

Tensorový součin prostorů a operátorů

Tensorový součin zavedeme pro Hilbertovy prostory. Tensorovým součinem \mathcal{H}_1 a \mathcal{H}_2 rozumíme prostor $\mathcal{H} \stackrel{\text{ozn}}{=} \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, doprovázený zobrazením $\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}$, který splňuje vlastnosti:

- množina $\{x \otimes y \mid x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2\}$ je v \mathcal{H} totální (tj. uzávěrem jejího lineárního obalu je celé \mathcal{H}),
- skalárním součinem $(u \otimes x, v \otimes y)$, kde $u, v \in \mathcal{H}_1, x, y \in \mathcal{H}_2$, je součin $(u, v)_{\mathcal{H}_1} (x, y)_{\mathcal{H}_2}$.

Ve volbě konkrétní konstrukce prostoru \mathcal{H} a vektorového zobrazení \otimes existuje velká volnost. Jednou z oblíbených definic je brát \mathcal{H} jako prostor bilineárních forem nad \mathcal{H}_1 a \mathcal{H}_2 : to zobecňuje Rieszovo lemma, že prostor lineárních forem nad \mathcal{H} je izomorfní \mathcal{H} samotnému. V B–E–H 4.6 najdete jinou definici, kdy se buduje vektorový prostor lineárních kombinací abstraktních dvojic (x, y) , které jsou brány za vzájemně lineárně nezávislé, a faktorizuje se podprostorem, který identifikuje všechny dvojice tvaru $[\sum_i \alpha_i x_i, \sum_j \beta_j y_j]$ s $\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j [x_i, y_j]$. Podstatné je vědět, že

- realizace tensorového součinu existuje pro každou dvojici $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ alespoň jedna (tj. axiomy lze splnit),
- pro libovolné dvě realizace existuje izomorfismus, který mezi nimi výsledky $x \otimes y$ převádí.

Žádné tvrzení, se kterým se kdy setkáme, nezávisí na formě této realizace. Budeme proto svobodně používat označení $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, x \otimes y$ vždy pro jednu konkrétní realizaci, adekvátní aktuální situaci.

Příklady

- Tensorový součin konečněrozměrných prostorů $\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n$ je dimenze $m \cdot n$ a tedy izomorfní \mathbb{C}^{mn} . Axiomy tensorového součinu splňuje například Kroneckerův součin

$$\otimes_K : \mathbb{C}^m \otimes_K \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{mn} : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \otimes_K (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 \beta_1, \alpha_1 \beta_2, \dots, \alpha_1 \beta_n, \alpha_2 \beta_1, \dots, \alpha_2 \beta_n, \dots, \alpha_m \beta_n), \quad (1)$$

můžeme tedy ve smyslu minulého odstavce brát $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \equiv \mathbb{C}^{mn}$ a $\otimes \equiv \otimes_K$.

- Tensorový součin dvou Lebesgueových prostorů $\mathcal{H}_1 = L^2(X, d\mu)$ a $\mathcal{H}_2 = L^2(Y, d\nu)$ lze realizovat jako prostor funkcí $L^2(X \times Y, d(\mu \otimes \nu))$, tensorový součin vektorů bude představován

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y). \quad (2)$$

Konkrétně pro Lebesgueovu míru nad \mathbb{R}^n (či podoblastmi): $L^2(\mathbb{R}^m, d\mathbf{x}) \otimes L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{y}) = L^2(\mathbb{R}^{m+n}, d\mathbf{x} d\mathbf{y})$.

- Tensorový součin prostoru $L^2(X, d\mu)$ s konečněrozměrným prostorem \mathbb{C}^n je prostor funkcí zobrazujících z X to \mathbb{C}^n , splňujících

$$f \in L^2(X, d\mu) \otimes \mathbb{C}^n \Leftrightarrow \int_X \|f(\mathbf{x})\|^2 d\mu < \infty. \quad (3)$$

Označujeme $L^2(X, \mathbb{C}^n, d\mu)$; pro Lebesgueovu míru postačí $L^2(X, \mathbb{C}^n)$.

