

Soubory komutujících pozorovatelných

Uvažujme samosdružené operátory A_1, \dots, A_n vzájemně komutující podle naší definice z minula – tedy, že jejich spektrální míry jsou tvořeny komutujícími projektory.

Pro množinu výsledků Δ tvaru kartézského součinu, $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$, je pravděpodobnost naměření hodnot A_j v intervalech Δ_j nezávislá na pořadí měření, stejně jako stav po měření – to již dobře víme z kvantové mechaniky. Tato vlastnost se nazývá *kompatibilitou* pozorovatelných veličin. Ukážeme, že kompatibilita je komutací ekvivalentní, pro dva operátory a čistý stav E_φ – zobecnění je přímočaré. Pravděpodobnost naměření hodnoty A_1 v intervalu Δ_1 následovaného naměřením A_2 v intervalu Δ_2 je dána

$$\begin{aligned} w(A_1, \Delta_1; A_2, \Delta_2; \varphi) &= \text{Tr}(E_{A_2}(\Delta_2)W') w(A_1, \Delta_1; E_\varphi) = \text{Tr}(E_{A_2}(\Delta_2) \underbrace{E_{A_1}(\Delta_1)E_\varphi E_{A_1}(\Delta_1)}_{w(A_1, \Delta_1; E_\varphi)W'}) = (E_1\varphi, E_2E_1\varphi) \\ &= (\varphi, E_1E_2E_1\varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

kde $E_j = E_{A_j}(\Delta_j)$, a v opačném pořadí $(\varphi, E_2E_1E_2\varphi)$. Evidentně pro komutující operátory se pravé strany rovnají a také vychází stejný stav po měření. Naopak je-li rovnost splněna pro každé φ , pak operátor $C = E_1E_2E_1 - E_2E_1E_2$ je nulový. Ovšem pro $B = E_1E_2 - E_2E_1$ je

$$B^*B = E_2E_1E_2 - E_2E_1E_2E_1 - E_1E_2E_1E_2 + E_1E_2E_1 = (E_1 - E_2)C = 0, \quad (2)$$

což nenechává jinou možnost, než že operátory ze spektrálních měř A_1 a A_2 , a potažmo A_1 a A_2 , komutují.

Pro n -tici vzájemně komutujících operátorů A_1, \dots, A_n můžeme projektory dané těmito mírami sloučit do stejné komutující množiny. Lze však i více – sestavit projektorovou míru E , z níž každý A_j lze psát jako integrál $\int_X f_j dE$ s nějakou funkcí f_j . Pro tuto konstrukci můžeme volit $X = \mathbb{R}^n$ a projektorovou míru E definovat na n -rozměrných intervalech

$$E(J_1 \times \dots \times J_n) = E_{A_1}(J_1)E_{A_2}(J_2) \dots E_{A_n}(J_n). \quad (3)$$

Rozšíření na plnohodnotnou míru pak probíhá stejně jako v případě konstrukce míry z rozkladu jednotky – detaily jsme neuváděli, ale existuje a je jednoznačné. Nazývá se potom *direktním součinem* projektorových měř E_{A_1}, \dots, E_{A_n} .

Tato projektorová míra pak – v zobecněném pojetí postulátu, abychom nemuseli hledat nějaký zástupný samosdružený operátor – umožňuje mluvit o současných měřeních operátorů $\{A_j\}_{j=1}^n$. Tato formulace přidává oproti měření v jakémkoli pořadí navíc možnosti binárních měření na podmnožinách $\Delta \in \mathcal{B}^n$, kterých nelze dosáhnout sekvencí měření jednotlivých z nich: příkladem může být pozorování vzdálenosti od počátku souřadnic, kde bychom za Δ volili objem mezi dvěma sférami. Značíme pak

$$w(\Delta, \{A_1, \dots, A_n\}; W) := \text{Tr}(E(\Delta)W), \quad W' = \frac{E(\Delta)WE(\Delta)}{\text{Tr}(E(\Delta)W)}. \quad (4)$$

Funkce komutujících samosdružených operátorů

Stejná projektorová míra na \mathbb{R}^n se dá použít k účelu definování funkcí více komutujících samosdružených operátorů: definujeme

$$f(A_1, \dots, A_n) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dE(x_1, \dots, x_n) \quad (5)$$

pro každou E -skoro všude definovanou borelovskou funkcí f . (Stačí, aby byla definovaná na kartézském součinu spekter.)

