

Hledání symetrických a samosdružených rozšíření

Připomeňme z minulé hodiny:

- indexy defektu $n_+(A), n_-(A)$ jako $\dim \text{Ker } (A - \lambda I)^* = \dim (\text{Ran } (A - \lambda I))^\perp$ pro nějaká $\lambda \in \mathbb{C}_-$, resp. $\lambda \in \mathbb{C}_+$, na konkrétní volbě hodnoty z dané poloroviny nezávisí, zejména $n_\pm(A) = \dim \text{Ker } (A^* \pm iI)$,
- $n_+(A) = n_-(A) = 0 \iff A$ v podstatě samosdružený, s požadavkem uzavřenosti $\iff A$ samosdružený.

Úlohou hledání symetrických rozšíření je tedy doplnit nějakým způsobem vektory do $\text{Ran } (A - \lambda I)$ a do $\text{Ran } (A - \lambda^* I)$, které zasahují do těchto ortogonálních doplňků, aby se jejich dimenze snižovala k nule. Postup, který získáme, dokáže rozeznat i maximální symetrické operátory, které již nejdou dále rozšiřovat, jak jsme viděli ručně dokázáno u snahy o nalezení operátoru hybnosti na polopřímce.

Zmíněnou úlohu převedeme na hledání unitárních (či alespoň izometrických) rozšíření izometrických operátorů, která je podstatně jednodušší, protože všechny zúčastněné operátory jsou omezené.

Cayleyho transformace

Klíčem k tomuto převodu je Cayleyho transformace komplexní roviny, vyjádřená vzájemně inverzními vzorci

$$z(x) = \frac{x - i}{x + i}, \quad x(z) = i \frac{1 + z}{1 - z}. \quad (1)$$

Má tu vlastnost, že bereme-li za x reálná čísla, $z(x)$ vychází na jednotkové kružnici (mimo bod 1). Naopak, body $z \in S^1$ ze zobrazují na $x(z) \in \mathbb{R}$, s výjimkou $z = 1$, pro které bychom dělili nulou.

Analogicky s touto vlastností definujeme podobnou transformaci pro operátory

$$C: A \mapsto (A - iI)(A + iI)^{-1}. \quad (2)$$

Podívejme se nejprve, jak C působí na *samosdružené* operátory. Pro ně i i $-i$ jsou regulární hodnoty a proto operátory $A - iI$ i $A + iI$ jsou bijekce \mathcal{H} na \mathcal{H} . Také $C(A)$ je tedy bijekce $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ a z rovnice

$$\|(A - iI)\psi\| = \sqrt{\|A\psi\|^2 + \|\psi\|^2} = \|(A + iI)\psi\| \quad (3)$$

plyne dosazením $\psi = (A + iI)^{-1}\varphi$ také

$$\|C(A)\varphi\| = \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}, \quad (4)$$

což je ekvivalentní tomu, že $C(A)$ je unitární. C tedy zobrazuje samosdružené operátory na unitární.

Unitární operátory získané touto cestou sdílejí vlastnost, že číslo 1 není žádného z nich vlastní hodnotou – to plyne z nesplnitelnosti rovnice $(A - iI)\varphi = (A + iI)\varphi$ mimo $\varphi = 0$. Ukážeme, že naopak každý operátor $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ splňující $1 \notin \sigma_p(U)$ je obrazem nějakého samosdruženého operátoru přes C . Označme takovou množinu $\mathcal{U}_1(\mathcal{H})$. Rovněž inspirování (1) hledejme takový operátor jako

$$A_U := i(I + U)(I - U)^{-1}. \quad (5)$$

Je zřejmé, že $I - U$ je díky podmínce $1 \notin \sigma_p(U)$ pro $U \in \mathcal{U}_1(\mathcal{H})$ invertibilní, takže tato definice *dává smysl*. Také se jedná o hustě definovaný operátor, protože pro unitární operátor U , stejně jako pro každý normální, platí

$$\lambda \in \sigma_p(U) \iff \overline{\text{Ran } (U - \lambda I)} \neq \mathcal{H} \quad (6)$$

(bez normality by pravou podmínku mohly splňovat i body z reziduálního spektra), a pro $\lambda = 1$ odsud

$$1 \notin \sigma_p(U) \implies \overline{\text{Ran } (U - I)} = \mathcal{H}, \quad (7)$$

což značí hustou definovanost A_U , protože A_U je definovaný právě pro ta ψ , která patří do oboru hodnot $I - U$.

