

Kvantová optika 1

1. přednáška: Úvod do předmětu

Václav Potoček

21. 9. 2021

Přednáška: út 7:30, B-11

Cvičení: pá 13:30, B-11

Konzultace: individuálně

Uzavření předmětu: z+zK

Požadavky k zápočtu:

- účast na cvičeních (s přihlédnutím k možnostem)
- domácí úkoly s předvedením na cvičeních

Doporučená literatura:

- M.O. Scully, M.S. Zubairy – *Quantum Optics* (Cambridge University Press 1997)
- R. Loudon – *The Quantum Theory of Light* (Oxford University Press 2000)
- S.M. Barnett, P.M. Radmore – *Methods in Theoretical Quantum Optics* (Oxford University Press 2000)

Dostupné na stránkách předmětu (z loňska):

<http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~potocvac/classes.php?c=ko21>

Obsah prvního semestru:

1. Kvantizace elektromagnetického pole
2. Užitečné matematické metody
3. Důležité kvantové stavy světla
4. Popis základních interferometrických prvků
5. Teorie optické detekce
6. Kvantové vlastnosti světla
7. Interakce s atomy
8. Základy nelineární kvantové optiky

Historie kvantové optiky

Proč optika kvantově?

Předzvěsti kvantové optiky:

- empirická kvantizace energie monochromatického světla (M. Planck 1900)
- stimulovaná emise světla (A. Einstein 1916)

Jevy, pro které klasická optika neměla vysvětlení nebo je kvantové mnohem transparentnější:

- Spontánní emise (odvození P.A.M. Dirac 1927)
- Lambův posun (pozor. W. Lamb, R. Retherford 1947)
- Kvantové rázy (pozor. A.T. Forrester et al. 1955)

Dnes již samozřejmě mnohem více.

Zdrojem většiny světla kolem nás.

Atom v excitovaném stavu dříve nebo později vyzáří energii přechodem do základního stavu.

Klasická optika (s kvantovým modelem atomu) ovšem nemá vysvětlení, proč. Interakční člen v Hamiltoniánu je úměrný $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ a je *nulový*, pokud pole před vyzářením neexistovalo. Atom by tak zůstal v excitovaném stavu navždy.

Posun energie $^2S_{1/2}$ stavu vodíku vůči $^2P_{1/2}$.

Relativistická teorie (Diracova rovnice) předpovídá korekci¹ k energetické hladině stavu vodíku $|n, j, m_j\rangle$ o velikosti

$$\Delta E = \frac{E_n \alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right)$$

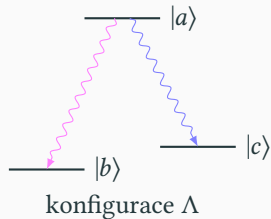
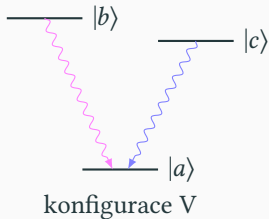
Pro stavy $^2S_{1/2}$ a $^2P_{1/2}$, které se shodují v hlavním kvantovém čísle i celkovém momentu hybnosti, by měla energie vyjít identická.

¹Součet relativistické kinetické korekce, spin-orbitální korekce a Darwinova členu

Přesné experimenty ale potvrzují *nepatrný*, však nenulový posun (asi o $0,6 \mu\text{eV}$, srv. jemná struktura $56 \mu\text{eV}$, nerelativistická předpověď druhé hladiny $3,4 \text{ eV}$).

Vysvětlení v interakci elektronu s elektromagnetickým vakuem, které by klasicky mělo mít nulový příspěvek k Hamiltoniánu.

Fundamentální rozdíl mezi atomy s „V“ a „ Λ “ konfigurací energetických hladin a přechodů mezi nimi.



Pokud je atom připraven v superpozici svých energetických stavů a podlehe spontánní emisi, může vyzářit energii na dvou různých frekvencích.

Semiklasická teorie předpovídá v obou případech současné vyzáření dvou vln.

Pro „ Λ “ atomy však, narozdíl od „ V “, nikdy není pozorována rázová (rozdílová) frekvence.

Kvantová optika má vysvětlení: frekvence vyzářeného kvanta je pro „ Λ “ atom provázána s cílovým stavem, který poskytuje informaci o deexcitačním kanálu. Stejně jako ve dvoušterbinovém experimentu existuje dualita mezi dostupností této informace a viditelností interference, při známém rozpadovém kanálu interference nemůže nastat.

Pro „ V “ atomy je ovšem cílový stav stejný ($|a\rangle$), takže kanály jsou nerozlišitelné.

