

## Absolutní spojitost funkcí

### Prostory spojitých funkcí

Připomeňme formou rychlého shrnutí na úvod význam obvyklých značení prostorů spojitých funkcí.

$C(\Omega)$  ... (komplexní) funkce spojitě na oblasti  $\Omega$ ,

$C^k(\Omega)$  ... funkce se spojitými (parciálními) derivacemi do  $k$ -tého řádu,

$C^\infty(\Omega)$  ... nekonečně diferencovatelné funkce,

$C_c(\Omega)$  ... spojitě funkce s kompaktním nosičem,

$C_c^\infty(\Omega)$  ... nekonečně diferencovatelné funkce s kompaktním nosičem, též testovací funkce,

$C_\infty(\Omega)$  ... funkce klesající k nule u hranice  $\Omega$ ,

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ... Schwartzův prostor rychle ubývajících funkcí.

Pro další informace, přehled a odvození vztahů mezi některými z těchto tříd čtenáře odkážeme v knize na příklad 2.6.14. (Autoři naše  $C_c$  značí  $C_0$ .)

### Absolutní spojitost

Připomeňme nejprve větu o absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu:

**Věta.** Nechť  $f \in L^1(X, d\mu)$ . Platí:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall M \subset X : \mu(M) < \delta \Rightarrow \int_M |f| d\mu < \varepsilon. \quad (1)$$

Uvažujme  $X = I = (a, b)$ , interval v  $\mathbb{R}$  (krajní body mohou být i nekonečné), a Lebesgueovu míru  $\lambda$ . Vezměme nějakou funkci  $g \in L^1(I)$ . Do věty o absolutní spojitosti integrálu dosadíme  $M$  tvaru disjunktního sjednocení otevřených intervalů  $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N)$ , dozvídáme se:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^N \left| \int_{a_i}^{b_i} g(x) dx \right| \leq \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} |g(x)| dx < \varepsilon. \quad (2)$$

Jestliže nyní  $g$  má primitivní funkci  $G$ , integrály přes podintervaly  $(a_i, b_i)$  jdou vyhodnotit Newtonovou formulí jako rozdíly  $G(b_i) - G(a_i)$ . Vlastnost funkce  $G$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^N |G(b_i) - G(a_i)| < \varepsilon, \quad (3)$$

motivuje definici *absolutní spojitosti funkce*.

Provedeme jedno malé zobecnění, o derivaci  $g$  budeme uvažovat pouze lokální  $L^1$ -integrabilitu. Podmínka se tím změní na součet intervalů, jejichž všechny krajní body leží v  $I$  (a tedy do  $I$  spadají celé uzavřené podintervaly  $\langle a_i, b_i \rangle$ ), ale o nich již nepředpokládáme disjunktnost.

**Definice.** Nechť  $I$  je interval na reálné ose. Řekneme, že (tradiční!) funkce  $F$  je na  $I$  *absolutně spojitá*, platí-li

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall N \in \mathbb{N}, \forall a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_N \in I : \sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^N |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon. \quad (4)$$

Jak jsme viděli, absolutní spojitost je v tomto uvození motivovaná tím, že  $F$  je primitivní funkcí své derivace. Pro absolutně spojitě funkce tedy platí, že jejich derivace je lokálně  $L^1$ -integrabilní a splňuje základní větu integrálního počtu,

$$F(y) = F(x) + \int_x^y F'(t) dt \quad (5)$$

pro libovolný uzavřený podinterval  $\langle x, y \rangle \subset I$ . Tato podmínka je absolutní spojitosti ekvivalentní.

## Derivace ve slabém smyslu

Nechť  $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , nechť  $\alpha$  je multiindex. Řekneme, že  $g$  je *slabou derivací*  $\alpha$ -tého řádu funkce  $f$ , jestliže pro každou *testovací funkci*  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \partial^\alpha \varphi \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} g \varphi \, d\mathbf{x}. \quad (6)$$

Jestliže slabá derivace existuje, je (až na volnost danou třídou  $L$ ) jednoznačná. Označíme:  $g = D^\alpha f$ .

