

## Operátory násobení funkcí

Operátor polohy, kterým jsme se zabývali v různých situacích (na přímce, polopřímce, úsečce, na cvičení na diskrétní množině  $\mathbb{Z}$ , prostřednictvím tenzorového součinu na  $\mathbb{R}^n$ ) vděčí za mnoho ze svých vlastností skutečnosti, že se jedná o zvláštní případ *operátoru násobení funkcí*. V této přednášce si představíme tento zastřešující koncept.

Pro dosažení co největší obecnosti operátory násobení uvažujeme na obecných měřitelných prostorech  $(X, \mu)$ . V souladu s učebnicí budeme uvažovat takové prostory, jejichž míra  $\mu$  je  $\sigma$ -konečná, což znamená, že prostor  $X$  lze psát jako spočetné sjednocení množin  $M_n$  konečných měr  $\mu(M_n)$ . Uvolnění tohoto požadavku je v mnoha budoucích případech možné, ale a) by se jednalo jen o nahrazení slabším, avšak stále omezujícím požadavkem tzv. lokalizovatelnosti a b) to nestojí za přidáním práce.

Nechť tedy  $\mathcal{H} = L^2(X, d\mu)$  se  $\sigma$ -konečnou mírou  $\mu$  a buď  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  měřitelná funkce. Operátorem násobení funkcí  $f$  na  $\mathcal{H}$  nazveme

$$T_f: D(T_f) \rightarrow \mathcal{H}: \psi(x) \mapsto f(x)\psi(x), \quad D(T_f) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid f\psi \in \mathcal{H}, \text{ tj. } \int_X |f(x)|^2 |\psi(x)|^2 d\mu(x) < \infty \right\}. \quad (1)$$

Každý takový operátor je zřejmě lineární. Hustě definovaný je rovněž, protože k obecnému vektoru  $\varphi \in \mathcal{H}$  se lze blížit zúženými  $\varphi \chi_{M_n}$  na množiny

$$M_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leq n\}. \quad (2)$$

Tato patří do  $D(T_f)$ , protože faktor  $f(x)$  je na množinách  $M_n$  omezený a protože jejich sjednocením je  $X$ . Podobně se ukáže, že  $T_f = T_g$  právě tehdy, když  $f = g$ : zavedme

$$N_n = \{x \in X \mid |x| \leq n \wedge |f(x)| \leq n \wedge |g(x)| \leq n\}. \quad (3)$$

Charakteristické funkce  $\chi_{N_n}$  patří do definičního oboru  $T_f$  a  $T_g$  a norma vektoru  $(T_f - T_g)\chi_{N_n}$  je rovna  $L^2$ -normě zúžení  $(f - g)\chi_{N_n}$ , která může pro všechna  $N_n$  být nulová jen pro dvě shodné funkce.

Důležité pozorování je, že sdruženým operátorem k  $T_f$  je  $T_f^* = T_{f^*}$ . Ukážeme to ve zkratce konstruktivně. Vektor  $\varphi \in \mathcal{H}$  pro náležitost do  $D(T_f^*)$  musí splňovat

$$\exists \eta \in \mathcal{H}: \forall \psi \in D(T_f): (\varphi, T_f \psi) = (\eta, \psi) \quad (4)$$

Použijeme analogii odvození, jaké jsme použili v případě operátoru  $Q$ . Pouze namísto kompaktních intervalů  $K$  nyní volíme množiny  $M_n$  zdefinované v (2). Platí tedy s pevným  $n$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \ni \varphi \in D(T_f^*) &\Rightarrow \exists \eta \in \mathcal{H}: \forall \psi_M \in D(T_f), \text{ supp } \psi_M \subset M_n: (\varphi, T_f \psi_M) = (\eta, \psi_M) \\ &\Leftrightarrow \exists \eta \in \mathcal{H}: \forall \psi \in D(T_f): \int_{M_n} (\varphi(x)^* f(x) - \eta(x)^*) \psi(x) d\mu(x) \\ &\Leftrightarrow \exists \eta \in \mathcal{H}: \varphi(x) f(x)^* - \eta(x) = 0 \text{ s.v. na } M_n \end{aligned} \quad (5)$$

a z obecnosti  $n$  a vlastnosti  $\bigcup_n M_n = X$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \ni \varphi \in D(T_f^*) &\Rightarrow \exists \eta \in \mathcal{H}: \varphi(x) f(x)^* - \eta(x) = 0 \text{ s.v. na } X \\ &\Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{H} \wedge f^* \varphi \in \mathcal{H}, \quad (T_f^* \varphi)(x) = \eta(x) = f(x)^* \varphi(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Opačná implikace

$$\varphi \in D(T_{f^*}) \Rightarrow \varphi \in D(T_f^*), \quad T_f^* \varphi = f^* \varphi \quad (7)$$

je vyjádřením snadné rovnosti

$$\forall \varphi \in D(T_{f^*}), \forall \psi \in D(T_f): (\varphi, T_f \psi) = (T_{f^*} \varphi, \psi). \quad (8)$$

