

Fourierova transformace

Dnešní cvičení bude pojato jako praktické seznámení se zavedením Fourierova–Plancherelova operátoru F . Myšlenka je taková, že Fourierova transformace definovaná jako

$$(\mathcal{F}f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} f(x) dx \quad (1)$$

má smysl pouze pro funkce f třídy $L^1(\mathbb{R}^n, dx)$, protože integrál na pravé straně konverguje právě a jen pro takové. $\mathcal{F}$ potom zobrazuje tyto funkce do $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ (prostor rychle ubývajících funkcí, neplést s prostorem funkcí nekonečně diferencovatelných). Pozor na to, že vlivem této vlastnosti

$$\mathcal{F}^\dagger: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_\infty(\mathbb{R}^n): f(x) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{+ix \cdot y} f(x) dx \quad (2)$$

není inverzní transformací k (1), protože jejím definičním oborem není obor hodnot $\mathcal{F}$.

Poněkud pěknější vlastnosti má jeho zúžení na Schwartzův prostor $\mathcal{S} \stackrel{\text{ozn}}{=} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: označíme-li $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{\mathcal{S}}$, pak $\mathcal{F}_0$ zobrazuje $\mathcal{S}$ sám na sebe a stejné zúžení operátoru (2) je jeho inverzí. Máme tedy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \\ \mathcal{F}_0^\dagger: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n): \mathcal{F}_0^\dagger = (\mathcal{F}_0)^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Jednou z vlastností $\mathcal{F}_0$ je Plancherelova rovnost

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n): \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{F}_0 f)(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx, \quad (4)$$

díky které je $\mathcal{F}_0$ hustě definovaný operátor na $L^2(\mathbb{R}^n)$ s normou 1 a můžeme uvažovat o jeho spojitým rozšíření (vůči L^2 -normě), které bude díky rovnici (4) **unitárním** operátorem. Takto získaný operátor

$$F: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \quad (5)$$

nazveme **Fourierovým–Plancherelovým operátorem**, jeho inverzí bude podobně spojitě rozšíření $F_0^\dagger$.

Jistou překážkou v používání operátoru F je, že vzorec (1) *není nadále jeho předpisem*. L^2 -integrabilita funkcí totiž nezaručuje, že jeho pravá strana má smysl. Naštěstí tato situace má snadné řešení:

- a) je-li funkce $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *současně* L^1 -integrabilní, tedy $f \in L^1 \cap L^2$, pak vzorec (1) použit lze a dává správný výsledek,
- b) v ostatních případech můžeme funkci $f \in L^2$ vymezit na nějakou omezenou množinu, například kouli $B_n(\mathbf{0})$, $n \in \mathbb{N}$, čímž L^1 -integrabilitu získá. Tuto množinu pak zvětšujeme a získané vektory $\mathcal{F}f$ konvergují v L^2 – tzv. *konvergence podle středů* či *limes in medio*, ozn.

$$(Ff)(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{B_n} e^{-ix \cdot y} f(x) dx. \quad (6)$$

Formou příkladů se seznámíme ještě s jednou užitečnou alternativou pro případ $n = 1$.

Příklad 1: V případě *přímky* trváme, že na $L^2(\mathbb{R})$ jsou univerzálně použitelné vzorce

$$\begin{aligned} (F\psi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy} \psi(y) dy, \\ (F^\dagger \psi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixy} - 1}{iy} \psi(y) dy. \end{aligned} \quad (7)$$

V tomto cvičení se přesvědčte, že integrál má formu skalárního součinu $\psi(y)$ s funkcí, která je rovněž $L^2(\mathbb{R})$, a proto má konečnou hodnotu $\forall \psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Ukažte také, že pro $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se jeho výsledek shoduje s použitím (1).

Návod pro druhou část: existuje integrabilní majoranta nezávislá na x , díky čemuž lze derivaci posunout dovnitř integrálu.

Příklad 2: Ukažte, že ve vzorcích (7) je integrál na pravé straně absolutně spojitý a jeho derivací podle x lze skutečně formálně dospět k $(F\psi)(x)$, resp. $(F^\dagger\psi)(x)$ (stačí jeden z nich).

Návod: zlomek $(e^{ixy} - 1)/(iy)$, jakožto funkce y , je Fourierovou transformací $\chi_{(0,x)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, a integrand je díky tomu možno psát jako $(F\chi_{(0,x)})(y), \psi(y)$. Pak použijte unitaritu a rozepište skalární součin zpět na integrál.

Příklad 3: Ukažte, že vzorcem $F^\dagger Q F$ je na $L^2(\mathbb{R})$ určen operátor hybnosti – toto jednak představuje jeho unitární ekvivalenci s Q a současně jeho spektrální reprezentaci. To znamená: ukažte, že má předpis $\psi \mapsto -i\psi'$ a jeho definiční obor $F^\dagger D(Q)$ se shoduje s $D(P)$. Odvoďte na základě této informace spektrum $\sigma(P)$.

Návod: viz řešený příklad 7.4.12.