

## Čtvrtý postulát kvantové fyziky

Čtvrtý (a poslední) postulát – o složených systémech – vyslovíme nezvykle ve dvou oddělených částech.

**Postulát 4a:** Stavový prostor systému  $S$  složeného z konečného počtu podsystémů  $S_1, \dots, S_N$  je tenzorovým součinem stavových prostorů těchto podsystémů,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$ .

S touto částí a všemi jejími důsledky jsme velmi dobře obeznámeni. Zaslouží si snad jen jedinou poznámku, že vždy uvažuje složení *konečně mnoha* systémů. Důvodem pro absenci zobecnění na vyšší kardinality je jednoduše skutečnost, že většinou není zkoumat nekonečné počty částic fyzikálně opodstatněné. Případný zájem o rozšíření na  $N \geq \omega$  by s sebou nesl potřebu dodefinovat tenzorový součin odpovídajícího počtu prostorů (čehož nelze dosáhnout iterativně součinem dvojic prostorů) a přestaly by platit některé záruky, které nám konečný tenzorový součin dává. Jednou z takových je, že uvažujeme-li prostory  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$  separabilní, pak je separabilní i jejich tenzorový součin – pro součin nekonečně mnoha prostorů toto může být porušeno.

Druhá část se týká systémů nerozlišitelných částic, ale budeme si pro ni potřebovat zavést několik prvků značení. Pokud náš složený systém (nebo nějaký jeho podsystém) je tvořen  $N$  identickými částmi, pak za stavové prostory  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$  dosazujeme  $N$  kopií stejného Hilbertova prostoru, označme jej  $\mathcal{H}_1$ . Je tedy

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1^{\otimes N} =: \mathcal{H}_{(N)}. \quad (1)$$

Pro  $N \in \mathbb{N}$  budeme označovat  $\mathcal{S}_N$  grupu permutací množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Pro prvek  $\sigma \in \mathcal{S}_N$  a zvolený Hilbertův prostor  $\mathcal{H}_1$  nechť  $U_\sigma$  označuje unitární operátor na  $\mathcal{H}_{(N)}$  předepsaný vztahem

$$U_\sigma(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_N) := \varphi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{\sigma(N)}. \quad (2)$$

Pro libovolné dvě permutace  $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_N$  je  $U_\sigma U_\tau = U_{\sigma \circ \tau}$ , zobrazení  $\sigma \mapsto U_\sigma$  je tedy unitární reprezentací grupy  $\mathcal{S}_N$  na prostoru  $\mathcal{H}_{(N)}$ .

Pro stejnou volbu  $N$  a  $\mathcal{H}_1$  označíme

$$S_N := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} U_\sigma, \quad A_N := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \text{sgn } \sigma U_\sigma. \quad (3)$$

Podíváme se na nejvýznamnější vlastnosti této dvojice operátorů (na přednášce s důkazy):

1. Pro každé  $N \in \mathbb{N}$  se jedná o dvojici projektorů.
2. Pro  $N = 1$  je  $S_1 = A_1 = I$ . Pro  $N > 1$  se jedná o vzájemně ortogonální projektory.
3. Platí  $S_2 + A_2 = I$ . Pro  $N > 2$  však pouze  $S_N + A_N \leq I$ .
4. Pro každé  $\sigma \in \mathcal{S}_N$  je

$$U_\sigma S_N = S_N, \quad U_\sigma A_N = \text{sgn } \sigma A_N. \quad (4)$$

Pro tvrzení, která budou platit obdobně pro  $S_N$  nebo  $A_N$ , budeme používat zástupný symbol  $P_N$ .

**Postulát 4b:** Stavový prostor  $N$  identických bosonů (resp. fermionů) s jednočásticovým stavovým prostorem  $\mathcal{H}_1$  lze vymezit na podprostor  $S_N \mathcal{H}_{(N)}$  (resp.  $A_N \mathcal{H}_{(N)}$ ) prostoru  $\mathcal{H}_{(N)} = \mathcal{H}_1^{\otimes N}$ .

Části b) je potřeba rozumět tak, že ne všechny stavy na prostoru  $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$ , který by jinak předepisovala část a), jsou přípustnými stavy soustavy nerozlišitelných bosonů / fermionů: musí se jednat o statistické operátory redukované odpovídajícím projektorem  $P_N$ , jejichž obor hodnot spadá do  $P_N \mathcal{H}_{(N)}$ . (Pro čisté stavy to znamená, že stavový vektor musí být prvkem  $P_N \mathcal{H}_{(N)}$ .) Takové operátory je potom možné ztotožnit s jejich zúžením na posledně jmenovaný prostor. Tento prostor je, jakožto obor hodnot projektoru, uzavřeným prostorem, a se zúžením skalárního součinu z  $\mathcal{H}_{(N)}$  je Hilbertův. Pro  $N = 1$  není mezi  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_{(1)}$ ,  $S_1 \mathcal{H}_{(1)}$  a  $A_1 \mathcal{H}_{(1)}$  rozdíl.

