

## Cesty ke spektru operátorů

Spektrum operátoru je podstatné tím, že určuje možné hodnoty pozorovatelných. Pro jiné účely potřebujeme i patřičnou projektorovou míru, ale vždy je dobré mít první představu o tom, jak spektrum vypadá a jaký má rozklad na bodovou a spojitou část. Předvedeme si dnes některé metody, jak k  $\sigma(A)$  dojít, pokud operátor  $A$  byl vytvořen z nějakých jednodušších operátorů, jejichž spektra známe.

### Funkce operátoru

O spektru  $f(A)$ , kde  $f \in \Phi_{E_A}$ , máme již jednu informaci: jedná se o esenciální spektrum funkce  $f$  při míře  $E_A$ . To je sice univerzálně pravda, ale není to obecně příliš praktický návod. Ukážeme si tvrzení, které nám o spektru řekne více.

**Věta (10.5.4).** Nechť  $A \in \mathcal{L}_{sa}(\mathcal{H})$ , nechť  $f \in \Phi_{E_A}$ .

1. Je-li  $\lambda \in \sigma_p(A)$ , pak  $f(\lambda) \in \sigma_p(f(A))$  a vlastní vektory  $A$  příslušející  $\lambda$  jsou také vlastními vektory  $f(A)$  příslušejícími  $f(\lambda)$ .
2. Je-li funkce  $f$  na spektru  $A$  spojitá, pak  $\sigma(f(A)) = \overline{f(\sigma(A))}$ .

*Důkaz.* Nechť  $\psi$  je vlastní vektor  $A$  příslušející vlastnímu číslu  $\lambda$ . Využijeme toho, že  $E_A(\{\lambda\})$  je projektor na vlastní podprostor, a tedy  $E_A(\{\lambda\})\psi = \psi$ . Odsud plyne, že  $\mu_\psi^{(A)}$  je soustředěna na množině  $\{\lambda\}$ : platí totiž

$$\mu_\psi^{(A)}(\{\lambda\}) = (\psi, E_A(\{\lambda\})\psi) = (\psi, \psi) = \mu_\psi^{(A)}(\mathbb{R}) \quad (1)$$

a pozitivita míry  $\mu_\psi^{(A)}$  spolu s konečností nenechává jinou možnost, než že všechny množiny disjunktní s  $\{\lambda\}$  zobrazuje na nulu.

Nechť nyní  $T = f(A) - f(\lambda)I = \mathcal{J}_{E_A}(f(x) - f(\lambda))$ . Z pravidel funkcionálního počtu využijeme rovnici

$$\|\mathcal{J}_{E_A}(f(x) - f(\lambda))\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(\lambda)|^2 d\mu_\psi^{(A)}(x), \quad (2)$$

ale díky objevené vlastnosti míry  $\mu_\psi^{(A)}$  stačí integrovat na množině  $\{\lambda\}$ , a na té je integrand nulový. Proto

$$\|f(A)\psi - f(\lambda)\psi\|^2 = 0, \quad f(A)\psi = f(\lambda)\psi. \quad (3)$$

Pro druhou část uvažujeme funkci, která je spojitá. Poznamenejme, že spojitost na spektru je ve skutečnosti postačující podmínkou pro  $f \in \Phi_{E_A}$ , protože implikuje obě vlastnosti definující tuto větší množinu. Můžeme psát:  $C(\sigma(A)) \subset \Phi_{E_A}$ .

Vezměme  $\lambda \in \sigma(A)$  a  $\mu = f(\lambda)$ . Napíšeme podmínku spojitosti  $f$  ve tvaru

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: f^{-1}(U_\varepsilon(\mu)) \supset U_\delta(\lambda) \quad (4)$$

a na obě strany  $\supset$  použijeme spektrální míru  $E_A$ :

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: E_A(f^{-1}(U_\varepsilon(\mu))) \geq E_A(U_\delta(\lambda)) \quad (5)$$

Nutnou a postačující podmínkou  $\lambda \in \sigma(A)$  je ale

$$\forall \delta > 0: E_A(U_\delta(\lambda)) \neq 0, \quad (6)$$

takže i  $E_A(f^{-1}(U_\varepsilon(\mu))) \neq 0$  pro všechna  $\varepsilon > 0$ , což je definičním vztahem pro  $\mu = f(\lambda) \in R_{ess}^{(E_A)}(f) = \sigma(f(A))$ .