Tato definice je jednoduchou obměnou derivace v prostoru distribucí, vymezenou na regulární funkce. Jestliže by nějaká regulární funkce  $f$  měla derivaci, která je singulární, uvažujeme v rámci této definice, že slabou derivaci nemá. To se týká především funkcí, které jsou nespojitě z důvodu skoků.

Jestliže  $f$  nad  $\mathbb{R}$  má slabou derivaci  $g$ , opět můžeme použít argument o absolutní spojitosti *integrálu* funkce  $g$  a ukázat, že na  $\mathbb{R}$  se jedná o ekvivalentní podmínku absolutní spojitosti *funkce*  $f$ . Ovšem slabá derivace je pojem zobecnitelný i na vyšší dimenze  $\mathbb{R}^n$ .

## Poznámka o inkluzích tříd $L$

Víme, že pro libovolnou dvojici  $p, q \in \langle 1, \infty \rangle$ ,  $p \neq q$ , lze najít funkci, která leží v  $L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R})$ . Pokud  $p > q$ , je takovou funkcí například

$$f(x) = \chi_{(1, \infty)}(x) x^{-1/q}, \quad (7)$$

v opačném případě naopak můžeme použít

$$f(x) = \chi_{(0, 1)}(x) x^{-1/q}. \quad (8)$$

Mezi žádnou dvojicí různých  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $L^q(\mathbb{R})$  tedy neplatí relace inkluze.

Situace je ale jiná pro kompaktní interval  $I$ , protože protože odpadá možnost, že by integrál zdivergoval v okolí nekonečna. Vskutku, rozdíl  $L^p(\mathbb{R}) \setminus L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  je prázdný pro každé  $p$ :

**Věta.** Nechť  $\Omega$  je otevřený interval v  $\mathbb{R}$ , nechť  $1 \leq p \leq \infty$ . Libovolná funkce  $f \in L^p(\Omega)$  je také lokálně integrabilní.

*Důkaz.* Buď  $K \subset \Omega$  kompaktní. Použijeme Hölderovu nerovnost na součin  $f \chi_K$ :

$$\int_K |f(x)| \, d\mathbf{x} = \int_\Omega |f(x) \chi_K(x)| \, d\mathbf{x} \leq \left| \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mathbf{x} \right|^{1/p} \left| \int_K 1 \, d\mathbf{x} \right|^{1/q} = \|f\|_p |K|^{1/q} < \infty. \quad (9)$$

Jinými slovy třída  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  obsahuje všechny  $L^p$  jako podmnožiny.

## Sobolevovy prostory

Sobolevovy prostory  $W^{k,p}(\Omega)$  jsou prostory funkcí z  $L^p(\Omega)$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  otevřená, takových, že slabé derivace  $D^\alpha f$  všech řádů  $|\alpha| \leq k$  jsou také třídy  $L^p(\Omega)$ . Podmínka  $f \in W^{k,p}$  je silnější než  $f \in W^{k',p}$  pro  $k > k'$ , takže platí odpovídající inkluze i mezi prostory.

Prostory  $W^{k,p}$  mají blízký vztah k absolutní spojitosti a budou pro nás fungovat především jako zkratka k ní. Jak jsme stanovili dříve, každá funkce nad  $\mathbb{R}$ , která vůbec má slabou derivaci, je absolutně spojitá (což v rámci Lebesgueovy teorie znamená: je skoro všude rovna funkci, která je absolutně spojitá, nebo: obsahuje, jakožto třída funkcí, reprezentační funkci, která je absolutně spojitá), a podmínka být třídy  $L^p$  je vždy silnější než  $L^1_{\text{loc}}$ . Tedy například prostor  $W^{1,p}(\mathbb{R})$  je tvořen funkcemi, které jsou absolutně spojitě a  $L^p$ -integrabilní včetně své derivace.

