

Kompaktní, Hilbert–Schmidtovy a jaderné operátory

Jaderné operátory jsou zvláštní druh *kompaktních* operátorů, připomeneme tedy nejprve, co víme o nich. Všechny poučky případně můžeme najít v B–E–H kap. 6.1 – 6.2.

1. Kompaktní operátory $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ jsou z definice podmnožinou *omezených* operátorů na Hilbertově prostoru.
2. Operátor C je kompaktní \Leftrightarrow zobrazuje omezené posloupnosti na posloupnosti s hromadným bodem.
3. Ekvivalentně: operátor C je kompaktní \Leftrightarrow zobrazuje slabě konvergentní posloupnosti na konvergentní.
4. Množina $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ je podprostorem v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a je uzavřená vzhledem ke *stejněměrné* topologii.
5. Množina $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ tvoří v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ **oboustranný $*$ -ideál**: pro C kompaktní a $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jsou BC, CB, C^* také kompaktní operátory.
6. Spektrum kompaktních operátorů na *nekonečněrozměrném* \mathcal{H} vždy obsahuje nulu, která může a nemusí být vlastní hodnotou. Všechny *ostatní* body $\sigma(C), C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ jsou **vlastní hodnoty konečné násobnosti** a nemají žádný jiný hromadný bod než (případně) nulu.
7. Množina vlastních hodnot $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ je nejvýše spočetná.
8. Omezený operátor je kompaktní právě tehdy, když existuje posloupnost *konečněrozměrných* operátorů, která k němu konverguje podle normy (tj. stejnoměrně).
9. Každý *normální* kompaktní operátor má **čistě bodové spektrum**: existuje ortonormální báze \mathcal{H} tvořená pouze jeho vlastními vektory.

Kompaktní operátory jsou tedy stejnoměrným uzávěrem množiny konečněrozměrných operátorů $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, daných definicí

$$B \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ran} B < \infty. \quad (1)$$

Pro konečněrozměrné prostory je každý operátor konečněrozměrný a tedy řetězec inkluzí

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (2)$$

kolabuje na rovnosti. Pro nekonečněrozměrné prostory existují omezené operátory, které nejsou kompaktní – je to zejména příklad jednotkového operátoru! – a existují kompaktní operátory, které nejsou konečněrozměrné.

Doplníme větu, kterou jste pravděpodobně neslyšeli:

Věta. Kompaktnost je postačující podmínkou k zavedení **singulárního rozkladu** operátoru $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tedy: pro každý $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ existují ortonormální báze $(e_n)_{n < \dim \mathcal{H}}, (f_n)_{n < \dim \mathcal{H}}$ a nerostoucí zobecněná posloupnost $\mu_n \in \langle 0, \infty \rangle \forall n < \dim \mathcal{H}$ takové, že

$$\forall x \in \mathcal{H} : Cx = \sum_{n < \dim \mathcal{H}} \mu_n (e_n, x) f_n. \quad (3)$$

Naopak, svými bázemi $(e_n)_{n < \dim \mathcal{H}}, (f_n)_{n < \dim \mathcal{H}}$ a posloupností $(\mu_n)_{n < \dim \mathcal{H}}$ je operátor $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ plně určen.

Důkaz je založen na *polárním rozkladu* omezeného operátoru $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (kterou jste doufám slyšeli!):

Věta (5.5.9). Ke každému $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existuje právě jedna parciální izometrie W_B na \mathcal{H} taková, že $B = W_B|B|$ a $\operatorname{Ker} W_B = \operatorname{Ker} B$. Platí $\operatorname{Ran} W_B = \overline{\operatorname{Ran} B}$.

Tu dokazovat nebudeme a přejdeme k důkazu singulárního rozkladu.