Pro opačnou implikaci uvažujeme  $\mu$  mimo *uzávěr* množiny  $f(\sigma(A))$ , takže  $\mu$  leží mimo  $f(\sigma(A))$  včetně nějakého  $\varepsilon$ -okolí:

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\mu) \cap f(\sigma(A)) = \emptyset \quad (7)$$

Na obě strany použijeme postupně  $f^{-1}$  a  $E_A$  a dozvídáme se

$$\exists \varepsilon > 0 : E_A(f^{-1}(U_\varepsilon(\mu)) \cap \sigma(A)) = 0. \quad (8)$$

Protože  $\sigma(A)$  je nosičem  $E_A$ ,  $E_A(M \cap \sigma(A))$  a  $E_A(M)$  jsou stejné. Tak se dozvídáme, že množina  $f^{-1}(U_\varepsilon(\mu))$  je  $E_A$ -nulová pro nějaké  $\varepsilon > 0$ , což implikuje  $f(\lambda) \notin R_{\text{ess}}^{(E_A)}(f)$ .

Z předchozích dvou částí důkazu se dozvídáme:

$$\begin{aligned} f(\sigma(A)) &\subset \sigma(f(A)), \\ \mathbb{C} \setminus \overline{f(\sigma(A))} &\subset \mathbb{C} \setminus \sigma(f(A)), \end{aligned} \quad (9)$$

ale když nad první inkuzí uděláme *uzávěr*, což pravou stranu nezmění, dostáváme nutnou a postačující podmínku rovnosti mezi množinami  $\sigma(f(A))$  a  $\overline{f(\sigma(A))}$ .  $\square$

**Poznámky:** Opatrnost, s jakou je věta formulována, je opodstatněná:

- V bodovém spektru  $f(A)$  se mohou objevit i hodnoty, které nejsou žádným obrazem vlastních hodnot  $A$ . Například  $Q$  má bodové spektrum prázdné, ale do  $\sigma_p(T_f) = \sigma_p(f(Q))$  patří každá hodnota, které  $f(x)$  nabývá na nějakém nenulovém intervalu.
- Uzávěr je důležitý, protože obraz uzavřené množiny při spojitým zobrazení nemusí být uzavřený. V některých případech to však zajištěno je, například pokud  $\sigma(A)$  je omezené (tedy pro  $A$  hermitovský).

Druhá část věty má naprosto přímočaré zobecnění i na funkce  $n$  komutujících operátorů  $A_1$  až  $A_n$  (10.7.6): je-li  $f \in C(\sigma(A_1) \times \dots \times \sigma(A_n))$ , pak spektrum operátoru  $f(A_1, \dots, A_n)$  je rovno *uzávěru* množiny  $f(\sigma(A_1) \times \dots \times \sigma(A_n))$ . O bodovém spektru ovšem mnoho říct nelze.

**Příklady:**

- Spektrum hybnosti na  $L^2(\mathbb{R})$  je  $\sigma(P) = \mathbb{R}$ , totéž platí pro operátory složek hybnosti na  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Protože obrazem množiny  $\mathbb{R}$  při  $x \mapsto x^2$ , stejně jako množiny  $\mathbb{R}^n$  při  $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2$ , je  $\langle 0, +\infty \rangle$ , je tato množina spektrem operátoru volné energie v obou situacích.
- Spektrem operátoru  $H = P^2 + Q^2$  na  $L^2(\mathbb{R})$  je množina lichých přirozených čísel. Pro  $\mu \in \rho(H)$  dosazením  $H$  do  $f(\lambda) = 1/(\lambda - \mu)$  dostáváme rezolventu  $R_H(\mu)$ . Z věty vyplývá, že  $1/(2n + 1 - \mu)$  jsou vlastní čísla  $R_H$  s vlastními vektory stejnými, jako má  $H$ , jedná se tedy o operátor s čistě bodovým, nedegenerovaným spektrem. Kromě těchto hodnot je ve spektru ještě jejich hromadný bod, 0, který není obrazem žádného  $\lambda$  – musí tedy být prvkem  $\sigma_c(R_H(\mu))$ . Tyto spektrální vlastnosti odpovídají kompaktnímu operátoru; lze se snadno přesvědčit, že skutečně  $R_H(\mu) \in \mathcal{J}_\infty(\mathcal{H})$  pro každé  $\mu \in \rho(H)$ .