- Číselné těleso (v našem kontextu \mathbb{C}), brané jako jednorozměrný Hilbertův prostor, je v tensorovém součinu jednotkou: tensorový součin libovolného prostoru \mathcal{H} s prostorem \mathbb{C} je opět \mathcal{H} . Tensorový součin $x \in \mathcal{H}$ s vektorem $\alpha \in \mathbb{C}$ je jednoduše αx .

Tensorový součin bází

Jestliže označíme $(e_k)_{k < \dim \mathcal{H}_1}$, resp. $(f_l)_{l < \dim \mathcal{H}_2}$ nějaké ortonormální báze prostorů \mathcal{H}_1 , resp. \mathcal{H}_2 , pak množina

$$\{e_k \otimes f_l \mid k < \dim \mathcal{H}_1, l < \dim \mathcal{H}_2\} \quad (4)$$

je ortonormální báze tensorového součinu $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ (ve formulaci pro spočetněrozměrné prostory věta 4.6.5). O takto vzniklé bázi mluvíme jako o tensorovém součíně bází $(e_k)_{k < \dim \mathcal{H}_1}$ a $(f_l)_{l < \dim \mathcal{H}_2}$.

Důsledek tohoto poznatku je, že tensorový součin separabilních prostorů je opět separabilní, protože mohutnost vzniklé báze (4) je součinem mohutností $\{e_k\}$ a $\{f_l\}$ a pokud jsou obě konečné nebo spočetné, platí totéž i pro (4).

Tenzorový součin podprostorů \mathcal{H}

Jakmile je dán význam tenzorovému součinu *prostorů*, můžeme se bavit o tenzorovém součinu jejich *podprostorů* $G_1 \subset \mathcal{H}_1, G_2 \subset \mathcal{H}_2$ jakožto nějakého podprostoru $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Provedeme to ve dvou krocích: nejprve zavedeme „algebraický tenzorový součin“ $G_1 \otimes G_2$ jako lineární obal tenzorových součinů vektorů z G_1 a G_2 , tedy množinu všech *konečných* lineárních kombinací takových vektorů. Pak nad touto konstrukcí učiníme uzávěr. Lze se totiž přesvědčit, že výraz

$$\overline{G_1 \otimes G_2} \quad (5)$$

splňuje kritéria předepsaná axiomu tenzorového součinu použitými na $\overline{G_1}$ a $\overline{G_2}$, což opravňuje označení

$$\overline{G_1 \otimes G_2} = \overline{G_1} \otimes \overline{G_2}. \quad (6)$$

Pokud G_1 i G_2 jsou *uzavřené* podprostory \mathcal{H}_1 , resp. \mathcal{H}_2 , pak jejich tenzorový součin je uzávěrem jejich algebraického tenzorového součinu \otimes – netřeba dělat uzávěr na druhé straně podruhé.

Tento rozdíl mezi \otimes a \otimes je důležitý. V nekonečné dimenzi konečnými lineárními kombinacemi součinů vektorů z uzavřených podprostorů $G_{1,2}$ nedosáhneme na celý tenzorový součin $G_1 \otimes G_2$, dostaneme jen nějaký jeho neuzavřený podprostor. Ostatně za $G_{1,2}$ můžeme zvolit *celé* prostory $\mathcal{H}_{1,2}$. Za příklad si vezmeme $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = G_1 = G_2 = L^2(\mathbb{R})$. Jak jsme stanovili výše, $G_1 \otimes G_2 = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 = L^2(\mathbb{R}^2)$, ale $G_1 \otimes G_2$ je tvořen jen funkcemi, které jsou lineárními kombinacemi konečně mnoha funkcí faktorizovaného tvaru $f_i(x)g_i(y)$. Například funkce $1/(x^2 + y^2 + 1)$ patří do první množiny, ale do druhé ne.