Jako třetí podmínku ověříme symetrii: nechť $\varphi, \psi \in D(A_U) = \text{Ran}(I - U)$. Lze tedy psát $\varphi = (I - U)\chi, \psi = (I - U)\eta$ pro nějaká $\eta, \chi \in \mathcal{H}$. Potom

$$\begin{aligned} (\varphi, A_U \psi) &= ((I - U)\chi, A_U(I - U)\eta) = ((I - U)\chi, i(I + U)\eta) = i((\chi, \eta) - (U\chi, \eta) + (\chi, U\eta) - (U\chi, U\eta)) \\ &= i((\chi, U\eta) - (U\chi, \eta)) \end{aligned} \quad (8)$$

a rozpis $(A_U \varphi, \psi)$ vychází stejně.

Zbývá tedy samosdruženost A_U a protože symetrie dává $A_U \subset A_U^*$, postačí pro ni $D(A_U^*) \subset D(A_U)$. Jestliže $\varphi \in D(A_U^*)$, pak

$$\begin{aligned} \exists \eta \in \mathcal{H} : \forall \psi \in D(A_U) = \text{Ran}(I - U) : (\varphi, A_U \psi) &= (\eta, \psi) \\ \exists \eta \in \mathcal{H} : \forall \chi \in \mathcal{H} : (\varphi, A_U(I - U)\chi) &= (\eta, (I - U)\chi) \\ &: (\varphi, i(I + U)\chi) = (\eta, (I - U)\chi) \\ &: i((I + U^*)\varphi, \chi) = ((I - U^*)\eta, \chi) \\ &: (-i(I + U^*)\varphi - (I - U^*)\eta, \chi) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Z poslední linky plyne $(I + U^*)\varphi = i(I - U^*)\eta$. Chceme ukázat, že odsud lze odvodit $\varphi \in D(A_U) = \text{Ran}(I - U)$, tedy φ musí jít vyjádřit jako obraz nějakého vektoru při $I - U$. Když získanou rovnost patřičně upravíme,

$$\begin{aligned} (I + U^*)\varphi &= i(I - U^*)\eta & / U \cdot \\ (U + I)\varphi &= i(U - I)\eta & / + (I - U)\varphi \\ 2I\varphi &= (I - U)(-i\eta + \varphi), & / \div 2 \\ \varphi &= (I - U)\frac{\varphi - i\eta}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

dostaneme právě takové vyjádření. Vektor φ je v něm zapsán „pomocí sám sebe“, ale to ničemu nevádí – stačí, že z předpokladu φ i η existují a dohromady dávají vektor, jehož je φ obrazem při $I - U$, což jsme přesně potřebovali.

Můžeme tedy psát:

$$C : \mathcal{L}_{\text{sa}} \rightarrow \mathcal{U}_1(\mathcal{H}) : A \mapsto (A - iI)(A + iI)^{-1} \text{ bijekce, } C^{-1} : U \mapsto i(I + U)(I - U)^{-1}. \quad (11)$$

Nesamosdružené operátory

Předpis (2) můžeme aplikovat i na nesamosdružené symetrické operátory. Jejich obraz pochopitelně nebude unitární, ale co o něm říci lze?

Stejně jako pro samosdružené operátory i pro symetrické jsou $A + iI$ a $A - iI$ invertibilní, ale jejich obor hodnot je menší než \mathcal{H} . Definičním oborem $C(A)$ pro A symetrický bude $\text{Ran}(A + iI)$, protože vektor získaný aplikací $(A + iI)^{-1}$ na něj bude zaručeně také v definičním oboru $A - iI$. Protože touto operací dokážeme dosáhnout *každého* vektoru z $D(A - iI)$, oborem hodnot $C(A)$ bude podobně $\text{Ran}(A - iI)$.

Operátor $C(A)$ tedy zobrazuje prostor $\text{Ran}(A + iI)$ bijektivně na $\text{Ran}(A - iI)$. Na tomto oboru splňuje $\|C(A)\psi\| = \|\psi\|$. Pokud ještě operátor A je *uzavřený* symetrický, tedy $A \in \mathcal{L}_{\text{cs}}(\mathcal{H})$, je $C(A)$ **izometrický** (to je podmínka čistě názvoslovního charakteru, definice izometrického V vyžaduje $D(V)$ uzavřený). Jestliže není, můžeme $C(A)$ na izometrii jednoznačně rozšířit uzávěrem, stejně jako u jiných omezených operátorů to nebudeme považovat za překážku.

Zde si vzpomeneme na definici indexů defektu: počáteční i cílový prostor izometrie $C(A)$ jsou uzavřené podprostory v \mathcal{H} , pro něž hodnoty $n_{\pm}(A)$ vystupují v roli kodimenze! To znamená, že existuje podprostor K_- dimenze $n_-(A)$, který je ortogonální na $D(C(A))$ a tedy $C(A)$ na něm není definován, a podobně podprostor K_+ dimenze $n_+(A)$ kolmý na $\text{Ran } C(A)$.

