním kalibračním invariancím.

Pro obyčejné p-formy na varietě (M,g,o) s metrikou a orientací jsme definovali (pseudo-)skalární součin $\langle\,,\rangle_g$:

$$\langle \alpha,\beta\rangle_g = \int_M (\alpha,\beta)_g \cdot \omega_g = \int_M \alpha \wedge *\beta .$$

Nechť $\alpha,\beta \in \Omega^p_\rho(P,V)$ jsou horizontální p-formy typu ρ a nechť $a,b \in \Omega^p(U,V)$ jsou jejich lokální verze $a=\sigma^*(\alpha)$, $b=\sigma^*(\beta)$, odpovídající volbě kalibrace $\sigma: U \to P$.

Buď $(E_i)_{i=1}^{\dim V}$ a $\langle\,,\rangle_V$ je symetrická bilineární nedegenerovaná forma:

$$((a,b))_V = (a^i,b^j)_g \langle E_i,E_j\rangle_V$$

Definice: ρ-invariantní (pseudo)skalární součin

Nechť (V,ρ) je reprezentace Lieovy grupy G a nechť $\langle\,,\rangle_V$ je (pseudo)skalární. Řekneme, že $\langle\,,\rangle_V$ je ρ-invariantní, jestliže

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle_V = \langle v,w\rangle_V .$$

Pro souvislou G je toto ekvivalentní ρ'-invariance:

$$\langle \rho'(x)v,w\rangle + \langle v,\rho'(x)w\rangle = 0 .$$

$$\rho'(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho \exp(tx)$$

$$\langle\langle a,b\rangle\rangle_V = \int_M ((a,b))_V \cdot \omega_g = \int_M \langle a \wedge * b\rangle_V$$

Příklad: *

Položme $(V,\rho) = (\mathfrak{g}, Ad)$.
Pro každou kalibrační teorii máme k dispozici formu křivosti $\Omega = DA \in \Omega^2(P,\mathfrak{g})$, která je horizontální 2-forma typu Ad. Potřebujeme tedy nějakou Ad-invariantní symetrickou nedegenerovanou bilineární formu $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ na $\mathfrak{g}$.
Je-li $\mathfrak{g}$ polo prostá, máme k dispozici Cartan-Killingovu formu $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ definovanou vztahem

$$\langle x,y\rangle_{\mathfrak{g}} = Tr(ad_x, ad_y). \quad *$$

Nechť $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$ je lokální forma křivosti odpovídající nějakému lokálnímu řezu. Lokální formě konexe $\mathcal{A}$ se v řeči teorie pole říká kalibrační pole a funkcionál

$$S_{kin}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{2}\langle\langle \mathcal{F},\mathcal{F}\rangle\rangle_{\mathfrak{g}}$$

se nazývá kinetický člen kalibrační teorie, popisované polem $\mathcal{A}$

Příklad:

Uvažujme $(V,\rho) = (\mathbb{C},\rho)$, kde $\mathbb{C}$ považujeme za dvourozměrný reálný prostor s bází $\{1,i\}$ a $\rho(g)\lambda = g\cdot\lambda$.
Pokud zapíšeme $g = \exp(ix)$, $x\in\mathbb{R}$, má zobrazení $\rho(\exp(ix))$ v bázi $\{1,i\}$ matici:

$$\rho(e^{ix}) = \begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix},$$

položme $\langle \alpha_0 + i\alpha_1, \beta_0 + i\beta_1\rangle_V = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1$, který je přirozeně invariantní vůči rotacím a tedy $\langle , \rangle_V$ je ρ-invariantní.

