

Kreační a anihilační operátory – pevná báze

Součtové a součinnové operátory z minulé hodiny jsou redukovány projektory na podprostory Fockova prostoru o konstantních počtech částic, tedy na těchto prostorech operují nezávisle. Aby Fockův prostor byl více než jen současným zápisem variant chování složeného systému pro každou hodnotu N zvlášť, potřebujeme operátory, které působí napříč různými počty částic. Hlavní motivací je interakce mezi různými druhy částic, při které může docházet k jevům jako k pohlcení částice, vyzáření či její přeměně na částici jiného druhu. Popis takových přechodů je obvykle založen na kreačních a anihilačních operátorech.

V následujícím textu budeme vždy předpokládat, že jednočásticový stavový prostor \mathcal{H}_1 je separabilní prostor dimenze $d \leq \aleph_0$, $d \neq 0$. V tomto prostoru provedeme pevnou volbu ortonormální báze $(\varphi_j)_{j < d}$.

Obsazovací čísla

Kreační a anihilační operátory budou působit na symetrickém nebo antisymetrickém Fockově prostoru. Bude se nám hodit si sestavit nějakou bázi, ve které bude praktické pracovat. Z minulé hodiny máme bázi celého $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ tvaru všech tenzorových součinů všech možných kombinací N -tic bazových vektorů φ_j pro všechna $N \in \mathbb{N}_0$ (za prázdný tenzorový součin v případě $N = 0$ dosadíme vakuum Ω_0). Prvky této báze bychom mohli zobrazit odpovídajícími projektory S_N nebo A_N a získat tak nějakou totální množinu v odpovídajícím $\mathcal{F}_p(\mathcal{H}_1)$, ale ne ortonormální bázi: projektory skalární součin nezachovávají.

Připomeňme si definice:

$$S_N = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} U_\sigma, \quad A_N = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \text{sgn } \sigma U_\sigma, \quad (1)$$

$$U_\sigma(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N) = \psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(N)}.$$

Jestliže toto pravidlo aplikujeme na bazové vektory tenzorového součinu $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$, dostaneme

$$U_\sigma(\varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_N}) = \varphi_{j_{\sigma(1)}} \otimes \varphi_{j_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_{\sigma(N)}}. \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že součet v definici S_N nebo A_N navštíví postupně všechny permutace indexů j_n , výsledek se nezmění (případně u A_N změní nejvýše znaménko), provedeme-li v N -tici (j_1, \dots, j_N) jakoukoli permutaci. Je tedy výhodné všechny tyto permutace reprezentovat jediným prvkem, abychom zbytečně nedostávali lineárně závislé výsledky. Za tento reprezentativní prvek vezmeme uspořádanou N -tici

$$\hat{j} = (\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_N), \quad \hat{j}_1 \leq \hat{j}_2 \leq \dots \leq \hat{j}_N \quad (3)$$

a její odpovídající tenzorový součin v bázi $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$. Připomeňme, že čísla j_i (a potažmo \hat{j}_i) indexují prvky báze \mathcal{H}_1 a jsou tedy z množiny $\{j < d\}$.

Symetrizace

Uvažujme akci symetrizujícího projektoru S_N na vektor $\varphi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_N}$:

$$S_N(\varphi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_N}) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \varphi_{j_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_{\sigma(N)}}. \quad (4)$$

V sumě na pravé straně stojí pouze tolik různých vektorů, kolik je různých přeuspořádání \hat{j} . Každý z těchto vektorů se obecně objeví opakovaně.

Z grupy \mathcal{S}_N vezmeme podgrupu $H_{\hat{j}}$, která stabilizuje posloupnost \hat{j} (tj. prohazuje pouze prvky, které měly stejnou hodnotu). Velikost této podgrupy je

$$\prod_{j < d} n_j!. \quad (5)$$

Podle H_j můžeme grupu \mathcal{S}_N rozdělit na levé kosety tvaru xH_j . Protože každý z nich má velikost H_j , počet různých kosetů je

$$c = \frac{N!}{\prod_{j < d} n_j!}. \quad (6)$$

Toto číslo c představuje počet lineárně nezávislých prvků vystupujících na pravé straně (4). Každý z nich je přitom zastoupen v počtu (5) vyděleném podle předpisu (4) číslem $N!$, což dává hodnotu $1/c$. Podle Pythagorovy věty je tedy evidentní, že normalizaci můžeme provést faktorem \sqrt{c} . Označme

$$\varphi_N^{(S)}(\hat{j}) := \sqrt{c} S_N(\varphi_{\hat{j}_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\hat{j}_N}) = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{j < d} n_j!}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \varphi_{\hat{j}_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\hat{j}_{\sigma(N)}} \quad (7)$$