Tenzorový součin operátorů

Důležitost uzávěru se projeví zejména na tenzorovém součinu operátorů. Je přirozené tenzorový produkt operátorů $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ hledat pomocí lineárního rozšíření definičního vztahu

$$A(x \otimes y) := (A_1 x) \otimes (A_2 y). \quad (7)$$

To nás ovšem dovede pouze k operátoru s definičním oborem $D(A_1) \otimes D(A_2)$, který bychom označili $A_1 \otimes A_2$. Pokud operátory $A_{1,2}$ byly uzavřené, totéž nebude automaticky platit pro $A_1 \otimes A_2$ a pro mnoho aplikací bude potřeba uvažovat

$$A_1 \otimes A_2 := \overline{A_1 \otimes A_2}. \quad (8)$$

Určit uzávěr je ovšem obecně mnohem složitější operace, ke které nám již nedopomůže linearita, ale musíme používat i limitní argumenty, najít, které prvky $D(A_1) \otimes D(A_2)$ do jeho definičního oboru patřit budou a pro které limita neexistuje apod. Pokud si ji lze ušetřit a pracovat nějakým způsobem s $A_1 \otimes A_2$, je to vždy výhodné.

Poznámka. Značení, které zde zavádíme, je vědomě a záměrně *odlišné* od B–E–H – viz poznámka 7.6.1.

Zvláštní případ tvoří tenzorový součin operátorů, které jsou omezené. Platí totiž

Lemma (5.7.1). Nechť $B_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$. Pak operátor $B_1 \otimes B_2$ je omezený s normou $\|B_1 \otimes B_2\| \leq \|B_1\| \|B_2\|$.

Takto vzniklý operátor definovaný na $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, které je hustou podmnožinou \mathcal{H} , má jednoznačné rozšíření na omezený operátor na celém $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ stejné normy (věta o spojitém rozšíření). Existence jednoznačné limity je tedy zaručena v každém bodě. Navíc nerovnost norem z tvrzení lemmatu lze posílit na rovnost:

$$\|B_1 \otimes B_2\| = \|B_1\| \|B_2\|, \quad (9)$$

protože snadno získáme i opačnou nerovnost:

$$\|B_1 \otimes B_2\| = \sup_{\substack{z \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \\ \|z\|=1}} \|(B_1 \otimes B_2)z\| \geq \sup_{\substack{x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2 \\ \|x\|=\|y\|=1}} \|(B_1 \otimes B_2)(x \otimes y)\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{H}_1 \\ \|x\|=1}} \|B_1 x\| \cdot \sup_{\substack{y \in \mathcal{H}_2 \\ \|y\|=1}} \|B_2 y\| = \|B_1\| \|B_2\|. \quad (10)$$

Pro omezené operátory poměrně triviálně platí (5.7.3 – 5.7.5):

1. $(\alpha B_1 + B_2) \otimes B_3 = \alpha(B_1 \otimes B_3) + (B_2 \otimes B_3)$, $B_1 \otimes (\alpha B_2 + B_3) = \alpha(B_1 \otimes B_2) + (B_1 \otimes B_3)$,
2. $(B_1 B_2) \otimes (B_3 B_4) = (B_1 \otimes B_3)(B_2 \otimes B_4)$,
3. $(B_1 \otimes B_2)^* = B_1^* \otimes B_2^*$,
4. jsou-li B_1, B_2 regulární, potom je regulární i $B_1 \otimes B_2$ a platí $(B_1 \otimes B_2)^{-1} = B_1^{-1} \otimes B_2^{-1}$,
5. jsou-li operátory B_1, B_2 normální, resp. unitární, resp. hermitovské, resp. projektory, pak i operátor $B_1 \otimes B_2$ je normální, resp. unitární, resp. hermitovský, resp. projektor.

Pro neomezené operátory do diskuse vstupuje i jejich definiční obor a mnohdy je jednodušší se zabývat pouze \otimes . Ustanovíme jistou podmnožinu pravidel výše platných pro něj.

