Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie pole /1

Jiří Formánek

KAROLINUM

Jiří Formánek

Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie pole /1

Univerzita Karlova v Praze • Nakladatelství Karolinum • 2004

Obsah

Předmluva

Kvantová teorie je tou či onou formou přítomna prakticky ve všech oblastech moderní fyziky. Proto je, podle mého názoru, nezbytné, aby každý, kdo se má dnes či zítra aktivně zabývat fyzikou, získal solidní základy této teorie. Rozumím tím takové znalosti, které mu umožní porozumět výsledkům v rámci této teorie (jinými) již dříve získaným, a *kvalifikovaně* je aplikovat v oblasti, ve které sám aktivně působí. I když takovéto znalosti ještě nemusí být dostatečné k aktivní účasti na dalším rozvíjení kvantové teorie samotné, případnému zájemci o práci v této oblasti by měly podstatně usnadnit studium odpovídající specializované literatury. Poskytnutí takovýchto znalostí našim studentům jsem chápal jako cíl svých čtyřsemestrových přednášek o kvantové teorii, konaných již řadu let na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy. Se stejným záměrem jsem psal i Úvod do kvantové teorie [1], ve kterém byly nejprve vysvětleny základní principy kvantové teorie a na nich pak byla vybudována nerelativistická kvantová mechanika. Témuž cíli má napomoci i kniha, jejíž první díl laskavý čtenář právě otevřel, a která organicky navazuje na [1], tj. aplikuje *tytéž* principy na oblast relativistické mechaniky a relativistické teorie pole. Z pedagogického hlediska odpovídá její první a druhý díl zhruba látce přednášené ve třetím, resp. čtvrtém semestru výše zmíněného kurzu – i když v některých partiích tuto látku mírně přesahuje. Proto je první díl věnován převážně relativistické kvantové mechanice, včetně jejích principiálních problémů a cest směřujících k jejich překonání. Druhý díl pak již bude věnován převážně kvantové teorii pole. Podání látky je motivováno snahou všestranně zdůraznit, že i když hovoříme o nerelativistické kvantové mechanice, relativistické kvantové mechanice a kvantové teorii pole, stále máme na mysli jednu a *tutéž* teorii – teorii kvantovou. Samozřejmě je způsob výkladu silně ovlivněn i názorem autora na tuto teorii. Pochopitelně existuje i celá řada dalších možných přístupů k výkladu téže (nebo příbuzné) látky. Dnes má náš čtenář výhodu v tom, že může sáhnout po řadě vynikajících publikací z této oblasti. Vřele mu doporučuji, aby tak učinil. Mnohdy mu to umožní pohlédnout na tentýž problém z různých stran, a tak mu lépe porozumět. Mezi publikace, které se věnují některým partiím látky probírané v prvním díle této knihy, patří vedle takových klasických monografií, jakými beze sporu jsou [2] nebo

[3] i díla mnohem pozdější jako např. [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10] a řada dalších. Vedle toho existují i publikace, které se věnují exaktní matematické analýze vybraných okruhů problémů z jednotlivých oblastí zde probírané látky. Za všechny upozorněme alespoň na monografii [11].

Čtenář má tedy z čeho vybírat. Nechci ho proto dále zdržovat dlouhým úvodem. Přesto mi snad laskavý čtenář dovolí, abych na závěr zdůraznil, že si velice cením jak zájmu studentů, kteří mne k sepsání této knihy přiměli, tak zájmu spolupracovníků, kteří v mnoha směrech k uskutečnění tohoto cíle přispěli. Především bych rád poděkoval M. Stöhrovi – jen díky jeho schopnosti překonat všechny záludy softwaru a jeho ochotě obětovat mnoho hodin svého času ediční úpravě textu, mohla tato kniha nabýt svého současného tvaru. Můj dík patří také J. Dolejšímu, Z. Doležalovi, J. Hořejšímu a I. Wilhelmovi za nezištnou pomoc slovem i skutkem.

Praha
Prosinec 1997 — Jiří Formánek

Několik slov k druhému vydání

Druhé vydání se od prvního neliší ani obsahem ani rozsahem pojednávané látky. Pokusil jsem se však v něm odstranit všechny zjištěné tiskové chyby, zlepšit grafickou úpravu tisku a upřesnit formulace několika výroků.

Praha
Leden 2000 — Jiří Formánek

Jednotky, značení, konvence

Je užívána *Einsteinova sčítací konvence*: přes dvojici stejných indexů se sčítá (pokud není výslovně řečeno něco jiného). Přitom *pouze* u tenzorových indexů z hlediska Lorentzovy grupy vyžadujeme, aby jeden z indexů v této dvojici byl dolní a druhý horní.

V případě tenzorů Lorentzovy grupy užíváme *řecká* písmena k označení indexů, probíhajících hodnoty $0, 1, 2, 3$, kdežto *latinská* písmena rezervujeme pro indexy probíhající pouze hodnoty $1, 2, 3$.

Metrický tenzor má komponenty

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad \mu \neq \nu \\ 1 & \text{pro} \quad \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{pro} \quad \mu = \nu \neq 0. \end{cases}$$

Levi-Civitův symbol $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ je takový úplně antisymetrický tenzor, že

$$\varepsilon^{0123} = +1 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{0123} = -1.$$

Pro *parciální derivace* jsou užívány zkratky[1]

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

"Antisymetrická derivace":

$$\varphi(x) \overleftrightarrow{\partial_\mu} \psi(x) \equiv \varphi(x)\, \partial_\mu \psi(x) - (\partial_\mu \varphi(x))\, \psi(x).$$

Tečka nad symbolem značí časovou derivaci.

Čárka u funkce jedné proměnné značí derivaci podle této proměnné, tj. pokud

$$f \equiv f(z),$$

potom

$$f' \equiv \frac{df}{dz}(z).$$

Pro označení *třívektorů* je ve valné většině případů užíváno tučných typů písma (např. $\boldsymbol{A}$), pouze výjimečně k jejich zápisu užíváme písmeno

[1] Nepřehlédněte, že k-tou komponentou gradientu $\boldsymbol{\nabla}$ je $\partial_k = -\partial^k$.

doplněné šipkou (např. $\vec{\mathsf{M}}$).
K označení *jednotkového vektoru* ve směru zadaného vektoru je často využívána vlnovka, tj.

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \equiv \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\,.$$

K označení jednotkového vektoru ve směru j-té *souřadné osy* budeme většinou užívat symbolu $\boldsymbol{e}_j$.
Skalární *součin čtyřvektoru* a s čtyřvektorem b je zapisován jak ve tvaru $a \cdot b$, tak ve tvaru $(a \cdot b)$.
Skalární, resp. vektorový *součin třívektoru* $\boldsymbol{a}$ s třívektorem $\boldsymbol{b}$ je zapisován jak ve tvaru $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, resp. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, tak ve tvaru $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$, resp. $[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]$.
Pokud nějaký třívektor *nepředstavuje* prostorovou část čtyřvektoru, nebudeme při specifikaci jeho komponent činit rozdíl mezi horními a dolními indexy. Tak. např. v případě intenzity elektrického pole

$$E_3 \equiv E^3 \equiv (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}_3)\,.$$

Pro *těžišťovou souřadnou soustavu* užíváme obvyklou zkratku CMS. Pokud budeme chtít zdůraznit, že nějaké kinematické veličiny jsou vyjádřeny v CMS, budeme jim odpovídající symbol doplňovat *hvězdičkou*, např. jestliže nějaký impuls označíme písmenem $\boldsymbol{p}$, potom $\boldsymbol{p}^*$ bude představovat hodnotu tohoto impulsu v CMS.
Sdruženost, komplexní sdruženost, transponovanost:
$\mathsf{A}^\dagger \equiv$ matice (nebo operátor) sdružená k A,
$\mathsf{A}^* \equiv$ veličina komplexně sdružená k A,
$\mathsf{A}^T \equiv$ matice transponovaná k A.
Pokud příslušné veličiny závisejí na nějakých proměnných, budeme většinou užívat zjednodušenou symboliku typu

$$\mathsf{A}^T(x) \equiv [\mathsf{A}(x)]^T\,.$$

V explicitním vyjádření matic je někdy užívána *tečka* $\cdot$ (nebo prázdné místo) k zápisu těch elementů, které jsou rovny nule.
Pod *Feynmanovým symbolem* $\not{B}$ rozumíme čtvercovou matici přiřazenou čtyřvektoru B vztahem

$$\not{B} \equiv B_\mu \gamma^\mu,$$

kde γ^μ jsou Diracovy matice.
Zkratka h.c., resp. c.c. označuje výraz *hermitovsky*, resp. *komplexně*

sdružený k výrazu předcházejícímu.
Pod termínem *matice* $m \times n$ rozumíme matici, která má m řádků a n sloupců.
Termínu *Lieova grupa* je užíváno vždy ve smyslu *souvislá* (connected) Lieova grupa.
Pod termínem *teorie relativity* vždy rozumíme *speciální* teorii relativity.
Pod termínem *souřadná soustava* vždy rozumíme *inerciální* souřadnou soustavu.
Pod termínem *hmota* částice vždy rozumíme její hmotu *klidovou*.
Pod termínem *stav*, pokud nebude řečeno něco jiného, rozumíme *čistý* stav.
Pro zjednodušení vyjadřování budeme mezi elementy Hilbertova prostoru *formálně* zahrnovat[2] i "vektory" normalizované k příslušné δ-funkci.
K označení skutečnosti, že nějaký termín je sice běžně užíván, případně názorně vystihuje podstatu věci ap., ale na druhé straně by neměl být chápán doslovně (ať již proto, že není zcela přesně definován, nebo i z důvodů jiných) budeme často využívat *uvozovek*.
Při popisu elektromagnetických veličin užíváme *Heavisideovu-Lorentzovu soustavu jednotek*, která je pro oblast zde studovanou evidentně nejvhodnější. Protože však existují i publikace využívající soustavy odlišné[3], je v Doplňku A provedeno shrnutí informací o soustavách elektromagnetických jednotek v rozsahu, který čtenáři umožní bez problémů "překládat" z každé soustavy jednotek do libovolné jiné.
Počínaje Kapitolou 4. je užívána *"přirozená soustava jednotek"*, v níž je

$$\hbar = c = 1.$$

[2] Ve smyslu, který jsme osvětlili již v [1].
[3] Bohužel i v [1] jsme ještě byli nuceni pracovat v SI soustavě.

Kapitola 1

Lorentzova grupa

1.1 Lorentzovy transformace

Bodová událost (světobod) X je v pevně zvolené inerciální soustavě určena okamžikem t a polohovým vektorem $\boldsymbol{x}$. Jinými slovy řečeno, světobod X je určen čtyřvektorem x, jehož *kontravariantní komponenty*

$$x^\mu \equiv \{ct, \boldsymbol{x}\} \ ,$$

tj.

$$x^0 \equiv ct \,,$$

a

$$x^k \equiv \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_k$$

je projekce vektoru $\boldsymbol{x}$ na k-tou souřadnou osu.

Souřadnice x'^μ *téhož* světobodu v libovolné jiné inerciální souřadné soustavě souvisejí s x^μ lineární transformací

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \,. \tag{1.1}$$

Interval mezi dvěma světobody x, y je veličina invariantní, tj. musí platit

$$(x_\mu - y_\mu)\left(x^\mu - y^\mu\right) = \left(x'_\mu - y'_\mu\right)\left(x'^\mu - y'^\mu\right) \equiv (x-y)^2 \ , \tag{1.2}$$

kde *kovariantní komponenty*

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu}\, x^\nu\,. \tag{1.3}$$

Požadavek (1.2) je splněn právě tehdy, když reálné parametry transformace (1.1) vyhovují podmínce

$$g_{\mu\sigma}\, \Lambda^\sigma{}_\nu\, \Lambda^\mu{}_\rho = g_{\nu\rho}\,. \tag{1.4}$$

Všechny takovéto transformace tvoří *Poincaréovu grupu* (⇔ *nehomogenní Lorentzovu grupu*).

V této kapitole se omezíme pouze na vyšetřování *Lorentzovy grupy*, která je tvořena těmi z uvažovaných transformací, pro něž je $b_\mu = 0$, tj. na transformace[1]

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu\,. \tag{1.5}$$

Povšimněme si, že díky relaci (1.4) je poslední formule ekvivalentní inverznímu vztahu

$$x^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu\, x'^\nu\,. \tag{1.6}$$

Pro další je výhodné transformaci (1.5) zapsat v maticovém tvaru

$$x' = \mathsf{\Lambda}\, x\,, \tag{1.7}$$

kde jednosloupcová matice

$$x \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

a elementy čtvercové matice $\mathsf{\Lambda}$ jsou definovány jako[2]

$$\mathsf{\Lambda}_{(\mu,\nu)} = \Lambda^\mu{}_\nu\,. \tag{1.9}$$

Zavedeme-li ještě čtvercovou matici g, jejíž elementy

$$\mathsf{g}_{(\mu,\nu)} \equiv g_{\mu\nu}\,, \tag{1.10}$$

[1] K diskusi celé Poincaréovy grupy se vrátíme v Kapitole 4.

[2] Závorkou zdůrazňujeme, že na levé straně nejde o tenzorové indexy, ale o indexy číslující maticové elementy.

můžeme podmínku (1.4) vyjádřit v maticovém tvaru jako

$$\Lambda^{\mathsf{T}} \mathrm{g}\, \Lambda = \mathrm{g}\,, \tag{1.11}$$

což je ekvivalentní s

$$\Lambda^{-1} = \mathrm{g}\, \Lambda^{\mathsf{T}} \mathrm{g}\,. \tag{1.12}$$

Porovnáním determinantů obou stran této rovnosti dostáváme

$$(\det \Lambda)^2 = 1\,. \tag{1.13}$$

Komponentu $(0,0)$ maticové rovnosti (1.11) lze přepsat do tvaru

$$\left(\Lambda_{(0,0)}\right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} \left(\Lambda_{(i,0)}\right)^2\,, \tag{1.14}$$

z něhož vidíme, že

$$\left(\Lambda_{(0,0)}\right)^2 \geq 1\,. \tag{1.15}$$

Na základě formulí (1.13),(1.15) můžeme všechny elementy Lorentzovy grupy rozdělit do čtyř podmnožin:
Elementy, pro něž platí

$$\det \Lambda = 1 \quad , \quad \Lambda_{(0,0)} \geq 1\,, \tag{1.16}$$

tvoří *vlastní Lorentzovu grupu*[3] ($\equiv$ VLG).
Ostatní podmnožiny již nepředstavují podgrupy, z VLG je však obdržíme velice snadno:
Libovolný element Lorentzovy grupy, pro který[4]

$$\det \Lambda = -1 \quad , \quad \Lambda_{(0,0)} \geq 1\,, \tag{1.17}$$

resp.

$$\det \Lambda = -1 \quad , \quad \Lambda_{(0,0)} \leq -1\,, \tag{1.18}$$

---

[3]Standardně se pro ni užívá značení $SO(3,1)$. Obecněji $SO(m,n)$ značí grupu vlastních Lorentzových transformací v $m+n$ dimenzionálním Minkowského prostoru, v němž čas je n dimenzionální.

[4]Všechny elementy s $\Lambda_{(0,0)} \geq 1$ tvoří grupu *izochronních Lorentzových transformací*.

resp.

$$\det \Lambda = 1 \quad , \quad \Lambda_{(0,0)} \leq -1 \,, \tag{1.19}$$

můžeme vyjádřit jako součin nějakého elementu VLG s *prostorovou inverzí* $\mathsf{P} \equiv \Lambda(P)$:

$$\mathsf{P} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \,, \tag{1.20}$$

resp. *časovou inverzí* $\mathsf{T} \equiv \Lambda(T)$:

$$\mathsf{T} \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \,, \tag{1.21}$$

resp. *časoprostorovou inverzí* $\mathsf{PT} \equiv \Lambda(PT) \equiv \Lambda(P)\,\Lambda(T)$:

$$\mathsf{PT} \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \,. \tag{1.22}$$

Věnujme se proto poněkud podrobněji vlastní Lorentzově grupě.

1.2 Vlastní Lorentzova grupa

Libovolný element VLG lze získat složením *speciální Lorentzovy transformace* s pootočením souřadných os. Pootočení *souřadné soustavy* o úhel φ kolem osy určené jednotkovým vektorem $\boldsymbol{n}$ je popsáno transformační maticí[5]

$$\Lambda(\boldsymbol{n}, \varphi) = \exp(i\varphi\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{M}) \;, \tag{1.23}$$

[5]Zatímco v [1] (Doplněk M) šlo o aktivní interpretaci grupy rotací (natáčení vektoru v zadané soustavě souřadné), zde diskutujeme pasivní transformace (popis téhož vektoru v natočené souřadné soustavě). Proto v exponentu (1.23) je opačné znaménko než ve formuli (M.14)/[1].

kde

$$
\mathsf{M}_1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & i & \cdot \end{pmatrix}, \quad
\mathsf{M}_2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -i & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad
\mathsf{M}_3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -i & \cdot \\ \cdot & i & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}
\tag{1.24}
$$

jsou generátory rotací kolem příslušných souřadných os. Všechna možná pootočení souřadné soustavy tvoří grupu $SO(3)$, která je samozřejmě podgrupou grupy $SO(3,1)$.

Přechodu k souřadné soustavě, která se vůči výchozí pohybuje rychlostí v ve směru jednotkového vektoru $\boldsymbol{n}$, odpovídá transformační matice[6]

$$
\Lambda(\boldsymbol{n}, v) = \exp(iu\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{N}), \tag{1.25}
$$

kde parametr (*rapidita*)[7]

$$
u \equiv \operatorname{artgh}\frac{v}{c} = \frac{1}{2} \ln \frac{c+v}{c-v} \tag{1.26}
$$

a matice

$$
\mathsf{N}_1 = \begin{pmatrix} \cdot & i & \cdot & \cdot \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad
\mathsf{N}_2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad
\mathsf{N}_3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}
\tag{1.27}
$$

---

[6] O tomto *pohybu* (případně o odpovídající transformaci) se často mluví jako o *boostu*. Této mezinárodně vžité terminologii se nebudeme vyhýbat ani my. Ne snad proto, že by nám český výraz posouvání nezněl libozvučněji, ale proto, že je výrazně odlišný od termínu *posunutí*, a tedy dovoluje zřetelně odlišit, zda mluvíme o elementech VLG, či o elementech grupy translací.
Pro matici (1.25), odpovídající čistému boostu, budeme někdy užívat symbolu $\mathrm{B}(v)$.

[7] Rapidita je formulí (1.26) definována jako funkce rychlosti: $u = u(v)$. Abychom předešli případnému nedorozumění, zdůrazněme, že termínu rapidita se (zejména ve vysokoenergetické fyzice) užívá také k označení jedné z kinematických charakteristik částic. ***Rapiditou částice*** v souřadné soustavě, v níž její impuls $\boldsymbol{p}$ svírá s osou $\boldsymbol{e}_3$ úhel ϑ, se pak rozumí veličina $y \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{E+cp^3}{E-cp^3} \equiv y(E, \vartheta)$, kde $p^3 \equiv \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_3 = |\boldsymbol{p}| \cos\vartheta$.

Povšimněte si, že

i) pro částici s energií E je $y \in \langle -u(v)\,, u(v) \rangle$, kde $v \equiv |\boldsymbol{p}|\, c^2/E$ je rychlost uvažované částice,

ii) pokud je $E \gg Mc^2$, potom $y(E, \vartheta) \cong \eta(\vartheta)$, kde $\eta(\vartheta) \equiv -\ln\tan\frac{\vartheta}{2}$ je tzv. ***pseudorapidita***.

jsou generátory speciálních Lorentzových transformací podél příslušných souřadných os. Složení dvou boostů podél stejné osy představuje opět boost podél téže osy, ale transformace vzniklá složením boostů v různých směrech již boostem být nemusí, tj. všechny možné boosty (na rozdíl od rotací) grupu *netvoří.*

Matici odpovídající libovolné vlastní Lorentzově transformaci lze jednoznačně určit pomocí šesti reálných parametrů tak, že

$$\Lambda(a_1, \cdots, a_6) = \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{3} (a_j\, \mathsf{M}_j + a_{j+3}\, \mathsf{N}_j) \right\}. \tag{1.28}$$

$SO(3,1)$ je šestiparametrickou nekompaktní Lieovou grupou[8]. Odpovídající Lieova algebra je determinována komutačními relacemi mezi generátory (1.24),(1.27) :

$$[\mathsf{M}_j\,, \mathsf{M}_k] = i\,\varepsilon_{jkl}\,\mathsf{M}_l\,, \tag{1.29}$$

$$[\mathsf{N}_j\,, \mathsf{N}_k] = -\,i\,\varepsilon_{jkl}\,\mathsf{M}_l\,, \tag{1.30}$$

$$[\mathsf{N}_j\,, \mathsf{M}_k] = [\mathsf{M}_j\,, \mathsf{N}_k] = i\,\varepsilon_{jkl}\,\mathsf{N}_l\,. \tag{1.31}$$

Definujeme-li

$$\mathsf{I}^{jk} \equiv -\,\mathsf{I}^{kj} \equiv \varepsilon_{jkl}\,\mathsf{M}_l\,, \qquad \mathsf{I}^{0k} \equiv -\,\mathsf{I}^{k0} \equiv \mathsf{N}_k\,, \tag{1.32}$$

můžeme komutační relace (1.29) – (1.31) zapsat jako

$$[\mathsf{I}^{\mu\nu}, \mathsf{I}^{\rho\sigma}] = i\left(g^{\mu\sigma}\,\mathsf{I}^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}\,\mathsf{I}^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho}\,\mathsf{I}^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma}\,\mathsf{I}^{\mu\rho}\right). \tag{1.33}$$

Zavedeme-li parametry

$$\omega_{kl} \equiv -\omega_{lk} \equiv \varepsilon_{kli}\,a_i\,, \qquad \omega_{0l} \equiv -\,\omega_{l0} \equiv a_{l+3}\,, \tag{1.34}$$

[8]Pro úplnost poznamenejme, že grupa SO(3,1) je dvojnásobně souvislou a úlohu univerzální pokrývací grupy v tomto případě hraje grupa všech dvourozměrných unimodulárních komplexních matic ($\equiv$ SL$(2, C)$).

můžeme matici (1.28) zapsat jako[9]

$$\Lambda(\omega) = \exp\left(\frac{i}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\,\mathsf{I}^{\alpha\beta}\right). \tag{1.35}$$

Porovnáním s formulí (1.23), resp. (1.25) vidíme, že *natočení* o úhel φ kolem osy $\boldsymbol{n}$ odpovídají parametry

$$\omega_{0k} = 0, \quad \omega_{jk} = \varphi\,\varepsilon_{jkl}\,n_l, \tag{1.36}$$

resp., že *posouvání* rychlostí v ve směru $\boldsymbol{n}$ odpovídají parametry

$$\omega_{0k} = u n_k, \quad \omega_{jk} = 0. \tag{1.37}$$

Z formulí (1.24),(1.27),(1.32) nalezneme, že elementy matic $\mathsf{I}^{\alpha\beta}$ mají tvar

$$\left(\mathsf{I}^{\alpha\beta}\right)_{(\mu,\nu)} = \mathsf{I}^{\alpha\beta,\mu}{}_{\nu}\,, \tag{1.38}$$

kde na pravé straně vystupují elementy (invariantního) tenzoru 4. řádu

$$\mathsf{I}^{\alpha\beta,\mu}{}_{\nu} \equiv i\left(g^{\alpha\mu}\,g^{\beta}{}_{\nu} - g^{\alpha}{}_{\nu}\,g^{\beta\mu}\right). \tag{1.39}$$

Povšimněme si, že platí

$$\mathsf{I}^{\alpha\beta,\mu\nu} = -\,\mathsf{I}^{\beta\alpha,\mu\nu} = -\,\mathsf{I}^{\alpha\beta,\nu\mu} = \mathsf{I}^{\mu\nu,\alpha\beta}\,. \tag{1.40}$$

Z formulí (1.35)–(1.39) vidíme, že v případě infinitesimálních transformací nabývá vztah (1.5) tvaru

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \omega^{\mu}{}_{\nu}\,x^{\nu}\,. \tag{1.41}$$

---

[9] Snadno se lze přesvědčit, že transformace (1.35), pro které $\omega_{j0} = 0$, tvoří podgrupu vlastní Lorentzovy grupy. Jedná se samozřejmě o všechna možná prostorová pootočení ($\equiv R$), tj. o grupu *SO(3)* (blíže viz [1]–doplněk M). Odpovídající matice mají kvazidiagonální tvar

$$\Lambda(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathsf{R} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Pokud nebude hrozit nebezpečí z nedorozumění, budeme v dalším často užívat zjednodušenou symboliku. Tak např. i pro celou matici $\Lambda(R)$ budeme užívat symbolu R.

Na základě komutačních relací (1.33) snadno zjistíme, že matice

$$\frac{1}{2}\, \mathsf{l}_{\mu\nu}\, \mathsf{l}^{\mu\nu} = \vec{\mathsf{M}}^2 - \vec{\mathsf{N}}^2, \tag{1.42}$$

$$\frac{1}{4}\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, \mathsf{l}_{\mu\nu}\, \mathsf{l}_{\rho\sigma} = \vec{\mathsf{M}} \cdot \vec{\mathsf{N}} \tag{1.43}$$

komutují se všemi generátory $SO(3,1)$. Z Schurova lemmatu[10] víme, že těmto veličinám jsou v libovolné ireducibilní reprezentaci $SO(3,1)$ přiřazeny násobky operátoru identity. Hodnoty těchto násobků je možno využít ke klasifikaci ireducibilních reprezentací. Tak např. pro *vektorovou reprezentaci,* definovanou maticemi(1.24),(1.27), nalezneme

$$\vec{\mathsf{M}}^2 - \vec{\mathsf{N}}^2 = 3\,, \qquad \vec{\mathsf{M}} \cdot \vec{\mathsf{N}} = 0\,. \tag{1.44}$$

Ireducibilní reprezentace $SO(3,1)$ se však dnes častěji specifikují zadáním hodnot jiných parametrů. K tomu zaveďme veličiny

$$\mathsf{J}^l_{(1)} \equiv \frac{1}{2}\,(\,\mathsf{M}_l + i\,\mathsf{N}_l)\,,$$

$$\mathsf{J}^l_{(2)} \equiv \frac{1}{2}\,(\,\mathsf{M}_l - i\,\mathsf{N}_l)\,. \tag{1.45}$$

Komutační relace (1.29)–(1.31) jsou pak ekvivalentní relacím

$$\begin{aligned} \left[\mathsf{J}^j_{(1)}\,, \mathsf{J}^k_{(1)}\right] &= i\,\varepsilon_{jkl}\,\mathsf{J}^l_{(1)}\,, \\ \left[\mathsf{J}^j_{(2)}\,, \mathsf{J}^k_{(2)}\right] &= i\,\varepsilon_{jkl}\,\mathsf{J}^l_{(2)}, \\ \left[\mathsf{J}^j_{(1)}\,, \mathsf{J}^k_{(2)}\right] &= 0. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Veličiny $\vec{\mathsf{J}}_{(1)}, \vec{\mathsf{J}}_{(2)}$ tedy můžeme *formálně* identifikovat jako dva nezávislé impulsmomenty. Ireducibilní reprezentace $SO(3,1)$ pak určujeme zadáním velikostí těchto impulsmomentů, tj. $D^{(j,j')}$ označuje $(2j+1)\,(2j'+1)$ rozměrnou ireducibilní reprezentaci $SO(3,1)$, v níž veličině $\vec{\mathsf{J}}^{\,2}_{(1)}$, resp. $\vec{\mathsf{J}}^{\,2}_{(2)}$ je přiřazena jednotková matice vynásobená faktorem $j\,(j+1)$,

[10]Viz [1] – Doplněk L.

resp. $j'(j'+1)$. Všechny konečněrozměrné ireducibilní reprezentace obdržíme, když necháme parametry j, j' nezávisle probíhat všechny nezáporné celé a polocelé hodnoty[11]. Přitom každá z veličin $\mathsf{J}^k_{(1)}$, $\mathsf{J}^k_{(2)}$ je reprezentována *hermitovskou* maticí. Z definice(1.45) pak vidíme, že v libovolné konečněrozměrné reprezentaci jsou přiřazeny generátorům M_l matice hermitovské, ale matice odpovídající generátorům N_l se od hermitovských liší faktorem i. Tedy, s výjimkou triviální reprezentace $D^{(0,0)}$, *žádná konečněrozměrná reprezentace* $SO(3,1)$ *není unitární.*[12]

Z definice (1.45) dostáváme

$$\vec{\mathsf{J}}^{\,2}_{(1)} = \frac{1}{4}\left(\vec{\mathsf{M}}^2 - \vec{\mathsf{N}}^2 + 2i\,\vec{\mathsf{M}}\cdot\vec{\mathsf{N}}\right),$$

$$\vec{\mathsf{J}}^{\,2}_{(2)} = \frac{1}{4}\left(\vec{\mathsf{M}}^2 - \vec{\mathsf{N}}^2 - 2i\,\vec{\mathsf{M}}\cdot\vec{\mathsf{N}}\right). \tag{1.47}$$

Z formule (1.44) pak vidíme, že vektorová reprezentace je ireducibilní reprezentací $D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$.

Omezíme-li se v libovolné reprezentaci grupy $SO(3,1)$ pouze na operátory odpovídající elementům z její podgrupy $SO(3)$, obdržíme reprezentaci grupy $SO(3)$. Z definice (1.45) dostáváme pro generátory této grupy vyjádření

$$\vec{\mathsf{M}} = \vec{\mathsf{J}}_{(1)} + \vec{\mathsf{J}}_{(2)}. \tag{1.48}$$

Z komutačních relací (1.46) vidíme, že (formálně) $\vec{\mathsf{M}}$ představuje celkový impulsmoment, obdržený složením dvou nezávislých impulsmomentů $\vec{\mathsf{J}}_{(1)}$, $\vec{\mathsf{J}}_{(2)}$. Z pravidel o skládání impulsmomentů je pak zřejmé, že ireducibilní reprezentace $D^{(j,j')}$ grupy $SO(3,1)$ představuje z hlediska grupy $SO(3)$ direktní součet

$$\sum_{J=|j-j'|}^{j+j'} \oplus D^{(J)} \tag{1.49}$$

[11]Pro přesnost poznamenejme, že (v souladu s terminologií užívanou ve většině fyzikálních publikací) zde pod pojem "reprezentace" zahrnujeme i reprezentace dvojznačné.

[12]Jde o přímý důsledek nekompaktnosti $SO(3,1)$: Unitární reprezentace nekompaktní grupy může být konečněrozměrná pouze tehdy, když celou nekompaktní část realizuje triválně, tj. tak, že všem jejím elementům odpovídá generátor identity.

jejích ireducibilních reprezentací[13].

Nakonec ještě uveďme vztahy mezi maticemi odpovídajícími čistému natočení, resp. boostu a maticemi odpovídajícími jednotlivým druhům inverze:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\Lambda(\boldsymbol{n},\varphi)\,\mathsf{P} &= \Lambda(\boldsymbol{n},\varphi)\,, \\ \mathsf{P}\Lambda(\boldsymbol{n},v)\,\mathsf{P} &= \Lambda(-\boldsymbol{n},v)\,, \end{aligned} \tag{1.50}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{T}\Lambda(\boldsymbol{n},\varphi)\,\mathsf{T} &= \Lambda(\boldsymbol{n},\varphi)\,, \\ \mathsf{T}\Lambda(\boldsymbol{n},v)\,\mathsf{T} &= \Lambda(-\boldsymbol{n},v)\,. \end{aligned} \tag{1.51}$$

1.3 Úlohy

U.1.1. Dokažte, že matice vlastní Lorentzovy transformace $\Lambda\,(\omega)$ je ortogonální, resp. symetrická právě tehdy, když představuje pouhé pootočení souřadných os, resp. čistý boost.

U.1.2. Nechť $\hat{\mathsf{U}}(R)$, $\hat{\mathsf{J}}_k$ jsou operátory přiřazené rotaci R, resp. generátorům M_k v nějaké unitární reprezentaci grupy $SO(3)$ a nechť trojice operátorů $\hat{\mathsf{A}}_k$ vyhovuje komutačním relacím

$$\left[\hat{\mathsf{J}}_j,\hat{\mathsf{A}}_k\right] = i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathsf{A}}_l\ .$$

Dokažte, že potom platí

$$\hat{\mathsf{U}}^\dagger(R)\,\hat{\mathsf{A}}_k\,\hat{\mathsf{U}}(R) = \sum_l \mathsf{R}_{(k,l)}\hat{\mathsf{A}}_l\ .$$

Povšimněte si, že díky tomu mj. ihned vidíme, že matice (1.24),(1.27) vyhovují relacím

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(R)\,\mathsf{M}_k\,\Lambda(R) &= \sum_l \Lambda^k{}_l(R)\,\mathsf{M}_l, \\ \Lambda^{-1}(R)\,\mathsf{N}_k\,\Lambda(R) &= \sum_l \Lambda^k{}_l(R)\,\mathsf{N}_l. \end{aligned}$$

[13] Nepřehlédněme, že žádná ireducibilní reprezentace grupy $SO(3)$ není v ireducibilní reprezentaci grupy $SO(3,1)$ zastoupena více než jednou.

U.1.3. Ukažte, že všechny (komplexní) unimodulární[14] matice $n \times n$ tvoří grupu[15] ($\equiv SL(n, C)$).
Ukažte, že všechny unitární unimodulární matice $n \times n$ tvoří grupu ($\equiv SU(n) \subset SL(n, C)$).
Na základě věty o polárním rozkladu[16] dokažte, že libovolnou matici $\mathsf{A} \in SL(2, C)$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathsf{A} = \mathsf{U} \exp \mathsf{H},$$

kde $\mathsf{U} \in SU(2)$ a hermitovská matice H má nulovou stopu. Ukažte, že takovýto rozklad existuje právě jeden.
Dokažte, že matice U patří do $SU(2)$ právě tehdy, když ji lze zapsat ve tvaru

$$\mathsf{U} = \begin{pmatrix} N_4 + iN_3 & N_2 + iN_1 \\ -N_2 + iN_1 & N_4 - iN_3 \end{pmatrix},$$

kde N_j jsou libovolná reálná čísla vyhovující podmínce

$$\sum_{j=1}^{4} N_j^2 = 1,$$

tj. představují kartézské souřadnice bodu na třírozměrném povrchu ($\equiv S_3$) koule ve čtyřrozměrném Euklidově prostoru.
Dokažte, že 2×2 hermitovská matice má nulovou stopu právě tehdy, když ji lze vyjádřit pomocí Pauliho matic $\boldsymbol{\sigma}$ ve tvaru

$$\mathsf{H} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

kde $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^*$ je libovolný vektor z třírozměrného Euklidova prostoru ($\equiv R_3$).

[14] Připomeňme, že matice se nazývá unimodulární, když je její determinant roven jedné.

[15] Mlčky přitom rozumíme, že grupové násobení je identické s násobením maticovým. Podobně je tomu i v dalších případech, kdy to již explicitně zdůrazňovat nebudeme.

[16] Připomeňme, že tuto větu lze formulovat jako tvrzení: Pro každou nesingulární matici A existuje právě jedna dvojice matic U, H, z nichž první je unitární a druhá hermitovská a přitom platí $\mathsf{U} \exp \mathsf{H} = \mathsf{A}$.

Povšimněte si, že odtud již plyne, že šestiparametrická Lieova grupa $SL(2,C)$ je jednoduše souvislá.[17]
Ukažte, že každou matici $\mathsf{A} \in SL(2,C)$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathsf{A} = \exp\left\{i\,\frac{\alpha}{2}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right\}\exp\left\{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right\} \equiv \mathsf{A}(\alpha,\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový a $\boldsymbol{b}$ libovolný vektor z R_3 a reálné číslo $\alpha \in (0,4\pi)$. Rozhodněte, zda toto tvrzení platí i tehdy, když se omezíme na $\alpha \in (0,2\pi)$.

Důkaz posledního tvrzení se stane téměř triviálním, pokud si uvědomíte, že kartézské souřadnice bodu na S_3 lze vyjádřit pomocí 3 úhlů jako

$$\begin{aligned} N_1 &= \sin\varphi\sin\vartheta\sin\alpha, \\ N_2 &= \cos\varphi\sin\vartheta\sin\alpha, \\ N_3 &= \cos\vartheta\sin\alpha, \\ N_4 &= \cos\alpha, \end{aligned}$$

kde $\varphi \in \langle 0,2\pi)$, $\vartheta,\alpha \in \langle 0,\pi\rangle$.

Ukažte, že všechny matice $\mathsf{A}(\alpha,\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$, pro něž je $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{n}$ je libovolný *pevně* zadaný jednotkový vektor, tvoří grupu ($\equiv U(1) \subset SU(2) \subset SL(2,C)$). Rozhodněte, zda toto tvrzení platí i tehdy, když se omezíme na $\alpha \in (0,2\pi)$.

U.1.4. Nechť φ, u jsou reálná čísla a $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{N}$ jednotkové vektory. Ukažte, že pro matice

$$\begin{aligned} \mathsf{U}(\boldsymbol{n},\varphi) &\equiv \exp\left\{i\,\frac{\varphi}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\right\}, \\ \mathsf{B}(\boldsymbol{n},u) &\equiv \exp\left\{\frac{u}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\right\} \end{aligned}$$

platí relace

[17] Stačí si uvědomit, že výše nalezené výsledky ukazují, že množina hodnot parametrů grupy $SL(2,C)$ je topologicky ekvivalentní $S_3 \times R_3$. Přitom Euklidův prostor je evidentně jednoduše souvislý a totéž je pravda také o všech S_n pro $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{U}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathsf{U}^\dagger &= \cos\varphi\;(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{N}) + (1-\cos\varphi)\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) \\
&\quad +\sin\varphi\;[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}]\cdot\boldsymbol{N}, \\
\mathsf{B}^2 &= \operatorname{ch}u + \operatorname{sh}u\;(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}), \\
\mathsf{B}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathsf{B} &= \operatorname{sh}u\;(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N}) + (\operatorname{ch}u-1)\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{N}).
\end{aligned}$$

Dokažte, že tyto relace jsou ekvivalentní vztahům

$$\begin{aligned}
\mathsf{U}(\boldsymbol{n},\varphi)\,\sigma^\mu\,\mathsf{U}^\dagger(\boldsymbol{n},\varphi) &= \Lambda_\nu{}^\mu(\boldsymbol{n},\varphi)\,\sigma^\nu, \\
\mathsf{B}(\boldsymbol{n},u)\,\sigma^\mu\,\mathsf{B}^\dagger(\boldsymbol{n},u) &= \Lambda_\nu{}^\mu(\boldsymbol{n},u)\,\sigma^\nu,
\end{aligned}$$

kde $\sigma^0 \equiv 1$ a σ^k je k-tá Pauliho matice.
Na základě těchto výsledků ukažte, že
i) ke každé matici $\mathsf{A} \in SL(2,C)$ existuje právě *jedna* vlastní Lorentzova transformace $\Lambda(\omega(\mathsf{A}))$ taková, že

$$\mathsf{A}\,\sigma^\mu \mathsf{A}^\dagger = \Lambda_\nu{}^\mu(\omega(\mathsf{A}))\,\sigma^\nu,$$

ii)

$$\Lambda_\nu{}^\mu(\omega(\mathsf{A})) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\sigma^\nu\,\mathsf{A}\sigma^\mu\mathsf{A}^\dagger = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\mathsf{A}\sigma^\mu\mathsf{A}^\dagger\sigma^\nu,$$

iii) ke každé vlastní Lorentzově transformaci $\Lambda(\omega)$ existují právě *dvě* matice $\mathsf{A}(\omega,j) \in SL(2,C)$, $j=1,2$ takové, že

$$\mathsf{A}(\omega,j)\,\sigma^\mu\mathsf{A}^\dagger(\omega,j) = \Lambda_\nu{}^\mu(\omega)\,\sigma^\nu,$$

iv) pro

$$\Lambda(\omega) = \Lambda(\boldsymbol{N},\varphi)\,\Lambda(\boldsymbol{n},v)$$

je

$$\mathsf{A}(\omega,j) = (-1)^{j+1}\exp\left(i\,\frac{\varphi}{2}\,\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\exp\left(\frac{u}{2}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right),$$

kde $u \equiv u(v)$ je rapidita.
Jinými slovy řečeno, matice $\Lambda(\omega(\mathsf{A}))$ tvoří čtyřrozměrnou reprezentaci grupy $SL(2,C)$ a matice $\mathsf{A}(\omega,j)$ tvoří "dvojznačnou" dvourozměrnou reprezentaci $SO(3,1)$.
Protože již víme, že grupa $SL(2,C)$ je jednoduše souvislá, vidíme na

základě právě nalezených výsledků, že $SO(3,1)$ je dvojnásobně souvislá a její univerzální pokrývací grupou je $SL(2,C)$.
Ukažte, že zcela analogický vztah platí také mezi grupami $SO(3)$ a $SU(2)$.