Pro funkce komutujících operátorů platí několik logických závěrů, které jsou analogické dřívějším výsledkům pro podobné konstrukce. Například dosazení A_1, A_2 do funkcí tvaru $f(x, y) = g(x) + h(y)$ či $f(x, y) = g(x)h(y)$ může dát operátor „o uzavěr“ širší než součet, resp. součin operátorů $g(A_1)$ a $h(A_2)$ – pro příklad si představme dosazení $A_2 = A_1$ do funkcí $x - y$ či xy^{-1} . Přibývá logické, ale ne automatické pravidlo, že pro $f(x, y) = g(x)$ vychází $f(A, A')$ stejně jako $g(A)$.

Mezi potenciálně důležité aplikace patří, že $f(Q_1, \dots, Q_n)$ dává operátor násobení funkcí $f(x_1, \dots, x_n)$ a že dosazení složek hybnosti do funkce $\sum_j x_j^2$ dává operátor kinetické energie volné částice, i když k oběma těmto operátorům jsme došli již dříve jinými metodami. Tím spíše ale mohou oba příklady sloužit pro lepší představu, jak obecná funkce více proměnných v operátorech může v praxi vypadat.

Úplné soubory komutujících samosdružených operátorů

Soubor komutujících samosdružených operátorů $\mathcal{S} = (A_1, \dots, A_n)$ nazveme úplným, jestliže libovolná další pozorovatelná, která by s nimi byla kompatibilní, je již rovna nějaké funkci A_1, \dots, A_n . Omezujeme se zde na konečné soubory, což z hlediska matematické formulace není univerzální, ale pro praktické účely zcela stačí (n je obvykle 1, 2, 3, 4).

Důležitá formulace ekvivalentní této na **separabilním** \mathcal{H} je taková, že \mathcal{S} je ÚSKO, jestliže operátory, které komutují se všemi prvky \mathcal{S} , komutují také mezi sebou. To je algebraicky vyjádřeno podmínkou, že každý prvek *komutantu* množiny \mathcal{S} patří také do komutantu tohoto komutantu, tedy *bikomutantu* $(\mathcal{S}')' = \mathcal{S}''$.

Proč tyto dvě formulace jsou ekvivalentní, je poměrně hluboké tvrzení, ale pro konečné \mathcal{S} lze shrnout následovně:

1. Jestliže $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ komutuje s operátorem A , pak komutuje také s libovolnou funkcí operátoru A . To znamená, že každé $f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ patří do *komutantu komutantu* jednoprvkové množiny $\{A\}$. (Z technických důvodů do pojmu „komutant“ zahrnujeme jen omezené operátory.)
2. Na **separabilním** \mathcal{H} každý samosdružený operátor, který komutuje s každým takovým B , lze napsat jako nějaká funkce operátoru A . Toto velmi netriviální tvrzení (10.5.9) je historicky výsledkem prací mnoha průkopníků funkcionální analýzy a není teď v našich možnostech zkoumat, proč platí.
3. Pro množinu více než jednoho operátoru roli komutace s A nahrazuje komutace s projektorovou mírou získanou direktním součinem spektrálních měr A_1, \dots, A_n , rozšířit potom předchozí výsledek i na tento případ již není náročné.

Co si zapamatujeme, je, že existuje dobrý důvod v otázkách ÚSKO vyžadovat separabilitu.

Setkáme se ještě s třetí ekvivalentní formulací ÚSKO. (Všechny tři shrnuje v knize věta 14.2.1, ale její důkaz se opírá o obsah několika předchozích kapitol.) Soubor \mathcal{S} je úplný právě tehdy, když existuje tzv. cyklický vektor $\varphi \in \mathcal{H}$ s vlastností, že množina $\{A\varphi \mid A \in \mathcal{S}''\}$ je v \mathcal{H} totální. Co si pod touto abstraktní formulací představit?

