

Získávání nových samosdružených operátorů

Po poměrně důkladném seznámení s operátory polohy a hybnosti zaměříme svou pozornost na obecnější třídy pozorovatelných. Vzhledem k volnosti, jakou disponuje například sama definice energie, nemá smysl zabývat se každým možným operátorem zvlášť a bude potřeba několik nástrojů obecnější platnosti pro získávání nových samosdružených operátorů ze známých případů. To bude téma několika příštích hodin.

Jako první takovou metodu si představíme, jak k symetrickým operátorům hledat rozšíření, která jsou samosdružená. Než se k tomu dopracujeme, budeme si potřebovat připravit několik jednoduchých závěrů ze spektrální teorie normálních, symetrických a samosdružených operátorů.

Normální operátory, reziduální spektrum, oblast regularity

Definice. Nechť T je uzavřený lineární operátor na \mathcal{H} . Jeho **oblastí regularity** nazveme množinu

$$\pi(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists c > 0 : \forall x \in D(T) : \|Tx - \lambda x\| \geq c\|x\|\}. \quad (1)$$

Upozornění na názvosloví: Nezaměňujte „prvky oblasti regularity T “ a „regulární hodnoty T “. Množina regulárních hodnot operátoru je jeho rezolventní množina $\rho(T)$, která obecně není totéž, co $\pi(T)$. Připomeňme:

Definice. **Regulární hodnotou** uzavřeného lineárního operátoru T nazýváme každé $\lambda \in \mathbb{C}$, pro něž $(T - \lambda I)^{-1}$ je omezený operátor na \mathcal{H} . **Rezolventní množina** $\rho(T) \equiv \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ je pak množinou všech regulárních hodnot T .

Vztah mezi oběma koncepty je takový, že každá regulární hodnota do oblasti regularity patří – stačí si uvědomit

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{H} : \|(T - \lambda I)^{-1}x\| \leq \|T - \lambda I\| \|x\| &\Leftrightarrow \forall y \in \text{Ran}(T - \lambda I) : \|y\| \leq \|T - \lambda I\| \|Ty - \lambda y\| \\ &\Leftrightarrow \forall y \in D(T) : \|Ty - \lambda y\| \geq \underbrace{\frac{1}{\|T - \lambda I\|}}_{=: c} \|y\|; \end{aligned} \quad (2)$$

opak však nemusí být pravdou. Podmínka (1) implikuje, že $T - \lambda I$ je invertibilní operátor, ale pro splnění $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ by ještě jeho obor hodnot musel být \mathcal{H} , o němž (1) nic netvrdí. Může tedy bod $\lambda \in \mathbb{C}$ přesto být bodem spektra, konkrétně *reziduálního* spektra, jak se přesvědčíme.

Dokážeme si za tímto účelem, že pro uzavřené T podmínka (1) implikuje, že $\text{Ran}(T - \lambda I)$ je uzavřený podprostor – pravidlo, které se bude hodit vícekrát. Nechť $(y_n)_{n < \omega}$ je posloupnost vektorů z $\text{Ran}(T - \lambda I)$ a x_n jejich vzory při $T - \lambda I$. Pokud nyní (y_n) konverguje k nějakému $y \in \mathcal{H}$, musí posloupnost (x_n) konvergovat také, protože její Bolzano–Cauchyova podmínka plyne ze stejné vlastnosti (y_n) a nerovnosti (1). Z podmínky

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)x_n = y \quad (3)$$

však uzavřenost operátoru T již dává $x \in D(T - \lambda I)$, $y \in \text{Ran}(T - \lambda I)$, tedy $\text{Ran}(T - \lambda I)$ je uzavřený.

