

Příklad 1: Ukažte z definice, že jednoparametrická grupa

$$U(t): L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}): \psi(x) \mapsto \psi(x+t) \quad (1)$$

je silně spojitá. Označme její generátor T . Ukažte, že nutnou a postačující podmínkou pro $\psi \in D(T)$ je $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ a že potom $T\psi = -i\psi'$. (Takto můžeme pomocí Stoneovy věty ukázat samosdruženost operátoru P .)

Návod: Pro silnou spojitost uvažujte limitu akce na $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Pro $\psi \in H^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \psi \in D(T)$ přijde vhod věta o Lebesgueových bodech. Pro opačnou implikaci integrujte funkci $(\psi(x+\tau) - \psi(x))/(i\tau)$ na konečném intervalu (a, b) . Potřebujeme také tvrzení, že konvergence v normě implikuje bodovou konvergenci skoro všude.

Příklad 2: Najděte příklad kombinace Hamiltoniánu a počátečního stavu ψ_s , pro který formulace časového vývoje pomocí Schrödingerovy rovnice nemá smysl. Ukažte ale, že pomocí unitárního propagátoru ano, a najděte tímto způsobem ψ_t pro $t \neq s$.

Ukažte obecně, že pro čistý stav $W_s = E_{\psi_s}$ určený vektorem $\psi_s \notin D(H)$ je podmínka $W_s D(H) \subset D(H)$ také porušena, takže nelze-li pro ψ_s psát Schrödingerovu rovnici ve vektorovém tvaru, nezachrání nás ani její formulace pro smíšené stavy.

Příklad 3: Ukažte, že funkce $U^{(D)}(t, s) = U_0(t_0, t)U(t, s)U_0(s, t_0)$, vyjadřující Diracův propagátor, má všechny vlastnosti unitárního propagátoru pro libovolné *pevně* zvolené t_0 .

Nelze však volit $t_0 \equiv s$. Ukažte, že naivní formulka $\tilde{U}^{(D)}(t, s) = U_0(s, t)U(t, s)$ by s požadavkem unitárního propagátoru a s $U_0(a, b) = U_0(a - b)$ implikovala komutativitu $U_0(t, s)$ a $U(r, s)$ pro libovolnou trojici $r, s, t \in \mathbb{R}$.