Důkaz. Uvažujme absolutní hodnotu $|C| = \sqrt{C^*C}$ a parciální izometrii W_C takovou, že $W_C|C| = C$. Operátor $|C|$ je také kompaktní, protože $|C| = W_C^*C$ a jestliže obraz slabě konvergentní posloupnosti $(x_n)_{n=0}^\infty$ při C je konvergentní posloupnost $(Cx_n)_{n=0}^\infty \rightarrow y$, pak obraz při $|C|$ je $(W_C^*Cx_n)_{n=0}^\infty \rightarrow W_C^*y$.

Vlastní čísla $|C|$, o kterých víme, že nenulových je nejvýše spočetně mnoho a mají konečnou násobnost, navíc jsou díky pozitivitě $|C|$ reálná a nezáporná, můžeme díky těmto vlastnostem seřadit do neklesající posloupnosti s opakováním $(\mu_n)_{n < \dim \mathcal{H}} : m < n < \dim \mathcal{H} \Rightarrow \mu_m \geq \mu_n \geq 0$. Pro operátory na neseparabilním \mathcal{H} tato posloupnost po nejvýše spočetném počtu prvků přejde na konstantní nulu.

Absolutní hodnota $|C|$ je již hermitovský operátor, odsud normální a platí pro něj Hilbert–Schmidtova věta. Díky ní můžeme ke vlastním číslům $(\mu_n)_{n < \dim \mathcal{H}}$ najít vlastní vektory $(e_n)_{n < \dim \mathcal{H}}$, které splňují $|C|e_n = \mu_n e_n$ a tvoří ortonormální bázi \mathcal{H} .

Rozložíme nyní obecný prvek $x \in \mathcal{H}$ jako

$$x = \sum_{n < \dim \mathcal{H}} (e_n, x) e_n, \quad (4)$$

potom akce $|C|$ na x dává

$$|C|x = \sum_{n < \dim \mathcal{H}} (e_n, x) |C|e_n = \sum_{n < \dim \mathcal{H}} \mu_n (e_n, x) e_n. \quad (5)$$

Nechť $n_0 = \min \{n < \dim \mathcal{H} \mid \mu_n = 0\}$. Pak vektory $(e_n)_{n < n_0}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\text{Ran } |C| = (\text{Ker } |C|)^\perp$ a tedy počátečního prostoru parciální izometrie W_C . Jejich obrazy $(W_C e_n)_{n < n_0}$ pak tvoří ortonormální bázi konečného prostoru, kterým je $\overline{\text{Ran } C}$. Protože platí

$$f_n = W e_n, \quad |C|e_n = \mu_n e_n, \quad \mu_n > 0 \quad \forall n < n_0, \quad (6)$$

lze také psát

$$e_n = \mu_n^{-1} |C|e_n, \quad f_n = \mu_n^{-1} W |C|e_n = \mu_n^{-1} C e_n, \quad \forall n < n_0. \quad (7)$$

Odsud již plyne

$$Cx = \sum_{n < \dim \mathcal{H}} (e_n, x) C e_n = \sum_{n < n_0} (e_n, x) C e_n = \sum_{n < n_0} (e_n, x) \mu_n f_n = \sum_{n < \dim \mathcal{H}} \mu_n (e_n, x) f_n \quad (8)$$

po doplnění ON báze $(f_n)_{n < n_0}$ prostoru $\overline{\text{Ran } C}$ na ON bázi $(f_n)_{n < \dim \mathcal{H}}$ celého \mathcal{H} libovolným způsobem. \square

Nenulová čísla v posloupnosti $(\mu_n)_{n < \dim \mathcal{H}}$, tvořící neklesající posloupnost $(\mu_n)_{n < n_0}$, se nazývají **singulární hodnoty** operátoru C .