Zopakujeme-li argumentaci použitou pro samosdružené operátory, ukážeme snadno, že zobrazení (11) opět zprostředkovávají bijekci, tentokrát mezi $\mathcal{L}_{\text{cs}}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{V}_1(\mathcal{H})$ – množinou všech izometrií mezi uzavřenými podprostory \mathcal{H} takových, že $\text{Ran}(V - I) = \mathcal{H}$.

Hledání symetrických rozšíření

Klíčem k hledání izometrických (resp. unitárních) rozšíření $C(A)$, a tím uzavřených symetrických (resp. samosdružených) rozšíření A skrz C^{-1} , je tedy možnost dodefinování $C(A)$ na některých vektorech z K_- . Aby potom i při lineárním rozšíření zůstala zachována podmínka izometrie, musí obrazy, které jim přiřadíme, patřit naopak do K_+ . Spojitým rozšířením potom dostaneme izometrické rozšíření $\tilde{V} = C(\tilde{A})$.

Formálně řečeno volíme podprostory $G_- \subset K_- = (\text{Ran } (A + iI))^\perp = \text{Ker } (A^* - iI)$ a $G_+ \subset K_+ = (\text{Ran } (A - iI))^\perp = \text{Ker } (A^* + iI)$ takové, aby $\dim G_+ = \dim G_- > 0$, a izometrické zobrazení $V_G: G_- \rightarrow G_+$, jehož pomocí $V = C(A)$ rozšíříme na $D(V) \oplus G_-$ předpisem

$$\tilde{V}\psi = V\varphi + V_G\chi, \quad \text{kde } \psi = \varphi + \chi, \varphi \in D(V), \chi \in G_-, \quad (12)$$

čímž vznikne izometrie $D(V) \oplus G_-$ na $\text{Ran } V \oplus G_+$. Operátor \tilde{A} pak získáme jako $C^{-1}(\tilde{V})$. Je-li dimenze d prostorů G_\pm konečná, pak indexy defektu operátoru \tilde{A} jsou rovny

$$n_\pm(\tilde{A}) = n_\pm(A) - d \quad (13)$$

(věta 8.2.5, učebnice používá pro G_\pm opačnou znaménkovou konvenci).

Odsud je evidentní, že

1. Nutnou podmínkou, abychom rovnicí (13) mohli dospět k indexům defektu $(0, 0)$, tedy k samosdruženému operátoru \tilde{A} , je, že indexy defektu $n_+(A)$ a $n_-(A)$ jsou si rovny.
2. Je-li jeden z indexů defektu $A \in \mathcal{L}_{\text{cs}}(\mathcal{H})$ nulový a druhý ne, pak A je maximální symetrický operátor, který samosdružené rozšíření nemá.
3. Samosdružených rozšíření libovolného symetrického operátoru A , pro něž $n_+(A) = n_-(A) > 0$, je nekonečně mnoho různých – stejně jako izometrií K_- na K_+ .
4. Je-li $n_+(A) = n_-(A) = n \in \mathbb{N}$, každé maximální symetrické rozšíření A je samosdružené a je vzájemně jednoznačně určeno unitární maticí $M \in \text{U}(n)$, představující zobrazení K_- na K_+ v nějakých jejich pevně zvolených ortonormálních bázích.
5. Jsou-li $n_+(A)$ i $n_-(A)$ nekonečné (a rovná-li se kardinalita defektních prostorů), lze dospět k maximálním symetrickým rozšířením i samosdruženým i nesamosdruženým. Pro podprostory K_- , K_+ stejné, ale nekonečné dimenze totiž existují izometrie, které jsou bijektivní, i takové, které nejsou surjektivní.

Je praktické si na závěr přeformulovat rozšíření (12) do tvaru platného přímo pro operátory A , \tilde{A} , abychom nemuseli pouze za tímto účelem pokaždé konstruovat Cayleyho obraz a po provedení rozšíření V na \tilde{V} jej transformovat zpět. Tuto úlohu plní (druhá) von Neumannova formule (věta 8.3.2): pro každé ψ z definičního oboru rozšíření $\tilde{A} \supset A$ existuje právě jedno $\varphi \in D(A)$ a $\eta \in G_-$ taková, že $\psi = \varphi + (I - V_G)\eta$. Potom

$$\tilde{A}\psi = A\varphi + i(I + V_G)\eta. \quad (14)$$

Toto dává i vyjádření pro $D(\tilde{A})$:

$$D(\tilde{A}) = D(A) \oplus (I - V_G)G_- \quad (15)$$

(pozor na to, že „přidaný“ podprostor není roven G_- a není ani ortogonální na $D(A)$, jako platilo pro rozšiřování $V - D(A)$ ostatně má ortogonální doplněk prázdný).

