

Základy neomezených operátorů

Na Funkcionální analýze jste se setkávali především s omezenými operátory.

V kvantové fyzice omezenost zdaleka *není* běžnou vlastností. Naopak, dá se říci, že až na výjimky operátory, které pro nás budou důležité, omezené nebudou. Mezi tyto výjimky definitoricky patří následující důležité třídy:

- všechny projektory,
- unitární operátory,
- kompaktní operátory, zejména jaderné,
- konečněrozměrné operátory, zejména operátory působící na prostoru \mathbb{C}^n .

Je tedy potřeba ustanovit si základní poznatky o rozdílech chování neomezených operátorů vůči omezeným.

Zejména vzpomeneme na *větu o uzavřeném grafu*:

Věta (3.4.12). Nechtě prostory \mathcal{X}, \mathcal{Y} jsou Banachovy. Uzavřený lineární operátor $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ definovaný na celém prostoru \mathcal{X} je spojitý.

Každý omezený operátor definovaný na hustém podprostoru \mathcal{H} lze jednoznačně na celé \mathcal{H} rozšířit použitím uzávěru (*věta o spojitém rozšíření*, 3.2.4). Běžně se tedy uvažuje, že označení „omezený“ v sobě uzavřenost již zahrnuje a tím i definovanost na všech vektorech počátečního prostoru. Dále pro omezené operátory platí ekvivalence (3.2.3)

$$B \text{ je omezený} \Leftrightarrow B \text{ je spojitý} \Leftrightarrow B \text{ je spojitý alespoň v jednom bodě.} \quad (1)$$

Odsud vidíme, jakých záruk se pro neomezené operátory budeme muset vzdát:

- pokud neomezený operátor je uzavřený, pak **není definovaný na celém prostoru** – pokud by byl, pak podle věty o spojitém zobrazení by byl spojitý a podle ekvivalence 3.2.3 omezený,
- pokud tedy přesto nějaký neomezený operátor definovaný na celém prostoru je, pak není uzavřený – existuje alespoň jeden bod $x \leftarrow x_n$, ve kterém limita Tx_n vychází jinak, než pro jinou posloupnost x'_n se stejnou limitou x .

Vzhledem k tomu, že druhou vlastnost obvykle chceme za každou cenu eliminovat, je nutné doprovázet zavedení každého neomezeného operátoru T jeho definičním oborem $D(T)$ (nezávisle na tom, zda cílíme na uzavřenost či pouze uzavíratelnost).

Další zcela zásadní roli hraje koncept *hustě definovaných operátorů*, tj. takových, jejichž definiční uzávěr $\overline{D(T)}$ splňuje $\overline{D(T)} = \mathcal{H}$. Množinu všech *hustě definovaných operátorů* na \mathcal{H} označíme $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Tato vlastnost je klíčová pro definici sdruženého operátoru: platí

Věta (7.1.1). Jestliže $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, pak pro každé $y \in \mathcal{H}$ existuje **nejvýše jedno** $y^* \in \mathcal{H}$ takové, že

$$\forall x \in D(T) : (y^*, x) = (y, Tx). \quad (2)$$

Operátor, který není hustě definovaný, neposkytuje dostatečný počet rovnic, který by vymezil T^* jednoznačně. Proto o sdruženém operátoru k T má smysl mluvit pouze, pokud $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Operátor T^* definujeme právě na všech takových vektorech y , pro které nějaké y^* podle lemmatu existuje, a na této množině označíme $T^*y := y^*$. Použitím T^*y jako symbolu (což není obvyklé) bychom tedy mohli psát:

$$y \in D(T^*) \Leftrightarrow \exists (T^*y) \in \mathcal{H} : \forall x \in D(T) : (T^*y, x) = (y, Tx), \quad (3)$$

a jednoznačnost zavedení T^*y dává předchozí věta. Že operátor T^* je lineární je poměrně triviální pozorování.