Mezi jejich podstatné vlastnosti patří:

- Jestliže operátor $C \in \mathcal{F}_\infty$ je pozitivní, pak pojem singulárních hodnot splývá s pojmem (nenulových) vlastních hodnot a rozvoj (3) nahrazuje (5). Ovšem již pro hermitovské operátory, které mají některé vlastní hodnoty záporné, nastává rozdíl.
- Předchozí bod občas potkáváme v Diracově značení. Uvažujme pro tuto chvíli pouze konečnou dimenzi. Kde rozklad C do vlastních podprostorů má tvar

$$C = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad \sigma = \{\lambda_i\}_i \quad (9)$$

a je podmíněn diagonalizovatelností matice C , singulární rozklad by odpovídal

$$C = \sum_i \mu_i |\varphi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad \{\mu_i\}_i = \sigma(\sqrt{C^* C}) \subset \langle 0, \infty) \quad (10)$$

a v prostoru matic existuje vždy (dokonce lze hledat i pro obdélníkové matice). Maticově lze psát ve tvaru

$$C = VDW, \quad (11)$$

kde D je diagonální a V, W unitární, připomínajícím předpis diagonalizace. Narozdíl od ní však V a W nemusejí být vzájemně sdružené, zato D je vymezen na nezáporná čísla na diagonále. Pro pozitivně semi-definitní C se všechny tyto rozdíly stírají.

- Nejvyšší singulární hodnota, μ_0 , je rovna operátorové normě $\|C\|$. O tom se můžeme přesvědčit například tak, že je z definice rovna spektrálnímu poloměru $\|C\|$ (je jednoduše jeho nejvyšším vlastním číslem). Ovšem pro omezený normální operátor je spektrální poloměr a norma totéž (5.3.3) a stejně tak se rovnají normy $\|C\|$ a $\|C\|$, protože $\|Cx\| = \|C|x\|$ pro každé $x \in \mathcal{H}$.

Hilbert–Schmidtovy operátory

Tato třída, označovaná \mathcal{S}_2 , byla extenzivně zkoumána na Funkcionální analýze, obzvláště z důvodu své relevance pro integrální operátory. Stejně jako u \mathcal{S}_∞ se jedná o oboustranný ideál v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, tj. jakmile omezený operátor vynásobíme Hilbert–Schmidtovým, výsledek je již také H–S, a $B \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H}) \Leftrightarrow B^* \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$.

Podmínka pro náležitost operátoru B do \mathcal{S}_2 je zapisována

$$\sum_{j < \dim \mathcal{H}} \|Be_j\|^2 < \infty, \quad (12)$$

kde $(e_j)_{j < \dim \mathcal{H}}$ je ortonormální báze \mathcal{H} . Ukazuje se významné tvrzení, že hodnota na levé straně nerovnosti na konkrétní volbě báze *nezávisí*. To umožňuje prostoru \mathcal{S}_2 dát normu

$$B \in \mathcal{S}_2 : \|B\|_2 := \sqrt{\sum_{j < \dim \mathcal{H}} \|Be_j\|^2}, \quad \|B\|_2 \geq \|B\| \quad (13)$$

indukovanou skalárním součinem

$$B, C \in \mathcal{S}_2 : (B, C)_2 := \sum_{j < \dim \mathcal{H}} (Be_j, Ce_j) = \sum_{j < \dim \mathcal{H}} (e_j, B^*Ce_j) \quad (14)$$

počopitelně také na bázi nezávislým (lze získat z normy polarizací). \mathcal{S}_2 je vůči této normě úplný a stává se tak Hilbertovým prostorem. (Pozor, vůči operátorové normě úplný není, to je jen \mathcal{S}_∞ .)

O této normě si uvedeme dvě zajímavosti, které nemusejí být na první pohled patrné:

- V dané bázi můžeme rozložit také sčítanec sumy (13) Parsevalovou rovností a získat tím dvojnou sumu

$$\|B\|_2^2 = \sum_{j < \dim \mathcal{H}} \sum_{k < \dim \mathcal{H}} |(e_k, Be_j)|^2, \quad (15)$$

podobně pro skalární součin

$$(B, C)_2 = \sum_{j < \dim \mathcal{H}} \sum_{k < \dim \mathcal{H}} (e_k, Be_j)^*(e_k, Ce_j). \quad (16)$$

Význam těchto vzorců je evidentní v *prostoru matic*, kde se jedná o normu, resp. skalární součin dvou matic, bráných po prvcích jako vektory délky $(\dim \mathcal{H})^2$. Užívá se též názvu *Frobeniova norma*.