U.1.5. Na základě věty o polárním rozkladu dokažte, že libovolnou vlastní Lorentzovu transformaci lze získat provedením boostu následovaného pootočením, tj. že pro každé ω existují jednotkové vektory $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{N}$, rapidita $u\,(\equiv u\,(v))$ a úhel φ takové, že

$$\Lambda(\omega) = \Lambda(\boldsymbol{N}, \varphi)\,\Lambda(\boldsymbol{n}, v)\,.$$

Rozhodněte, zda je tento rozklad jednoznačný.
Pokud uvažovaná Lorentzova transformace vznikla provedením dvou po sobě následujících boostů, nazývá se výše zmíněné pootočení *Thomasovou precesí.* Specifikujte tuto precesi pro každou uspořádanou dvojici boostů, tj. ukažte, že v případě

$$\Lambda(\omega) = \Lambda(\boldsymbol{n}_2, v_2)\,\Lambda(\boldsymbol{n}_1, v_1)$$

Thomasova precese představuje natočení kolem směru rovnoběžného s vektorem $[\boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{n}_1]$ o úhel φ, takový, že

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\,|\sin\vartheta|\,\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2\,[(\gamma_1+1)\,(\gamma_2+1) + \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2\cos\vartheta]}{(\gamma_1+1)\,(\gamma_2+1)\,[(\gamma_1\gamma_2+1)\,(1+\cos 2\vartheta) + (\gamma_1+\gamma_2)\,(1-\cos 2\vartheta) + 2\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2\cos\vartheta]}\,,$$

kde ϑ je úhel svíraný vektory $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ a β, γ je standardní označení pro bezrozměrné veličiny $\beta \equiv v/c$, $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

U.1.6. Ukažte, že pro matice uvedené ve formulích (1.24),(1.27) platí

$$\begin{aligned} (\mathsf{M}_j)^3 &= \mathsf{M}_j, \\ (\mathsf{N}_j)^3 &= -\mathsf{N}_j. \end{aligned}$$

Na základě těchto relací pak dokažte, že matice odpovídající natočení kolem osy, resp. čistému boostu možno zapsat ve tvaru

$$\Lambda(\boldsymbol{n}, \varphi) = 1 + i\sin\varphi\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{M}) - (1-\cos\varphi)\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{M})^2\,,$$

respektive

$$\Lambda(\boldsymbol{n}, v) = 1 + i\frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N}) - \left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right](\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N})^2\,.$$

U.1.7. Dokažte, že matici odpovídající boostu ve směru jednotkového vektoru $\boldsymbol{n}$ je možno obdržet z matice popisující boost ve směru osy $\boldsymbol{e}_3$ podobnostní transformací

$$\Lambda(\boldsymbol{n}, v) = \mathsf{R}(\boldsymbol{n})\,\Lambda(\boldsymbol{e}_3, v)\,\mathsf{R}^{-1}(\boldsymbol{n})\,,$$

kde matice

$$\mathsf{R}(\boldsymbol{n}) \equiv \Lambda(-\boldsymbol{e}_3, \varphi)\,\Lambda(-\boldsymbol{e}_2, \vartheta)\,,$$

v níž ϑ, φ je azimutální, resp. polární úhel směru $\boldsymbol{n}$.
Ukažte, že podobně lze vyjádřit také matici odpovídající natočení kolem zadané osy, tj. že platí

$$\Lambda(\boldsymbol{n}, \alpha) = \mathsf{R}(\boldsymbol{n})\,\Lambda(\boldsymbol{e}_3, \alpha)\,\mathsf{R}^{-1}(\boldsymbol{n})\,,$$

Přesvědčte se, že směr, který je ve výchozí soustavě shodný se směrem třetí souřadné osy, je v soustavě, kterou z výchozí obdržíme natočením $\mathsf{R}(\boldsymbol{n})$, determinovaný úhly ϑ, φ . Jinými slovy řečeno (tj. v termínech aktivní interpretace),[18] transformace $\mathsf{R}(\boldsymbol{n})$ natáčí vektor $\boldsymbol{n}$ do směru $\boldsymbol{e}_3$.
Ukažte, že všechna výše zmíněná tvrzení zůstanou v platnosti, když v nich provedeme záměnu $\mathsf{R}(\boldsymbol{n}) \to \mathsf{R}_0(\boldsymbol{n})$, kde

$$\begin{aligned}\mathsf{R}_0(\boldsymbol{n}) &\equiv \mathsf{R}(\boldsymbol{n})\,\Lambda(\boldsymbol{e}_3, \varphi)\\ &= \exp(-i\varphi\mathsf{M}_3)\exp(-i\vartheta\mathsf{M}_2)\exp(i\varphi\mathsf{M}_3)\,.\end{aligned}$$

U.1.8. Komponenty libovolného čtyřvektoru v transformované soustavě souvisejí s komponentami tohoto čtyřvektoru v soustavě výchozí vztahem

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}.$$

Na základě formulí (1.25)–(1.27) dokažte, že pokud se transformovaná soustava vůči výchozí pouze posouvá konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$, potom

[18] Viz Kapitolu 9 v [1].

tento vztah lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} A'^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left[A^0 - \frac{v}{c}\,\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{A}\right] \\ \boldsymbol{A}' &= \boldsymbol{A} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left[\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{A}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) - \frac{v}{c}A^0\right]\tilde{\boldsymbol{v}}\,. \end{aligned}$$

Obdobně ukažte, že transformační zákon pro tenzor druhého řádu

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}$$

je možno, pokud se jedná o tenzor *antisymetrický*, v případě výše uvažovaného boostu vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= (\boldsymbol{E}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}})\,\tilde{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left\{\tilde{\boldsymbol{v}}\times[\boldsymbol{E}\times\tilde{\boldsymbol{v}}] + \frac{v}{c}\,[\tilde{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{B}]\right\}, \\ \boldsymbol{B}' &= (\boldsymbol{B}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}})\,\tilde{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left\{\tilde{\boldsymbol{v}}\times[\boldsymbol{B}\times\tilde{\boldsymbol{v}}] - \frac{v}{c}\,[\tilde{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{E}]\right\}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} E^k &\equiv F^{k0}, \\ B^k &\equiv -\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}F^{lm}. \end{aligned}$$

U.1.9. Ukažte, že veličiny $g_{\mu\nu}, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ představují komponenty tenzoru druhého, resp. čtvrtého řádu invariantní vůči všem vlastním Lorentzovým transformacím, tj. dokažte, že v případě *těchto* transformací platí

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda_{\nu}{}^{\sigma}g_{\rho\sigma} &= g_{\mu\nu}, \\ \Lambda_{\mu}{}^{\xi}\Lambda_{\nu}{}^{\eta}\Lambda_{\rho}{}^{\zeta}\Lambda_{\sigma}{}^{\omega}\varepsilon_{\xi\eta\zeta\omega} &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Obdobně dokažte , že při prostorové inverzi

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\to g_{\mu\nu}, \\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &\to -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned}$$

U.1.10. Dokažte, že platí

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = & -\left(g_\mu{}^\alpha g_\nu{}^\beta - g_\mu{}^\beta g_\nu{}^\alpha\right)\left(g_\rho{}^\gamma g_\sigma{}^\delta - g_\rho{}^\delta g_\sigma{}^\gamma\right) \\
& + \left(g_\mu{}^\alpha g_\nu{}^\gamma - g_\mu{}^\gamma g_\nu{}^\alpha\right)\left(g_\rho{}^\beta g_\sigma{}^\delta - g_\rho{}^\delta g_\sigma{}^\beta\right) \\
& + \left(g_\mu{}^\alpha g_\nu{}^\delta - g_\mu{}^\delta g_\nu{}^\alpha\right)\left(g_\rho{}^\gamma g_\sigma{}^\beta - g_\rho{}^\beta g_\sigma{}^\gamma\right) \\
& - \left(g_\mu{}^\beta g_\nu{}^\gamma - g_\mu{}^\gamma g_\nu{}^\beta\right)\left(g_\rho{}^\alpha g_\sigma{}^\delta - g_\rho{}^\delta g_\sigma{}^\alpha\right) \\
& + \left(g_\mu{}^\beta g_\nu{}^\delta - g_\mu{}^\delta g_\nu{}^\beta\right)\left(g_\rho{}^\alpha g_\sigma{}^\gamma - g_\rho{}^\gamma g_\sigma{}^\alpha\right) \\
& - \left(g_\mu{}^\gamma g_\nu{}^\delta - g_\mu{}^\delta g_\nu{}^\gamma\right)\left(g_\rho{}^\alpha g_\sigma{}^\beta - g_\rho{}^\beta g_\sigma{}^\alpha\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} = & -g_\mu{}^\alpha g_\nu{}^\beta g_\rho{}^\gamma + g_\mu{}^\alpha g_\nu{}^\gamma g_\rho{}^\beta - g_\mu{}^\beta g_\nu{}^\gamma g_\rho{}^\alpha \\
& + g_\mu{}^\beta g_\nu{}^\alpha g_\rho{}^\gamma - g_\mu{}^\gamma g_\nu{}^\alpha g_\rho{}^\beta + g_\mu{}^\gamma g_\nu{}^\beta g_\rho{}^\alpha .
\end{aligned}
$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = 2\left(g_\mu{}^\beta g_\nu{}^\alpha - g_\mu{}^\alpha g_\nu{}^\beta\right),$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} = -6 g_\mu{}^\alpha,$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24.$$

U.1.11. Ukažte, že komutační relace (1.29)–(1.31) jsou invariantní vůči záměně

$$\vec{\mathsf{M}} \to \vec{\mathsf{J}} \equiv \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \qquad \vec{\mathsf{N}} \to \vec{\mathsf{K}} \equiv \frac{i}{2}\vec{\sigma}.$$

Jinými slovy řečeno, ukažte, že Pauliho matice, resp. jejich násobek imaginární jednotkou představují dvojnásobek generátorů rotací, resp. boostu v nějaké reprezentaci VLG. Ukažte, že se jedná o ireducibilní

reprezentaci $\mathsf{D}^{(0,\frac{1}{2})}$.
Dokažte analogické tvrzení o maticích

$$\vec{\mathsf{J}} \equiv \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \qquad \vec{\mathsf{K}} \equiv -\frac{i}{2}\vec{\sigma}.$$

Ukažte, že v tomto případě se jedná o reprezentaci $\mathsf{D}^{(\frac{1}{2},0)}$.[19]

U.1.12. Ukažte, že matice

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &\equiv \mathsf{N}_1 - \mathsf{M}_2, \\ \mathsf{B} &\equiv \mathsf{N}_2 + \mathsf{M}_1 \end{aligned}$$

vyhovují komutačním relacím

$$\begin{aligned} [\mathsf{A}, \mathsf{B}] &= 0, \\ [\mathsf{M}_3, \mathsf{A}] &= i\mathsf{B}, \\ [\mathsf{M}_3, \mathsf{B}] &= -i\mathsf{A}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Povšimněte si, že tyto komutační relace jsou shodné s komutačními relacemi generátorů grupy $ISO(2)$.[20] Tedy všechny transformace

$$\Lambda(\alpha, \beta; \varphi) \equiv \mathsf{S}(\alpha, \beta) \exp(\mathrm{i}\varphi \mathsf{M}_3)\,,$$

kde

$$\mathsf{S}(\alpha, \beta) \equiv \exp\left\{\mathrm{i}\left(\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B}\right)\right\}$$

tvoří tříparametrickou podgrupu (izomorfní grupě $ISO(2)$) vlastní Lorentzovy grupy.
Ukažte, že z komutačních relací (1.52) plynou vztahy

$$\begin{aligned} \exp\left(i\varphi\mathsf{M}_3\right)\mathsf{A}\exp\left(-i\varphi\mathsf{M}_3\right) &= \mathsf{A}\cos\varphi - \mathsf{B}\sin\varphi, \\ \exp\left(i\varphi\mathsf{M}_3\right)\mathsf{B}\exp\left(-i\varphi\mathsf{M}_3\right) &= \mathsf{A}\sin\varphi + \mathsf{B}\cos\varphi, \end{aligned}$$

[19] Veličiny transformující se podle reprezentace $\mathsf{D}^{(0,\frac{1}{2})}$, resp. $\mathsf{D}^{(\frac{1}{2},0)}$ se nazývají spinory s "tečkovanými", resp. "netečkovanými indexy".

[20] Euklidova grupa $ISO(n)$ je grupou všech translací a natočení v n-rozměrném euklidovském prostoru. V našem případě matice A, B, resp. M_3 hrají úlohu generátorů translací, resp. rotací v rovině.

tj. matice A, B se vůči rotacím kolem osy e_3 chovají jako první dvě komponenty vektoru.
Ukažte, že platí

$$\mathsf{A}^3 = \mathsf{B}^3 = 0.$$

Využijte tohoto výsledku k tomu, abyste ukázali, že

$$\mathsf{S}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1+\zeta & -\alpha & -\beta & -\zeta \\ -\alpha & 1 & 0 & \alpha \\ -\beta & 0 & 1 & \beta \\ \zeta & -\alpha & -\beta & 1-\zeta \end{pmatrix},$$

kde

$$\zeta \equiv \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2\right).$$

Povšimněte si, že vůči všem transformacím $\Lambda(\alpha, \beta; \varphi)$ je invariantní každý čtyřvektor, jehož komponenty vyhovují podmínkám

$$\begin{aligned} k^0 &= k^3, \\ k^1 &= k^2 = 0. \end{aligned}$$

Kapitola 2

Kleinova Gordonova rovnice

2.1 Volná částice

Časový vývoj (čistého) stavu je podle kvantové teorie popisován Schrödingerovou rovnicí

$$i\hbar \frac{d\,|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{\mathsf{H}}\,|\psi(t)\rangle\,, \tag{2.1}$$

kde $\hat{\mathsf{H}}$ je hamiltonián příslušného systému. Z [1] víme, že pro volnou bezspinovou bodovou částici má tato rovnice v nerelativistickém přiblížení v x-reprezentaci tvar

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \triangle \psi(\boldsymbol{x},t)\,, \tag{2.2}$$

neboť podle nerelativistické mechaniky energií takovéto částice je

$$E^{ner} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2M} \tag{2.3}$$

a v x-reprezentaci operátorem impulsu je

$$\hat{\boldsymbol{P}} \equiv -i\hbar \boldsymbol{\nabla}. \tag{2.4}$$

Pokusme se nyní nalézt relativistické zobecnění pohybové rovnice (2.2). Jestliže v předchozím postupu zaměníme nerelativistickou Hamiltonovu funkci volné částice (2.3) odpovídajícím vztahem relativistickým

$$E = c\,\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2 c^2}\,, \tag{2.5}$$

obdržíme místo diferenciální rovnice (2.2) rovnici

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x},,t)}{\partial t} = c\sqrt{-\hbar^2 \triangle + M^2c^2}\,\psi(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{2.6}$$

S využitím Fourierovy transformace ji můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} &= \\ &\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3\boldsymbol{x}' \int d^3\boldsymbol{p}\, c\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2c^2}\exp\Big(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\Big)\,\psi(\boldsymbol{x}',t)\,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

ze kterého vidíme, že operátor vystupující na pravé straně je nelokální. (To by přirozeně mohlo vyvolat pochybnosti, zda takovouto rovnici lze bez problémů zobecnit tak, aby mohla kandidovat i na popis částice interagující, aniž by přitom došlo k narušení podmínky kauzality.) Tohoto nepříjemného nelokálního operátoru se snadno zbavíme, když obě strany rovnice (2.6) zderivujeme podle času. Zjistíme tak, že libovolné řešení rovnice (2.6) vyhovuje *Klein-Gordonově rovnici*

$$\left(\Box + \kappa^2\right)\psi(\boldsymbol{x},t) = 0\,, \tag{2.8}$$

kde

$$\kappa \equiv \frac{Mc}{\hbar} \tag{2.9}$$

je převrácená hodnota *Comptonovy vlnové délky* uvažované částice a

$$\Box \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle$$

je d'Alembertův operátor.

Rovnice (2.8) tedy skutečně již žádný nelokální operátor neobsahuje. Navíc je tato rovnice evidentně relativisticky invariantní, pokud funkci ψ považujeme za skalární, tj. při přechodu k nové inerciální soustavě, kdy (viz (1.1))[1]

$$x \to x' = \Lambda x + b, \tag{2.15}$$

[1]Formuli (2.16) zde interpretujeme jako vztah mezi popisem téže skutečnosti z hlediska dvou souřadných soustav (blíže viz poznámku předcházející formuli (3.36)). Na druhé straně je dobře si uvědomit, že uvedená invariance nám také umožňuje ke každému řešení K-G rovnice nalézt řešení další (z nich některá mohou

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \psi(x)\,. \tag{2.16}$$

Obě tyto skutečnosti mluví ve prospěch rovnice (2.8) jako kandidáta na roli relativistické kvantově mechanické pohybové rovnice volné bezspinové částice.

Možnost konzistentní pravděpodobnostní interpretace *nerelativistické* kvantové mechaniky se odráží mj. v tom, že bilineární výrazy

$$\rho(\boldsymbol{x},t) \equiv |\psi(\boldsymbol{x},t)|^2\,, \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) \equiv \frac{i\hbar}{2M}\left\{\psi(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{\nabla}\psi^*(\boldsymbol{x},t) - \psi^*(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{x},t)\right\} \tag{2.18}$$

vyhovují *rovnici kontinuity*,

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = 0\,, \tag{2.19}$$

kdykoliv funkce $\psi(\boldsymbol{x},t)$ je řešením Schrödingerovy rovnice.

Snadno nahlédneme, že také každé řešení rovnice (2.8) umožňuje konstrukci čtyřvektoru,

$$j^\mu(x) \equiv \{c\,\rho(x),\,\boldsymbol{j}(x)\}\,, \tag{2.20}$$

---

ovšem být identická s řešením výchozím), tj. jestliže $\psi(x)$ je řešením rovnice (2.8), potom této rovnici vyhovují také funkce

$$\psi_b(x) \equiv \psi(x-b) \tag{2.10}$$

pro libovolný čtyřvektor b,

$$\psi_\Lambda(x) \equiv \psi(\Lambda^{-1}x)\,, \tag{2.11}$$

pro libovolnou vlastní Lorentzovu transformaci Λ,

$$\psi_P(\boldsymbol{x},t) \equiv \psi(-\boldsymbol{x},t) \tag{2.12}$$

a

$$\psi_T(\boldsymbol{x},t) \equiv \psi(\boldsymbol{x},-t)\,. \tag{2.13}$$

Povšimněme si při této příležitosti také toho, že díky realitě koeficientů v rovnici (2.8) jí vyhovuje také *nábojově sdružené* řešení

$$\psi_C(x) \equiv \psi^*(x)\,. \tag{2.14}$$

pro který platí
$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \tag{2.21}$$
což je kovariantní zápis rovnice kontinuity (2.19). Skutečně, vynásobíme-li rovnici (2.8) funkcí $\psi^*(x)$, potom imaginární část takto vzniklého výrazu má tvar
$$\psi^* \Box \psi - \psi \Box \psi^* = 0,$$
tj.
$$\partial_\mu \left(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^* \right) = 0.$$
Tedy pro libovolné řešení $\psi(x)$ K-G rovnice (2.8) čtyřvektor
$$j^\mu(x) \equiv K\, \psi^*(x) \overleftrightarrow{\partial^\mu} \psi(x)\,, \tag{2.22}$$
kde K je konstanta, vyhovuje rovnici kontinuity (2.21).

2.1.1 Vlastní stavy impulsu

V nerelativistické kvantové mechanice má řešení Schrödingerovy rovnice popisující volnou částici s impulsem $\boldsymbol{p}$ tvar rovinné vlny
$$\psi(\boldsymbol{x}, t) \sim \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} - E^{ner} t \right) \right\}, \tag{2.23}$$
kde energie E^{ner} je dána nerelativistickým vztahem (2.3).

Dosazením do (2.8) zjistíme, že rovinná vlna
$$\psi(\boldsymbol{x}, t) \sim \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} - p_0 c t \right) \right\} \tag{2.24}$$
je řešením K-G rovnice právě tehdy, když
$$p_0 = \pm \frac{E}{c}\,, \tag{2.25}$$
kde energie E je dána relativistickým vzorcem (2.5).

Vzhledem k tomu, že pro rovinnou vlnu (2.24) (stejně jako pro rovinnou vlnu (2.23)) platí
$$\hat{\boldsymbol{P}}\, \psi(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{p}\, \psi(\boldsymbol{x}, t)\,, \tag{2.26}$$

chtěli bychom řešení K-G- rovnice (2.24) interpretovat jako vlnovou funkci volné částice s impulsem $\boldsymbol{p}$. Na druhé straně, pokud je

$$\boldsymbol{p}^2 \ll M^2c^2, \tag{2.27}$$

můžeme pravou stranu (2.24) dobře aproximovat výrazem

$$\exp\left(\mp\frac{i}{\hbar}Mc^2t\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\mp E^{ner}t\right)\right\}. \tag{2.28}$$

V případě pomalých částic by jejich relativistický popis měl být prakticky ekvivalentní s popisem nerelativistickým. Tomuto požadavku vyhovuje řešení (2.24) právě tehdy, když ve formuli (2.25) zvolíme horní znaménko, neboť potom se výraz (2.28) liší od pravé strany formule (2.23) pouze nepodstatným (nezávisí na prostorových proměnných!) fázovým faktorem. Máme proto dobrý důvod předpokládat, že řešení K-G rovnice ve tvaru rovinné vlny (2.24) s "*kladnou frekvencí*", tj. pro

$$p_0 = \frac{E}{c}, \tag{2.29}$$

popisuje volnou částici s impulsem $\boldsymbol{p}$.

Rovinné vlně (2.24) odpovídá podle (2.22) hustota

$$\rho(x) = j^0(x) = K\frac{2p_0}{i\hbar}|\psi(x)|^2. \tag{2.30}$$

Chceme-li tuto veličinu interpretovat jako hustotu pravděpodobnosti, potom v případě, kdy platí podmínka (2.27), musí být formule (2.30) prakticky ekvivalentní nerelativistickému vzorci (2.17). Tento požadavek je splněn pro řešení (2.24) s kladnou frekvencí právě tehdy, když

$$K = \frac{i\hbar c}{2M}. \tag{2.31}$$

V případě řešení (2.24) se "*zápornou frekvencí*"[2], tj. když

$$p_0 \equiv -\frac{E}{c},$$

[2]Někdy se místo o "záporných frekvencích" v těchto (a obdobných) souvislostech mluví o "záporných energiích".

však z formulí (2.30),(2.31) dostáváme

$$\rho(x) = -\frac{E}{Mc^2}\left|\psi(x)\right|^2 \leq 0. \tag{2.32}$$

Nekladnou veličinu pochopitelně nemůžeme interpretovat jako hustotu pravděpodobnosti. Nic nám však zatím nebrání v tom, abychom řešení (2.24) se zápornými frekvencemi prohlásili za nefyzikální, tj. abychom předpokládali, že těmto řešením *žádný* stav neodpovídá. Problém s nekladnými veličinami (2.32) tím automaticky zmizí. Jinou otázkou ovšem je, do jaké míry je uvedený předpoklad udržitelný. K tomu se v dalším ještě vrátíme.

2.2 Částice ve vnějším elektromagnetickém poli

V předcházejícím paragrafu jsme nalezli celou řadu skutečností mluvících ve prospěch interpretace K-G rovnice (2.8) jako relativistické kvantově mechanické pohybové rovnice pro volnou částici. Jak však tento formalismus zobecnit tak, aby umožňoval i popis částice interagující s vnějším polem? Pro určitost předpokládejme, že se jedná o pole elektromagnetické. V tomto případě víme, že odpovídající Hamiltonova funkce je dána výrazem (A.35), z něhož na základě principu korespondence dostaneme odpovídající Hamiltonův operátor v x-reprezentaci prostou záměnou[3]

$$\boldsymbol{\pi} \rightarrow -i\hbar\boldsymbol{\nabla}. \tag{2.33}$$

Rovnice (2.1) by tedy v x-reprezentaci měla mít tvar

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi(\boldsymbol{x},t)\right]\psi(\boldsymbol{x},t) = c\sqrt{\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\right)^2 + M^2c^2}\,\psi(\boldsymbol{x},t)\,, \tag{2.34}$$

kde e je náboj uvažované částice.

V limitě $e \rightarrow 0$ se tato rovnice redukuje na "pohybovou rovnici" (2.6). Uvážíme-li, že

$$\varphi = A^0$$

[3]Nezapomeňme, že operátor (2.4) odpovídá *kanonickému* impulsu.

a že k-tou komponentou gradientu je

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x_k},$$

kdežto k-tou komponentou vektorového potenciálu $\boldsymbol{A}$ je A^k, vidíme, že rovnici (2.34) lze obdržet z rovnice (2.6) prostou záměnou

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu .$$

Předpokládejme, že takovouto záměnou lze vystihnout vliv vnějšího elektromagnetického pole i v případě jiných pohybových rovnic. Speciálně z rovnice (2.8) po takovéto substituci obdržíme *K-G rovnici pro částici ve vnějším elektromagnetickém poli*

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial ct} - \frac{e}{c}\varphi\right]^2 \psi(\boldsymbol{x},t) = \left[\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + M^2c^2\right]\psi(\boldsymbol{x},t). \quad (2.35)$$

V této rovnici (na rozdíl od rovnice (2.34)) se už žádný nelokální operátor nevyskytuje[4], a přitom ji lze vyjádřit v manifestačně kovariantním tvaru

$$\left(D_\mu D^\mu + \kappa^2\right)\psi(x) = 0, \quad (2.36)$$

v němž operace

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \quad (2.37)$$

se někdy nazývá (kalibrační) *kovariantní derivací.*

Zavedení elektromagnetické interakce vyžaduje modifikaci definice 4-proudu. Snadno se přesvědčíme, že rovnici kontinuity (2.21) vyhovuje

$$j^\mu(x) \equiv \frac{i\hbar}{2M}\psi^*(x)\overleftrightarrow{\partial^\mu}\psi(x) - \frac{e}{Mc}A^\mu(x)\,|\psi(x)|^2, \quad (2.38)$$

kdykoliv $\psi(x)$ je řešením rovnice (2.36). Nezbytnost této modifikace je fyzikálně snadno zdůvodnitelná argumenty, které jsme již užili v případě nerelativistickém[5].

[4]Povšimněme si, že "operací nábojového sdružení": $\psi(x) \to \psi^*(x)$ obdržíme ke každému řešení rovnice (2.35) řešení nové rovnice, která se od (2.35) liší pouze záměnou $e \to -e$. *V tomto smyslu* je *prozatím* třeba rozumět výroku, že nábojovou sdružeností se mění znaménko náboje.

[5]Srov. formule (8.29),(8.30) a text za nimi následující v [1].

2.2.1 Stacionární stavy částice ve vnějším elektromagnetickém poli

V případě časově nezávislého čtyřpotenciálu se v rovnici (2.35) separuje časová proměnná od prostorových. Její řešení proto můžeme hledat ve tvaru

$$\psi_E(x) = \psi_E(\boldsymbol{x}) \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}Et\Big)\,, \tag{2.39}$$

kde $\psi_E(\boldsymbol{x})$ je řešením rovnice

$$(E - e\varphi)^2\, \psi_E(\boldsymbol{x}) = \Big[-\hbar^2c^2\triangle + ie\hbar c\,(2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \mathrm{div}\boldsymbol{A}) + e^2\boldsymbol{A}^2 + M^2c^4\Big]\psi_E(\boldsymbol{x})\,. \tag{2.40}$$

Po zavedení

$$E' \equiv E - Mc^2 \tag{2.41}$$

ji můžeme přepsat do tvaru

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2M}\triangle + i\frac{e\hbar}{Mc}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla} + i\frac{e\hbar}{2Mc}\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \frac{e^2}{2Mc^2}\boldsymbol{A}^2 + e\varphi - \frac{(E'-e\varphi)^2}{2Mc^2}\Big]\,\psi_E(\boldsymbol{x}) = E'\,\psi_E(\boldsymbol{x})\,, \tag{2.42}$$

který se od odpovídající nerelativistické bezčasové Schrödingerovy rovnice liší pouze přítomností posledního členu na pravé straně[6]. Pokud je $E' \ll Mc^2$ a pokud vnější pole není extrémně silné, představuje tento člen zřejmě jen malou opravu, a tedy řešení uvažované úlohy by se v takovémto případě nemělo příliš lišit od řešení odpovídajícího problému v rámci nerelativistické kvantové mechaniky.

Jestliže k popisu uvažovaného vnějšího pole stačí skalární potenciál a jestliže ten je navíc invariantní vůči rotacím, můžeme přejít ke sférickým souřadnicím a dále pokračovat obdobně, jako když jsme studovali v nerelativistické kvantové mechanice stacionární stavy částice ve sféricky symetrickém vnějším poli: Řešení odpovídajíci rovnice (2.40) hledáme ve tvaru

$$\psi_{Elm}(\boldsymbol{x}) = R_{El}(r)\,Y_{lm}(\tilde{\boldsymbol{x}})\,, \tag{2.43}$$

[6] Při porovnání s formulemi uvedenými v [1], nesmíme zapomenout, že tam jsou uváděny v SI soustavě.

kde Y_{lm} je kulová funkce a R_{El} vyhovuje rovnici

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{l\,(l+1)}{r^2} + \left(\frac{E-e\varphi}{\hbar c}\right)^2 - \kappa^2\right] R_{El}(r) = 0. \tag{2.44}$$

Vázané stavy v coulombickém poli

V případě "potenciální energie"

$$e\varphi = -\frac{Z\alpha}{r}\hbar c, \qquad Z\alpha > 0. \tag{2.45}$$

má rovnice (2.44) tvar

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \left[\frac{l\,(l+1) - (Z\alpha)^2}{r^2} - \frac{2EZ\alpha}{\hbar c r} + \frac{M^2c^4 - E^2}{\hbar^2 c^2}\right] R = 0. \tag{2.46}$$

Po zavedení nové bezrozměrné proměnné

$$\rho \equiv \beta r, \tag{2.47}$$

kde[7]

$$\beta \equiv \frac{2}{\hbar c}\sqrt{M^2c^4 - E^2} > 0, \tag{2.48}$$

z ní dostáváme rovnici

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2} - \left[\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{l'\,(l'+1)}{\rho^2}\right]\chi = 0, \tag{2.49}$$

kde

$$\chi(\rho) \equiv \rho R(\rho)\,, \tag{2.50}$$

$$l'\,(l'+1) \equiv l\,(l+1) - (Z\alpha)^2\,, \tag{2.51}$$

$$\lambda \equiv -\frac{2Z\alpha}{\hbar c}\frac{E}{\beta}\,. \tag{2.52}$$

---

[7]Zajímáme se o vázané stavy. Pro ně je $E = Mc^2 - E_B$, kde $E_B > 0$ je vazbová energie. Tedy parametr β definovaný formulí (2.48) je reálný. Povšimněme si také toho, že pokud je vazbová energie nepatrná vůči energii klidové, je $E^2 \simeq M^2c^4 - 2Mc^2E_B$, a tedy $\beta \simeq \frac{\sqrt{8ME_B}}{\hbar}$. Poslední výraz však není ničím jiným než veličinou, kterou jsme nazývali β v [1] ve formuli (2.447), při řešení téže úlohy v rámci nerelativistické kvantové mechaniky.

K rovnici *formálně* naprosto shodné jsme dospěli při řešení stejného problému v rámci nerelativistické teorie[8], a proto i náš další postup může být zcela stejný: Zapíšeme-li

$$\chi(\rho) = \rho^{l'+1} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) w(\rho)\,, \tag{2.53}$$

zjistíme, že w musí být řešením rovnice pro degenerované hypergeometrické funkce

$$\rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + (2l' + 2 - \rho)\,\frac{dw}{d\rho} - (\lambda + l' + 1)\,w = 0. \tag{2.54}$$

Ta má řešení, které pro $\rho \to \infty$ neroste rychleji než mocnina ρ (a tedy R nediverguje pro $r \to \infty$) právě tehdy, když

$$\lambda + l' + 1 = -n_r\,, \qquad n_r = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.55}$$

Přitom, v zájmu konečnosti funkce (2.53) v počátku, musíme pod l' v poslední formuli rozumět větší z kořenů kvadratické rovnice (2.51), tj.

$$l' \equiv \frac{1}{2}\sqrt{(2l+1)^2 - (2Z\alpha)^2} - \frac{1}{2}\,. \tag{2.56}$$

Parametr λ závisí na E, a tedy formule (2.55) představuje rovnici pro energetické hladiny vázaných stavů částice v coulombickém poli. Jejím řešením pro ně dostaneme vzorec

$$E_{nl} = Mc^2 \frac{n + l' - l}{\sqrt{(n + l' - l)^2 + (Z\alpha)^2}}\,, \tag{2.57}$$

kde hlavní kvantové číslo je definováno stejně jako v nerelativistickém případě, tj.

$$n \equiv n_r + l + 1\,. \tag{2.58}$$

Z obdrženého výsledku vidíme, že *relativistické korekce snímají náhodnou degeneraci*, tj. díky nim zadanému hlavnímu kvantovému číslu n neodpovídá pouze jedna energetická hladina, ale celý multiplet sestávající z n hladin příslušných k n různým velikostem impulsmomentu $(l = 0, \cdots, n-1)$.

---

[8] Rovnice (2.445) v [1].

Porovnání s výsledky nerelativistické teorie

Dříve než se pokusíme porovnáním energetického spektra (2.57) s experimentálními daty usoudit na to, do jaké míry je opodstatněnou naděje, že uvažovaný algoritmus může hrát roli hledané *fyzikální* teorie, je dobře si uvědomit, jaké odchylky od předpovědí nerelativistické teorie bychom měli v daném případě očekávat.

Jak víme, nerelativistická kvantová mechanika předpovídá toto spektrum ve tvaru

$$E_n = -Mc^2 \left(Z\alpha\right)^2 \frac{1}{2n^2} . \tag{2.59}$$

Z viriálového teorému[9] pak pro střední hodnotu kvadrátu rychlosti v n-tém stacionárním stavu dostáváme

$$\langle nlm| \hat{\boldsymbol{v}}^2 |nlm\rangle = \frac{2}{M} E_n = \left(\frac{\alpha Z c}{n}\right)^2 . \tag{2.60}$$

Odtud vidíme, že poměr typické hodnoty rychlosti ($\equiv \bar{v}$) částice vázané coulombickým polem v n-tém stacionárním stavu k rychlosti světla je

$$\frac{\bar{v}}{c} \simeq \frac{Z\alpha}{n} . \tag{2.61}$$

Tedy alespoň v případech, kdy je[10]

$$Z\alpha \ll 1, \tag{2.62}$$

jsme oprávněni očekávat, že relativistické korekce jsou malé, a proto by měly být dobře vystižitelné poruchově.

Uvážíme-li, že relativistický výraz pro Hamiltonovu funkci volné částice je

$$c\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2c^2} = Mc^2 + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2M} - \frac{1}{8}\frac{\left(\boldsymbol{p}^2\right)^2}{M^3c^2} + O\left(\left(\frac{\bar{v}}{c}\right)^6 Mc^2\right),$$

vidíme, že první relativistická oprava[11] k nerelativistickému hamiltoniánu je dána výrazem

$$\delta\hat{\mathsf{H}} = -\frac{1}{8}\frac{\left(\hat{\boldsymbol{P}}^2\right)^2}{M^3c^2} . \tag{2.63}$$

[9] Viz § 3.6 v [1].

[10] Připomeňme, že $\alpha \simeq \frac{1}{137}$ a pro vodíkový atom je $Z = 1$.

[11] Konstantní člen reprezentující klidovou energii je samozřejmě z hlediska nerelativistické mechaniky zcela irelevantní.

Pro odpovídající opravu k n-té energetické hladině v prvním řádu poruchové teorie dostáváme

$$\triangle E_{nl} = \langle nlm|\, \delta\hat{\mathsf{H}}\, |nlm\rangle = -\frac{1}{8}\frac{1}{M^3c^2}\, \|\Phi_{nlm}\|^2 , \tag{2.64}$$

kde

$$|\Phi_{nlm}\rangle \equiv \hat{\boldsymbol{P}}^2\, |nlm\rangle \, . \tag{2.65}$$

Ale vzhledem k tomu, že platí

$$\left(\frac{\hat{\boldsymbol{P}}^2}{2M} + V(\hat{\mathsf{r}})\right) |nlm\rangle = E_n\, |nlm\rangle \, , \tag{2.66}$$

můžeme vektor (2.65) ekvivalentně vyjádřit jako

$$|\Phi_{nlm}\rangle = 2M\,(E_n - V(\hat{\mathsf{r}}))\, |nlm\rangle \, , \tag{2.67}$$

a tedy

$$\|\Phi_{nlm}\|^2 = 4M^2\left(E_n^2 - 2E_n\, \langle nlm|\, V(\hat{\mathsf{r}})\, |nlm\rangle + (Z\alpha\hbar c)^2\, \langle nlm|\, \hat{\mathsf{r}}^{-2}\, |nlm\rangle\right) . \tag{2.68}$$

Z viriálového teorému dostáváme

$$\langle nlm|\, V(\hat{\mathsf{r}})\, |nlm\rangle = 2E_n . \tag{2.69}$$

Víme také[12], že

$$\langle nlm|\, \hat{\mathsf{r}}^{-2}\, |nlm\rangle = \frac{2}{a^2 n^3\,(2l+1)} , \tag{2.70}$$

kde Bohrův poloměr

$$a \equiv \frac{1}{Z\alpha}\frac{\hbar}{Mc} . \tag{2.71}$$

Po dosazení do formulí (2.68),(2.64) tak obdržíme pro energetické spektrum částice vázané coulombickým polem předpověď

$$E_{nl} = -Mc^2\left[(Z\alpha)^2\, \frac{1}{2n^2} + (Z\alpha)^4\, \frac{1}{(2l+1)\, n^4}\left(n - \frac{3}{8}\,(2l+1)\right)\right] . \tag{2.72}$$

[12] Viz tabulku 2.5 v 2. kapitole [1].

Na druhé straně rozvineme-li pravou stranu formule (2.57) podle parametru $Z\alpha$, dostáváme

$$E_{nl} - Mc^2 = -Mc^2 \left[(Z\alpha)^2 \frac{1}{2n^2} + (Z\alpha)^4 \frac{1}{(2l+1)\, n^4} \left(n - \frac{3}{8}(2l+1) \right) + O\big((Z\alpha)^6\big) \right], \tag{2.73}$$

a tedy pro slabá pole, tj. pokud je $Z\alpha \ll 1$, je předpověď vazbové energie obdržená v rámci algoritmu opírajícího se o Klein-Gordonovu rovnici shodná s předpovědí nerelativistické kvantové mechaniky po započtení prvních relativistických korekcí v prvním řádu poruchové teorie. To je pro tento algoritmus jistě zpráva příznivá, protože nade vší pochybnost víme, že nerelativistická kvantová mechanika má v nerelativistické oblasti všechny atributy *fyzikální* teorie.

Podívejme se proto, do jaké míry tato předpověď odpovídá poznatkům experimentálním: Z druhého členu na pravé straně poslední formule vidíme, že vazbová energie $Mc^2 - E_{nl}$ by při daném hlavním kvantovém čísle měla (alespoň pro nepříliš silná pole) monotónně klesat s rostoucím impulsmomentem. Tedy nejnižší energie v každém multipletu by měla připadat na s-stav a n-tý multiplet by měl mít šířku

$$\triangle E_n = E_{n,n-1} - E_{n,0} = 2Mc^2\,(Z\alpha)^4\, \frac{n-1}{n^3\,(2n-1)}\,. \tag{2.74}$$

Předpovídané rozštěpení nabývá svého maxima pro $n = 2$:

$$\triangle E_2 = \frac{1}{12} Mc^2\,(Z\alpha)^4\,, \tag{2.75}$$

což je veličina podstatně menší než vzdálenost mezi multiplety:

$$E_2 - E_1 \simeq \frac{3}{8} Mc^2\,(Z\alpha)^2\,. \tag{2.76}$$

Pro $Z = 1$ podle formule (2.75) v případě elektronu, tj. pro $Mc^2 \simeq 0.5\,\mathrm{MeV}$, očekáváme "šířku" první excitované hladiny

$$\triangle E_2 \simeq 1.2 \times 10^{-4}\mathrm{eV}. \tag{2.77}$$

Z experimentu je již mnoho let známo, že spektrum vodíkového atomu má "*jemnou strukturu*". Pozorovaná šířka jeho první excitované hladiny je však ve srovnání s předpovědí (2.77) téměř 2.7 násobně menší.

Svědčí tento výsledek v neprospěch Klein-Gordonovy rovnice? Snadno nahlédneme, že nikoliv. Svědčí totiž pouze o neadekvátnosti použití algoritmu z ní vycházejícího k detailní analýze energetického spektra elektronu v coulombickém poli. To by nás však nemělo příliš překvapit, neboť víme, že elektron má vlastní magnetický moment, který je (přibližně) roven záporně vzatému Bohrovu magnetonu μ_0, tj.[13]

$$\mu \simeq \frac{e\hbar}{2Mc} = -\frac{|e|\,\hbar}{2Mc} \equiv -\mu_0 \,. \tag{2.78}$$

Jeho existence je možná pouze díky nenulovosti spinu elektronu. Skalárnost (2.16) "klein-gordonovské vlnové funkce" však nenulovost spinu odpovídající částice vylučuje. Jak velkou odchylku nutno očekávat mezi předpovědí energetického spektra (2.57) pro "bezspinový elektron" vázaný coulombickým polem a spektrem vodíkového atomu? Jinými slovy řečeno, jak odhadnout vliv existence vlastního magnetického momentu na diskutované energetické spektrum? Z klasického hlediska jde o to, určit interakční energii magnetického dipólu $\boldsymbol{\mu}$ pohybujícího se rychlostí $\boldsymbol{v}$ v elektrostatickém poli $\boldsymbol{E}$. Uvážíme-li, že v klidové soustavě uvažovaného dipólu má magnetická indukce hodnotu

$$\boldsymbol{B} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left[\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E}\right], \tag{2.79}$$

mohlo by se zdát, že hledaná interakční energie je vyjádřena pomocí tohoto výrazu vztahem $-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$, který vyjadřuje interakční energii magnetického dipólu $\boldsymbol{\mu}$ s magnetostatickým polem $\boldsymbol{B}$. Ve skutečnosti je tato interakční energie *poloviční*[14]. Přímočarým použitím principu korespondence pak dospíváme k závěru, že interakce vlastního magnetického momentu elektronu s elektrostatickým polem $\boldsymbol{E}$ by měla být

[13]Nezapomeňme, že zde e představuje náboj elektronu, tj. že $e < 0$.
Současná experimentální hodnota (viz [18]) magnetického momentu elektronu je

$$\mu = -\left(1.001\,159\,652\,193 \pm 10 \cdot 10^{-12}\right)\mu_0 \,.$$

[14]Scházející faktor 1/2 bezprostředně souvisí s existencí Thomasovy precese zmíněné v úloze (U.1.5.).

popsána interakčním hamiltoniánem

$$\begin{aligned} \hat{V}_{SL} &\equiv \frac{1}{2}\mu\frac{\hat{\boldsymbol{S}}}{s}\cdot\frac{\left[\hat{\boldsymbol{P}}\times\boldsymbol{E}\right]}{Mc} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mu}{Mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left[\hat{\boldsymbol{P}}\times(-\boldsymbol{\nabla}\varphi)\right], \end{aligned} \tag{2.80}$$

což v případě sféricky symetrického skalárniho potenciálu se zjednoduší na

$$\begin{aligned} \hat{V}_{SL} &= -\frac{\mu}{2Mc}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left[\hat{\boldsymbol{P}}\times\boldsymbol{x}\right] \\ &= \frac{\hbar\mu}{2Mc}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Pokud je navíc velikost magnetického momentu rovna Bohrovu magnetonu, dostáváme pro hledaný operátor, který by měl adekvátně popisovat opomenutou interakci vlastního magnetického momentu elektronu s coulombickým polem, výraz

$$\hat{V}_{SL} = \frac{e\hbar^2}{4M^2c^2}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}. \tag{2.82}$$

Pomocí tohoto operátoru jsme již v nerelativistické kvantové mechanice popisovali *spin-orbitální interakci.* [15] Tam jsme již také nalezli, že v případě coulombického pole je odpovídající oprava $\left(\equiv E^{(1)}_{nlj}\right)$ k n-té energetické hladině v prvním řádu poruchové teorie dána výrazem

$$\begin{aligned} E^{(1)}_{nlj} &= \langle nljm|\,\hat{V}_{SL}\,|nljm\rangle \\ &= \frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{2}\frac{(Z\alpha)^2}{nl\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)}|E_n|, \end{aligned}$$

když je $l\neq 0$, tj.

$$E^{(1)}_{nlj} = \frac{(Z\alpha)^4}{2n^3}\frac{j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}}{l(2l+1)(l+1)}. \tag{2.83}$$

[15] Viz 8. kapitolu (zejména pak formule (8.115), (8.116) a 8. úlohu) v [1].

Tedy po započtení nenulovosti vlastního magnetického momentu dostáváme pro energetické spektrum elektronu v coulombickém poli předpověď

$$E_{nlj} = E_{nl} + E^{(1)}_{nlj} + O\Big((Z\alpha)^6\Big)\,, \tag{2.84}$$

kde energie E_{nl} je dána formulí (2.72). Nalezený výsledek můžeme s využitím rozvoje (2.73) po jednoduchých úpravách vyjádřit ve tvaru

$$Mc^2 - E_{nlj} = Mc^2 \left[(Z\alpha)^2 \frac{1}{2n^2} + (Z\alpha)^4 \frac{1}{2n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) + O\Big((Z\alpha)^6\Big)\right]. \tag{2.85}$$

Povšimněme si, že podle této předpovědi[16]
a) relativistické korekce sejmuly náhodnou degeneraci,
b) energetické spektrum nezávisí na velikosti orbitálního impulsmomentu, ale pouze na velikosti impulsmomentu celkového,
c) "šířka n-té hladiny"

$$\triangle E_n = E_{n,j=n-\frac{1}{2}} - E_{n,j=\frac{1}{2}} = Mc^2\,(Z\alpha)^4\,\frac{n-1}{2n^4}, \tag{2.86}$$

sice opět nabývá svého maxima pro $n = 2$, ale ve srovnání s předpovědí (2.75), která by měla platit pro částici bezspinovou, je faktorem 3/8 menší.

Všechny tyto předpovědi jsou (pro $Z = 1$) v pozoruhodně dobrém souhlasu s experimetálně zjištěnými spektroskopickými daty o vodíkovém atomu. To je jistě silný argument ve prospěch algoritmu opírajícího se o Klein-Gordonovu rovnici. Samozřejmě bychom se v argumentaci ve prospěch tohoto algoritmu raději obešli bez nezbytnosti zahrnovat dodatečné korekce vyvolané existencí vlastního magnetického momentu elektronu. K tomu bychom ovšem potřebovali experimentální údaje o vázaných stavech nějaké bezspinové částice v elektrostatickém poli. Ani ty dnes nedostupné nejsou: V principu lze elektrostatickým polem jádra zachytit nejen elektrony, ale i jakékoliv jiné, záporně nabité částice. Takto vzniklé objekty se nazývají *exotické atomy.* Dnes jich známe již celou řadu.[17] Z nich pro naši diskusi hrají nejdůležitější roli tzv.

---

[16] Alespoň pokud jsou členy $Mc^2 O\Big((Z\alpha)^6\Big)$ zanedbatelné.

[17] Jde samozřejmě o objekty uměle vytvořené, které mají krátkou dobu života. Experimentálně již bylo prokázáno zachycení na "atomární orbity" mionů μ^-, mezonů π^-, K^-, hyperonů Σ^-, Ξ^- a dokonce i antiprotonů.

π-mezoatomy, u nichž je jeden z elektronů nahrazen mezonem π^-.

Mezon π^- má stejný elektrický náboj jako elektron, ale na rozdíl od něho má nulový spin, a tedy i vlastní magnetický moment. Díky tomu, že jeho klidová energie

$$Mc^2 \simeq 140\,\mathrm{MeV} \tag{2.87}$$

je o dva řády větší než u elektronu, je odpovídající Bohrův poloměr (2.71) o dva řády menší než pro elektrony. Jinými slovy řečeno, v π-mezoatomech se bude π-mezon nacházet podstatně blíže k jádru než elektrony. Díky tomu je odstínění elektrostatického pole jádra elektronovým obalem prakticky zanedbatelné. Samotné jádro můžeme v rozumném přiblížení opět považovat za pouhý zdroj vnějšího pole. V této aproximaci je vyšetřování pionu v π-mezoatomech převedeno na problém bezspinové částice ve vnějším poli. Pokud by toto pole bylo ryze elektrostatické, potom bychom energetické spektrum pionu měli obdržet na základě rovnice (2.40). Pokud bychom toto pole navíc mohli považovat za coulombické, mělo by toto spektrum odpovídat formuli (2.57). Takto obdržené předpovědi jsou v dobrém *kvalitativním* souhlasu s experimentem. Abychom si učinili alespoň hrubou představu o jaké veličiny se jedná, uveďme hodnoty v této aproximaci předpovídané pro vzdálenost mezi prvním a druhým multipletem a šířku druhého z nich:

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &\simeq 2.8 \times Z^2\,\mathrm{keV}, \\ \triangle E_2 &\simeq 3.3 \times Z^4 \times 10^{-2}\,\mathrm{eV}. \end{aligned}$$

K tomu, abychom mohli aspirovat na *kvantitativní* souhlas s experimentem, bychom museli náš výpočet upřesnit ve dvou směrech:
i) Ryze coulombické pole nahradit elektrostatickým polem odpovídajícím realistickému rozložení náboje v konečném objemu jádra.
ii) Zohlednit fakt, že mezi π-mezonem (na rozdíl od elektronu) a nukleony existuje vedle elektromagnetické interakce také interakce silná.
V obou případech je nutnost započtení odpovídajících korekcí vyvolána tím, že π-mezon se může v π-mezoatomu nacházet s nezanedbatelnou pravděpodobností velice blízko (nebo dokonce i uvnitř) jádra.[18] Výpo-

[18]Připomeňme, že tzv. silné interakce (tj. interakce, které jsou mj. zodpovědné za jaderné síly) jsou skutečně "silné" pouze na malých vzdálenostech – jejich dosah je řádu 1fm. Díky tomu je jejich vliv na spektrum π-mezoatomu možno započíst poruchově.