Poznámka ke značení: v tomto textu i v budoucnosti se pro přehlednost budeme snažit dodržovat následující volby symbolů pro operátory inspirované B–E–H: B, C – omezené, T, S – hustě definované. Označení A budeme obvykle rezervovat pro symetrické a samosdružené operátory (nezávisle na omezenosti), i když budou patřit do jedné z předchozích klasifikací. Podobně U – unitární, V, W – izometrické, E, F – projektoři.

Sdružený operátor obecně dává poněkud méně záruk, než jsme zvyklí z omezených operátorů (potažmo z lineární algebry). Srovnajme věty 7.1.2–3 s 5.1.5:

- Pro omezený operátor B existuje B^* vždy a má stejnou normu, můžeme tedy hledat B^{**} . Ten se rovná B .
- Pro neomezený operátor T existuje T^* tehdy, pokud T je hustě definovaný. T^{**} existuje, pokud T^* je také hustě definovaný. Pokud T^{**} existuje, je *nadmnožinou* T – konkrétně jeho **uzávěrem** (7.2.4). Dokonce dle stejné věty platí: uzávěr operátoru $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ existuje *právě tehdy*, když T^* je hustě definovaný.
- Pro každé B je B^* definované na celém \mathcal{H} . Pro hustě definované operátory T, S se může stát, že $S \subset T$, potom pro sdružené operátory platí opačná inkluze: $S^* \supset T^*$.
- Antihomogenita zůstává v obecné platnosti: $(\alpha T)^* = \alpha^* T^*$, ale aditivita ne. Abychom mohli srovnávat $(S + T)^*$ s operátory S^* a T^* , musíme zaručit, že kromě S, T také jejich součet zůstává hustě definovaný, což není obecně pravda. Ani s touto podmínkou není rovnost – platí: $(S + T)^* \supset S^* + T^*$.
- Pro omezené operátory B, C platí $(BC)^* = C^* B^*$. Pro neomezené T, S musíme opět nejprve ověřit, že TS je hustě definovaný, potom $(TS)^* \supset S^* T^*$.
- Pro invertibilní operátor T se musíme ujistit, zda T^{-1} je hustě definovaný. Pokud, pak rovnice $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ zůstává v platnosti.

Třetí z bodů lze shrnout mnemotechnickou pomůckou „**větší operátor \Leftrightarrow menší sdružení**“. Toto pozorování vyplývá přímo z věty 7.1.1, protože v případě T dává obecný kvantifikátor $\forall x \in D(T)$ silnější omezení než případě S na existenci vektoru y^* a potažmo na velikost $D(T^*)$. Pozor ovšem na interpretaci, že operátor definovaný na celém prostoru by měl zákonitě mít sdružený operátor nějakým způsobem „malý“. To je pravda jen, pokud by nebyl spojitý, jinak B^* je definovaný všude. Poučka o $S \subset T \Leftrightarrow S^* \supset T^*$ zde pochopitelně žádné výjimky mít nebude, ovšem *hustě definované* podmnožiny omezeného operátoru B mají za svůj sdružený operátor také B^* – nemá se již kam zvětšovat.

Evidentně zajímavá je třída *uzavřených a hustě definovaných* operátorů $\mathcal{L}_c(\mathcal{H})$, protože každý takový operátor T zajišťuje T^* hustě definované. Platí silnější tvrzení, díky konstrukci T^* se *vždy* jedná o uzavřený operátor (7.2.1). Pokud tedy *navíc* je podmínkou uzavřenosti T zaručena jeho hustá definovanost, platí

$$T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}) \quad \Leftrightarrow \quad T^* \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}), \quad T^{**} = \overline{T} = T. \quad (4)$$

Uzávěr operátoru je jednoznačný, takže předchozí poučka by šla upravit na *uzavíratelné* hustě definované operátory – uzavíratelný operátor T a jeho uzávěr mají stejné sdružení T^* (které již uzavřené je vždy). Budou existovat situace, kdy oceníme pouze vědět, že pro dané T uzávěr existuje a jaké má vlastnosti – řekněme konkrétně, jaký má sdružený operátor. Výpočet uzávěru může být velmi pracný krok, který je výhodné odložit. Někdy může dokonce být jednodušší k uzávěru T dojít pomocí T^{**} než z definice.