- Každý Hilbert–Schmidtův operátor B je kompaktní, $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_\infty$. Zvolme bázi $(e_j)_{j < \dim \mathcal{H}}$ z jeho kanonického tvaru (3). S touto volbou

$$\|B\|_2 = \sqrt{\sum_{j < \dim \mathcal{H}} \|\mu_j f_j\|^2} = \sqrt{\sum_{j < \dim \mathcal{H}} |\mu_j|^2} = \|(\mu_j)_{j < \dim \mathcal{H}}\|_2. \quad (17)$$

Kompaktní operátor je tedy Hilbert–Schmidtův právě tehdy, jestliže posloupnost jeho singulárních hodnot (doplňená o nuly) je prvkem $\ell^2(\hat{\dim} \mathcal{H})$. Spolu s poznatkem, že norma v $\ell^\infty(\hat{\dim} \mathcal{H})$ je supremum a že pro kompaktní operátor

$$\|(\mu_j)_{j < \dim \mathcal{H}}\|_\infty = \sup_{j < \dim \mathcal{H}} |\mu_j| = \max_{j < \dim \mathcal{H}} \mu_j = \mu_0 = \|B\| < \infty \quad (18)$$

to dává význam původu indexů 2, resp. ∞ u tříd \mathcal{S}_p , a návod, jak definovat obecnou \mathcal{S}_p , $1 \leq p \leq \infty$.

Využijeme také poznatek o integrálních operátorech. Ocituje je jej vymezený pro jednoduchost na $L^2(\mathbb{R})$.

Věta (6.3.6). Operátor $B \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ je Hilbert–Schmidtův právě tehdy, existuje-li funkce $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$ taková, že pro všechna $f \in L^2(\mathbb{R})$ platí

$$(Bf)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y)f(y) dy. \quad (19)$$

Za těchto předpokladů platí také rovnost $\|B\|_2 = \|K\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.

Jaderné operátory

Jaderné operátory, či **operátory se stopou**, jsou přirozeným dalším krokem v této hierarchii.

Definice. Operátor $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazveme jaderným, jestliže existuje báze $(e_n)_{n < \dim \mathcal{H}}$, v níž

$$\sum_{n < \dim \mathcal{H}} (e_n, |B|e_n) < \infty \quad (20)$$

Množinu všech jaderných operátorů na \mathcal{H} značíme $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$.

Není tolik překvapivé, že ani výraz objevující se na levé straně této nerovnosti není na volbě báze závislý, uvědomíme-li si, že v důsledku positivity $|B|$ lze psát jako

$$\sum_{n < \dim \mathcal{H}} (\sqrt{|B|}e_n, \sqrt{|B|}e_n) = \sum_{n < \dim \mathcal{H}} \|\sqrt{|B|}e_n\|^2, \quad (21)$$

čímž přechází na tvar (13), o kterém tuto skutečnost již víme.

Pro jaderné operátory lze zavést norma

$$\|B\|_1 := \sum_{n < \dim \mathcal{H}} (e_n, |B|e_n) = \|\sqrt{|B|}\|_2^2, \quad (22)$$

splňující

$$\|B\|_1 \geq \|B\|_2, \quad (23)$$

tedy každý jaderný operátor je Hilbert–Schmidtův a potažmo kompaktní. Jak asi očekáváme, jedná se také o ℓ^1 -normu posloupnosti singulárních hodnot B z identického důvodu jako jejich ℓ^2 norma je Hilbert–Schmidtova, jak napovídá již označení třídy \mathcal{S}_1 .