čtem těchto korekcí se zde blíže zabývat nebudeme. Zdůrazněme však, že po jejich započtení je dosaženo velice dobrého *kvantitativního* souhlas s experimentálními daty.[19]

2.3 Závěr

V předcházejícím jsme uvedli řadu argumentů, které přesvědčivě hovořily ve prospěch Klein-Gordonovy rovnice jako kandidáta na roli pohybové rovnice v rámci relativistické kvantové mechaniky. Přesto se snadno přesvědčíme, že naznačený algoritmus na základě této rovnice budovaný *nemůže* představovat úplně vnitřně konsistentní *fyzikální* teorii:

Tak např. již z formulí (2.56),(2.57) vidíme, že pro velice *silná pole*, kdy

$$Z\alpha > l + \frac{1}{2}, \tag{2.88}$$

předpovídá tento algoritmus *komplexní* hodnoty energetických hladin. Všimněme si, že pro takto silná pole by Bohrův poloměr (2.71) byl srovnatelný, nebo dokonce menší než Comptonova vlnová délka příslušné částice. Tuto situaci bychom se možná mohli ještě pokusit na chvíli zachránit např. tím, že bychom nalezený výsledek nepovažovali za svědectví v neprospěch diskutovaného algoritmu, nebo jeho fyzikální interpretace, ale v neprospěch existence příliš silných coulombických polí.[20] Existuje však námitka pádnější:

Podle kvantové teorie lze (čisté) stavy libovolného fyzikálního systému jednoznačně popsat pomocí vektorů příslušného Hilbertova prostoru. Celý diskutovaný algoritmus spočívá na předpokladu, že řešení $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ příslušných rovnic představují vyjádření těchto vektorů v x-reprezentaci, tj.

$$\psi(\boldsymbol{x}, t_0) = \langle \boldsymbol{x} \,|\psi\,(t_0)\rangle\,, \tag{2.89}$$

[19] Právě díky tomu dnes π-mezoatomy představují velice cenný zdroj informací o jádrech a silných interakcích v nízkoenergetické oblasti.

[20] Je bezesporu skutečností, že v přírodě neznáme žádný objekt, v němž by alespoň $\frac{1}{2}\alpha^{-1} \simeq 68$ elementárních nábojů bylo soustředěno v objemu, jehož rozměry jsou menší než Comptonova vlnová délka elektronu.

kde $|\psi(t_0)\rangle$ je vektor popisující stav uvažované částice v okamžiku t_0 a $|\boldsymbol{x}\rangle$ popisuje vlastní stav její polohy. Jinými slovy řečeno, funkce $\psi(\boldsymbol{x}, t_0)$ by měla představovat amplitudu pravděpodobnosti toho, že při měření polohy bude částice nalezena v místě $\boldsymbol{x}$. Na druhé straně však v uvažovaném algoritmu hustota pravděpodobnosti toho, že v okamžiku t_0 bude částice nalezena v místě $\boldsymbol{x}$, *není* rovna absolutní hodnotě této funkce, ale podle formulí (2.20),(2.31) je dána výrazem

$$\rho(\boldsymbol{x}, t_0) = \frac{i\hbar}{2Mc^2}\left(\psi^*(\boldsymbol{x}, t_0)\,\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x}, t_0)\right). \tag{2.90}$$

Krom toho znalost stavu podle kvantové teorie umožňuje určit pravděpodobnost výsledku libovolného měření, které je prováděno na systému nacházejícím se v tomto stavu, kdežto k určení veličiny (2.90) znalost samotné funkce $\psi(\boldsymbol{x}, t_0)$ nestačí – potřebujeme znát i její časovou derivaci v okamžiku t_0.

Poslední problém má společné kořeny s další velmi závažnou skutečností: Podle kvantové mechaniky stav libovolného systému v každém okamžiku t je jednoznačně určen jeho stavem v kterémkoliv pevně zadaném okamžiku $t_0 \leq t$.[21] Jestliže tedy vektor $|\psi(t_0)\rangle$ popisuje stav tohoto systému v okamžiku t_0, potom řešení příslušné pohybové rovnice musí umožnit přiřazení

$$|\psi(t_0)\rangle \to |\psi(t)\rangle\,, \tag{2.91}$$

kde vektor $|\psi\,(t)\rangle$ popisuje jeho stav v okamžiku t. Tedy, pokud by funkce[22] $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ měla představovat kvantově mechanickou vlnovou funkci popisující stav nějaké částice, musela by příslušná pohybová rovnice umožňovat její určení pro libovolné $t \geq t_0$ na základě znalosti $\psi(\boldsymbol{x}, t_0)$. To ovšem výše diskutovaný algoritmus neumožňuje ani v nejjednodušším případě částice volné – stačí si uvědomit, že Klein-Gordonova rovnice (2.8) je (pokud jde o t) diferenciální rovnicí druhého řádu.

Na základě těchto poznatků se pochopitelně vnucuje otázka, zda jsme pouze nezjistili, že cena za to, jak snadno jsme se zbavili nelokálního operátoru v rovnici (2.6), je příliš vysoká. Neměli bychom

[21] Zde mlčky rozumíme, že v době mezi okamžiky t_0 a t nebylo do systému zasahováno z vnějšku, tj. nebyla prováděna žádná filtrace, měření ...

[22] Mluvíme zde o funkci nezávislé proměnné $\boldsymbol{x}$ při zadané hodnotě parametru t.

se tedy pokorně vrátit zpátky k této rovnici a postupně na jejím základě vybudovat nový algoritmus zcela analogickou cestou, jako jsme ho budovali na základě rovnice Klein-Gordonovy? Jistě nám v tom nikdo bránit nemůže a naznačený program je realizovatelný. Blíže se mu však zde věnovat nebudeme. Poznamenejme pouze, že v případě úloh, s jejichž řešením jsme v rámci algoritmu dosud užívaného byli spokojeni, vede takovýto "nový algoritmus" k výsledkům, které nejsou o nic horší. S dosud užívaným algoritmem však sdílí i to, že ho nelze přijmout jako vnitřně zcela konsistentní relativistickou kvantovou mechaniku. Tak např. ani funkci $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ vystupující v rovnici (2.6) nelze interpretovat jako vlnovou funkci popisující v x-reprezentaci stav, ve kterém se částice nachází v okamžiku t. Ukazuje se, že zdroj zásadních problémů úzce souvisí s otázkou dynamické proměnné, která by měla hrát úlohu polohy studované částice. Prozatím se spokojme s tímto konstatováním. K pochopení jeho hlubšího smyslu doporučujeme čtenáři, aby se nejprve seznámil s následující kapitolou.

2.4 Úlohy

U.2.1. Nechť funkce $\varphi_j(x)$ vyhovují Klein-Gordonově rovnici

$$\left(\Box + \kappa^2\right) \varphi_j(x) = 0\,, \qquad j = 1, 2. \tag{2.92}$$

Ukažte, že potom platí

$$\partial_\mu j^\mu(x; [\varphi_1, \varphi_2]) = 0, \tag{2.93}$$

kde

$$j^\mu(x; [\varphi_1, \varphi_2]) \equiv \frac{i\hbar}{2Mc} \varphi_1^*(x) \overleftrightarrow{\partial^\mu} \varphi_2(x)\,, \tag{2.94}$$

a tedy veličina

$$\langle \varphi_1 | \, \varphi_2 \rangle \equiv \int d^3\boldsymbol{x}\, j^0(x; [\varphi_1, \varphi_2]) \tag{2.95}$$

je nezávislá čase $t \equiv x^0/c$.[23]
Ukažte, že pro jakkoliv zvolenou[24] funkci $\tilde{\varphi}_j(p)$ funkce

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &\equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^4p\, \delta\left(p^2 - M^2c^2\right) \Theta\left(p^0\right) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} p \cdot x\right\} \tilde{\varphi}_j(p) \\ &= \frac{c}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2E} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\left(Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right)\right\} \tilde{\varphi}_j(\boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{2.96}$$

vyhovují K-G rovnici. Povšimněte si, každá funkce vyjádřená v právě uvedeném tvaru představuje superpozici řešení s *kladnými frekvencemi*. Ukažte, že pro *takovéto* funkce funkcionál (2.95) nabývá tvaru

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = \frac{1}{2M} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2E} \tilde{\varphi}_1^*(\boldsymbol{p})\, \tilde{\varphi}_2(\boldsymbol{p})\,. \tag{2.97}$$

Povšimněte si, že pro funkce vyjádřitelné integrálem (2.96), v němž $\tilde{\varphi}_j(\boldsymbol{p})$ splňuje podmínku

$$\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2E} \left|\tilde{\varphi}_j(\boldsymbol{p})\right|^2 < \infty,$$

funkcionál (2.97) vyhovuje všem požadavkům kladeným na skalární součin. Právě takové funkce $\varphi_j(x^0, \boldsymbol{x})$ se tedy můžeme pokusit interpretovat jako vlnové funkce[25] popisující stav klein-gordonovské částice

[23] Mlčky předpokládáme, že

$$\int d^3\boldsymbol{x}\; \boldsymbol{j}(x; [\varphi_1, \varphi_2]) = 0,$$

tj. že třívektor $\boldsymbol{j}$ dostatečně rychle vymizí pro $|\boldsymbol{x}| \to \infty$.

[24] Samozřejmě zde mlčky rozumíme, že musí jít vždy o funkce, pro které níže uváděné výrazy mají smysl. V posledním výrazu formule (2.96) je třeba rozumět

$$\tilde{\varphi}_j(\boldsymbol{p}) \equiv \tilde{\varphi}_j\left(p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2c^2}, \boldsymbol{p}\right).$$

Podobně zjednodušenou symboliku budeme užívat i v dalším.

[25] Nepřehlédněte, že pohybovou rovnici pro tyto vlnové funkce můžeme zapsat ve tvaru diferenciální rovnice

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c\sqrt{\hat{\boldsymbol{P}}^2 + M^2c^2}\, \varphi,$$

v okamžiku $t \equiv x^0/c$, a to v reprezentaci, v níž je impulsu přiřazen operátor $\hat{\boldsymbol{P}} \equiv -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$. Jeho vlastní funkce, příslušná k vlastní hodnotě $\boldsymbol{p}'$ je tedy úměrná funkci

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}\right\}.$$

Ukažte, že tuto funkci můžete vyjádřit ve tvaru integrálu (2.96) (pro $t=0$) a najděte odpovídající funkci $\tilde{\varphi}_{\boldsymbol{p}'}(\boldsymbol{p})$, takovou, aby byla splněna normalizační podmínka

$$\langle \boldsymbol{p}|\, \boldsymbol{p}'\rangle = \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,.$$

Amplituda hustoty pravděpodobnosti toho, že při měření impulsu ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\varphi(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{c}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{2E}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right\}\tilde{\varphi}(\boldsymbol{p}) \qquad (2.98)$$

bude obdržena hodnota $\boldsymbol{p}$, je dána výrazem

$$\varphi^{(P)}(\boldsymbol{p}) \equiv \langle \boldsymbol{p}|\, \varphi\rangle\,,$$

který definuje vlnovou funkci zmíněného stavu v p-reprezentaci. Najděte vyjádření této amplitudy pomocí funkce $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{p})$.

Ukažte, že násobení nezávislou proměnnou $\boldsymbol{x}$ nepředstavuje na Hilbertově prostoru funkcí (2.98) samosdružený operátor.[26]
Ukažte, že pro operátor $\hat{\boldsymbol{X}}$ definovaný tak, že

$$\hat{\boldsymbol{X}}\varphi(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{c}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{2E}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right\}\left[i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{i\hbar}{2}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2+M^2c^2}\right]\tilde{\varphi}(\boldsymbol{p})\,,$$

je splněn požadavek

$$\langle\varphi_1|\, \hat{\boldsymbol{X}}\varphi_2\rangle = \langle\varphi_2|\, \hat{\boldsymbol{X}}\varphi_1\rangle^*\,,$$

---

tj. odvržením řešení se zápornými frekvencemi odpadá problém s druhými časovými derivacemi v K-G rovnici – ovšem pouze za cenu, že máme zpátky nelokální operátor na pravé straně.

[26]Povšimněte si, že v uvažovaném algoritmu násobení "vlnové funkce" $\varphi(\boldsymbol{x})$ nezávislou proměnnou $\boldsymbol{x}$ nemůže představovat realizaci operátoru polohy, a tedy $\varphi(\boldsymbol{x})$ nemůže představovat vlnovou funkci v x-reprezentaci.

kterému samosdružené operátory musí vyhovovat.
Ukazuje se, že takto definovaný operátor $\hat{\boldsymbol{X}}$ je totožný s "operátorem polohy", o němž Newton s Wignerem [32] dokázali, že je jediným řešením požadavků (jimi specifikovaných), které musí respektovat každý operátor, pokud má být interpretovatelný jako operátor polohy.[27]
Ukažte, že vlastní funkci $\varphi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})$ tohoto operátoru příslušnou k vlastní hodnotě $\boldsymbol{y}$ lze vyjádřit ve tvaru integrální reprezentace (2.98), v níž

$$\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{p}) = \widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{p}) \sim \sqrt{E}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}\right\}.$$

Využijte toho, že pokud je $a > 0$, $\quad \mathrm{Re}\,\beta > 0$, $\quad \mathrm{Re}\,\nu > -2$, potom platí[28]

$$\int_0^{\infty} dx\, x\left(x^2+\beta^2\right)^{\nu-1/2}\sin ax = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\beta\left(\frac{2\beta}{a}\right)^{\nu}\cos\nu\pi\,\Gamma\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)\,K_{\nu+1}(a\beta)\,,$$

kde modifikovaná Hankelova funkce K_ν souvisí s Hankelovou funkcí prvního druhu vztahem

$$K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2}\exp\left\{i\nu\frac{\pi}{2}\right\}H_\nu^{(1)}(z)\,,$$

k důkazu, že

$$\varphi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \sim \left(\frac{\kappa}{r}\right)^{5/4} H_{5/4}^{(1)}(i\kappa r)\,,$$

kde

$$r \equiv |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\,.$$

Povšimněte si, že odtud plyne[29], že (až na normalizační konstantu) je na velkých vzálenostech r

$$\varphi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \sim \left(\frac{\kappa}{r}\right)^{5/4}\exp\{-\kappa r\}\,.$$

Ukažte, že transformace odpovídající boostu nepřevádí vlastní vektor operátoru $\hat{\boldsymbol{X}}$ opět v nějaký vlastní vektor tohoto operátoru. To zabraňuje, aby i tento operátor mohl být úplně konzistentně interpretován

[27] Blíže viz též konec 3. kapitoly.
[28] Viz [42].
[29] Viz např. formule (E.6) v [1].

jako operátor polohy K-G částice.
Diskutujte závislost odvozených výsledků na velikosti hmoty uvažované částice.
Pokuste se odtud usoudit na meze aplikovatelnosti naznačených algoritmů jako "relativistické kvantové mechaniky" jedné částice.

Kapitola 3

Diracova rovnice

Pokusů o překonání potíží, na které jsme narazili při snaze interpretovat Klein-Gordonovu rovnici jako relativistickou kvantově mechanickou pohybovou rovnici jednočásticového systému existuje celá řada. Žádný z nich však nebyl korunován naprostým úspěchem. Tato skutečnost má hlubší *fyzikální* příčiny, ke kterým se vrátíme později. Teprve jejich pochopení umožňuje stanovit meze použitelnosti algoritmů naznačených v předcházející kapitole, jakož i algoritmů, ke kterým dospíváme při pokusech překonat výše naznačené interpretační potíže cestou modifikace *matematického tvaru* pohybové rovnice jednočásticového systému.

I když cesta hledání alternativního tvaru pohybové rovnice jednočásticového systému k předpokládanému cíli nepřivedla, a ani přivésti nemohla, bylo na ní dosaženo mnoha cenných výsledků. Mezi ně bezesporu patří Diracova rovnice, která nejen sehrála historicky důležitou roli, ale nachází i v současnosti široké pole uplatnění. Proto jí věnujeme tuto kapitolu.

3.1 Volná částice

Jaké vlastnosti musí mít pohybová rovnice pro volnou částici?

Již v předcházející kapitole jsme zdůraznili, že k tomu, aby nějaká diferenciální rovnice mohla hrát roli pohybové rovnice v rámci kvantové teorie, je nezbytné, aby se jednalo o rovnici *prvního řádu* v *časové* proměnné. Tedy jestliže $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ má být vlnovou funkcí popisující v x-reprezentaci stav jednočásticového systému v okamžiku t, potom musí vyhovovat rovnici typu

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \hat{\mathsf{H}} \psi(\boldsymbol{x}, t)\,, \tag{3.1}$$

kde operátor $\hat{\mathsf{H}}$ již neobsahuje žádnou časovou derivaci. Fyzikálně tento operátor představuje hamiltonián [1].

Protože impuls volné částice je integrálem pohybu, musí operátor $\hat{\mathsf{H}}$ splňovat komutační relaci

$$\left[\hat{\mathsf{H}}, \hat{\boldsymbol{P}}\right] = 0. \tag{3.2}$$

Energie volné částice je jejím impulsem jednoznačně určena. Tedy vlnová funkce $\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$ stacinárního stavu uvažované částice s impulsem $\boldsymbol{p}$ musí vyhovovat rovnicím

$$\hat{\boldsymbol{P}} \psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}\, \psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) \tag{3.3}$$

$$\hat{\mathsf{H}} \psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = E \psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\,, \tag{3.4}$$

kde

$$E = c\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2 c^2}\,. \tag{3.5}$$

První z nich vyžaduje, aby

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \psi_{\boldsymbol{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}\right), \tag{3.6}$$

kde $\psi_{\boldsymbol{p}}$ již nezávisí na $\boldsymbol{x}$.

Jestliže jsme vlnovou funkcí $\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$ popsali stav uvažované částice v okamžiku $t = 0$, potom

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right) = \psi_{\boldsymbol{p}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} - E t)\right\} \tag{3.7}$$

je tím řešením rovnice (3.1), které chceme interpretovat jako vlnovou funkci stavu této částice v okamžiku t.

[1] Srov. rovnici (2.1).

Porovnáním s (2.24) vidíme, že $\psi_p(\boldsymbol{x},t)$ (tj. vlnová funkce volné částice se zadaným impulsem) vyhovuje také K-G rovnici (2.8). Na základě principu superpozice pak dospíváme k závěru, že řešení pohybové rovnice odpovídající *jakémukoliv stavu* volné částice musí vyhovovat K-G rovnici (2.8), tj. jestliže $\psi(\boldsymbol{x},t)$ je takovýmto řešením rovnice (3.1), potom musí platit

$$\left(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \triangle + M^2 c^4\right)\psi(\boldsymbol{x},t) = 0. \tag{3.8}$$

Na druhé straně, zderivujeme-li podle času obě strany rovnice (3.1), zjistíme, že libovolné její řešení vyhovuje rovnici

$$\left(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{\mathsf{H}}^2\right)\psi(\boldsymbol{x},t) = 0. \tag{3.9}$$

Tedy *libovolné* řešení pohybové rovnice (3.1) bude vyhovovat K-G rovnici (2.8), pokud pro operátor (3.13) platí

$$\hat{\mathsf{H}}^2 = -\hbar^2 c^2 \triangle + M^2 c^4\,, \tag{3.10}$$

tj. pokud uvažovaný hamiltonián představuje druhou odmocninu z operátoru vystupujícího na pravé straně. Z předcházející kapitoly víme, že pokud by poloha částice představovala úplnou množinu pozorovatelných, tj. pokud by $\psi(\boldsymbol{x},t)$ byla *jednokomponentovou* vlnovou funkcí, potom by tato odmocnina představovala nelokální operátor. Pokud se tedy nechceme smířit s nelokálními operátory, musíme přijmout, že pro uvažovanou částici její poloha úplnou množinu pozorovatelných netvoří. S podobnou situací jsme se již setkali v nerelativistické kvantové mechanice u částic s nenulovým spinem. Tam[2] jsme také poznali, jak výhodné je v takovémto případě používat formalismus *vícekomponentových* vlnových funkcí. Pod $\psi(\boldsymbol{x},t)$ budeme tedy v dalším rozumět jednosloupcovou N-řádkovou matici

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\boldsymbol{x},t) \\ \psi_2(\boldsymbol{x},t) \\ \vdots \\ \psi_N(\boldsymbol{x},t) \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

[2] Viz [1] – § 8.3.

Ve formuli (3.10) je pak mlčky rozuměno, že na pravé straně stojí direktní součin operátoru explicitně uvedeného s jednotkovou maticí, tj. $\hat{\mathsf{H}}^2$ je čtvercová, N-řádková diagonální matice, jejíž všechny diagonální elementy představují diferenciální operátor uvedený v této formuli[3].

Z veličin, které máme k dispozici, mají stejný rozměr jako energie

$$Mc^2,\ c\hat{\boldsymbol{P}},\ \frac{\hbar c}{x_j},\ \frac{\hbar}{t},\ \cdots, \tag{3.12}$$

kde operátor impulsu $\hat{\boldsymbol{P}}$ je definován formulí (2.4). Homogenita prostoročasu vylučuje možnost závislosti operátoru $\hat{\mathsf{H}}$ na posledních dvou z nich. Možná závislost na $\hat{\boldsymbol{P}}$ je požadavkem lokality omezena na polynomiální. Výraz na pravé straně (3.10) představuje polynom druhého řádu, jeho odmocnina je tedy alespoň polynomem řádu prvního. Na základě výše uvedeného snadno nahlédneme, že polynom prvního řádu v $\hat{\boldsymbol{P}}$, který by mohl představovat operátor $\hat{\mathsf{H}}$, musí mít nutně tvar[4]

$$\hat{\mathsf{H}} = \hbar c\left[\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}{\hbar}\right) + \beta\kappa\right] \equiv -i\hbar c\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\frac{\partial}{\partial x^j} + \beta Mc^2\,, \tag{3.13}$$

kde převrácená hodnota Comptonovy vlnové délky κ je definována formulí (2.9) a elementy čtvercových matic α_j, β jsou bezrozměrné konstanty. Nezávislost matic α_j, β na $\boldsymbol{x}$ zaručuje, že

$$\left[\alpha_j\,, \hat{\mathsf{P}}_k\right] = \left[\beta, \hat{\mathsf{P}}_k\right] = 0, \tag{3.14}$$

a tedy samosdruženost hamiltoniánu vyžaduje, aby také matice α_j, β byly samosdružené:

$$\begin{aligned}\alpha_j^\dagger &= \alpha_j,\\ \beta^\dagger &= \beta.\end{aligned} \tag{3.15}$$

---

[3] Pokud nebude hrozit nebezpečí z nedorozumění, budeme obdobně zjednodušené značení užívat i v dalším. Tak např. symbolem $\hat{\boldsymbol{P}}$ budeme značit jak diferenciální operátor (2.4), tak direktní součin tohoto operátoru se zmíněnou jednotkovou maticí ap.

[4] Zde mlčky předpokládáme, že jediným nezávislým parametrem (případně až na parametry bezrozměrné) charakterizujícím uvažovanou bodovou částici je její (klidová) hmota M.

Z vyjádření (3.13) dostáváme

$$\hat{\mathsf{H}}^2 = -\hbar^2 c^2 \sum_{j,k=1}^{3} \alpha_j \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} + \beta^2 M^2 c^4 - i\hbar c \sum_{k=1}^{3} (\beta \alpha_k + \alpha_k \beta) \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{3.16}$$

odkud vidíme, že požadavek (3.10) je splněn právě tehdy, když matice α_k, β vyhovují relacím

$$\begin{aligned} \{\alpha_j, \alpha_k\} &= 2\delta_{jk}, \\ \{\alpha_j, \beta\} &= 0, \\ \beta^2 &= 1. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Pokusme se nyní zkonstruovat čtvercové N-řádkové matice vyhovující všem výše uvedeným požadavkům. Jaká je minimální hodnota N, pro kterou lze tyto požadavky splnit?

Z formule (3.17) víme, že

$$\beta^2 = \alpha_j^2 = 1, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{3.18}$$

a tedy vlastní hodnoty každé z hermitovských matic β, α_j mohou být rovny pouze ± 1. Navíc, s využitím invariance stopy vůči cyklickým permutacím faktorů z těchto relací dostáváme

$$\mathsf{Sp}\,\beta = \mathrm{Sp}\,\beta\alpha_1^2 = \mathrm{Sp}\,\alpha_1\beta\alpha_1 = -\mathrm{Sp}\,\alpha_1^2\beta = -\mathrm{Sp}\,\beta,$$

a tedy musí platit

$$\mathrm{Sp}\,\beta = 0. \tag{3.19}$$

Zcela analogicky zjistíme, že také

$$\mathrm{Sp}\,\alpha_j = 0, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{3.20}$$

Tedy počet vlastních hodnot $+1$ každé z matic β, α_j musí být stejný jako počet jejích vlastních hodnot -1. To je ovšem možné splnit jedině tehdy, když N je číslo *sudé*. Snadno se též přesvědčíme, že matice β, α_j jsou lineárně nezávislé. Skutečně, v opačném případě bychom mohli např. matici β vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\beta = \sum_{j=1}^{3} a_j \alpha_j .$$

Díky ní by však musela platit relace

$$\beta^2 = \sum_{j=1}^{3} a_j \, \alpha_j \, \beta = \sum_{j=1}^{3} a_j \beta \alpha_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} a_j \, \{\beta, \alpha_j\} ,$$

což ovšem možné není, neboť

$$\beta^2 = 1, \qquad \text{kdežto} \qquad \{\beta, \alpha_j\} = 0.$$

<u>$N = 2$:</u>

Libovolnou čtvercovou dvouřádkovou matici lze vyjádřit jako lineární kombinaci čtyř lineárně nezávislých matic, za které můžeme zvolit např. jednotkovou matici ($\equiv 1$) a *Pauliho matice*

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

o kterých už víme[5], že pro ně platí

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \varepsilon_{jkl} \, \sigma_l \, , \tag{3.22}$$

a tedy vyhovují komutačním ralacím

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jkl} \, \sigma_l \tag{3.23}$$

a antikomutačním relacím

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk} \, . \tag{3.24}$$

Pauliho matice tak představují *trojici* lineárně nezávislých matic, které všechny navzájem antikomutují, ale každá z nich ovšem komutuje s maticí jednotkovou. Tedy pro $N = 2$ neexistuje čtveřice lineárně nezávislých navzájem antikomutujících matic, tj. nelze splnit požadavek (3.17).

<u>$N = 4$:</u>

Libovolnou čtvercovou čtyřřádkovou matici lze vyjádřit jako lineární kombinaci šestnácti lineárně nezávislých matic, za které lze zvolit např. direktní součiny výše uvedených matic dvouřádkových:

$$1 \otimes 1 \, , \qquad \sigma_j \otimes 1 \, , \qquad 1 \otimes \sigma_j \, , \qquad \sigma_j \otimes \sigma_k \, . \tag{3.25}$$

[5] Viz úlohu 2. k Doplňku F v [1].

První z nich představuje matici jednotkovou. Snadno nahlédneme[6], že každá ze zbývajících patnácti je hermitovská, má nulovou stopu a kvadrát roven jednotkové matici – jednu z matic β, α_j můžeme tedy identifikovat s kteroukoliv z nich. Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit např.

$$\beta \equiv \sigma_3 \otimes 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

kde v posledním výrazu každý element představuje submatici 2×2.[7] Z antikomutačních relací (3.24) vidíme, že s touto maticí antikomutuje trojice matic $\sigma_1 \otimes \sigma_j$. Protože tyto matice také všechny navzájem antikomutují, můžeme identifikovat

$$\alpha_j \equiv \sigma_1 \otimes \sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{3.27}$$

což často zapisujeme jako

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \sigma_1 \otimes \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Matice definované formulemi (3.26), (3.27) představují tzv. *Diracovu realizaci*[8] *Diracovy algebry* (definované vztahy (3.17)). Explicitní konstrukcí jsme tak ukázali, že pro $N = 4$ existují matice β, α_j, vyhovující relacím (3.15), (3.17). Samozřejmě, že také všechny matice, které s nimi souvisejí libovolnou *unitární* transformací, budou vyhovovat těmže relacím, neboť jde o vztahy invariantní vůči takovýmto transformacím. Již méně triviální, ale o to důležitější skutečností je, že v případě $N = 4$ platí i tvrzení opačné: libovolná čtveřice matic β, α_j vyhovujících relacím (3.15),(3.17) souvisí s čtveřicí matic definovaných formulemi (3.26),(3.27) unitární transformací.[9].

---

[6] Stačí si uvědomit, že Pauliho matice mají nulovou stopu a kvadrát každé z nich je jednotkovou maticí.

[7] Pokud nebude hrozit nebezpečí z nedorozumění, budeme podobná zjednodušení zápisu užívat i v dalším.

[8] Někdy je nazývána *Pauliho realizací*. Také termín "realizace" je někdy nahrazován termínem "reprezentace".

[9] Ve skutečnosti lze toto tvrzení ještě zesílit, je totiž možno dokázat tzv. *Pauliho teorém:*

V případě čtyřkomponentové vlnové funkce představují vztahy (3.1), (3.13) slavnou *Diracovu rovnici* (pro volnou částici):

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \left(-i\hbar c\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta M c^2\right) \psi(\boldsymbol{x},t). \tag{3.29}$$

Podstatné v ní je pouze to, že matice β, α_j tvoří hermitovskou realizaci Diracovy algebry. Z Pauliho teorému totiž víme, že libovolné dvě rovnice, které vyhovují tomuto požadavku, jsou unitárně ekvivalentní. Této skutečnosti se v praxi bohatě využívá. V dalším budeme mít příležitost se o tom přesvědčit v několika souvislostech i my.

3.1.1 Invariance Diracovy rovnice

Má-li Diracova rovnice představovat relativistickou pohybovou rovnici, musí mít stejný tvar[10] ve všech ekvivalentních souřadných soustavách. Pro vyšetření splnitelnosti této podmínky je výhodné nejprve rovnici (3.29) vynásobit (nesingulární) maticí β. Můžeme ji pak zapsat jako

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \kappa\right) \psi(x) = 0, \tag{3.30}$$

kde *Diracovy gama-matice*

$$\begin{aligned} \gamma^0 &\equiv \beta, \\ \gamma^k &\equiv \beta\alpha_k . \end{aligned} \tag{3.31}$$

V termínech těchto matic nabývají požadavky (3.17) tvaru antikomutačních relací

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\, g^{\mu\nu} \tag{3.32}$$

---

i) Čtveřice matic β, α_j vyhovujících relacím (3.15),(3.17) existuje právě tehdy, když $N = 4n$.

ii) Každou takovouto čtveřici lze unitární transformací převést na kvazidiagonální tvar, v němž každá ze submatic na diagonále je dána pravou stranou formule (3.26), resp. (3.27).

[10] Máme na mysli tvar rovnice vyjádřené v *odpovídajících* proměnných. Neměnnost tvaru rovnice v tomto smyslu nazýváme *invariantností rovnice*. Pro tutéž vlastnost se často užívá též termínu *kovariance rovnice*.

a hermiticita (3.15) je ekvivalentní vztahům

$$\begin{aligned} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 , \\ \gamma^{k\dagger} &= -\gamma^k , \end{aligned} \tag{3.33}$$

které, díky (3.32) můžeme zapsat též jako

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu . \tag{3.34}$$

Uvažujme dvě inerciální souřadné soustavy, které spolu souvisejí Lorentzovou transformací[11] Λ, tj. souřadnice, kterými v těchto soustavách popisujeme tentýž světobod, spolu souvisejí vztahem

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \Leftrightarrow \quad x^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu x'^\nu . \tag{3.35}$$

Jestliže nějaká fyzikální skutečnost je v nečárkované soustavě popsána funkcí $\psi(x)$, potom tutéž skutečnost popíše pozorovatel v soustavě čárkované funkcí

$$\psi'(x') = \mathsf{S}(\Lambda)\, \psi(x) , \tag{3.36}$$

kde $\mathsf{S}(\Lambda)$ je matice přiřazená transformaci Λ v nějaké reprezentaci

---

[11]Požadavek invariance vůči časo-prostorovým *translacím* jsme již použili při "konstrukci" Diracovy rovnice. Proto pouze připomeňme, že pokud

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu ,$$

potom místo relace (3.36) platí

$$\psi'(x') = \psi(x) .$$

Ekvivalence rovnic (3.30) a (3.37) je v tomto případě zajištěna konstantností matic γ^μ.

Na druhé straně je dobře si uvědomit, že ne všechny inerciální systémy, které navzájem souvisejí obecnou Lorentzovou transformací, jsou ekvivalentní. Speciálně se to týká přechodu od pravotočivých soustav k soustavám levotočivým. Tedy požadavek invariance pohybových rovnic vůči celé Lorentzově grupě je silnější než požadavek, aby tyto rovnice měly stejný tvar ve všech fyzikálně ekvivalentních soustavách. Tak např. sama skutečnost, že nějaká rovnice není invariantní vůči prostorové inverzi, není dnes dostatečným důvodem k tomu, abychom ji nepřijali mezi kandidáty na úlohu rovnice pohybové.

Pro zjednodušení vyjadřování však zatím tuto skutečnost ignorujeme.

Lorentzovy grupy.[12] Ekvivalence uvažovaných souřadných soustav pak vyžaduje, aby funkce ψ a ψ' vyhovovaly stejné pohybové rovnici. Tedy Diracova rovnice může hrát úlohu relativistické pohybové rovnice, pokud existuje čtyřrozměrná reprezentace Lorentzovy grupy, v níž je elementu Λ přiřazena matice $\mathsf{S}(\Lambda)$ taková, že funkce (3.36) vyhovuje rovnici

$$\left(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - \kappa\right)\psi'(x') = 0, \tag{3.37}$$

právě tehdy, když funkce $\psi(x)$ je řešením rovnice (3.30). V takovém případě totiž můžeme *postulovat* takové transformační vlastnosti čtyřkomponentové vlnové funkce, které ponechají tvar Diracovy rovnice nezměněn.[13]

Rovnici (3.30) můžeme na základě formule (3.36) přepsat do tvaru

$$\left(i\mathsf{S}(\Lambda)\,\gamma^{\mu}\,\mathsf{S}^{-1}(\Lambda)\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \kappa\right)\psi'(x') = 0, \tag{3.38}$$

který je shodný s (3.37), pokud

$$\mathsf{S}(\Lambda)\,\gamma^{\mu}\,\mathsf{S}^{-1}(\Lambda)\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\,. \tag{3.39}$$

[12]Poslední tvrzení se stane zřejmým, jakmile naše úvahy rozšíříme na vztahy mezi více inerciálními soustavami navzájem souvisejícími Lorentzovými transformacemi.

Pokud $\psi(x)$ má hrát úlohu vlnové funkce, potom téže "fyzikální skutečnosti" (stavu studovaného systému) je přiřazena celá množina těchto funkcí (odpovídajících témuž paprsku). Z tohoto hlediska by bylo možné uvedený požadavek poněkud zeslabit (srov. podobnou situaci diskutovanou v [1] – § 9.1). Touto problematikou se zde však blíže zabývat nebudeme. Pro náš účel si stačí uvědomit triviální fakt, že pokud se podaří vyhovět podmínce silnější, je automaticky zaručeno i splnění podmínky slabší. V dalším totiž dokážeme existenci matice $\mathsf{S}(\Lambda)$, vyhovující všem podmínkám, vyplývajícím z požadavku (3.36).

[13]Obdobnou úvahu lze zopakovat pro *libovolnou* rovnici. Je dobře si uvědomit, že v principu mohou nastat tři různé případy:

Příslušné vlastnosti

i) nemá žádná reprezentace Lorenzovy grupy ⇒ rovnice není invariantní.

ii) má právě jedna reprezentace Lorentzovy grupy ⇒ požadavek invariance rovnice jednoznačně determinuje transformační vlastnosti řešení.

ii) má více než jedna reprezentace Lorentzovy grupy ⇒ požadavek invariance rovnice ještě neurčuje transformační vlastnosti jejích řešení.

S poslední situací se setkáváme např. u K-G rovnice v případě vícekomponentových funkcí.

Z formule (3.35) však víme, že

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \tag{3.40}$$

a tedy předcházející požadavek je splněn právě tehdy, když platí

$$\mathsf{S}(\Lambda)\, \gamma^{\mu}\, \mathsf{S}^{-1}(\Lambda) = \gamma^{\nu}\, \Lambda_{\nu}{}^{\mu}, \tag{3.41}$$

což je ekvivalentní se vztahem

$$\mathsf{S}^{-1}(\Lambda)\, \gamma^{\mu}\, \mathsf{S}(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, \gamma^{\nu}. \tag{3.42}$$

Vlastní Lorentzovy transformace

Každý element vlastní Lorentzovy grupy můžeme jednoznačně zadat ve tvaru (1.35) pomocí šesti nezávislých parametrů $\omega_{\alpha\beta}$. Označíme-li, v souhlase se vžitou konvencí, matice odpovídající *dvojnásobku* generátorů $\mathrm{I}^{\alpha\beta}$ v hledané reprezentaci jako $\Sigma^{\alpha\beta}$, potom Lorentzově transformaci $\Lambda(\omega)$ je v této reprezentaci přiřazena matice

$$\mathsf{S}(\omega) \equiv \exp\left(\frac{i}{4}\, \omega_{\alpha\beta}\, \Sigma^{\alpha\beta}\right). \tag{3.43}$$

Vzhledem k tomu, že všechny konečné transformace můžeme obdržet iterací transformací infinitesimálních, stačí se při vyšetřování splnitelnosti podmínky (3.41) omezit na veličiny prvního řádu v ω. Z formulí (3.41),(3.43),(1.35) pak vidíme, že tím se úloha vyšetření invariance Diracovy rovnice vůči vlastním Lorentzovým transformacím redukuje na úlohu zjistit, zda existují matice $\Sigma^{\alpha\beta}$, které by (do veličin prvního řádu v ω) vyhovovaly vztahům

$$\left(1 + \frac{i}{4}\, \omega_{\alpha\beta}\, \Sigma^{\alpha\beta}\right) \gamma^{\mu} \left(1 - \frac{i}{4}\, \omega_{\alpha\beta}\, \Sigma^{\alpha\beta}\right) = \gamma^{\mu} - \frac{i}{2}\, \omega_{\alpha\beta} \sum_{\nu} \left(\mathsf{I}^{\alpha\beta}\right)_{(\mu,\nu)} \gamma^{\nu}.$$

S využitím formule (1.38) snadno zjistíme, že tento požadavek můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\left[\Sigma^{\alpha\beta}, \gamma^{\mu}\right] = 2\, i \left(g^{\beta\mu}\, \gamma^{\alpha} - g^{\alpha\mu}\, \gamma^{\beta}\right). \tag{3.44}$$

Na základě antikomutačních relací (3.32) a algebraické identity

$$[\mathsf{AB},\mathsf{C}] = \mathsf{A}\,\{\mathsf{B},\mathsf{C}\} - \{\mathsf{A},\mathsf{C}\}\,\mathsf{B} \tag{3.45}$$

pak zjistíme, že matice

$$\Sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}\,[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \tag{3.46}$$

tomuto požadavku vyhovují.

Zbývá ovšem ještě dokázat, že odpovídající matice (3.43) skutečně představují reprezentaci vlastní Lorentzovy grupy. Zaveďme proto matice $\vec{\mathsf{M}}, \vec{\mathsf{N}}$, které by v uvažované reprezentaci měly odpovídat generátorům $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_{\mathsf{k}} &\equiv \frac{1}{4}\,\varepsilon_{klj}\,\Sigma^{lj} \equiv \frac{1}{2}\,\Sigma_{k} = -\frac{i}{4}\varepsilon_{klm}\alpha_{l}\alpha_{m}, & (3.47)\\ \mathsf{N}_{\mathsf{k}} &\equiv \frac{1}{2}\Sigma^{0k} = \frac{i}{2}\,\alpha_{k}\,. & (3.48) \end{aligned}$$

Z formulí (3.26),(3.28),(3.31) víme, že Diracova realizace matic γ^{μ} má tvar

$$\begin{aligned} \gamma^{0} &= \sigma_{3}\otimes 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= i\,\sigma_{2}\otimes\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

V *této* realizaci je tedy

$$\begin{aligned} \vec{\mathsf{M}} &= \frac{1}{2}\,1\otimes\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathsf{N}} &= \frac{i}{2}\,\sigma_{1}\otimes\boldsymbol{\sigma} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

S využitím relací (3.22) pak dostáváme

$$\begin{aligned} [\mathsf{M_j},\mathsf{M_k}] &= \frac{1}{4}\,1\otimes[\sigma_j,\sigma_k] = \frac{i}{2}\,\varepsilon_{jkl}\,1\otimes\sigma_l = i\varepsilon_{jkl}\,\mathsf{M}_l\,, \\ [\mathsf{N_j},\mathsf{N_k}] &= -\frac{1}{4}\,\sigma_1^2\otimes[\sigma_j,\sigma_k] = -\frac{i}{2}\,\varepsilon_{jkl}\,1\otimes\sigma_l = -i\varepsilon_{jkl}\,\mathsf{M_l}\,, \\ [\mathsf{M_j},\mathsf{N_k}] &= [\mathsf{N_j},\mathsf{M_k}] = \frac{i}{4}\,\sigma_1\otimes[\sigma_j,\sigma_k] = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{jkl}\,\sigma_1\otimes\sigma_l = i\varepsilon_{jkl}\,\mathsf{N_l}\,, \end{aligned} \tag{3.51}$$

a tedy matice (3.47),(3.48) skutečně reprezentují generátory vlastní Lorentzovy grupy.[14]

Z těchže relací také vidíme, že pokud n je libovolný jednotkový vektor, potom

$$\left(2\,\vec{n}\cdot\vec{\mathsf{M}}\right)^2 = \left(2\,i\,\vec{n}\cdot\vec{\mathsf{N}}\right)^2 = 1\,. \tag{3.52}$$

Tedy pootočení kolem osy n, resp. speciální Lorentzově transformaci podél této osy je v uvažované reprezentaci přiřazena matice[15]

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(\boldsymbol{n},\varphi) &= \exp\!\left(i\varphi\,\vec{n}\cdot\vec{\mathsf{M}}\right) = \exp\!\left(i\,\frac{\varphi}{2}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\right) \\ &= \cos\frac{\varphi}{2} + i\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\,\sin\frac{\varphi}{2}\,, \end{aligned} \tag{3.53}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(\boldsymbol{n},v) &= \exp\!\left(iu\,\vec{n}\cdot\vec{\mathsf{N}}\right) = \exp\!\left(-\frac{u}{2}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right) \\ &= \cosh\frac{u}{2} - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}\sinh\frac{u}{2}\,, \end{aligned} \tag{3.54}$$

tj.

$$\mathsf{S}(\boldsymbol{n},v) = \sqrt{\frac{1+\xi}{2\xi}}\left[1 - \frac{1}{1+\xi}\,\frac{v}{c}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right], \tag{3.55}$$

kde

$$\xi \equiv \frac{1}{\cosh u} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{3.56}$$

Povšimněme si, že pro matice (3.50) platí

$$\vec{\mathsf{M}}^\dagger = \vec{\mathsf{M}}\,, \quad \vec{\mathsf{N}}^\dagger = -\vec{\mathsf{N}} \tag{3.57}$$

a

$$\left[\vec{\mathsf{M}},\gamma^0\right] = \left\{\vec{\mathsf{N}},\gamma^0\right\} = 0\,. \tag{3.58}$$

---

[14] K témuž závěru jsme mohli dospět též na základě výsledků úlohy U.3.5., z nichž bezprostředně plyne, že matice $\frac{1}{2}\,\Sigma^{\mu\nu}$ vyhovují komutačním relacím (1.33) pro generátory VLG.

[15] Připomeňme vyjádření těchto transformací formulemi (1.23),(1.25).

Tedy nalezená reprezentace vlastní Lorentzovy grupy sice *není* unitární[16], ale zato matice $\mathsf{S}(\Lambda)$, odpovídající libovolnému elementu této grupy vyhovují relaci

$$\gamma^0\,\mathsf{S}^\dagger(\Lambda)\,\gamma^0 = \mathsf{S}^{-1}(\Lambda)\,. \tag{3.59}$$

Skutečně, ze vztahů (3.58) je evidentní, že této relaci vyhovují matice (3.53),(3.54). Na druhé straně víme, že libovolnou Lorentzovu transformaci lze obdržet složením dvou natočení a jedné speciální Lorentzovy transformace, tj. libovolnou z matic (1.35) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\Lambda(\omega) = \Lambda(\boldsymbol{n}_1,\varphi_1)\,\Lambda(\boldsymbol{n}_3,u)\,\Lambda(\boldsymbol{n}_2,\varphi_2)\,. \tag{3.60}$$

To ovšem znamená, že také matice odpovídající této transformaci v *libovolné* reprezentaci musí být vyjádřitelná v analogickém tvaru, tj.

$$\mathsf{S}(\Lambda) = \mathsf{S}(\boldsymbol{n}_1,\varphi_1)\,\mathsf{S}(\boldsymbol{n}_3,u)\,\mathsf{S}(\boldsymbol{n}_2,\varphi_2)\,, \tag{3.61}$$

a tedy ve zde zkonstruované reprezentaci vyhovuje relaci (3.59), neboť

$$\left(\gamma^0\right)^2 = 1.$$

Nakonec se ještě podívejme, o jakou reprezentaci vlastní Lorentzovy grupy se jedná. K tomu stačí, když si uvědomíme, že matice

$$\begin{aligned}\vec{\mathsf{J}}_{(1)} &\equiv \frac{1}{2}\left(\vec{\mathsf{M}}+\mathsf{i}\vec{\mathsf{N}}\right),\\ \vec{\mathsf{J}}_{(2)} &\equiv \frac{1}{2}\left(\vec{\mathsf{M}}-\mathsf{i}\vec{\mathsf{N}}\right)\end{aligned} \tag{3.62}$$

mají v Diracově realizaci tvar

$$\vec{\mathsf{J}}_{(1)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & -\boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix},\qquad \vec{\mathsf{J}}_{(2)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

Odtud vidíme, že matice

$$\vec{\mathsf{J}}^2_{(1)} = \frac{3}{8}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\qquad \vec{\mathsf{J}}^2_{(2)} = \frac{3}{8}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \tag{3.64}$$

[16] Matice odpovídající libovolnému pootočení však unitární jsou. Tento výsledek nás jistě nijak nepřekvapuje, pokud jsme nezapomněli na poznámku pod čarou č. 12 v kapitole 1.

nejsou násobkem matice jednotkové (a tedy nalezená reprezentace *není ireducibilní*). Snadno se však přesvědčíme, že je lze obě současně diagonalizovat pomocí matice

$$\mathsf{T} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathsf{T}^{-1}, \tag{3.65}$$

a přitom

$$\mathsf{T}\vec{\mathsf{J}}^2_{(1)}\mathsf{T}^{-1} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{T}\vec{\mathsf{J}}^2_{(2)}\mathsf{T}^{-1} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.66}$$

Tedy maticemi $\mathsf{S}(\omega)$ je realizována reprezentace

$$D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)} \oplus D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}. \tag{3.67}$$

Veličiny, které se podle této reprezentace transformují, se nazývají *bispinory*.

