

Komutativita operátorů

Pojmu, že dva operátory *komutují*, jsme se dosud při různých příležitostech spíše vyhýbali. Důvodem je, že je praktické jej definovat jinak než přirozeným způsobem $AB = BA$. Konkrétně jsou celkem tři oblasti, ve kterých komutativitu zavádíme:

1. Dva omezené operátory – zde klasická definice platí a nepředstavuje žádný problém.
2. Omezený operátor s neomezeným.
3. Pro dva neomezené operátory zavedeme otázku komutativity jen pro dvojici **samosdružených**.

Komutace neomezeného operátoru s omezeným

Abychom řekli, že neomezený operátor T komutuje s omezeným B , budeme požadovat následující:

- pro $\psi \in D(T)$ je definována akce T i na $B\psi$, tedy $D(TB)$ je alespoň tak velký, jako $D(T)$,
- hodnoty $BT\psi$ a $TB\psi$ vycházejí stejně.

(Poznámka: $B\varphi$ je definované pro každé φ , takže i pro $T\psi$.) Tyto podmínky *nepopisují* rovnost operátorů TB a BT : operátor TB může být větší. Jedná se tedy o inkluzi:

$$BT \subset TB. \quad (1)$$

Podmínkou, připomeňme, je, aby oborem validity $BT\psi = TB\psi$ byla celá množina, kde T je definován. Jak se chovají hodnoty $B\varphi$ pro $\varphi \notin D(T)$, včetně toho, zda náhodou jsou také v $D(T)$, i když φ samo ne, je irelevantní. Eliminujeme ale opačný případ, kdy $T\psi$ by definované bylo a $TB\psi$ ne. Pokud $D(T) = \mathcal{H}$, zejména pokud $T \in \mathcal{B}(H)$, vyjadřuje (1) rovnost operátorů.

Příkladem, kdy tento rozdíl je podstatný, může jít následující: uvažujme dva operátory násobení funkcí, T_f a $T_{1/f}$, kde f je omezená funkce. Pokud $1/f$ je také omezená, což být může i nemusí, jsou T_f i $T_{1/f}$ omezené operátory, které jsou vzájemně inverzní a jejich součin v libovolném pořadí je identita a tedy komutují. Pokud však $\inf_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 0$, pak $1/f$ je neomezená a operátor $T_{1/f}$ také, s definičním oborem

$$D(T_{1/f}) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \varphi(x)/f(x) \in L^2(\mathbb{R})\}. \quad (2)$$

Definiční obor $T_f T_{1/f}$ nemůže být větší než $D(T_{1/f})$, protože složení operátorů znamená aplikovat nejprve tento a potom T_f . Množina $D(T_{1/f})$ je ale rovna $\text{Ran } T_f$, takže na *každé* $\varphi \in \mathcal{H}$ jdou operátory použít v pořadí T_f , poté $T_{1/f}$. Je tedy

$$T_{1/f} T_f = I, \quad T_f T_{1/f} = I|_{D(T_{1/f})} \quad (3)$$

a rovnost $T_f T_{1/f} = T_{1/f} T_f$ tak závisí na tom, jakou funkci f bychom volili. Podmínka komutativity ve tvaru

$$\underbrace{T_f}_{\overline{B}} \underbrace{T_{1/f}}_{\overline{T}} \subset \underbrace{T_{1/f}}_{\overline{T}} \underbrace{T_f}_{\overline{B}} \quad (4)$$

ale zůstává v platnosti.

Upozornění: Z příkladu vidíme, že při (1) *není* $TB - BT$ nulový operátor, jen jeho zúžení. Není oprávněné tvrdit $[T, B] = 0$, tato rovnost neplatí!

Pokud v tomto příkladu funkce f je neomezená a její převrácená hodnota také, nebude inkluze platit ani v jednom směru a musíme se obrátit na následující sekci, abychom komutativitu operátorů $T_f, T_{1/f}$ zachránili.

Dva samosdružené operátory

Z vlastností projektorové míry $E: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ plyne, že libovolná dvojice projektorů $E(M), E(N)$, $M, N \in \mathcal{A}$ komutuje. Využijeme této skutečnosti k definici komutativity dvou samosdružených operátorů (byla by použitelná i pro dva normální, ale většinou není důvod): řekneme, že operátory A_1, A_2 komutují právě tehdy, když komutují navzájem jejich spektrální míry, tj. každý projektor z E_{A_1} s každým projektorem z E_{A_2} . (Pro samosdružené ekvivalentně: když komutují jejich rozklady jednotky.)

