

Fockův prostor

Čtvrtý postulát dává nástroje pro popis systému složeného z pevného počtu částic, ale ve fyzice mikrosvěta není nouze o situace, ve kterých se počet částic nezachovává. Nemusíme kvůli tomu tvrzení postulátu měnit. Pouze N -částicový prostor použijeme pro konstrukci většího stavového prostoru, který bude zahrnovat i jiné stavy. Pokud uvažujeme všechna $N \in \mathbb{N}_0$, získáme takto Fockův prostor.

V rámci této kapitoly budeme uvažovat, že popisujeme soubory stejného jednoho druhu elementární částice. Pokud při interakcích vznikají a zanikají různé druhy částic, je potřeba sestavit Fockův prostor pro každý z nich zvlášť a uvažovat systém vzniklý složením *těchto* komponent.

Nekonečný direktní součet prostorů a operátorů

Pro konstrukci Fockova prostoru se potřebujeme blíže seznámit s rozšířením koncepce direktního součtu prostorů na nekonečný počet.

Uvažujme pro tento účel nějakou indexovou množinu I a zobrazení, které každému prvku $\alpha \in I$ přiřazuje nějaký Hilbertův prostor \mathcal{H}_α (ne nutně různé). Direktní součet sestavíme následovně:

$$\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{H}_\alpha =: \mathcal{H}_\oplus := \left\{ X: \alpha \in I \mapsto \mathcal{H}_\alpha \mid \sum_{\alpha \in I} \|X(\alpha)\|_{\mathcal{H}_\alpha}^2 < \infty \right\}. \quad (1)$$

Zobrazení X si můžeme představit jako zobecnění posloupnosti „ α -tý vektor z \mathcal{H}_α “, pokud by I byla přirozená čísla. Podle našich pravidel pro zobecněné sumy v sobě druhá podmínka zahrnuje podmínku, že každá taková zobecněná posloupnost má nejvýše spočetný počet prvků, které *nejsou* nulový vektor.

Na prostoru \mathcal{H}_\oplus zavedeme skalární součin jako

$$(X, Y) := \sum_{\alpha \in I} (X(\alpha), Y(\alpha))_{\mathcal{H}_\alpha}. \quad (2)$$

Tato suma má také nejvýše spočetný počet nenulových členů a její absolutní integrabilita je zaručena Cauchyovou a Hölderovou nerovností spolu s definicí (1), což zajišťuje korektnost definice. Skalární součin (2) indukce normu

$$\|X\|^2 = \sum_{\alpha \in I} \|X(\alpha)\|_{\mathcal{H}_\alpha}^2, \quad (3)$$

rovněž podle předpokladu dobře definovanou pro každý prvek.

Přesvědčíme se ještě o uzavřenosti vůči této normě. Pokud uvažujeme posloupnost $(X_n)_{n=1}^\infty$ vektorů z \mathcal{H}_\oplus , můžeme najít sjednocení všech podmnožin $\alpha \in I$, na kterých některé ze zobrazení X_n je nenulové – jako spočetné sjednocení nejvýše spočetných množin je to také nejvýše spočetná množina. Díky konstrukci normy zaručuje Cauchyova podmínka posloupnosti $(X_n)_{n=1}^\infty$ skutečnost, že v každém bodě $\alpha \in I$ posloupnosti $(X_n(\alpha))_{n=1}^\infty$ konvergují zvlášť. Lze tedy z těchto individuálních limit, kterých je nejvýše spočetně mnoho, sestavit nové zobrazení X , doplněné všude jinde nulami. Přímočaré dosazení do patřičných vzorců ukáže, že X splňuje podmínku (1) a v normě (3) je limitou $(X_n)_{n=1}^\infty$.

