

Integrace podle projektorové míry

Projektorová míra se může zdát jako poměrně abstraktní pojem, ale v první řadě se jedná o *míru* a vyvstává přirozená otázka, jestli nad ní můžeme vybudovat operaci integrálu funkce stejně jako nad Lebesgueovou mírou, jaké funkce jsou integrovatelné a co výsledek znamená.

V první řadě si oproti Lebesgueově míře uvědomme několik rozdílů (kromě zjevného, že nezobrazuje do \mathbb{R}_+):

- I jednotlivé body mohou mít nenulovou míru (tzv. diskretní body míry E): nad \mathbb{R} se jedná přesně o ty body, ve kterých má E_t skok. Pro spektrální míru samosdruženého operátoru A to nastává v bodech $\lambda \in \sigma_p(A)$.
- Naopak, celé podintervaly mohou mít míru nulovou – přiřazený nulový projektor. Například pokud A je omezený s číselným oborem hodnot (m, M) , potom $E_A((-\infty, m)) = E_A((M, +\infty)) = 0$.
- Žádný interval, ani nekonečný, nemá v nějakém smyslu „nekonečnou“ míru: každá hodnota $E(M)$ je shora omezena (ve smyslu pozitivních operátorů) I . Jedná se tedy nejen o σ -konečnou, ale přímo konečnou míru. Totéž platí pro již číselnou míru μ_ψ pro každé ψ ($\mu_\psi(X) = \|\psi\|^2$).

Otázka, jaké funkce můžeme chtít integrovat, je těmito pozorováními silně ovlivněna. Například funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, která nabývá nenulových hodnot jen mimo číselný obor hodnot omezeného operátoru A , je z hlediska spektrální míry E_A skoro všude nulová. Naopak, dvě funkce, které se liší hodnotami v jednom bodě, nejsou ekvivalentní, pokud se jedná o diskretní bod míry E_A . Nakonec v důsledku posledního bodu například i konstantní, nenulová funkce může mít dobře definovaný integrál.

Integrál podle míry E má smysl definovat pro funkce, které jsou vůči E měřitelné, to znamená, vzor každého intervalu musí být některá funkce ze σ -algebry $\mathcal{A} \subset 2^X$, která je definičním oborem E . Tento fakt není nikterak ovlivněn skutečností, že míra zobrazuje do projektorů: pokud, jak je běžné, za (X, \mathcal{A}) bereme $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, jedná se jednoduše o *borelovské* funkce. Musí ovšem být definované E -skoro všude, to znamená, pokud chceme použít funkci, která v některých bodech nebo intervalech definovaná není, musí se tak dít na množině E -míry 0. Množinu funkcí, které kritéria splňují, označíme Φ_E .

Definice integrálu začíná identicky jako v Lebesgueově teorii. Nejprve se vezmou *jednoduché funkce*, které jsou konstantní na množinách $M_n \in \mathcal{A}$:

$$\sigma(x) = \sum_{j < n} \alpha_j \chi_{M_j}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (1)$$

Tyto funkce jsou složeny z „obdélníků“, na nichž je integrál definovat triviální. Zavedeme tedy:

$$\int_X \sigma(x) dE(x) := \sum_{j < n} \alpha_j E(M_j). \quad (2)$$

Konstanta α_j podél množiny M_j se zintegruje na α_j -násobek míry M_j , jak je obvyklé – s tím rozdílem, že výsledkem je *operátor*. Pokud stejnou jednoduchou funkci jsme schopni získat různými rozklady tvaru (1), hodnota (2) na zvoleném rozkladu pochopitelně nebude záviset – to platí pro každou aditivní míru.

Pro každou jednoduchou funkci platí (9.3.2)

$$\int_X \sigma(x)^* dE(x) = \left(\int_X \sigma(x) dE(x) \right)^*, \quad (3a)$$

$$\left\| \int_X \sigma(x) dE(x) \right\| = \max_{j < n} |\alpha_j| \stackrel{\text{ozn}}{=} \|\sigma\|_\infty, \quad (3b)$$

$$\int_X \sigma(x) \tau(x) dE(x) = \int_X \sigma(x) dE(x) \int_X \tau(x) dE(x), \quad (3c)$$

kde pravá strana (3b) předpokládá, že zápis (1) je proveden ve formě, kdy množiny M_j jsou zvoleny jako *disjunktní* a *nenulové míry*. Z (3c) je také zřejmé, že operátory $\int \sigma dE$ a $\int \tau dE$ komutují.

