

## Druhý postulát kvantové fyziky

Druhý postulát kvantové fyziky (o měření) vyslovíme ve formulaci naší učebnice, i když existují i obecnější způsoby. Budeme se však nejprve potřebovat v základu seznámit s jedním novým druhem matematického objektu, o němž se jeho formulace opírá.

### Projektorová míra

Uvažujme množinu  $X$  a nějakou  $\sigma$ -algebru jejích podmnožin  $\mathcal{A} \subset X$ . *Projektorovou mírou* budeme nazývat takové zobrazení  $E: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , které splňuje trojici axiomů,

1. pro každé  $M \in \mathcal{A}$  je  $E(M)$  projektorem na  $\mathcal{H}$ ,
2. pro každou nejvýše spočetnou posloupnost  $(M_n)_{n < n_0 \leq \omega}$  **disjunktních** množin z  $\mathcal{A}$  platí

$$E\left(\bigcup_{n < n_0} M_n\right) = \sum_{n < n_0} E(M_n), \quad (1)$$

3. obrazem celé množiny  $X$  je  $E(X) = I$ .

Projektorová míra je skutečně druhem množinové míry, s kuriózní vlastností, že množinám nepřisazuje čísla, ale operátory. Axiomy jsou vysloveny v minimální podobě, samozřejmě mnoho dalších vlastností plyne z nich, zejména:

- $E(\emptyset) = 0$ ,
- $M \subset N \Rightarrow E(M) \leq E(N)$ ,
- $E(M)$  a  $E(N)$  pro libovolné  $M, N \in \mathcal{A}$  komutují,
- $E(M \cap N) = E(M)E(N)$ ,  $E(M \cup N) = E(M) + E(N) - E(M \cap N)$ ,
- pro  $(M_n)_{n < \omega}$  neklesajících, resp. nerostoucích posloupností v  $\mathcal{A}$  platí

$$E\left(\bigcup_{n < \omega} M_n\right) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} E(M_n), \quad \text{resp.} \quad E\left(\bigcap_{n < \omega} M_n\right) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} E(M_n), \quad (2)$$

- pro každé  $\varphi \in \mathcal{H}$  má zobrazení  $\mu_\varphi(M) := (\varphi, E(M)\varphi)$  vlastnosti nezáporné a konečné míry na  $X$ .

Obzvláště **komutativita** libovolné dvojice projektorů z  $E(\bullet)$  je pozoruhodná. Možná se v tuto chvíli hodí připomenout několik základních vlastností projektorů (5.4.2–4), ze kterých poznatky výše plynou:

- Operátor  $E \in \mathcal{B}(H)$  je projektor  $\Leftrightarrow$  je hermitovský a  $E^2 = E$ ,
- $E \geq 0$ ,  $\text{Ran } E$  je vždy uzavřený podprostor,
- $E + F$  je projektor  $\Leftrightarrow E$  a  $F$  jsou ortogonální  $\Leftrightarrow \text{Ran } E \perp \text{Ran } F \Leftrightarrow EF = FE = 0$ ,
- $E - F$  je projektor  $\Leftrightarrow E \geq F \Leftrightarrow \text{Ran } E \supset \text{Ran } F \Leftrightarrow EF = FE = F$ ,
- $E - F$  je projektor  $\Rightarrow \text{Ran } F \oplus \text{Ran}(E - F) = \text{Ran } E$ ,
- $EF$  projektor  $\Leftrightarrow EF = FE \Leftrightarrow \text{Ran}(EF) = \text{Ran } E \cap \text{Ran } F$ ,
- každá monotónní posloupnost projektorů má *silnou* limitu  $E = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ . Pro její obor hodnot platí

$$\text{Ran } E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Ran } E_n \quad ((E_n) \text{ nerostoucí}), \quad \text{Ran } E = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Ran } E_n} \quad ((E_n) \text{ neklesající}). \quad (3)$$

## Příklad

Uvažujme *konečnou* množinu  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , pro niž pak můžeme za algebru  $\mathcal{A}$  brát celé  $2^X$ . Nechť  $(E_i)_{i=1}^n$  je systém vzájemně ortogonálních projektorů, jejichž součtem je identita. Pak pro  $M \subset X$  můžeme definovat

$$E(M) := \sum_{i=1}^n \chi_M(x_i) E_i, \quad (4)$$

tedy  $E(\{x_i, \dots, x_k\}) = E_i + \dots + E_k$ . Toto zobrazení má vlastnosti projektorové míry.

