

Příklad 1: Pro jednotkové vektory $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ napište předpis, jak působí projektory E_φ, E_ψ na obecný vektor $x \in \mathcal{H}$. Přesvědčte se pomocí tohoto zápisu o obecné platnosti vztahu $\text{Tr}(E_\varphi E_\psi) = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2$.

Příklad 2: Ukažte, že vektory $\psi_n := \chi_{(n, n+1]}$ jsou v $L^2(\mathbb{R})$ jednotkové, patří do $D(Q)$, ale jejich normy $\|Q\psi_n\|$ rostou nade všechny meze. Jak byste sestrojovali posloupnost se stejnými vlastnostmi pro P ?

Příklad 3: V předchozím příkladě posloupnost $(\psi_n)_{n=0}^\infty$ nekonvergovala. Najděte pro Q *konvergentní* posloupnost vektorů (ne nutně jednotkových) z $D(Q)$, pro které tato posloupnost norem také diverguje.

Návod: zvolte si nějaký vektor z $L^2(\mathbb{R})$, který dodatečnou podmínku definičního oboru Q porušuje, a hledejte vhodnou posloupnost konvergující k němu.

Příklad 4: Ukažte, že operátory P_α na úsečce (ve značení z přednášky), dejme tomu $\langle a, b \rangle = \langle 0, 2\pi \rangle$, mají – narozdíl od hybnosti volné částice na přímce – bodové spektrum.

Příklad 5: Zkoumejte diskrétní verzi operátoru polohy pro částice existující na kvantizované přímce, tj. $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$, působící jako $Q_{\mathbb{Z}}: (\psi_m)_{m \in \mathbb{Z}} \mapsto (m\psi_m)_{m \in \mathbb{Z}}$. Napište jeho přirozený definiční obor a ukažte, že je na něm samosdružený.

Návod: Viz řešený příklad 7.1.6. Základní myšlenkou je, podobně jako jsme použili u P , operátor $Q_{\mathbb{Z}}$ vymezit na $\dot{Q}_{\mathbb{Z}}$ definované na posloupnostech s kompaktním nosičem, a ukázat, že $\dot{Q}_{\mathbb{Z}}^* = Q_{\mathbb{Z}}$.