

Feynmanův integrál

V dnešní hodině zkusíme poskytnout základní oprávnění výpočtu propagátoru pomocí integrálu Feynmanova tvaru. Myšlenka je založena na větě známé jako Trotterova formule:

Věta (11.2.1). Necht $A, B \in \mathcal{L}_{sa}(\mathcal{H})$ takové, že $C = \overline{A + B}$ je také samosdružený. Potom pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$e^{itC} = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(e^{itA/n} e^{itB/n} \right)^n. \quad (1)$$

Tento výsledek má přímočaré využití pro Hamiltoniány tvaru $P^2/(2m) + V$ (případně s uzávěrem): umožňuje k propagátoru e^{-itH} dospět střídavou aplikací propagátoru odpovídajícího samotné kinetické energii a jiného odpovídajícího samotnému V .

Propagátor volné částice v $L^2(\mathbb{R}^d)$ máme z minula,

$$(U_1(t)\psi)(\mathbf{x}) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi it} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{im}{2t} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2\right) \psi(\mathbf{y}) \eta_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (2)$$

a pro operátor $V = T_{v(\mathbf{x})}$ je exponenciála snadná,

$$U_2(t) = e^{-itV} : \quad (U_2(t)\psi)(\mathbf{x}) = e^{-itv(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Pro součin U_1 a U_2 vyhodnocených v t/N dostáváme předpis

$$(U_1(t/N)U_2(t/N)\psi)(\mathbf{x}) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{mN}{2\pi it} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{imN}{2t} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 - \frac{it}{N} v(\mathbf{y})\right) \psi(\mathbf{y}) \eta_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (4)$$

Pro druhou mocninu operátoru by to znamenalo tuto $L^2(\mathbb{R}^d)$ funkci nalézt a dosadit do stejného předpisu znovu. Nicméně vzhledem k tomu, že se jedná o aplikaci spojitého (\Leftarrow unitárního) operátoru, limitní přechod v L^2 -normě, vyjádřený l.i.m., můžeme provést i na výsledcích vnějšího operátoru. Proto

$$((U_1(t/N)U_2(t/N))^2\psi)(\mathbf{x}) = \text{l.i.m.}_{n_1 \rightarrow \infty} \text{l.i.m.}_{n_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{mN}{2\pi it} \right)^{2d/2} \int_{\mathbb{R}^d} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_2(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \psi(\mathbf{z}) \eta_{n_2}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right) \eta_{n_1}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (5)$$

kde

$$K_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left(\frac{imN}{2t} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 - \frac{it}{N} v(\mathbf{y})\right). \quad (6)$$

Díky Fubiniově větě můžeme vnořenou integraci přepsat jako integrál přes dvě proměnné z \mathbb{R}^d a integrandy sloučit do jednoho. Opakováním této myšlenky dospíváme ke vzorci

$$\begin{aligned} (U(t)\psi)(\mathbf{x}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} ((U_1(t/N)U_2(t/N))^N \psi)(\mathbf{x}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{mN}{2\pi it} \right)^{Nd/2} \text{l.i.m.}_{n_1, \dots, n_N \rightarrow \infty} \int_{(\mathbb{R}^d)^{\times N}} K_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) K_N(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \dots K_N(\mathbf{y}_{N-1}, \mathbf{y}_N) \times \\ &\quad \psi(\mathbf{y}_N) \eta_{n_1}(\mathbf{y}_1) \dots \eta_{n_N}(\mathbf{y}_N) d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_N. \end{aligned} \quad (7)$$

V posledním vzorci můžeme ještě sloučit funkce

$$K_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) \dots K_N(\mathbf{y}_{N-1}, \mathbf{y}_N) = \exp\left(\frac{imN}{2t} \sum_{k=1}^N \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1}\|^2 - \frac{it}{N} \sum_{k=1}^N v(\mathbf{y}_k)\right), \quad (8)$$

kde $\mathbf{y}_0 := \mathbf{x}$.

Toto je vyjádření Feynmanova integrálu platné pro jakýkoli Hamiltonián tvaru součtu kinetické energie a potenciálového členu, který je operátorem násobení funkcí, dokud se jedná o (v podstatě) samosdružený operátor.

Souvislost se známějším dráhovým integrálem je taková, že (8) lze psát způsobem

$$\begin{aligned} K_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) \dots K_N(\mathbf{y}_{N-1}, \mathbf{y}_N) &= \exp \left(\frac{imt}{2N} \sum_{k=1}^N \|\mathbf{u}_k\|^2 - \frac{it}{N} \sum_{k=1}^N v(\mathbf{y}_k) \right) \\ &= \exp \left(\frac{it}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{m\|\mathbf{u}_k\|^2}{2} - v(\mathbf{y}_k) \right) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

kde

$$\mathbf{u}_k := \frac{\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1}}{t/N} \quad (10)$$