Na cvičení uvidíme, jak tento celý proces může v praxi vypadat.

Poznámka: Zdánlivě se lze obejít bez konstrukce operátoru A^* , protože jediné, k čemu jej používáme, je nalezení prostorů $\text{Ker } (A^* \pm iI)$, které jdou také hledat jako ortogonální doplňky $\text{Ran } (A \mp iI)$. Stačí si však napsat odpovídající vzorec, abychom seznali, že se jedná o zcela srovnatelné množství práce. Jakmile máme předpis A^* v ruce, je nalezení jeho jádra s přidaným násobkem identity již přímočarý výpočet.

Shrnutí postupu

Kompletní „kuchařka“ hledání symetrických nebo samosdružených rozšíření symetrického operátoru A :

1. Zkonstruujeme sdružený operátor A^* .
2. Najdeme jeho defektní prostory $K_+ = \text{Ker}(A^* + iI)$, $K_- = \text{Ker}(A^* - iI)$ a jejich dimenze $n_{\pm}(A) = \dim K_{\pm}$.
3. Určíme, která nastává z možností:
 - Jsou-li oba indexy defektu nulové, A je samosdružený (pokud $A = \bar{A}$) nebo v podstatě samosdružený,
 - je-li nulový jeden index defektu a druhý ne, \bar{A} je maximální symetrický operátor, nesamosdružený,
 - jestliže oba indexy defektu jsou nenulové, pokračujeme v postupu.
4. Zvolíme podprostory G_+ a G_- prostorů K_+ , K_- splňující $\dim G_+ = \dim G_-$.
5. Zvolíme nějakou izometrii $V: G_- \rightarrow G_+$, v případě konečných dimenzí popsanou unitární maticí.
6. Nový operátor \tilde{A}_V definujeme na oboru

$$D(\tilde{A}_V) = \{\psi + \varphi - V\varphi \mid \psi \in D(A), \varphi \in G_-\} \quad (16)$$

předpisem

$$A_V(\psi + \varphi - V\varphi) = A\psi + i(\varphi + V\varphi). \quad (17)$$

7. Nové indexy defektu $n_{\pm}(\tilde{A}_V)$ jsou dimenze ortogonálních doplňků G_{\pm} do K_{\pm} , v případě $\dim G_{\pm} = d$ je $n_{\pm}(\tilde{A}_V) = n_{\pm}(A) - d$. Pokud se oba vynulovaly, získáváme (případným uzávěrem) samosdružený operátor.

Dodatek: První von Neumannova formule

Neméně důležitá než druhá von Neumannova formule je i první – v dnešním výkladu jsme ji nepotřebovali, ale může se hodit v budoucnu. Mluví, podobně jako druhá o symetrických rozšířeních, o definičním oboru, tentokrát však sdruženého operátoru A^* :

Věta (První von Neumannova formule, 8.1.8). Nechť A je uzavřený symetrický operátor. Potom pro každé $\psi \in D(A^*)$ existuje jednoznačný rozklad $\psi = \psi_0 + \psi_+ + \psi_-$, kde $\psi_0 \in D(A)$, $\psi_+ \in \text{Ker}(A^* + iI)$, $\psi_- \in \text{Ker}(A^* - iI)$.

O prostorech $K_{\pm} = \text{Ker}(A^* \pm iI)$ víme, že jsou ortogonální, ale nejsou kolmé na $D(A)$ (nemá ortogonální doplněk). V rozkladu analogickém (15),

$$D(A^*) = D(A) \oplus K_- \oplus K_+, \quad (18)$$

tedy stejně jako dříve vyjadřujeme jen jednoznačnost součtu, ne jeho ortogonalitu. Plyne odsud ovšem závěr o dimenzi ne ortogonálního doplňku, ale *faktorprostoru*:

$$\dim(D(A^*)/D(A)) = n_+(A) + n_-(A). \quad (19)$$

Někdy se může podařit tento faktorprostor parametrizovat a získat tak částečnou informaci o hodnotách n_{\pm} . Zajímavý je potom nový pohled na (15), že z „chybějících“ vektorů z prostoru $K_- \oplus K_+$ (zde již skutečně direktní součet) doplňujeme jistým způsobem vybrané, zrovna ty tvaru $\eta - V_G\eta$, což zachová symetrii. Různá rozšíření přidají do $D(A)$ různé vektory, ale nikdy ne více než $\min\{n_-(A) + n_+(A)\}$ lineárně nezávislých, tedy nejvýše polovinu hodnoty (19).