

**Příklad 1:** Zapište podmínky pro vektor  $\psi \in L^2(J)$ , aby ležel v  $D(P_\alpha^2)$ , kde  $P_\alpha$  je jedno ze samosdružených rozšíření  $-i d/dx$  na konečném intervalu  $J = (a, b)$ . Ukažte přímým dosazením, že podmínky získané pro  $\psi(a)$ ,  $\psi(b)$ ,  $\psi'(a)$ ,  $\psi'(b)$  vyhovují vztahům získaným pro rozšíření  $-d^2/dx^2$  na regulárním intervalu z přednášky.

Pro  $P^2$  na celé reálné ose stejným způsobem ukažte, že jeho definičním oborem je  $H^2(\mathbb{R})$ .

**Příklad 2:** Samosdružené operátory dané diferenciálním operátorem  $-d^2/dx^2$  na polopřímce tvoří třídu parametrizovanou jedním z možných ekvivalentních způsobů, například

$$\begin{aligned} T &= \tilde{T}|_{D(T_c)}, \quad \tilde{T}: H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+): \psi \mapsto -\psi'', \\ D(T_c) &= \{\psi \in H^2(\mathbb{R}_+) \mid \psi'(0) = c\psi(0)\}, \quad c \in \mathbb{R}, \\ D(T_\infty) &= \{\psi \in H^2(\mathbb{R}_+) \mid \psi(0) = 0\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ukažte, že pro  $c \in \mathbb{R}_-$  mají operátory  $T_c$  jednu vlastní hodnotu, a najděte odpovídající vlastní vektor. Co popisuje fyzikálně?

**Příklad 3:** Poučku, která nám přišla vhod zejména pro zespoda omezené potenciály (předpoklady viz 24.3.), že

$$\int_I (V(x)|\psi(x)|^2 + |\psi'(x)|^2) dx \quad \text{konverguje,} \quad (2)$$

dokažte. Jak odsud plyne, že pro  $\text{ess inf } V > -\infty$  je  $\psi' \in L^2(\mathbb{R})$ ? Co se může pokazit, pokud spodní mez neexistuje?

*Návod:* Uvažujte funkci  $(\psi'(x)^*\psi(x) + \psi(x)^*\psi'(x))'$ . Ukažte použitím argumentů absolutní spojitosti, že její integrál přes  $\mathbb{R}$  konverguje, a tuto znalost pak použijte na výraz, který získáte rozepsáním derivace.

*Poznámka:* Po další proběhlé hodině v (2) rozpoznáváme formu  $s(\varphi, \psi) = (\varphi', \psi') + (\varphi, V\psi)$  vyhodnocenou v  $(\psi, \psi)$ .

**Příklad 4:** Operátor energie na polopřímce nebo úsečce můžeme namísto von Neumannova postupu také hledat Friedrichsovým rozšířením (protože je pozitivní). Zde uvažujeme seskvilineární formu  $(P^{(0)}\varphi, P^{(0)}\psi)$ , ke které hledáme uzávěr. Jestliže vyjdeme z uzavřeného operátoru  $P^{(0)} = S$ , dá se ukázat, že výsledkem rozšíření je operátor  $S^*S$ . Uvažujte operátory  $\psi \mapsto -i\psi'$  na definičních oborech

$$\begin{aligned} D(P_+^{(0)}) &= \{\psi \in H^1(\mathbb{R}_+) \mid \psi(0) = 0\} && \text{(polopřímka),} \\ D(P_J^{(0)}) &= \{\psi \in H^1(\mathbb{R}_+) \mid \psi(a) = \psi(b) = 0\} && \text{(úsečka } J = (a, b)). \end{aligned} \quad (3)$$

Kterému rozšíření z naší nekonečné rodiny toto *konkrétní* rozšíření odpovídá?