Takto sestavený nekonečný direktní součet splňuje následující vlastnosti, které bychom od operace \oplus očekávali:

- podprostory dané zobrazeními X , která jsou nenulová v nejvýše jednom, pevně zvoleném, bodě $\alpha \in I$, jsou uzavřené, vzájemně ortogonální podprostory $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha \subset \mathcal{H}_\oplus$, izomorfní \mathcal{H}_α ,
- rozklad libovolného vektoru $X \in \mathcal{H}_\oplus$ do těchto $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha$ je jednoznačný a daný ortogonálními projekcemi,
- druhá mocnina $\|X\|$ je součtem druhých mocnin norem těchto projekcí (zobecněná Parsevalova rovnost),
- z projekcí $X \in \mathcal{H}_\oplus$ na $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha$ je nejvýše spočetně mnoho nenulových a jejich součet konverguje k X (zobecněný Fourierův rozvoj),
- jestliže množina I je konečná, podmínka v (1) se stane triviálně splněnou a tato obecná konstrukce dá výsledek identický dříve zavedenému direktnímu součtu Hilbertových prostorů.

Zcela analogicky potom můžeme konstruovat direktní součet libovolného systému vzájemně ortogonálních uzavřených podprostorů \mathcal{H} jako podprostor \mathcal{H} .

Direktní součin operátorů

Myšlenku konstrukce direktního součtu prostorů $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha \in I}$ reflektuje i konstrukce direktního součtu sady operátorů $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ definovaných na nich (nebo na definičních oborech $D(T_\alpha) \subset \mathcal{H}_\alpha$). Abychom dodrželi podmínku definice (1), která zajišťuje dobrou definovanost skalárního součinu a normy na $\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{H}_\alpha$, je potřeba definiční obor $T_\oplus := \bigoplus_{\alpha \in I} T_\alpha$ vymezit předpisem

$$D(T_\oplus) := \left\{ X \in \mathcal{H}_\oplus \mid \forall \alpha \in I: X(\alpha) \in D(T_\alpha), \sum_{\alpha \in I} \|T_\alpha X(\alpha)\|^2 < \infty \right\}, \quad (4)$$

$$T_\oplus : D(T_\oplus) \rightarrow \mathcal{H}_\oplus : (T_\oplus X)(\alpha) = T_\alpha X(\alpha).$$

Kontrola absolutní konvergence je opět nadbytečná, je-li množina I konečná.

V komentáři k §7.4 se dozvídáme několik poznatků o této konstrukci, které pouze vypíšeme:

- Jsou-li T_α omezené pro všechna $\alpha \in I$ a zároveň $\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{\mathcal{H}_\alpha} < \infty$, potom T_\oplus je omezený a $\|T\| = \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{\mathcal{H}_\alpha}$.
- Jsou-li T_α hustě definované na \mathcal{H}_α pro všechna $\alpha \in I$, je také $T_\oplus \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\oplus)$. Za tohoto předpokladu také $T_\oplus^* = \bigoplus_{\alpha \in I} T_\alpha^*$.
- Jsou-li T_α pro všechna $\alpha \in I$ uzavřené, resp. symetrické, resp. samosdružené, resp. v podstatě samosdružené, platí tato vlastnost také pro T_\oplus .

Direktní součet operátorů souvisí s poněkud jednodušším konceptem algebraického součtu. Pro stejné $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ definujeme

$$T_\Sigma : \Sigma_{\alpha \in I} \widetilde{D(T_\alpha)} \rightarrow \mathcal{H}_\oplus \quad (5)$$

stejným předpisem jako T_\oplus . Rozdíl je v tom, že definičním oborem je pouze algebraický součet podprostorů \mathcal{H}_\oplus

$$\Sigma_{\alpha \in I} \widetilde{D(T_\alpha)} = \left(\bigcup_{\alpha \in I} \widetilde{D(T_\alpha)} \right)_{\text{lin}} \subset D(T_\oplus), \quad (6)$$

kde vlnka značí použití izometrie mezi komponentním prostorem \mathcal{H}_α a podprostorem $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha \subset \mathcal{H}_\oplus$.

Jsou-li T_α uzavřené, je T_\oplus uzavřený, ale pro I nekonečnou T_Σ obecně ne. Je však T_\oplus uzávěrem T_Σ . Obecněji pro neuzavřené, ale uzavíratelné operátory platí, že uzávěry T_\oplus a T_Σ se rovnají. Pro I konečné jsou obě konstrukce shodné.