V dalším kroku rozšíříme integrál z množiny jednoduchých funkcí na funkce, které jsou vůči E omezené – jejich třídu označíme $L^\infty(X, dE)$. Esenciální omezenost, stejně jako L^∞ -normu, definujeme pomocí esenciálního oboru

hodnot, se kterým jsme se již setkali, jen s jinou mírou, u operátorů násobení funkcí:

$$R_{\text{ess}}^{(E)}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \forall \varepsilon > 0: E(f^{-1}(U_\varepsilon(\lambda))) \neq \emptyset\}. \quad (4)$$

L^∞ -norma funkce f v prostoru $L^\infty(X, dE)$ je tedy nejmenší takové c , že $|f(t)| < c$ E -skoro všude v X .

Jednoduché funkce v $L^\infty(X, dE)$ tvoří hustou množinu a integrál je díky (3b) spojitě zobrazení vůči L^∞ -normě, takže je možné k integrálu obecné $f \in L^\infty(X, dE)$ dojít spojitým rozšířením. V prostoru operátorů se tedy jedná o *stejnou limitu* (limitu v operátorové topologii) z integrálů jednoduchých funkcí,

$$\int_X f(x) dE(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sigma_n(x) dE(x), \quad \text{kde } \sigma_n \text{ jednoduché tak, že } \|f - \sigma_n\|_\infty \rightarrow 0. \quad (5)$$

Pro výraz $(\psi, \mathcal{J}_E(f)\psi)$, kde $\mathcal{J}_E(f)$ je zkrácené označení pro operátor $\int_X f dE$, navíc platí

$$(\psi, \mathcal{J}_E(f)\psi) = \int_X f(x) d\mu_\psi \quad (6)$$

i bez potřeby jakékoli limity (integrujeme číselnou funkci s číselnou měrou – na tom není nic nového!).

Integrál v této formě je lineární, zobecňuje všechna tři pravidla (3) přímočaře i na funkce z $L^\infty(X, dE)$ a produkuje vždy *normální* operátory (snadný důsledek multiplikativity). Mezi jeho zajímavější vlastnosti patří (9.3.3):

- spektrum $\int_X f(x) dE(x)$ je rovno $R_{\text{ess}}^{(E)}(f)$,
- $\int_X f(x) dE(x)$ je nulový operátor právě tehdy, když f je nulová E -skoro všude,
- jestliže posloupnost funkcí $f_n \in L^\infty$ konverguje k f bodově, E -skoro všude na X , a jestliže množina $\{\|f_n\|_\infty \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omezená, potom také $f \in L^\infty$ a její integrál je **silnou** limitou

$$\int_X f(x) dE(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dE(x) \quad (7)$$

Poslední ze zmíněných pravidel se v posledním kroku použije k rozšíření integrálu i na neomezené funkce. K těm totiž nelze omezenými funkcemi konvergovat stejnoměrně, takže spojitost (3b) je nepoužitelná. Platí ovšem

$$\begin{aligned} \text{stejnou konvergence } (\|f\|_\infty) \text{ funkcí} &\Rightarrow \text{stejnou konvergence (u-lim) integrálu,} \\ \text{bodová konvergence } (f(x)) \text{ funkcí} &\Rightarrow \text{silná konvergence (s-lim) integrálu.} \end{aligned} \quad (8)$$

Silná konvergence je navzdory svému názvu *slabší* než stejnoměrná (ale silnější než slabá), takže v silné topologii konvergují i posloupnosti, které nekonvergují v normě. Integrál obecné funkce $f \in \Phi_E$ podle míry E tedy získáme prostředkem silné limity integrálů omezených funkcí blížících se k ní bodově, výsledkem bude moci být i neomezený operátor.

Silná konvergence posloupnosti operátorů T_n k operátoru T znamená, že posloupnosti vektorů $T_n\psi$ konvergují k hodnotě $T\psi$ pro všechna $\psi \in D(T)$ a pro ostatní vektory nemají limitu. Pokud za T_n nyní dosadíme E -integrál omezené funkce f_n , pro tyto výrazy se dozvídáme

$$\|T_n\psi\|^2 = (\mathcal{J}_E(f_n)\psi, \mathcal{J}_E(f_n)\psi) = (\psi, \mathcal{J}_E(f_n^*)\mathcal{J}_E(f_n)\psi) = (\psi, \mathcal{J}_E(|f_n|^2)\psi) = \int_X |f_n(x)|^2 d\mu_\psi(x), \quad (9)$$

čímž je otázka konvergence vektorů převedena na konvergenci *číselných* integrálů (s neobvyklou mírou, ale přece), pro kterou již máme mnoho pouček. Zejména víme, že blížíme-li se k nějaké funkci f bodově, s majorantou nezávislou na n , pak integrály f_n konvergují k integrálu f (Lebesgueova věta).