Platí i mnohem silnější tvrzení, obzvláště užitečné potom ve vícerozměrných prostorech:

**Věta** (O. Nikodým (1933)). Nechť  $1 \leq p \leq \infty$ , nechť  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  otevřená konvexní množina. Jestliže funkce  $f \in W^{1,p}(\Omega)$ , pak pro skoro všechna  $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  je funkce

$$g(x) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (10)$$

absolutně spojitá na  $\{y \in \Omega \mid y_i = x_i \forall i \neq k\}$  a  $L^p$ -integrabilní. Naopak, je-li  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $|\nabla f| \in L^p(\Omega)$  a platí-li podmínka absolutně spojitých zúžení  $f$  na skoro všechny linie rovnoběžné se souřadnými osami, pak  $f \in W^{1,p}$ .

Sobolevovy prostory snoubí absolutní spojitost s Lebesgueovým pojetím funkce. V jednorozměrném případě z vlastnosti, že každá třída obsahuje reprezentační funkci v tradičním smyslu, která je absolutně spojitá, má smysl mluvit o hodnotě  $f \in W^{k,p}$  v bodě – myslí se tím hodnota této reprezentační funkce. Tato vlastnost se pak přenáší při  $n > 1$  na skoro všechny body. Tvrzení výše je konstruované tak, že roli derivace přejímají parciální derivace podle jednotlivých souřadnic.

Sobolevovy prostory jsou úplné vůči normě

$$\left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad (11)$$

či ekvivalentní normě

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p} \quad (12)$$

a tedy Banachovy.

Zvláštní případ je volba  $p = 2$ , při níž označujeme  $W^{k,2} := H^k$ . Prostory  $H^k$  splňují dokonce podmínku Hilbertových prostorů, čtenář snadno v rámci procvičení doplní k normě (11) skalární součin.

Sobolevův prostor  $W^{k,p}(\Omega)$  také obsahuje všechny testovací funkce z množiny  $C_c^\infty(\Omega)$ . Co je zajímavé, v případě  $\Omega = \mathbb{R}^n$  (pro podmnožiny platí dodatečné podmínky) platí, že Sobolevův prostor můžeme získat z  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  zúplněním vůči normě (11). Platí tedy, že pro každou funkci z  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  existuje posloupnost testovacích funkcí, která k ní v normě (11) konverguje.

Uvidíme, že Sobolevovy prostory hrají důležitou roli jako definiční obory operátorů. Například pro jednorozměrný operátor hybnosti  $P : \psi \mapsto -i\psi'$  by přirozený definiční obor diktoval podmínky  $\psi, \psi' \in L^2(\mathbb{R})$ , s touto volbou bychom ale zavedli operátor, který by nebyl symetrický (natož pak samosdružený). Pro symetrii potřebujeme zaručit podmínku

$$(\varphi, P\psi) = (P\varphi, \psi), \forall \varphi, \psi \in D(P), \quad (13)$$

která je ekvivalentní možnosti integrace per partes, protože bychom chtěli argumentovat

$$(\varphi, P\psi) = -i \int_{\mathbb{R}} \varphi^*(x) \psi'(x) dx = -i [\varphi^*(x) \psi(x)]_{-\infty}^{\infty} + i \int_{\mathbb{R}} \varphi'^*(x) \psi(x) dx = 0 + \int_{\mathbb{R}} (-i\varphi'(x))^* \psi(x) dx = (P\varphi, \psi). \quad (14)$$

Ovšem skutečnost, že integrováním funkce  $f'g + fg'$  dostaneme  $fg$ , je podmíněna právě absolutní spojitostí, kterou musíme k předpokladům doplnit.