Podle předchozího je každý operátor $A \in \mathcal{S}''$ vyjádřitelný jako funkce operátorů A_1, \dots, A_n . Protože z algebraických předpokladů je omezený, je možné jej vyjádřit jako integrál nějaké $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n, dE)$ přes společnou projektorovou míru E . Jestliže výrazy

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dE(x) \varphi \mid f \in L^\infty(\mathbb{R}^n, dE) \right\} \quad (6)$$

jsou husté v \mathcal{H} a lze se tedy jimi blížit k jakémukoli $\psi \in \mathcal{H}$, budeme chtít ukázat, že existuje funkce f_ψ , ne již nutně omezená, tedy jen $f_\psi \in \Phi_E$, že $\mathcal{I}_E(f_\psi)\varphi = \psi$.

Lemma 1. Je-li φ cyklický vektor souboru \mathcal{S} , pak pro každou E -nenulovou množinu M je $\mu_\varphi(M) \neq 0$.

Důkaz. Uvažujme $M \in \mathcal{B}^n$ takovou, že $E(M) \neq 0$, ale $E(M)\varphi = 0$. Pro libovolnou funkci $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n, dE)$ a každé $\chi \in \mathcal{H}$ je

$$\left(E(M)\chi, \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dE(x) \varphi \right) = \left(\chi, E(M) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dE(x) \varphi \right) = \left(\chi, \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dE(x) E(M)\varphi \right) = 0, \quad (7)$$

takže $\text{Ran } E(M)$ je ortogonální na $A\varphi$ pro každé $A \in \mathcal{S}''$, což je spor s totalitou. \square

Lemma 2. Každá funkce $f \in L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_\varphi)$ splňuje $f \in \Phi_E$, vektor φ patří do $D(f(A_1, \dots, A_n))$ a platí

$$\|\mathcal{I}_E(f)\varphi\|^2 = \|f\|_{\mu_\varphi}^2, \quad (8)$$

takže zobrazení $V : L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_\varphi) \rightarrow \mathcal{H} : f \mapsto \mathcal{J}_E(f)\varphi$ je izometrie.

Důkaz. Míry E a μ_φ mají jistě stejné σ -algebry. Pokud je f μ_φ -s.v. definovaná, je také E -s.v. definovaná podle lematu 1. To jsou předpoklady pro $f \in \Phi_E$. Pro $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\varphi)$ dále

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dE(x) \varphi \right\|^2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dE(x) \varphi, \int_{\mathbb{R}^n} f dE \varphi \right) = \left(\varphi, \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dE(x) \varphi \right) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d\mu_\varphi(x) < \infty, \quad (9)$$

což odpovídá na oba zbývající body, protože $\int |f|^2 d\mu_\varphi < \infty$ je přímo předpisem definičního oboru $f(A_1, \dots, A_n)$.

Po tomto důkazu si již stačí uvědomit, že z předpokladu ÚSKO do obrazu izometrie V patří množina totální v \mathcal{H} (obraz množiny $L^\infty(\mathbb{R}^n, d\mu_\varphi)$, která díky konečnosti míry je $\subset L^2$), takže koncovým prostorem je jistě celé \mathcal{H} .

Definici ÚSKO mohou dokonce splňovat i některé *jednočlenné* soubory $\mathcal{S} = \{A_1\}$. Podmínka, že měření A nebo jeho funkcí dokáže v principu rozlišit mezi libovolnou dvojicí lineárně nezávislých vektorů, je zobecněním koncepce čistě bodového a *nedegenerovaného* spektra. Říkáme, že takový operátor má **jednoduché spektrum**.

Poslední podmínka pro ně znamená, že existuje vektor $\varphi \in \mathcal{H}$ takový, že množina $\{E_{A_1}(M)\varphi \mid M \in \mathcal{B}^1\}$ je totální v \mathcal{H} (zde se z historických důvodů nenazývá cyklický, ale generující vektor). Náš výsledek říká, že musí mít nenulovou projekci do všech $\text{Ran } E_{A_1}(M)$ a poté, že z něj libovolného $\psi \in \mathcal{H}$ můžeme dosáhnout jako $f_\psi(A_1)\varphi$. Ukážeme, že tuto vlastnost má operátor polohy na \mathbb{R} : za φ může sloužit libovolná $L^2(\mathbb{R})$ funkce, která je všude nenulová, například $\varphi(x) = 1/(x^2 + 1)$. Protože funkce operátoru Q jsou operátory násobení funkcí $f(Q) = T_f$, stačí pro obecné $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ volit $f_\psi(x) = \psi(x)/\varphi(x)$.