Prostorová inverze

V případě prostorové inverze P můžeme formuli (3.42) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathsf{S}^{-1}(P)\,\gamma^0\,\mathsf{S}(P) &= \gamma^0, \\ \mathsf{S}^{-1}(P)\,\gamma^k\,\mathsf{S}(P) &= -\gamma^k. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Z antikomutačních relací (3.32) je zřejmé, že těmto podmínkám vyhovuje matice

$$\mathsf{S}(P) = \eta_P \gamma^0, \tag{3.69}$$

kde η_P je libovolné nenulové číslo. Snadno lze též dokázat, že žádné jiné řešení těchto podmínek neexistuje (viz úlohu (U.3.6.)).

Z formulí (3.47),(3.48) vidíme, že tato matice vyhovuje též relacím

$$\left[\mathsf{S}(P)\,,\vec{\mathsf{M}}\right] = \left\{\mathsf{S}(P)\,,\vec{\mathsf{N}}\right\} = 0\,, \tag{3.70}$$

tak jak to požaduje skládání vlastních Lorentzových transformací s prostorovými inverzemi (srov. (1.50)).

Pokud by matice (3.69) měla odpovídat inverzi v *jednoznačné* reprezentaci, muselo by navíc platit

$$\mathsf{S}^2(P) = 1, \tag{3.71}$$

protože dvě prostorové inverze provedené po sobě vedou k soustavě shodné s výchozí. Ve skutečnosti můžeme tuto podmínku zeslabit. K tomu si povšimněme, že podle formule (3.53) je pootočení kolem pevné osy o úhel 2π přiřazena matice

$$\mathsf{S}(\boldsymbol{n}, 2\pi) = -1\,, \tag{3.72}$$

přestože transformovaná soustava souřadná je shodná s výchozí. Jinými slovy řečeno, již reprezentace vlastní Lorentzovy grupy v prostoru bispinorů je reprezentací *dvojznačnou*, a tedy i podmínku (3.71) můžeme nahradit slabším požadavkem

$$\mathsf{S}^2(P) = \pm 1\,, \tag{3.73}$$

kterému vyhovuje matice (3.69) právě tehdy, když koeficient η_P ($\equiv$ (vnitřní) parita uvažované částice) má některou z následujících hodnot

$$\eta_P = \pm 1,\ \pm i\,. \tag{3.74}$$

Nakonec nepřehlédněme, že (nezávisle na tom, kterou ze čtyř výše uvedených hodnot má parita η_P) je

$$\gamma^0\,\mathsf{S}^\dagger(P)\,\gamma^0 = \mathsf{S}^{-1}(P)\,, \tag{3.75}$$

tj. relace (3.59) platí pro libovolnou izochronní Lorentzovu transformaci.

Časová inverze

V kvantové teorii je časová inverze popsána antiunitárním operátorem[17] $\hat{\mathrm{T}}$. Časově invertovanému stavu ke stavu popsanému vektorem $|\psi\rangle$ odpovídá vektor

$$|\psi; T\rangle \equiv \hat{\mathrm{T}}\,|\psi\rangle\,. \tag{3.76}$$

[17] Viz [1] § 9.4.

Jestliže "časově závislé vektory" (tj. vektorové funkce reálné proměnné t) $|\psi(t)\rangle$ vyhovují evoluční rovnici

$$i\hbar\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle = \hat{\mathsf{H}}\,|\psi(t)\rangle\,, \tag{3.77}$$

potom vektory

$$|\psi(t)\,;T\rangle \equiv \hat{\mathsf{T}}\,|\psi(t)\rangle \tag{3.78}$$

vyhovují, díky antiunitaritě operátoru $\hat{\mathsf{T}}$, rovnici

$$-i\hbar\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\,;T\rangle = \hat{\mathsf{T}}\hat{\mathsf{H}}\hat{\mathsf{T}}^{-1}\,|\psi(t)\,;T\rangle\,.$$

Pokud dynamika uvažovaného systému je T-invariantní, potom

$$\hat{\mathsf{T}}\hat{\mathsf{H}}\hat{\mathsf{T}}^{-1} = \hat{\mathsf{H}}, \tag{3.79}$$

a tedy vektory (3.78) vyhovují rovnici

$$-i\hbar\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\,;T\rangle = \hat{\mathsf{H}}\,|\psi(t)\,;T\rangle\,. \tag{3.80}$$

Stavové vektory jednočásticového systému můžeme popsat pomocí vlnových funkcí

$$\psi_\xi(\boldsymbol{x}) \equiv \langle \boldsymbol{x}, \xi\,|\psi\rangle\,, \tag{3.81}$$

kde ξ probíhá hodnoty (případných) dalších dynamických proměnných, které společně s polohovým vektorem tvoří úplnou množinu pozorovatelných uvažované částice. Ve vícekomponentovém formalismu poslední formule definuje ξ-tý element jednosloupcové matice $\psi(\boldsymbol{x})$. Přitom víme[18], že

$$\psi(\boldsymbol{x}, t; T) = \tilde{\mathsf{S}}(T)\,\psi^*(\boldsymbol{x}, t)\,, \tag{3.82}$$

kde $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ a $\psi(\boldsymbol{x}, t; T)$ jsou jednosloupcové matice s elementy

$$\langle \boldsymbol{x}, \xi\,|\psi(t)\rangle\,, \quad \text{resp.} \quad \langle \boldsymbol{x}, \xi\,|\psi\,(t)\,;T\rangle$$

a matice $\tilde{\mathsf{S}}\,(T)$ je unitární. Z formulí (3.77),(3.80) víme, že pokud $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ je řešením evoluční rovnice

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x}, t) = \hat{\mathsf{H}}\psi(\boldsymbol{x}, t)\,, \tag{3.83}$$

[18] Viz formuli (9.189) a Doplněk R v [1].

potom $\psi(\boldsymbol{x}, t; T)$ vyhovuje rovnici

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x}, t; T) = \hat{\mathsf{H}}\,\psi(\boldsymbol{x}, t; T)\,, \tag{3.84}$$

tj.

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\widetilde{\mathsf{S}}(T)\,\psi^*(\boldsymbol{x}, t) = \hat{\mathsf{H}}\,\widetilde{\mathsf{S}}(T)\,\psi^*(\boldsymbol{x}, t)\,,$$

což je totéž jako

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\boldsymbol{x}, t) = \widetilde{\mathsf{S}}^\dagger(T)\,\hat{\mathsf{H}}\,\widetilde{\mathsf{S}}(T)\,\psi^*(\boldsymbol{x}, t)\,.$$

Porovnáním této rovnice s rovnicí obdrženou komplexním sdružením (3.83) vidíme, že v případě T-invariantní dynamiky musí hamiltonián zapsaný v x-reprezentaci vícekomponentového formalismu vyhovovat relaci

$$\widetilde{\mathsf{S}}(T)\,\hat{\mathsf{H}}^*\widetilde{\mathsf{S}}^\dagger(T) = \hat{\mathsf{H}}. \tag{3.85}$$

Diracova rovnice má tvar (3.83), kde

$$\hat{\mathsf{H}} = -i\hbar c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta M c^2, \tag{3.86}$$

a tedy požadavek její T-invariance je ekvivalentní požadavku existence unitární matice $\widetilde{\mathsf{S}}(T)$, pro kterou platí

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathsf{S}}(T)\,\boldsymbol{\alpha}^*\,\widetilde{\mathsf{S}}^\dagger(T) &= -\boldsymbol{\alpha}, \\ \widetilde{\mathsf{S}}(T)\,\beta^*\,\widetilde{\mathsf{S}}^\dagger(T) &= \beta. \end{aligned} \tag{3.87}$$

Díky hermitovosti matic $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ jsou tyto podmínky ekvivalentní relacím

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathsf{S}}(T)\,\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\,\widetilde{\mathsf{S}}^\dagger(T) &= -\boldsymbol{\alpha}, \\ \widetilde{\mathsf{S}}(T)\,\beta^\mathsf{T}\,\widetilde{\mathsf{S}}^\dagger(T) &= \beta, \end{aligned} \tag{3.88}$$

což je totéž jako

$$(\gamma^\mu)^\mathsf{T} = \widetilde{\mathsf{S}}^\dagger(T)\,\gamma^\mu\,\widetilde{\mathsf{S}}(T)\,. \tag{3.89}$$

Transponováním matic vystupujících na obou stranách relace (3.32) vidíme, že platí

$$\left\{(\gamma^\mu)^\mathsf{T}, (\gamma^\nu)^\mathsf{T}\right\} = 2\,g^{\mu\nu}\,, \tag{3.90}$$

tj. matice $(\gamma^\mu)^{\mathsf{T}}$ představují reprezentaci Diracovy algebry, a tak existence podobnostní transformace (3.89) je zaručena Pauliho teorémem. Zbývá nám tedy pouze nalézt, do jaké míry výše uvedené požadavky determinují matici $\tilde{\mathsf{S}}(T)$.

V Diracově reprezentaci jsou matice $\beta, \alpha_1, \alpha_3$ reálné a matice α_2 je ryze imaginární. Tedy *v této reprezentaci* můžeme požadavky (3.87) vyjádřit ve tvaru

$$\left[\tilde{\mathsf{S}}(T)\,,\alpha_2\right] = \left[\tilde{\mathsf{S}}(T)\,,\beta\right] = \left\{\tilde{\mathsf{S}}(T)\,,\alpha_1\right\} = \left\{\tilde{\mathsf{S}}(T)\,,\alpha_3\right\} = 0\,, \qquad (3.91)$$

což v termínech γ-matic znamená

$$\left[\tilde{\mathsf{S}}(T)\,,\gamma^2\right] = \left[\tilde{\mathsf{S}}(T)\,,\gamma^0\right] = \left\{\tilde{\mathsf{S}}(T)\,,\gamma^1\right\} = \left\{\tilde{\mathsf{S}}(T)\,,\gamma^3\right\} = 0\,. \qquad (3.92)$$

Z antikomutačních relací (3.32) je zřejmé, že těmto požadavkům vyhovuje unitární matice

$$\tilde{\mathsf{S}}(T) = \eta_T\, \mathsf{S}(T)\,, \qquad (3.93)$$

kde *matice časové inverze* (v Diracově reprezentaci)

$$\mathsf{S}(T) \equiv \gamma^1\gamma^3 \qquad (3.94)$$

a η_T je nějaký fázový faktor, tj. libovolné komplexní číslo, vyhovující podmínce

$$|\eta_T| = 1. \qquad (3.95)$$

Snadno se též přesvědčíme,[19] že žádné jiné řešení těchto podmínek neexistuje. *V Diracově reprezentaci* je tedy

$$\mathsf{S}(T) = i\Sigma_2 = i\begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}. \qquad (3.96)$$

Abychom předešli zbytečným nedorozuměním, zdůrazněme, že jakkoliv relace (3.87) a (3.92) jsou v Diracově reprezentaci ekvivalentní, v jiných reprezentacích již tomu tak být nemusí, a tedy ani formule (3.93) v nich nemusí platit. Přitom je z předešlého zřejmé, že vztahy (3.87) mezi Diracovými maticemi a maticí časové inverze musí být splněny *v libovolné reprezentaci.* Z Pauliho teorému navíc víme, že pokud

[19] Úloha (U.3.6.)

matice γ'^{μ} představují jakoukoliv reprezentaci Diracovy algebry a přitom vyhovují "podmínkám hermiticity", vyjádřeným relacemi (3.33), potom existuje unitární matice A taková, že

$$\gamma'^{\mu} = \mathsf{A}\gamma^{\mu}\mathsf{A}^{\dagger}, \tag{3.97}$$

kde γ^{μ} jsou výše uvažované matice v Diracově reprezentaci. Snadno nahlédneme, že odpovídající matici časové inverze lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathsf{S}'(T) &= \mathsf{A}\,\mathsf{S}(T)\,\mathsf{A}^{\mathsf{T}} \\ &= \mathsf{A}\gamma^{1}\mathsf{A}^{\dagger}\mathsf{A}\gamma^{3}\mathsf{A}^{\dagger}\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{T}}, \end{aligned} \tag{3.98}$$

tj.

$$\mathsf{S}'(T) = \gamma'^{1}\gamma'^{3}\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{T}}. \tag{3.99}$$

Nakonec si povšimněme ještě toho, že z relací (3.87) plynou následující vztahy mezi maticemi časové inverze a maticemi reprezentujícími generátory vlastní Lorentzovy grupy

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(T)\,\vec{\mathsf{M}}^{*}\mathsf{S}^{\dagger}(\mathsf{T}) &= -\vec{\mathsf{M}}, \\ \mathsf{S}(T)\,\vec{\mathsf{N}}^{*}\mathsf{S}^{\dagger}(\mathsf{T}) &= \vec{\mathsf{N}}. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Tyto relace samozřejmě platí při libovolné realizaci Diracovy algebry. Bez nich by nebylo možno výše zavedený antiunitární operátor $\hat{\mathrm{T}}$ fyzikálně interpretovat jako operátor časové inverze.[20]

Nábojové sdružení

Díky invarianci Diracovy rovnice vůči výše diskutovaným časo-prostorovým transformacím víme, že pokud $\psi(x)$ je řešením této rovnice, potom téže rovnici vyhovují i

$$\psi_a(x) \equiv \psi(x-a)\,, \tag{3.101}$$

kde a^{μ} je libovolná čtveřice pevně zadaných reálných čísel,

$$\psi_{\Lambda}(x) \equiv \mathsf{S}(\Lambda)\,\psi\!\left(\Lambda^{-1}x\right)\,, \tag{3.102}$$

[20] Srovnej též relace (1.51).

kde Λ je libovolná vlastní Lorentzova transformace,

$$\psi_P(\boldsymbol{x},t) \equiv \eta_P^* \, \mathsf{S}(P)\, \psi(-\boldsymbol{x},t) = \gamma^0 \psi(-\boldsymbol{x},t)\,, \tag{3.103}$$

$$\psi_T(\boldsymbol{x},t) \equiv \mathsf{S}(T)\, \psi^*(\boldsymbol{x},-t)\,. \tag{3.104}$$

V této části nalezneme další *diskrétní* transformaci, vůči níž je Diracova rovnice invariantní, tj. přiřazení

$$\psi(x) \to \psi_C(x)\,, \tag{3.105}$$

takové, že $\psi_C(x)$ je řešením této rovnice právě tehdy, když jí vyhovuje $\psi(x)$. Tato transformace, kterou (na rozdíl od dříve uvažovaných) nespojujeme s fyzikální ekvivalencí různých souřadných soustav, se obvykle nazývá *nábojovým sdružením* ($\Leftrightarrow$*nábojovou konjugací*). Později se postupně seznámíme s její fyzikální interpretací a pochopíme tak i výstižnost uvedené terminologie. Zde se však omezíme jen na matematickou stránku této transformace.

Na základě relace (3.34) snadno zjistíme, že pokud bispinor $\psi(x)$ je řešením Diracovy rovnice (3.30), potom *diracovsky sdružený* bispinor

$$\overline{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\, \gamma^0 \tag{3.106}$$

vyhovuje rovnici

$$-i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \overline{\psi}(x)\, \gamma^\mu - \overline{\psi}(x)\, \kappa = 0, \tag{3.107}$$

kterou můžeme ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\left(i\,(-\gamma^\mu)^\mathsf{T} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \kappa \right) \overline{\psi}^\mathsf{T}(x) = 0. \tag{3.108}$$

Transponováním obou stran rovnosti (3.32) dostaneme antikomutační relace

$$\left\{ (-\gamma^\mu)^\mathsf{T}, (-\gamma^\nu)^\mathsf{T} \right\} = 2\, g^{\mu\nu}\,. \tag{3.109}$$

Musí tedy existovat *unitární* matice C ($\equiv$ *matice nábojového sdružení*[21]), pro kterou platí

$$\mathsf{C}\, (\gamma^\mu)^\mathsf{T}\, \mathsf{C}^\dagger = -\gamma^\mu\,. \tag{3.110}$$

[21] Někdy se pro ni užívá také názvu *Schwingerova matice C*.

Z formule (3.107) pak okamžitě vidíme, že

$$\psi_C(x) \equiv \mathsf{C}\,\overline{\psi}^{\mathsf{T}}(x) \tag{3.111}$$

skutečně vyhovuje Diracově rovnici

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \kappa\right) \psi_C(x) = 0\,. \tag{3.112}$$

Říkáme, že řešení $\psi_C(x)$ je *nábojově sdružené* k řešení $\psi(x)$.

K tomu, abychom nalezli konkrétní vyjádření matice C, si nejprve povšimněme toho, že již sama možnost přepisu antikomutačních relací (3.32) do tvaru

$$\{(-\gamma^\mu)\,, (-\gamma^\mu)\} = 2\,g^{\mu\nu} \tag{3.113}$$

zaručuje existenci *unitární* matice γ_5, takové, že platí

$$\gamma_5\,\gamma^\mu\,(\gamma_5)^{-1} = -\gamma^\mu\,, \tag{3.114}$$

což je totéž jako

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \tag{3.115}$$

Z antikomutačních relací (3.32) je zřejmé, že součin všech čtyř γ-matic (nezávisle na pořadí faktorů) antikomutuje s každou z matic γ^μ, a tedy požadavku (3.114) jistě vyhovuje matice

$$\begin{aligned}\gamma_5 &\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \\ &= -i\alpha^1\alpha^2\alpha^3 = -\frac{i}{3!}\,\varepsilon_{jkl}\,\alpha^j\alpha^k\alpha^l.\end{aligned} \tag{3.116}$$

Čtenář se již jistě sám snadno přesvědčí, že *každá unitární* matice antikomutující se všemi čtyřmi γ-maticemi se od ní může lišit jen fázovým faktorem.[22] V dalším budeme pod γ_5 rozumět matici *definovanou* poslední formulí.[23] *Takto* definovaná matice je nejen unitární, ale také *hermitovská*, tj. při *této* definici platí nejen

$$\gamma_5^\dagger = (\gamma_5)^{-1}\,, \tag{3.117}$$

[22] Viz úlohu (U.3.6.).

[23] Tuto konvenci dnes užívá převážná většina autorů. Čtenář se však může setkat i s publikacemi, v nichž se pod označením γ_5 rozumí matice, která se od naší definice liší znaménkem, nebo faktorem $\pm i$.

ale i

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5 \,, \tag{3.118}$$

a tedy

$$(\gamma_5)^2 = 1. \tag{3.119}$$

V *Diracově* reprezentaci je

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.120}$$

Porovnáním s formulemi (3.89), (3.114) vidíme, že matice nábojového sdružení je požadavkem (3.110) určena, až na libovolný fázový faktor. Pro jednoznačnost budeme v dalším pod touto maticí vždy rozumět[24]

$$\mathsf{C} \equiv \gamma_5\, \mathsf{S}(T)\,. \tag{3.121}$$

V *Diracově* reprezentaci dostáváme pro tuto matici vyjádření

$$\mathsf{C} = i\gamma^0\gamma^2 = i\alpha_2\,, \tag{3.122}$$

tj.

$$\mathsf{C} = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \tag{3.123}$$

Z definice matice γ_5 je zřejmé, že při přechodu od Diracovy reprezentace k jiné reprezentaci definované unitární transformací (3.97)

$$\gamma^\mu \to \gamma'^\mu\,,$$

přechází

$$\gamma_5 \to \gamma_5' = \mathsf{A}\gamma_5\mathsf{A}^\dagger\,, \tag{3.124}$$

a tak na základě formulí (3.121),(3.98) vidíme, že matice nábojového sdružení má v *této* nové reprezentaci tvar

$$\mathsf{C}' = \mathsf{A}\mathsf{C}\mathsf{A}^\mathsf{T}\,, \tag{3.125}$$

---

[24]Někteří autoři užívají konvence, které se od naší mohou lišit znaménkem, případně faktorem $\pm i$.

tj.

$$\mathsf{C}' = i\gamma'^0\gamma'^2\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathsf{T}. \tag{3.126}$$

Matice (3.123) je antisymetrická. Tato vlastnost je invariantní vůči transformaci (3.125), a tedy v *libovolné* reprezentaci platí[25]

$$\mathsf{C}^\mathsf{T} = -\mathsf{C}. \tag{3.127}$$

Na základě této relace se pak snadno přesvědčíme, že

$$\mathsf{C}\,\overline{\psi}_C^{\mathsf{T}}(x) \equiv \psi(x)\,, \tag{3.128}$$

a tedy výrok "první bispinor je nábojově sdružený k druhému" je ekvivalentní s výrokem "druhý bispinor je nábojově sdružený k prvnímu".

3.1.2 Bilineární formy

Již v předcházející kapitole jsme naznačili, jak je pro konzistentní pravděpodobnostní interpretaci vlnové funkce v x-reprezentaci podstatná existence vhodného zachovávajícího se čtyřproudu, tj. možnost provést přiřazení

$$\psi(x) \to j^\mu(x;[\psi])\,,$$

tak, aby podmínky

$$\partial_\mu j^\mu(x;[\psi]) = 0 \qquad \text{a} \qquad j^0(x;[\psi]) \geq 0 \tag{3.129}$$

byly splněny alespoň pro ta řešení evoluční rovnice, která chceme interpretovat jako výše zmíněné vlnové funkce.

V případě Klein-Gordonovy rovnice se nám takovýto čtyřproud nalézt podařilo, ale jen za cenu, že jsme značnou část řešení (všechna řešení se zápornými frekvencemi) označili za "nefyzikální". V tomto směru je situace pro Diracovu rovnici příznivější. Odečteme-li od rov-

---

[25]Matice (3.123) je reálná, tj. v *Diracově reprezentaci* též platí

$$\mathsf{C}^* = \mathsf{C} \qquad \text{a} \qquad \mathsf{C}^\dagger = -\mathsf{C}\,.$$

Tyto relace však vůči transformacím (3.125) invariantní nejsou, a tedy v *jiných* reprezentacích již platit nemusí.

nice (3.30) vynásobené zleva $\overline{\psi}(x)$ rovnici (3.107) vynásobenou zprava $\psi(x)$, zjistíme, že

$$\partial_\mu \left(\overline{\psi}(x)\,\gamma^\mu \psi(x)\right) = 0 \tag{3.130}$$

a přitom

$$\overline{\psi}(x)\,\gamma^0 \psi\,(x) = \psi^\dagger(x)\,\psi(x) \geq 0. \tag{3.131}$$

Tedy veličina

$$j^\mu(x) \equiv c\,\overline{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x) \tag{3.132}$$

vyhovuje všem výše uvedeným podmínkám. Díky tomu můžeme výraz

$$\rho(\boldsymbol{x},t) \equiv \frac{1}{c}\,j^0(\boldsymbol{x},t) = \psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\,\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{3.133}$$

interpretovat jako hustotu pravděpodobnosti, nalézt částici v místě $\boldsymbol{x}$, když je ve stavu popsaném bispinorem $\psi(\boldsymbol{x},t)$. Obecněji, jestliže bispinor $\psi_{(j)}(\boldsymbol{x})$ reprezentuje stavový vektor $\left|\psi_{(j)}\right\rangle$, potom amplituda pravděpodobnosti ("nalezení stavu $\left|\psi_{(2)}\right\rangle$ ve stavu $\left|\psi_{(1)}\right\rangle$ ")

$$\left\langle \psi_{(2)} \,\middle|\, \psi_{(1)} \right\rangle \equiv \int \psi^\dagger_{(2)}(\boldsymbol{x})\,\psi_{(1)}(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x}. \tag{3.134}$$

Zbývá nám ovšem ještě ukázat, že $j^\mu(x)$ se transformuje jako čtyřproud. Tyto transformační vlastnosti jsou ve skutečnosti speciálním případem mnohem obecnějších vztahů, které nyní dokážeme, a o jejichž praktické užitečnosti se přesvědčíme později. Celou řadu veličin totiž nalezneme vyjádřených ve tvaru bilineární formy

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{4} c_{\alpha\beta}\psi_\alpha(1)\,\psi^*_\beta(2)\,, \tag{3.135}$$

kde $\psi_\alpha(n)$ značí α-tou komponentu bispinoru[26] $\psi(n)$; $(n = 1,2)$ a $c_{\alpha\beta}$ jsou skalární koeficienty. Je zřejmé, že pro každou zadanou dvojici bispinorů lze libovolný výraz tohoto typu zapsat jako lineární kombinaci šestnácti lineárně nezávislých (jakýmkoliv způsobem pevně zvolených) takovýchto bilineárních forem. Tuto úlohu jistě mohou sehrát např. veličiny

$$\psi_\alpha(1)\,\psi^*_\beta(2) \qquad \alpha,\beta = 1,\cdots,4. \tag{3.136}$$

[26] Může, ale nemusí jít o řešení Diracovy rovnice.

Tato volba "báze" ovšem není právě nejšťastnější, a to alespoň ze dvou důvodů:
i) Jednotlivé elementy této báze závisejí na tom, jakou realizaci Diracovy algebry užíváme.
ii) Transformační vlastnosti těchto elementů nejsou "jednoduché"[27] a samozřejmě také závisejí na volbě realizace Diracovy algebry.

Na druhé straně je zřejmé, že při *libovolné* volbě výše zmíněné báze můžeme jejích šestnáct elementů vyjádřit ve tvaru

$$\overline{\psi}(1)\,\Gamma_a\psi(2) \qquad a = 1, \cdots, 16, \tag{3.137}$$

kde Γ_a je šestnáct lineárně nezávislých čtvercových matic.

Navíc z formulí (3.59),(3.75) víme, že v případě izochronních Lorenzových transformací je

$$\psi' = \mathsf{S}(\Lambda)\,\psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{\psi}' = \overline{\psi}\,\mathsf{S}^{-1}(\Lambda) \tag{3.138}$$

a z (3.42), že

$$\mathsf{S}^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\mu\,\mathsf{S}(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu.$$

Tedy jestliže ve výrazu (3.137) místo Γ_a dosadíme součin N Diracových γ-matic

$$\gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_N},$$

bude obdržená veličina zcela nezávislá na volbě realizace Diracovy algebry a přitom bude představovat odpovídající komponentu tenzoru N-tého řádu.

Jak se lze snadno přesvědčit (viz úlohu U.3.3.), všech 16 matic

$$1,\ \gamma^\mu,\ \Sigma^{\mu\nu},\ \gamma_5,\ \gamma_5\gamma^\mu \tag{3.139}$$

je lineárně nezávislých. Mohou tedy hrát úlohu výše uvedených matic Γ_a a přitom platí[28]

$$\overline{\psi}_\Lambda(1)\,\psi_\Lambda(2) \;=\; \overline{\psi}(1)\,\psi(2)\,,$$

[27] Jinými slovy řečeno, výrazy (3.136) nepředstavují bázi ireducibilních reprezentací, na které se rozpadá direktní součin reprezentací realizovaných na prostoru bispinorů a veličin k nim komplexně sdružených.

[28] Pokud jde o poslední dvě z relací (3.140), jejich platnost je po formální stránce přímým důsledkem toho, že matice γ_5 komutuje se všemi maticemi $\Sigma^{\mu\nu}$, a tedy také s libovolnou maticí $\mathrm{S}(\Lambda)$, pokud Λ je vlastní Lorentzovou transformací. Na druhé straně jsme již předem věděli, že žádný jiný výsledek obdržet nelze, protože libovolný úplně anstisymetrický tenzor čtvrtého řádu je ekvivalentní skaláru.

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi}_\Lambda(1)\,\gamma^\mu\psi_\Lambda(2) &= \Lambda^\mu{}_\nu\overline{\psi}(1)\,\gamma^\nu\psi(2)\,, \\
\overline{\psi}_\Lambda(1)\,\Sigma^{\mu\nu}\psi_\Lambda(2) &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\,\overline{\psi}(1)\,\Sigma^{\rho\sigma}\psi(2)\,, \\
\overline{\psi}_\Lambda(1)\,\gamma_5\psi_\Lambda(2) &= \overline{\psi}(1)\,\gamma_5\psi(2)\,, \\
\overline{\psi}_\Lambda(1)\,\gamma_5\gamma^\mu\psi_\Lambda(2) &= \Lambda^\mu{}_\nu\,\overline{\psi}(1)\,\gamma_5\gamma^\nu\psi(2)
\end{aligned}
\tag{3.140}
$$

pro libovolnou *vlastní Lorentzovu* transformaci Λ, kde (srov. (3.102))

$$\psi_\Lambda(n) \equiv \mathsf{S}(\Lambda)\,\psi(n) \tag{3.141}$$

a $\mathsf{S}(\Lambda)$ je definováno formulí (3.43).

Tedy při této volbě matic Γ_a se veličiny (3.137) z hlediska *vlastní Lorentzovy grupy* chovají jako *skalár* (pro $\Gamma_a = 1$ nebo γ_5), kontravariantní komponety *vektoru* (pro $\Gamma_a = \gamma^\mu$ nebo $\gamma_5\gamma^\mu$) a kontravariantní komponenety *antisymetrického tenzoru druhého řádu* (pro $\Gamma_a = \Sigma^{\mu\nu}$).

Podobně nalezneme, jak se tyto veličiny chovají při *prostorové inverzi*. Stačí si uvědomit, že matice

$$1,\ \gamma^0,\ \Sigma^{jk},\ \gamma_5\gamma^k,$$

komutují s γ^0, kdežto matice

$$\gamma_5,\ \gamma^k,\ \Sigma^{0k},\ \gamma_5\gamma^0$$

s γ^0 antikomutují, a tedy platí

$$\overline{\psi}_P(1)\,\Gamma_a\psi_P(2) = \varepsilon_a^P\,\overline{\psi}(1)\,\Gamma_a\psi(2)\,, \tag{3.142}$$

kde

$$\varepsilon_a^P \equiv \begin{cases} +1 & \text{pro} \quad \Gamma_a = 1,\ \gamma^0,\ \Sigma^{jk},\ \gamma_5\gamma^k, \\ -1 & \text{pro} \quad \Gamma_a = \gamma_5,\ \gamma^k,\ \Sigma^{0k},\ \gamma_5\gamma^0 \end{cases} \tag{3.143}$$

a (srov. (3.103))

$$\psi_P(n) \equiv \gamma^0\psi(n)\,. \tag{3.144}$$

K vyšetření chování uvažovaných bilineárních forem při *časové inverzi* si nejprve povšimněme toho, že

$$\psi^* = \left(\psi^\dagger\right)^{\mathsf{T}} = \left(\overline{\psi}\gamma^0\right)^{\mathsf{T}} = \left(\gamma^0\right)^{\mathsf{T}}\overline{\psi}^{\mathsf{T}} = \mathsf{S}^\dagger(T)\,\gamma^0\,\mathsf{S}(T)\,\overline{\psi}^{\mathsf{T}},$$

kde poslední rovnost platí díky relacím (viz (3.89))

$$(\gamma^\mu)^\mathsf{T} = \mathsf{S}^\dagger(T)\,\gamma^\mu\,\mathsf{S}(T)\,. \tag{3.145}$$

Odtud vidíme, že vztah (srov.(3.104))

$$\psi_T(n) \equiv \mathsf{S}(T)\,\psi^*(n) = \gamma^0\,\mathsf{S}(T)\,\overline{\psi}^\mathsf{T}(n) \tag{3.146}$$

můžeme v termínech diracovsky sdružených bispinorů ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\overline{\psi_T}(n) \equiv (\mathsf{S}(T)\,\psi^*(n))^\dagger\,\gamma^0 = \psi^\mathsf{T}(n)\,\mathsf{S}^\dagger(T)\,\gamma^0\,, \tag{3.147}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \overline{\psi_T}(1)\,\Gamma_a\psi_T(2) &= \psi^\mathsf{T}(1)\,\mathsf{S}^\dagger(T)\,\gamma^0\Gamma_a\gamma^0\,\mathsf{S}(T)\,\overline{\psi}^\mathsf{T}(2) \\ &= \psi^\mathsf{T}(1)\left(\widetilde{\Gamma}_a\right)^\mathsf{T}\overline{\psi}^\mathsf{T}(2)\,, \end{aligned} \tag{3.148}$$

kde

$$\left(\widetilde{\Gamma}_a\right)^\mathsf{T} \equiv \mathsf{S}^\dagger(T)\,\gamma^0\Gamma_a\gamma^0\,\mathsf{S}(T)\,. \tag{3.149}$$

Na základě vztahu (3.145) se čtenář snadno přesvědčí, že

$$\widetilde{\Gamma}_a = \varepsilon_a^T\,\Gamma_a\,, \tag{3.150}$$

kde

$$\varepsilon_a^T \equiv \begin{cases} +1 & \text{pro} \quad \Gamma_a = 1,\ \gamma^0,\ \Sigma^{0k},\ \gamma_5\gamma^0, \\ -1 & \text{pro} \quad \Gamma_a = \gamma_5,\ \gamma^k,\ \Sigma^{jk},\ \gamma_5\gamma^k\,, \end{cases} \tag{3.151}$$

a tedy, *pokud elementy bispinoru* $\psi(1)$ *komutují s elementy* $\overline{\psi}(2)$, můžeme relaci (3.148) přepsat do tvaru

$$\overline{\psi_T}(1)\,\Gamma_a\,\psi_T(2) = \varepsilon_a^T\,\overline{\psi}(2)\,\Gamma_a\,\psi(1)\,. \tag{3.152}$$

Zcela analogicky lze postupovat i při vyšetřování chování bilineárních forem při *nábojovém sdružení*. Definujeme-li *nábojově sdružené bispinory* jako (srov.(3.111))

$$\psi_C(n) \equiv \mathsf{C}\,\overline{\psi}^\mathsf{T}(n)\,, \tag{3.153}$$

potom na základě dříve uvedených vlastností matice nábojového sdružení nalezneme, že odpovídající diracovsky sdružený bispinor

$$\overline{\psi_C}(n) = -\psi^{\mathsf{T}}(n)\, \mathsf{C}^{\dagger}\,. \tag{3.154}$$

Tedy

$$\overline{\psi_C}(1)\, \Gamma_a \psi_C(2) = -\, (\psi(1))^{\mathsf{T}}\, \mathsf{C}^{\dagger}\, \Gamma_a \mathsf{C} \left(\overline{\psi}(2)\right)^{\mathsf{T}}. \tag{3.155}$$

Na základě relací (3.110) se již čtenář jistě sám snadno přesvědčí, že platí

$$\mathsf{C}^{\dagger}\, \Gamma_a \mathsf{C} = \varepsilon_a^C\, \Gamma_a^{\mathsf{T}}\,, \tag{3.156}$$

kde

$$\varepsilon_a^C \equiv \begin{cases} +1 & \text{pro} \quad \Gamma_a = 1,\ \gamma_5,\ \gamma_5\gamma^{\mu}\,, \\ -1 & \text{pro} \quad \Gamma_a = \gamma^{\mu},\ \Sigma^{\mu\nu}\,, \end{cases} \tag{3.157}$$

a tedy, *pokud elementy bispinoru* $\psi(1)$ *komutují s elementy* $\overline{\psi}(2)$, můžeme výsledný vztah zapsat ve tvaru

$$\overline{\psi_C}(1)\, \Gamma_a \psi_C(2) = -\varepsilon_a^C\, \overline{\psi}(2)\, \Gamma_a \psi(1)\,. \tag{3.158}$$

Počínaje formulí (3.135) jsme užívali stručnou formu zápisu, která by mohla vzbudit dojem, že nalezené výsledky se týkají pouze případu, kdy elementy jednotlivých spinorů jsou konstantní. Opak je však pravdou. Ze způsobu odvození těchto výsledků je zřejmé, že zůstávají v platnosti i tehdy, když všude nahradíme

$$\begin{aligned} \psi(n) &\;\to\; \psi(x(n)\,;n)\,, \\ \psi_\Lambda(n) &\;\to\; \psi_\Lambda(x_\Lambda(n)\,;n)\,, \\ \psi_P(n) &\;\to\; \psi_P(x_P(n)\,;n)\,, \\ \psi_T(n) &\;\to\; \psi_T(x_T(n)\,;n)\,, \\ \psi_C(n) &\;\to\; \psi_C(x_C(n)\,;n)\,, \end{aligned}$$

kde každý ze symbolů $x(n)\,,\cdots,x_C(n)$ představuje hodnotu proměnných, jejichž funkcí příslušné bispinory jsou. Přitom *nemusí* jít o stejné proměnné (tím méně o stejné jejich hodnoty) pro $n = 1$ a $n = 2$. Právě tak platnost nalezených vztahů vůbec nezávisí na relacích mezi $x(n)$ a $x_\Lambda(n)\,,\cdots,x_C(n)$ při pevném n. Toho v dalším bohatě využijeme.

Prozatím si alespoň povšimněme toho, že v uvedeném smyslu představuje definice (3.102) speciální případ definice (3.141) pro

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \psi(2), \\ x(1) &= x(2) \equiv x, \\ x_\Lambda(1) &= x_\Lambda(2) \equiv \Lambda x. \end{aligned}$$

Druhá z rovností (3.140) tak zaručuje, že platí

$$\overline{\psi}_\Lambda(\Lambda x)\,\gamma^\mu \psi_\Lambda(\Lambda x) = \Lambda^\mu{}_\nu \overline{\psi}(x)\,\gamma^\nu \psi(x)\,, \tag{3.159}$$

a tedy čtyřproud $j^\mu(x)$ definovaný formulí (3.132) skutečně má správné transformační vlastnosti.

3.1.3 Impulsmoment

Jak jsme již dříve ukázali[29], pokud stav fyzikálního systému je z hlediska nějaké souřadné soustavy popsán ketem $|\psi\rangle$, potom z hlediska souřadné soustavy, která z výchozí vznikne natočením o úhel φ kolem osy $\boldsymbol{n}$, je tento systém ve stavu popsaném ketem

$$|\psi'\rangle = \exp\Big(i\varphi\, \boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}\Big)\,|\psi\rangle\,, \tag{3.160}$$

kde $\hat{\boldsymbol{J}}$ je operátor jeho *celkového* impulsmomentu[30].

Jestliže uvažovaný systém je tvořen jedinou částicí, můžeme tento vztah zapsat v x-reprezentaci jako

$$\psi'(\boldsymbol{x}) = \exp\Big(i\varphi\, \boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}\Big)\,\psi(\boldsymbol{x})\,. \tag{3.161}$$

Tedy pokud bispinor $\psi(x)$ vystupující v Diracově rovnici je vlnovou funkcí, popisující v x-reprezentaci stav, ve kterém se studovaná částice ($\equiv$ *diracovská částice*) nachází v okamžiku $t \equiv x^0/c$, musí tato částice být z hlediska natočené soustavy (v tomtéž okamžiku t) ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\psi'(x) = \exp\Big(i\varphi\, \boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}\Big)\,\psi(x)\,, \tag{3.162}$$

[29] Viz § 9.1 v [1].

[30] Zde a v dalším (pokud nebude řečeno něco jiného) rozumíme pod termínem *impulsmoment* tuto veličinu v jednotkách $\hbar$. Obdobně je třeba rozumět termínu *spin*.

kde $\hat{\boldsymbol{J}}$ je operátor jejího celkového impulsmomentu.

Na druhé straně z formulí (3.35),(3.36),(3.53) víme, že[31]

$$\psi'(x) = \exp\Big(\frac{i}{2}\varphi\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\Big)\,\psi\big(\Lambda^{-1}x\big)\,, \tag{3.163}$$

kde (viz (1.35), (1.36))

$$\Lambda^{-1} = \exp\Big(-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\,\mathsf{I}^{\alpha\beta}\Big)$$

a

$$\omega_{0k} = 0, \qquad \omega_{jk} = \varphi\varepsilon_{jkl}n_l\,.$$

S využitím relace (1.39) odtud dostáváme

$$\begin{aligned}\big(\Lambda^{-1}x\big)^0 &= x^0,\\ \big(\Lambda^{-1}x\big)^j &= x^j - \varphi\varepsilon_{jkl}n^l x^k + O\big(\varphi^2\big)\,,\end{aligned} \tag{3.164}$$

a tedy v případě *infinitesimálního* natočení je

$$\begin{aligned}\psi\big(\Lambda^{-1}x\big) &= \Big(1 - \varphi\varepsilon_{jkl}n^l x^k\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\,\psi(x)\\ &= \big(1 + i\varphi\,\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\big)\,\psi(x)\,,\end{aligned} \tag{3.165}$$

kde operátor

$$\hat{\boldsymbol{L}} \equiv -i\,[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\nabla}] = \frac{1}{\hbar}\Big[\boldsymbol{x}\times\hat{\boldsymbol{P}}\Big] \tag{3.166}$$

již dobře známe z nerelativistické kvantové mechaniky jako operátor *orbitálního* impulsmomentu.

Natočení kolem zadané osy o úhel φ je ekvivalentní N po sobě provedených natočení o úhel φ/N kolem téže osy. Pro případ *libovolného* pootočení kolem osy $\boldsymbol{n}$ tak nalezneme, že

$$\begin{aligned}\psi\big(\Lambda^{-1}x\big) &= \Big(1 + i\frac{\varphi}{N}\,\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\Big)^N\,\psi(x)\\ &= \exp\big(i\varphi\,\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\big)\,\psi(x)\,.\end{aligned} \tag{3.167}$$

---

[31] Abychom předešli zbytečnému nedorozumění, zdůrazněme, že zatím co ve formuli (3.163) argumenty funkcí ψ' a ψ odpovídají popisu *téhož světobodu* z hlediska dvou souřadných soustav, tj. jejich číselné *hodnoty* jsou *odlišné*, formule (3.162) představuje vztah mezi dvěma výrazy, jejichž argumenty mají *hodnotu stejnou.*

Tedy vztah (3.163) můžeme skutečně zapsat ve tvaru (3.162), ze kterého pro operátor celkového impulsmomentu diracovské částice dostáváme

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}, \tag{3.168}$$

kde operátor jejího *spinu*

$$\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}. \tag{3.169}$$

V Diracově reprezentaci je (viz (3.50))

$$\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{3.170}$$

a tedy (v *libovolné* reprezentaci) je

$$\hat{\boldsymbol{S}}^2 = \frac{3}{4}1, \tag{3.171}$$

tj. *každý* bispinor je vlastním vektorem tohoto operátoru příslušným k vlastní hodnotě $\frac{3}{4}$. Fyzikálně to znamená, že diracovská částice musí mít spin $\frac{1}{2}$.

Společné vlastní stavy celkového impulsmomentu a velikosti orbitálního momentu

Z pravidel o skládání impulsmomentů[32] víme, že existují společné vlastní vektory operátorů $\hat{\boldsymbol{J}}^2$, $\hat{J}_3$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2$, právě tak jako, že v uvažovaném případě při zadané velikosti celkového impulsmomentu j může velikost orbitálního momentu nabývat pouze hodnot $l = j \pm \frac{1}{2}$. Víme také jak zkonstruovat odpovídající vlastní funkce. Jejich explicitní tvar samozřejmě závisí na tom, v jaké reprezentaci Diracovy algebry pracujeme. S podobnou situací se setkáme častěji. Proto v dalším budeme (pokud nebude řečeno něco jiného) výrazy, které závisí na realizaci Diracovy algebry vždy zapisovat ve tvaru odpovídajícím realizaci Diracově.[33] V ní má operátor celkového impulsmomentu (3.168) kvazidiagonální tvar

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{L}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{L}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{3.172}$$

[32]Viz § 2.7 v [1].

[33]Zdůrazněme však ještě jednou, že pokud jde o jakékoliv předpovědi fyzikálně ověřitelné, lze je vždy formulovat ve tvaru nezávislém na volbě této reprezentace.

Bispinor $\psi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{x})$, vyhovující požadavkům

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{J}}^2 \psi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{x}) &= j\,(j+1)\,\psi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{x})\,,\\ \hat{\mathrm{J}}_3 \psi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{x}) &= m\psi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{x})\,,\\ \hat{\boldsymbol{L}}^2 \psi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{x}) &= l\,(l+1)\,\psi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{x})\,,\end{aligned} \tag{3.173}$$

kde

$$l \equiv j \mp \frac{1}{2} \tag{3.174}$$

má tedy strukturu

$$\psi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a(r)\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) \\ b(r)\,\varphi_{jm}^{(\mp)}(\boldsymbol{n}) \end{pmatrix}, \tag{3.175}$$

kde

$$r \equiv |\boldsymbol{x}|\,, \quad \boldsymbol{n} \equiv \frac{\boldsymbol{x}}{r}.$$

Zatímco funkce[34] $a(r), b(r)$ jsou omezeny pouze normalizačními podmínkami kladenými na $\psi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{x})$, *dvou*komponentové funkce $\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n})$ musí vyhovovat rovnicím

$$\begin{aligned}\left(\hat{\boldsymbol{L}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)^2 \varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) &= j\,(j+1)\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n})\,,\\ \left(\hat{\mathrm{L}}_3 + \frac{1}{2}\sigma_3\right) \varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) &= m\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n})\,,\\ \hat{\boldsymbol{L}}^2 \varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) &= l\,(l+1)\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n})\,,\end{aligned} \tag{3.176}$$

tj. rovnicím, které jsou formálně shodné s rovnicemi pro vlnové funkce popisujícími společné vlastní stavy kvadrátu celkového impulsmomentu, kvadrátu orbitálního impulsmomentu a třetí komponenty celkového impulsmomentu částice se spinem $\frac{1}{2}$ v teorii nerelativistické. Tyto vlnové funkce však již známe,[35] tj. víme, že požadavky (3.176) doplněné normalizační podmínkou

$$\int \left|\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n})\right|^2 d\Omega = 1, \tag{3.177}$$

[34]Tyto funkce samozřejmě mohou záviset na hodnotách parametrů j, m, l.