odpovídá rychlosti rovnoměrného přímočarého pohybu mezi body \mathbf{y}_{k-1} a \mathbf{y}_k za čas t/N . Vzorec (7) tedy popisuje limitu „dráhových integrálů“, kde pro každé N uvažujeme lomenou čáru o $N + 1$ vrcholech v ekvidistančních časech mezi 0 a t . Přitom pro „Lagrangian“ $m\|\mathbf{u}_k\|^2/2 - v_k$ je třeba rychlost dosazovat z přímých úseků, ale potenciál vyhodnocovat ve vrcholech čáry. Taková funkce, po částech konstantní na intervalech $(0, t/N), (t/N, 2t/N), \dots, (t - t/N, t)$, by pak v integrálu od 0 do t skutečně dala exponent vystupující v (8). Toto je smysl, ve kterém je třeba uvažovat dráhovou integraci, pokud chceme vyloučit pochyby, zda konverguje.

Poznámka: o akci

Fyzikální výrazy jsou v předchozím odstavci uvedené v uvozovkách zcela záměrně. Fyzikálně by akce podél dráhy $\gamma(s)$, $s \in \langle 0, t \rangle$ byla určena vzorcem

$$S(\gamma) = \int_0^t \left(\frac{m}{2} \|\dot{\gamma}(s)\|^2 - V(\gamma(s)) \right) ds. \quad (11)$$

I pokud bychom doslova uvažovali lomenou čáru dosahující vrcholů \mathbf{y}_0 až \mathbf{y}_N v časech s odpovídajících celočíselným násobkům t/N mezi 0 a t , dostaneme výraz

$$S(\gamma) = \sum_{k=1}^N \frac{Nm\|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1}\|^2}{2t} - \int_0^t V(\gamma(s)) ds, \quad (12)$$

který se od exponentu na pravé straně (8) liší v potenciálovém členu. Je tedy důležité tento rozdíl udržovat na paměti. Může se stát, a pro mnoho potenciálů to tak dopadne, že pokud ve (7) nahradíme integrační jádro vzorcem

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N) := \exp(iS(\gamma)), \quad (13)$$

kde γ vyjadřuje výše popsanou lomenou čáru, hodnota limity zůstane, i když jednotlivé konvergenty se změní. Výsledek pak ale už nemůžeme opravňovat Trotterovou formulí, díky čemuž získá dodatečné předpoklady. Pro jaké případy tomu tak je, je předmětem celých monografií.

Poznámka: o integraci

Poslední poznámka, kterou si k fyzikální formulaci dovolíme, se týká pojmu integrace podél všech spojitých drah, tedy možnosti zápisu výrazu tvaru (7) bez limity přes N . Je poměrně známým varováním, že takový integrál nemá dobře definovanou míru. Podíváme se na jeden argument, proč tomu tak je.

Za prostor všech funkcí, přes které bychom rádi integrovali, můžeme zvolit $H = L^2((0, t), \mathbb{R}^d)$. Jedná se o reálný Hilbertův prostor nekonečné dimenze. Máme tedy pojem míry a metriky, konkrétně vzdálenost dvou křivek

$$\rho(\beta, \gamma) = \sqrt{\int_0^t \|\beta(s) - \gamma(s)\|^2 ds} \quad (14)$$

má dobrou fyzikální interpretaci.

Z H můžeme udělat měřitelný prostor tak, že vybudujeme σ -algebru nad množinou všech koulí v H . Na tomto prostoru bychom chtěli zavést míru μ , která má vlastnosti:

1. pokud $M \subset H$ je omezená borelovská množina, pak $\mu(H) < \infty$,
2. míra je invariantní vůči posunu: $\mu(\gamma + M) = \mu(M)$.

Druhá vlastnost vyjadřuje, že stejné variace oproti různým křivkám by měly mít stejnou váhu.

V prostoru H ale snadno najdeme protipříklad: vzhledem k tomu, že má nekonečnou dimenzi, existuje nějaká ortonormální báze $(\varphi_n)_{n < \omega}$. Pro libovolné její dva prvky platí

$$\rho(\varphi_m, \varphi_n) = \sqrt{2}\delta_{mn}. \quad (15)$$

Koule o poloměru $1/2$ kolem každého φ_n jsou tedy vzájemně disjunktní: jsou příliš malé na to, aby se protnuly.

Vezměme množinu

$$M = \bigcup_{n < \omega} B_{1/2}(\varphi_n). \quad (16)$$

Každý její bod je vzdálen méně než $3/2$ od počátku, takže $M \subset B_{3/2}(0)$. Pokud ovšem míra μ má splňovat požadavky stanovené výše, musela by všem koulím o stejném poloměru přiřazovat stejnou konečnou hodnotu. To je však sporem s tím, že by mělo být

$$\mu(M) = \sum_{n < \omega} \mu(B_{1/2}(\varphi_n)) \leq \mu(B_{3/2}(0)) < \infty. \quad (17)$$

Tento argument neznamena, že by na H *nešla* zavést míra, ale dokázali jsme, že nemůže mít vlastnosti, na které jsme zvyklí z Lebesgueovy míry.