Na základě této definice komutují libovolné dvě reálné funkce stejného samosdruženého operátoru, například e^{tA} a e^{sA} , což je velmi žádoucí vlastnost.

Může být výhodné otázku komutativity dvou neomezených operátorů převést na komutativitu omezených, protože je o tolik snáze vyjádřená. K tomu jsou běžně používány dvě cesty.

Protože funkce $1/(x - \mu)$ je injektivní, mají A a $R_A(\mu)$, $\mu \in \rho(A)$ spektrální míry se stejným oborem hodnot. Nutnou a postačující podmínkou komutativity A_1, A_2 je tedy, že $R_{A_1}(\mu)$ a $R_{A_2}(\nu)$ komutují pro nějakou, libovolně zvolenou dvojici hodnot μ, ν z jejich rezolventních množin.

Funkce e^{iax} není injektivní pro žádné $a \in \mathbb{R}$, takže operátory e^{iaA} mohou mít spektrální míry hrubší než A . Komutují ale všechny vzájemně a sjednocením oborů hodnot všech jejich spektrálních měř dostaneme opět $\text{Ran } E_A$ (detaily vyžadují trochu práce, dají se najít v důsledku 11.1.5 věty 11.1.4). Druhou podmínkou ekvivalentní komutativitě A_1, A_2 je tedy, že

$$e^{itA_1} e^{isA_2} = e^{isA_2} e^{itA_1}, \forall s, t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

a kromě velmi speciálních případů si nelze pro implikaci \Leftarrow dovolit obecný kvantifikátor vynechat.

Překryv definic

Měli bychom ještě prokázat, že pokud A je samosdružený a B hermitovský, což zasahuje do aplikační oblasti obou sekcí, pak se také jejich požadavky na tvrzení o komutativitě shodují.

Využijeme zmíněného, že $A \in \mathcal{L}_{\text{sa}}(\mathcal{H})$ komutuje s omezeným B právě tehdy, pokud pro každé $\mu \in \rho(A)$

$$R_A(\mu)B = BR_A(\mu). \quad (6)$$

Uvažujme obecné $\psi \in D(A)$ a $\varphi = (A - \mu I)\psi$. Protože $R_A(\mu)$ je k $A - \mu I$ inverzní, dostáváme z podmínky (platné pro všechna $\varphi \in \mathcal{H}$)

$$\forall \psi \in D(A): \quad R_A(\mu)B(A - \mu I)\psi = BR_A(\mu)(A - \mu I)\psi = B\psi \quad (7)$$

Ovšem vektor na levé straně je v $\text{Ran } R_A(\mu) = D(A - \mu I) = D(A)$ (tudíž musí být i pravá strana) a na rovnici lze $A - \mu I$ i zleva:

$$\forall \psi \in D(A): \quad B(A - \mu I)\psi = (A - \mu I)B\psi. \quad (8)$$

Přičtením $\mu\psi$ k oběma stranám získáváme $BA \subset AB$ a všechny provedené úpravy byly ekvivalentní.

Pokud A_1 a A_2 komutují podle definice pro samosdružené operátory, dá se ukázat (na základě dosazení do funkce dvou samosdružených operátorů, což je téma až příští hodiny) poněkud obecnější výsledek, že

$$\forall \psi \in D(A_1 A_2) \cap D(A_2 A_1): \quad A_1 A_2 \psi = A_2 A_1 \psi \quad (9)$$

(viz příklad 10.7.5). Pro jeden nebo oba operátory omezené se tato podmínka redukuje na (1), resp. $A_1 A_2 = A_2 A_1$.

Zajímavé je, že podmínka tvaru pravé strany (9) obecně *není* pro komutativitu postačující, ani pokud platí na množině husté v \mathcal{H} , jak by člověk mohl očekávat. Existují, ač značně vykonstruované, protipříklady (16.2.2).

Reducibilita operátoru

Komutativita neomezeného T s projektoem E úzce souvisí s otázkou reducibility na podprostor.

Uvažujme inkluzi $ET \subset TE$ z hlediska vektoru $\psi \in \mathcal{H}$: jestliže $\psi \in D(T)$, pak $E\psi \in D(T)$ a $T(E\psi) = E(T\psi)$. Z poslední zapsané rovnice je evidentní, že obraz $E\psi$ při T je rovněž v $\text{Ran } E$, a tedy T zobrazuje vektory z $\text{Ran } E$ zpět do $\text{Ran } E$.