## Projektorová míra a rozklad jednotky

Projektorová míra má velice blízko k **rozkladu jednotky**, který jste potkali u spektrálního teorému. Konkrétně existuje jednoznačná korespondence mezi rozklady jednotky a projektorovými měrami nad  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}^1$ .

Rozklad jednotky z projektorové míry nad  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$  získáme jednoduše tak, že uvažujeme míry množin tvaru  $(-\infty, t)$ . Snadno se přesvědčíme o dodržení požadovaných vlastností:

- $t < u \Rightarrow (-\infty, t) \subset (-\infty, u) \Rightarrow E((-\infty, t)) \leq E((-\infty, u)) \Rightarrow E_t \leq E_u$ ,
- silná spojitost zprava: z  $t_n \rightarrow t_+$  lze vybrat nerostoucí posloupnost  $(\tilde{t}_n)$ , potom  $E((-\infty, \tilde{t}_n))$  je nerostoucí a podle (2) je  $E((-\infty, t))$  rovno její silné limitě,
- pro  $s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} E_t = I$ ,  $s\text{-}\lim_{t \rightarrow -\infty} E_t = 0$  volíme neomezenou rostoucí, resp. klesající posloupnost a opět převedeme na míru sjednocení nebo průniků  $(-\infty, t_n)$ , kterou je  $E(\mathbb{R}) = I$ , resp.  $E(\mathbb{R}) = 0$  podle (2) a axiomů.

Naopak, máme-li rozklad jednotky, projektorovou míru musíme dodefinovat i na jiných množinách než těch tvaru  $(-\infty, t)$ . Pro ostatní intervaly použijeme pravidla motivovaná tím, že kromě silné limity  $E_t$  v každém bodě  $u$  zprava (která je rovna  $E_u$ ) silná limita zleva existuje podle základních vlastností projektorů také, jen může být od  $E_u$  odlišná (ostře menší). Použijeme tento rozdíl k dodefinování  $E(\bullet)$  na zprava *otevřeném* intervalu,

$$E((-\infty, t)) := s\text{-}\lim_{u \rightarrow t-} E_u \stackrel{\text{ozn}}{=} E_{u-0}, \quad (5)$$

odkud již plyne, jak budeme postupovat u intervalů s libovolnými krají:

$$E(\langle a, b \rangle) := E_b - E_a, \quad E([a, b)) := E_{b-0} - E_a, \quad E(\langle a, b \rangle) := E_b - E_{a-0}, \quad E([a, b)) := E_{b-0} - E_{a-0}, \quad (6)$$

Jakmile jistou míru máme definovanu na množině všech intervalů v  $\mathbb{R}$  a splňuje jisté požadavky konzistence (je tzv. regulární funkcí intervalu), lze jednoznačně rozšířit na míru, definovanou na všech borelovských množinách. V tomto případě vzniklá míra splňuje požadavky na projektorovou míru.

Takto je projektorová míra  $E_A$  přiřazená každému samosdruženému operátoru  $A$  a často i obecněji, kde uslyšíme o projektorové míře, si tedy lze představit tuto konstrukci provedenou nad nějakým rozkladem jednotky. Projektorovou míru  $E_A$  nazýváme **spektrální mírou** operátoru  $A$ . Koncepce projektorové míry je však obecnější o to, že může být definovaná na jiných množinách než  $\mathbb{R}$  a jiných  $\sigma$ -algebrách než borelovských podmnožinách.