## Samosdružená rozšíření

Mnoho se o spektru můžeme dozvědět i v rámci teorie samosdružených rozšíření symetrických operátorů.

Připomeňme, že pro uzavřený operátor  $T$  definujeme oblast regularity jako množinu hodnot

$$\pi(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists c > 0 : \forall \psi \in D(T) : \|T\psi - \lambda\psi\| \geq c\|\psi\|\}. \quad (10)$$

Zabývejme se jejím doplněm. Do něj patří čísla, pro která  $\|T\psi - \lambda\psi\|$  pro jednotková  $\psi$  nemá spodní hranici jinou než nula. To může mít pouze dvě příčiny,

1. existuje nenulové  $\psi \in D(T)$  takové, že  $T\psi = \lambda\psi$ , tedy  $\lambda \in \sigma_p(T)$ ,
2.  $\lambda \notin \sigma_p(T)$ , ale existuje posloupnost jednotkových  $\psi_n \in D(T)$  takových, že  $(T - \lambda I)\psi_n$  jsou vektory s normou limitně klesající k nule.

Ve druhém případě můžeme psát:  $(T - \lambda I)^{-1}$  je na svém definičním oboru, kterým je  $\text{Ran}(T - \lambda I)$ , neomezený operátor. Snadno nahlédneme, že se jedná o nutnou i postačující podmínku.

V prvním případě tedy má rovnice  $T\psi = \lambda\psi$  nenulové řešení, ve druhém se této vlastnosti lze alespoň v jistém smyslu blížit. Uzavřenou množinu  $\mathbb{C} \setminus \pi(T)$  z tohoto důvodu občas nazýváme *přibližně bodovým spektrem*  $\sigma_{\text{ap}}(T)$ . Je evidentní, že pokud dva uzavřené operátory  $T, S$  splňují  $T \subset S$ , pak  $\sigma_{\text{ap}}(T) \subset \sigma_{\text{ap}}(S)$ : vlastní vektor či posloupnost vektorů z  $D(T)$  zaručující  $\lambda \in \sigma_{\text{ap}}(T)$  můžeme pro operátor  $S$  jednoduše použít stejnou.

Pro normální operátor  $T$  je  $\pi(T) = \rho(T)$  a rovnají se tedy i jejich doplňky. **Celé spektrum každého normálního operátoru je tedy přibližně bodové.** Zejména si to budeme pamatovat pro samosdružené operátory.

Uvažujme nyní symetrický operátor  $A$  s indexy defektu  $(n, n)$  a jeho uzavřené symetrické rozšíření  $A'$ . Podle druhé von Neumannovy formule je  $D(A')$  roven  $D(A)$  zvětšenému o nějaký podprostor  $G$ ,  $\dim G = m \leq n$ . Podle předchozího odstavce se přibližně bodové spektrum  $A$  může při rozšíření na  $A'$  pouze zvětšit.

Může se stát, že vektory přidané do definičního oboru zahrnují nějaké vlastní vektory  $A'$ , ovšem nejvýše  $m$  takových lineárně nezávislých. Bodové spektrum se tedy může rozšířit o vlastní hodnoty s násobností nejvýše  $m$ , nebo se pro existující vlastní podprostory může navýšit dimenze jejich vlastních podprostorů.