[35]Viz např. § 8.4 v [1].

je určují (až na nepodstatný fázový faktor) jednoznačně, a to ve tvaru

$$\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) = \sum_{\mu=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (l = j \mp 1/2\,,\ 1/2\,,\ m-\mu\,,\ \mu\,|\,j\,,\ m)\, Y_{l,m-\mu}(\boldsymbol{n})\, \chi_\mu\,, \tag{3.178}$$

kde

$$\chi_{\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_{-\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.179}$$

Po dosazení známých výrazů pro Clebsch-Gordanovy koeficienty[36] dostáváme jejich explicitní vyjádření.

Tyto funkce představují tzv. *sférické spinory*. Čtenář by ovšem neměl zapomenout, že veličiny pod tímto názvem užívané různými autory se navzájem mohou lišit fázovými faktory. Námi definované funkce vyhovují fázové konvenci Condon-Shortleyově (viz [1]–Doplněk F):

$$\varphi_{jm}^{(+)}(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{\sqrt{2j}} \begin{pmatrix} \sqrt{j+m}\, Y_{j-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{n}) \\ \sqrt{j-m}\, Y_{j-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}(\boldsymbol{n}) \end{pmatrix}, \tag{3.180}$$

$$\varphi_{jm}^{(-)}(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\,(j+1)}} \begin{pmatrix} -\sqrt{j+1-m}\, Y_{j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{n}) \\ \sqrt{j+1+m}\, Y_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}(\boldsymbol{n}) \end{pmatrix}, \tag{3.181}$$

kde $Y_{l,m}(\boldsymbol{n})$ jsou kulové funkce.

Čtenář se snadno přesvědčí, že uvedené dvoukomponentové funkce vyhovují relacím

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})\, \varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) = -\varphi_{jm}^{(\mp)}(\boldsymbol{n})\,, \tag{3.182}$$

a

$$\left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{L}}\right) \varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) = -\left(1 + \kappa_j^{(\pm)}\right) \varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n})\,, \tag{3.183}$$

kde

$$\kappa_j^{(\pm)} \equiv \mp \left(j + \frac{1}{2}\right), \tag{3.184}$$

které v dalším s výhodou využijeme.

[36] Viz Doplněk K (Tab. K.1) v [1].

Společné vlastní stavy celkového impulsmomentu a parity

Jak jsme již dříve ukázali[37], pokud stav fyzikálního systému je z hlediska nějaké souřadné soustavy popsán ketem $|\psi\rangle$, potom z hlediska souřadné soustavy, která z výchozí vznikne obrácením orientace souřadných os, je tento systém ve stavu popsaném ketem

$$|\psi'\rangle = \hat{\mathsf{P}}\,|\psi\rangle\,, \tag{3.185}$$

kde $\hat{\mathsf{P}}$ je operátor *parity*.

V rámci nerelativistické kvantové mechaniky jsme zjistili, že pro libovolný jednočásticový systém lze tento operátor vyjádřit ve vícekomponentovém formalismu odpovídajícím x,s_3-reprezentaci vztahem

$$\hat{\mathsf{P}}\psi(\boldsymbol{x}) = \eta_P\psi(-\boldsymbol{x})\,. \tag{3.186}$$

Je zřejmé nejen to, že takto definovaný operátor $\hat{\mathsf{P}}$ vyhovuje komutačním relacím

$$\left[\hat{\mathsf{P}},\hat{\boldsymbol{J}}\right] = \left[\hat{\mathsf{P}},\hat{\boldsymbol{L}}\right] = \left[\hat{\mathsf{P}},\hat{\boldsymbol{S}}\right] = 0, \tag{3.187}$$

v nichž $\hat{\boldsymbol{J}}$, $\hat{\boldsymbol{L}}$, $\hat{\boldsymbol{S}}$ značí postupně operátor celkového impulsmomentu, orbitálního impulsmomentu a spinu příslušné částice, ale i to, že *každý* vlastní vektor kvadrátu orbitálního impulsmomentu příslušný k vlastní hodnotě $l\,(l+1)$ je současně vlastním vektorem operátoru $\hat{\mathsf{P}}$ příslušným k vlastní hodnotě $\eta_P\,(-1)^l$. Po formální stránce je poslední tvrzení přímým důsledkem toho, že

i) operátor $\hat{\mathsf{P}}$ definovaný formulí (3.186) "působí" na každou z komponent vícekomponentové funkce ψ naprosto stejně,

ii) pro sférické funkce platí relace[38]

$$Y_{lm}(-\boldsymbol{n}) = (-1)^l\,Y_{lm}(\boldsymbol{n})\,. \tag{3.188}$$

Pro diracovskou částici je situace odlišná: Z formulí (3.36), (3.69) plyne, že v tomto případě má operátor parity tvar

$$\hat{\mathsf{P}}\psi(\boldsymbol{x}) = \mathsf{S}(P)\,\psi(-\boldsymbol{x}) = \eta_P\gamma^0\psi(-\boldsymbol{x})\,. \tag{3.189}$$

[37] Viz § 9.3 v [1].

[38] Viz relaci (G.37) v [1].

Snadno se přesvědčíme, že i pro takto definovaný operátor $\hat{\mathsf{P}}$ platí komutační relace (3.187). Opět tedy existují společné vlastní vektory operátorů $\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{\mathsf{J}}_3, \hat{\boldsymbol{L}}^2$ a $\hat{\mathsf{P}}$.[39] Tyto komutační relace však ještě samy o sobě *nezaručují*, že by *každý* vlastní vektor operátorů $\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{\mathsf{J}}_3, \hat{\boldsymbol{L}}^2$ musel být současně vlastním vektorem operátoru $\hat{\mathsf{P}}$. Speciálně v případě matice (3.175) z definice (3.189), na základě relace (3.188), dostáváme

$$\hat{\mathsf{P}}\psi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{x}) = \eta_P\,(-1)^l \begin{pmatrix} a(r)\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) \\ -b(r)\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) \end{pmatrix}, \tag{3.190}$$

neboť díky formuli (3.188) víme, že pro dvoukomponentové funkce (3.180), (3.181) platí

$$\varphi_{jm}^{(\pm)}(-\boldsymbol{n}) = (-1)^{j\pm\frac{1}{2}}\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n})\,. \tag{3.191}$$

Tedy společná vlastní funkce (3.175) operátorů $\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{\mathsf{J}}_3, \hat{\boldsymbol{L}}^2$ je vlastní funkcí parity (příslušnou k vlastní hodnotě $\eta_P\,(-1)^l$, resp. $\eta_P\,(-1)^{l+1}$) pouze tehdy, když je buď $b = 0$, nebo $a = 0$. Po formální stránce je to způsobeno přítomností matice γ^0 ve formuli (3.189), díky níž jsou dolní dvě komponenty čtyřkomponentové vlnové funkce diracovské částice násobeny dodatečným faktorem (-1). Z relace (3.191) je zřejmé, že tento faktor bude kompenzován, pokud v dolních komponentách matice (3.175) provedeme záměnu[40]

$$\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) \to \varphi_{jm}^{(\mp)}(\boldsymbol{n})\,. \tag{3.192}$$

Pro takto zkonstruovanou matici

$$\psi_{jml}(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{pmatrix} a(r)\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) \\ b(r)\,\varphi_{jm}^{(\mp)}(\boldsymbol{n}) \end{pmatrix} \tag{3.193}$$

tedy platí relace

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{J}}^2\psi_{jml}(\boldsymbol{x}) &= j\,(j+1)\,\psi_{jml}(\boldsymbol{x})\,, \\ \hat{\mathsf{J}}_3\psi_{jml}(\boldsymbol{x}) &= m\,\psi_{jml}(\boldsymbol{x})\,, \\ \hat{\mathsf{P}}\psi_{jml}(\boldsymbol{x}) &= \eta_P\,(-1)^l\,\psi_{jml}(\boldsymbol{x})\,, \end{aligned} \tag{3.194}$$

[39] A dokonce z nich můžeme vytvořit celou bázi příslušného Hilbertova prostoru.

[40] Takto vzniklá matice bude stále ještě vlastní funkcí operátorů $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ a $\hat{\mathsf{J}}_3$, ale (s výjimkou případu $ab = 0$) již nebude vlastní funkcí operátoru $\hat{\boldsymbol{L}}^2$.

kde
$$l = j \mp \frac{1}{2}.$$
Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby ukázal, že *každá* společná vlastní funkce operátorů $\hat{\boldsymbol{J}}^2$, $\hat{\mathsf{J}}_3$, a $\hat{\mathsf{P}}$ má tvar (3.193).

3.1.4 Stacionární stavy

Stacionární stavy libovolného fyzikálního systému jsou podle kvantové teorie popisovány vlastními vektory příslušného hamiltoniánu. V případě volné diracovské částice by tedy odpovídající čtyřkomponentová vlnová funkce měla vyhovovat rovnici
$$\hat{\mathsf{H}}\psi_{p_0}(\boldsymbol{x}) = p_0 c\, \psi_{p_0}(\boldsymbol{x})\,, \tag{3.195}$$
kde[41]
$$\hat{\mathsf{H}} = -i\hbar c\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta M c^2\,. \tag{3.196}$$

Aplikujeme-li na obě strany rovnosti (3.195) operátor $\hat{\mathsf{H}}$, vidíme (srov. (3.10)), že *každá komponenta* bispinoru $\psi_{p_0}(\boldsymbol{x})$ musí vyhovovat rovnici
$$\left(\triangle + k^2\right) \psi_{p_0}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{3.197}$$
kde
$$k \equiv \frac{1}{\hbar}\sqrt{p_0^2 - M^2c^2}. \tag{3.198}$$
Jinými slovy řečeno, každá z komponent bispinoru, který má popisovat stacionární stav diracovské částice musí být formálně shodná s vlnovou funkcí, která je v rámci *nerelativistické* kvantové mechaniky přiřazena *některému* ze stavů[42], v němž velikost impulsu částice má hodnotu
$$|\boldsymbol{p}| = \hbar k. \tag{3.199}$$

Z předchozího[43] víme, že pro každé
$$k = k^* \geq 0 \tag{3.200}$$

[41] Viz (3.13).

[42] Nezapomeňme, že kvadrát impulsu nepředstavuje úplnou množinu pozorovatelných.

[43] Viz [1] § 2.4.1.2.

existuje řešení rovnice (3.197) normalizovatelné k delta-funkci.

Komplexním sdružením rovnice (3.195) dostáváme

$$\left(i\hbar c\,\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta^{\mathsf{T}}Mc^2\right)\psi^*_{p_0}(\boldsymbol{x})=p_0c\,\psi^*_{p_0}(\boldsymbol{x})\,, \tag{3.201}$$

kde jsme využili hermitovosti matic $\boldsymbol{\alpha}$, β. Vynásobíme-li obě strany této rovnosti maticí $\mathsf{C}\beta^{\mathsf{T}}$, potom na základě relací

$$\mathsf{C}\beta^{\mathsf{T}}\mathsf{C}^{\dagger}=-\beta,\qquad \mathsf{C}\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\mathsf{C}^{\dagger}=-\boldsymbol{\alpha}, \tag{3.202}$$

které jsou bezprostředním důsledkem vztahů (3.110), nalezneme, že platí

$$\left(-i\hbar c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta Mc^2\right)(\psi_{p_0})_C(\boldsymbol{x})=-p_0c\,(\psi_{p_0})_C(\boldsymbol{x})\,, \tag{3.203}$$

kde (srov. (3.111))

$$(\psi_{p_0})_C(\boldsymbol{x})\equiv\mathsf{C}\beta^{\mathsf{T}}\psi^*_{p_0}(\boldsymbol{x})\,. \tag{3.204}$$

Porovnáním rovnic (3.195),(3.203) vidíme, že operace nábojového sdružení přiřazuje vlastnímu vektoru hamiltoniánu (3.196) opět vlastní vektor[44] téhož hamiltoniánu, ovšem příslušný k opačné vlastní hodnotě. Odtud je již zřejmé, že spektrum tohoto hamiltoniánu je spojité a probíhá hodnoty

$$p_0c=\pm E,\qquad E\in\left\langle Mc^2,\infty\right)\,. \tag{3.205}$$

V tomto směru tedy narážíme na obdobnou "obtíž" jako u rovnice Klein-Gordonovy. Vedle stacionárních řešení s "kladnými frekvencemi", existují takováto řešení i s "frekvencemi zápornými". Přitom vlastní funkce hamiltoniánu bychom měli interpretovat jako vlnové funkce popisující stav částice s energií rovnou příslušné vlastní hodnotě. V případě vlastních hodnot kladných nám v tom nic nebrání, ale v případě vlastních hodnot záporných tato intepretace možná není. *Tuto* "obtíž" můžeme nejsnáze odstranit (podobně jako v případu K-G rovnice) předpokladem, že *libovolný* stav diracovské částice je popsán vlnovou

---

[44] Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby dokázal, že díky unitaritě matice nábojového sdružení vektory popsané bispinory $\psi(\boldsymbol{x})$ a $\psi_C(\boldsymbol{x})$ vyhovují stejným normalizačním podmínkám.

funkcí, kterou lze vyjádřit jako superpozici vlastních funkcí hamiltoniánu (3.196) příslušných ke *kladné části* jeho spektra, tj. bispinorem, který můžeme zapsat ve tvaru

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int dk \sum_a f(k,a)\, \psi_{k,a}(\boldsymbol{x})\,, \tag{3.206}$$

kde $\psi_{k,a}(\boldsymbol{x})$ je vlastní vektor hamiltoniánu[45] příslušný k vlastní hodnotě

$$E \equiv c\sqrt{\hbar^2 k^2 + M^2 c^2}, \tag{3.207}$$

tj. řešení rovnice (3.195) pro $p_0 c = E$ vyhovující normalizační podmínce

$$\int \psi^{\dagger}_{k,a}(\boldsymbol{x})\, \psi_{k',a'}(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x} = \delta\left(k - k'\right) \delta_{aa'}. \tag{3.208}$$

Pro kvadrát normy vektoru popsaného bispinorem (3.206) dostáváme

$$\|\psi\|^2 = \int dk \sum_a |f(k,a)|^2\,, \tag{3.209}$$

a tedy k tomu, aby tento bispinor popisoval fyzikálně realizovatelný stav, musí být komplexní funkce $f(k,a)$ kvadraticky integrovatelné, tj. výraz na pravé straně poslední formule musí být konečný.

Zapíšeme-li bispinor $\psi_{k,a}(\boldsymbol{x})$ ve tvaru

$$\psi_{k,a}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_{k,a}(\boldsymbol{x}) \\ \chi_{k,a}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \tag{3.210}$$

kde $\varphi_{k,a}(\boldsymbol{x})$ a $\chi_{k,a}(\boldsymbol{x})$ jsou *dvou*komponentové funkce, potom z formulí (3.26),(3.27) vidíme, že v případě *Diracovy realizace* je odpovídající rovnice (3.195) ekvivaletní soutavě rovnic

$$\begin{aligned} c\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right)\chi_{k,a}(\boldsymbol{x}) &= \left(E - Mc^2\right)\varphi_{k,a}(\boldsymbol{x})\,, \\ c\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right)\varphi_{k,a}(\boldsymbol{x}) &= \left(E + Mc^2\right)\chi_{k,a}(\boldsymbol{x})\,, \end{aligned} \tag{3.211}$$

[45] Parametr a symbolizuje vlastní hodnoty dalších pozorovatelných, které spolu s energií tvoří nějakou úplnou množinu pozorovatelných diracovské částice. Pokud spektrum (některé z) těchto pozorovatelných je spojité, je nutno v uvedených formulích nahradit příslušnou sumaci odpovídající integrací a Kroneckerovo delta Diracovou delta-funkcí.

a tedy

$$\chi_{k,a}(\boldsymbol{x}) = c\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}{Mc^2+E}\,\varphi_{k,a}(\boldsymbol{x})\,. \tag{3.212}$$

Kvadrát normy vektoru popsaného bispinorem (3.206) můžeme zapsat ve tvaru součtu příspěvků od "horních" a "dolních" komponent

$$\begin{aligned}\|\psi\|^2 &= \int dk dk' \sum_{a,a'} f^*(k',a')\, f(k,a)\times \\ &\int d^3\boldsymbol{x}\left(\varphi^\dagger_{k',a'}(\boldsymbol{x})\,\varphi_{k,a}(\boldsymbol{x}) + \chi^\dagger_{k',a'}(\boldsymbol{x})\,\chi_{k,a}(\boldsymbol{x})\right).\end{aligned} \tag{3.213}$$

Vyjádříme-li druhý člen integrandu pomocí předcházející formule, po jednoduchých úpravách nalezneme, že[46]

$$\begin{aligned}&\int dk dk' \sum_{a,a'} f^*(k',a')\, f(k,a) \int \chi^\dagger_{k',a'}(\boldsymbol{x})\,\chi_{k,a}(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x} \qquad (3.214)\\ &= \int dk dk' \sum_{a,a'} f^*(k',a')\, f(k,a)\,\frac{c^2\boldsymbol{p}^2}{(Mc^2+E')\,(Mc^2+E)}\times \\ &\qquad \int \varphi^\dagger_{k',a'}(\boldsymbol{x})\,\varphi_{k,a}(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

kde $|\boldsymbol{p}|$, definované formulí (3.199), představuje velikost impulsu uvažované částice při energii E, tj.

$$c\,|\boldsymbol{p}| = \frac{v}{c}E. \tag{3.215}$$

Tedy relativní "velikost" dolních komponent vůči horním je charakterisována veličinou

$$\xi\,\frac{\widetilde{v}}{c},$$

kde $\xi \in \left\langle \frac{1}{2}, 1\right)$ a $\widetilde{v}$ je "typická"[47] rychlost studované částice v uvažovaném stavu.

---

[46] Nezapomeňme, že platí rovnost (3.197). Při odvození uvedeného výsledku jsme také provedli integraci per-partes a vynechali "povrchový" člen. Možnost tohoto kroku je oprávněna z naprosto stejných důvodů jako v nerelativistické kvantové mechanice.

[47] Většinou tuto úlohu může hrát střední hodnota velikosti rychlosti.

Tedy při *zanedbání relativistických korekcí* dolní polovina čtyřkomponentové vlnové funkce vyjádřené v *Diracově realizaci* vymizí. Zbytek pak není ničím jiným než dvoukomponentovou vlnovou funkcí, kterou jsme odpovídajícímu stavu částice se spinem $\frac{1}{2}$ přiřadili v nerelativistické teorii (viz [1] § 8.3).

Jak jsem již několikrát zdůraznili, energie sama o sobě netvoří úplnou množinu pozorovatelných. Budeme proto studovat stacionární stavy, které jsou současně vlastními stavy nějakých dalších integrálů pohybu. Podobně jako v nerelativistické teorii i zde hrají nejdůležitější roli ty z nich, v nichž částice má buď "ostrou hodnotu" impulsu, nebo "ostrou hodnotu" impulsmomentu.

Stacionární stavy s daným impulsmomentem

Jak víme,[48] invariance fyzikálního systému vůči prostorovým rotacím a prostorové inverzi garantuje, že jeho *celkový* impulsmoment a parita jsou integrálem pohybu, a tedy odpovídající operátory komutují s příslušným hamiltoniánem. O tom, že pro operátory definované formulemi (3.168), (3.189), (3.196) skutečně platí

$$\left[\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = \left[\hat{\mathsf{P}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = 0 \,, \tag{3.216}$$

se samozřejmě může čtenář přesvědčit i přímým výpočtem. Podle nerelativistické teorie jsou pro volnou částici integrálem pohybu také její spin a orbitální moment. V případě hamiltoniánu (3.196) však snadno zjistíme, že

$$\left[\hat{\boldsymbol{L}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = -\left[\hat{\boldsymbol{S}}, \hat{\mathsf{H}}\right] \neq 0 \,, \tag{3.217}$$

a dokonce i (viz úlohu U.3.27.)

$$\left[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\mathsf{H}}\right] \neq 0. \tag{3.218}$$

Tedy v Hilbertově prostoru diracovské částice není možno utvořit bázi[49] ze společných vlastních vektorů $\hat{\mathsf{H}}, \hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{\mathsf{J}}_3$ a $\hat{\boldsymbol{L}}^2$.

[48] Viz [1] §§ 9.1 a 9.3.

[49] Zde a v dalším opět užíváme ve fyzikální literatuře běžnou i když ne zcela přesnou terminologii – pochopitelně žádný "vlastní vektor" příslušný k vlastní hodnotě ze spojité části spektra jakékoliv pozorovatelné nemá konečnou normu. V jakém smyslu je třeba rozumět výroku, že tyto veličiny představují elementy báze Hilbertova prostoru, jsme poznali již v nerelativistické teorii (viz např. [1] § 1.2.6).

Takovouto bázi však můžeme utvořit ze společných vlastních vektorů operátorů $\hat{\mathsf{H}}, \hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{\mathsf{J}}_3$ a $\hat{\mathsf{P}}$. Bispinor popisující jejich společný vlastní vektor musí být možno zapsat ve tvaru (srov. (3.193))

$$\psi_{kjml}(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{pmatrix} a_{kj}^{(\pm)}(r)\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) \\ b_{kj}^{(\mp)}(r)\,\varphi_{jm}^{(\mp)}(\boldsymbol{n}) \end{pmatrix}. \tag{3.219}$$

Z předchozího navíc víme, že každá z jeho komponent musí být formálně shodná s nerelativistickou vlnovou funkcí odpovídajícího stacionárního stavu. Uvážíme-li ještě to, že horní, resp. dolní komponenty jsou vlastními funkcemi $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ příslušnými k vlastní hodnotě $l\,(l+1)$, resp. $l'\,(l'+1)$, kde

$$\begin{aligned} l &\equiv j \mp \frac{1}{2}\,, \\ l' &\equiv j \pm \frac{1}{2} = 2j - l = l \pm 1, \end{aligned} \tag{3.220}$$

vidíme, že "radiální části" vlnové funkce (3.219) musí mít tvar

$$\begin{aligned} a_{kj}^{(\pm)}(r) &= A_{kj}^{(\pm)} j_l(kr)\,, \\ b_{kj}^{(\mp)}(r) &= B_{kj}^{(\pm)} j_{l'}(kr)\,, \end{aligned} \tag{3.221}$$

kde j_l jsou nám již dobře známé sférické Besselovy funkce.[50] S využitím relace (3.182) tak dospíváme k závěru, že hledaný společný vlastní vektor musí být možno zapsat jako

$$\psi_{kjml}(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{pmatrix} A_{kj}^{(\pm)} j_l(kr)\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) \\ -B_{kj}^{(\pm)} j_{l'}(kr)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) \end{pmatrix}. \tag{3.222}$$

Každý takovýto (nenulový) bispinor představuje společnou vlastní funkci operátorů $\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{\mathsf{J}}_3$ a $\hat{\mathsf{P}}$ příslušnou k vlastním hodnotám $j\,(j+1)\,, m$ a $\eta_P\,(-1)^l$, která je navíc (k delta-funkci normalizovatelným) řešením rovnice (3.197). Tedy požadavek, aby uvedený bispinor byl také vlastním vektorem hamiltoniánu, je ekvivalentní požadavku, aby bispinor (3.222) vyhovoval rovnici

$$\hat{\mathsf{H}}\,\psi_{kjml}(\boldsymbol{x}) = E\,\psi_{kjml}(\boldsymbol{x})\,, \tag{3.223}$$

[50] Viz [1] Doplněk E.

kde

$$E \equiv c\sqrt{\hbar^2 k^2 + M^2c^2}. \tag{3.224}$$

Vzhledem k homogenitě poslední rovnice a vzhledem k tomu, že bispinor $\psi_{kjml}(\boldsymbol{x})$ je až na konstanty $A_{kj}^{(\pm)}$, $B_{kj}^{(\pm)}$ určen jednoznačně, musí být soustava čtyř svázaných *diferenciálních* rovnic (3.223) ekvivalentní *algebraické* relaci určující poměr mezi těmito konstantami. Snadno se přesvědčíme, že tomu tak skutečně je: Z předchozího víme, že bispinor $\psi_{kjml}(\boldsymbol{x})$ bude vyhovovat rovnici (3.223) právě tehdy, když mezi horními a dolními komponentami platí relace (3.212), která v termínech pravé strany formule (3.222) představuje rovnost

$$-B_{kj}^{(\pm)} j_{l'}(kr)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) = c\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}{Mc^2+E}\,A_{kj}^{(\pm)} j_l(kr)\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n})\,. \tag{3.225}$$

Na druhé straně z identit

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2 = 1, \tag{3.226}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right) = i\hbar\frac{1}{r}\left[\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right) - r\frac{\partial}{\partial r}\right], \tag{3.227}$$

jejichž důkaz ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, vidíme, že nezávisle na tvaru funkce $R(r)$ platí

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right) R(r)\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) &= (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right) R(r)\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) \qquad (3.228)\\
&= (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,i\hbar\frac{1}{r}\left[\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right) - r\frac{\partial}{\partial r}\right] R(r)\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n})\\
&= -i\hbar\frac{1}{r}\left[\left(1+\kappa_j^{(\pm)}\right)R + r\frac{dR}{dr}\right](\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,\varphi_{jm}^{(\pm)},
\end{aligned}$$

kde jsme využili identity (3.183). Tedy rovnost (3.225) je ekvivalentní relaci

$$-B_{kj}^{(\pm)} j_{l\pm1}(kr) = A_{kj}^{(\pm)}\frac{c}{Mc^2+E}\frac{(-i\hbar)}{r}\left[\left(1+\kappa_j^{(\pm)}\right)j_l(kr) + r\frac{d}{dr}j_l(kr)\right]. \tag{3.229}$$

Uvážíme-li, že platí[51]

$$\frac{dj_0(z)}{dz} = -j_1(z) \tag{3.230}$$

a pro $l > 0$

$$z\frac{dj_l(z)}{dz} = zj_{l-1}(z) - (l+1)\,j_l(z)\,, \tag{3.231}$$

$$z\,[j_{l-1}(z) + j_{l+1}(z)] = (2l+1)\,j_l(z)\,, \tag{3.232}$$

snadno zjistíme, že podmínka (3.229) je splněna právě tehdy, když

$$B_{kj}^{(\pm)} = \mp i\sqrt{\frac{E - Mc^2}{E + Mc^2}}\,A_{kj}^{(\pm)}. \tag{3.233}$$

Dospíváme tak k závěru, že stacionární stav volné diracovské částice s celkovým impulsmomentem j, jeho třetí komponentou m a paritou $\eta_P\,(-1)^l$, kde $l = j \mp \frac{1}{2}$, je popsán vlnovou funkcí

$$\psi_{kjml}(\boldsymbol{x}) = C_{kjml}\begin{pmatrix} \sqrt{E + Mc^2}\,j_l(kr)\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) \\ \mp i\,\sqrt{E - Mc^2}\,j_{l\pm 1}(kr)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) \end{pmatrix}. \tag{3.234}$$

Na základě relace[52]

$$\int_0^\infty j_l(kr)\,j_l(k'r)\,r^2 dr = \frac{\pi}{2k^2}\,\delta(k - k') \tag{3.235}$$

zjistíme, že nalezené vlnové funkce vyhovují normalizační podmínce

$$\int \psi_{kjml}^\dagger(\boldsymbol{x})\,\psi_{k'j'm'l'}(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x} = \delta(k - k')\,\delta_{jj'}\delta_{mm'}\delta_{ll'} \tag{3.236}$$

právě tehdy, když

$$|C_{kjml}| = \frac{k}{\sqrt{\pi E}}\,. \tag{3.237}$$

---

[51] Viz vztahy (E.31)–(E.33) v [1].

[52] Viz formule (E.30) v [1].

3.1.5 Vlastní stavy impulsu

Každé řešení rovnice

$$\hat{\boldsymbol{P}}\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}\,\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) \ , \tag{3.238}$$

kde operátor $\hat{\boldsymbol{P}}$ je dán formulí (2.4), lze vyjádřit jako lineární kombinaci *čtyř* funkcí

$$\psi_{\boldsymbol{p};j}\,(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{p};\, j) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right), \qquad j = 1, \cdots, 4, \tag{3.239}$$

kde $\{U(\boldsymbol{p};\, j)\}$ je *libovolná čtveřice* lineárně nezávislých jednosloupcových matic. Přitom skalární součin

$$\int \psi^{\dagger}_{\boldsymbol{p};j}(\boldsymbol{x})\, \psi_{\boldsymbol{p}';k}(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x} = (2\pi\hbar)^3\, U^{\dagger}(\boldsymbol{p};\, j)\, U(\boldsymbol{p};\, k)\, \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')\,. \tag{3.240}$$

Každé nenulové řešení rovnice (3.238) je tedy také vlastní funkcí kvadrátu hamiltoniánu, příslušnou k vlastní hodnotě E^2.

I když je z předchozího zřejmé[53], že funkce (3.239) lze vždy zvolit tak, aby první dvě, resp. poslední dvě představovaly vlastní funkce hamiltoniánu, příslušné k vlastní hodnotě E, resp. $-E$, je instruktivní přesvědčit se o tom i přímým výpočtem: Vlastní vektor hamiltoniánu $\hat{\mathsf{H}}$, který je současně vlastním vektorem operátoru $\hat{\boldsymbol{P}}$, příslušným k vlastní hodnotě $\boldsymbol{p}$, musí vyhovovat rovnici

$$\hat{\mathsf{H}} U(\boldsymbol{p};\, p_0) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right) = cp_0\, U(\boldsymbol{p};\, p_0) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right) \ , \tag{3.241}$$

a tedy $U(\boldsymbol{p};\, p_0)$ musí být řešením algebraické rovnice

$$\mathsf{H}(\boldsymbol{p})\, U(\boldsymbol{p};\, p_0) = cp_0\, U(\boldsymbol{p};\, p_0)\,, \tag{3.242}$$

kde

$$\mathsf{H}(\boldsymbol{p}) \equiv c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta Mc^2 \tag{3.243}$$

[53] Víme, že ke každé vlastní funkci hamiltoniánu, příslušné k vybrané vlastní hodnotě existuje jeho vlastní funkce příslušná k vlastní hodnotě právě opačné. Z izotropie prostoru je zřejmé, že totéž musí být pravdou, i když se omezíme pouze na vlastní funkce hamiltoniánu, ležící v charakteristickém podprostoru operátoru $\hat{\boldsymbol{P}}$, patřícím ke kterékoliv pevně vybrané vlastní hodnotě.

je hermitovská matice, jejíž vlastní hodnoty jsou shodné s hledanými vlastními hodnotami hamiltoniánu. Díky antikomutačním relacím, kterým vyhovují matice $\boldsymbol{\alpha}, \beta$, dostáváme

$$\mathsf{H}^2(\boldsymbol{p}) = c^2\boldsymbol{p}^2 + M^2c^4 = E^2 .$$

Nulovost stopy matic $\boldsymbol{\alpha}$, β zaručuje, že

$$\mathrm{Sp}\,\mathsf{H}(\boldsymbol{p}) = 0.$$

Z posledních dvou rovností již vidíme, že vlastními hodnotami matice $\mathsf{H}(\boldsymbol{p})$ jsou $\pm E$, a přitom každá z nich je dvakrát degenerovanou.

Dospíváme tak k závěru, že každý stav diracovské částice se zadaným impulsem $\boldsymbol{p}$ je popsán čtyřkomponentovou vlnovou funkcí, kterou je možno vyjádřit jako superpozici *dvou* funkcí

$$\psi_{\boldsymbol{p};j}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3\,N(\boldsymbol{p};j)}}u(\boldsymbol{p};\,j)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right), \qquad j = 1,2, \tag{3.244}$$

kde jednosloupcové matice $u(\boldsymbol{p};j)$ vyhovují rovnici

$$\mathsf{H}(\boldsymbol{p})\,u(\boldsymbol{p};\,j) = E\,u(\boldsymbol{p};\,j) \tag{3.245}$$

a podmínce "ortonormality"

$$u^\dagger(\boldsymbol{p};\,j)\,u(\boldsymbol{p};\,k) = N(\boldsymbol{p};\,j)\,\delta_{jk}\,, \tag{3.246}$$

díky níž je

$$\int \psi^\dagger_{\boldsymbol{p};j}(\boldsymbol{x})\,\psi_{\boldsymbol{p}';k}(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x} = \delta_{jk}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,. \tag{3.247}$$

Z relací (3.245), (3.246) snadno odvodíme další velice užitečné vztahy, které v následujícím bohatě využijeme:

Díky hermitovosti matice $\mathsf{H}(\boldsymbol{p})$ víme, že pro *libovolnou* matici A platí

$$u^\dagger(\boldsymbol{p};\,j)\,\mathsf{A}u(\boldsymbol{p};\,k) = \frac{1}{2E}u^\dagger(\boldsymbol{p};\,j)\,\{\mathsf{H}(\boldsymbol{p})\,,\mathsf{A}\}\,u(\boldsymbol{p};\,k)\,. \tag{3.248}$$

Odtud pak okamžitě vidíme, že např.

$$\bar{u}(\boldsymbol{p};\,j)\,u(\boldsymbol{p};\,k) \equiv u^\dagger(\boldsymbol{p};\,j)\,\beta u(\boldsymbol{p};\,k) = \frac{Mc^2}{E}N(\boldsymbol{p};\,j)\,\delta_{jk}\,, \tag{3.249}$$

neboť

$$\{\mathsf{H}(\boldsymbol{p})\,,\beta\} = 2Mc^2. \tag{3.250}$$

Podobně, protože pro *libovolný* vektor $\boldsymbol{a}$ je

$$\{\mathsf{H}(\boldsymbol{p})\,,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\alpha}\} = 2c\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}, \tag{3.251}$$

víme, že platí relace

$$u^\dagger(\boldsymbol{p};\,j)\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\alpha}\,u(\boldsymbol{p};\,k) = c\,\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}}{E}N(\boldsymbol{p};\,j)\,\delta_{jk}. \tag{3.252}$$

Jestliže diracovská částice je z hlediska naší souřadné soustavy ve stavu, kterému odpovídá matice $u(\boldsymbol{p};\,j)$, potom z hlediska soustavy, která z naší vznikne (vlastní) Lorentzovou transformací $\Lambda(\omega)$, je tato částice ve stavu, kterému odpovídá matice

$$u'(\boldsymbol{p};\,j) \equiv \mathsf{S}(\omega)\,u(\boldsymbol{p};\,j)\,, \tag{3.253}$$

kde tranformační matice $\mathsf{S}(\omega)$ je dána formulí (3.43).

Fakt, že tato matice vyhovuje rovnici

$$\mathsf{H}(\boldsymbol{p}')\,u'(\boldsymbol{p};\,j) = E'u'(\boldsymbol{p};\,j) \tag{3.254}$$

a normalizační podmínce

$$u'^\dagger(\boldsymbol{p};\,j)\,u'(\boldsymbol{p};\,k) = \frac{E'}{E}u^\dagger(\boldsymbol{p};\,j)\,u(\boldsymbol{p};\,k)\,, \tag{3.255}$$

kde $E', \boldsymbol{p}'$ udávají energii, resp. impuls uvažované částice z hlediska nové souřadné soustavy, tj. odpovídající čtyřimpuls je dán výrazem

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\omega)\,p^\mu, \tag{3.256}$$

je evidentní již z pouhé skutečnosti, že Diracova rovnice (3.29) je invariantní vůči Lorentzovým transformacím, resp. že pro libovolné bispinory $u(j), u(k)$ představuje veličina $u^\dagger(j)\,u(k)$ nultou komponentu nějakého čtyřvektoru[54]– a čtyřimpuls představuje jediný čtyřvektor, který máme

[54] Viz druhý řádek ve formuli (3.140).

v daném případě k dispozici. Přesto je instruktivní přesvědčit se o uvedených relacích i přímým výpočtem:[55]

Rovnici (3.254) můžeme ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\mathsf{S}^{-1}(\omega)\,\mathsf{H}(\boldsymbol{p}')\,\mathsf{S}(\omega)\,u(\boldsymbol{p};\,j) = E'u(\boldsymbol{p};\,j)\,. \tag{3.257}$$

Na druhé straně víme (viz (3.42)), že

$$\mathsf{S}(\omega)\,\gamma^\mu\,\mathsf{S}^{-1}(\omega) = \Lambda^\mu{}_\nu(-\omega)\;\gamma^\nu, \tag{3.258}$$

odkud dostáváme

$$\begin{aligned} A^\mu\,\mathsf{S}(\omega)\,\gamma_\mu\,\mathsf{S}^{-1}(\omega) &= \Lambda_\mu{}^\nu(-\omega)\,A^\mu\,\gamma_\nu \\ &= \Lambda^\nu{}_\mu(\omega)\,A^\mu\,\gamma_\nu \\ &= A^\nu(\omega)\;\gamma_\nu\,, \end{aligned}$$

kde

$$A^\mu(\omega) \equiv \Lambda^\mu{}_\nu(\omega)\,A^\nu\,, \tag{3.259}$$

tj. jestliže A^μ představuje komponenty nějakého čtyřvektoru ve vybrané soustavě souřadné, potom $A^\mu(\omega)$ udává komponenty tohoto čtyřvektoru v soustavě souřadné, která z výchozí vznikne transformací $\Lambda(\omega)$. Jinými slovy řečeno, transformační zákon (3.42) je ekvivalentní tvrzení, že pro *libovolný* čtyřvektor A platí vztah

$$\mathsf{S}(\omega)\not{A}\mathsf{S}^{-1}(\omega) = \not{A}(\omega)\,, \tag{3.260}$$

který v následujícím opakovaně využijeme: Tak např. vynásobíme-li obě strany rovnice (3.245) maticí γ^0, zjistíme, že ji můžeme ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$(\not{p} - Mc)\,u(\boldsymbol{p};\,j) = 0, \tag{3.261}$$

či

$$\mathsf{S}(\omega)\,(\not{p} - Mc)\,\mathsf{S}^{-1}(\omega)\,u'(\boldsymbol{p};\,j) = 0. \tag{3.262}$$

Díky relaci (3.259) však poslední rovnost znamená, že platí

$$\left(\not{p}' - Mc\right)u'(\boldsymbol{p};\,j) = 0, \tag{3.263}$$

[55]Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby dokázal, že relace (3.254),(3.255) platí i tehdy, když nová soustava vznikne z výchozí prostorovou inverzí.

což ovšem není nic jiného než ekvivalentní přepis rovnosti (3.254).

Bez přechodu ke "kovariantnímu tvaru" zápisu rovnice (3.245) je důkaz relace (3.254) zdlouhavější. Není však na škodu vydat se i touto cestou – odměnou nám bude nalezení řady zajímavých vztahů, z nichž některé v dalším ještě využijeme:

Pokud $\Lambda(\omega)$ představuje pouhé *natočení,* je

$$\mathsf{S}(\omega)\,\gamma^0\,\mathsf{S}^{-1}(\omega) = \gamma^0,$$

a tedy relace (3.260) zajišťuje, že pro *libovolný* třívektor **a** v takovémto případě platí

$$\mathsf{S}(\omega)\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\alpha})\,\mathsf{S}^{-1}(\omega) = (\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{\alpha}) \equiv a'^k\alpha^k, \tag{3.264}$$

kde

$$a'^k \equiv \Lambda^k{}_j(\omega)\,a^j \tag{3.265}$$

jsou komponenty uvažovaného třívektoru v natočené souřadné soustavě.

Odtud již vidíme, že v případě *libovolného natočení* souřadné soustavy je

$$\mathsf{S}^{-1}(\omega)\,\mathsf{H}(\boldsymbol{p}')\,\mathsf{S}(\omega) = \mathsf{H}(\boldsymbol{p})\,, \tag{3.266}$$

a tedy platí rovnost (3.257), neboť energie je v obou soustavách stejná. Splněna je i rovnost (3.255), protože matice $\mathsf{S}(\omega)$ odpovídající libovolnému natočení je *unitární.*[56]

K důkazu obecné platnosti formulí (3.254),(3.255) tak stačí, když je ověříme ještě pro čistý *boost.* Z formule (3.55) víme, že pokud se nová soustava vůči naší posouvá rychlostí w, je odpovídající transformační matice *hermitovská* a lze ji zapsat ve tvaru

$$\mathsf{S}(\omega) = \sqrt{\frac{1+\xi}{2\xi}}\left[1 - \frac{1}{1+\xi}\frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{c}\right] \equiv \mathsf{S}(\boldsymbol{w}) = \mathsf{S}^{-1}(-\boldsymbol{w})\,, \tag{3.267}$$

kde

$$\xi = \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}\,. \tag{3.268}$$

[56] Viz poznámku za formulí (3.58).

Na základě známých antikomutačních relací se čtenář již jistě sám snadno přesvědčí o platnosti algebraických identit

$$\mathsf{S}^2(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{\xi}\left[1 - \frac{w}{c}\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right], \tag{3.269}$$

$$\beta\,\mathsf{S}(\boldsymbol{w}) = \mathsf{S}(-\boldsymbol{w})\,\beta, \tag{3.270}$$

$$(\boldsymbol{a}_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha})\,\mathsf{S}(\boldsymbol{w}) = \mathsf{S}(-\boldsymbol{w})\,(\boldsymbol{a}_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha}), \tag{3.271}$$

$$(\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha})\,\mathsf{S}(\boldsymbol{w}) = \mathsf{S}(\boldsymbol{w})\,(\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha}). \tag{3.272}$$

Tedy pro libovolný třívektor $\boldsymbol{a}$ platí

$$\mathsf{S}(-\boldsymbol{w})\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\alpha})\,\mathsf{S}(\boldsymbol{w}) = a_{\|}\,(\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha}) + \frac{1}{\xi}\left[1 + \frac{w}{c}\,(\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha})\right](\boldsymbol{a}_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha}), \tag{3.273}$$

kde $a_{\|}$, $\boldsymbol{a}_\perp$ značí projekci vektoru $\boldsymbol{a}$ do směru rychlosti $\boldsymbol{w}$, resp. do roviny kolmé na tento směr, tj.

$$\begin{aligned} a_{\|} &\equiv (\boldsymbol{a}\cdot\widetilde{\boldsymbol{w}}), \\ \boldsymbol{a}_\perp &\equiv \boldsymbol{a} - a_{\|}\widetilde{\boldsymbol{w}}. \end{aligned} \tag{3.274}$$

Na druhé straně v uvažovaném případě je

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{\xi}\left[E - wp_{\|}\right], \\ p'_{\|} &= \frac{1}{\xi}\left[p_{\|} - \frac{w}{c^2}E\right], \\ \boldsymbol{p}'_\perp &= \boldsymbol{p}_\perp, \end{aligned} \tag{3.275}$$

a tedy z vyjádření

$$\mathsf{H}(\boldsymbol{p}') = cp'_{\|}\,(\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha}) + c\,(\boldsymbol{p}'_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha}) + Mc^2\beta, \tag{3.276}$$

na základě předcházejících formulí, po jednoduchých úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(-\boldsymbol{w})\,\mathsf{H}(\boldsymbol{p}')\,\mathsf{S}(\boldsymbol{w}) &= cp'_{\|}\,(\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha}) + \frac{c}{\xi}\left[1 + \frac{w}{c}\,(\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha})\right]\left[(\boldsymbol{p}_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha}) + Mc\beta\right] \\ &= \frac{1}{\xi}\left\{\mathsf{H}(\boldsymbol{p}) - wp_{\|} + \frac{w}{c}\,(\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha})\left[\mathsf{H}(\boldsymbol{p}) - E\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.277}$$

Platnost rovnice (3.245) tak skutečně zajišťuje splnění rovnice (3.254).

Podobně z vyjádření (3.269) díky identitě (3.252) víme, že platí

$$u^\dagger(\boldsymbol{p};\, j)\,\mathsf{S}^\dagger(\omega)\,\mathsf{S}(\omega)\,u(\boldsymbol{p};\, k) = \frac{1}{\xi E}\left[E - w p_{\|}\right] u^\dagger(\boldsymbol{p}\,;j)\,u(\boldsymbol{p};\, k)\,, \tag{3.278}$$

což není nic jiného než relace (3.255) pro uvažovaný případ čistého boostu.

Právě vzhledem k obecné platnosti relace (3.255) se většinou volí

$$N(\boldsymbol{p};\, j) \equiv 2E. \tag{3.279}$$

Pokud nebude řečeno něco jiného, budeme tuto "kovariantní" normalizaci používat i my.

Pro další je dobře si uvědomit, že projekční operátory do charakteristických podprostorů matice $\mathsf{H}(\boldsymbol{p})$ odpovídajících vlastním hodnotám $\pm E$ představují matice

$$\mathsf{P}_\pm(\boldsymbol{p}) \equiv \frac{1}{2E}\left(E \pm \mathsf{H}(\boldsymbol{p})\right). \tag{3.280}$$

Povšimněme si, že uvedená definice je ekvivalentní vztahům

$$\mathsf{P}_\pm(\pm\boldsymbol{p}) = \frac{c}{2E}\left(\not{p} \pm Mc\right)\beta, \tag{3.281}$$

kde ve Feynmanově symbolu

$$\not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu \tag{3.282}$$

je

$$p_0 \equiv \frac{E}{c}\,. \tag{3.283}$$

Samotný fakt, že matice $u(\boldsymbol{p};\, j)$ tvoří ortogonální bázi charakteristického podprostoru matice $\mathsf{H}(\boldsymbol{p})$ příslušného vlastní hodnotě $+E$, již zaručuje, že vyhovují relaci uzavřenosti

$$\sum_j \frac{1}{N(\boldsymbol{p};j)} u(\boldsymbol{p};\, j)\, u^\dagger(\boldsymbol{p};\, j) = \mathsf{P}_+(\boldsymbol{p})\,, \tag{3.284}$$

což se v případě kovariantní normalizace zjednoduší na relaci

$$\sum_j u(\boldsymbol{p};\, j)\, u^\dagger(\boldsymbol{p};\, j) = c\,(\not{p} + Mc)\,\beta. \tag{3.285}$$

Skutečnost, že zadání hodnoty impulsu nestačí k určení stavu diracovské částice, nás samozřejmě nepřekvapuje, protože již víme, že se jedná o částici se spinem $\frac{1}{2}$. S obdobnou situací jsme se setkali i v rámci nerelativistické teorie. Fyzikálně to znamená, že u částice s nenulovým spinem, teprve když údaj o jejím impulsu doplníme informací o nějaké její spinově závislé veličině, dostaneme maximální možnou informaci, tj. známe (čistý) stav tohoto fyzikálního systému. V nerelativistickém případě za tuto spinově závislou veličinu obvykle volíme projekci spinu do pevně zvoleného směru. Stav, ve kterém má studovaná částice impuls $\boldsymbol{p}$ a projekci spinu do směru definovaného jednotkovým vektorem $\boldsymbol{n}$ rovnou μ, je pak popsán společným vlastním vektorem $|\boldsymbol{p},\, \mu\rangle$ operátorů $\hat{\boldsymbol{P}}$ a $\left(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}\right)$.