## Základní vlastnosti

O operátorech  $T_f$  lze již na základě těchto poznatků říci překvapivě silné závěry:

- Pro každé  $f$  je  $T_f \in \mathcal{L}_n(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ ,
- $T_f$  je samosdružený právě tehdy, když  $f(x) \in \mathbb{R}$  skoro všude na  $X$ ,
- $T_f$  je omezený právě tehdy, když  $f \in L^\infty(X, d\mu)$ , a tehdy  $\|T_f\| = \|f\|_\infty$ .
- $T_{f \pm g} \supset T_f \pm T_g$ ,  $T_{fg} \supset T_f T_g$ ,  $T_f^{-1}$  existuje a je roven  $T_{1/f}$ , pokud  $f(x) \neq 0$  s.v. na  $X$ .

První z tvrzení se opírá o skutečnost, že  $T_f$  je sám sdružením  $T_f^*$ , což zaručuje jeho uzavřenost, a o formulaci normality ve formě  $\|T\psi\| = \|T^*\psi\|$ . Platí totiž poměrně zřejmě  $D(T_{f^*}) = D(T_f)$  a

$$\|T_{f^*}\psi\|^2 = \int_X |f(x)^*\psi(x)|^2 d\mu(x) = \int_X |f(x)|^2 |\psi(x)|^2 d\mu(x) = \int_X |f(x)\psi(x)|^2 d\mu(x) = \|T_f\psi\|^2. \quad (9)$$

Samosdruženost je dána skutečností  $T_f^* = T_{f^*}$  a  $f(x) = f(x)^*$  s.v. na  $X$ . Omezenost lze dokázat z patřičných definic a vlastností  $L$ -integrace dvojicí implikací, jak je uděláno na konci příkladu 7.3.3. Další vlastnosti plynou přímočaře z předpisu akce  $T_f$  na vektor; jediné upozornění opět je, že definiční obor  $T_{f \pm g}$  či  $T_{fg}$  může být větší než součtu, rozdílu či součinu operátorů, protože ač předpis má stejný, neklade podmínky na mezikroky na pravých stranách inkluzí.

## Spektrum $T_f$

Závěr, že  $T_f$  je bez potřeby jakéhokoli dalšího ověřování normální a pro reálné funkce přímo samosdružený, je velice praktický. Všechny předchozí výsledky o operátorech polohy můžeme odvodit i odsud použitím  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ ,  $L^2(\langle 0, +\infty \rangle, dx)$ ,  $L^2(\langle a, b \rangle, dx)$ ,  $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$  a funkce  $f(x) = x$ , resp.  $f(x) = x_i$  v posledním případě. A skutečná síla se projeví, když si uvědomíme důsledky možnosti volby jiné funkce či jiného prostoru.

V podobné obecnosti dokážeme říci i více, a to kompletně charakterizovat spektrum  $T_f$ . To se shoduje s takzvaným *esenciálním oborem hodnot funkce  $f$* , definovaným

$$R_{\text{ess}}^{(\mu)}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mu(f^{-1}(U_\varepsilon(\lambda))) \neq 0, \forall \varepsilon > 0\}. \quad (10)$$

Tedy  $\lambda \in \mathbb{C}$  patří do esenciálního oboru hodnot, nabývá-li  $f(x)$  hodnoty  $\lambda$  nebo jejího libovolně malého okolí na množině, která není  $\mu$ -nulová v  $X$ .

V případě Lebesgueovy míry do  $R_{\text{ess}}$  po částech spojitě funkce  $f$  patří celý její obor hodnot, navíc v uzavěru, protože i případné hodnoty  $\lambda$ , ke kterým se  $f(x)$  blíží, ale nedosáhne jich, splňují podmínku formulovanou pomocí okolí  $U_\varepsilon(\lambda)$ . Pokud funkce  $f$  spojitá není, ale po částech spojitě funkci se rovná skoro všude, pak odchylky od ní na množině míry 0 se v  $R_{\text{ess}}(f)$  neprojeví.