Odsud již je zřejmé, že v případě $\lambda \in \pi(T) \setminus \rho(T)$ je splněna podmínka $\lambda \in \sigma_r(T)$

$$\overline{\text{Ran}(T - \lambda I)} = \text{Ran}(T - \lambda I) \neq \mathcal{H}. \quad (4)$$

Můžeme tedy shrnout (pro uzavřené operátory)

$$\pi(T) \supset \rho(T), \quad \pi(T) \setminus \rho(T) \subset \sigma_r(T). \quad (5)$$

Pro příklad zmíněné situace můžeme volit operátor pravého posunutí

$$S_+ : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots). \quad (6)$$

V něm pro libovolné $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ platí $\|S_+x\| = \|x\|$, takže $0 \in \pi(S_+)$, ale obor hodnot $S_+ = S_+ - 0I$ je pouze uzavřený podprostor G_0 posloupností začínajících nulou. S_+^{-1} je omezeným operátorem, ale pouze z G_0 do \mathcal{H} ,

takže $S_+^{-1} \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Hodnota $\lambda = 0$ je tedy prvkem oblasti regularity, který není regulární hodnotou, a jedná se o bod reziduálního spektra S_+ .

Rozdíl mezi oblastí regularity a rezolventní množinou se stírá pro **normální operátory** (omezené i neomezené), což přímo souvisí s faktem, že jejich reziduální spektrum je prázdné.

Spektrum samosdruženého operátoru, kritérium samosdruženosti

Samosdružený operátor A je normální z definice. Pomocí rovnosti mezi $\rho(A)$ a $\pi(A)$ snadno dokážeme, že spektrum A je podmnožinou reálné osy. Pro *imaginární* číslo $\lambda = x + iy$ totiž platí

$$\begin{aligned} \forall \psi \in D(A): \|A\psi - \lambda\psi\|^2 &= (A\psi - x\psi - iy\psi, A\psi - x\psi - iy\psi) = \|A\psi - x\psi\|^2 - iy(A\psi, \psi) + iy(\psi, A\psi) + y^2\|\psi\|^2 \\ &\geq y^2\|\psi\|^2, \end{aligned} \quad (7)$$

což je postačující pro $\lambda \in \pi(T) \Rightarrow \lambda \in \rho(T) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(T)$.

Dokážeme odsud takzvané *kritérium samosdruženosti* symetrických operátorů.

Věta (7.3.10). Nechť A je symetrický operátor, potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

- I. A je samosdružený,
- II. A je uzavřený a $\text{Ker}(A - \lambda I)^* = \text{Ker}(A - \lambda^* I)^* = \{0\}$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,
- III. $\text{Ran}(A - \lambda I) = \text{Ran}(A - \lambda^* I) = \mathcal{H}$ pro stejnou volbu λ .

Poznámka: obvykle se tato formulace potká s $\lambda = i$, tedy $\text{Ker}(A \pm iI)^*$, $\text{Ran}(A \pm iI)$.

Tuto důležitou poučku si dokážeme.

$I \Rightarrow II$: Pro samosdružený A platí $(A - \lambda I)^* = A - \lambda^* I$. Pokud má neprázdné jádro, pak hodnota λ^* je prvkem bodového spektra A , což je spor s $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

$II \Rightarrow III$: Pro všechny hustě definované operátory (\Leftarrow předpoklad symetrie) platí

$$\overline{\text{Ran}(A - \lambda^* I)} = (\text{Ker}(A - \lambda I)^*)^\perp. \quad (8)$$

Pro λ imaginární je z předpokladu pravá strana rovna \mathcal{H} a zbývá se přesvědčit, že mezi $\text{Ran}(A - \lambda^* I)$ a jeho uzávěrem není (pro taková λ) rozdíl. Ovšem pokud $y = \text{Im } \lambda \neq 0$, pak pro symetrický operátor stejně jako v rovnici (7) získáme spodní odhad pro $\|(A - \lambda^* I)\psi\|$ tvaru $y^2\|\psi\|$. λ je prvkem $\pi(A)$, a tehdy jsme se přesvědčili výše, že $\text{Ran}(A - \lambda^* I)$ je vskutku uzavřeným podprostorem.

$III \Rightarrow I$: A je z předpokladu symetrický a tedy $A \subset A^*$, zbývá ukázat, že definiční obor A^* není větší než $D(A)$. Nechť tedy $y \in D(A^*)$. Z předpokladu III je $\text{Ran}(A - \lambda I) = \mathcal{H}$, tedy ke každému $z \in \mathcal{H}$ existuje $x \in D(A)$ tak, že $z = Ax - \lambda x$. Takové x nalezneme pro $z = A^*y - \lambda y$. Vektory x a y tedy současně splňují

$$A^*x - \lambda x = A^*y - \lambda y = z, \quad (9)$$

kde se využilo symetrie A pro $A^*x = Ax$. Rozdíl $y - x$ je tedy prvkem jádra $A^* - \lambda I$, ale

$$\text{Ker}(A^* - \lambda I) = (\text{Ran}(A - \lambda^* I))^\perp, \quad (10)$$

což z podmínky III je prázdný prostor. Takže vektor y , který jsme volili z $D(A^*)$, je roven vektoru $x \in D(A)$, jinými slovy, $D(A^*) = D(A)$.

