

**Příklad 1:** Alternativu ke zkoumání rozdílu  $A_1A_2 - A_2A_1$  představuje kvadratická forma  $(A_1\psi, A_2\psi) - (A_2\psi, A_1\psi)$ .

- Ukažte, že její definiční obor je nadmnožinou  $D(A_1A_2 - A_2A_1)$ .
- Spočítejte, jaký výsledek dává pro operátor polohy a hybnosti na  $L^2(\mathbb{R})$ .
- Ukažte, že operátory polohy a hybnosti na kružnici rovnost formálně stejnou jako v předchozím bodě nesplňují.

**Příklad 2:** Body přibližně bodového spektra je možné, podobně jako vlastní hodnoty, hledat z definice, a pro samosdružené operátory tak získat informaci o spojitém spektru. Podaří-li se najít posloupnost jednotkových (resp. nenulových) vektorů  $\psi_n$ , pro něž  $\|A\psi_n - \lambda\psi_n\|$  konverguje k nule (resp. nemá spodní hranici  $c\|\psi_n\|$  pro žádné  $c > 0$ ), pak  $\lambda \in \sigma(A)$ . Ukažte tímto postupem následující:

Nechť  $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je omezená měřitelná funkce taková, že  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x) = 0$ . Pak celý interval  $(0, +\infty)$  patří do spektra operátoru  $H = P^2 + V$ ,  $V = v(Q)$ .

*Návod:* uvažujte část sinusové vlny v oblasti, kde  $|v(x)| \leq \varepsilon$ , vyhlazenou tak, aby spadala do  $D(H) = H^2(\mathbb{R})$ .

**Příklad 3:** Uvažujte částici na přímce v pravoúhlé potenciální jámě, tj.  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ ,  $H = P^2 + V$ ,  $V = v(Q)$ ,  $v(x) = -V_0\chi_{(-a,a)}(x)$ . Ukažte, že operátor  $V$  je vůči  $P^2$  relativně kompaktní, a použijte tuto skutečnost k nalezení esenciálního spektra  $H$ . Jak potom může vypadat celé  $\sigma(H)$ ? Detaily hledání vlastních hodnot vynechte.

**Příklad 4:** Jedním z uzavřených rozšíření operátoru  $P^{(0)}$  na konečném intervalu  $J = (a, b)$  je operátor  $P'$  definovaný na množině  $\{\psi \in H^1(J) \mid \psi(a) = 0\}$ . Ukažte, že jeho spektrem je prázdná množina. Jak na základě toho dokážeme říci, že každý samosdružený operátor hybnosti na  $J$  má čistě bodové spektrum?

*Návod k první části:* ukažte, že předpis  $\psi(x) \mapsto \int_a^x e^{i\lambda(x-t)}\psi(t) dt$  je omezené zobrazení z  $\mathcal{H}$  do  $D(P')$ , odkud plyne  $\lambda \in \rho(P')$  pro každé  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Uzavřenost nemusíte ověřovat – zájemci viz příklad 7/18 v knize.