

**Příklad 1:** Dokažte následující o výrazech vyskytujících se ve tvrzení 2. postulátu:

- a) Pro statistický operátor  $W$  a projektor  $E$  je  $\text{Tr}(EW) \geq 0$ .
- b) Pro statistický operátor  $W$  a projektor  $E$  takový, že  $\text{Tr}(EW) \neq 0$  je

$$W' = \frac{EWE}{\text{Tr}(EW)} \quad (1)$$

opět statistický operátor.

- c) Je-li  $W$  čistý stav  $E_\varphi$ , pak (1) je také čistý stav reprezentovaný vektorem  $E\varphi/\|E\varphi\|$ .
- d) Je-li  $\{E_1, \dots, E_n\}$  množina ortogonálních projektorů taková, že  $\text{Tr}(EW) \neq 0$ ,  $E = \sum_{i=1}^n E_i$ , pak

$$W' = \frac{\sum_{k=1}^n E_k W E_k}{\text{Tr}(EW)} \quad (2)$$

je opět statistický operátor.

**Příklad 2:** Napište kompletní předpis spektrální míry spinové pozorovatelné  $\sigma_x$ . Ukažte, že funkce z prostoru  $\Phi_{E_{\sigma_x}}$  jsou plně určeny jen svými hodnotami v 1 a  $-1$ , a tedy  $\Phi_{E_{\sigma_x}} \cong \mathbb{C}^2$ . Spočítejte z definice funkce operátoru (tj. integrací podle této míry, **ne** Taylorovou řadou!)  $\exp(it\sigma_x)$ .

**Příklad 3:** Pro vektor  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  napište, jak působí číselná míra  $\mu_\psi$  získaná z operátoru polohy. Závisí smysluplnost výrazu na tom, zda  $\psi \in D(Q)$ ? Pro které vektory  $\psi$  je  $\mu_\psi$  vůči Lebesgueově míře absolutně spojitá, pro které singulární (viz definice a věta na str. 658)?

**Příklad 4:** Přeformulujte obsah následující věty z 01FA2 pomocí projektorové míry (53 ve Wikiskriptu, s uzpůsobeným značením):

Nechť  $\{E_\lambda\}$  je rozklad jednotky a  $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda E_\lambda$ . Potom

- a)  $\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$  právě tehdy, když  $E_\lambda$  je konstantní na nějakém okolí  $\lambda$ ,
- b)  $\lambda \in \sigma_p(A)$  právě tehdy, když  $E_\lambda - E_{\lambda-0} \neq 0$ .

Ukažte, že odsud také plyne, že *nosičem* projektorové míry  $E_A$  je  $\sigma_A$  (viz definice v poznámce A.3.3b).