K věci můžeme přistupovat i jinak, tj. dívat se na $\mathbb{C}$ jako na jednorozměrný komplexní vektorový prostor a použít standardní (komplexní) skalární součin na $\mathbb{C}$, tj.:

$$\langle \lambda, \lambda'\rangle_{\mathbb{C}} = \bar{\lambda}\lambda'.$$

Tento skalární součin (je sesquilineární, ne bilineární) je ρ-invariantní vůči ρ jako komplexní reprezentace $U(1)$ na $\mathbb{C}$. Je-li $\alpha\in\Omega^p_\rho(P,\mathbb{C})$ horizontální p-forma typu ρ a $a = \sigma^*(\alpha)$, můžeme použít $\langle , \rangle_V$ nebo $\langle , \rangle_{\mathbb{C}}$ k definici (stejného) reálného čísla $\langle\langle a,a\rangle\rangle$. Speciálně tedy můžeme definovat účinek pro komplexní skalární pole

$$S_0[\phi] = \langle\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi\rangle\rangle_V - m^2\langle\langle\phi,\phi\rangle\rangle_V$$

Je důležité si uvědomit, že v $\mathcal{D}$ je pořád schované Maxwellovo kalibrační pole $A = -i\mathcal{A}$. Jelikož $U(1)$ není poloprostá Lieova algebra, nemůžeme použít po přidání kinetického členu Cartan-Killingovu formu jako v předchozím případě

Jelikož $u(1) = \mathbb{R}\{i\} \simeq \mathbb{R}$ můžeme použít standardní skalární součin na $\mathbb{R}$: $\langle i\alpha, i\alpha' \rangle_{\mathfrak{g}} = \alpha\alpha'$, potom

$$S_{kin}[A] = -\frac{1}{2}\langle\langle \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle\rangle_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{2}\langle F, F\rangle_g \cdot \langle i1, i1 \rangle_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{2}\langle dA, dA \rangle_g$$

Kombinací S_{kin} a S_0 dostáváme přesně minimální interakci S, kterou jsme definovali ~~v~~ při kapitole

Tyto příklady v zásadě shrnují základní filosofii kalibračních teorií. Máme Lieovu grupu G a hlavní fibraci $\pi : P \to M$. Varieta M hraje roli fyzikálního časoprostoru.

Kalibrační pole $\mathcal{A} \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ je lokálně definovaná veličina pevně spjatá s fixací kalibrace $\sigma : U \to P$ a předepsaným chováním při změně kalibrace. Geometricky odpovídá volbě konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$.

Potom pro každou reprezentaci (V, ρ) Lieovy grupy G můžeme definovat hmotová pole $a \in \Omega^p(U, V)$, která jsou lokální verze horizontální p-formy α typu ρ, $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$. Na V potřebujeme ρ-invariantní pseudoskalární součin.

Dohromady můžeme vytvořit kalibračně invariantní účinek (akci) pro pole $\mathcal{A}$ a hmotné pole α definovaný jako:

$$S[\mathcal{A}, a] = -\frac{1}{2}\langle\langle \mathcal{D}\mathcal{A}, \mathcal{D}\mathcal{A} \rangle\rangle_{\mathfrak{g}} + \langle\langle \mathcal{D}a, \mathcal{D}a \rangle\rangle_V - m^2 \langle\langle a, a \rangle\rangle_V ,$$

přičemž interakce polí $\mathcal{A}$ a α je vždy schovaná výhradně v $\mathcal{D}a = da + \rho'(\mathcal{A}) \wedge a$

Příklad Yang-Millsova teorie, 1953 *

Uvažujme isospinový dublet $\Psi \in C^\infty(E^{1,3}, \mathbb{C}^2)$.
Příslušný funkcionál pro Ψ se obvykle píše ve tvaru

$$S_0[\Psi] = \int d^4x \left(\partial^\mu \Psi^\dagger \partial_\mu \Psi - m^2 \Psi^\dagger \Psi\right) =$$

$$= \int d^4x \sum_{j=1}^{2} \left(\partial^\mu \bar{\Psi}_j \partial_\mu \Psi_j - m^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j\right). \quad *$$

Funkcionál je zjevně invariantní vůči transformaci

$$\Psi' = S^{-1}\Psi, \quad S \in SU(2) \text{ je konstantní matice}$$

Problémem je opět lokální kalibrační transformace, $S = S(x)$.