Vektory tvaru $\varphi_N^{(S)}(\hat{j})$ jsou **jednotkové**, pro různé neklesající posloupnosti \hat{j} **ortogonální** a do jejich tvaru spadá aplikace S_N na libovolný z uvažovaných bázevých vektorů prostoru \mathcal{H}_N . Získáváme tak univerzální předpis konstrukce **ortonormální báze** prostoru $S_N \mathcal{H}_N$.

Již výše jsme použili, že neklesající posloupnosti $(\hat{j}_k)_{k=1}^N$ indexů $\hat{j}_k < d$ přísluší počet opakování n_j prvků $j < d$. Tato korespondence je oboustranná: k posloupnosti $\{n_j \mid j < d\}$, splňující

$$\forall j < d: n_j \in \mathbb{N}_0, \quad \sum_{j < d} n_j = N, \quad (8)$$

lze jednoznačně sestavit taková neklesající N -tice \hat{j} , kde postupně zařadíme n_j kopií každého čísla j . Můžeme tedy prvky $\varphi_N^{(S)}(\hat{j})$ ekvivalentně přeznačit pomocí takových posloupností *obsazovacích čísel*. Budeme používat značení se složenými závorkami

$$\varphi_N^{(S)}(\hat{j}) =: \Phi_S\{n_0, n_1, \dots\} \quad (9)$$

kde na pravé straně index N není potřeba, protože jeho hodnota je určena (8).

Antisymetrizace

Zopakujme nyní stejné kroky pro projektor A_N ,

$$A_N(\varphi_{\hat{j}_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\hat{j}_N}) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \text{sgn } \sigma \varphi_{\hat{j}_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\hat{j}_{\sigma(N)}}. \quad (10)$$

Hlavním rozdílem oproti S_N je, že opakuje-li se v posloupnosti \hat{j} nějaká hodnota j více než jednou, dostaneme stejný vektor na pravé straně s koeficientem 0, protože podgrupa H_j má stejný počet prvků s kladným a se záporným znaménkem.

Do sumy proto stále přispívá stejný počet (6) ortogonálních vektorů, ale jejich celkové koeficienty jsou nulové, má-li \hat{j} jakékoli opakování. Pokud nemá, zjednodušuje se c na $N!$, každý prvek sumy bude ortogonální na ostatní a objeví se se znaménkem $+1$ nebo -1 . Pravá strana má tak normu

$$\|A_N(\varphi_{\hat{j}_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\hat{j}_N})\| = \begin{cases} 1/\sqrt{N!} & \text{pokud } \hat{j} \text{ je ostře rostoucí,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (11)$$

Ortonormální bázi prostoru $A_N \mathcal{H}_N$ tedy budeme konstruovat z vektorů

$$\varphi_N^{(A)} := \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \text{sgn } \sigma \varphi_{\hat{j}_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\hat{j}_{\sigma(N)}} \quad (12)$$

pro *ostře rostoucí* posloupnosti \hat{j} . (Pokud taková N -prvková posloupnost nelze sestavit, protože $N > \dim \mathcal{H}_1$, pak je také prostor $A_N \mathcal{H}_N$ prázdný.) Stejně jako u S_N můžeme zavést obsazovací čísla, která budou bez opakování členů vymezena na nulu a jedničku:

$$\varphi_N^{(A)}(\hat{j}) \leftrightarrow \Phi_A\{n_0, n_1, \dots\} : \quad (n_j) \in \{0, 1\}^d, \quad \sum_{j < d} n_j = N. \quad (13)$$

V obou případech jsme tedy získali ortonormální báze prostorů $S_N \mathcal{H}_N$, $A_N \mathcal{H}_N$ pro libovolné $N \in \mathbb{N}$. Víme, že každá dvojice těchto prostorů je v rámci $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ vzájemně ortogonální a také jsou všechny ortogonální na $\mathcal{H}_0 = S_0 \mathcal{H}_0 = A_0 \mathcal{H}_0$. Bázi Fockova prostoru tedy získáme jejich sjednocením a přidáním vakua, které popíšeme obsazovacími čísly $n_j = 0 \forall j < d$. Platí tedy

$$\left\{ \Phi_S \{n_0, n_1, \dots\} \mid n_j \in \mathbb{N}_0 \forall j < d, \sum_{j < d} n_j < \infty \right\} \text{ je ON bázi } \mathcal{F}_S(\mathcal{H}_1), \quad (14)$$

$$\left\{ \Phi_A \{n_0, n_1, \dots\} \mid n_j \in \{0, 1\} \forall j < d, \sum_{j < d} n_j < \infty \right\} \text{ je ON bázi } \mathcal{F}_A(\mathcal{H}_1). \quad (15)$$