Tím je důkaz dokončen.

Spektrum symetrického operátoru

Nerovnost (7) využívá pouze symetričnosti A , takže platí nejen pro samosdružené, ale i všechny symetrické operátory. Je tedy pro každé $A \in \mathcal{L}_s$

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \pi(A). \quad (11)$$

Množina $\pi(A)$ přitom může být větší, zejména pro zespoda omezené operátory máme

$$(\psi, A\psi) \geq m\|\psi\|^2, \forall \psi \in D(A) \Rightarrow (-\infty, m) \subset \pi(A) \quad (12)$$

a analogický závěr platí pro omezení shora. (Pro tuto inkluzi porovnejte nerovnost pro $(\psi, (A-\lambda)\psi)$ z předpokladu s Cauchy–Schwarzovou nerovností pro stejný výraz.)

Pro *neuzavřený* symetrický operátor je otázka spektra triviální, spektrum libovolného neuzavřeného operátoru je celý prostor \mathbb{C} . Na druhou stranu každý symetrický operátor má uzávěr, který je rovněž symetrický.

Pro *uzavřený* symetrický operátor díky inkluzi (5) víme, že jeho bodové a spojitě spektrum se bude odehrávat na reálné ose (případně na její podmnožině dané spodní a horní mezí, pokud je některá konečná), ale reziduální spektrum může zasahovat i mimo ni. Lze však najít mnohem silnější obecný závěr.

Připomeneme si větu 7.3.10, která – mimo jiné – říká, že operátor A je samosdružený právě tehdy, pokud je uzavřený a existují nějaká $\lambda, \lambda^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pro něž jádra $(A - \lambda I)^*$, $(A - \lambda^* I)^*$ jsou prázdná. Jinými slovy, pokud

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}: \dim \text{Ker} (A - \lambda I)^* = \dim \text{Ker} (A - \lambda^* I)^* = 0. \quad (13)$$

Tuto podmínku můžeme i bez operátorového sdružení jako

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}: \dim (\text{Ran} (A - \lambda I))^\perp = \dim (\text{Ran} (A - \lambda^* I))^\perp = 0. \quad (14)$$

Vystupující prostor $(\text{Ran} (A - \lambda I))^\perp$ se nazývá **defektním prostorem** operátoru A vzhledem k hodnotě λ .

Toto kritérium doplníme o zcela klíčovou informaci:

Věta (8.1.2). Hodnota $\dim (\text{Ran} (A - \lambda I))^\perp$ je na každé komponentě souvislosti množiny $\pi(A)$ konstantní.

Za takové komponenty souvislosti lze volit \mathbb{C}_+ a \mathbb{C}_- . Lze tedy mluvit o *společné* hodnotě $\dim (\text{Ran} (A - \lambda I))^\perp$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im } \lambda > 0$ (\mathbb{C}_+), resp. všechna $\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im } \lambda < 0$ (\mathbb{C}_-). Tyto hodnoty se nazývají **indexy defektu** symetrického operátoru A a značí se tradičně $n_-(A)$, resp. $n_+(A)$ podle znaménka $\text{Im } \lambda^*$ namísto $\text{Im } \lambda$. V literatuře se totiž setkáváme s volbou $\lambda = i$ a potom

$$n_\pm(A) = \dim \text{Ker} (A^* \pm iI). \quad (15)$$

Pro obecný symetrický operátor se jedná o dvě celá nezáporná čísla, případně některý nekonečný kardinál. Pokud A disponuje horní nebo spodní omezeností, pak díky (12) existuje v $\pi(A)$ také křivka spojující \mathbb{C}_+ s \mathbb{C}_- a indexy defektu jsou automaticky dvě *stejná* čísla.

