

Kreační a anihilační operátory – obecný případ a komutační relace

Na minulé hodině jsme předběžně zavedli kreační a anihilační operátory pro báze stavy nějaké pevně zvolené báze $(\varphi_j)_{j < d}$ prostoru \mathcal{H}_1 , pro symetrizovaný i antisymetrizovaný Fockův prostor, jako lineární rozšíření vztahů

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger(\varphi_j) \Phi_S\{n_0, n_1, \dots, n_j, \dots\} &= \sqrt{n_j + 1} \Phi_S\{n_0, n_1, \dots, n_j + 1, \dots\}, \\ \hat{a}(\varphi_j) \Phi_S\{n_0, n_1, \dots, n_j, \dots\} &= \begin{cases} \sqrt{n_j} \Phi_S\{n_0, n_1, \dots, n_j - 1, \dots\}, & n_j \geq 1, \\ 0, & n_j = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

pro symetrický případ a

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger(\varphi_j) \Phi_A\{n_0, n_1, \dots, n_j, \dots\} &= \begin{cases} (-1)^{\sum_{i < j} n_i} \Phi_A\{n_0, n_1, \dots, n_j + 1, \dots\}, & n_j = 0, \\ 0, & n_j = 1, \end{cases} \\ \hat{a}(\varphi_j) \Phi_A\{n_0, n_1, \dots, n_j, \dots\} &= \begin{cases} (-1)^{\sum_{i < j} n_i} \Phi_A\{n_0, n_1, \dots, n_j - 1, \dots\}, & n_j = 1, \\ 0, & n_j = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

pro antisymetrický.

Protože definiční obor získaný pouhým lineárním rozšířením vztahů výše dává zbytečně omezený prostor a protože vzorce (1), (2) jsou příliš silně spjaty s konkrétní volbou báze na \mathcal{H}_1 , podíváme se, zda by nemělo smysl dodefinovat na některé další prvky hodnotu limitou. Za tímto účelem se rozepíšeme jiným způsobem

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger(\varphi_j) S_N(\varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_N}) &= \hat{a}^\dagger(\varphi_j) \sqrt{\frac{\Pi_{k < d} n_k!}{N!}} \Phi_S\{n_1, n_2, \dots\} = \sqrt{\frac{(n_j + 1) \Pi_{k < d} n_k!}{N!}} \Phi_S\{n_1, n_2, \dots, n_j + 1, \dots\} \\ &= \sqrt{\frac{\Pi_{k < d} \tilde{n}_k!}{(N + 1)!}} \sqrt{N + 1} \Phi_S\{n_1, n_2, \dots, n_j + 1, \dots\} = \sqrt{N + 1} S_{N+1}(\underbrace{(\varphi_j \otimes \dots \otimes \varphi_{j_1})}_{\tilde{\varphi}_j} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_N}), \end{aligned} \quad (3)$$

kde \tilde{n}_k značí posloupnost n_k s j -tým členem zvýšeným o 1 (jejímž součtem je $N + 1$). Tato rovnice nabízí potenciál pro zobecnění, kdy by členy tenzorového součinu ani argument v $\hat{a}^\dagger(\varphi)$ nebyly vymezeny na báze stavy. Skutečně, to je rovnost, se kterou se setkáváme jako s definicí (19.2.6a) a na základě linearit tenzorového součinu a projektorů S_N, S_{N+1} se snadno přesvědčíme, že je korektní.

Pro symetrizovaný Fockův prostor je irelevantní, zda člen φ_j přidáme v (3) na začátek nebo na konec tenzorového součinu, ale v případě $\mathcal{F}_A(\mathcal{H}_1)$ je s volbou znamének v (2) (danou zvoleným pořadím vektorů v bázi) konzistentní jen přidání na začátek, protože A_N mění znaménko při prohození prvků tenzorového součinu. Výpočet se tím poněkud zkomplikuje, podívejme se na něj za předpokladu $n_j = 0$:

