

Příklad 1: Najděte indexy defektu operátoru $P^{(0)}$ definovaného předpisem $\psi \mapsto -i\psi'$ na oboru

- a) $H^1(\mathbb{R})$,
- b) $\{\psi \in H^1(\mathbb{R}_+) \mid \psi(0) = 0\}$,
- c) $\{\psi \in H^1(a, b) \mid \psi(a) = \psi(b) = 0\}$

(ze kterého jsme vycházeli při konstrukci hybnosti na přímce, polopřímce, úsečce).

Návod: Sdruženým operátorem je ve všech třech případech operátor zobrazující $\psi \mapsto -i\psi'$ na celém prostoru H^1 příslušného intervalu.

Příklad 2: V případě intervalu (a, b) máme samosdružená rozšíření $P^{(0)}$ určená přímým výpočtem. Na základě určení defektních prostorů

$$K_{\pm} = \{\eta_{\pm}\}_{\text{lin}}, \quad \eta_{-}(x) = e^{-x}, \quad \eta_{+}(x) = e^x \quad (1)$$

najděte, jaká samosdružená rozšíření by dával náš obecný postup a jak jejich parametrizace souvisí s notací P_{α} .

Návod: izometrie K_{-} na K_{+} jsou dány předpisem $c_1\eta_{-} \mapsto e^{i\theta}c_2\eta_{+}$, kde c_1 a c_2 jsou voleny tak, aby $\xi_{-} = c_1\eta_{-}$ a $\xi_{+} = c_2\eta_{+}$ byly jednotkové. Případně postačí, aby měly tyto dva stejnou normu $\neq 0$. Pak využijte předpisu

$$D(\tilde{P}) = D(P^{(0)}) + (I - V_G)K_{-} = \{\psi + \alpha(\xi_{-} - e^{i\varphi}\xi_{+}) \mid \psi \in D(P^{(0)}), \sigma \in \mathbb{C}\} \quad (2)$$

a zkuste formulovat náležitost do něj zvolněním okrajové podmínky $\psi(a) = \psi(b) = 0$.

Příklad 3: Určete defektní prostory a indexy defektu operátoru zadaného předpisem $T: \psi \mapsto -\Delta\psi$ na oboru

$$D(T) = \{\psi \in H^2(\mathbb{R}) \mid \psi(0) = 0, \psi'(0) = 0\}. \quad (3)$$

Dokončete potom nalezení samosdružených rozšíření a запиšte nové definiční obory pomocí navazovacích podmínek v nule. Diskutujte interpretaci všech zvláštních případů.

Návod: Sdružený operátor je stále $-\Delta$, ale pozor na to, na jakém prostoru. O funkcích $D(T^*)$ se sjednocením *překrývajících se* kompaktních intervalů dozvídáme, že jsou spolu se svými derivacemi absolutně spojité na \mathbb{R}_{+} a na \mathbb{R}_{-} , ale v nule mohou mít skok. Druhá část: do $D(T)$ přibudou jisté lineární kombinace vektorů z K_{-} a K_{+} ; spočítejte si, jaké lineární vztahy splňuje pro ně čtveřice hodnot $\psi(0_{\pm})$, $\psi'(0_{\pm})$.