Užitečná poučka 5.1.8 platná pro omezené operátory

$$B \in \mathcal{B}(H) \quad \Rightarrow \quad \text{Ker } B^* = (\text{Ran } B)^\perp \quad (5)$$

zůstává v platnosti i pro hustě definované operátory, s potenciálně zajímavými důsledky,

- jádro operátoru sdruženého hustě definovanému T je vždy uzavřený podprostor,
- $\text{Ker } T^* = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\text{Ran } T} = \mathcal{H}$.

První bod si zaslouží ještě stručný komentář – pro neuzavřený operátor T se může stát, že jeho jádro není uzavřený podprostor, tj. existuje konvergentní posloupnost vektorů z jádra, jejichž limita x již není prvkem $\text{Ker } T$. To může nastat z důvodu, že operátor T v x není definován, nebo proto, že jeho hodnota tam vychází jinak než nula – ve druhém případě ovšem není uzavíratelný. Pokud uzavíratelný je, jeho uzávěr bude v x definován předpisem $Tx = 0$. Jinými slovy jádro uzavřeného operátoru je uzavřeným podprostorem vždy. První bod dá tuto odpověď jinou cestou: *uzavřený* hustě definovaný operátor je sdruženým operátorem jiného (svého vlastního T^*).

Normální operátory

Pojem normálního operátoru jste zaváděli v kontextu omezených operátorů podmínkou $B^*B = BB^*$. Můžeme toto označení rozšířit i na operátory neomezené, ale k předpokladům **definitornicky** přibude *hustá definovanost* a *uzavřenost*. Je tedy množina normálních operátorů na $\mathcal{H} = \mathcal{L}_n(\mathcal{H})$ – podmnožinou $\mathcal{L}_c(\mathcal{H})$.

Definiční rovnost $TT^* = T^*T$ může být důležitá pro použití, ale není nijak příjemná na ověřování. Poněkud praktičtější může být ekvivalentní definice (7.3.1): operátor $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ je normální právě tehdy, když $D(T^*) = D(T)$ a platí $\forall x \in D(T): \|T^*x\| = \|Tx\|$.

Naprostá většina hlavních pouček o omezených normálních operátorech zůstává na $\mathcal{L}_n(\mathcal{H})$ v platnosti:

- $T \in \mathcal{L}_n(\mathcal{H}) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{L}_n(\mathcal{H})$,
- $\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow \lambda^* \in \sigma_p(T^*)$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}: \text{Ker}(T - \lambda I) = \text{Ker}(T^* - \lambda I)$, speciálně $\text{Ker } T = \text{Ker } T^* = (\text{Ran } T)^\perp$,
- vlastní podprostory odpovídající různým vlastním hodnotám jsou ortogonální,
- reziduální spektrum normálního operátoru je prázdné (zbývá jen bodové a spojitě),
- množina regulárních hodnot $\rho(T) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \sigma(T) = \text{oblast regularity } \pi(T)$,
- $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow$ existuje posloupnost jednotkových vektorů $(x_n)_{n < \omega}$, pro niž $(T - \lambda I)x_n \rightarrow 0$,
- $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \text{Ran}(T - \lambda I) \neq \mathcal{H}$.

Poučky, které *nemůžeme* aplikovat, jsou tedy vesměs pouze ty, které se explicitně odvolávají na normu operátoru nebo komutaci $\text{Re } B, \text{Im } B$ (komutace neomezených operátorů vůbec je téma, kterému se teprve budeme věnovat).

Symetrické operátory

Některé z pouček výše nám pomohou pohlížet novými očima na *symetrické operátory*. Operátor A nazveme symetrickým, pokud pro každou dvojici vektorů $x, y \in D(A)$ platí $(Ax, y) = (x, Ay)$. Pokud se ale vymežíme na hustě definované operátory, jazyk sdružených operátorů nabízí elegantní *ekvivalentní definici*:

Definice. Operátor $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ nazveme symetrickým, jestliže platí $A \subset A^*$.