V případě obecnější míry se ale může stát, že nějaký celý interval má přiřazenu míru nula a  $R_{\text{ess}}^{(\mu)}(f)$  tak ignoruje hodnoty  $f(x)$  na celé této množině. Naopak, samostatné body jakožto množiny  $\{x_i\}$  mohou mít  $\mu(\{x_i\})$  nenulovou (takovým říkáme *diskrétní body* míry  $\mu$ ) a esenciální obor hodnot potom obsahuje hodnotu  $f(x_i)$  v těchto bodech, narozdíl od Lebesgueovy míry, kde bodová změna nikdy není podstatná.

Zvláštní pozornost věnujme tzv. *počítací míře*  $\mu_{\text{count}}$ , která funguje tak, že množině  $M \subset X$  přiřadí počet prvků, je-li konečná, a  $\infty$  jinak. Tato míra existuje na libovolném  $X$ , ale pouze na nejvýše spočetných oborech  $X$  je  $\sigma$ -konečná. V této situaci je  $L^2(X, \mu_{\text{count}})$  totéž, co prostor konečných nebo spočetných posloupností  $\ell^2(X)$ , měřitelná je každá funkce (posloupnost)  $s$  a operátor  $T_s$  se chová jako operátor násobení posloupností posloupností po bodech. Do této kategorie patří mimo jiné operátor polohy na diskretizovaném prostoru  $Q_{\mathbb{Z}}$  ze cvičení.

Tvrzení o spektru je dobrým procvičením základních postupů platných pro normální operátory a proto si jej dokážeme.

**Věta (7.3.8).** Necht  $(X, \mu)$  je měřitelný prostor se  $\sigma$ -konečnou mírou, necht  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  je  $\mu$ -měřitelná, označme  $T_f$  operátor násobení funkcí  $f$  na  $\mathcal{H} = L^2(X, d\mu)$ . Potom

$$\sigma(T_f) = R_{\text{ess}}^{(\mu)}(f). \quad (11)$$

*Důkaz.* Připomeňme, že pro normální operátory – kterým  $T_f$  víme, že je – platí

$$\lambda \in \sigma(T) \iff \exists (x_n)_{n < \omega} \subset D(T): (\forall n < \omega: \|x_n\| = 1) \wedge Tx_n \rightarrow 0 \iff \neg \exists c > 0: \forall x \in D(T): \|Tx - \lambda x\| \geq c\|x\|. \quad (12)$$

Rovnost ukážeme tak, že z  $\lambda \in R_{\text{ess}}^{(\mu)}$  plyne  $\lambda \in \sigma(T_f)$  a z negace plyne negace.

$\Rightarrow$ : Necht  $\lambda \in R_{\text{ess}}^{(\mu)}$ , pro  $\varepsilon > 0$  volme

$$\psi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\sqrt{\mu(M_\varepsilon)}} \chi_{M_\varepsilon}(x), \quad M_\varepsilon = f^{-1}(U_\varepsilon(\lambda)). \quad (13)$$

Pak triviálně  $\|\psi_\varepsilon\| = 1$ , ale přitom na  $M_\varepsilon$  je  $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$  a odsud také  $\|T_f \psi_\varepsilon - \lambda \psi_\varepsilon\| < \varepsilon^2$ .

$\Leftarrow$ : Necht  $\lambda \notin R_{\text{ess}}^{(\mu)}$ , volme  $\varepsilon$  takové, že  $\mu(M_\varepsilon) = 0$ . Protože množina  $M_\varepsilon$  je  $\mu$ -nulová, integrál přes  $X$  se rovná integrálu přes  $X \setminus M_\varepsilon$ . Ovšem na této množině  $|f(x) - \lambda| \geq \varepsilon$ . Můžeme proto odhadnout pro každé  $\psi \in D(T_f)$

$$\|T_f \psi - \lambda \psi\|^2 = \int_{X \setminus M_\varepsilon} |f(x) - \lambda|^2 |\psi(x)|^2 d\mu \geq \varepsilon^2 \int_X |\psi(x)|^2 d\mu(x) = \varepsilon^2 \|\psi\|^2, \quad (14)$$

takže platí negace pravé strany (12) pro  $c = \varepsilon^2$ . □

S touto teorií nejen operátory polohy zastřešíme, ale dozvíme se jejich spektrum, které jsme dosud neměli vyšetřeno. Prostým dosazením  $f(x) = x$ , případně složky  $x$ , snadno najdeme esenciální obory hodnot

$$\sigma(Q) = \mathbb{R}, \quad \sigma(Q_+) = \langle 0, \infty \rangle, \quad \sigma(Q_J) = \bar{J}, \quad \sigma(I \otimes \dots \otimes Q \otimes \dots \otimes I) = \mathbb{R}. \quad (15)$$