Kreační a anihilační operátory – bazové vektory

Symetrický i antisymetrický Fockův prostor je tvořen direktním součtem prostorů tvaru $S_N \mathcal{H}_N$, resp. $A_N \mathcal{H}_N$, které jsou do něj vnořeny jako uzavřené vzájemně ortogonální podprostory. Můžeme tedy uvažovat zobrazení mezi nimi.

Pro naši zvolenou bázi φ_j kreační a anihilační operátory $\hat{a}^\dagger(\varphi_j)$, resp. $\hat{a}(\varphi_j)$ zavedeme **provizorně** jako zobrazení předepsaná právě takovými vztahy známými z každého kurzu kvantové mechaniky

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger(\varphi_j) \Phi_S \{n_0, n_1, \dots, n_j, \dots\} &= \sqrt{n_j + 1} \Phi_S \{n_0, n_1, \dots, n_j + 1, \dots\}, \\ \hat{a}(\varphi_j) \Phi_S \{n_0, n_1, \dots, n_j, \dots\} &= \begin{cases} \sqrt{n_j} \Phi_S \{n_0, n_1, \dots, n_j - 1, \dots\}, & n_j \geq 1, \\ 0, & n_j = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

pro symetrický případ a

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger(\varphi_j) \Phi_A \{n_0, n_1, \dots, n_j, \dots\} &= \begin{cases} (-1)^{\sum_{i < j} n_i} \Phi_A \{n_0, n_1, \dots, n_j + 1, \dots\}, & n_j = 0, \\ 0, & n_j = 1, \end{cases} \\ \hat{a}(\varphi_j) \Phi_A \{n_0, n_1, \dots, n_j, \dots\} &= \begin{cases} (-1)^{\sum_{i < j} n_i} \Phi_A \{n_0, n_1, \dots, n_j - 1, \dots\}, & n_j = 1, \\ 0, & n_j = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

pro antisymetrický, rozšířenými na *lineární obal* celé báze (14), resp. (15) (aby se jednalo o lineární zobrazení). Operátory $\hat{a}(\varphi_j)$, $\hat{a}^\dagger(\varphi_j)$ by také korektně měly mít označení S nebo A , ale jedná se bez indexu o tolik ustálené značení, že jej také nebudeme používat.

Tímto předpisem je pro každé φ_j , $j < d$ zadán operátor $\hat{a}^\dagger(\varphi_j)$, který pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ zobrazuje hustou podmnožinu \mathcal{H}_N do \mathcal{H}_{N+1} , a operátor $\hat{a}(\varphi_j)$, který působí v opačném směru. Nejedná se ještě o finální zápis – budeme se potřebovat oprostít od závislosti na pevné volbě báze $(\varphi_j)_{j < d}$. To si však ponecháme na příští hodinu a zakončíme doplněním některých vlastností konstrukce Fockova stavu a těchto provizorních operátorů.

Případ konečněrozměrného \mathcal{H}_1

Uvažujme jednočásticový stavový prostor \mathcal{H}_1 konečné dimenze, tedy $d < \omega$. Podmínka konečného součtu v (14) je pak automaticky splněna a bázi *symetrizovaného* Fockova prostoru lze psát v mnohem jednodušším tvaru, kde se pro lepší přehlednost vrátíme k indexaci od 1:

$$\{\Phi_S \{n_1, n_2, \dots, n_d\} \mid n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}_0\}. \quad (18)$$

Uvažujme nyní nějaký jiný, *nekonečněrozměrný* separabilní Hilbertův prostor \mathcal{G} , například $\mathcal{G} = L^2(\mathbb{R})$, s ortonormální bází (e_0, e_1, e_2, \dots) . Jeho d -násobný tenzorový součin sám se sebou $\mathcal{G}^{\otimes d}$ má bázi tvořenou všemi tenzorovými součiny d členů tvaru e_n , $n \in \mathbb{N}_0$. Zobrazení

$$\Phi_S \{n_1, \dots, n_d\} \mapsto e_{n_1} \otimes e_{n_2} \otimes \dots \otimes e_{n_d} \quad (19)$$

je evidentně izomorfizmem mezi $\mathcal{F}_S(\mathcal{H}_1)$ a $\mathcal{G}^{\otimes d}$.

