

## Pár poznámek o konvenci a značení

Budeme se snažit používat podobný formalismus jako funkcionální analýza, občas poněkud uvolněný v místech, kde půjde více o obsah sdělení než o jeho plnou matematickou „neprůstřelnost“.

V celém předmětu bude **bez výjimky** platit

operátor	$\equiv$	lineární operátor,
projektor	$\equiv$	ortogonální projektor,
posloupnost	$\equiv$	nekonečná posloupnost,
spočetný	$\equiv$	spočetně nekonečný.

Některé budoucí otázky výrazně zjednoduší, zavedeme-li několik jednoduchých nástrojů teorie množin.

## Ordinální čísla

Nechť  $n \in \mathbb{N}_0$ . Relací  $m < n$ , bez další specifikace významu symbolu  $m$ , budeme rozumět enumeraci od nuly do  $n - 1$ . Zavést tuto konvenci (indexaci od nuly) namísto běžnějšího počítání  $1 \dots n$  má hlavní výhodu v tom, že jakmile  $n$  je první spočetný ordinál  $\omega$ , tvar výrazů např.

$$\sum_{m < \omega} (\dots), \quad (x_m)_{m < \omega}, \quad \forall m < \omega: \quad \text{apod.} \quad (1)$$

se nemusí nijak změnit, aby fungoval jako součet, seznam, kvantifikace apod. přes všechna přirozená čísla (s nulou). Jestliže v tomto kontextu použijeme (jak je tradiční) symbol  $\infty$ , má stejný význam jako  $\omega$ . Při sčítání od jedné bychom museli rozlišovat, zda horní mez zahrnout či vyloučit, srovnejte s výrazy:

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ vs. } (x_1, x_2, \dots), \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ vs. } \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{apod.} \quad (2)$$

Množina  $\hat{n} := \{m \mid m < n\}$  obsahuje právě  $n$  prvků pro  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\hat{\omega} = \{n \mid n < \omega\} = \mathbb{N}_0$  apod.

Za takovou horní mez potom nemusíme brát jen přirozená čísla s nulou nebo spočetně nekonečno, ale má smysl mluvit o libovolných ordinálních číslech: například

$$(x_n)_{n < \omega.2} = (x_0, x_1, x_2, \dots [\text{nekonečně mnoho členů}], x_\omega, x_{\omega+1}, \dots [\text{ještě jednou nekonečno}]). \quad (3)$$

Relace  $<$  má ve von Neumannově konstrukci ordinálních čísel (kde  $m$  a  $\hat{m}$  jsou též objekt) identický význam jako  $\in$ , ale hlavní použití bude zůstat pro  $n \in \mathbb{N}_0$  nebo  $n = \omega$  a v těchto případech je význam  $<$  názornější.

Množiny indexované ordinály oceníme například v konstrukci bází Hilbertových prostorů, kdy se může hodit například napojit dva seznamy báze vektorů za sebe a nemuset uvažovat, v jakém pořadí je vyčíslit, jsou-li nekonečné. Ordinály existují libovolně velké (ve smyslu mohutnosti), takže stejná konvence je případně použitelná i pro neseparabilní prostory, jejichž báze jsou nespočetné.

Třída všech ordinálů má dobré uspořádání.

## Kardinální čísla

Kardinální čísla budeme brát jako nejmenší ordinál – či minimum všech ordinálních čísel – stejné množinové mohutnosti. Nejčastěji se budeme setkávat opět s přirozenými čísly s nulou nebo se symbolem  $\aleph_0 \equiv \omega$ , ale necháme otevřené i další (vyšší) možnosti.

Kardinální čísla budou mít hlavní význam jako mohutnost množin a potažmo **dimenze prostorů**. Například všechny separabilní nekonečněrozměrné Hilbertovy prostory mají dimenzi  $\aleph_0$ . Vzhledem k tomu, že toto číslo

bereme rovné ordinálu  $\omega$ , má smysl jej také používat jako horní mez ve smyslu první sekce. Tedy například ortonormální bázi prostoru  $\mathcal{H}$  zcela libovolné dimenze můžeme zapisovat jako množinu

$$(e_n)_{n < \dim \mathcal{H}}. \quad (4)$$

## Součet přes množinu libovolné velikosti

V matematické analýze jste viděli, že jakmile řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad (5)$$

splňuje podmínku absolutní konvergence,

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty, \quad (6)$$

pak konverguje i (5) a hodnota součtu (limity) nezávisí na pořadí sčítání členů  $x_n$ .

Protože v podmínce (6) se sčítají nezáporná čísla, hodnota součtu přes libovolnou konečnou podmnožinu  $N \subset \mathbb{N}_0$  je menší nebo rovna než  $S$  a hodnotu  $S$  lze počítat jako supremum součtů přes takové konečné podmnožiny. Tím se zbavíme závislosti na použití lineárního uspořádání indexové množiny  $\mathbb{N}_0$  a není potom velký myšlenkový krok uvažovat o sčítání přes jiné nekonečné množiny, které lineární uspořádání mít již nemusejí či nemohou, ideálně na *nespočetně nekonečné množiny*.