Na první pohled se může zdát, že podobně lze postupovat i v případě diracovské částice. Operátorem jejího spinu je matice (3.169), jejíž elementy jsou konstanty, a tedy určitě platí

$$\left[\hat{\mathsf{P}}_j, \hat{\mathsf{S}}_k\right] = 0. \tag{3.286}$$

To by nás mohlo svést k unáhlenému závěru, že také spin diracovské částice je kompatibilní s jejím impulsem. Opak je však pravdou. Problém spočívá v tom, že ne všechny (kvadraticky integrovatelné) bispinory $\psi(\boldsymbol{x})$ mohou představovat vlnovou funkci diracovské částice, ale pouze ty z nich, které "neobsahují žádné příměsi" vlastních vektorů hamiltoniánu příslušných k záporným vlastním hodnotám. Výše jsme poznali, že *díky tomu* každý vlastní stav (volné) diracovské částice se zadaným impulsem je také vlastním stavem energie. Tedy pokud by spin (volné) diracovské částice byl kompatibilní s jejím impulsem, musel by být kompatibilní také s její energií. Z předchozího však víme, že

$$\left[\hat{\boldsymbol{S}}, \hat{\mathsf{H}}\right] \neq 0. \tag{3.287}$$

K tomu, aby diracovská částice s impulsem $\boldsymbol{p}$ mohla mít "ostrou hodnotu" projekce spinu do pevně zvoleného směru $\boldsymbol{n}$, by matice $(\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{n})$

musela komutovat s maticí $\mathsf{H}(\boldsymbol{p})$. Čtenář se však snadno přesvědčí, že ve skutečnosti je

$$[(\Sigma \cdot \boldsymbol{n}), \mathsf{H}(\boldsymbol{p})] = 2ic\,[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}] \cdot \boldsymbol{\alpha}, \tag{3.288}$$

a tedy uvedené matice komutují jedině tehdy, když je buď $\boldsymbol{p} = 0$, nebo $\boldsymbol{n} = \pm\widetilde{\boldsymbol{p}}$.

Projekce impulsmomentu částice do směru jejího impulsu se nazývá *helicita*. Operátorem helicity tak je

$$\hat{\mathsf{h}} \equiv \frac{\hat{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{P}}}{\left|\hat{\boldsymbol{P}}\right|} = \frac{\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{P}}}{\left|\hat{\boldsymbol{P}}\right|}, \tag{3.289}$$

protože operátor $\left(\hat{\boldsymbol{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{P}}\right)$ je identicky roven nule (tj. projekce orbitálního momentu do směru "letu" částice je vždy nulová). Z vyjádření (3.47)

$$\Sigma_k = -\frac{i}{2}\varepsilon_{klm}\alpha_l\alpha_m$$

snadno nalezneme, že

$$[\beta, \Sigma] = 0, \tag{3.290}$$

$$[\Sigma_k, \alpha_l] = 2i\varepsilon_{klm}\alpha_m. \tag{3.291}$$

Odtud pak již bezprostředně plyne relace

$$\left[\left(\Sigma \cdot \hat{\boldsymbol{P}}\right), \hat{\mathsf{H}}\right] = 0, \tag{3.292}$$

která zaručuje, že[57]

$$\left[\hat{\mathsf{h}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = 0. \tag{3.293}$$

Tedy helicita (na rozdíl od projekce spinu do pevně vybraného směru) je integrálem pohybu (volné) diracovské částice a je kompatibilní s jejím impulsem. Za výše zmíněné dva nezávislé stavy s daným impulsem proto jistě můžeme zvolit vlastní stavy helicity. Tyto stavy s helicitou λ jsou popsány bispinory

$$\psi_{\boldsymbol{p};\lambda}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2E}}u(\boldsymbol{p};\, \lambda)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}\right), \tag{3.294}$$

[57] Operátor velikosti impulsu $\left|\hat{\boldsymbol{P}}\right| \equiv \frac{1}{c}\sqrt{\hat{\mathsf{H}}^2 - M^2c^4}$ pochopitelně s hamiltoniánem komutuje.

kde jednosloupcová matice $u(\boldsymbol{p};\lambda)$ splňuje normalizační podmínku[58]

$$u^{\dagger}(\boldsymbol{p};\lambda)\,u(\boldsymbol{p};\lambda') = 2E\delta_{\lambda\lambda'} \tag{3.295}$$

a vyhovuje rovnicím[59]

$$\begin{aligned} \mathsf{H}(\boldsymbol{p})\,u(\boldsymbol{p};\lambda) &= Eu(\boldsymbol{p};\lambda)\,, & (3.296)\\ \mathsf{h}(\boldsymbol{p})\,u(\boldsymbol{p};\lambda) &= \lambda u(\boldsymbol{p};\lambda)\,, & (3.297) \end{aligned}$$

kde hermitovská matice

$$\mathsf{h}(\boldsymbol{p}) \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}} \tag{3.298}$$

se někdy nazývá operátorem helicity (v p-reprezentaci).

Uvědomíme-li si, že pro libovolný jednotkový vektor $\boldsymbol{n}$ a $2\lambda = \pm 1$, matice

$$\mathsf{P}_{\lambda}(\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{n}) \equiv \frac{1}{2} + \lambda\,\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{n} \tag{3.299}$$

představuje projekční operátor do (dvojrozměrného) charakteristického podprostoru hermitovské matice $\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ příslušného k vlastní hodnotě 2λ, vidíme, že[60]

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{p};\lambda)\,u^{\dagger}(\boldsymbol{p};\lambda) &= 2E\,\mathsf{P}_{+}(\boldsymbol{p})\,\mathsf{P}_{\lambda}(\boldsymbol{\Sigma}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}})\\ &= \frac{c}{2}\,(\not{p} + Mc)\,(1 + 2\lambda\,\boldsymbol{\Sigma}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}})\,\beta. \end{aligned} \tag{3.300}$$

Povšimněme si již nyní, že pro *nehmotnou částici* lze rovnici (3.296) zapsat ve tvaru

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}})\,u(\boldsymbol{p};\lambda) = u(\boldsymbol{p};\lambda)\,, \tag{3.301}$$

protože pro $M = 0$ je $c\,|\boldsymbol{p}| = E$. Díky relaci[61]

$$\boldsymbol{\Sigma} = \gamma_5\boldsymbol{\alpha} \tag{3.302}$$

[58] Ortogonalita řešení odpovídajících různým λ je splněna automaticky, neboť jde o vlastní vektory hermitovské matice $(\boldsymbol{\Sigma}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}})$ příslušné k různým vlastním hodnotám.

[59] Z druhé z nich okamžitě vidíme, že diracovská částice může mít helicitu rovnou $\pm\frac{1}{2}$, což u částice se spinem $\frac{1}{2}$ jistě příliš nepřekvapuje. (Srovnej ovšem případ weylovské částice diskutovaný za formulí (3.384).)

[60] $u\,(\boldsymbol{p};\lambda)$ je nenulový vektor ležící v (jednorozměrném) průniku charakteristických podprostorů matic $\mathsf{H}\,(p)\,,\boldsymbol{\Sigma}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}}$ příslušných k vlastním hodnotám E, resp. λ.

[61] Její platnost je zřejmá z formulí (3.47),(3.116).

pak rovnici (3.297) může *v tomto případě* nahradit rovnicí

$$\gamma_5 u(\boldsymbol{p};\lambda) = 2\lambda u(\boldsymbol{p};\lambda)\,. \tag{3.303}$$

Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby dokázal, že *v tomto případě* můžeme také relaci (3.300) ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$u(\boldsymbol{p};\lambda)\,u^\dagger(\boldsymbol{p};\lambda) = \frac{c}{2}\,\not{p}\,\beta\,(1 + 2\lambda\,\gamma_5)\,. \tag{3.304}$$

Velkou výhodou helicity je, že (pro volnou částici) představuje integrál pohybu. Na druhé straně však nesmíme zapomenout, že se *nejedná* o veličinu lorentzovsky invariantní: Jestliže diracovská částice má z hlediska soustavy ($\equiv$ "transformovaná soustava"), která vznikne z naší vlastní Lorentzovou transformaci $\Lambda(\omega)$, impuls $\boldsymbol{p}'$ a helicitu λ, potom z hlediska *této* soustavy je jejímu stavu přiřazen bispinor $u(\boldsymbol{p}';\lambda)$, který vyhovuje rovnicím

$$\mathsf{H}(\boldsymbol{p}')\,u(\boldsymbol{p}';\lambda) \;=\; E'u(\boldsymbol{p}';\lambda)\,, \tag{3.305}$$
$$\mathsf{h}(\boldsymbol{p}')\,u(\boldsymbol{p}';\lambda) \;=\; \lambda u(\boldsymbol{p}';\lambda)\,. \tag{3.306}$$

Z hlediska naší soustavy je však ve stavu, kterému odpovídá bispinor

$$u(\boldsymbol{p};\lambda;\omega) \equiv \mathsf{S}^{-1}(\omega)\,u(\boldsymbol{p}';\lambda)\,, \tag{3.307}$$

který, jak již z předchozího víme, vyhovuje rovnici

$$\mathsf{H}(\boldsymbol{p})\,u(\boldsymbol{p};\lambda;\omega) = Eu(\boldsymbol{p};\lambda;\omega) \tag{3.308}$$

a díky relaci (3.306) také rovnici

$$\mathsf{h}(\boldsymbol{p};\omega)\,u(\boldsymbol{p};\lambda;\omega) = \lambda u(\boldsymbol{p};\lambda;\omega)\,, \tag{3.309}$$

kde "operátor helicity v transformované soustavě"[62]

$$\mathsf{h}(\boldsymbol{p};\omega) \equiv \mathsf{S}^{-1}(\omega)\,\mathsf{h}(\boldsymbol{p}')\,\mathsf{S}(\omega) = \frac{1}{2}\,\mathsf{S}^{-1}(\omega)\,(\boldsymbol{\Sigma}\cdot\tilde{\boldsymbol{p}}')\,\mathsf{S}(\omega)\,. \tag{3.310}$$

[62]Držíme se zde běžně užívané terminologie, přestože může být poněkud zavádějící. Zdůrazněme proto ještě jednou, že vlastní vektory matice (3.310) jsou v *naší* soustavě přiřazeny těm stavům, které odpovídají vlastním stavům helicity v soustavě *transformované*. Nepřehlédněme ani to, že tato matice může být *nehermitovská*.

Díky relaci (3.302) a komutativitě matice γ_5 se všemi transformačními maticemi $\mathsf{S}(\omega)$ můžeme poslední vztah ekvivalentně zapsat jako

$$2\mathsf{h}(\boldsymbol{p};\omega) = \gamma_5\,\mathsf{S}^{-1}(\omega)\,(\boldsymbol{\alpha}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}}')\,\mathsf{S}(\omega)\,. \tag{3.311}$$

Pokud transformovaná soustava vznikne z výchozí pouhým *natočením*, je velikost impulsu v obou soustavách stejná a na základě relace (3.264) dostáváme

$$2\mathsf{h}(\boldsymbol{p};\omega) = \boldsymbol{\Sigma}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}}, \tag{3.312}$$

tj. helicita v natočené soustavě je identickou s helicitou v soustavě výchozí.[63]

Situace je však podstatně jiná, když se transformovaná soustava vůči naší posouvá konstantní rychlostí $\boldsymbol{w}$: Z formule (3.273), v níž za vektor $\boldsymbol{a}$ dosadíme impuls částice v transformované soustavě, pak po jednoduchých úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} 2\,|\boldsymbol{p}'|\,\mathsf{h}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{w}) &= \gamma_5\frac{1}{\xi}\left\{\left[p_{\parallel}-\frac{w}{c^2}E\right]\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\left[1+\frac{w}{c}\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right](\boldsymbol{p}_{\perp}\cdot\boldsymbol{\alpha})\right\} \\ &= \gamma_5\frac{1}{\xi}\left\{\frac{w}{c^2}\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\left[\mathsf{H}(\boldsymbol{p})-E\right]+\frac{1}{c}\left[\mathsf{H}(\boldsymbol{p})-wp_{\parallel}\right]-Mc\beta\left[1-\frac{w}{c}\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right]\right\} \\ &= \gamma_5\frac{1}{\xi}\left\{\frac{w}{c^2}\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\left[\mathsf{H}(\boldsymbol{p})-E\right]+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha}-\frac{w}{c}\left[p_{\parallel}-Mw\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.313}$$

Díky rovnici (3.308) můžeme v relaci (3.313) všude provést záměnu $\mathsf{H}(\boldsymbol{p})\to E$, a tak operátor helicity v transformované soustavě identifikovat s maticí

$$\frac{1}{2\,|\boldsymbol{p}'|\,c}\left\{E'+\frac{Mc^2\beta}{\xi}\left[1-\frac{w}{c}\left(\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)\right]\right\}\gamma_5, \tag{3.314}$$

případně s maticí

$$\frac{1}{2\xi\,|\boldsymbol{p}'|}\left\{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\Sigma})-\frac{w}{c}\left[p_{\parallel}+Mw\left(\widetilde{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right)\right]\gamma_5\right\}. \tag{3.315}$$

[63]Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby dokázal, že v případě, kdy transformovaná soustava vznikne z výchozí prostorovou inverzí, se operátor helicity v transformované soustavě liší od operátoru helicity pouze znaménkem. Fakt, že helicita je invariantní vůči rotacím a mění znaménko při inverzi souřadnic, samozřejmě příliš nepřekvapuje. Stačí si uvědomit, že fyzikálně představuje skalární součin axiálního vektoru (impulsmomentu) s vektorem (impulsem).

Pokud se transformovaná soustava pohybuje *ve směru impulsu*, tj. pro $\widetilde{\boldsymbol{w}} = \widetilde{\boldsymbol{p}}$, $\boldsymbol{p}_\perp = \boldsymbol{0}$, z první rovnosti ve formuli (3.313) dostáváme

$$2\mathsf{h}(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{w}) = (\widetilde{\boldsymbol{p}} \cdot \Sigma)\,\mathrm{Sgn}\, p'_{\|}\,, \tag{3.316}$$

tj. helicita v takovéto soustavě je stejná nebo opačná než v soustavě výchozí v závislosti na tom, zda se pohybuje pomaleji, či rychleji než částice samotná. [64] V obecném případě u částice s danou helicitou v transformované soustavě může výsledkem měření její helicity v soustavě výchozí být s nenulovou pravděpodobností jak hodnota stejná, tak hodnota opačná.[65] Existuje však jedna velice důležitá výjimka: *helicita nehmotné částice je invariantní vůči libovolné vlastní Lorentzově transformaci.* Pravdivost tohoto tvrzení je evidentní z formule (3.314), [66] neboť pro $M = 0$ je $|\boldsymbol{p}'| = E'$.

Ke specifikaci "spinového stavu" diracovské částice s daným impulsem můžeme využít i druhou z možností, kdy vymizí komutátor (3.288). Za dva nezávislé stavy uvažované částice s impulsem[67] $\boldsymbol{p} = 0$ můžeme zvolit ty z nich, ve kterých je její spin orientován ve, resp. proti směru pevně vybraného jednotkového vektoru $\boldsymbol{s}$, tj. odpovídající jednosloupcové matice

$$u(\boldsymbol{0}; \varepsilon \boldsymbol{s}) \equiv u(\boldsymbol{p} = 0; \varepsilon \boldsymbol{s})\,, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

---

[64] I tento výsledek je fyzikálně snadno pochopitelný. Stačí si uvědomit, že projekci impulsmomentu na vybranou osu lze chápat *z hlediska transformačních vlastností* (protože se jedná o *axiální* vektor) jako jakousi informaci o rotaci kolem této osy, tj. kladná (záporná) hodnota odpovídá pravotočivosti (levotočivosti). Orientace "točivosti" podle vybrané osy je samozřejmě invariantní vůči posouvání podél této osy. Na druhé straně pokud se částice ve výchozí soustavě pohybovala ve směru této osy, pohybuje se v tomto směru i z hlediska soustavy pohybující se ve směru téže osy pouze tehdy, pokud rychlost částice je větší než rychlost soustavy – v opačném případě se z hlediska pohybující se soustavy pohybuje směrem opačným. Nepřekvapuje proto, že při přechodu k soustavě, která "předbíhá" studovanou částici, helicita mění znaménko.

[65] Viz též úlohy U.3.22. a U.3.25..

[66] Tento výsledek jsme samozřejmě mohli obdržet i bez jakýchkoliv výpočtů. Stačí si uvědomit, že pro nehmotnou částici je operátor helicity ekvivalentní s maticí $\frac{1}{2}\gamma_5$, která komutuje se všemi transformačními maticemi $\mathsf{S}(\omega)$.

[67] Tento postup samozřejmě lze použít pouze v případě částice s nenulovou hmotou.

vyhovují rovnicím

$$\mathsf{H}(\boldsymbol{p}=0)\,u(\mathbf{0};\,\varepsilon\boldsymbol{s}) = Mc^2 u(\mathbf{0};\,\varepsilon\boldsymbol{s})\,, \tag{3.317}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{s}\,u(\mathbf{0};\,\varepsilon\boldsymbol{s}) = \varepsilon\,u(\mathbf{0};\,\varepsilon\boldsymbol{s}) \tag{3.318}$$

a normalizační podmínce

$$u^\dagger(\mathbf{0};\,\varepsilon\boldsymbol{s})\,u\,(\mathbf{0};\,\varepsilon'\boldsymbol{s}) = 2Mc^2\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,. \tag{3.319}$$

V případě nenulového impulsu pak jednosloupcové matice $u(\boldsymbol{p};\,\varepsilon\boldsymbol{s})$ zvolíme tak, aby odpovídaly tomu stavu, ve kterém se diracovská částice nachází tehdy, když by jí pozorovatel v *její klidové soustavě* přiřadil matici $u(\mathbf{0};\,\varepsilon\boldsymbol{s})$, přesněji řečeno

$$u(\boldsymbol{p};\,\varepsilon\boldsymbol{s}) \equiv \mathsf{S}(-\boldsymbol{v})\,u(\mathbf{0};\,\varepsilon\boldsymbol{s})\,, \tag{3.320}$$

kde $\mathsf{S}(-\boldsymbol{v})$ je matice reprezentující boost a

$$\boldsymbol{v} \equiv c^2\,\frac{\boldsymbol{p}}{E} \tag{3.321}$$

je rychlost odpovídající impusu $\boldsymbol{p}$, a tedy (viz (3.55))

$$\mathsf{S}(-\boldsymbol{v}) = \sqrt{\frac{E+Mc^2}{2Mc^2}}\left(1+\frac{c}{E+Mc^2}\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\right) = \mathsf{S}^\dagger(-\boldsymbol{v})\,. \tag{3.322}$$

Z předchozího víme[68], že takto zkonstruované matice vyhovují rovnici

$$\mathsf{H}(\boldsymbol{p})\,u(\boldsymbol{p};\,\varepsilon\boldsymbol{s}) = E\,u(\boldsymbol{p};\,\varepsilon\boldsymbol{s}) \tag{3.323}$$

a normalizační podmínce

$$u^\dagger(\boldsymbol{p};\,\varepsilon\boldsymbol{s})\,u(\boldsymbol{p};\,\varepsilon'\boldsymbol{s}) = 2E\,\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,. \tag{3.324}$$

Snadno též nalezneme vztahy, které pro tyto matice vyplývají z požadavku (3.318): Z formule (3.302) víme, že

$$(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\Sigma})\;u(\mathbf{0};\,\varepsilon\boldsymbol{s}) = \gamma_5\,(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\alpha})\;u(\mathbf{0};\,\varepsilon\boldsymbol{s}) = -\gamma_5\,(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\gamma})\;u(\mathbf{0};\,\varepsilon\boldsymbol{s})\,, \tag{3.325}$$

[68] Viz relace (3.254),(3.255).

kde jsme využili rovnosti (3.317), která je ekvivalentní relaci

$$\beta u(\mathbf{0};\, \varepsilon \boldsymbol{s}) = u(\mathbf{0};\, \varepsilon \boldsymbol{s})\,. \tag{3.326}$$

Definujeme-li *čtyř*vektor s tak, že v uvažované *klidové soustavě* má komponenty[69]

$$s^\mu(\mathbf{0}) \equiv \{0, \boldsymbol{s}\}\,, \tag{3.327}$$

je

$$-\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\gamma} = s_\mu(\mathbf{0})\gamma^\mu \equiv \not{s}(\mathbf{0})\,. \tag{3.328}$$

Na druhé straně víme, že

$$\mathsf{S}(-\boldsymbol{v})\,\gamma_5\,\mathsf{S}(\boldsymbol{v}) = \gamma_5\,, \tag{3.329}$$

neboť matice γ_5 komutují s maticemi $\boldsymbol{\alpha}$, víme také, že[70]

$$\mathsf{S}(-\boldsymbol{v})\,s_\mu(\mathbf{0})\,\gamma^\mu\,\mathsf{S}(\boldsymbol{v}) = s_\mu\gamma^\mu \equiv \not{s}\,, \tag{3.330}$$

kde

$$s^\mu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu(-\boldsymbol{v})\,s^\nu(\mathbf{0}) \tag{3.331}$$

jsou komponenty výše zavedeného čtyřvektoru v soustavě, ve které má studovaná částice impuls $\boldsymbol{p}$.[71]
Dospíváme tak k závěru, že požadavek (3.318) je ekvivalentní relaci

$$\gamma_5\not{s}\,u(\boldsymbol{p};\, \varepsilon \boldsymbol{s}) = \varepsilon\, u(\boldsymbol{p};\, \varepsilon \boldsymbol{s})\,. \tag{3.332}$$

Na první pohled by se mohlo zdát, že díky rovnostem(3.323),(3.324), (3.332)[72] by čtvercová matice

$$u(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{s})\, u^\dagger(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{s})$$

---

[69] O takto definovaném čtyřvektoru se někdy hovoří jako o "spinovém čtyřvektoru".

[70] Užíváme standardní značení, nesmíme však zapomenout, že čísla s_μ, a tedy i matice $\not{s}$ jsou funkcemi rychlosti $\boldsymbol{v}$. Vyjádřeny v detailnější symbolice zavedené formulemi (3.259), (3.260) jsou $s_\mu \equiv s_\mu(-\boldsymbol{v})$, $\not{s} \equiv \not{s}(-\boldsymbol{v})$.

[71] Přesněji řečeno v soustavě, kterou z klidové obdržíme odpovídajícím čistým boostem.

[72] Srovnej odvození první z rovností (3.300).

měla být rovna matici

$$2E\,\mathsf{P}_+(\boldsymbol{p})\,\Sigma(s)\,,$$

kde

$$\Sigma(s) \equiv \frac{1}{2}\,(1+\gamma_5 \not{s})\,. \qquad (3.333)$$

K tomuto (*nesprávnému*) závěru však oprávněni nejsme, protože matice $\gamma_5\not{s}$ (na rozdíl od matice $\boldsymbol{\Sigma}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}}$) *není* hermitovská. Tato námitka se ovšem nevztahuje na případ $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. Proto víme, že platí

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{p};\boldsymbol{s})\,u^\dagger(\boldsymbol{p};\boldsymbol{s}) &= \mathsf{S}(-\boldsymbol{v})\,u(\boldsymbol{0};\boldsymbol{s})\,u^\dagger(\boldsymbol{0};\boldsymbol{s})\,\mathsf{S}^\dagger(-\boldsymbol{v}) \qquad (3.334)\\ &= \mathsf{S}(-\boldsymbol{v})\,\frac{c}{2}\,[\not{p}(\boldsymbol{0})+Mc]\,[1+\gamma_5\not{s}(\boldsymbol{0})]\,\beta\mathsf{S}^\dagger(-\boldsymbol{v})\,, \end{aligned}$$

kde

$$p^\mu(\boldsymbol{0}) \equiv \{Mc,\boldsymbol{0}\}$$

jsou komponenty čtyřimpulsu uvažované částice v její klidové soustavě, tj. (srov. (3.331))

$$\Lambda^\mu{}_\nu(-\boldsymbol{v})\,p^\nu(\boldsymbol{0}) = p^\mu \equiv \left\{\frac{E}{c},\boldsymbol{p}\right\}.$$

Uvážíme-li ještě, že

$$\beta\,\mathsf{S}^\dagger(-\boldsymbol{v}) = \mathsf{S}^{-1}(-\boldsymbol{v})\,\beta = \mathsf{S}(\boldsymbol{v})\,\beta, \qquad (3.335)$$

vidíme, že relaci (3.334) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$u(\boldsymbol{p};\boldsymbol{s})\,u^\dagger(\boldsymbol{p};\boldsymbol{s}) = c\,(\not{p}+Mc)\,\Sigma(s)\,\beta. \qquad (3.336)$$

Výběr dvojice nezávislých stavů diracovské částice s daným impulsem tak, aby představovala vlastní stavy helicity, resp. odpovídala projekci spinu do pevně zvoleného směru v klidové soustavě, patří k nejčastěji užívaným, to však neznamená, že by neexistovala nepřeberná řada jiných možností.[73] Věnujme se zde proto ještě alespoň jedné z nich: Vyjdeme z triviálního postřehu, že *každá* matice

$$u(\boldsymbol{p};\,\zeta) \equiv N(\boldsymbol{p})\,\mathsf{P}_+(\boldsymbol{p})\,W(\zeta)\,, \qquad (3.337)$$

[73]Za výše zmíněnou dvojici stavů je možno zvolit např. vlastní stavy helicity ve vybrané transformované soustavě, tj. ty, které odpovídají maticím $u(\boldsymbol{p};\lambda;\omega)$, definovaným formulí (3.307) pro libovolně pevně zvolenou Lorentzovu transformaci $\Lambda(\omega)$. Z dalšího se stane zřejmé, že níže zkonstruovaná báze představuje určitý

kde projekční matice $\mathsf{P}_+(\boldsymbol{p})$ je definována formulí (3.280), kdežto číslo $N(\boldsymbol{p})$ a jednosloupcová matice $W(\zeta)$ jsou naprosto libovolné, vyhovuje rovnici

$$\mathsf{H}(\boldsymbol{p})\, u(\boldsymbol{p};\, \zeta) = Eu(\boldsymbol{p};\, \zeta)\,. \tag{3.338}$$

Jistě je to pravda i tehdy, když za $W(\zeta)$ zvolíme dva nezávislé vektory ležící v charakteristickém podprostoru hermitovské matice α_3, příslušném k vlastní hodnotě $+1$, tj. když platí

$$\alpha_3 W(\zeta) = W(\zeta)\,. \tag{3.339}$$

Vzhledem k tomu, že matice α_3, γ_5 jsou lineárně nezávislé a navzájem komutují, můžeme za $W(\zeta)$ zvolit normalizované vlastní vektory matice γ_5, tj. můžeme požadovat, aby navíc vyhovovaly relacím

$$\gamma_5 W(\zeta) = \zeta\, W(\zeta)\,, \tag{3.340}$$

$$W^\dagger(\zeta)\, W(\zeta') = \delta_{\zeta\zeta'}\,, \tag{3.341}$$

kde[74] $\xi = \pm 1$. Pro takto definované matice pak z formule (3.337) dostáváme

$$u^\dagger(\boldsymbol{p};\, \zeta)\, u(\boldsymbol{p};\, \zeta') = N^2(\boldsymbol{p})\, W^\dagger(\zeta)\, \mathsf{P}_+(\boldsymbol{p})\, W(\zeta')\,, \tag{3.342}$$

kde jsme využili projekčnosti matice $\mathsf{P}_+(\boldsymbol{p})$. Uvážíme-li, že

$$\mathsf{P}_+(\boldsymbol{p}) = \frac{c}{2E}\left(p^0 + \alpha_3 p^3 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}_\perp + \beta Mc\right), \tag{3.343}$$

kde $p^0 \equiv E/c$ a $\boldsymbol{p}_\perp$ je projekce impulsu do roviny kolmé na třetí souřadnou osu, vidíme, že díky platnosti relace (3.339) můžeme všude, kde

---

limitní případ této volby. Právě proto se ukazuje být velice užitečnou např. při studiu kvantové teorie pole "v soustavě nekonečného impulsu " ("infinite-momentum frame") a zejména při výpočtech v rámci odpovídající "poruchové teorie na světelném kuželi". S bispinory, pro které v následujícím užíváme symbolu $u(\boldsymbol{p}, \zeta)$, se čtenář může setkat (pod označením $u\ (\boldsymbol{p}, \pm\frac{1}{2})$) již v průkopnické práci [14], i když to na první pohled nemusí být zřejmé, protože po formální stránce se v ní k těmto veličinám dospívá značně odlišnou cestou, než kterou jsme zvolili my.

[74] Čtenář se jistě sám snadno přesvědčí, že matice γ_5 má vlastní hodnoty ± 1, z nichž každá je dvojnásobně degenerovaná.

se tato matice vyskytuje buď (bezprostředně) vlevo od $W(\zeta)$, nebo vpravo od $W^\dagger(\zeta)$, provést záměnu

$$\mathsf{P}_+(\boldsymbol{p}) \to \frac{c}{2E}\Big(p^+ + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}_\perp + \beta Mc\Big)\,, \tag{3.344}$$

kde

$$p^+ \equiv p^0 + p^3. \tag{3.345}$$

Navíc díky téže relaci platí

$$W^\dagger(\zeta)\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}_\perp W(\zeta') = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} p^j\, W^\dagger(\zeta)\,\{\alpha_j,\alpha_3\}\,W(\zeta') = 0, \tag{3.346}$$

neboť matice $\alpha_{1,2}$ antikomutují s α_3. Zcela obdobně zjistíme, že také

$$W^\dagger(\zeta)\,\beta W(\zeta') = 0, \tag{3.347}$$

a tedy

$$u^\dagger(\boldsymbol{p};\,\zeta)\,u(\boldsymbol{p};\,\zeta') = N^2(\boldsymbol{p})\,\frac{c}{2E}\,p^+\delta_{\zeta\zeta'}\,. \tag{3.348}$$

Jinými slovy řečeno, matice

$$u(\boldsymbol{p};\,\zeta) \equiv \sqrt{\frac{c}{p^+}}\Big(p^+ + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}_\perp + \beta Mc\Big)\,W(\zeta) \tag{3.349}$$

vyhovují podmínce

$$u^\dagger(\boldsymbol{p};\,\zeta)\,u(\boldsymbol{p};\,\zeta') = 2E\delta_{\zeta\zeta'}\,, \tag{3.350}$$

a tedy tvoří opět ortogonální kovariantně normalizovanou bázi charakteristického podprostoru matice $\mathsf{H}(\boldsymbol{p})$ příslušného vlastní hodnotě $+E$.

Jaký je však fyzikální význam parametru ζ ? Abychom ho odhalili, vraťme se k výrazu (3.313) pro operátor helicity v transformované soustavě. V případě, kdy se tato soustava vůči výchozí pohybuje rychlostí w proti směru třetí souřadné osy, dostáváme

$$\mathsf{h}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{w}) = \gamma_5\frac{1}{2\xi\,|\boldsymbol{p}'|}\left\{\left[p^3 + \frac{w}{c}p^0\right]\alpha_3 + (\boldsymbol{p}_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha})\,[1+\alpha_3]\right\}. \tag{3.351}$$

Uvážíme-li, že

$$\{\alpha_3, (\boldsymbol{p}_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha})\} = \{\alpha_3,\beta\} = 0, \tag{3.352}$$

vidíme, že díky relacím (3.339), (3.340), (3.275) platí

$$\begin{aligned} & 2\xi\,|\boldsymbol{p}'|\,\mathsf{h}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{w})\left(p^+ + \boldsymbol{p}_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha} + \beta Mc\right)W(\zeta) \\ = \;& \gamma_5\left\{\left[p^3 + \frac{w}{c}p^0\right]\left(p^+ - \boldsymbol{p}_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha} - \beta Mc\right) + 2p^+\left(\boldsymbol{p}_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)\right\}W(\zeta) \\ = \;& \zeta\left\{\xi p'^3\left(p^+ + \boldsymbol{p}_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha} + \beta Mc\right) + 2p^0\left[1 - \frac{w}{c}\right]\left(\boldsymbol{p}_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)\right\}W(\zeta)\,, \end{aligned} \tag{3.353}$$

a tedy

$$2\mathsf{h}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{w})\,u(\boldsymbol{p};\,\zeta) = \zeta\frac{p'^3}{|\boldsymbol{p}'|}u(\boldsymbol{p};\,\zeta) + 2\left(1 - \frac{w}{c}\right)\frac{p^0}{\xi\,|\boldsymbol{p}'|}\left(\boldsymbol{p}_\perp\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)\sqrt{\frac{c}{p^+}}W(\zeta)\,. \tag{3.354}$$

V limitě

$$w \to c$$

druhý člen na pravé straně vymizí. Tedy $\frac{1}{2}\zeta$ *formálně* představuje helicitu uvažované částice v souřadné soustavě, která se vůči naší pohybuje světelnou rychlostí ve směru $(-\boldsymbol{e}_3)$. Právě proto se veličina $\frac{1}{2}\zeta$ obvykle nazývá "helicitou v soustavě nekonečného impulsu" ("infinite-momentum frame helicity"). Samozřejmě se žádná soustava světelnou rychlostí pohybovat nemůže. Proto je důležitější nepřehlédnout, že veličina $\frac{1}{2}\zeta$ je *prakticky* ekvivalentní helicitě ve všech soustavách, v nichž je[75]

$$p'^3 \gg |\boldsymbol{p}_\perp|\,,\; Mc.$$

Řešení se zápornými frekvencemi

Ve snaze vybudovat takový algoritmus vycházející z Diracovy rovnice, který by mohl představovat relativistickou kvantovou *mechaniku*, jsme za vektory popisující částici s daným impulsen $\boldsymbol{p}$ byli nuceni přijmout jen ta z řešení rovnice (3.238)

$$\hat{\boldsymbol{P}}\,\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}\,\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\,,$$

která představují vlastní funkce Diracova hamiltoniánu (3.196) příslušné ke *kladné* vlastní hodnotě. Zjistili jsme, že odpovídající řešení

---

[75] Blíže viz úlohu U.3.22..

"s kladnými frekvencemi" mají tvar (3.244). V dalším uvidíme, že v kvantové teorii *pole* hrají stejně důležitou úlohu i řešení "s frekvencemi zápornými". Řada z jejich vlastností, které tam budeme využívat, je přímým důsledkem vztahů, které jsme právě odvodili pro řešení s frekvencemi kladnými. Proto se o nich zmíníme již zde.

Ze vztahu (3.203) víme, že pokud $\psi_E(\boldsymbol{x})$ je jakýkoliv vlastní vektor hamiltoniánu (3.196) příslušný k vlastní hodnotě E, potom nábojovým sdružením z něho obdržíme vlastní vektor téhož operátoru příslušný k vlastní hodnotě $-E$. Speciálně to musí platit o bispinorech (3.244), které mají popisovat stav diracovské částice s impulsem $\boldsymbol{p}$. Víme tedy, že čtyřkomponentová funkce

$$\left(\psi_{\boldsymbol{p};j}(\boldsymbol{x})\right)_C = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3\,2E}}v(\boldsymbol{p};\,j)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right), \tag{3.355}$$

kde

$$v(\boldsymbol{p};\,j) \equiv u_C(\boldsymbol{p};\,j) \equiv \mathsf{C}\beta^\top u^*(\boldsymbol{p};\,j) \tag{3.356}$$

je vlastním vektorem hamiltoniánu[76] (3.196), příslušným k vlastní hodnotě $-E$. Jako takový je nutně ortogonální ke všem vlastním vektorům tohoto operátoru patřícím ke kladným vlastním hodnotám. Musí tedy pro všechna $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, j, k být

$$\int \psi^\dagger_{\boldsymbol{p}';k}(\boldsymbol{x})\left(\psi_{\boldsymbol{p};j}(\boldsymbol{x})\right)_C\,d^3\boldsymbol{x} = 0, \tag{3.357}$$

a tedy

$$u^\dagger(\boldsymbol{p}';\,k)\,v(\boldsymbol{p};\,j)\,\delta\left(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'\right) = 0,$$

tj.

$$u^\dagger(\boldsymbol{p};\,k)\,v(-\boldsymbol{p};\,j) = 0. \tag{3.358}$$

Z formulí (3.241),(3.242) vidíme, že jednosloupcová matice $v(\boldsymbol{p};\,j)$ vyhovuje algebraické rovnici[77]

$$\mathsf{H}(-\boldsymbol{p})\,v(\boldsymbol{p};\,j) = -E\,v(\boldsymbol{p};\,j)\,. \tag{3.359}$$

[76] Je samozřejmě také vlastním vektorem operátoru $\hat{\boldsymbol{P}}$, definovaného formulí (2.4), příslušným k vlastní hodnotě $-\boldsymbol{p}$.

[77] Také z ní je okamžitě zřejmé, že musí být splněna relace ortogonality (3.358): $u(\boldsymbol{p};\,k)$, resp. $v(-\boldsymbol{p};\,j)$ představuje vlastní vektor hermitovské matice $\mathsf{H}(\boldsymbol{p})$, příslušný k vlastní hodnotě E, resp. $-E$.

Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby na základě vlastností matice nábojové sdruženosti dokázal, že při kovariantní normalizaci lze relace (3.246), (3.249), (3.285), (3.297), (3.300), (3.336), odvozené pro řešení s kladnými frekvencemi, ekvivalentně vyjádřit v termínech řešení s frekvencemi zápornými jako

$$v^{\dagger}(\boldsymbol{p};\, j)\, v(\boldsymbol{p};\, k) = 2E\delta_{jk}\,, \tag{3.360}$$

$$\bar{v}(\boldsymbol{p};\, j)\, v(\boldsymbol{p};\, k) = -2Mc^2\delta_{jk}\,, \tag{3.361}$$

$$\sum_j v(\boldsymbol{p};\, j)\, v^{\dagger}(\boldsymbol{p};\, j) = 2E\,\mathsf{P}_{-}(-\boldsymbol{p}) = c\,(\not{p} - Mc)\,\beta, \tag{3.362}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}}\, v(\boldsymbol{p};\, \lambda) = -2\lambda\, v(\boldsymbol{p};\, \lambda)\,, \tag{3.363}$$

$$v(\boldsymbol{p};\, \lambda)\, v^{\dagger}(\boldsymbol{p};\, \lambda) = \frac{c}{2}\,(\not{p} - Mc)\,(1 - 2\lambda\,\boldsymbol{\Sigma}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}})\,\beta, \tag{3.364}$$

$$v\,(\boldsymbol{p};\boldsymbol{s})\, v^{\dagger}\,(\boldsymbol{p};\boldsymbol{s}) = c\,(\not{p} - Mc)\,\Sigma(s)\,\beta. \tag{3.365}$$

Podobně relace (3.303),(3.304), které platí, pokud je $M = 0$, můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$\gamma_5 v(\boldsymbol{p};\lambda) = -2\lambda v(\boldsymbol{p};\lambda)\,, \tag{3.366}$$

$$v(\boldsymbol{p};\lambda)\, v^{\dagger}(\boldsymbol{p};\lambda) = \frac{c}{2}\not{p}\,\beta\,(1 - 2\lambda\,\gamma_5)\,. \tag{3.367}$$

Povšimněme si ještě, že z formulí (3.285) a (3.362) plyne “relace uzavřenosti”

$$\sum_j \left[u(\boldsymbol{p};\, j)\, u^{\dagger}(\boldsymbol{p};\, j) + v(-\boldsymbol{p};\, j)\, v^{\dagger}(-\boldsymbol{p};\, j)\right] = 2E. \tag{3.368}$$

Chiralita

V předchozím jsme viděli, že bispinor přiřazený volné nehmotné diracovské částici s danou helicitou je vlastním vektorem matice γ_5. Právě proto se o matici γ_5 mluví jako o operátoru *chirality*. I když chiralita hraje významnou roli až v kvantové teorii *pole*, věnujme jí trochu pozornosti již nyní, a to zejména proto, abychom čtenáře uchránili zbytečných nedorozumění, která mnohdy vznikají zejména díky standardně užívané, ale do jisté míry matoucí terminologii.

Vyjděme z triviálního postřehu, že *každý* bispinor lze zapsat ve tvaru

$$\psi = \psi_R + \psi_L \,, \tag{3.369}$$

kde[78] jednosloupcové matice

$$\begin{aligned} \psi_R &\equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\,\psi, \\ \psi_L &\equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\,\psi, \end{aligned} \tag{3.370}$$

pokud jsou nenulové, představují vlastní vektory chirality příslušné k vlastním hodnotám +1, resp. -1:

$$\begin{aligned} \gamma_5\psi_R &= \psi_R \,, \\ \gamma_5\psi_L &= -\psi_L \,. \end{aligned} \tag{3.371}$$

Rozklad (3.370) je invariantní vůči libovolné *vlastní* Lorentzově transformaci, tj. platí

$$(\psi_R)_\Lambda = (\psi_\Lambda)_R \qquad \text{pro } \forall\Lambda \in \text{VLG}, \tag{3.372}$$

kde (srov. (3.141))

$$\begin{aligned} (\psi_R)_\Lambda &\equiv \mathsf{S}(\Lambda)\,\psi_R, \\ (\psi_\Lambda)_R &\equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\,\psi_\Lambda \,, \\ \psi_\Lambda &\equiv \mathsf{S}(\Lambda)\,\psi \end{aligned} \tag{3.373}$$

a obdobné vztahy mezi levotočivými částmi bispinorů. K důkazu tohoto tvrzení si stačí uvědomit, že

$$[\gamma_5, \boldsymbol{\Sigma}] = [\gamma_5, \boldsymbol{\alpha}] = 0, \tag{3.374}$$

tj. že matice γ_5 komutují jak s generátory rotací, tak s generátory boostů.

[78]Užíváme standardní značení: Index R, resp. L představuje zkratku termínu Righthanded (pravotočivý), resp. Lefthanded (levotočivý). Souvislost této terminologie se vztahem mezi helicitou a chiralitou nehmotné částice je evidentní (srov. poznámku za formulí (3.316)).

Na druhé straně díky tomu, že matice γ_5 a γ^0 navzájem antikomutují, vidíme, že při prostorové inverzi si pravotočivá a levotočivá část navzájem vymění roli, tj.

$$\begin{aligned}(\psi_R)_P &= (\psi_P)_L\,, \\ (\psi_L)_P &= (\psi_P)_R\,,\end{aligned} \tag{3.375}$$

kde, v souladu se značením (3.144), je

$$\psi_P \equiv \gamma^0\psi.$$

Hermitovská matice γ_5 má nulovou stopu a její kvadrát je roven matici jednotkové. Díky tomu víme, že existuje reprezentace Diracovy algebry realizovaná maticemi[79]

$$\gamma^\mu \equiv \mathsf{T}\gamma_D^\mu\mathsf{T}^\dagger, \tag{3.376}$$

kde T je taková unitární matice, že

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.377}$$

V *takovéto* reprezentaci mají matice ψ_R, resp. ψ_L nenulové pouze horní, resp. dolní dvě komponenty, tj. mají tvar[80]

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{3.378}$$

kde φ a χ jsou dvouřádkové matice.

Ponecháváme čtenáři, aby se přesvědčil, že danému požadavku vyhovuje např. matice T, definovaná formulí (3.65), kterou můžeme vyjádřit též jako

$$\mathsf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_D^0 + \gamma_D^5\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma^0 + \gamma^5\right). \tag{3.379}$$

---

[79] Veličiny vyjádřené v Diracově reprezentaci Diracovy algebry budeme v této části odlišovat dolním indexem D. Tak např. γ_D^μ značí matice definované formulí (3.49).

[80] Není snad nutno zdůrazňovat, že bispinor ψ v této reprezentaci souvisí s odpovídajícím bispinorem v realizaci Diracově vztahem $\psi = \mathsf{T}\,\psi_D$.

Odpovídající reprezentace Diracovy algebry se nazývá *chirální* (nebo též *Weylova*, případně *Kramerova*). Matice (3.376) v ní mají tvar[81]

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.380}$$

Odtud pak ihned vidíme, že v *této* reprezentaci mají matice reprezentující generátory rotací (3.47), resp. boostu (3.48) tvar

$$\begin{aligned} \vec{\mathsf{M}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \\ \vec{\mathsf{N}} &= \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.381}$$

V chirální reprezentaci tedy (viz úlohu U.1.11. v Kapitole 1.) horní, resp. dolní dvě komponenty bispinoru představují spinory s tečkovanými, resp. netečkovanými indexy, tj. transformují se podle reprezentace $\mathrm{D}^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$, resp. $\mathrm{D}^{\left(\frac{1}{2},0\right)}$. Z čistě matematického hlediska je proto chirální realizace "přirozenější" než realizace Diracova. Na druhé straně bychom však neměli zapomenout, že z hlediska vztahu algoritmu opírajícího se o Diracovu rovnici k nerelativistické kvantové mechanice je Diracova realizace "vhodnější" než realizace chirální.[82] Tato přednost Diracovy realizace přirozeně odpadá v případě částice s nulovou hmotou, tj. v případě, kdy žádná nerelativistická oblast neexistuje.