Poznámka: V literatuře není tolik obvyklé rozlišovat mezi nekonečnými kardinalitami a nekonečné indexy defektu se potom souhrnně označují symbolem ∞ . Pro separabilní prostory mohou každopádně nabývat jen jedné nekonečné hodnoty \aleph_0 .

Pokud některý z indexů defektu je nulový, potom $\text{Ran} (A - \lambda I)$ je celý prostor \mathcal{H} pro všechna λ z odpovídající komplexní poloroviny. To je spolu s podmínkou (7) postačující pro to, aby body z této poloroviny byly regulární hodnoty A (jak bylo diskutováno v první sekci).

Naopak, pokud některý index defektu je nenulový, řekněme $n_+(A)$, pak podle jeho definice $\text{Ran} (A - \lambda I)$ nepokrývá celý Hilbertův prostor pro žádná $\lambda \in \mathbb{C}_+$, podobně se záměnou znamének. To znamená, že *celá polorovina* \mathbb{C}_+ , resp. \mathbb{C}_- v takovém případě patří do (reziduálního) spektra.

Pro spektrum uzavřeného symetrického operátoru A tak vždy platí právě jedna z těchto čtyř možností:

1. Pokud $n_+(A)$ i $n_-(A)$ jsou větší než nula, pak do spektra patří \mathbb{C}_+ i \mathbb{C}_- . Protože spektrum je uzavřená množina, nemůže v ní chybět ani společná hranice \mathbb{R} obou polorovin, a tedy $\sigma(A) = \mathbb{C}$.
2. Pokud $n_+(A) > 0, n_-(A) = 0$, pak $\mathbb{C}_+ \subset \sigma(A)$ a $\overline{\mathbb{C}_+} \subset \rho(A)$. Body na reálné ose opět také patří do spektra, protože jinak by nebylo uzavřené, proto $\sigma(A) = \overline{\mathbb{C}_+} = \mathbb{R} \otimes \langle -\infty, 0 \rangle = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_-$.
3. Pokud $n_+(A) = 0, n_-(A) > 0$, pak zcela analogicky $\sigma(A) = \overline{\mathbb{C}_-} = \mathbb{R} \otimes (0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_+$.
4. Pokud $n_+(A) = n_-(A) = 0$ (a právě tehdy), potom operátor A splňuje kritérium samosdruženosti. Jeho spektrum je nějakou podmnožinou \mathbb{R} .

Indexy defektu tedy okamžitě rozhodují, jestli uzavřený operátor A je samosdružený nebo ne a v případech, že není, odkrývají celé jeho spektrum. Doplnujeme tak informaci, že $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ pro samosdružené operátory, upřesněním, že symetrické operátory, které samosdružené nejsou, reálné spektrum *nemají*.

Uzavřeným operátorům jsme věnovali většinu své pozornosti. Důvod k tomu je jednoduchý. Připomeňme, že

- pokud operátor A je symetrický, ale ne uzavřený, pak jeho spektrum je \mathbb{C} bez jakékoli další diskuse,
- má však vždy uzávěr \bar{A} , který již symetrickým uzavřeným operátorem je.

Tyto dvě vlastnosti doplníme o skutečnost, že *indexy defektu operátorů A a \bar{A} se shodují*. Toto je triviální, jakmile si uvědomíme, že A i \bar{A} mají stejný sružený operátor.

Najít uzávěr je tedy prvním logickým krokem při hledání samosdruženého rozšíření. K úloze však můžeme přistoupit i tak, že k symetrickému, ne nutně uzavřenému operátoru A zkusíme hledat *v podstatě samosdružené* rozšíření, tedy operátor, u kterého je zajištěno, že pro samosdruženost již stačí najít uzávěr. Podle poslední poučky je nutnou a postačující podmínkou *podstatné* samosdruženosti $n_+(A) = n_-(A) = 0$ (liší se pouze požadavek uzavřenosti).

Indexy defektu představují počet lineárně nezávislých vektorů, které v $\text{Ran}(A - \lambda I)$ jistým způsobem „chybí“ – odtud i název těchto čísel. Při hledání symetrických nebo samosdružených rozšíření se tedy, velmi jednoduše řečeno, tuto „mezeru“ snažíme zaplnit, aby oba indexy klesly na nulu. Tomu se budeme věnovat příští přednášku.