Fockův prostor

Z minula máme stavový prostor N identických bosonů, resp. fermionů daný jako

$$P_N \mathcal{H}_N, \quad \mathcal{H}_N := \mathcal{H}_1^{\otimes N}, \quad (7)$$

kde $P = S$, resp. A . Označení \mathcal{H}_N , které pro dnešek přijmeme, je konzistentní s \mathcal{H}_1 . Dodefinujeme pro stručnost ještě

$$\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}, \quad S_0, A_0 := 1. \quad (8)$$

Tato volba je pro „prázdný tenzorový součin“ smysluplná v tom smyslu, že rovnost $\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_1$ s ní platí i pro $n = 0$. Fockův prostor pak zavedeme vzorcí

$$\mathcal{F}_P(\mathcal{H}_1) := \bigoplus_{N=0}^{\infty} P_N \mathcal{H}_N. \quad (9)$$

Všechny N -částicové podprostory, symetrizované či antisymetrizované, v něm tedy vystupují jako ortogonální podprostory, dále obsahuje lineární kombinace napříč různými počty částic a i jejich zobecnění na spočetně mnoho členů. Ortonormální bázi Fockova prostoru můžeme zkonstruovat v rámci tohoto vnoření $\mathcal{H}_N \rightarrow \mathcal{H}_N$ jednoduše sloučením ortonormálníchází jednotlivých \mathcal{H}_N . Odsud plyne důležitá poučka, že **pro separabilní jednočásticový prostor \mathcal{H}_1 jsou $\mathcal{F}_S(\mathcal{H}_1), \mathcal{F}_A(\mathcal{H}_1)$ separabilní také.**

Zavést můžeme také

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}_1) := \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N. \quad (10)$$

bez projekce na symetrický nebo antisymetrický podprostor. Ačkoli se nebude jednat o stavový prostor žádného druhu částic, je prakticky snazší v něm uvažovat některé operátory. Ty pak podle principu nerozlišitelnosti budou redukovány podprostory \mathcal{F}_S i \mathcal{F}_A a mohou tak zastoupit popis operátorů definovaných na nich. $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ umožňuje také přímočarý zápis báze pomocí tenzorových součinů jedné pevně zvolené báze \mathcal{H}_1 se sebou.

Zajímavý je prostor $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$ dimenze 1. Za ortonormální bázi v něm můžeme volit jednoduše číslo 1. Na prostoru \mathcal{H}_0 existuje jediný statistický operátor, kterým je identita, na Fockově prostoru mu odpovídá $I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$, což je ortogonální projektor na \mathcal{H}_0 . Takový stav reprezentuje nulový počet částic či *vakuum* s nulovým počtem částic. Odpovídající jednotkový vektor $(X(\alpha))_{n=0}^{\infty} = (1, 0_{\mathcal{H}_1}, 0_{\mathcal{H}_2}, \dots)$ můžeme označit Ω_0 . Na konkrétní volbě fáze zvoleného čísla stav vakua nezávisí, ale v lineárních kombinacích, například

$$\alpha\Omega_0 + \beta\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{H}_1, \quad (11)$$

začne být podstatná i relativní fáze mezi čísly α a β , například volby $\alpha = 1, \beta = \pm 1$ dávají pro $\|\varphi\| = 1$ dva vzájemně kolmé stavy z $\mathcal{F}_P(\mathcal{H}_1)$. Vakuum tedy neobsahuje žádnou kopii žádného stavu z \mathcal{H}_1 , ale je stále třeba jej brát jako jeden z bazových vektorů, který vstupuje do lineárních kombinací, ne jako nulu.

Rozšíření jednočásticových operátorů na Fockův prostor

Uvažujme libovolný operátor $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Pro $N \in \mathbb{N}_0$ uvažujme operátor

$$T_N^{\Sigma} = T \otimes I \otimes \dots \otimes I + I \otimes T \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes I \otimes \dots \otimes T. \quad (12)$$

Definičním oborem tohoto operátoru je hustý podprostor $D_T \otimes \dots \otimes D_T \subset \mathcal{H}_N$. Pokud T je omezené, můžeme rovnou uvažovat na místě \otimes operaci \otimes a dostat operátor definovaný na celém $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$. Pro $N = 0$ definujeme $T_0^{\Sigma} = 0_{\mathcal{H}_0}$. Tyto operátory jsou automaticky redukovány projektory S_N i A_N .