Bilinearita (1) tenzorového součinu zůstává pro \otimes v platnosti, ale je potřeba upravit pravidlo pro součin ve složkách (2, obojí viz 7.6.4). Může se stát, že vynásobením operandů před provedením tenzorového součinu snížíme definiční obor:

$$(T_1 T_2) \otimes (T_3 T_4) \subset (T_1 \otimes T_3)(T_2 \otimes T_4), \quad (11)$$

rovnost platí jen ve zvláštních případech. Zeslabí se také tvrzení 3. Naštěstí alespoň platí, že jsou-li T_1, T_2 hustě definovány, je hustě definován i $T_1 \otimes T_2$ a má tedy sdružený operátor. Pro něj platí (7.6.2):

- $(T_1 \otimes T_2)^* \supset T_1^* \otimes T_2^*$,
- jestliže $T_{1,2}$ lze uzavřít, je uzavíratelný i $T_1 \otimes T_2$ a platí $T_1 \otimes T_2 \supset \overline{T_1} \otimes \overline{T_2}$.

Pro první tvrzení uvažujme $\varphi_1^{(k)} \in D(T_1^*)$, $\varphi_2^{(k)} \in D(T_2^*)$ a lineární kombinaci

$$\varphi = \sum_{k < K} \varphi_1^{(k)} \otimes \varphi_2^{(k)} \in D(T_1^*) \otimes D(T_2^*) = D(T_1^* \otimes T_2^*), \quad K \in \mathbb{N}_0. \quad (12)$$

Potom podobně

$$\begin{aligned} \forall \psi \in D(T_1 \otimes T_2), \psi &= \sum_{j < J} \psi_1^{(j)} \otimes \psi_2^{(j)}, \quad J \in \mathbb{N}_0: \\ (\varphi, (T_1 \otimes T_2)\psi) &= \sum_{j < J} \sum_{k < K} (\varphi_1^{(k)} \otimes \varphi_2^{(k)}, (T_1 \otimes T_2)(\psi_1^{(j)} \otimes \psi_2^{(j)})) \\ &= \sum_{j < J} \sum_{k < K} (\varphi_1^{(k)}, T_1 \psi_1^{(j)}) (\varphi_2^{(k)}, T_2 \psi_2^{(j)}) = \sum_{j < J} \sum_{k < K} (T_1^* \varphi_1^{(k)}, \psi_1^{(j)}) (T_2^* \varphi_2^{(k)}, \psi_2^{(j)}) \\ &= \sum_{j < J} \sum_{k < K} (T_1^* \varphi_1^{(k)} \otimes T_2^* \varphi_2^{(k)}, \psi_1^{(j)} \otimes \psi_2^{(j)}) = \left(\sum_{j < J} (T_1^* \varphi_1^{(k)} \otimes T_2^* \varphi_2^{(k)}), \sum_{k < K} (\psi_1^{(j)} \otimes \psi_2^{(j)}) \right) \\ &= (\eta, \psi), \quad \text{kde } \eta = \sum_{j < J} (T_1^* \varphi_1^{(k)} \otimes T_2^* \varphi_2^{(k)}) = (T_1^* \otimes T_2^*)\varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Tím jsme ovšem z *definice* ukázali, že takové φ je prvkem $D((T_1 \otimes T_2)^*)$ a že hodnota $(T_1 \otimes T_2)^* \varphi$ je pro něj rovna $(T_1^* \otimes T_2^*)\varphi$, což znamená $T_1^* \otimes T_2^* \subset (T_1 \otimes T_2)^*$.

Uzavíratelnost $T_1 \otimes T_2$ plyne z toho, že jeho sdružený operátor $(T_1 \otimes T_2)^*$ je hustě definovaný, pak $\overline{T_1 \otimes T_2} = (T_1 \otimes T_2)^{**}$. Hustá definovanost $(T_1 \otimes T_2)^*$ plyne z toho, že je nadmnožinou $T_1^* \otimes T_2^*$, který již sám je hustě definovaný. Inkluze z našeho tvrzení se pak ukáže přímo z definic: $x \in D(\overline{T_1})$, $y \in D(\overline{T_2})$ právě tehdy, když