Uvažujme tedy rozšíření definice sumy *nezáporných* čísel jako

$$\sum_{n \in M} |x_n| := \sup \left\{ \sum_{n \in N} |x_n| \mid N \subset M, N \text{ konečná} \right\}. \quad (7)$$

Za podmínku absolutní konvergence  $\sum_{n \in M} x_n$  budeme brát, zda tato hodnota je konečná. Jiné než absolutně konvergentní sumy přes obecné nekonečné množiny nebudeme definovat.

Je rychlým, ale zcela klíčovým pozorováním, že aby tato podmínka mohla vůbec nastat, není možné, aby  $x_n$  nabývalo nenulové hodnoty na větší než spočetné množině. Platí totiž

$$M_0 := \{n \in M \mid x_n \neq 0\} = \bigcup_{h \in \mathbb{N}_0} \left\{ n \in M \mid |x_n| > \frac{1}{h} \right\} \quad (8)$$

a pro absolutně konvergentní sumu na pravé straně máme spočetné sjednocení *konečných* množin. Pokud by totiž pro některé  $h \in \mathbb{N}_0$  množina  $M_h = \{n \in M \mid |x_n| > 1/h\}$  byla nekonečná, lze volbou stále větších konečných podmnožin  $N \subset M_h$ ,  $|N| = s$  v (7) dosáhnout zařazení hodnot zespoda omezených  $s/h$  do suprema, které nemají horní mez.

Důležitý poznatek tedy je, že **ač v principu můžeme uvažovat nespočetně mnoho sčítanců, jen nejvýše spočetně mnoho z nich musí být nenulových**, aby suma absolutních hodnot (7) mohla konvergovat. S podmínkou absolutní konvergence již je definice součtu obecných čísel jednoduchá: po vyřazení všech nenulových členů získáváme

$$\sum_{n \in M} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in M_0} x_n, \quad (9)$$

kde již sčítáme přes spočetnou množinu v libovolné enumeraci, což umíme.

S náhradou absolutní hodnoty za normu lze myšlenku použít i pro sčítání prvků obecného Banachova prostoru, např. Fourierův rozvoj a Parsevalovu rovnost v libovolném Hilbertově prostoru s ortonormální bází  $(e_n)_{n < \dim \mathcal{H}}$  (srv. s komplikacemi komentáře za větou 4.2.8 nevyužívajícím zobecněných sum).

$$x = \sum_{j < \dim \mathcal{H}} (e_j, x) e_j, \quad \|x\|^2 = \sum_{j < \dim \mathcal{H}} |(e_j, x)|^2. \quad (10)$$

## Prostory $\ell^2$ a $L^2$

Za prostor  $\ell^2$  se často uvažuje prostor posloupností komplexních čísel. My budeme ve značení poněkud více explicitní, budeme s nově nabytým nástrojem zobecněných sum používat definici umožňující obecnou indexovou množinu  $M$ ,

$$\ell^2(M) := \left\{ (x_n)_{n \in M} \in \mathbb{C}^M \mid \sum_{n \in M} |x_n|^2 < \infty \right\}. \quad (11)$$

(Výraz  $\mathbb{C}^M$ , obecně  $X^Y$ , značí množinu všech funkcí z  $Y$  do  $X$ , zde tedy všech zobrazení  $M \rightarrow \mathbb{C}$ .) Tradiční význam  $\ell^2$  v tomto značení odpovídá  $\ell^2(\mathbb{N})$ .

Každý takto sestrojený prostor je Hilbertův s dimenzí rovnou mohutnosti  $M$ . Můžeme tedy jednotnou konvencí obsáhnout prostory konečné dimenze  $\ell^2(\hat{n})$  (které ovšem stačí značit  $\mathbb{C}^n$ ), spočetně rozměrné prostory, jakým je např.  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ , ale i neseparabilní Hilbertovy prostory.

Příkladem budiž  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} := \ell^2(\mathbb{R})$ . Jeho prvky jsou funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , nenulové na nejvýše spočetné množině  $M_f$ , splňující

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|^2 = \sum_{x \in M_f} |f(x)|^2 < \infty. \quad (12)$$

Skalárním součinem v  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$  je

$$(f, g)_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} := \sum_{x \in \mathbb{R}} f^*(x)g(x) = \sum_{x \in M_f \cap M_g} f^*(x)g(x), \quad (13)$$

snadno se přesvědčíme, že ani limitním přechodem v cauchyovských posloupnostech prostor  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$  neopustíme. Takový prostor můžeme pro účely příkladů považovat za referenční formu Hilbertova prostoru dimenze kontinua stejně, jako  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$  je izomorfní libovolnému Hilbertovu prostoru spočetné dimenze.

V prostorech  $L^2$  uvažujeme značení  $L^2(X, d\mu)$  umožňující obecný měřitelný prostor  $X$  a míru  $\mu$ . Jestliže se jedná o Lebesgueovu míru na  $\mathbb{R}^n$  nebo nějaké jeho otevřené podmnožině  $\Omega$ , používáme  $L^2(\Omega, d\mathbf{x})$ , pro zvýraznění, že  $\mathbf{x}$  obsahuje všechny souřadnice, případně pouze  $L^2(\Omega)$ . Umožníme také  $L^2(X, Y, d\mu)$  apod. pro prostory funkcí z měřitelného prostoru  $X$  do nějakého Banachova prostoru  $Y$ , analogicky  $\ell^2(X, Y)$ .