O nerovnosti (23) se přesvědčíme například využitím (15) a rovnosti $\|Bx\| = \|B|x|\|$:

$$\begin{aligned} \|B\|_2^2 &= \sum_{j < \dim \mathcal{H}} \|Be_j\|^2 = \sum_{j < \dim \mathcal{H}} \|B|e_j|\|^2 = \sum_{j < \dim \mathcal{H}} \sum_{k < \dim \mathcal{H}} |(e_k, |B|e_j)|^2 = \sum_{j < \dim \mathcal{H}} \sum_{k < \dim \mathcal{H}} |(\sqrt{|B|}e_k, \sqrt{|B|}e_j)|^2 \\ &\leq \sum_{j < \dim \mathcal{H}} \sum_{k < \dim \mathcal{H}} (\sqrt{|B|}e_k, \sqrt{|B|}e_k)(\sqrt{|B|}e_j, \sqrt{|B|}e_j) = \sum_{j < \dim \mathcal{H}} (e_k, |B|e_k) \cdot \sum_{k < \dim \mathcal{H}} (e_j, |B|e_j) = \|B\|_1^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Prostor \mathcal{S}_1 je vůči normě $\|\cdot\|_1$ opět úplný, je tedy Banachův (poznámka 6.4.3). Stejně jako \mathcal{S}_∞ a \mathcal{S}_2 je také oboustranným $*$ -ideálem v prostoru $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, což plyne z následující zajímavé poučky.

Věta (6.4.1b). Operátor $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je jaderný právě tehdy, je-li součinem dvou Hilbert–Schmidtových operátorů.

Důkaz. (jako vždy pouze pro zajímavost)

\Rightarrow : Polární rozklad $B = W_B|B|$ můžeme zapsat jako $W_B\sqrt{|B|}\sqrt{|B|}$. Podle (22) je pak operátor $\sqrt{|B|}$ prvkem $\mathcal{S}_2(\mathcal{H})$ a pro $W_B\sqrt{|B|}$ to již plyne z vlastnosti ideálu.

\Leftarrow : Podobně nechť $B, C \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$, uvažujme $|BC| = W^*BC$. Pak

$$\begin{aligned} \|BC\|_1 &= \sum_{n < \dim \mathcal{H}} (e_n, |BC|e_n) = \sum_{n < \dim \mathcal{H}} |(e_n, |BC|e_n)| = \sum_{n < \dim \mathcal{H}} |(e_n, W^*BCe_n)| = \sum_{n < \dim \mathcal{H}} |(B^*We_n, Ce_n)| \\ &\leq \left(\sum_{n < \dim \mathcal{H}} \|B^*We_n\|^2 \cdot \sum_{m < \dim \mathcal{H}} \|Ce_m\|^2 \right)^{1/2} = \|B^*W\|_2 \|C\|_2 < \infty, \end{aligned} \quad (25)$$

protože C je H–S z předpokladu a B^*W z vlastnosti, že se jedná o součin H–S operátoru s omezeným. \square

Pravidlo (2) se tedy rozrůstá v celou řadu inkluzí oboustranných $*$ -ideálů omezených operátorů (že $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ je také jedním, je poměrně triviální):

$$[\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset] \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I}_2(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I}_\infty(\mathcal{H}) [\subset \mathcal{B}(\mathcal{H})], \quad (26)$$

Konečnědimenzionální operátory se vymykají \mathcal{I} -značení, protože pro ně nedefinujeme žádnou normu v duchu ostatních, vůči které by byl úplný. Jinak se jedná o Banachovy prostory uzavřené postupně vůči normám

$$\|B\|_1 \geq \|B\|_2 \geq \|B\|, \quad (27)$$

z nichž \mathcal{I}_2 je navíc Hilbertův. V konečné dimenzi \mathcal{H} jsou všechny množiny (26) stejné a všechny tři normy (27) ekvivalentní, jinak dokážeme libovolně dvě třídy separovat. Podstatná vlastnost všech těchto tříd je, že $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ je v každé hustá: k libovolnému operátoru $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, $\mathcal{I}_2(\mathcal{H})$ existuje posloupnost konečněrozměrných operátorů, která k němu v příslušné normě konverguje (o \mathcal{I}_∞ to již víme, ale ostatní odtud neplynou – nerovnosti (27) jdou pro toto nevhodným směrem!).

Nejdůležitější vlastností jaderných operátorů a vůbec důvodem, proč jim věnujeme pozornost, je skutečnost, že se jedná o třídu, na níž lze zavést operaci stopy. Platí totiž

Věta (6.4.4a). Jestliže operátor $B \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, potom suma

$$\sum_{j < \dim \mathcal{H}} (e_j, B e_j) \quad (28)$$

absolutně konverguje a její součet nezávisí na volbě báze $(e_j)_{j < \dim \mathcal{H}}$.

Důkaz. K důkazu obojího poslouží ON báze $(\tilde{e}_k)_{k < \dim \mathcal{H}}$ operátoru $|B|$ (z kanonické formy B), kterou použijeme k rozpisu skalárních součinů $(e_j, B e_j)$ následujícím způsobem.

$$(e_j, B e_j) = (B^* e_j, e_j) = \sum_{k < \dim \mathcal{H}} (B^* e_j, \tilde{e}_k) (\tilde{e}_k, e_j) = \sum_{k < \dim \mathcal{H}} (e_j, B \tilde{e}_k) (\tilde{e}_k, e_j).$$

Tento výsledek pak můžeme použít dvěma způsoby,

1. pro absolutní konvergenci

$$\begin{aligned} \sum_{j < \dim \mathcal{H}} |(e_j, B e_j)| &= \sum_{j < \dim \mathcal{H}} \sum_{k < \dim \mathcal{H}} |(e_j, B \tilde{e}_k) (\tilde{e}_k, e_j)| \leq \sum_{k < \dim \mathcal{H}} \left(\sum_{j < \dim \mathcal{H}} |(e_j, B \tilde{e}_k)|^2 \cdot \sum_{l < \dim \mathcal{H}} |(\tilde{e}_k, e_l)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \sum_{k < \dim \mathcal{H}} (\|B \tilde{e}_k\|^2 \|\tilde{e}_k\|^2)^{1/2} = \sum_{k < \dim \mathcal{H}} \|B \tilde{e}_k\| = \sum_{k < \dim \mathcal{H}} \|\mu_k\| = \|B\|_1 < \infty, \end{aligned} \quad (29)$$

2. pro hodnotu sumy samotné, kde rovněž můžeme prohodit sumace a zjistit, že

$$\sum_{j < \dim \mathcal{H}} (e_j, B e_j) = \sum_{k < \dim \mathcal{H}} \sum_{j < \dim \mathcal{H}} (\tilde{e}_k, e_j) (e_j, B \tilde{e}_k) = \sum_{k < \dim \mathcal{H}} (\tilde{e}_k, B \tilde{e}_k) \quad (30)$$

přestalo na $(e_j)_{j < \dim \mathcal{H}}$ jakkoli záviset. \square

Tento výraz je tedy korektně definován a nazveme jej *stopou operátoru* B , ozn. $\text{Tr } B$. Její hlavní vlastnosti shrnuje

Věta (6.4.4b,c). Zobrazení $\text{Tr}: \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ je omezený lineární funkcionál na Banachově prostoru \mathcal{I}_1 : platí

$$|\text{Tr } B| \leq \|B\|_1 = \text{Tr } |B|. \quad (31)$$

Pro každé $B \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jsou splněny rovnosti

$$\text{Tr } B^* = \overline{\text{Tr } B}, \quad \text{Tr}(BC) = \text{Tr}(CB). \quad (32)$$

Přitom nezapomeňme, že slovo „lineární“ sobě zahrnuje další vlastnosti: $\text{Tr}(\alpha B + C) = \alpha \text{Tr } B + \text{Tr } C$. U druhého z vlastností (32) pozor na volbu $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, která je širší než $C \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$. To, že výrazy BC , CB vůbec stopu mají, využívá vlastnosti, že $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ tvoří v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ideál. Také důkaz tohoto tvrzení, ač lze pravděpodobně dělat jinými způsoby, využívá zajímavou (ač poněkud okrajovou) vlastnost omezených operátorů – přesvědčte se v knize.