$$\exists (x_n)_{n < \omega} \subset D(T_1): x_n \rightarrow x, T_1 x_n \rightarrow u, \text{ přičemž } \overline{T_1} x = u \quad (14)$$

a podobně pro $y, v = D(\overline{T_2})y$. Odsud ovšem plyne také

$$x_n \otimes y_n \rightarrow x \otimes y, (T_1 \otimes T_2)(x_n \otimes y_n) \rightarrow u \otimes v \Rightarrow x \otimes y \in D(T_1 \otimes T_2), (T_1 \otimes T_2)(x \otimes y) = u \otimes v = (\overline{T_1} \otimes \overline{T_2})(x \otimes y). \quad (15)$$

Nejdůležitější ze zbývajících vlastností tenzorového součinu z přehledu pro omezené operátory pro nás bude vlastnost 5 přeformulovaná pro samosdruženost: jsou-li operátory T_1, T_2 v podstatě samosdružené, pak $T_1 \otimes T_2$ je v podstatě samosdružený (a tedy $T_1 \otimes T_2$ samosdružený). Toto se však dokazuje až prostředky spektrálního rozkladu (10.8.2).

Poznámka. Všechno zavedené značení a poznatky mají přímočaré zobecnění na tenzorový součin *konečně mnoha* prostorů, vektorů, bází, operátorů.

Příklad

Jako příklad rozdílu mezi rozdíly v základních vlastnostech $T_1 \otimes T_2$ a $T_1 \otimes T_2$ volme opět $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L^2(\mathbb{R})$, za T_1 volme operátor hybnosti P a za T_2 jednotkový operátor – operace zahrnující jednotkový operátor jsou zpravidla velmi jednoduché, ale zde již stačí pro demonstraci základní myšlenky.

Operátor $P \otimes I$ je definován pro lineární kombinace funkcí $f_i \in H^1(\mathbb{R})$ s libovolnými $g_i \in L^2(\mathbb{R})$. Jeho předpis zní jednoduše

$$(P \otimes I) \left(\sum_i \alpha_i f_i \otimes g_i \right) = \sum_i \alpha_i (-if_i') \otimes g_i. \quad (16)$$

Na druhou stranu pro operátor $P \otimes I$ musíme najít všechny limity funkcí takového tvaru, pro které i pravá strana konverguje ke stejné hodnotě nezávisle na limitní posloupnosti vlevo. Do jeho definičního oboru, který se *nebude* pokoušet popsat množinově, bude tedy patřit i řada dalších funkcí, například (ovšem ne pouze) všechny funkce z $H^1(\mathbb{R}^2)$. Na ně se dá ukázat (pomocí nástrojů, které zatím nemáme), že bude působit jako *parciální* derivace podle x :

$$P \otimes I: F(x, y) \in H^1(\mathbb{R}^2) \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \quad (17)$$

Co tím chceme ukázat, že pro výpočet aplikace tohoto operátoru na obecný vektor již nestačí, narozdíl od $P \otimes I$, „umět“ používat zvlášť P na $H^1(\mathbb{R})$ a I na $L^2(\mathbb{R})$: pro jeho výpočet je potřeba *nový druh* matematické operace, přirozený až na prostoru funkcí dvou proměnných, parciální derivace místo totální!

Takovýto tvar (a jeho zobecnění na součin n operátorů, z nichž jeden je P a ostatní I) mají operátory složek hybnosti pro částice ve vícerozměrném prostoru. Sestavování jejich plného definičního oboru se vyhneme tím, že budeme uvažovat nějaké jednodušší obory, v zúžení na něž si operátor hybnosti zachová *podstatnou* samosdruženost, která je pro argumenty zahrnující tenzorový součin (a mnohé jiné) podstatně jednodušší, viz poslední poučka zmíněná v hlavním textu. Pro výpočty, kde bychom definiční obor potřebovali (například pro určení spektra operátoru, které pro neuzavřený operátor ztrácí jakoukoli informační hodnotu), představíme nástroje, které budou schopny pracovat i s operátory v podstatě samosdruženými.