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger(\varphi_j) A_N(\varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_N}) &= \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_N) \hat{a}^\dagger(\varphi_j) A_N(\varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_N}) \\ &= \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_N) \hat{a}^\dagger(\varphi_j) \frac{1}{\sqrt{N!}} \Phi_A\{n_1, n_2, \dots\} = \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_N) \frac{(-1)^{\sum_{i < j} n_i}}{\sqrt{N!}} \Phi_A\{n_1, n_2, \dots, n_j + 1, \dots\} \\ &= \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_N) \frac{(-1)^{\sum_{i < j} n_i}}{\sqrt{N!}} \sqrt{(N + 1)!} A_{N+1}(\underbrace{(\varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_j} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_N})}_{\sum_{i < j} n_i \text{ členů} - \text{každý přeskočíme za } -1}) \\ &= \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_N) \sqrt{N + 1} A_{N+1}(\underbrace{(\varphi_j \otimes \dots \otimes \varphi_{j_1})}_{\tilde{\varphi}_j} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_N}) \\ &= \sqrt{N + 1} A_{N+1}(\underbrace{(\varphi_j \otimes \dots \otimes \varphi_{j_1})}_{\tilde{\varphi}_j} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_N}), \end{aligned} \quad (4)$$

kde znaménko částečné permutace (j_1, \dots, j_N) se objevilo za přerovnání (j_i) na (\hat{j}_i) a zmizelo při provedení stejné záměny nazpět v posledním kroku. Poslední získaný tvar je použitelný i v případě $n_j = 1$, protože potom na pravé straně vznikne tenzorový součin obsahující φ_j dvakrát a operátor A_{N+1} jej zobrazí na nulu, což je konzistentní s (2). Opět tak získáváme vzorec, který je možné okamžitě zobecnit i mimo báze vektory φ_j .

Co se týká zobecnění anihilačního operátoru z formy (1), (2) na formu podobnou (3), (4), předvedeme si možnou

jeho logiku na symetrizovaném případě. Začneme tedy stejně, pro $N \geq 1$

$$\begin{aligned}
\dot{a}(\varphi_j) S_N(\varphi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_N}) &= \dot{a}(\varphi_j) \sqrt{\frac{\Pi_{k < d} n_k!}{N!}} \Phi_S\{n_1, n_2, \dots\} = \sqrt{\frac{\Pi_{k < d} n_k!}{N!}} \sqrt{n_j} \Phi_S\{n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots\} \\
&= \sqrt{\frac{\Pi_{k < d} n_k!}{N!}} \sqrt{n_j} \sqrt{\frac{(N-1)!}{\Pi_{k < d} \tilde{n}_k}} S_{N-1}(\varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \cancel{\varphi_j} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_N}) \quad (\tilde{n}_k = n_k - \delta_{kj}) \\
&= \frac{n_j}{\sqrt{N}} S_{N-1}(\varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \cancel{\varphi_j} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_N})
\end{aligned} \tag{5}$$

Poslední řádka má pro odpoutání se od báзовých stavů problém, že odkazuje na hodnotu n_j , která je vlastností konkrétního vstupního stavu na levé straně, a že obsahuje operaci „škrtnout ten správný člen“. Nicméně n_j je zrovna počet opakování hodnoty j v posloupnosti j_1, j_2, \dots, j_N . Obou problémů se tedy elegantně zbavíme tak, že budeme počítat přes všechny členy tenzorového součinu a započítáme jen ty, kde se j_k s j shoduje:

$$\cdots = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \delta_{j,j_k} S_{N-1}(\varphi_{j_1} \otimes \varphi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \cancel{\varphi_{j_k}} \otimes \cdots \otimes \varphi_{j_N}) \tag{6}$$

Posledním krokem je nahrazení δ_{j,j_k} skalárním součinem $(\varphi_j, \varphi_{j_k})$, který má stejnou hodnotu, ale již dává správný zobecnitelný předpis, tedy lineární v proměnných φ_{j_1} až φ_{j_N} a antilineární v proměnné φ (protože φ vystupuje na levé straně skalárního součinu). Dostáváme tak předpis (19.2.6b) s $P = S$.

Antisymetrický případ je potom kombinací tohoto postupu s myšlenkami použitými v odvození (4). Pro $N = 0$ stačí v obou situacích zobecnit $a(\varphi)\Omega_0 = 0$ na libovolné φ .

Definiční obor takto zobecněných operátorů $a(\varphi)$, $a^\dagger(\varphi)$ pak lze psát jako

$$\mathcal{D}_P = \{P_N(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N) \mid \psi_1, \dots, \psi_N \in \mathcal{H}_1, N \in \mathbb{N}_0\}_{\text{lin}} = \sum_{N=0}^{\infty} P_N \mathcal{H}_1^{\otimes N}. \tag{7}$$

Navíc platí, jakožto zobrazení z \mathcal{H}_1 do $\mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathcal{H}_1))$,

- $a^\dagger(\psi)$ je lineární v proměnné ψ ,
- $a(\psi)$ je ve stejné proměnné antilineární.