## Spektrální reprezentace

Operátory násobení funkcí jsou důležité v mnoha ohledech pro svou podstatu samy o sobě (například jako pozorovatelné potenciální energie částice v potenciálním poli  $V(x)$ ). Hrají ale další podstatnou roli jako *nejbližší analogie diagonálních operátorů* z maticové lineární algebry. Následující věta, kterou dokazovat nebudeme, ukazuje, co v tomto duchu odpovídá diagonalizaci hermitovské matice na prostorech nekonečné (avšak spočetné) dimenze.

**Věta (10.9.7).** Necht  $A$  je samosdružený operátor na separabilním Hilbertově prostoru. Pak existuje

- prostor  $(X, \mu)$  s konečnou mírou,
- měřitelná funkce  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  a
- izomorfismus  $W: \mathcal{H} \rightarrow L^2(X, d\mu)$

takové, že  $A = W^{-1}T_f W$ .

Věta má zobecnění i na prostory  $\mathcal{H}$  libovolné dimenze, ale připomeňme, že v naší definici  $T_f$  separabilita vystupuje skrz použití  $\sigma$ -konečné míry – to vyřazuje z úvahy naše modelové nespočetněrozměrné prostory  $\ell^2(X)$ ,  $|X| > \aleph_0$ , museli bychom nejprve rozšířit jeho definici.

## Unitární ekvivalence (nestihlo se – zahájíme jí v úterý)

Rovnost tvaru  $A = W^{-1}T_f W$  je příkladem mnohem obecnějšího konceptu **unitární ekvivalence** dvou operátorů. Často se s ní setkáme i v případě, kdy izomorfismus  $W$  nahrazuje unitární operátor  $U$  – mluvili bychom tedy o unitární ekvivalenci dvou operátorů  $T, S$  na stejném prostoru  $\mathcal{H}$ . Unitární ekvivalence je vskutku ekvivalence jakožto relace. Prakticky **všechny** podstatné vlastnosti, které o jednom z operátorů můžeme vědět, se na druhý přenášejí. Nechť  $T = USU^{-1}$ , potom (7.4.10 a odkazy tamtéž)

- je-li  $S$  hustě definovaný, je hustě definovaný i  $T$  a platí  $T^* = US^*U^{-1}$ ,
- je-li  $S$  uzavíratelný, je  $T$  také a  $\bar{T} = U\bar{S}U^{-1}$ ,
- je-li  $S$  invertibilní, je invertibilní i  $T$  a platí  $T^{-1} = US^{-1}U^{-1}$ ,
- je-li  $S$  omezený, je omezený i  $T$  a má stejnou normu,
- podobně je-li  $S$  uzavřený /  $\mathcal{S}_p$  / normální / unitární / symetrický / pozitivní / samosdružený / v podstatě samosdružený / má čistě bodové spektrum, tuto vlastnost má i  $T$ ,
- spektra operátorů  $S$  a  $T$  jsou si rovna včetně jejich rozdělení na  $\sigma_p$ ,  $\sigma_c$  a  $\sigma_r$  a vlastní hodnoty mají stejné násobnosti pro  $S$  a  $T$ ; pro kompaktní operátory se také shodují singulární hodnoty a každá  $\|\cdot\|_p$ -norma.

Tento seznam budeme příležitostně i rozšiřovat, když se seznámíme s nějakou novou charakteristikou operátoru. Prozatím je dobré vědět, že unitární ekvivalencí se přenášejí například všechny vlastnosti  $T_f$  s reálnou  $f$ , jak jsme je poznali dnes, na samosdružené operátory, a naopak, libovolný samosdružený operátor lze v principu popsat jako unitární ekvivalent nějakého operátoru tvaru  $T_f$ , jehož vlastnosti jsou jednoduché. Ovšem to, jak spektrální reprezentaci *hledat*, nijak snadná otázka není, proto tato metoda zůstane pro naše účely spíše v repertoáru nástrojů pro nekonstruktivní důkazy.