Takové vlastnosti má například posloupnost

$$f_n(x) = f(x)\chi_{M_n}(x), \quad \text{kde } M_n = f^{-1}(\langle -n, n \rangle), \quad (10)$$

jejíž každý člen navíc patří do $L^\infty(X, dE)$ a tedy má integrál již definovaný dřívější teorií. Posloupnost členů $(\int_X f_n dE)\psi$ je potom pro každé $\psi \in \mathcal{H}$ posloupnost vektorů s normami (9). Tato posloupnost může a nemusí být Cauchyovská. Nutnou podmínkou konvergence je, že vůbec konverguje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x)|^2 d\mu_\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{M_n} |f(x)|^2 d\mu_\psi(x) = \int_X |f(x)|^2 d\mu_\psi(x). \quad (11)$$

Pokud ano, snadno se ukáže, že i samotné vektory tvoří Cauchyovskou posloupnost a mají limitu.

Silnou limitou posloupnosti integrálů $\int_X f_n dE$ je tedy operátor definovaný na množině

$$D_f = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \int_X |f(x)|^2 d\mu_\psi(x) < \infty \right\}, \quad (12)$$

který označíme

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dE(x) =: \int_X f(x) dE(x). \quad (13)$$

Tím je, po ověření konzistence (nezávislosti na volbě $f_n \rightarrow f$) konstrukce integrálu dokončena a zbývá se podívat na hlavní vlastnosti, které o operátorech $\mathcal{J}_E(f) := \int_X f dE$ lze na základě vlastností $f(x)$ předpovědět.

Základní poznatek je, že pro každou $f \in \Phi_E$ je $\mathcal{J}_E(f)$ **hustě definovaný** – integrál přes libovolnou projektorovou míru E je tedy zobrazení Φ_E do $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Toto tvrzení (9.4.1) si dokážeme. Je potřeba ukázat, že D_f je podprostor v \mathcal{H} a že je hustý. Lineární kombinace se mají dít ve vektoru ψ , které je *parametrem* výrazu μ_ψ , potřebujeme tedy zkoumat

$$\mu_{\alpha\psi + \varphi}(M) = \|E(M)(\alpha\psi + \varphi)\|^2 \leq 2|\alpha|^2 \|E(M)\psi\|^2 + \|E(M)\varphi\|^2 = 2|\alpha|^2 \mu_\psi(M) + \mu_\varphi(M). \quad (14)$$

Pokud tedy i φ i ψ patří do (12) a $\alpha \in \mathbb{C}$, pak i integrál stejné funkce $|f(x)|^2$ vůči míře $\mu_{\alpha\psi + \varphi}$ je konečný a $\alpha\psi + \varphi \in D_f$. Pro hustotu stačí vzít pro množiny M_n z (10) vektory $\psi_n = E(M_n)\psi$, které nezávisle na volbě ψ do D_f určitě patří, protože

$$\int_X |f(x)|^2 d\mu_{\psi_n}(x) \quad (15)$$

používá míru

$$\mu_{\psi_n}(N) = (\psi_n, E(N)\psi_n) = (E(M_n)\psi, E(N)E(M_n)\psi) = (\psi, E(M_n \cap N)\psi) = \mu_\psi(M_n \cap N) \quad (16)$$

a tedy je roven

$$\int_X |f(x)|^2 d\mu_{\psi_n}(x) = \int_{X \cap N} |f(x)|^2 d\mu_\psi(x) \leq |n|^2 \int_{X \cap N} d\mu_\psi(x) = |n|^2 \mu_\psi(X \cap N) < \infty. \quad (17)$$

Z předchozího je ještě snadné ukázat, že $\int_X f dE$ je **neomezený**, pokud integrand $f \in \Phi_E \setminus L^\infty(X, dE)$ – jedná se tedy o omezený operátor právě a pouze tehdy, když f je vůči E omezená. Důvodem je, že posloupnost na levé straně (13) je posloupnost omezených operátorů, jejichž normy ale rostou asymptoticky stejně rychle jako n , protože takové supremové normy mají funkce f_n podle své definice. Jediný případ, kdy dojdeme k omezenému operátoru, je tedy, pokud se posloupnost od jistého členu přestane měnit – pokud existuje n , pro které $|f(x)| > n$ již jen na E -nulové množině.