Může také přibýt bod  $\lambda \in \mathbb{C}$ , které splňuje druhou z možností výše, tedy pro který je  $A' - \lambda I$  invertibilní a  $(A' - \lambda I)^{-1}$  neomezený, i když  $(A - \lambda I)^{-1}$  nebyl. (Že nemusíme ověřovat invertibilitu  $A - \lambda I$ , je jednoduché cvičení pro posluchače.) Bod  $\lambda \in \pi(A)$  tedy přechází do  $\sigma_{\text{ap}}(A')$ . Ovšem o oblasti regularity víme, že  $A - \lambda I$  má uzavřený obor hodnot. Zvětšením oboru  $D(A)$  o podprostor  $G$  dojde ke zvětšení

$$\text{Ran}(A' - \lambda I) = \text{Ran}(A - \lambda I) + (A - \lambda I)G. \quad (11)$$

Touto operací nemůže z uzavřeného podprostoru vzniknout neuzavřený, pokud prostor  $G$  je konečnědimenzionální, tedy zejména, pokud indexy defektu jsou **konečné**. V takovém případě je operátor  $(A' - \lambda I)^{-1}$  uzavřeným operátorem definovaným na uzavřeném podprostoru, a tedy omezený, a možnost, kterou jsme zkoumali, je vyloučena.

Shrňme tato pozorování:

- $\sigma_{\text{ap}}(A') \supset \sigma_{\text{ap}}(A)$ ,
- $\sigma_{\text{p}}(A') \supset \sigma_{\text{p}}(A)$ ,  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) \leq \dim \text{Ker}(A' - \lambda I) \leq \dim \text{Ker}(A - \lambda I) + m$ ,
- pro konečné  $\dim G$  platí  $\sigma_{\text{ap}}(A') \setminus \sigma_{\text{p}}(A') \subset \sigma_{\text{ap}}(A) \setminus \sigma_{\text{p}}(A)$  (množina se nemůže zvětšit, zmenšit ale ano, pokud z některého jejího bodu vznikla rozšířením vlastní hodnota).

Pro **konečné** indexy defektu tedy k přibližně bodovému spektru mohou v rámci symetrického, potažmo samosdruženého rozšíření přibýt pouze vlastní hodnoty konečné násobnosti. Pokud tedy nějakým způsobem  $\sigma_{\text{ap}}(A)$  zjistíme, stačí pro operátor  $A'$  dořešit rovnici vlastních čísel (která je přímočará) a známe celé spektrum.

## Esenciální a diskrétní spektrum

Alternativou k hledání  $\sigma_{\text{ap}}$  uzavřeného operátoru  $T$  je takzvané *esenciální spektrum*  $\sigma_{\text{ess}}$ . Podmínka náležitosti

$$\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T) \iff \exists (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T): (\forall n \in \mathbb{N}: \|\psi_n\| = 1), T\psi_n - \lambda\psi_n \rightarrow 0, \psi_n \xrightarrow{w} 0. \quad (12)$$

je oproti  $\sigma_{\text{ap}}(T)$  posílena o požadavek, že posloupnost jednotkových vektorů  $(\psi_n)$  konverguje k nule ve slabé topologii, tedy například se jedná o vzájemně ortogonální vektory. (Alternativně se setkáme s formulací, že nemá konvergentní podposloupnost.) Odsud je zřejmé, že  $\sigma_{\text{ess}}(A) \subset \sigma_{\text{ap}}(A)$ . Podmínka (12) je známa jako **Weylovo kritérium** (ve variantách pro  $\sigma_{\text{ess}}$  i pro  $\sigma_{\text{ap}}$ ).

O něco více můžeme říci pro uzavřené *symetrické* operátory. Do esenciálního spektra  $A \in \mathcal{L}_{\text{cs}}(\mathcal{H})$  patří  $\lambda \in \mathbb{C}$  právě tehdy, je-li buď *vlastní hodnotou nekonečné násobnosti*, nebo  $(A_\lambda - \lambda I)^{-1}$  je *neomezený operátor*, kde  $A_\lambda$  je

část  $A$  v prostoru  $\text{Ker}(A - \lambda I)^\perp$ . (Symetrie  $A$  je zde využita k tomu, že  $A$  je jádrem  $A - \lambda I$  redukován, díky čemuž konstrukce  $A_\lambda$  má smysl.)