Skutečně: $A \subset A^*$ implikuje $D(A) \subset D(A^*)$ a to znamená, že pro každý vektor $x \in D(A)$ existuje A^*x takové, že $(Ax, y) = (x, Ay)$ pro všechna $y \in D(A)$. Ekvivalentní definice by nefungovala pro operátory, které nejsou hustě definované – ty mezi symetrické *nezařadíme* (!).

Jestliže se nám podaří najít rozšíření symetrického operátoru $A' \supseteq A$, které je rovněž symetrické, nazývá se *symetrickým rozšířením* A . Zajímavé je, že z důvodu $A \subset A^*$ můžeme také psát

$$A \subset A' \subset (A')^* \subset A^* \quad (6)$$

Protože A je z *definice* hustě definovaný a A^* je nadmnožinou A , je logicky také hustě definovaný a A lze uzavřít (sdružením sdružení). Operátory A a A^* mají – v obecné platnosti – stejný sdružený operátor A^* a platí tedy také

$$A \subset \bar{A} \subset A^* = (\bar{A})^* \quad (7)$$

Kromě situací, kdy A již uzavřený byl, tak **uzávěr je automaticky symetrickým rozšířením**, které **vždy existuje**.

Při symetrickém rozšiřování symetrického operátoru (a zužování jeho sdruženého operátoru) můžeme dosáhnout situace, kdy již nelze pokračovat – kdy žádné větší rozšíření už by symetrické nebylo. Operátor takto

získaný se nazývá *maximální symetrický*. Všechny maximální symetrické operátory jsou uzavřené, protože jinak by podle poslední poznámky šly rozšířit ještě tímto způsobem.

Přitom může nastat, že důvodem, proč další symetrická rozšíření neexistují, je, že se A' a $(A')^*$ v podmínce (6) setkají a další odlišný operátor by se mezi ně již nevešel. Operátor A' , který se rovná svému sdružení, se nazývá *samosdružený*. Každý samosdružený operátor je maximální symetrický (a uzavřený a normální). U množin všech symetrických, resp. všech samosdružených operátorů na \mathcal{H} se opět můžeme setkat s označením $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$, resp. $\mathcal{L}_{sa}(\mathcal{H})$.

Jak uvidíme při mnoha příležitostech, samosdružené operátory mají v kvantové fyzice **zcela zásadní význam**, mimojiné jako operátory popisující pozorovatelné fyzikální veličiny, který symetrické operátory **nemohou nahradit**. Zejména pro samosdružené operátory platí, co pro hermitovské: jejich spektrum je podmnožinou reálné osy. Nesamosdružené symetrické operátory (*žádné*) tuto vlastnost **nesplňují**.

Ověřování samosdruženosti neomezených operátorů je mnohem pracnější než ověřování symetrie. (Pro omezené oba koncepty splývají.) Proto se nám v budoucnu bude hodit množství konstrukcí, které samosdruženost zaručují. Uvedeme zatím jednu (7.2.11): pro každý $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ je T^*T pozitivní samosdružený operátor. Důkaz této povšimnutíhodné věty (která mimojiné implikuje, že $D(T^*T)$, $D(TT^*)$ jsou také husté podprostory) využívá zajímavé charakterizace sdruženého operátoru pomocí grafu operátoru, matematictěji založeným posluchačům doporučuji.

Pokud uzávěr je jediná operace, která symetrický operátor A dělí od samosdruženosti (tedy pokud $A^* = \bar{A}$), nazývá se takový *v podstatě samosdružený* – tehdy víme, že samosdružené rozšíření A existuje a je jednoznačné. Uvidíme později v semestru, že platí i opačná implikace. Stejný symetrický operátor ale obecně může mít i více než jedno samosdružené rozšíření. či může nastat situace, že rozšiřováním dojdeme k operátoru A' , který maximální již je, ale stále je jen vlastní podmnožinou $(A')^*$. Hledání samosdružených rozšíření symetrických operátorů, a s ním související otázka možných tvarů spekter symetrických operátorů, je velké a důležité téma, kterému budeme věnovat jednu část celého předmětu.