Stručný přehled klasické teorie EM pole

Maxwellovy rovnice

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_0 & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Ve vakuu:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \rho_0 = 0, \quad \mathbf{j}_0 = 0$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= c^{-2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

kde $c^{-2} = \varepsilon_0 \mu_0$.

Elektromagnetické potenciály

Snižují počet závislých proměnných v MW rovnicích:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}: \text{ automaticky splňuje } \text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi: \text{ automaticky } \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Zbylé dvě rovnice:

$$\square \mathbf{A} = \text{grad} \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

$$\square \varphi = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

kde

$$\square F = \Delta F - c^{-2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

Coulombova kalibrace bez nábojů:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \varphi = 0$$

Vakuové Maxwellovy rovnice se tak redukují na jedinou rovnici

$$\square \mathbf{A} = 0$$

pro jedinou vektorovu neznámou $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.

Předpoklad exponenciálního řešení:

$$A(\mathbf{r}, t) = \text{const} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \quad (*)$$

Derivace:

$$\partial_j A = ik_j A$$

$$\partial_t A = -i\omega A$$

$$\text{div } A = i\mathbf{k} \cdot A$$

$$\Delta A = -k^2 A$$

$$\square A = (\omega^2 - c^2 k^2) A$$

$$\text{Coulomb} \rightarrow \mathbf{k} \cdot A = 0$$

$$\text{Maxwell} \rightarrow \omega^2 = c^2 k^2$$

Rovinné vlny

$\omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2$: disperzní vztah ve vakuu

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$: vymezení polarizace vlny na rovinu kolmou ke $\mathbf{k}$

Rovinná, lineárně polarizovaná vlna:

$$\mathbf{A} = A_0 \mathbf{e} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \text{ }^{(*)}, A_0 \in \mathbb{C}, \mathbf{e} \perp \mathbf{k}$$

$^{(*)}$ **Pozor**, takto získané řešení je nefyzikální –
vektorový potenciál musí být *reálná* veličina!

Proto uvažujeme

$$\mathbf{A} = \tilde{A}_0 \mathbf{e} \cos(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t + \varphi_0), \tilde{A}_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{e} \perp \mathbf{k}$$

Reálné řešení můžeme získat z exponenciály jako reálnou část, ale také explicitně jako superpozici komplexního fundamentálního systému²

$$\begin{aligned}A &= A^{(+)} + A^{(-)}, \\A^{(+)} &= A_0 \mathbf{e} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t), \\A^{(-)} &= A_0^* \mathbf{e} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t).\end{aligned}$$

Stejně tak definujeme $E^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$. S výrazy úměrnými $e^{-i\omega t}$, resp. $e^{i\omega t}$ se budeme setkávat jako s částí pole s **pozitivní**, resp. **negativní frekvencí**.

²Oproti předchozímu výrazu je tato forma dvojnásobná.

Obecné řešení zapsané pomocí rovinných vln:

$$A(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\sigma=1}^2 \alpha(\mathbf{k}, \sigma) \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} d^3\mathbf{k} + \text{c.c.}$$

– díky rozkladu na rovinné vlny je možno mluvit o části s pozitivní a negativní frekvencí pro libovolnou excitaci pole.

Části $A^{(\pm)}$ vystupují vždy v součtu, nemají fyzikální smysl odděleně.

Další třídy řešení vlnové rovnice

V **optické dutině** je praktičtější řešení pomocí *stacionárních módů*.

Uvažujme jeden mód

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cos(\omega_m t), \quad \mathbf{f}_m: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{Coulomb} \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{f}_m = 0,$$

$$\text{Maxwell} \rightarrow \Delta \mathbf{f}_m + \frac{\omega_m^2}{c^2} \mathbf{f}_m = 0$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = \omega_m \mathbf{f}_m \sin(\omega_m t)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{f}_m \cos(\omega_m t)$$

Okrajové podmínky na rozhraní s vodičem:

$$E \parallel dS \quad \leftrightarrow \quad f_m \parallel dS$$

$$B \perp dS \quad \leftrightarrow \quad \operatorname{rot} f_m \perp dS$$

Druhá podmínka plyne z první:

$$\int_{A \subset \partial\Omega} B \cdot dS = \int_A (\operatorname{rot} A) \cdot dS = \int_{\partial A} A \cdot d\mathbf{l} \propto \int_{\partial A} f_m \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Módy dutiny tvoří spočetnou bázi (či fundamentální systém) bezzdrojových řešení vlnové rovnice s touto okrajovou podmínkou.