Platí tedy rozklad (19.2.10a,b) do „bázových“ kreačních a anihilačních operátorů

$$a^\dagger(\psi) \Phi = \sum_{k < d} (\varphi_k, \psi) a^\dagger(\varphi_k) \Phi, \quad a(\psi) \Phi = \sum_{k < d} (\psi, \varphi_k) a(\varphi_k) \Phi, \tag{8}$$

pro všechny stavy $\Phi \in \mathcal{D}_P$, kde $a^\dagger(\varphi_k)$ a $a(\varphi_k)$ jsou lineární rozšíření (1), (2) na obor \mathcal{D}_P . Řady konvergují v normě Fockova prostoru.

Operátory $a^\dagger(\psi)$ a $a(\psi)$ potom nazýváme kreační a anihilační operátory obecného stavu $\psi \in \mathcal{H}_1$.

Poznámka: Záměrně používám symbol \dagger , aby nedošlo k představě, že se jedná o dva vzájemně sdružené operátory. **Není tomu tak**, ani kreační ani anihilační operátor nejsou uzavřené a tedy nemohou být sdružením jeden druhého. Je však možno říci, že jsou zúženými nějakých větších sdružených operátorů na \mathcal{D}_P . Pro antisymetrický případ jsou ale a, a^\dagger omezené operátory a mají tedy spojitá rozšíření na celé $\mathcal{F}_A(\mathcal{H}_1)$, tato vzájemně sdruženými operátory jsou.

Komutační relace

Díky tomu, že na základě definic (19.2.6a,b,c) zobrazují kreační a anihilační operátory libovolného stavu obor \mathcal{D}_P sám do sebe, má smysl na těchto vektorech je zcela libovolně skládat. Především je důležitý vztah (19.2.7)

$$P_N(\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} a^\dagger(\psi_1) a^\dagger(\psi_2) \cdots a^\dagger(\psi_N) \Omega_0, \tag{9}$$

kteřý umožňuje nagenarovat zcela libovolný vektor $\Phi \in \mathcal{D}_P$ konečnou lineární kombinací vektorů získaných působením kreačních operátorů na vakuum.

Nejméně stejnou důležitost potom mají komutační relace (19.2.11a,b)

$$\begin{aligned} [a(\psi), a(\varphi)]_P \Psi &= 0, \\ [a^\dagger(\psi), a^\dagger(\varphi)]_P \Psi &= 0, \\ [a(\psi), a^\dagger(\varphi)]_P \Psi &= (\psi, \varphi) \Psi \end{aligned} \quad (10)$$

pro každou dvojici $\psi, \varphi \in \mathcal{H}_1$ a každé $\Psi \in \mathcal{D}_P$, kde hranatá závorka značí *komutátor* či *antikomutátor*

$$[X, Y]_S \stackrel{\text{ozn.}}{=} [X, Y] = XY - YX, \quad [X, Y]_A \stackrel{\text{ozn.}}{=} \{X, Y\} \stackrel{\text{ozn.}}{=} [X, Y]_+ = XY + YX, \quad (11)$$

jehož smysluplnost je *při aplikaci na* Ψ opět zaručena citovanou invariancí množiny \mathcal{D}_P .

Operátorový zápis komutačních relací, se kterým se běžně setkáváme ve fyzikální literatuře (tedy bez vektoru Ψ), je oprávněný v případě $P = A$, kdy kreační i anihilační operátory jsou omezené a platnost rovnic (10) tak můžeme spojitě rozšířit z hustého podprostoru \mathcal{D}_A na celé $\mathcal{F}_A(\mathcal{H}_1)$.

V případě $P = S$ tomu ovšem brání stejné argumenty jako v případě operátorů polohy a hybnosti a tudíž je takový krok neoprávněný. Lze ovšem použít stejný trik jako tamtéž: najít nějaké funkce těchto operátorů, které budou omezené a budeme tedy moci operovat na celém Fockově prostoru. Poslední část této přednášky tedy budeme věnovat již pouze symetrickému případu.