## Poznatky o absolutně spojitých funkcích

Uvedeme na závěr dvě důležité vlastnosti funkcí z prostoru  $H^1(J)$ , kde  $J$  je interval v  $\mathbb{R}$ . Jak již zaznělo, ač jeho funkce jsou Lebesgueovy funkce, jsou absolutně spojitě a tedy má smysl mluvit o jejich hodnotách v bodech  $x$ .

Za prvé z definic samotných není vyloučeno, že pro otevřený interval  $J$  s některým krajním bodem konečným by nemohly funkční hodnoty divergovat v okolí tohoto bodu. Podmínka absolutní spojitosti již svým zápisem vyžaduje, aby  $f(x)$  bylo konečné v každém  $x \in J$ , ale o limitě nic netvrdí. Nicméně se snadno přesvědčíme, že v případě (silnější!) podmínky  $H^1(J)$  tato konečnost porušena nebude.

**Věta.** Nechť  $J$  má konečný krajní bod, nechť  $f \in H^1(J)$ . Pak  $f(x)$  má v tomto krajním bodě konečnou limitu.

*Důkaz.* Uvažujme bez újmy na obecnosti  $J = (a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b < \infty$  (tedy pravý krajní bod konečný). Zvolme pevně  $c \in J$ . Nechť dále  $x \in (c, b)$ . Konečnost limity  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$  je ekvivalentní otázce, zda

$$\lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x f'(t) dt = \lim_{x \rightarrow b-} f(x) - f(c) \quad (15)$$

konverguje. Ovšem integrál uvnitř limity můžeme psát jako

$$\int_a^b f'(t) \chi_{(c,x)}(t) dt, \quad (16)$$

což je díky omezenosti intervalu  $(c, x)$  integrál součinu dvou funkcí z  $L^2(a, b)$ , a protože  $\chi_{c,x}$  konverguje k  $\chi_{c,b}$  v  $L^2(a, b)$ -normě při  $x \rightarrow b-$ , konverguje také tento výraz ke konečné hodnotě

$$\int_a^b f'(t) \chi_{(c,b)}(t) dt, \quad (17)$$

a  $f(x)$  k hodnotě o  $f(c)$  větší.

**Důsledek.** Prostory  $H^1((a, b))$  a  $H^1((a, \bar{b}))$ , obecněji  $H^1(J)$  a  $H^1(\bar{J})$ , jsou tvořené stejnými funkcemi.

Jestliže tímto máme ustanoveno, že limity funkcí z  $H^1(J)$  konvergují v konečných krajních bodech, podívejme se ještě na případ nekonečných krajů intervalu  $J$ . Je zřejmé, že limitou nemůže být žádné nenulové číslo, ale stále by byla možnost, že funkce limitu nemá.

**Věta.** Nechť  $J$  má některý krajní bod v nekonečnu, nechť  $f \in H^1(J)$ . Pak  $f(x)$  má v tomto bodě limitu 0.

*Důkaz.* Zkoumejme funkci  $g(x) = |f(x)|^2 = f(x)^* f(x)$ . Snadno se přesvědčíme, že z absolutní spojitosti  $f$  plyne, že i  $g$  je absolutně spojitá. Je tedy integrálem své derivace, pro  $c, d \in J$  platí

$$\int_c^d (f'(t)^* f(t) + f(t)^* f'(t)) dt = |f(d)|^2 - |f(c)|^2. \quad (18)$$

Nechť opět  $b = +\infty$  je zkoumaným krajním bodem. Protože z definice prostoru  $H^1(J)$  jsou  $f(x)$  i  $f'(x)$  třídy  $L^2(a, b)$ , spěje také (18) ke konečné limitě

$$\int_c^\infty (f'(t)^* f(t) + f(t)^* f'(t)) dt =: l, \quad (19)$$

když  $d \rightarrow +\infty$ , a odsud má limitu i  $|f(x)|^2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} |f(c)|^2 + l$ . Ovšem s  $L^2$ -integrabilitou na nekonečném intervalu je jedinou konzistentní limita nula.