Druhá část formulace umožňuje být prvkem  $\sigma_{\text{ess}}$  i některým vlastním hodnotám konečné násobnosti. To v případě, že by stále byly součástí přibližně bodového spektra operátoru  $A_\lambda$ , který z  $A$  vznikne, odstraníme-li vlastní podprostor příslušející  $\lambda$ . Jedná se přesně o ty vlastní hodnoty, které jsou současně **hromadnými body** a.p. spektra  $A$ , protože jejich přítomnost v  $\sigma_{\text{ap}}(A)$  je i po odstranění vlastního prostoru stále zaručena uzavřeností množiny. Jediné body, které jsou v  $\sigma_{\text{ap}}(A)$  oproti  $\sigma_{\text{ess}}(A)$  navíc, jsou tedy *izolované* vlastní hodnoty *konečné* násobnosti. Tato množina se nazývá *diskrétní spektrum*  $\sigma_{\text{d}}(A)$ .

Pomocí esenciálního, příp. diskrétního spektra můžeme přeformulovat předchozí výsledek. Pro uzavřené symetrické rozšíření  $A'$  uzavřeného symetrického operátoru  $A$  platí

- $\sigma_{\text{p}}(A') \supset \sigma_{\text{p}}(A)$ ,
- $\sigma_{\text{ess}}(A') \supset \sigma_{\text{ess}}(A)$ ,

v případě konečných indexů defektu  $n_\pm(A)$  konkrétněji

- $\sigma_{\text{d}}(A') \supset \sigma_{\text{d}}(A)$ , protože z vlastní hodnoty konečné násobnosti nemůže vzniknout nekonečné násobnosti nebo z izolované neizolovaná,
- $\sigma_{\text{ess}}(A') = \sigma_{\text{ess}}(A)$ , protože množina se nemůže zvětšit ze stejného důvodu, jako nemohla  $\sigma_{\text{ap}} \setminus \sigma_{\text{p}}$ , ale zmenšit se také nemůže.

Poslední rovnice je velice důležitá: pro  $A \in \mathcal{L}_{\text{cs}}(\mathcal{H})$  s konečnými indexy defektu má **každé jeho  $\mathcal{L}_{\text{cs}}$  rozšíření esenciální spektrum stejné a může se lišit jen v diskrétní části.**

**Poznámka:** Inkluze pro  $\sigma_{\text{p}}$ ,  $\sigma_{\text{ap}}$  a  $\sigma_{\text{ess}}$  platí pro *jakékoli* uzavřené rozšíření *jakéhokoli* uzavřeného operátoru, symetrie nehraje roli. Všechny množiny jsou určeny existencí nějakých vektorů nebo posloupností vektorů v definičním oboru operátoru, která se v rozšíření nemůže pokazit.

### Stabilita esenciálního spektra

Esenciální spektrum má ještě jeden speciální význam pro **samosdružené** operátory s poruchou, například operátory energie. Platí (bez důkazu, viz věta 10.4.9 a komentář k §10.4):

**Věta.** Nechť  $A \in \mathcal{L}_{\text{sa}}(\mathcal{H})$ , nechť  $C$  je *relativně kompaktní* vůči  $A$ . Pak  $\sigma_{\text{ess}}(A + C) = \sigma_{\text{ess}}(A)$ .

Relativní kompaktnost je zde definována analogicky relativní omezenosti (viz 25.3.):  $C$  je relativně kompaktní vůči  $A$ , je-li  $CR_A(\mu)$  kompaktní operátor pro libovolné  $\mu \in \rho(A)$  (pokud platí pro jednu hodnotu, platí již pro všechny díky rezolventním formulím).

Esenciální spektrum je nedocenitelným pomocníkem v argumentaci, jak vypadá spojitá část spektra pozorovatelných, protože jej stačí najít v nějaké jednodušší situaci (symetrický operátor před rozšířením, operátor bez poruchy) a dohledat jen vlastní vektory. Příklady uvidíme na cvičení.