## Poznámka: zprava nebo zleva?

Ve skriptu 01FA2 se rozklad jednotky narozdíl od B–E–H definuje jako silně spojitý zleva. Zprava nebo zleva je **konvenční** volba, která nemá na teorii žádný dopad kromě toho, že v takovém případě bychom  $E_t$  přiřazovali intervalům  $(-\infty, t)$  namísto  $(-\infty, t]$ , definovali  $E_{a+0}$  a patřičně prohodili všechny role. Projektorová míra vyjde v obou případech stejně a pro rozklad jednotky je pouze podstatné, že v některých hodnotách může mít skok. Silná limita existuje z obou stran, jde jen o to, kterou z nich v případě nerovnosti přiřazujeme  $E_t$ . Zde volím konvenci naší učebnice pro konzistenci a pro zdůraznění, že obě volby jsou skutečně stejně dobré.

### Poznámka: proč silné limity?

Od začátku dnes pracujeme s omezenými operátory, proto může vyvstat otázka, proč limity neuvažujeme v topologii indukované operátorovou normou. Důvod je jednoduchý: monotónní posloupnost projektorů **nemůže** stejnoměrně konvergovat jiným způsobem, než být od jistého členu konstantní. Pro libovolné  $n' > n$  takové, že  $E_{n'} \geq E_n$ , je totiž  $E_{n'} - E_n$  nenulový projektor a má tedy normu 1. Proto Cauchyovu podmínku může splňovat jediné taková posloupnost, která je od jistého  $n$  dále konstantní, jiné posloupnosti stejnoměrnou limitu nemají.

Ostře rostoucí posloupnost projektorů není přitom nijak složité na prostorech nekonečné dimenze sestavit, například pro  $L^2(\mathbb{R})$  mají tuto vlastnost operátory násobení funkcemi  $\chi_{(0, t_n)}$  pro libovolnou rostoucí ostře posloupnost nezáporných čísel  $t_n$ . Silná limita ale existuje je jí násobení  $\chi_{(0, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n)}$ , jak se snadno z definice přesvědčíme.

## Druhý postulát kvantové fyziky

Se zdefinovanou projektorovou mírou můžeme již vyslovit druhý postulát v jeho funkční verzi.

**Postulát 2** (o měření).

- a) Možnými výsledky měření veličiny  $A$  jsou body spektra  $\sigma(A)$  operátoru  $A$ .
- b) Pravděpodobnost jevu, že na systému ve stavu  $W$  naměříme hodnotu pozorovatelné  $A$  ležící v borelovské množině  $\Delta \subset \mathbb{R}$ , je rovna

$$w(\Delta, A; W) = \text{Tr}(E_A(\Delta)W). \quad (7)$$

- c) Je-li pro *binární* měření výsledek experimentu kladný (je naměřeno, že hodnota veličiny  $A$  leží v  $\Delta$ ), pak stav systému po měření je popsán statistickým operátorem

$$W' = \frac{E_A(\Delta)WE_A(\Delta)}{\text{Tr}(E_A(\Delta)W)}. \quad (8)$$

Ve světle předchozího vidíme, že operátor  $A$  je ve druhých dvou bodech reprezentován pouze hodnotami své spektrální míry, a čísla z množiny  $\mathbb{R}$ , jimž (tj. jejichž intervalům a jiným množinám) jsou tyto projektory přiřazeny, vystupují jen jako jisté „označení“, který z projektorů se v bodu b) nebo c) realizoval. Smyslem části a) postulátu je stanovit *fyzikální* přiřazení těmto hodnotám ze spektra jako reálně naměřeným hodnotám odpovídající pozorovatelné *veličiny*  $A$ , které z měření vycházejí.