Skutečnost, že veličina ψ_R, resp. ψ_L se transformuje podle reprezentace $\mathrm{D}^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$, resp. $\mathrm{D}^{\left(\frac{1}{2},0\right)}$, je ovšem zcela nezávislá na tom, jakou realizaci Diracovy algebry využíváme. Přinejmenším z tohoto důvodu je instruktivní v jejich termínech vyjádřit Diracovu rovnici (3.30):

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - \kappa)\,\psi(x) = 0\,.$$

[81] Povšimněte si, že při přechodu od Diracovy reprezentace k reprezentaci chirální si matice γ^0 a γ^5 vzájemně vyměnily úlohy: $\gamma^5 = \gamma^0_D$, $\gamma^0 = \gamma^5_D$.

[82] Zatímco při Diracově realizaci jsou dolní komponenty bispinorů přiřazených stavům z nerelativistické oblasti podstatně menší než komponenty horní (srov. diskusi navazující na formuli (3.212)), v chirální reprezentaci představují horní i dolní komponenty odpovídajícího bispinoru srovnatelnou lineární kombinaci komponent "velkých" i "malých".

Vynásobíme-li ji maticí γ_5, vidíme, že je ekvivalentní s rovnicí

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu + \kappa)\,\gamma_5 \psi(x) = 0\,.$$

Sečtením a odečtením posledních dvou rovnic dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} i\partial_\mu \gamma^\mu \psi_R(x) &= \kappa\psi_L(x)\,, \\ i\partial_\mu \gamma^\mu \psi_L(x) &= \kappa\psi_R(x)\,, \end{aligned} \tag{3.382}$$

které v *chirální* reprezentaci představují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} i\,(\partial_0 + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\varphi(x) &= \kappa\,\chi(x)\,, \\ i\,(\partial_0 - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\chi(x) &= \kappa\,\varphi(x) \end{aligned} \tag{3.383}$$

pro *dvoukomponentové* spinory φ, χ.

Nepřehlédněme, že vazbu mezi těmito dvěma rovnicemi zprostředkovává pouze parametr κ, a tak v případě *nehmotné* částice se tato soustava *svázaných* rovnic rozpadá na dvě nezávislé *Weylovy* rovnice

$$\begin{aligned} (\partial_0 + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\varphi(x) &= 0, \\ (\partial_0 - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\chi(x) &= 0. \end{aligned} \tag{3.384}$$

Každá z nich je invariantní vůči *vlastní* Lorentzově grupě. Při prostorové inverzi si však navzájem vyměňují úlohu. Tedy pokud od pohybové rovnice vyžadujeme invarianci *pouze* vůči *vlastní* Lorentzově grupě, potom každá z výše uvedených dvou Weylových rovnic může být *sama o sobě* přijata za kandidáta na roli pohybové rovnice pro částici s nulovou hmotou a spinem $\frac{1}{2}$.[83] O odpovídající částici se pak mluví jako o částici Weylově (nebo též weylovské). Zdůrazněme, že zatímco k popisu stavů diracovské částice potřebujeme čtyřkomponentové vlnové funkce, v případě částice weylovské vystačíme s dvoukomponentovými. Jak je to možné? Snadno nahlédneme, že polovina ze všech

[83] Není bez zajímavosti, že sám H.Weyl, který svoji rovnici publikoval již v r.1929 (viz [21]), ji jako kandidáta na pohybovou rovnici zavrhl, protože nevyhovovala požadavku levo-pravé symetrie. Její fyzikální význam mohl být doceněn teprve tehdy, když (v polovině padesátých let) experimentální data jasně prokázala, že dříve obecně přijímaná představa o naprosté rovnocennosti pojmů pravý a levý neodpovídá fyzikální skutečnosti, tj. že (alespoň některé) přírodní zákony *nejsou* invariantní vůči prostorové inverzi.

stavů, ve kterých se může nacházet částice diracovská je pro weylovskou částici "zakázaných". Zatímco helicita diracovské částice může nabývat *obě* z hodnot $\pm\frac{1}{2}$, v případě částice weylovské to možné není. Z výše nalezeného vztahu mezi helicitou a chiralitou je totiž zřejmé, že helicita částice, jejíž pohybovou rovnicí je první, resp. druhá z rovnic (3.384) je nutně rovna *pouze* $+\frac{1}{2}$, resp. $-\frac{1}{2}$.

Nakonec ukažme, že pro diracovskou částici s nenulovou hmotou chiralita *není* dynamickou proměnnou. Na základě úlohy U.3.28. víme, že hermitovská matice γ_5 může reprezentovat dynamickou proměnnou jedině tehdy, pokud pro všechna $\boldsymbol{p}, j, k$ platí

$$v^\dagger(-\boldsymbol{p},\, j)\,\gamma_5\; u(\boldsymbol{p},\, k) = 0. \tag{3.385}$$

Na druhé straně díky invarianci stopy ze součinu matic vůči jejich cyklické permutaci můžeme psát

$$\begin{aligned}\sum_{j,k}\left|v^\dagger(-\boldsymbol{p},\, j)\,\gamma_5 u(\boldsymbol{p},\, k)\right|^2 &= \sum_{j,k} v^\dagger(-\boldsymbol{p},\, j)\,\gamma_5 u(\boldsymbol{p},\, k)\, u^\dagger(\boldsymbol{p},\, k)\,\gamma_5 v(-\boldsymbol{p},\, j)\\ &= \mathrm{Sp}\sum_{j,k}\gamma_5 u(\boldsymbol{p},\, k)\, u^\dagger(\boldsymbol{p},\, k)\,\gamma_5 v(-\boldsymbol{p},\, j)\, v^\dagger(-\boldsymbol{p},\, j)\,,\end{aligned} \tag{3.386}$$

a přitom z formulí (3.285),(3.362) víme, že

$$\begin{aligned}\sum_k u(\boldsymbol{p},\, k)\, u^\dagger(\boldsymbol{p},\, k) &= E + c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta M c^2,\\ \sum_j v(-\boldsymbol{p},\, j)\, v^\dagger(-\boldsymbol{p},\, j) &= E - c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} - \beta M c^2.\end{aligned} \tag{3.387}$$

Na základě relací

$$\begin{aligned}[\gamma_5, \boldsymbol{\alpha}] &= \{\gamma_5, \beta\} = 0,\\ (\gamma_5)^2 &= 1,\end{aligned}$$

pak formuli (3.386) můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned}\sum_{j,k}\left|v^\dagger(-\boldsymbol{p},\, j)\,\gamma_5 u(\boldsymbol{p},\, k)\right|^2 &=\\ &= \mathrm{Sp}\left((E + c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} - \beta M c^2)(E - c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} - \beta M c^2)\right)\\ &= \mathrm{Sp}\left(E^2 - \boldsymbol{p}^2 c^2 + M^2 c^4 - 2Mc^3 \not{p}\right)\\ &= 8M^2 c^4.\end{aligned} \tag{3.388}$$

Tedy podmínka (3.385) je skutečně splněna právě tehdy, když hmota uvažované částice je nulová.

3.2 Částice ve vnějším elektromagnetickém poli

Při hledání rovnice, která by vystihovala chování částice ve vnějším elektromagnetickém poli, můžeme postupovat stejně, jako když jsme se snažili tuto úlohu řešit v rámci algoritmu vycházejícího z rovnice Klein-Gordonovy, tj. provést v pohybové rovnici pro volnou částici pouhou záměnu

$$\partial_\mu \to D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \,. \tag{3.389}$$

Pro diracovskou částici v elektromagnetickém poli tak dospíváme k rovnici

$$\left(i\gamma^\mu D_\mu - \kappa\right)\psi(x) = 0\,. \tag{3.390}$$

Čtenář se snadno přesvědčí, že pro každé řešení $\psi(x)$ této rovnice čtyřvektor (3.132):

$$j^\mu(x) \equiv c\,\overline{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x)$$

vyhovuje rovnici kontinuity[84]

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0.$$

Rovnici (3.390) můžeme ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \left[\left(c\hat{\boldsymbol{P}} - e\boldsymbol{A}(x)\right)\cdot\boldsymbol{\alpha} + \beta M c^2 + e\varphi(x)\right]\psi(x)\,, \tag{3.391}$$

což při Diracově realizaci Diracovy algebry představuje soustavu rovnic

[84] Nepřehlédněme, že na rozdíl nejen od Klein-Gordonovy rovnice (viz (2.38)), ale i od nerelativistické kvantové mechaniky přítomnost elektromagnetického pole *nevyžaduje* změnu funkcionální závislosti zachovávajícího se čtyřproudu na vlnové funkci. Tato skutečnost však nevede k žádnému rozporu s nerelativistickou limitou zde uvažovaného algoritmu – blíže viz úlohu U.3.31.

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\Phi(x) &= \Big(c\hat{\boldsymbol{P}} - e\boldsymbol{A}(x)\Big)\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\chi(x) + \Big(Mc^2 + e\varphi(x)\Big)\,\Phi(x)\,, \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\chi(x) &= \Big(c\hat{\boldsymbol{P}} - e\boldsymbol{A}(x)\Big)\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\Phi(x) + \Big(-Mc^2 + e\varphi(x)\Big)\,\chi(x) \qquad (3.392)
\end{aligned}
$$

pro dvoukomponentové funkce Φ, χ, tvořící horní, resp. dolní komponenty bispinoru ψ.

V obecném případě představuje ψ nějakou superpozici stacionárních stavů diracovské částice. V "*nerelativistickém* režimu" budou k této superpozici přispívat prakticky pouze ty stavy, jejichž energie má hodnotu blízkou k energii klidové, a tedy bude

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\chi(x) \simeq Mc^2\chi(x)\,. \qquad (3.393)
$$

Pro nepříliš silná pole bude[85]

$$
\Big(-Mc^2 + e\varphi(x)\Big)\,\chi(x) \simeq -Mc^2\chi(x)\,. \qquad (3.394)
$$

Z druhého řádku formule (3.392) v takovémto případě dostáváme[86]

$$
\chi(x) \simeq \frac{1}{2Mc^2}\Big(c\hat{\boldsymbol{P}} - e\boldsymbol{A}(x)\Big)\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\Phi(x)\,. \qquad (3.395)
$$

V této *aproximaci* se pak formule (3.392) redukuje na rovnici

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x) = \left\{\frac{1}{2M}\left[\left(\hat{\boldsymbol{P}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x)\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]^2 + e\varphi(x) + Mc^2\right\}\Phi(x)\,. \qquad (3.396)
$$

Na základě relací (3.22):

$$
\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\varepsilon_{jkl}\,\sigma_l
$$

dostáváme

$$
\left[\left(\hat{\boldsymbol{P}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x)\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]^2 = \left(\hat{\boldsymbol{P}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x)\right)^2 - \frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{B}(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}, \qquad (3.397)
$$

[85] Alespoň pro většinu hodnot $\boldsymbol{x}$.

[86] Povšimněme si (srov. úvahy za formulí (3.214)), že v uvažovaném případě jsou dolní komponenty mnohem "menší" než komponenty horní, podobně jako v případě částice volné.

a tedy poslední rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x) = \left\{\frac{1}{2M}\left(\hat{\boldsymbol{P}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x)\right)^2 - \mu\boldsymbol{B}(x)\cdot\boldsymbol{\sigma} + e\varphi(x) + Mc^2\right\}\Phi(x)\,, \tag{3.398}$$

kde

$$\mu = \frac{e\hbar}{2Mc}\,. \tag{3.399}$$

Rovnice (3.397) je (až na člen úměrný *konstantě* Mc^2, který je z nerelativistického hlediska naprosto irelevantní) identická s rovnicí *Pauliho*, kterou jsme obdrželi v rámci nerelativistické kvantové mechaniky jako pohybovou rovnici pro částici se spinem $\frac{1}{2}$.[87] *Navíc* jsme však nyní obdrželi ještě relaci (3.399), tj. předpověď, že magnetický moment diracovské částice by měl být orientován ve, resp. proti směru jejího spinu v závislosti na tom, zda je nabita kladně, či záporně, a jeho velikost by měla být rovna příslušnému magnetonu. To je jistě pozoruhodná předpověď, zejména proto, že alespoň v případě elektronu, pozitronu a mionů se od experimentálních dat odchyluje jen o cca jedno promile[88]. Jak však v dalším uvidíme, právě tato odchylka na úrovni jednoho promile sehrála velice důležitou roli na cestě k relativistické kvantové teorii.

3.2.1 Transformace Foldy-Wouthuysenova

Pauliho rovnice (3.398) je fyzikálně ekvivaletní Diracově rovnici (3.391) až na vyšší relativistické korekce. Přirozeně se nabízí otázka, zda není možno nalézt algoritmus, který by umožňoval doplnit do Pauliho rovnice další členy tak, aby výsledná rovnice byla fyzikálně naprosto ekvivalentní s rovnicí Diracovou.

[87] Viz rovnici (8.82) v [1].

[88] Současné experimentální hodnoty (viz [18]) magnetických momentů těchto částic jsou

$$\mu_e = \left(1.001\,159\,652\,193 \pm 10\cdot 10^{-12}\right)\frac{e\hbar}{2M_e c}\,,$$

respektive

$$\mu_\mu = \left(1.001\,165\,923 \pm 8\cdot 10^{-9}\right)\frac{e\hbar}{2M_\mu c}\,.$$

Z předchozího víme, že pokud pracujeme v Diracově realizaci, potom v nerelativistickém režimu jsou dolní komponenty těch bispinorů, které chceme interpretovat jako vlnové funkce (tj. těch, které neobsahují příspěvky od řešení se zápornými frekvencemi), mnohem menší než komponenty horní. Pokud by se nám podařilo nalézt unitární transformaci, která by Diracovu rovnici převedla do tvaru, v němž by dolní komponenty zmíněných vlnových funkcí vymizely úplně, potom by rovnice, které by vyhovovaly odpovídající komponenty horní, představovala hledanou Pauliho rovnici zahrnující všechny relativistické korekce. Je zřejmé, že pokud bychom znali spektrální rozklad příslušného hamiltoniánu, jednalo by se o úlohu víceméně triviální. Nepřekvapuje proto, že pro volnou částici ji lze řešit exaktně: Snadno se totiž ukáže (viz úlohu U.3.34.), že platí

$$\hat{\mathsf{S}}\hat{\mathsf{H}}\hat{\mathsf{S}}^{\dagger} = \beta c\sqrt{\hat{\boldsymbol{P}}^2 + M^2c^2}, \tag{3.400}$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{H}} &\equiv \beta Mc^2 + c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}, \\ \hat{\mathsf{S}} &\equiv \exp\left(-\frac{i}{2}\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}{\left|\hat{\boldsymbol{P}}\right|}\operatorname{arctg}\frac{\left|\hat{\boldsymbol{P}}\right|}{Mc}\right). \end{aligned} \tag{3.401}$$

V obecném případě interagující částice takovéto exaktní řešení neznáme. L.L.Foldy a S.A.Wouthuysen však již počátkem padesátých let [22] navrhli algoritmus umožňující řešit výše naznačenou úlohu až na relativistické korekce, jejichž řád je sice konečný, ale libovolně vysoký. Při hledání takovéto *Foldy-Wouthuysenovy transformace* vyjdeme z Diracovy rovnice

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{\mathsf{H}}\psi \tag{3.402}$$

v Diracově realizaci a hamiltonián vyjádříme ve tvaru

$$\hat{\mathsf{H}} = \beta Mc^2 + \hat{\mathsf{G}} + \hat{\mathsf{U}}, \tag{3.403}$$

kde "sudé", resp. "liché" členy představují samosdružené operátory, které mají kvazidiagonální, resp. antikvazidiagonální tvar:

$$\hat{\mathsf{G}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathsf{g}}_1 & 0 \\ 0 & \hat{\mathsf{g}}_2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathsf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\mathsf{u}}_1 \\ \hat{\mathsf{u}}_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.404}$$

Nepřehlédněme, že takovéto operátory můžeme nezávisle na užité realizaci Diracovy algebry jednoznačně charakterizovat relacemi

$$\left[\beta, \hat{\mathsf{G}}\right] = \left\{\beta, \hat{\mathsf{U}}\right\} = 0. \tag{3.405}$$

Chtěli bychom nalézt takový unitární operátor

$$\hat{\mathsf{S}} \equiv \exp \hat{\mathsf{F}}, \qquad \hat{\mathsf{F}}^\dagger = -\hat{\mathsf{F}}, \tag{3.406}$$

aby čtyřkomponentová funkce

$$\psi_F \equiv \hat{\mathsf{S}}\psi \tag{3.407}$$

vyhovovala rovnici

$$i\hbar \frac{\partial \psi_F}{\partial t} = \hat{\mathsf{H}}_F \psi_F \tag{3.408}$$

a přitom operátor $\hat{\mathsf{H}}_F$ neobsahoval liché členy. Dosazením do rovnice (3.402) z definice (3.407) vidíme, že

$$\hat{\mathsf{H}}_F = \hat{\mathsf{S}}\hat{\mathsf{H}}\hat{\mathsf{S}}^\dagger - i\hbar\,\hat{\mathsf{S}}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathsf{S}}^\dagger. \tag{3.409}$$

Již z úlohy B.42 v [1] víme, že pro libovolný operátor $\hat{\mathsf{W}}$ platí

$$\hat{\mathsf{S}}\hat{\mathsf{W}}\hat{\mathsf{S}}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{\mathsf{W}}_n\,, \tag{3.410}$$

kde n-násobný komutátor[89]

$$\left[\hat{\mathsf{F}}, \left[\hat{\mathsf{F}}, \cdots \left[\hat{\mathsf{F}}, \hat{\mathsf{W}}\right] \cdots\right]\right] \equiv \hat{\mathsf{W}}_n\,. \tag{3.411}$$

Snadno též nalezneme (viz úloha U.3.39.), že platí

$$\hat{\mathsf{S}}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathsf{S}}^\dagger = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\hat{\mathsf{D}}_n\,, \tag{3.412}$$

[89]Pro $n = 0$ je pod $\hat{\mathsf{W}}_n$ zde třeba rozumět $\hat{\mathsf{W}}_0 \equiv \hat{\mathsf{W}}$. Podobnou konvenci používáme i v dalším.

kde

$$\hat{\mathsf{D}}_n \equiv \left[\hat{\mathsf{F}}, \left[\hat{\mathsf{F}}, \cdots \left[\hat{\mathsf{F}}, \frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathsf{F}}\right] \cdots\right]\right]. \tag{3.413}$$

Pravou stranu relace (3.409) tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$\hat{\mathsf{S}}\hat{\mathsf{H}}\hat{\mathsf{S}}^\dagger - i\hbar\hat{\mathsf{S}}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathsf{S}}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\hat{\mathsf{H}}_n + i\hbar\frac{1}{n+1}\hat{\mathsf{D}}_n\right). \tag{3.414}$$

Nalézt takový operátor $\hat{\mathsf{F}}$, aby na pravé straně poslední formule již nevystupovaly žádné liché operátory, obecně neumíme. Na druhé straně však víme, že v nerelativistickém režimu k energii částice nejvíce přispívá její energie klidová. Dobrý fyzikální smysl proto má i méně ambiciózní úloha: Nalézt takovou unitární transformaci, aby zbývající liché členy v transformovaném hamiltoniánu s rostoucí hmotou M ubývaly alespoň jako M^{-N}, kde N je zadané celé kladné číslo.[90]

Pro řešení této úlohy nejprve uvažujme operátor

$$\hat{\mathsf{H}}^{(N)} = \beta Mc^2 + \hat{\mathsf{G}}^{(N)} + \hat{\mathsf{U}}^{(N)}, \tag{3.415}$$

kde samosdružený operátor $\hat{\mathsf{G}}^{(N)}$, resp. $\hat{\mathsf{U}}^{(N)}$ je sudý nultého řádu, resp. lichý řádu N-tého. Snadno nalezneme unitární transformaci, kterou se zvýší řád lichých členů o jednotku, kdežto řád členů sudých zůstane nezměněn. Konstrukce této transformace spočívá na triviálním faktu, že díky druhé z relací (3.405) platí

$$\left[\hat{\mathsf{U}}^{(N)}, \beta\right] = -2\beta\hat{\mathsf{U}}^{(N)}, \tag{3.416}$$

a tedy operátor

$$\hat{\mathsf{F}}^{(N)} \equiv \frac{1}{2Mc^2}\beta\hat{\mathsf{U}}^{(N)} = -\left(\hat{\mathsf{F}}^{(N)}\right)^\dagger \tag{3.417}$$

vyhovuje komutační relaci

$$\left[\hat{\mathsf{F}}^{(N)}, \beta Mc^2\right] = -\hat{\mathsf{U}}^{(N)}. \tag{3.418}$$

[90]Pro stručnost budeme ve zbytku tohoto paragrafu každou veličinu A, pro kterou existuje konečná limita AM^n pro $M \to \infty$, nazývat veličinou n-tého řádu a označovat ji symbolem $O(M^{-n})$. V dalším mlčky předpokládáme, že operátory $\hat{\mathsf{G}}, \hat{\mathsf{U}}$ vystupující ve výchozím hamiltoniánu (3.403) jsou veličinami řádu nultého.

Definujme

$$\hat{\mathsf{H}}^{(N+1)} \equiv \hat{\mathsf{S}}^{(N)}\hat{\mathsf{H}}^{(N)}\left(\hat{\mathsf{S}}^{(N)}\right)^{\dagger} - i\hbar\,\hat{\mathsf{S}}^{(N)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{\mathsf{S}}^{(N)}\right)^{\dagger}, \tag{3.419}$$

kde unitární operátor

$$\hat{\mathsf{S}}^{(N)} \equiv \exp\hat{\mathsf{F}}^{(N)}. \tag{3.420}$$

Označíme-li pro libovolný operátor $\hat{\mathsf{W}}$ n-násobný komutátor

$$\left[\beta\hat{\mathsf{U}}^{(N)},\left[\beta\hat{\mathsf{U}}^{(N)},\cdots\left[\beta\hat{\mathsf{U}}^{(N)},\hat{\mathsf{W}}\right]\cdots\right]\right] \equiv \hat{\mathsf{W}}_n^{(N)}, \tag{3.421}$$

potom na základě relací (3.410),(3.412) s využitím (3.418) po jednoduchých úpravách nalezneme

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{H}}^{(N+1)} &= \beta Mc^2 + \hat{\mathsf{G}}^{(N)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2Mc^2}\right)^n \times \\ &\left[\frac{1}{2(n+1)}\hat{\beta}_{n+1}^{(N)} + \left(\hat{\mathsf{G}}^{(N)}\right)_n^{(N)} + \left(\hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right)_n^{(N)} + i\hbar\left(\hat{\mathsf{B}}^{(N)}\right)_{n-1}^{(N)}\right],\end{aligned} \tag{3.422}$$

kde

$$\hat{\mathsf{B}}^{(N)} \equiv \beta\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathsf{U}}^{(N)} \equiv \beta\hat{\mathsf{C}}^{(N)}. \tag{3.423}$$

Uvědomíme-li si, že součin dvou sudých, stejně jako dvou lichých operátorů představuje operátor sudý, kdežto součin operátoru sudého s lichým je operátorem lichým, vidíme, že v sumě na pravé straně předposlední formule jsou lichými operátory

$$\hat{\beta}_{n+1}^{(N)},\quad \left(\hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right)_n^{(N)} \qquad \text{pro sudá } n$$

a

$$\left(\hat{\mathsf{G}}^{(N)}\right)_n^{(N)},\quad \left(\hat{\mathsf{B}}^{(N)}\right)_{n-1}^{(N)} \qquad \text{pro lichá } n,$$

kdežto ostatní operátory jsou sudé. Přitom

$$\hat{\beta}_{n+1}^{(N)} = O\left(M^{-N(n+1)}\right),\quad \left(\hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right)_n^{(N)} = O\left(M^{-N(n+1)}\right),$$

$$\left(\hat{\mathsf{G}}^{(N)}\right)_n^{(N)} = O\left(M^{-Nn}\right),\quad \left(\hat{\mathsf{B}}^{(N)}\right)_{n-1}^{(N)} = O\left(M^{-Nn}\right),$$

a tedy operátor (3.422) má skutečně strukturu

$$\hat{\mathsf{H}}^{(N+1)} = \beta Mc^2 + \hat{\mathsf{G}}^{(N+1)} + \hat{\mathsf{U}}^{(N+1)},$$

$$\hat{\mathsf{G}}^{(N+1)} = O\left(M^0\right), \quad \hat{\mathsf{U}}^{(N+1)} = O\left(M^{-N-1}\right).$$

Z uvedeného je již nasnadě algoritmus konstrukce transformovaného hamiltoniánu, který můžeme schematicky znázornit jako

$$\hat{\mathsf{H}} \equiv \hat{\mathsf{H}}^{(0)} \underset{\hat{\mathsf{S}}^{(0)}}{\longrightarrow} \hat{\mathsf{H}}^{(1)} \underset{\hat{\mathsf{S}}^{(1)}}{\longrightarrow} \cdots \underset{\hat{\mathsf{S}}^{(N-1)}}{\longrightarrow} \hat{\mathsf{H}}^{(N)} = \beta Mc^2 + \hat{\mathsf{G}}^{(N)} + O\left(M^{-N}\right). \tag{3.424}$$

Z předchozího je také zřejmé, že příspěvky N-tého řádu od lichých členů jsou srovnatelné s příspěvky $(N+1)$-ho řádu od členů sudých. Tedy jestliže ve výsledném operátoru (3.424) zanedbáme liché operátory N-tého řádu, potom je naprosto zbytečné v něm ponechat sudé operátory řádu vyššího než N-tého. Z téhož důvodu je také naprosto zbytečné ponechávat ve všech předcházejících krocích jakýkoliv operátor řádu vyššího než N-tého, tj. ve všech výrazech typu (3.422) se stačí omezit na konečný počet členů.

Pro ilustraci uvažujme případ $N = 3$:
Z relací (3.405) dostáváme

$$\hat{\beta}_1^{(N)} = -2\hat{\mathsf{U}}^{(N)}, \quad \hat{\beta}_2^{(N)} = -4\beta\left(\hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right)^2,$$

$$\hat{\beta}_3^{(N)} = 8\left(\hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right)^3, \quad \hat{\beta}_4^{(N)} = 16\beta\left(\hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right)^4,$$

$$\left(\hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right)_1^{(N)} = 2\beta\left(\hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right)^2, \quad \left(\hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right)_2^{(N)} = -4\left(\hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right)^3,$$

$$\left(\hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right)_3^{(N)} = \beta\left(\hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right)^4,$$

$$\left(\hat{\mathsf{G}}^{(N)}\right)_1^{(N)} = \beta\left[\hat{\mathsf{U}}^{(N)}, \hat{\mathsf{G}}^{(N)}\right], \quad \left(\hat{\mathsf{G}}^{(N)}\right)_2^{(N)} = -\left[\hat{\mathsf{U}}^{(N)}, \left[\hat{\mathsf{U}}^{(N)}, \hat{\mathsf{G}}^{(N)}\right]\right],$$

$$\left(\hat{\mathsf{B}}^{(N)}\right)_1^{(N)} = \left[\hat{\mathsf{C}}^{(N)}, \hat{\mathsf{U}}^{(N)}\right].$$

Tedy v uvažované aproximaci

$$\hat{\mathsf{H}}^{(1)} = \beta Mc^2 + \hat{\mathsf{G}}^{(1)} + \hat{\mathsf{U}}^{(1)}, \tag{3.425}$$

kde

$$\hat{\mathsf{G}}^{(1)} = \hat{\mathsf{G}} + \frac{1}{2Mc^2}\beta\hat{\mathsf{U}}^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{Mc^2}\right)^2 \left[\hat{\mathsf{U}}, \left(i\hbar\hat{\mathsf{C}} + \left[\hat{\mathsf{U}}, \hat{\mathsf{G}}\right]\right)\right] - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{Mc^2}\right)^3 \beta\hat{\mathsf{U}}^4, \tag{3.426}$$

$$\hat{\mathsf{U}}^{(1)} = \frac{1}{2Mc^2}\beta\left(i\hbar\hat{\mathsf{C}} + \left[\hat{\mathsf{U}}, \hat{\mathsf{G}}\right]\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{Mc^2}\right)^2 \hat{\mathsf{U}}^3,$$

$$\hat{\mathsf{H}}^{(2)} = \beta Mc^2 + \hat{\mathsf{G}}^{(2)}, \tag{3.427}$$

kde

$$\hat{\mathsf{G}}^{(2)} = \hat{\mathsf{G}}^{(1)} - \left(\frac{1}{2Mc^2}\right)^3 \beta\left(i\hbar\hat{\mathsf{C}} + \left[\hat{\mathsf{U}}, \hat{\mathsf{G}}\right]\right)^2. \tag{3.428}$$

Rovnice (3.391) pro diracovskou částici v elektromagnetickém poli představuje speciální případ rovnice (3.402),(3.403), v níž

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{G}} &\equiv e\varphi(x), \\ \hat{\mathsf{U}} &\equiv \left(c\hat{\boldsymbol{P}} - e\boldsymbol{A}(x)\right)\cdot\boldsymbol{\alpha}, \end{aligned} \tag{3.429}$$

a tedy

$$\hat{\mathsf{C}} = -e\dot{\boldsymbol{A}}(x)\cdot\boldsymbol{\alpha}. \tag{3.430}$$

Po jednoduchých úpravách odtud nalezneme, že v uvažovaném případě je

$$\hat{\mathsf{U}}^2 = \left(c\hat{\boldsymbol{P}} - e\boldsymbol{A}\right)^2 - e\hbar c\,\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{B}, \tag{3.431}$$

$$i\hbar\hat{\mathsf{C}} + \left[\hat{\mathsf{U}}, \hat{\mathsf{G}}\right] = ie\hbar c\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\alpha}, \tag{3.432}$$

$$\left[\hat{\mathsf{U}}, \left(i\hbar\hat{\mathsf{C}} + \left[\hat{\mathsf{U}}, \hat{\mathsf{G}}\right]\right)\right] = 2e\hbar c^2\,\boldsymbol{\Sigma}\cdot\left(\left[\boldsymbol{E}\times\left(\hat{\boldsymbol{P}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right] + \frac{i}{2}\mathrm{rot}\boldsymbol{E}\right), \tag{3.433}$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathsf{G}}^{(2)} \quad = \quad & e\varphi + \beta \left\{ \frac{\left(\hat{\boldsymbol{P}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2M} - \frac{\left|\hat{\boldsymbol{P}}\right|^4}{8M^3c^2} \right\} - \mu\beta\, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{B} \\
& - \frac{\mu}{2Mc} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \left(\left[\boldsymbol{E} \times \hat{\boldsymbol{P}} \right] + \frac{i}{2} \mathrm{rot} \boldsymbol{E} \right) \qquad (3.434) \\
& - \frac{e}{8} \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \mathrm{div} \boldsymbol{E} + O\left(\frac{e}{M^3}, \left(\frac{e}{M} \right)^2 \right),
\end{aligned}
$$

kde magneton μ je definován formulí (3.399). Pro nepříliš silná pole nejsou příspěvky od členů úměrných $\frac{e}{M^3}$, či $\left(\frac{e}{M}\right)^2$ o nic významnější než příspěvky od členů, které jsme zanedbali již ve formuli (3.427), a proto zde jejich explicitní tvar ani neuvádíme.

Na základě Foldy-Wouthuysenovy transformace tak docházíme k závěru, že až na příspěvky řádu $O(c^n M^{-m})$; kde $n + m \geq 4$ je Diracova rovnice (3.390) fyzikálně ekvivalentní Pauliho rovnici

$$
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x) = \hat{\mathsf{H}}_P \Phi(x), \tag{3.435}
$$

pro *dvoukomponentovou* funkci $\Phi\,(x)$, s hamiltoniánem

$$
\hat{\mathsf{H}}_P \equiv Mc^2 + \frac{\left(\hat{\boldsymbol{P}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2M} - \frac{\left|\hat{\boldsymbol{P}}\right|^4}{8M^3c^2} + V_0 - \mu\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} + \hat{\mathsf{V}}_{SL} + V_D, \tag{3.436}
$$

kde magnetický moment μ je dán formulí (3.399) a

$$
V_0 \equiv e\varphi, \tag{3.437}
$$

$$
\hat{\mathsf{V}}_{SL} \equiv -\frac{\mu}{2Mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\left[\boldsymbol{E} \times \hat{\boldsymbol{P}} \right] + \frac{i}{2} \hbar\, \mathrm{rot} \boldsymbol{E} \right), \tag{3.438}
$$

$$
V_D \equiv -\frac{e}{8} \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \mathrm{div} \boldsymbol{E}. \tag{3.439}
$$

Obdržený výsledek dovoluje jednoduchou fyzikální interpretaci: První tři členy na pravé straně formule (3.436) nejsou ničím jiným než (v uvažované aproximaci vyjádřený) operátor kinetické a klidové energie

$$c\sqrt{(Mc)^2 + \left(\hat{\boldsymbol{P}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}, \tag{3.440}$$

další dva členy odpovídají potenciální energii náboje příslušné částice v elektrickém poli, resp. jejího vlastního magnetického momentu v poli magnetickém.
Operátor $\hat{V}_{SL}$ popisuje *spin-orbitální interakci:*[91]
V případě elektrostatického pole je

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$$

a intenzitu elektrického pole lze vždy vyjádřit jako

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi.$$

Tedy v tomto případě je operátor

$$\hat{V}_{SL} = \frac{\mu}{Mc}\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left[\boldsymbol{\nabla}\varphi\times\hat{\boldsymbol{P}}\right] \tag{3.441}$$

skutečně totožný s operátorem spin-orbitální interakce zavedeným v předcházející kapitole formulí (2.80). Jestliže uvažované pole je sféricky symetrické, můžeme ho zapsat ve tvaru (2.81), tj.

$$\hat{V}_{SL} = \frac{\hbar\mu}{2Mc}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}} = \left(\frac{\hbar}{2Mc}\right)^2\frac{1}{r}\frac{dV_0}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}. \tag{3.442}$$

Právě s tímto operátorem jsme se již setkali v [1], kde jsme také poznali jak významnou úlohu hraje např. v atomové spektroskopii.[92]

Konečně, tzv. *Darwinův člen* V_D se obvykle interpretuje jako odraz existence tzv. "třaslavého pohybu".[93]

[91]Nepřehlédněme, že v obecném případě žádný ze dvou členů vystupujících na pravé straně formule (3.438) sám o sobě nemusí představovat samosdružený operátor, jejich součet však samosdruženým je.

[92]Spin-orbitální interakce hraje důležitou roli i v spektroskopii jaderné, její důsledky jsou tam však v jistém smyslu opačné než ve spektroskopii atomové. Proč tomu tak je, čtenář snadno pochopí na základě výsledku úlohy U.3.40.

[93]Máme na mysli tzv. Zitterbewegung – blíže viz úlohu U.3.30.

V dalším uvidíme, že proměnnou $\boldsymbol{x}$ lze ztotožnit s operátorem polohy studované částice pouze s přesností nepřevyšující její Comptonovu vlnovou délku. Pokud bychom se pokusili udržet tuto interpretaci s přesností vyšší, byli bychom nuceni se mj. smířit s tím, že přes přirozeně očekávaný časový vývoj polohy studované částice se překrývá velice rychlý třaslavý pohyb, představující kmity s amplitudou srovnatelnou s Comptonovou vlnovou délkou a frekvencí alespoň $2Mc^2/\hbar$. Jestliže však $\boldsymbol{x}$ určuje polohu částice pouze s přesností srovnatelnou s Comptonovou vlnovou délkou, potom "potenciální energie", kterou částice v elektrostatickém poli "cítí", není $V_0(\boldsymbol{x})$, ale $\langle V_0(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})\rangle$, kde závorka symbolizuje ustřednění přes odchylky $\delta\boldsymbol{x}$ "skutečné polohy" od místa $\boldsymbol{x}$. Uvážíme-li ještě izotropii prostoru, docházíme k závěru, že by mělo platit

$$\langle\delta\boldsymbol{x}\rangle = 0,$$

$$\langle\delta\boldsymbol{x}_j\delta\boldsymbol{x}_k\rangle = \frac{1}{3}\delta_{jk}\left\langle\delta\boldsymbol{x}^2\right\rangle \simeq \frac{1}{3}\delta_{jk}\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2,$$

a tedy

$$\langle V_0(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})\rangle \simeq V_0(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\triangle V_0(\boldsymbol{x})\,\frac{1}{3}\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2,$$

ale

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2\triangle V_0 = \frac{e}{6}\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2\mathrm{div}\boldsymbol{\nabla}\varphi = -\frac{e}{6}\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2\mathrm{div}\boldsymbol{E}. \qquad (3.443)$$

Tedy tato oprava má skutečně strukturu Darwinova členu; odlišnost faktorem $\frac{8}{6}$ lze jistě přičíst na vrub hrubosti započtení neurčitosti v interpretaci "operátoru polohy".
V případě ryze coulombického pole, kdy

$$V_0 = -Z\alpha\hbar c/r,$$

je Darwinův člen

$$V_D = \frac{Z}{8}\left(\frac{e\hbar}{Mc}\right)^2\delta(\boldsymbol{x}).$$

Považujeme-li ho za poruchu k nerelativistickému hamiltoniánu, bude přispívat pouze k energii těch stavů, jejichž vlnová funkce v počátku nevymizí. V nerelativistickém případě jsme nalezli, že pro radiální část vlnové funkce částice vázané coulombickým polem platí[94]

$$R_{nl}(r=0) = \frac{2}{\sqrt{(na)^3}}\,\delta_{l0}\,,$$

kde Bohrův poloměr

$$a = \frac{\hbar}{Z\alpha Mc}\,.$$

Odtud již snadno nalezneme, že v uvažovaném případě by díky Darwinovu členu mělo dojít k posuvu energetických hladin pouze u s-stavů, a to o[95]

$$\triangle_D E_{n,l=0} = Mc^2\,\frac{(Z\alpha^4)}{2n^3}\,. \tag{3.444}$$

3.2.2 Stacionární stavy částice ve vnějším elektromagnetickém poli

V případě časově nezávislého čtyřpotenciálu se v rovnici (3.391) separuje časová proměnná od prostorových. Její řešení proto můžeme hledat ve tvaru

$$\psi_E(x) = \psi_E(\boldsymbol{x})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right), \tag{3.445}$$

kde $\psi_E(\boldsymbol{x})$ je řešením rovnice

$$\hat{\mathsf{H}}\psi_E(\boldsymbol{x}) = E\psi_E(\boldsymbol{x})\,, \tag{3.446}$$

kde

$$\hat{\mathsf{H}} \equiv \left(c\hat{\boldsymbol{P}} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\right)\cdot\boldsymbol{\alpha} + \beta Mc^2 + e\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{3.447}$$

je hamiltonián diracovské částice ve vnějším statickém elektromagnetickém poli.

---

[94] Viz úlohu 54 ke 2. kapitole v [1].

[95] Ve skutečnosti kombinace tohoto příspěvku s příspěvkem od spin-orbitální interakce vede v tomto případě k velice prostému závěru, že totiž formule (2.85) (kterou jsme odvodili po započtení vlivu spin-orbitální interakce ve tvaru (2.83), který má dobrý smysl pouze pro $l \neq 0$) platí i pro $l = 0$. Nejsnáze se o tom čtenář může přesvědčit porovnáním výsledku poruchového počtu (2.85) s níže uvedeným rozvojem (3.501) analytického řešení (3.499).

Jestliže k popisu tohoto pole stačí skalární potenciál a jestliže ten je navíc invariantní vůči rotacím, odpovídající hamiltonián

$$\hat{\mathsf{H}} = c\,\hat{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta M c^2 + V(r)\,, \tag{3.448}$$

v němž jsme označili[96]

$$e\varphi(r) \equiv V(r)\,, \tag{3.449}$$

je invariantní jak vůči rotacím, tak vůči prostorové inverzi, tj. platí

$$\left[\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = \left[\hat{\mathsf{P}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = 0, \tag{3.450}$$

kde $\hat{\mathsf{P}}$ je operátor parity definovaný formulí (3.189).

V tomto případě tedy můžeme hledat společné vlastní vektory operátorů $\hat{\mathsf{H}}, \hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{\mathsf{J}}_3, \hat{\mathsf{P}}$. Z formule (3.193) víme, že v Diracově reprezentaci bispinor popisující takovýto vlastní vektor příslušný k vlastním hodnotám E, $j(j+1)$, m, $\eta_P\,(-1)^l$ musí mít tvar[97]

$$\psi_{Ejml}(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{pmatrix} R_1(r)\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \\ R_2(r)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}}\,\varphi_{jm}^{(\pm)}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \end{pmatrix}, \tag{3.451}$$

kde

$$l = j \mp \frac{1}{2}\,. \tag{3.452}$$

Z požadavku

$$\hat{\mathsf{H}}\psi_{Ejml}(\boldsymbol{x}) = E\,\psi_{Ejml}(\boldsymbol{x}) \tag{3.453}$$

pak dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \left[\left(Mc^2 - E + V\right) R_1 + c\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}})\,R_2\right]\varphi_{jm}^{(\pm)} &= 0, \\ \left[\left(Mc^2 + E - V\right) R_2\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}}) - c\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right) R_1\right]\varphi_{jm}^{(\pm)} &= 0. \end{aligned} \tag{3.454}$$

[96] Níže nalezené výsledky samozřejmě platí nezávisle na tom, zda vnější pole, jehož vliv na uvažovanou diracovskou částici lze popsat "potenciální energií" $V(r)$, je skutečně elektrostatickým.

[97] V dalším, v zájmu odlehčení grafického tvaru zápisu, v mnoha výrazech užíváme zjednodušenou symboliku. Tak např. explicite nevyznačujeme to, že funkce $R_1(r)\,, R_2(r)$ závisejí na hodnotách E, j, l, ap.

Přitom z formulí (3.228),(3.184) již víme, že

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right)R(r)\varphi_{jm}^{(\pm)} = -i\hbar\left[\left(1+\kappa_j^{(\pm)}\right)\frac{1}{r}R+R'\right](\boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}})\,\varphi_{jm}^{(\pm)}, \qquad (3.455)$$

kde

$$\kappa_j^{(\pm)} \equiv \mp\left(j+\frac{1}{2}\right).$$

Podobně z relace (3.183)

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right)\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n}) = -\left(1+\kappa_j^{(\pm)}\right)\varphi_{jm}^{(\pm)}(\boldsymbol{n})$$

a z identity (srov. formuli (3.227))

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}}) = -i\hbar\frac{1}{r}\left[\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right)+2+r\frac{\partial}{\partial r}\right] \qquad (3.456)$$

dostaneme

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}})\,R\,\varphi_{jm}^{(\pm)} = -i\hbar\left[\left(1-\kappa_j^{(\pm)}\right)\frac{1}{r}R+R'\right]\varphi_{jm}^{(\pm)}. \qquad (3.457)$$

Díky relacím (3.455),(3.457) vidíme, že požadavek (3.454) je splněn právě tehdy, když funkce $R_{1,2}$ vyhovují následující soustavě obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\begin{aligned} i\hbar c\left[R_2'+\left(1-\kappa_j^{(\pm)}\right)\frac{1}{r}R_2\right] &= \left(V+Mc^2-E\right)R_1\,,\\ i\hbar c\left[R_1'+\left(1+\kappa_j^{(\pm)}\right)\frac{1}{r}R_1\right] &= \left(V-Mc^2-E\right)R_2\,, \end{aligned} \qquad (3.458)$$

které se častěji zapisují v termínech funkcí

$$\begin{aligned} G_{j,l}(r) &\equiv rR_1(r)\,,\\ F_{j,l}(r) &\equiv -irR_2(r) \end{aligned} \qquad (3.459)$$

jako

$$\begin{aligned} F_{j,l}'-\kappa_j^{(\pm)}\frac{1}{r}F_{j,l} &= -\frac{1}{\hbar c}\left(Mc^2-E+V\right)G_{j,l}\,,\\ G_{j,l}'+\kappa_j^{(\pm)}\frac{1}{r}G_{j,l} &= -\frac{1}{\hbar c}\left(Mc^2+E-V\right)F_{j,l}\,, \end{aligned} \qquad (3.460)$$

případně funkcí[98]

$$W_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{Mc^2+E}}\,G_{j,l}\,,$$
$$W_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{Mc^2-E}}\,F_{j,l} \qquad (3.461)$$

jako[99]

$$W_2' - \kappa\frac{1}{r}W_2 = -\left(\xi + \frac{Mc^2+E}{\hbar^2c^2\xi}V\right)W_1\,,$$
$$W_1' + \kappa\frac{1}{r}W_1 = -\left(\xi - \frac{Mc^2-E}{\hbar^2c^2\xi}V\right)W_2\,, \qquad (3.462)$$

kde

$$\xi \equiv \frac{1}{\hbar c}\sqrt{M^2c^4-E^2}\,. \qquad (3.463)$$

Vázané stavy v coulombickém poli

V případě "potenciální energie"

$$V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}\hbar c, \qquad Z\alpha > 0 \qquad (3.464)$$

má soustava rovnic (3.462) tvar[100]

$$W_2' - \kappa\frac{1}{r}W_2 + \xi W_1 - \frac{Mc^2+E}{\hbar c\xi}\frac{Z\alpha}{r}W_1 = 0,$$
$$W_1' + \kappa\frac{1}{r}W_1 + \xi W_2 + \frac{Mc^2-E}{\hbar c\xi}\frac{Z\alpha}{r}W_2 = 0. \qquad (3.465)$$

[98] Čtenář se snadno může přesvědčit, že pokud hodnota energie je blízká Mc^2 a pole není příliš silné, potom jsou dolní komponenty bispinoru ψ_{Ejml} "potlačeny" vůči horním obdobným faktorem jako v případě částice volné. Tedy, zatímco funkce $F_{j,l}$ je v tomto smyslu vůči $G_{j,l}$ malou, obě funkce $W_{1,2}$ jsou srovnatelné (viz relaci (3.233)).