Jestliže podmínku $\{E_{A_1}(M)\varphi \mid M \in \mathcal{B}^1\}$ totální v \mathcal{H} přijmeme jako definici jednoduchého spektra, pak takové operátory existují **pouze** na separabilních prostorech, protože tato množina je spočetně generovaná intervaly s krajními body v \mathbb{Q} .

Pro kvantovou fyziku je nakonec již jen důležité, jak pro daný stavový prostor získávat ÚSKO z jeho znalosti na nějakých jednodušších prostorech. K tomu slouží následující užitečná pravidla:

- Q_μ je operátor s jednoduchým spektrem na libovolném prostoru $(X, d\mu)$ se σ -konečnou mírou (automaticky zahrnuje polohu na intervalech v \mathbb{R} a oblastech v \mathbb{R}^n),
- Jedná se opět o unitární ekvivalent: například operátor hybnosti na \mathbb{R} má také jednoduché spektrum.
- Každý operátor s nedegenerovaným čistě bodovým spektrem na separabilním \mathcal{H} , například Hamiltonián jednorozměrného lineárního harmonického oscilátoru (LHO), má jednoduché spektrum a může tak sám sloužit za ÚSKO.
- pokud $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ jsou ÚSKO na $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, pak množina

$$\{A \otimes I \mid A \in \mathcal{S}_1\} \cup \{I \otimes A' \mid A' \in \mathcal{S}_2\} \quad (10)$$

je ÚSKO na $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ (14.2.5–9, důkaz opět zabíhá do teorie operátorových algeber).

Pomocí nich oprávníme zcela všechny případy ÚSKO, se kterými jsme se setkali v kurzu O2KVAN, O2KVANM2.

ÚSKO a reprezentace stavu

Zakončíme krátkou poznámkou o reprezentaci vlnové funkce. V kvantové mechanice jste mluvili o polohové, hybnostní, energetické (LHO) reprezentaci a nemusí být zřejmé, proč pro prvky stejného stavového prostoru $L^2(\mathbb{R})$ v některých potřebujeme funkci (tj. „spojité“ mnoho hodnot) a v jiných nám stačí posloupnost („spočetné“ mnoho).

Každá z takových reprezentací se opírá o některý ÚSKO, konkrétně zmíněné příklady o jednorázkové soubory, tedy každý o nějakou pozorovatelnou A s jednoduchým spektrem. Obecný vektor potom můžeme hledat v krocích, že z její projektorové míry „poskládáme“ operátor $\int_{\mathbb{R}} f(x) dE_A(x)$ a aplikujeme na generující vektor φ .

Funkce f jsme viděli, že je třeba brát z prostoru $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\varphi)$, přičemž nosičem míry μ_φ je spektrum operátoru A (je nosičem E_A , ale lemma 1 dává implikaci $\mu_\varphi(M) = 0 \Rightarrow E_A(M) = 0$ a opačná je triviální), takže závisí jen na hodnotách f na $\sigma(A)$. Právě jsme ovšem měli možnost vidět, že i operátory s jednoduchým spektrem mohou spektrum pořád mít stejně dobře diskrétní i spojitě.

Pro operátor Q je

$$\mu_\varphi(M) = (\varphi, E_Q(M)\varphi) = (\varphi(x), \chi_M(x)\varphi(x)), \quad d\mu_\varphi(x) = |\varphi(x)|^2 dx \quad (11)$$

a podmínka $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\varphi)$ tedy je ekvivalentní tomu, že $\tilde{f}(x) := f(x)\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

Pro LHO je míra soustředěna na spočetném spektru a proto podmínka L^2 -integrability funkce f znamená

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\mu_\varphi(x) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|^2 (\varphi, E_A(\{\lambda\})\varphi) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|^2 \|E_\lambda \varphi\|^2 \quad (12)$$

a převádí se na ℓ^2 -podmínku jisté posloupnosti.

Po vymezení se na L^2 -integrabilní funkce a ℓ^2 -integrabilní posloupnosti je zřejmé, že oba druhy objektů patří do vzájemně izometrických prostorů, a tedy je mezi nimi bijektivní korespondence.