Pokud tato korespondence s experimentální realitou pro nás není esenciální, nebo pokud popisované měření není ve skutečnosti měřením operátoru přiřazeného nějaké veličině, jak se stát může, můžeme také uvažovat měření v jistém zobecněném smyslu, definované čistě projektorovou mírou nad obecnou množinou  $X$ , kde pak přebírá roli množiny možných výsledků měření tato množina, která vůbec nemusí být číselná. Dá se ukázat, že na **separabilním** prostoru pro *každou* projektorovou míru  $E(\bullet)$  lze najít samosdružený operátor takový, že množina projektorů, kterou dává jeho spektrální míra, se shoduje s oborem hodnot  $E(\bullet)$ . Důkaz (jedná se o adaptaci věty 14.1.4 ve světle lemmatu 14.1.6) nebudeme uvádět, protože jeho *aplikační* hodnota je nulová, ale pro účely teorie budeme tento poznatek brát jako oprávnění na separabilních prostorech brát tvrzení postulátu 2 za zcela zaměnitelné s vyjádřením pomocí projektorové míry  $E: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  na  $X$ .

### Příklad

Protože podle formulace výše bude projektorová míra v měření centrálním bodem, a pro měření pozorovatelné veličiny  $A$  se bude jednat o spektrální míru  $E_A$ , bude dobré se s tímto objektem blíže seznámit. To bude hlavně účelem příští hodiny, dnes zakončíme jen příkladem, jak může třeba vypadat.

Pro každou borelovskou množinu  $M \in \mathcal{B}^1$  uvažujme operátor násobení charakteristickou funkcí  $\chi_M(x): T_{\chi_M}$ . Z obecných vlastností  $T_f$  plyne, že se jedná o projektor (a  $T_f$  je projektorem právě tehdy, když  $\text{Ran } f \subset \{0, 1\}$ ).

Součet charakteristických funkcí disjunktních intervalů je charakteristická funkce sjednocení. Pokud uvažujeme spočetný systém  $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  disjunktních a  $N_n = \bigcup_{k < n} M_k$ ,  $N = \bigcup_{k < \omega} M_k$ , pak

$$\|T_{\chi_N} \psi - T_{\chi_{N_k}} \psi\|^2 = \int_{N \setminus N_k} \|\psi(x)\|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}), \quad (9)$$

což je symbolicky zapsáno

$$T_{\chi_N} = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} T_{\chi_{N_k}}. \quad (10)$$

Nakonec  $T_{\chi_{\mathbb{R}}}$  je identický operátor. Tedy  $E: \mathcal{B}^1 \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}): M \mapsto T_{\chi_M}$  splňuje všechny vlastnosti projektorové míry.

Tato projektorová míra představuje spektrální míru operátoru  $Q$ . Stačí se přesvědčit, že

$$E_t^{(Q)} := E_Q((-\infty, t)) = T_{\chi_{(-\infty, t)}} \quad (11)$$

splňuje vlastnosti konstrukce, kterou jste rozklad jednotky definovali (uzpůsobené pro pravou spojitost):

- $(Q - tI)(I - T_{\chi_{(-\infty, t)}}) \geq 0$ : operátor  $I - T_{\chi_{(-\infty, t)}}$  je roven  $T_{\chi_{(t, +\infty)}}$  a pak

$$(\psi, (Q - tI)T_{\chi_{(t, +\infty)}} \psi) = \int_{\mathbb{R}} (x - t)\chi_{(t, +\infty)}(x)|\psi(x)|^2 dx = \int_t^\infty (x - t)|\psi(x)|^2 dx \geq 0. \quad (12)$$

- $(Q - tI)T_{\chi_{(-\infty, t)}} \leq 0$ : analogicky,
- $\text{Ker}(Q - tI) \subset \text{Ran } T_{\chi_{(-\infty, t)}}$ : triviálně splněno.

Pokud nyní tuto míru použijeme ve druhém postulátu, ve výrazu  $\text{Tr}(E_Q(\Delta)W)$  pro čistý stav  $W = E_\psi$  poznáváme správně Bornovu pravděpodobnostní interpretaci vlnové funkce při měření polohy:

$$\text{Tr}(E_Q(\Delta)E_\psi) = (\psi, E_Q(\Delta)\psi) = (\psi(x), \chi_\Delta(x)\psi(x)) = \int_\Delta |\psi(x)|^2 dx. \quad (13)$$