Srovnajme toto kritérium s podmínkou toho, kdy $\text{Ran } E$ je invariantní podprostor T (kap. 3.6), která je jednodušší: G je takovým podprostorem, pokud $\forall \psi \in D(T) \cap G: T\psi \in G$. Jestliže T komutuje s projektoem E , lze odsud ovšem vyvodit, že

1. $\text{Ran } E, (\text{Ran } E)^\perp$ jsou T -invariantní,
2. $ED(T) \subset D(T)$,

z čehož okamžitě vidíme, že požadavek komutativity je silnější. Díky poslednímu vztahu můžeme libovolný vektor $\psi \in D(T)$ rozložit na část v $\text{Ran } E$ a v jeho ortogonálním doplňku a T použít zvlášť – toto pro obecný T -invariantní podprostor není validní krok. Poslední dvojice uvedených podmínek je ve skutečnosti nejen nutná, ale i postačující pro $ET \subset TE$ (věta 7.4.4).

Za podmínky $ET \subset TE$ tedy můžeme velmi dobře říci, že T působí na (uzavřených) podprostorech $\text{Ran } E$ a $(\text{Ran } E)^\perp$ nezávisle na sobě. Je tedy plně specifikován operátorem T_1 na prvním a T_2 na druhém z nich a lze psát

$$T = T_1 \oplus T_2. \quad (10)$$

V takovém případě říkáme, že projektor E (či ekvivalentně $I - E$) *redukuje* operátor T a ten je tedy *reducibilní*. Může se stát, že žádný takový projektor kromě triviálních $0, I$ nelze najít. Potom nazýváme T *ireducibilním* operátorem.

Koncept reducibility má přímočaré zobecnění i na množinu operátorů: projektor E redukuje množinu \mathcal{T} , jestliže redukuje každé $T \in \mathcal{T}$; množina \mathcal{T} je ireducibilní, jestli není redukována žádným netriviálním projektoem.

Normální operátory a reducibilita

Pro $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ uvažujme nějakou vlastní hodnotu λ , pokud existuje, její vlastní podprostor $K_\lambda := \text{Ker}(T - \lambda I)$ a projektor E_λ na něj. Pak pro každé $\psi \in D(T)$ je jistě $E_\lambda \psi \in D(T)$, protože je prvkem podprostoru *definovaného* akcí T . Podmínka $TE_\lambda \psi \in \text{Ran } E_\lambda$ je také pro vlastní vektory triviálně splněna. Mohla by se tedy pokazit jen T -invariance $\text{Ran}(I - E_\lambda)$.

Pro každý hustě definovaný operátor je

$$\text{Ker}(T - \lambda I)^* = (\text{Ran}(T - \lambda I))^\perp, \quad (11)$$

ale pokud navíc T je normální, pak

$$\begin{aligned} \text{Ker}(T - \lambda I) &= \text{Ker}(T^* - \lambda^* I) = (\text{Ran}(T - \lambda I))^\perp, \\ (\text{Ker}(T - \lambda I))^\perp &= \overline{\text{Ran}(T - \lambda I)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Uvažujme $\varphi \in \text{Ran}(I - E_\lambda)$, tedy $\varphi = \psi - E_\lambda \psi$ pro nějaké $\psi \in D(T)$. Pak $T\varphi = T\psi - T(E_\lambda \psi)$, ale $E_\lambda \psi$ je ve vlastním podprostoru λ , takže $T\varphi = T\psi - \lambda\psi = (T - \lambda I)\psi$. Dostáváme

$$\varphi \in (\text{Ran } E_\lambda)^\perp = \text{Ran}(I - E_\lambda) \quad \Rightarrow \quad T\varphi \in \text{Ran}(T - \lambda I) \quad \Rightarrow \quad T\varphi \in (\text{Ker}(T - \lambda I))^\perp = (\text{Ran } E_\lambda)^\perp, \quad (13)$$

což je poslední chybějící informace pro postačující podmínku komutativity T a E_λ . Normální operátor je tedy redukován projektoem na kterýkoli ze svých vlastních podprostorů.

Dodatek k unitární ekvivalenci

K našemu seznamu vlastností, které jsou invariantní nebo se jednoduše transformují pro unitárně ekvivalentní operátory $T, S = UTU^{-1}$, můžeme přidat:

- pokud $T \in \mathcal{L}_{\text{sa}}(\mathcal{H})$, pak $S \in \mathcal{L}_{\text{sa}}(\mathcal{H})$ a jeho spektrální míra splňuje $E_S(\Delta) = UE_T(\Delta)U^{-1}$,
- množiny Φ_E jsou pro E_T a E_S stejné a $\forall f \in \Phi_E: f(S) = Uf(T)U^{-1}$,
- T komutuje s $R \iff S$ komutuje s URU^{-1} ,
- jestliže projektor E redukuje T , pak UEU^{-1} je projektor, který redukuje S .