Uvažujme kanonickou reprezentaci $SU(2)$ na $V = \mathbb{C}^2$, tj. $\rho(S)\chi = S\chi$, $\forall \chi \in \mathbb{C}^2$.
Potom lokální kalibrační transformace Ψ odpovídá přesně kalibrační transformaci $\psi = \sigma^*(\Psi)$, pro $\psi \in C^\infty_\rho(P, \mathbb{C}^2)$ veličinu typu ρ a $P = E^{1,3} \times SU(2)$. Standardní skalární součin $\langle\, ,\rangle_{\mathbb{C}^2}$ je ρ-invariantní z definice grupy $SU(2)$ a můžeme ho tedy použít pro definici (komplexního sesquilineárního) skalárního součinu $\langle\langle\, ,\rangle\rangle_V$. Potom

$$S_0[\Psi] = \langle\langle d\Psi, d\Psi \rangle\rangle_V - m^2 \langle\langle \Psi, \Psi \rangle\rangle \quad *$$

a víme, že je třeba nahradit d operátorem vnější ~~der~~ kovariantní derivace $D = d + \rho'(A)$, $A \in \Omega^1(E^{1,3}, su(2))$ se kalibračně transformuje ~~vztahem~~ vztahem.

$$A' = S^{-1}AS + S^{-1}dS \quad *$$

Připomeňme, že algebra su(2) má bázi standardně zvolenou jako $(T_i)_{i=1}^{3}$, $T_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$.
Fyzikové ovšem nemají rádi anti-hermitovské matice, takže pracují s hermitovskou bází (která ale není báze su(2)!)
$(T_i) = \frac{1}{2}\sigma_i$.

- **Pohybové rovnice kalibrační teorie**

Uvažujme hlavní fibrovaný prostor $\pi : P \to M$ se strukturní grupou G. Dále uvažujme kalibrační teorii pole $\mathcal{A}$ spolu s hmotovým polem a. Jak vypadají pohybové rovnice?

Definice: Kovariantní kodiferenciál

Nechť $D : \Omega^p(U,V) \to \Omega^{p+1}(U,V)$ je operátor kovariantní derivace. Pro všechny $a \in \Omega^p(U,V)$ definovaný jako $Da = da + \rho'(\mathcal{A}) \wedge a$. Nechť g je metrika na M.
Pak kovariantní kodiferenciál D^+ definujeme vztahem:

$$D^+ := *^{-1} D * \hat{\eta},$$

kde $*$ působí pouze na komponentní p-formy jako obyčejná Hodgeova dualita na M.

Tvrzení:

Nechť $a \in \Omega^p(U,V)$, $b \in \Omega^{p+1}(U,V)$. Potom platí:

$$d\langle a \wedge *b\rangle_V = \left(((Da,b))_V - ((a,D^+b))_V\right) \cdot \omega_g$$

$$\int_M d\langle a \wedge *b\rangle_V = \langle\langle Da,b\rangle\rangle_V - \langle\langle a,D^+b\rangle\rangle_V$$

Tvrzení:

Kalibrační pole $\mathcal{A}$ a hmotové pole ϕ splňují pohybové rovnice právě tehdy, když:

$$D\mathcal{F} = 0, \quad D^+\mathcal{F} = -J, \quad D^+D\phi + m^2\phi = 0$$

Tvrzení: Noetherovský proud j

Definujme $j := \mathcal{J} + *^{-1}[A \wedge *\mathcal{F}]_{\mathfrak{g}}$.

Potom j splňuje rovnici kontinuity ve tvaru $d*j = 0 \Leftrightarrow \delta j = 0$.

7. Kapitola - Přidružený vektorový fibrovaný prostor

- Redukce ekvivariantních vektorových bundlů

Definice: Morfismus vektorových bundlů

Nechť $q: E \to M$ a $q': E' \to M'$ jsou dva vektorové bundly. Potom dvojice $(\mathcal{F}, \varphi)$ se nazývá morfismus vektorových bundlů, pokud $\mathcal{F}: E \to E'$ a $\varphi: M \to M'$ jsou hladká zobrazení taková, že následující diagram je komutativní:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "q"] & E' \arrow[d, "q'"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & M' \end{tikzcd}$$

Jsou-li $\mathcal{F}$ a φ difeomorfismy, nazývá se $(\mathcal{F}, \varphi)$ izomorfismus vektorových bundlů.

:

Definice: