

**Příklad 1: Operátor**

$$S: \ell^2(\mathbb{N}_0) \rightarrow \mathbb{C}: (v_0, v_1, v_2, \dots) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} v_k \quad (1)$$

s přirozeným definičním oborem je neomezený (přesvědčte se). Najděte dvě posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$  vektorů z  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$  (tedy *posloupnosti posloupností!*), které mají stejnou limitu, obě limity  $Sa_n$  a  $Sb_n$  existují, ale dávají různé číslo. Jedná se tedy o neuzavřený operátor.

**Příklad 2:** Pro operátor z minulého příkladu napište předpis jádra  $\text{Ker } S$ . Ukažte, že není uzavřeným podprostorem: že existuje posloupnost vektorů  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  z  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ , pro které všechny  $Sa_n = 0$ , existuje  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , ale buď  $a \notin D(S)$  nebo  $Sa \neq 0$ . Jaký je ortogonální doplněk tohoto podprostoru?

**Příklad 3:** Necht  $(e_0, e_1, e_2, \dots)$  je báze nějakého separabilního  $\mathcal{H}$ , označme  $V$  jeho uzavřený podprostor s bází  $(e_1, e_2, \dots)$ . Operátor

$$J: V \rightarrow \mathcal{H}: x \mapsto x \quad (2)$$

nepatří do třídy  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , protože jeho definiční obor  $V$  není v  $\mathcal{H}$  hustý (má netriviální ortogonální doplněk). Ukažte, že podmínku sdruženého operátoru splňuje nekonečně mnoho různých operátorů  $J_{\alpha}^*$  (stačí zkonstruovat dva různé).

**Příklad 4:** Najděte příklad dvojice hustě definovaných operátorů  $S, T$ , pro které  $S + T$  není hustě definovaný. *Návod:* hustě definovaný operátor můžete vyrobit tak, že nějaký jednoduchý, klidně omezený operátor (třeba  $I$ ) zúžíte na (neuzavřený) lineární obal nějaké báze.