Segalův polní operátor a Fockova reprezentace

Za zmíněným účelem se zavádí pro libovolné $\psi \in \mathcal{H}_1$ *Segalův polní operátor*

$$\Phi_S(\psi) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a(\psi) + a^\dagger(\psi)), \quad (12)$$

který je v podstatě samosdružený (19.3.1) a definuje tedy nějakou pozorovatelnou na Fockově prostoru. Je důležité vědět, že kvůli rozdílným chováním $a(\psi)$ a $a^\dagger(\psi)$ vzhledem k násobení argumentu skalárem není $\Phi_S(\psi)$ ve svém argumentu ani lineární, ani antilineární. Rovnice

$$\Phi_S(\mu\psi) = \mu\Phi_S(\psi), \quad (13)$$

platí pouze pokud $\mu \in \mathbb{R}$: operátory $\Phi_S(\psi)$ a $\Phi_S(i\psi)$ jsou na sobě nezávislé. Konkrétně platí:

$$\Phi_S(i\psi) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(a(\psi) - a^\dagger(\psi)). \quad (14)$$

Rovnice (10) implikují podobnou relaci pro tyto operátory (19.3.1):

$$[\Phi_S(\varphi), \Phi_S(\psi)]\Psi = i \operatorname{Im}(\varphi, \psi) \Psi, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_1, \forall \Psi \in \mathcal{D}_S. \quad (15)$$

Zejména při volbě φ jednotkového vektoru a $\psi = i\varphi$ dostáváme

$$[\Phi_S(\varphi), \Phi_S(i\varphi)]\Psi = i\Psi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_1, \forall \Psi \in \mathcal{D}_S, \quad (16)$$

což nápadně připomíná kanonické komutační relace polohy a hybnosti. Je tedy zcela oprávněné se ptát, jestli se *pozorovatelné* $\Phi_S(\psi)$ a $\Phi_S(i\psi)$ nedají takto v nějakém smyslu interpretovat.

Přesně k takové otázce máme připraven Stone–von Neumannův teorém. Zkusme tedy, jak se chovají unitární grupy generované touto dvojicí pozorovatelných pro různá ψ , to znamená například v naší referenční bázi \mathcal{H}_1

$$U_j(t) := \exp(it\overline{\Phi_S(\varphi_j)}), \quad V_j(t) := \exp(it\overline{\Phi_S(i\varphi_j)}), \quad j < d. \quad (17)$$

Jestliže budeme citovat už jen nejdůležitější výsledky, věta 19.3.3 ukazuje, že tyto operátory pro každé $j, k < d$ a každé $t, s \in \mathbb{R}$ splňují (19.3.10)

$$\begin{aligned} U_j(t)U_k(s) &= U_k(s)U_j(t), \\ V_j(t)V_k(s) &= V_k(s)V_j(t), \\ U_j(t)V_k(s) &= e^{-i\delta_{jk}ts}V_k(s)U_j(t), \end{aligned} \tag{18}$$

a 19.3.2, že tvoří ireducibilní množinu.

V případě konečné dimenze \mathcal{H}_1 a indexace od jedničky z komutujících operátorů $\{U_j(t) \mid 1 \leq j \leq d\}$ můžeme sestavit součin

$$U(\mathbf{t}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)) : \mathbf{t} \mapsto U_1(t_1)U_2(t_2)\cdots U_d(t_d) \tag{19}$$

a analogicky $V(\mathbf{t})$, poslední z rovnic (18) potom přechází do tvaru, který známe jako Weylovu relaci. Stone–von Neumannův teorém potom říká, že existuje unitární ekvivalence mezi $U_j(t)$, $V_k(s)$ a exponenciálami operátorů složek polohy a hybnosti na $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Z minulé hodiny víme, že pro d -rozměrný prostor \mathcal{H}_1 právě takovýto stavový prostor $L^2(\mathbb{R}^d)$ je s $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ svázán jednoduchou bijekcí báзовých vektorů: přesně toto unitární zobrazení je takové, jakého existenci Stone–von Neumannova věta předpovídá. Pod stejným zobrazením jsou unitárně ekvivalentní také grupové generátory na obou prostorech, takže uzavřené Segalovy operátory $\Phi_S(\psi_j)$ a $\overline{\Phi_S(i\psi_j)}$ v konečněrozměrném případě skutečně odpovídají přesně pozorovatelným složek polohy a hybnosti soustavy harmonických oscilátorů, kterou jsme minule získali.

Pro \mathcal{H}_1 nekonečné dimenze předpoklady Stone–von Neumannovy věty splněné nejsou. V takové situaci mohou vznikat – a vznikají – ireducibilní reprezentace zobecněných Weylových relací (18), které nejsou unitárně ekvivalentní ani mezi sebou vzájemně, natož pak polohám a hybnostem nějakého systému. Reprezentace Weylových relací pomocí exponenciál (17), která v důsledku toho má obecnější vlastnosti než Schrödingerova reprezentace, se nazývá jejich *Fockovou reprezentací*.