Módové funkce f_m volíme *ortogonální* (v $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$).

Dutina kvádrového tvaru

V případě dutiny tvaru kvádru $a \times b \times c$ módy indexovány trojicí čísel (n_x, n_y, n_z) a polarizací,

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\pi}{a} n_1, \frac{\pi}{b} n_2, \frac{\pi}{c} n_3 \right),$$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k},\sigma} : \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},\sigma} = 0, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{k},\sigma} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},\tau} = \delta_{\sigma\tau}$$

Při velkých rozměrech se taková dutina stává dobrým modelem volného prostoru. Množina hodnot $\mathbf{k}$ se zhušťuje a aproximuje spojitě rozdělení.

Model **vlnovodu** odpovídá přechodu do nekonečna jen v jednom rozměru.

Umožňuje stacionární módy nahradit postupnými vlnami:

$$A(x, y, z, t) = \sum_{n_x, n_y} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\sigma} \alpha_{n_x, n_y}(k_z) \overset{\uparrow}{F}_{n_x, n_y}(x, y) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} dk + \text{c.c.}$$

průběh amplitudy + polarizace + fáze

Zobecněné pojetí módu

Pojem **mód** v optice často zobecňujeme na jakýkoli druh harmonické oscilace volného pole.

Módová struktura pak může mít diskrétní i spojitě parametry.

Rozklad do módů potom uvažujeme tvaru

$$A(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}_d} \int_{\Gamma} d\mathbf{p}_{sp.} \alpha(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) e^{-i\omega(\mathbf{p})t} + \text{c.c.},$$

podmínka ortogonality:

$$(f(\mathbf{p}), f(\mathbf{p}')) = N(\mathbf{p}) \delta_{\mathbf{p}_d, \mathbf{p}'_d} \delta(\mathbf{p}_{sp.} - \mathbf{p}'_{sp.})$$

Pokud v rámci popisu fyzikální soustavy postačí jistá množina módů, nemusí být ani úplná (nemusí být bází $L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$).

Zvolme referenční směr propagace jako $\mathbf{k}_0 = (0, 0, k_0)$.

Spojitou superpozicí rovinných vln s $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_0)$, kde amplitudy mají přiřazenu gaussovskou váhu, dostaneme **gaussovský svazek** – model konečně širokého paprsku.

Pro jednoduchost volme též střed Gaussova rozdělení v počátku souřadnic a nulový fázový profil (sklon).

Při integraci vzniká komplikace s frekvencí $\omega = |\mathbf{k}|c$
→ potřeba aproximovat.

Gaussovský svazek

Vyjádření v uzavřeném tvaru pro $\sigma_k \ll k_0$ do 0. řádu v $k_{x,y}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{2\sigma_k^2}} e^{ik_x x + ik_y y + ik_0 z - i\omega t} dk_x dk_y \\ & \approx \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{2\sigma_k^2}} e^{ik_x x + ik_y y + ik_0 z - i\omega t} dk_x dk_y \\ & = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{k_x^2}{2\sigma_k^2} + ik_x x} dk_x \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{k_y^2}{2\sigma_k^2} + ik_y y} dk_y e^{ik_0 z - i\omega t} \\ & = 2\pi\sigma_k^2 e^{-\sigma_k^2 x^2/2} e^{-\sigma_k^2 y^2/2} e^{ik_0 z - i\omega t} \\ & = \text{const} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_x^2}} e^{ik_0 z - i\omega t}, \end{aligned}$$

kde $\sigma_x = 1/\sigma_k$.

Vlastnosti:

- V přiblížení do 0-tého řádu můžeme považovat za monochromatické, stacionární řešení.
- Tvarem odpovídá rovinné vlně příčně modulované Gaussovou funkcí (tj. gaussovský tvar zachován přechodem do polohové domény).
- Čím užší rozptyl ve vlnovém čísle, tím širší paprsek prostorově a naopak (v rámci platnosti přiblížení).
- Paprsek se nerozbihá (opět v rámci přiblížení!)

Shrnutí

Začlenění kvantové optiky do kontextu – známo množství experimentů, kde je klasický popis nesprávný

Přehled klasické EM teorie

- Maxwellovy rovnice ve vakuu
- Vektorový potenciál, Coulombova kalibrace
- Zavedení pozitivní a negativní frekvence

Několik důležitých tříd řešení vlnové rovnice $\square \mathbf{A} = 0$:

- Rovinné vlny, polarizace
- Módová struktura dutiny s vodivými stěnami, vlnovod
- Gaussovský svazek (vlnové přiblížení paprsku)