Další vlastnosti $\mathcal{J}_E: \Phi_E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}): f \mapsto \int_X f dE$, které najdete dokázané v 9.4.8 a 9.4.10, si uvedeme formou seznamu. Zaměřte prosím svou pozornost obzvláště na podobnost s vlastnostmi operátorů násobení funkcí T_f !

- Integrál $\mathcal{J}_E(f)$ je homogenní v f ,
- $\mathcal{J}_E(f + g) \supset \mathcal{J}_E(f) + \mathcal{J}_E(g)$, $\mathcal{J}_E(fg) \supset \mathcal{J}_E(f)\mathcal{J}_E(g)$, konkrétně levé strany se rovnají uzávěru pravých (9.4.11),
- $\mathcal{J}_E(f) = \mathcal{J}_E(g)$ právě tehdy, kdy $f = g$ E -skoro všude na X ,
- $\mathcal{J}_E(f^*) = \mathcal{J}_E(f)^*$, zejména odsud plyne, že každý $\mathcal{J}_E(f)$ je **uzavřený**, protože lze psát jako sdružení jiného operátoru, $\mathcal{J}_E(f^*)$,
- $\mathcal{J}_E(f)$ je invertibilní právě tehdy, pokud f je E -skoro všude nenulová, pro takové funkce pak $\mathcal{J}_E(f)^{-1} = \mathcal{J}_E(1/f)$,
- $\mathcal{J}_E(f)$ je **normální** operátor a je **samosdružený** právě tehdy, když f je E -skoro všude reálná,
- $\sigma(\mathcal{J}_E(f)) = R_{\text{ess}}^{(E)}(f)$.

Poznámka: Důvodem, proč T_f splňují tolik podobných vlastností, je, že T_f je jednoduše právě takovým integrálem: konkrétně $T_f = \int_X f \, dE_Q$, kde Q je operátor násobení nezávislou proměnnou na $L^2(X, d\mu)$. I pro spektrum $\mathcal{J}_E(f)$ platí zcela stejná kritéria jako pro T_f s mírou μ nahrazenou za E .

Spektrální teorém (varianta s projektorovou mírou)

Spektrální teorém pro hermitovské operátory znáte z o1FA2 zapsaný pomocí rozkladu jednotky:

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_{\lambda}^{(A)} = A. \quad (18)$$

Nikoho asi nepřekvapí, že integrace podle spektrální míry poskytuje jeho alternativní zápis

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE(\lambda) = A. \quad (19)$$

Integrálem funkce x podle spektrální míry samosdruženého operátoru A je tedy A sám.

Stejně tak umíte počítat *omezené* funkce *hermitovského* operátoru jako

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, dE_{\lambda}^{(A)}; \quad (20)$$

nyní dokážeme počítat *jakoukoli* (měřitelnou) funkci *samosdruženého* operátoru jako

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, dE(\lambda). \quad (21)$$

Vzorec by samozřejmě šel také napsat integrálem rozkladu jednotky, jen neomezeného na (m, M) – v ruce máme ale nyní silnější nástroj, pomocí kterého lze integrovat i na jiných množinách než \mathbb{R} . Jako minimální příklad uveďme, že rozklad (19) existuje kromě samosdružených operátorů pro všechny normální se spektrální mírou nad \mathbb{C} – zde by snaha o konstrukci analogickou rozkladu jednotky byla značně kontraproduktivní.

V rámci (21) stojí za pozornost zejména následující funkce:

- polynomy; jejich integrál vychází stejně jako dosazení A do stejného polynomu,
- spektrální rozklad je také naší cestou k operátorové **exponenciále** pro neomezené operátory,
- funkce $1/(x - \mu)$, kterou získáváme rezolventu $R_A(\mu)$,
- funkce e^{iax} pro libovolné $a \in \mathbb{R}$, která zobrazuje samosdružené operátory na unitární (jinak než Cayleyova transformace – té odpovídá $(x - i)/(x + i)$),
- funkce $\arctan x$, která *injektivně* zobrazuje samosdružené operátory na hermitovské,
- reálná a imaginární část, komplexní sdružení (všechny pro normální operátory), absolutní hodnota,
- charakteristické funkce množin $M \in \mathcal{A}$ – v tomto případě získáváme $E(M)$, nejedná se však o *praktický* návod, jak k nim dospět.