Vlastnosti husté definovanosti i reducibility operátory P_N se potom přenášejí i na operátor

$$T^{\Sigma} = \sum_{N=0}^{\infty} T_N^{\Sigma}. \quad (13)$$

(což je třeba v rychlosti ověřit) a hustě definovány jsou pak i jeho části v \mathcal{F}_S a v \mathcal{F}_A .

Pokud T je samosdružený operátor pro jednu částici, pak T_{Σ} (stejně jako jeho části v \mathcal{F}_P) je v podstatě samosdružený a jeho uzávěr může sloužit jako pozorovatelná na Fockově prostoru (opět redukována projektory na \mathcal{F}_P). Jedná se o operátor, který můžeme psát jako

$$\overline{T^{\Sigma}} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \overline{T_N^{\Sigma}} =: T^{\oplus}. \quad (14)$$

Díky konstrukci se jedná o *celkové* pozorovatelné: celkovou hybnost systému, celkovou energii apod.

Operátory počtu částic

Zajímavou volbou za T pro předchozí sekci jsou projektory. Uvědomme si nejprve, že ačkoli volba pozorovatelné $T = I$ pro jednočásticový systém vůbec nijak zajímavá, platí pro ni

$$I_N^{\Sigma} = I \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes \dots \otimes I = NI_{\mathcal{H}_N}, \quad (15)$$

takže pro součtový operátor máme

$$I^\oplus = \sum_{N=0}^{\infty} N E_{\mathcal{H}_N} \quad (16)$$

v silném smyslu (jedná se rovnou o spektrální rozklad). Protože N -částicové stavy jsou vlastními stavy příslušnými vlastní hodnotě N , jedná se o operátor celkového počtu částic. Jako zajímavost uvedme, že při přechodu od (15) k (16) operátory pozbyly omezenosti (v souladu s tím, že jejich normy nemají konečné supremum).

Podobně, pokud namísto I zvolíme ortogonální projektor E_φ na nějaký jednorozměrný podprostor \mathcal{H}_1 , dostáváme operátor s významem pozorovatelné počtu částic v odpovídajícím stavu a platí, že celkový počet částic je roven součtu počtu částic ve stavech prvků nějaké ON báze \mathcal{H}_1 , protože stejná relace platí mezi I_N^Σ a $(E_{\varphi_j})_N^\Sigma$ pro každé $N \in \mathbb{N}_0$.

Propagátory

Podobnou konstrukci jako pro pozorovatelné můžeme využít pro unitární operátory. Jediným rozdílem je, že je třeba začít s operátory

$$U_N^\Pi := U \otimes U \otimes \dots \otimes U, \quad U_0^\Pi := I \quad (17)$$

a z nich konstruovat (již stejně jako u pozorovatelných)

$$U^\Pi = \bigoplus_{N=0}^{\infty} U_N^\Pi = \overline{\sum_{N=0}^{\infty} U_N^\Pi}. \quad (18)$$

Tento operátor, jakožto direktní součet unitárních operátorů, je rovněž unitární. Snadno ověříme, že (4) jeho definiční obor oproti (1) nijak nezužuje, že skalární součin (2) se zachovává a že inverzí je $(U^{-1})^\Pi$. Je také redukován projektory na $\mathcal{F}_S(\mathcal{H}_1)$, $\mathcal{F}_A(\mathcal{H}_1)$.

Pokud za U dosadíme evoluční operátor jednočásticového systému, pak U^Π má význam vývoje soustavy neurčeného počtu takových identických, ale **neinteragujících** částic. Platí i více:

Věta (19.1.6). Nechť $U(\bullet)$ je SSUG na \mathcal{H}_1 , jejímž generátorem je $H \in \mathcal{L}_{sa}(\mathcal{H}_1)$. Pak $U^\Pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$: $t \mapsto (U(t))^\Pi$ je SSUG na $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ generovaná operátorem H^\oplus , podobně $U_P^\Pi: t \mapsto (U(t))_P^\Pi$ je SSUG na $\mathcal{F}_P(\mathcal{H}_1)$ generovaná H_P^\oplus pro $P \in \{S, A\}$.

Transformace $U(t) \mapsto U(t)^\Pi$ tedy jednočásticový propagátor zobrazí na propagátor vyhovující postulátu časového vývoje složeného systému a jeho odpovídající Hamiltonián je vskutku operátor celkové energie podle předchozí sekce.