Tento postup dává možnost, jak si představit strukturu Fockova prostoru $\mathcal{F}_S(\mathcal{H}_1)$. Obzvláště zajímavé je za $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ vzít bázi vlastních stavů jednorozměrného lineárního harmonického oscilátoru. Potom totiž nejen prvky $\mathcal{G}^{\otimes d}$ lze brát velmi názorně jako funkce $L^2(\mathbb{R}^d)$, ale ještě akce kreačního či anihilačního operátoru (16) v tomto izomorfismu přesně odpovídá akci operátoru známého jako kreační či anihilační operátor harmonického oscilátoru. Fockův prostor nad d -rozměrným prostorem \mathcal{H}_1 a operace nad ním lze tedy velmi přirozeně popisovat jako složený systém d (rozlišitelných) harmonických oscilátorů.

Co se týká *antisymetrického* případu, situace je mnohem jednodušší. Tím, že obsazovací čísla jsou vymezena na nulu a jedničku, dokážeme všechny kombinace vyčerpat, například v posloupnosti binárních zápisů čísel:

$$(\Phi_A\{0, \dots, 0, 0\}, \Phi_A\{0, \dots, 0, 1\}, \Phi_A\{0, \dots, 1, 0\}, \Phi_A\{0, \dots, 1, 1\}, \dots, \Phi_A\{1, \dots, 1, 1\}) \quad (20)$$

Prostor $\mathcal{F}_A(\mathcal{H}_1)$ je tedy konečněrozměrným prostorem dimenze 2^d , na který můžeme pohlížet jako na prostor d qubitů.

Nekonečněrozměrný \mathcal{H}_1

Pokud dimenze \mathcal{H}_1 je nekonečná (uvažujeme dle úvodu jen spočetně nekonečnou), předchozí analogie již *nelze použít*. V symetrickém případě by nás vedla na prostor funkcí nad $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$, který je neseparabilní a navíc nemá smysl v něm mluvit o L^2 normě, protože nemá Lebesgueovu míru (viz přednáška o Feynmanově integrálu). Nelze tedy již říci, že systém bosonů s nekonečně dimenzionálním jednočásticovým prostorem byl ekvivalentní soustavě harmonických oscilátorů.

Prostor nekonečně mnoha harmonických oscilátorů lze zavést metodami tenzorového součinu nekonečně mnoha prostorů (které jsme neprobírali) – předchozí odstavec ale říká, že mu již nelze rozumět jako prostoru funkcí. Dostaneme tak prostor nespočetné dimenze, tedy neseparabilní. Kde se obě konstrukce rozcházejí, je právě dodatečná podmínka na konečný celkový počet částic v (14). Pokud bychom ji nezařadili, kardinalita báze konstruované nad posloupnostmi $\{n_j\}_{j < d}$ by vskutku byla $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$, což je kontinuum. Stejně dopadne v tomto případě i antisymetrizovaný Fockův prostor – z konečné dimenze pro $d < \omega$ přeskočí rovnou do nespočetné, pokud $d = \omega$. Dodatečná podmínka ale posloupnosti obsazovacích čísel vymezuje na spočetně mnoho možností, takže Fockův prostor zůstává separabilní.

Přímé zobecnění metod z předchozí sekce (uvažování soustavy harmonických oscilátorů, resp. dvouhladinových systémů) je tedy chybou v tom smyslu, že by dalo jiný stavový prostor než $\mathcal{F}_S(\mathcal{H}_1)$, resp. $\mathcal{F}_A(\mathcal{H}_1)$. Není však takovou chybou, která by zneplatnila veškeré výsledky. Fockův prostor v tomto větším prostoru tvoří uzavřený podprostor, který žádné operace získané z jednočásticových pozorovatelných nebo interakcí konečného počtu částic nemohou opustit. Je tedy možné v této analogii pracovat, držíme-li na paměti, že fyzikální budou jen takové stavy, ke kterým lze dospět čistě z těch bázeových vektorů, v nichž celkový počet excitací harmonických oscilátorů, resp. počet excitovaných stavů dvouhladinových systémů, je konečné číslo.