Je samozřejmě potřeba zabývat se konzistencí takového zúžení. Ta se opírá o matematické vyjádření **principu nerozlišitelnosti** částic. Fyzikálně nerozlišitelnost znamená, že neexistuje pozorování, které by od sebe odlišilo

stavy  $\varphi, \chi \in \mathcal{H}_{(N)}$ , které splňují  $\chi = U_\sigma \varphi$  pro nějakou permutaci  $\sigma \in \mathcal{S}_N$ . Matematicky tento požadavek vyjádříme tak, že pro každou *přípustnou* pozorovatelnou  $A$ , každou  $\Delta \in \mathcal{B}^1$  a každý stav  $\psi \in \mathcal{H}_{(N)}$  musí platit

$$\begin{aligned} w(\Delta, A; \psi) &= w(\Delta, A; U_\sigma \psi) \\ (\psi, E_A(\Delta) \psi) &= (U_\sigma \psi, E_A(\Delta) U_\sigma \psi) = (\psi, U_\sigma^{-1} E_A(\Delta) U_\sigma \psi). \end{aligned} \quad (5)$$

Díky obecnému kvantifikátoru  $\forall \psi \in \mathcal{H}_{(N)}$  poslední řádka ale znamená, že  $E_A(\Delta) - U_\sigma^{-1} E_A(\Delta) U_\sigma$  je nulový operátor, a potažmo, že  $E_A(\Delta)$  a  $U_\sigma$  komutují. Nakonec, jestliže s operátorem  $U_\sigma$  komutuje každý prvek spektrální míry  $E_A$ , znamená to, že s ním komutuje i pozorovatelná  $A$  sama. Dostáváme tak hledané matematické vyjádření principu: **Přípustné pozorovatelné na systému  $N$  nerozlišitelných částic jsou takové, které komutují se všemi operátory  $U_\sigma$ ,  $\sigma \in \mathcal{S}_N$ .**

Vraťme se tedy k otázce bezespornosti formulace části b) postulátu. Komutuje-li  $A \in \mathcal{L}_{sa}(\mathcal{H}_{(N)})$  s operátory  $U_\sigma$  pro všechna  $\sigma \in \mathcal{S}_N$ , pak podle (3) komutuje také s projektory  $P_N$ . To je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby jimi byla redukována. Pokud potom v nějaký okamžik vymezíme stav soustavy na vektor z prostoru daného částí b), je třeba si uvědomit, že jediné dva způsoby, jakými se v rámci naší (nyní již kompletně vyslovené) sady postulátů může měnit, je

- změna stavu po měření:  $\tilde{W} = EWE / \text{Tr}(EW)$ , kde  $E = E_A(\Delta)$  pro nějakou pozorovatelnou  $A$ ,
- časový vývoj daný Schrödingerovou rovnicí, tedy pozorovatelnou  $H$ .

Jestliže *každá* pozorovatelná je vázána požadavkem reducibility na prostor  $P_N \mathcal{H}_{(N)}$ , pak totéž platí pro jejich projektorové míry a výsledek měření nemůže tento prostor opustit. Podobně rychle ukážeme, že vlastnost  $P_N W = W P_N$  se přenáší i na  $dW/dt$  (pro  $H$  omezené, jinak s potřebnými úpravami) a předchozí závěr platí tak i pro časový vývoj.

V případě zahrnutí nerozlišitelných částic do popisovaného kvantového systému tak čtvrtý postulát omezuje obecnost prvního: ne každý ze stavů prostoru daného 4a) je přípustným stavem fyzikální soustavy a ne každý samodružený operátor může popisovat nějakou přípustnou pozorovatelnou veličinu. Obě omezení ale můžeme obejít, pokud se vymezíme na podprostor předepsaný 4b).

## Prostory funkcí

Uvažujme  $\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbb{R}^3)$ . Platí, že  $N$ -násobným tenzorovým součinem tohoto prostoru sama se sebou dostaneme prostor  $\mathcal{H}_{(N)} = L^2(\mathbb{R}^{3N})$ . Tenzorovým součinem funkcí  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  z  $L^2(\mathbb{R}^3)$  dostaneme funkci

$$\varphi : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{C} : \varphi(x_1, \dots, x_N) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_N(x_N). \quad (6)$$

Operátor  $U_\sigma$ ,  $\sigma \in \mathcal{S}_N$  na ni působí dle vzorce (2) jako

$$(U_\sigma \varphi)(x_1, \dots, x_N) = \varphi_{\sigma(1)}(x_1) \dots \varphi_{\sigma(N)}(x_N) = \varphi_1(x_{\sigma^{-1}(1)}) \dots \varphi_N(x_{\sigma^{-1}(N)}) = \varphi(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(N)}) \quad (7)$$

Poslední vzorec má zobecnění na celé  $\mathcal{H}_{(N)}$  a snadno nahlédneme, že toto rozšíření představuje současně lineární rozšíření (7) na  $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$  a spojitě rozšíření na  $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$ . Předpis

$$(U_\sigma \psi)(x_1, \dots, x_N) = \psi(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(N)}) \quad (8)$$

popisuje tedy akci  $U_\sigma$  na libovolnou  $\psi \in \mathcal{H}_{(N)}$ .

K předpisu obecného vektoru z  $S_N \mathcal{H}_{(N)}$  můžeme dojít přes vlastnost (4) snáze než přes definici (3). Taková funkce totiž musí splňovat

$$\xi = S_N \xi = U_\sigma S_N \xi, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_N \quad \Rightarrow \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_N : \xi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(N)}) \stackrel{\text{s.v.}}{=} \xi(x_1, \dots, x_N). \quad (9)$$

Prostor  $S_N \mathcal{H}_{(N)}$  je tedy tvořen funkcemi, které jsou s.v. symetrické vůči libovolné záměně svých argumentů. Analogicky pro  $\eta \in A_N \mathcal{H}_{(N)}$

$$\eta = A_N \eta = \text{sgn } \sigma U_\sigma \eta, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_N \quad \Rightarrow \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_N : \eta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(N)}) \stackrel{\text{s.v.}}{=} \text{sgn } \sigma \eta(x_1, \dots, x_N). \quad (10)$$

Protože další akce  $S_N$ , resp.  $A_N$  na  $\xi$ , resp.  $\eta$  nechává tyto vektory invariantní, jsou podmínky na pravé straně pro náležitost do  $P_N \mathcal{H}_{(N)}$  současně nutné a postačující.