[99] Symbol κ (který většinou rezervujeme pro převrácenou hodnotu Comptonovy vlnové délky) v následujících formulích představuje zkrácený výraz pro veličinu $\kappa_j^{(\pm)}$.

[100] Pro porovnání s řešením obdobné úlohy v nerelativistické kvantové mechanice, či v rámci algoritmu vycházejícího z Klein-Gordonovy rovnice je dobře si uvědomit, že parametr ξ, se kterým zde pracujeme, se od parametru β, definovaného formulí (2.48), liší pouze faktorem $\frac{1}{2}$.

V asymptotické oblasti $r \to \infty$ se tyto rovnice (3.462) redukují na

$$\begin{aligned} W_2' &= -\xi W_1, \\ W_1' &= -\xi W_2, \end{aligned} \tag{3.466}$$

a tedy musí platit

$$W_{1,2}'' = \xi^2 W_{1,2}, \tag{3.467}$$

odkud vidíme, že obecné řešení posledních rovnic představuje lineární kombinaci funkcí $\exp(\pm\xi r)$, a tedy chování normalizovatelných řešení rovnic (3.465) daleko od počátku musí být dominováno faktorem $\exp(-\xi r)$.

Na druhé straně pro $r \to 0$ se rovnice (3.465) zredukují na

$$\begin{aligned} W_2' - \kappa \frac{1}{r} W_2 - \frac{Mc^2 + E}{\hbar c \xi} \frac{Z\alpha}{r} W_1 &= 0, \\ W_1' + \kappa \frac{1}{r} W_1 + \frac{Mc^2 - E}{\hbar c \xi} \frac{Z\alpha}{r} W_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.468}$$

Hledáme-li řešení této soustavy diferenciálních rovnic ve tvaru

$$W_i = a_i r^\gamma, \tag{3.469}$$

obdržíme algebraické rovnice

$$\begin{aligned} (\kappa - \gamma)\, a_2 + \frac{Mc^2 + E}{\hbar c \xi} Z\alpha a_1 &= 0, \\ (\kappa + \gamma)\, a_1 + \frac{Mc^2 - E}{\hbar c \xi} Z\alpha a_2 &= 0, \end{aligned} \tag{3.470}$$

které jsou řešitelné právě tehdy, když vymizí odpovídající determinant soustavy, tj. když je

$$\gamma^2 = \kappa^2 - (Z\alpha)^2 . \tag{3.471}$$

Z definice (3.184), víme, že

$$|\kappa| = j + \frac{1}{2} \geq 1, \tag{3.472}$$

a tedy pro

$$Z\alpha < 1 \tag{3.473}$$

představuje

$$\gamma \equiv \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} = j + \frac{1}{2} + O\Big((Z\alpha)^2\Big) \tag{3.474}$$

reálné kladné číslo, což zaručuje kvadratickou integrovatelnost funkcí (3.469) v okolí počátku.

Právě nalezené výsledky jako obvykle zúročíme tím, že normalizovatelná řešení soustavy rovnic (3.465) budeme hledat ve tvaru[101]

$$W_i(r) = \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) \rho^\gamma U_i(\rho)\,, \tag{3.475}$$

kde jsme zavedli bezrozměrnou proměnnou

$$\rho \equiv 2\xi r. \tag{3.476}$$

Funkce U_i pak musí vyhovovat rovnicím

$$\begin{aligned} \rho U_2' + \left(\gamma - \kappa - \frac{\rho}{2}\right) U_2 + \frac{\rho}{2} U_1 - Z\alpha \frac{Mc^2 + E}{\hbar c \xi} U_1 &= 0, \\ \rho U_1' + \left(\gamma + \kappa - \frac{\rho}{2}\right) U_1 + \frac{\rho}{2} U_2 + Z\alpha \frac{Mc^2 - E}{\hbar c \xi} U_2 &= 0, \end{aligned} \tag{3.477}$$

které po zavedení

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv U_1 + U_2, \\ Q_2 &\equiv U_1 - U_2, \end{aligned} \tag{3.478}$$

můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$\rho Q_1' + \left(\gamma - Z\alpha \frac{E}{\hbar c \xi}\right) Q_1 + \left(\kappa - Z\alpha \frac{Mc}{\hbar \xi}\right) Q_2 = 0, \tag{3.479}$$

$$\rho Q_2' + \left(\gamma - \rho + Z\alpha \frac{E}{\hbar c \xi}\right) Q_2 + \left(\kappa + Z\alpha \frac{Mc}{\hbar \xi}\right) Q_1 = 0. \tag{3.480}$$

Dosadíme-li do poslední rovnice Q_2 vyjádřené z rovnice předcházející a za Q_2' výraz obdržený derivací tohoto vztahu, obdržíme pro funkci Q_1

---

[101] Je dobře si uvědomit, že následující postup je zcela anlogický tomu, který jsme využili v [1] (§ 2.4.3.5) při řešení stejné úlohy v rámci nerelativistické kvantové mechaniky.

diferenciální rovnici druhého řádu, kterou s přihlédnutím k definicím (3.474),(3.463) můžeme zapsat jako

$$\rho\, Q_1'' + (1 + 2\gamma - \rho)\, Q_1' + \left(Z\alpha\frac{E}{\hbar c\xi} - \gamma\right) Q_1 = 0. \tag{3.481}$$

S rovnicí tohoto typu jsme se však již setkali při řešení stejné fyzikální úlohy v rámci nerelativistické kvantové mechaniky.[102] Proto pouze připomeňme, že řešením rovnice

$$zw''(z) + (b - z)\, w'(z) - aw\,(z) = 0 \tag{3.482}$$

regulárním v počátku, je degenerovaná hypergeometrická funkce

$$F(a, b; z) \equiv 1 + \frac{a}{b}\frac{z}{1!} + \frac{a\,(a+1)}{b\,(b+1)}\frac{z^2}{2!} + \cdots, \tag{3.483}$$

která se redukuje na polynom n_r-tého řádu, pokud

$$a = -n_r, \tag{3.484}$$

kde n_r je celé nezáporné číslo, kdežto v ostatních případech je

$$F(a, b; z \to \infty) \sim \exp z. \tag{3.485}$$

Z relací, které mezi degenerovanými hypergeometrickými funkcemi platí, připomeňme alespoň[103]

$$z\frac{dF(a, b; z)}{dz} = a\,[F(a+1, b; z) - F(a, b; z)]\,. \tag{3.486}$$

Na základě výše uvedeného víme, že řešením rovnice (3.481) regulárním v počátku, je

$$Q_1 = AF\left(\gamma - \frac{Z\alpha E}{\hbar c\xi}, 2\gamma + 1; \rho\right), \tag{3.487}$$

kde A je normalizační konstanta.

---

[102] Viz rovnici (2.450) v [1].

[103] Blíže viz např. [15].

Z rovnosti (3.479) díky relaci (3.486) ihned vidíme, že

$$\left(\kappa - Z\alpha\frac{Mc}{\hbar\xi}\right) Q_2 = -A\left(\gamma - \frac{Z\alpha E}{\hbar c\xi}\right) F\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha E}{\hbar c\xi}, 2\gamma + 1; \rho\right), \tag{3.488}$$

odkud pro

$$|\kappa| \neq \frac{Z\alpha Mc}{\hbar\xi} \tag{3.489}$$

po jednoduchých úpravách s využitím definicí (3.474),(3.463) dostáváme

$$Q_2 = -A\,\frac{Z\alpha Mc^2 + \hbar c\xi\kappa}{Z\alpha E + \hbar c\xi\gamma}\, F\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha E}{\hbar c\xi}, 2\gamma + 1; \rho\right). \tag{3.490}$$

Na základě definicí (3.474),(3.463) také snadno zjistíme, že zbývající možnost

$$|\kappa| = \frac{Z\alpha Mc}{\hbar\xi} \tag{3.491}$$

nastává právě tehdy, když

$$\gamma = \frac{Z\alpha E}{\hbar c\xi}\,. \tag{3.492}$$

Z formule (3.487) víme, že v tomto případě je

$$Q_1 = A. \tag{3.493}$$

Pro $l = j - \frac{1}{2}$ je $\kappa < 0$, a tedy v uvažovaném případě relace (3.488) vyžaduje, aby

$$Q_2 = 0. \tag{3.494}$$

Pro $l = j + \frac{1}{2}$ je $\kappa > 0$, a tak relaci (3.488) k určení funkce Q_2 tentokrát využít nemůžeme. Na druhé straně se však nyní rovnice (3.480) zjednoduší na

$$\rho\, Q_2' + (2\gamma - \rho)\, Q_2 = -2\kappa A. \tag{3.495}$$

Povšimneme-li si, že jejím zderivováním obdržíme opět rovnici pro degenerované hypergeometrické funkce, potom stačí spočíst hodnotu v počátku výrazu na levé straně poslední formule k tomu, abychom zjistili, že

$$Q_2 = -\frac{\kappa}{\gamma}\, A\, F(1, 2\gamma + 1; \rho)\,. \tag{3.496}$$

Tento výsledek, spolu s formulí (3.494) nám umožňuje tvrdit, že relaci (3.490) lze užít k určení funkce Q_2 pro všechny hodnoty parametru κ.[104]

Z formulí (3.459),(3.475),(3.484),(3.485),(3.487),(3.490) vidíme, že řešení (3.451) je v případě coulombického pole normalizovatelné právě tehdy, když

$$\frac{Z\alpha E}{\hbar c\xi} - \gamma_j^{(\pm)} = n_r\,, \tag{3.497}$$

kde[105]

$$n_r = \begin{cases} 0,1,2,\cdots & \text{pro} \quad l = j - \frac{1}{2} \\ 1,2,\cdots & \text{pro} \quad l = j + \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.498}$$

Po dosazení z definicí (3.463),(3.474),(3.184):

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \frac{1}{\hbar c}\sqrt{M^2c^4 - E^2}\,, \\ \gamma_j^{(\pm)} &\equiv \sqrt{\left(\kappa_j^{(\pm)}\right)^2 - (Z\alpha)^2}\,, \\ \kappa_j^{(\pm)} &\equiv \mp\left(j + \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

snadno rozřešíme tuto implicitní rovnici pro E, a tak obdržíme předpověď pro energetické spektrum vázaných stavů diracovské částice v coulombickém poli:

$$E_{nj} = Mc^2\left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - \left(j+\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.499}$$

kde celé kladné číslo[106]

$$n \equiv n_r + j + \frac{1}{2}\,. \tag{3.500}$$

[104]Alternativně jsme ke stejnému výsledku mohli dospět např. tak, že bychom v analogii s odvozením rovnice (3.481) dospěli k rovnici pro degenerovanou hypergeometrickou funkci, které musí vyhovovat funkce Q_2. Odtud bychom zjistili, že $Q_2 = BF\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha E}{\hbar c\xi}, 2\gamma + 1; \rho\right)$. Vztah mezi koeficienty A, B bychom pak obdrželi vyčíslením levé strany rovnice (3.480).

[105]Nesmíme zapomenout, že pro $n_r = 0$ degenerovaná hypergeometrická funkce vystupující ve formuli (3.490) sice v asymptotické oblasti exponencielně roste, ale koeficient ji násobící je v případě $l = j - \frac{1}{2}$ roven nule.

[106]Z formule (3.501) je zřejmé, že takto definovaná veličina n není ničím jiným než hlavním kvantovým číslem.

Rozvineme-li nalezený výsledek podle mocnin $Z\alpha$, dostaneme pro vazbové energie vzorec

$$Mc^2 - E_{nj} = Mc^2 \left[(Z\alpha)^2 \frac{1}{2n^2} + (Z\alpha)^4 \frac{1}{2n^3} \left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) + O\left((Z\alpha)^6\right) \right]. \tag{3.501}$$

Porovnáním s formulí (2.85) vidíme, že až (případně) na členy řádu $(Z\alpha)^6$ je obdržené spektrum shodné s předpovědí získanou poruchovým započtením relativistických oprav, ovšem za předpokladu, že magnetický moment studované částice je roven odpovídajícímu magnetonu[107]. V případě vodíkového atomu se při zanedbání členů řádu $(Z\alpha)^6$ pravá strana formule (3.501) neliší od předpovědi (3.499) o více než $\sim 10^{-8}$eV.

Již v předcházející kapitole jsme uvedli, že předpověď (3.501) je v pozoruhodném souhlasu s experimentem. Přesněji bychom mohli tento výrok formulovat např. jako tvrzení, že pokud rozlišovací schopnost při měření energetického spektra vodíkového atomu nepřesáhne 10^{-4}eV, nezjistíme žádnou odchylku experimentálních dat od předpovědi (3.499).[108] Tento soulad však nepřežije zlepšení rozlišovací schopnosti o další dva řády. Jako fyzici jsme pochopitelně předem věděli, že předpověď (3.499) nemůže být absolutně přesnou. Jsme si totiž vědomi toho, že model, v jehož rámci jsme se pokusili spočíst spektrum vodíkového atomu, představuje idealizaci, která vědomě zanedbává celou řadu skutečností. Pro detailní porovnání s expetimentálními daty je proto nezbytné alespoň dodatečně započíst korekce s tím související. Podrobněji se s touto problematikou čtenář může seznámit např. v klasické monografii [16]. Zde se omezíme pouze na několik stručných poznámek: V modelu, který nás přivedl k předpovědi (3.499), jsme mj. vědomě zanedbali fakt, že proton není bodovou částicí, stejně jako fakt, že proton má vedle náboje také vlastní magnetický moment. V rámci poruchové teorie dokážeme snadno započíst vliv obou těchto skutečností na energetické spektrum. V úloze U.3.41. je ukázáno, že díky nenulovosti magnetického momentu protonu očekáváme energetické korekce, které u nejnižších hladin před-

[107] O tom, že zde užitý algoritmus předpovídá velikost magnetického momentu diracovské částice rovnou příslušnému magnetonu, jsme se již přesvědčili dříve – srov. text následující za formulí (3.399).

[108] Zde mlčky předpokládáme, že jsme zohlednili konečnost hmoty jádra tím, že pod M je třeba rozumět příslušnou redukovanou hmotu.

stavují opravu řádu 10^{-6}eV. Opravy na nenulový poloměr protonu vedou ke korekcím ještě o tři řády menším.[109] Závažnější ovšem je, že i po započtení těchto korekcí jsou předpovědi na úrovni 10^{-6}eV v *rozporu* s experimentálními daty: Již v polovině našeho století W.E.Lamb se svými spolupracovníky nade vší pochybnost prokázal, že hladina $2S_{\frac{1}{2}}$ je o $\sim 4.3 \cdot 10^{-6}$eV výše než hladina $2P_{\frac{1}{2}}$. Tento *Lambův posuv*, který je o řád větší než opravy kterékoliv z hladin jemné struktury (tj.energii odpovídající stavu se zadanými hodnotami n a j) odpovídající hlavnímu kvantovému číslu $n = 2$, odráží dynamiku, kterou nelze vystihnout v rámci kvantové *mechaniky* dvoučásticové soustavy elektron plus jádro. Lze ho však přirozeně (a kvantitativně správně) vysvětlit, jestliže jako součást studovaného fyzikálního systému zahrneme i elektromagnetické pole. Úspěšný výpočet Lambova posuvu opírající se o kvantovou teorii elektromagnetického pole se stal jedním z nejpádnějších argumentů ve prospěch kvantové teorie *pole*.

3.2.3 Poloha

Téměř vše, k čemu jsme dosud dospěli, nás mohlo utvrzovat v přesvědčení, že naznačený algoritmus vycházející z Diracovy rovnice může představovat vnitřně konzistentní fyzikální teorii – relativistickou kvantovou mechaniku jedné částice. Pouze formule (3.499) by snad mohla být signálem, že přece jen všechno v pořádku není. Pro velice silná pole, kdy je

$$Z\alpha > 1, \tag{3.502}$$

přímočará aplikace tohoto algoritmu totiž přivedla k předpovědi komplexních hodnot energetických hladin. Samozřejmě bychom se tuto nepříjemnost mohli pokusit obejít způsobem naznačeným za formulí (2.88), brzy bychom však zjistili, že zde narážíme na důsledek problému hlubšího, kterého se tak lacino zbavit nelze.

Vraťme se proto k postřehu, že pro tak silná pole by Bohrův poloměr (2.71) byl menší než comptonovská vlnová délka příslušné diracovské

[109] Čtenář jistě sám snadno dospěje k závěru, že nenulový poloměr protonu ovlivní hlavně s-stavy (pouze jejich vlnová funkce je v počátku nenulová!) a že pro ně musí odpovídající korekce být úměrná poměru "kvadrátu poloměru" protonu ku kvadrátu Bohrova poloměru.

částice. Nenarazili jsme zde snad na problém *lokalizovatelnosti* této částice? Abychom mohli odpovědět na tuto otázku, musíme se nejprve blíže podívat, jakým způsobem jsme s polohou diracovské částice dosud zacházeli: Naše úvahy vycházely z představy, že bispinor $\psi(x^0, \boldsymbol{x})$ představuje (z hlediska zvolené souřadné soustavy) vlnovou funkci popisující v x-reprezentaci ten stav diracovské částice, ve kterém se nachází v okamžiku $t = x^0/c$. Proto jsme mj. s naprostou samozřejmostí chápali násobení nezávislou proměnnou $\boldsymbol{x}$ jako realizaci operátoru polohy v této reprezentaci. Pokud však tuto interpretaci přijmeme, potom by operátor rychlosti diracovské částice měl být dán výrazem

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{i\hbar}\left[\boldsymbol{x}, \hat{\mathsf{H}}\right], \tag{3.503}$$

kde "hamiltonián" $\hat{\mathsf{H}}$ je dán formulí (3.196), a tedy

$$\hat{\boldsymbol{v}} = c\,\boldsymbol{\alpha}. \tag{3.504}$$

Vlastní hodnoty každé z matic α_j jsou ± 1. Podle poslední relace by tedy měření projekce rychlosti diracovské částice do jakéhokoliv směru nemohlo vést k jiné hodnotě než $\pm c$!! To je evidentně v příkrém rozporu se skutečností.

Jak je tedy možné, že diskutovaný algoritmus mohl vést k dříve uvedeným (a mnoha dalším) výsledkům, které jsou v pozoruhodném souhlasu s experimentálními daty? Trochu světla sem můžeme vnést, když zjistíme, jakou střední hodnotu rychlosti tento operátor předpovídá pro částici s daným impulsem a helicitou. Postupem analogickým tomu, který jsme aplikovali při výpočtu výrazu (3.388), dostáváme

$$\frac{u^{\dagger}(\boldsymbol{p},\lambda)\,\hat{\boldsymbol{v}}u(\boldsymbol{p},\lambda)}{u^{\dagger}(\boldsymbol{p},\lambda)\,u(\boldsymbol{p},\lambda)} = \frac{c\,\mathrm{Sp}\boldsymbol{\alpha}u(\boldsymbol{p},\lambda)\,u^{\dagger}(\boldsymbol{p},\lambda)}{2E} \tag{3.505}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c^2}{4E}\,\mathrm{Sp}\boldsymbol{\gamma}\,(\not{p} + Mc)\,(1 + 2\lambda\boldsymbol{\Sigma}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}}) \\ &= \frac{c^2}{4E}\,\mathrm{Sp}\boldsymbol{\gamma}\not{p}\,(1 + 2\lambda\boldsymbol{\Sigma}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}}) = -\frac{c^2}{4E}\,\mathrm{Sp}\boldsymbol{\gamma}\,(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}) \\ &= \frac{c^2}{E}\,\boldsymbol{p}, \end{aligned} \tag{3.506}$$

kde jsme postupně využívali invarianci stopy vůči cyklické permutaci faktorů, nulovosti stopy ze součinu lichého počtu γ-matic a faktu, že součin čtyř γ-matic může být nenulový jedině tehdy, když tyto čtyři matice lze rozdělit do dvou stejných dvojic γ-matic.

Nalezená střední hodnota odpovídá rychlosti, kterou podle teorie relativity má částice s impulsem $\boldsymbol{p}$. Čtenář se snadno přesvědčí, že tento výsledek má obecnější platnost.[110] Tedy paradoxní předpověď, podle níž by výsledkem měření velikosti rychlosti diracovské částice musela být vždy rychlost světla, je přímým důsledkem toho, že operátor (3.504) není operátorem na Hilbertově prostoru této částice, tj. prostoru tvořeném superpozicemi vlastních vektorů operátoru $\hat{\mathrm{H}}$, příslušných výhradně ke kladným frekvencím.[111] Jinými slovy řečeno, operátor (3.504) mezi sebou "míchá" řešení s kladnými a zápornými frekvencemi.[112] Vzhledem k tomu, že sám operátor $\hat{\mathrm{H}}$ nic takového neprovádí, musí tuto nepříjemnou vlastnost mít "operátor polohy" vystupující v komutační relaci (3.503).

O tom, že násobení nezávislou proměnnou $\boldsymbol{x}$ nemůže představovat operátor polohy diracovské částice, se můžeme přesvědčit i jiným způsobem: Připomeňme ještě jednou,[113] že jsme vyšli z toho, že za úplnou množinu pozorovatelných diracovské částice lze zvolit její polohu $\boldsymbol{X}$ doplněnou další pozorovatelnou A.[114] a-tou komponentu bispinoru $\psi(x)$ jsme pak identifikovali jako

$$\langle \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}, A = a \mid \psi\big(t = x^0/c\big) \rangle , \tag{3.507}$$

kde ket $|\psi(t)\rangle$ odpovídá stavu, ve kterém se studovaná částice nachází v okamžiku t, a ket $|\boldsymbol{X} = \boldsymbol{y}, A = a\rangle$ reprezentuje ten "stav", kdy částice je lokalizována v místě $\boldsymbol{y}$ a pozorovatelná A má hodnotu a. Jeho

---

[110] Viz úloha U.3.43.

[111] Nepřehlédněme ani to, že operátor "rychlosti" (3.504) nekomutuje s operátorem $\hat{\mathrm{H}}$. Právě díky tomu bispinory přiřazené diracovské částici s daným impulsem *nejsou* vlastními vektory operátoru "rychlosti" (přestože tento operátor komutuje s operátorem $\hat{\boldsymbol{P}}$, definovaným formulí (2.4)).

[112] To znamená, že Hilbertův prostor diracovské částice není invariantním podprostorem operátoru (3.504), chápaného jako operátor definovaný na prostoru všech bispinorů.

[113] Viz text před formulí (3.11).

[114] Její vlastní hodnoty jsou (ex definitione) dány čísly $1, 2, 3, 4$. Nepřehlédněme však, že i kdyby tato "pozorovatelná" měla fyzikální význam, to, o jakou dynamickou proměnnou by se jednalo, by záviselo na zvolené realizaci Diracovy algebry.

normalizace je fixována požadavkem

$$\langle \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}', A = a' \, | \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}, A = a \rangle = \delta_{aa'} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \,. \tag{3.508}$$

Jinými slovy řečeno, vyšli jsme z toho, že za úplnou množinu komutujících operátorů na prostoru čtyřkomponentových kvadraticky integrovatelných funkcí $\psi(\boldsymbol{x})$ lze zvolit operátory $\hat{\boldsymbol{X}}$ a $\hat{\mathsf{A}}$, kde

$$\hat{\boldsymbol{X}} \psi(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x} \psi(\boldsymbol{x}) \,, \tag{3.509}$$

$$\hat{\mathsf{A}} \psi(\boldsymbol{x}) \equiv \mathsf{A} \psi(\boldsymbol{x}) \tag{3.510}$$

a matice

$$\mathsf{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 \end{pmatrix} . \tag{3.511}$$

Jestliže ψ_a je jednosloupcová matice, která má v a-tém řádku jednotku a ve všech ostatních nuly, potom čtyřkomponentové "funkce"

$$\psi_{\boldsymbol{y},a}(\boldsymbol{x}) \equiv \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, \psi_a \tag{3.512}$$

evidentně vyhovují rovnicím

$$\hat{\boldsymbol{X}} \psi_{\boldsymbol{y},a}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \psi_{\boldsymbol{y},a}(\boldsymbol{x}) \,, \tag{3.513}$$

$$\hat{\mathsf{A}} \psi_{\boldsymbol{y},a}(\boldsymbol{x}) = a \psi_{\boldsymbol{y},a}(\boldsymbol{x}) \tag{3.514}$$

a přitom platí

$$\int d^3 \boldsymbol{y} \psi^{\dagger}_{\boldsymbol{x},a}(\boldsymbol{y}) \, \psi_{\boldsymbol{x}',a'}(\boldsymbol{y}) = \delta_{aa'} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \,. \tag{3.515}$$

Tedy čtyřkomponentové funkce (3.512) představují realizaci výše zmíněných ketů $|\boldsymbol{X} = \boldsymbol{y}, A = a\rangle$, které jsme se snažili (při pevné hodnotě $\boldsymbol{y}$) interpretovat jako "vlnové funkce" popisující *čtyři* nezávislé stavy diracovské částice lokalizované v místě $\boldsymbol{y}$.

Později jsme však viděli, že jako vlnové funkce diracovské částice lze (v nejlepším případě) interpretovat pouze ty z bispinorů, které jsou vyjádřitelné jako superpozice řešení s kladnými frekvencemi. Za bázi Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ diracovské částice pak bylo možno zvolit kety

$|\boldsymbol{p};j\rangle$ představující společné vlastní vektory jejího impulsu a vhodně vybrané "spinové proměnné". Při normalizaci

$$\langle \boldsymbol{p}';k\,|\boldsymbol{p};j\rangle = \delta_{jk}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{3.516}$$

z uvedeného plyne, že v prostoru $\mathcal{H}$ musí platit relace uzavřenosti

$$\int d^3\boldsymbol{p}\sum_j |\boldsymbol{p};j\rangle\langle\boldsymbol{p};j| = 1 \tag{3.517}$$

a

$$\psi_{\boldsymbol{p};j}(\boldsymbol{x},a) \equiv \langle \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}, A=a\,|\boldsymbol{p};j\rangle \tag{3.518}$$

je výraz stojící v a-tém řádku jednosloupcové matice $\psi_{\boldsymbol{p};j}(\boldsymbol{x})$, definované formulí (3.239).

Jakmile jsme přijali představu, že pouze některé z kvadraticky integrovatelných čtyřkomponentových funkcí patří do Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$, museli jsme se samozřejmě smířit i s tím, že (v nejlepším případě) jen některé lineární kombinace ze čtveřice čtyřkomponentových funkcí (3.512) mohou odpovídat stavům diracovské částice lokalizované v místě $\boldsymbol{y}$. Zdálo by se přirozené, že pro každou hodnotu polohového vektoru $\boldsymbol{y}$ budou existovat *dvě* takovéto nezávislé lineární kombinace (odpovídající dvěma hodnotám vhodně vybrané spinové charakteristiky takovéhoto lokalizovaného stavu). Nezávisle na tomto očekávání můžeme jistě všechny možné stavy uvažované částice lokalizované v místě $\boldsymbol{y}$ vyjádřit jako superpozici několika (maximálně čtyř) ortogonálních stavů, které od sebe odlišíme hodnotou parametru b. Čtyřkomponentové "vlnové funkce" odpovídající těmto stavům pak musí být možné zapsat ve tvaru

$$\psi_{\boldsymbol{y},b}(\boldsymbol{x}) \equiv \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\psi_b(\boldsymbol{y})\,, \tag{3.519}$$

kde jednosloupcové matice $\psi_b(\boldsymbol{y})$ vyhovují podmínce ortonormality

$$\psi^\dagger_{b'}(\boldsymbol{y})\,\psi_b(\boldsymbol{y}) = \delta_{bb'}\,. \tag{3.520}$$

Čtyřkomponentová funkce (3.519) představuje realizaci ketu

$$|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{y},b\rangle \equiv \sum_{a=1}^{4}\left(\psi_b(\boldsymbol{y})\right)_a|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{y},A=a\rangle\,, \tag{3.521}$$

kde $(\psi_b(\boldsymbol{y}))_a$ označuje a-tý řádek jednosloupcové matice $\psi_b(\boldsymbol{y})$. Muselo by tedy platit

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}', b' \,| \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}, b\rangle &= \sum_{a,a'=1}^{4} \left(\psi_{b'}^\dagger(\boldsymbol{x}')\right)_{a'} (\psi_b(\boldsymbol{x}))_a \times \\ &\quad \langle \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}', A=a' \,| \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}, A=a\rangle \\ &= \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \sum_{a=1}^{4} \left(\psi_{b'}^\dagger(\boldsymbol{x})\right)_a (\psi_b(\boldsymbol{x}))_a \\ &= \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\, \delta_{bb'} \,, \end{aligned} \tag{3.522}$$

kde jsme nejprve využili relaci (3.508) a potom relaci (3.520).

Na druhé straně díky relaci uzavřenosti (3.517) by muselo platit

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}', b' \,| \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}, b\rangle = \\ &\quad = \sum_{a,a'=1}^{4} \left(\psi_{b'}^\dagger(\boldsymbol{x}')\right)_{a'} (\psi_b(\boldsymbol{x}))_a \times \\ &\qquad \int d^3\boldsymbol{p} \sum_j \langle \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}', A=a' \,|\boldsymbol{p};j\rangle \langle \boldsymbol{p};j|\, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}, A=a\rangle \,, \\ &\quad = \sum_{a,a'=1}^{4} \left(\psi_{b'}^\dagger(\boldsymbol{x}')\right)_{a'} (\psi_b(\boldsymbol{x}))_a \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \times \\ &\qquad \int d^3\boldsymbol{p} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\right\} \sum_j \frac{1}{N(\boldsymbol{p},j)} u_{a'}(\boldsymbol{p},j)\, u_a^\dagger(\boldsymbol{p},j) \\ &\quad = \sum_{a,a'=1}^{4} \left(\psi_{b'}^\dagger(\boldsymbol{x}')\right)_{a'} (\psi_b(\boldsymbol{x}))_a \frac{c}{(2\pi\hbar)^3} \times \\ &\qquad \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2E} \sum_j \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\right\} \left[(\not{p}+Mc)\,\beta\right]_{a'a} \,, \end{aligned} \tag{3.523}$$

kde jsme využili relaci (3.284). S posledním integrálem se v dalším ještě setkáme. V dané chvíli je pro nás nejpodstatnější, že tento výraz sice má pro $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$ singularitu typu δ-funkce, zůstává však nenulový i pro $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}'$ a přitom na velkých vzdálenostech $r \equiv |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ je jeho hodnota potlačována faktorem $\exp\{-\kappa r\}$, kde κ je převrácená hodnota Comptonovy vlnové délky uvažované částice. V každém případě tedy pravá strana poslední formule není identická s pravou stranou formule předcházející. To znamená, že žádný "vektor" tvaru (3.519) nemůže představovat "vlnovou funkci" diracovské částice, a tedy výše zmíněný operátor $\hat{\boldsymbol{X}}$ nemůže reprezentovat žádnou pozorovatelnou této částice. Jinými slovy řečeno, násobení "vlnové funkce" $\psi(\boldsymbol{x})$ nezávislou proměnnou $\boldsymbol{x}$ může (v nejlepším případě) jen přibližně vystihovat aplikaci operátoru polohy na tuto "vlnovou funkci". To ovšem znamená, že výchozí předpoklad, že diskutovaný algoritmus představuje relativistickou kvantovou mechaniku částice se spinem $\frac{1}{2}$, v níž bispinory $\psi(\boldsymbol{x})$ lze inerpretovat jako vlnové funkce v x-reprezentaci, může být jen "přibližně správný", tj. může sice poskytovat velice dobrou aproximaci při popisu některých jevů, v jiných případech však může být naprosto nepřijatelný.

K první části tohoto tvrzení nás oprávňuje již samotný fakt, že uvedený algoritmus je v nerelativistickém režimu prakticky ekvivalentní nerelativistické teorii vycházející z rovnice Pauliho. V rámci nerelativistické teorie samozřejmě na žádný problém s vnitřní konzistencí definice x-reprezentace nenarážíme. Víme ovšem, že jakékoliv předpovědi[115] v rámci nerelativistické kvantové teorie obdržené nemůžeme brát vážně, pokud se jedná o procesy, či stavy v režimu daleko od nerelativistického. Tedy *fyzikální* aplikovatelnost nerelativistické kvantové mechaniky vyžaduje mj., aby příslušné stavy byly takovou superpozicí stavů s daným impulsem, v níž příspěvky odpovídající impulsům srovnatelným s (nebo větších než) Mc jsou zanedbatelné. Přitom víme[116], že když funkce $\psi(\boldsymbol{p}/\hbar)$ (prakticky) vymizí vně okolí $|\boldsymbol{p}| < Mc$, potom její Fourierův obraz nemůže (prakticky) vymizet vně jakéhokoliv okolí počátku s poloměrem menším než $\hbar/Mc$. Díky tomu jakékoliv výroky (byť matematicky korektně formulované) v rámci nerelativistické kvantové mechaniky o chování částice lokalizované v oblasti srovnatelné s (nebo menší než) její Comptonovou vlnovou délkou nelze považovat za fyzikálně relevantní.

Na druhé straně jsme se právě přesvědčili, že v rámci algoritmu vycházejícího z Diracovy rovnice nelze mezi bispinory, které patří do Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$, nalézt takové, které by odpovídaly lokalizaci diracovské částice v oblasti, která (v její klidové soustavě) má poloměr

---

[115] byť *matematicky* rigorózně odvozené

[116] Když ne odjinud, tak z Heisenbergových relací neurčitosti.

R_0, tj. bispinor, pro který by platilo

$$\int d^3\boldsymbol{x}\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\,\hat{\boldsymbol{P}}\psi(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{3.524}$$

a přitom by odpovídající hustota pravděpodobnosti

$$\rho(\boldsymbol{x}) \equiv \psi^\dagger(\boldsymbol{x})\,\psi(\boldsymbol{x}) \tag{3.525}$$

(prakticky) vymizela na vzdálenostech větších než R_0.[117]

Dělat odtud závěr o "nelokalizovatelnosti diracovské částice" by však (zatím) bylo poněkud unáhlené. Víme totiž, že násobení nezávislou proměnnou $\boldsymbol{x}$ nemůže v rámci uvažovaného algoritmu realizovat operátor polohy, a proto také nemůžeme tvrdit, že výraz (3.525) udává hustotu pravděpodobnosti polohy studované částice. K tomu, abychom mohli v rámci kvantové teorie činit výroky o nějaké pozorovatelné, potřebujeme znát operátor, který jí odpovídá. Pokusme se proto nejprve zkonstruovat operátor polohy diracovské částice: Připomeňme, že přímočará identifikace tohoto operátoru s násobením příslušného bispinoru nezávislou proměnnou nevedla k žádným větším těžkostem až do okamžiku, kdy jsme byli nuceni odvrhnout všechny bispinory, které zahrnují příspěvky od negativních frekvencí. Kamenem úrazu se stalo, že zbývající bispinory netvoří podprostor invariantní vůči této operaci, tj. násobením bispinoru, který představuje superpozici vlastních vektorů operátoru $\hat{\mathsf{H}}$ příslušných výhradně k pozitivní části spektra, obdržíme bispinor, který již může obsahovat i příspěvky od části negativní. Konstrukce operátorů, které tuto nepříjemnou vlastnost nemají, je evidentně nejsnazší v takovém formalismu, ve kterém je sjednocení charakteristických podprostorů, příslušných všem kladným vlastním hodnotám "hamiltoniánu" explicitně odděleno od podprostrů, odpovídajících záporným vlastním hodnotám. Toho (pro volnou částici) umíme dosáhnout pomocí Foldy-Wouthuysenovy transformace. Vzhledem k tomu, že při popisu vlastních stavů impulsu diracovské částice jsme na žádné nepřekonatelné potíže nenarazili, budeme pracovat v p-reprezentaci, tj. operátor impulsu bude realizován jako násobení nezávislou proměnnou

[117] Přesně vzato jsme ukázali pouze to, že R_0 nemůže být libovolně malé. Ale i bez hlubší analýzy musí být zřejmé, že pro tuto "hranici lokalizovatelnosti" musí platit $R_0 \sim \hbar/Mc$, neboť Comptonova vlnová délka je jediný (kinematicky nezávislý) parametr rozměru délky, který máme k dispozici.

$\boldsymbol{p}$ každého elementu čtyřkomponentové vlnové funkce. "Operátor polohy" pak definujeme (v analogii s jeho vyjádřením v p-reprezentaci v nerelativistické kvantové mechanice[118]) jako provedení operace[119]

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{FW}^{(FW)} \equiv i\hbar\boldsymbol{\nabla} \tag{3.526}$$

na každý element F-W čtyřkomponentové vlnové funkce. Tímto postupem máme zajištěno, že takto definovaný "operátor polohy"
i) mezi sebou nemíchá kladné a záporné frekvence, tj. skutečně představuje operátor na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$,
ii) splňuje správné komutační relace, tj. platí pro něj

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathsf{X}}_{jFW}^{(FW)}, \hat{\mathsf{X}}_{kFW}^{(FW)}\right] &= 0, \\ \left[\hat{\mathsf{X}}_{jFW}^{(FW)}, \hat{\mathsf{P}}_{kFW}\right] &= i\hbar\delta_{jk}\,. \end{aligned} \tag{3.527}$$

Tento operátor má i celou řadu dalších příjemných vlastností:
Tak např. z toho, že ve F-W formalismu má hamiltonián v p-reprezentaci tvar (srov. (3.400))

$$\hat{\mathsf{H}}_{FW} = \beta c\sqrt{\hat{\boldsymbol{P}}^2 + M^2c^2} = \beta E, \tag{3.528}$$

ihned vidíme, že v případě, kdy polohovému vektoru je přiřazen operátor (3.526), je odpovídajícím operátorem rychlosti

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{FW}^{(FW)} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\boldsymbol{X}}_{FW}^{(FW)}, \hat{\mathsf{H}}_{FW}\right] = \beta\frac{c\boldsymbol{p}}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2c^2}}, \tag{3.529}$$

a tedy jeho působení na vlnové funkce diracovské částice je ekvivalentní vynásobení[120] faktorem $c^2\boldsymbol{p}/E$, tj. hodnotou rychlosti, kterou by podle teorie relativity měla mít částice s impulsem $\boldsymbol{p}$.
Právě tak snadno zjistíme, že odpovídající operátor orbitálního momentu

$$\hbar\hat{\boldsymbol{L}}_{FW}^{(FW)} \equiv \hat{\boldsymbol{X}}_{FW}^{(FW)} \times \hat{\boldsymbol{P}}_{FW} \tag{3.530}$$

[118] Viz formuli (2.43) v [1].

[119] Horní index $^{(FW)}$ zdůrazňuje, že jde o definici nového operátoru přiřazeného příslušné dynamické proměnné, kdežto dolní index $_{FW}$ připomíná, že jde o vyjádření operátoru ve Foldy-Wouthuysenově realizaci.

[120] Nezapomeňme, že ve F-W formalismu jsou všechny vlnové funkce vlastními funkcemi matice β, příslušnými k vlastní hodnotě $+1$ (viz formule (3.528)).

je integrálem pohybu ap.

K tomu, abychom nalezli tvar těchto operátorů v rámci diracovského formalismu, stačí, když na každý z nich provedeme inverzní F-W transformaci, tj. např. hledaným "operátorem polohy" je

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{FW} = \mathsf{S}_0^\dagger \hat{\boldsymbol{X}}_{FW}^{(FW)} \mathsf{S}_0 \,, \tag{3.531}$$

kde unitární matice S_0 má tvar (viz úlohu U.3.34.)

$$\mathsf{S}_0 = \frac{1}{\sqrt{2E\,(E+Mc^2)}} \left[E + Mc^2 + c\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma})\right]. \tag{3.532}$$

Po jednoduchých úpravách tak dostaneme (viz úlohu U.3.35.)

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{FW} = i\hbar\boldsymbol{\nabla} + i\frac{\hbar c}{2E}\boldsymbol{\gamma} - \frac{\hbar c^2}{2E^2\,(E+Mc^2)}\Big\{E\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{p}] + ic\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma})\Big\}. \tag{3.533}$$

Podobně můžeme obdržet vyjádření i pro ostatní s ním související operátory. Některé z nich jsou diskutovány v úloze U.3.38.

Na první pohled se tak může zdát, že jsme uspěli, že se nám podařilo na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ nalézt operátor, který umožní bezrozporně interpretovat algoritmus vycházející z Diracovy rovnice jako relativistickou kvantovou mechaniku jedné částice se spinem $\frac{1}{2}$. Tento názor můžeme ještě podpořit konstatováním, že výraz stojící na pravé straně formule (3.533) je shodný s tím, o kterém Newton a Wigner [32] ukázali, že je jediným operátorem, který má některé (jimi specifikované) vlastnosti, které každý operátor polohy mít musí.[121] Hustota pravděpodobnosti toho, že částice, která je ve stavu popsaném vlnovou funkcí $\psi(\boldsymbol{y})$, bude nalezena v místě $\boldsymbol{x}$ v takovémto formalismu již samozřejmě není dána jednoduchou formulí (3.525). K tomu, abychom ji určili, museli bychom nejprve nalézt vlastní vektory operátoru $\hat{\boldsymbol{X}}_{FW}$. To je sice nepříjemná technická komplikace, ale sama o sobě by nemusela mít zásadní význam. Nalezení zmíněných vlastních funkcí v principu nepředstavuje ani nijak zvlášť komplikovanou úlohu: Její řešení v rámci F-W

[121] Blíže se tímto přístupem zde zabývat nebudeme. Pouze pro ilustraci uveďme, že v něm hraje důležitou úlohu např. následující požadavek: Transformací, odpovídající prostorovému posunutí kteréhokoliv z vlastních vektorů operátoru polohy, odpovídajících lokalizaci částice v počátku, vznikne vektor, ortogonální ke všem vektorům popisujícím stavy částice lokalizované v počátku.

formalismu je stejné jako v nerelativistickém případě a převedení do Diracova formalismu je opět otázkou provedení inverzní F-W transformace.[122] Blíže se však zde touto otázkou zabývat nebudeme. Omezme se pouze na konstatování, že takto nalezené vlastní vektory operátoru $\hat{\boldsymbol{X}}_{FW}$ mají následující vlastnost: jestliže z hlediska naší souřadné soustavy je částice v okamžiku t ve stavu popsaném vlastním vektorem operátoru $\hat{\boldsymbol{X}}_{FW}$ příslušném k vlastní hodnotě $\boldsymbol{x}$, potom transformací, která odpovídá boostu, tento bispinor *nepřejde* v bispinor, který by odpovídal lokalizované částici.[123] Nalezení částice (v naší souřadné soustavě) v okamžiku t v místě $\boldsymbol{x}$ je však bodová událost, a tedy pokud je v okamžiku $t = x^0/c$ z hlediska naší soustavy částice ve vlastním stavu polohového operátoru, příslušném vlastní hodnotě $\boldsymbol{x}$, potom z hlediska soustavy, která s naší souvisí Lorentzovou transformací $\Lambda(\omega)$, by měla být v okamžiku $t' = x'^0/c$ ve vlastním stavu operátoru polohy příslušném vlastní hodnotě $\boldsymbol{x}'$, kde

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\omega)\, x^{\nu}\,. \tag{3.534}$$

Protože tomuto požadavku vlastní vektory operátoru $\hat{\boldsymbol{X}}_{FW}$ nevyhovují, nezbývá než rezignovat[124] na snahu interpretovat algoritmus vybudovaný na Diracově rovnici jako úplnou vnitřně konzistentní fyzikální teorii – relativistickou kvantovou mechaniku jedné částice.

3.2.4 Závěr

V předchozím jsme viděli, že algoritmus vybudovaný na Diracově rovnici vede k výsledkům, které nás utvrzují v přesvědčení, že musí odrážet mnoho aspektů *relativistické kvantové teorie*, tj. *fyzikální* teorie,

---

[122] Alternativní řešení této úlohy může čtenář nalézt např. v již citované práci [32] Newtona a Wignera.

[123] Situace je tedy naprosto stejná, s jakou jsme se již setkali u klein-gordonovské částice v úloze U.2.1.. Vůbec nejde o náhodu, ale o přímý důsledek nemožnosti na jedné straně akceptovat jednočásticové stavy se zápornými energiemi a na straně druhé nemožnost v Hilbertově prostoru, ze kterého jsou vyloučeny elementy takovýmto “stavům” odpovídající, nalézt vektory, které by mohly konzistentně popisovat lokalizované stavy.

[124] Nezapomeňme, že díky [32] víme, že nelze nalézt vhodnějšího kandidáta na operátor polohy.

která respektuje jak požadavky kvantové teorie, tak požadavky speciální teorie relativity. Nakonec jsme však poznali, že tento algoritmus nemůže zcela konzistentně představovat relativistickou kvantovou *mechaniku.*[125] Čtenář již jistě rozpoznal, že zdroj všech problémů spočívá v existenci řešení se zápornými frekvencemi. Jakkoliv se mohlo zpočátku zdát, že jejich prosté odvrhnutí jako veličin, které nemají fyzikální smysl (tj. po formální stránce, identifikací jen určitého podprostoru z prostoru všech kvadraticky integrovatelných čtyřkomponentových funkcí s Hilbertovým prostorem $\mathcal{H}$ diracovské částice), poskytuje fyzikálně přijatelnou alternativu, nakonec se ukázalo, že znemožňuje exaktní popis polohy studované částice (tj. na prostoru $\mathcal{H}$ nelze definovat operátor, který by měl všechny atributy, které jsou nezbytné k tomu, aby mohl hrát úlohu operátoru polohy). Je proto zřejmé, že tak lacino se řešení se zápornými frekvencemi zbavit nelze.

Připomeňme proto alespoň velice stručně, že sám Dirac se pokusil vypořádat s problémem existence těchto řešení způsobem naprosto odlišným [34]. Připustil totiž, že i tato řešení popisují stacionární stavy (volné) částice s odpovídající (tj. *zápornou*) energií. Skutečnost, že žádné stavy se zápornou energií nebyly v přírodě nalezeny, pak obešel geniálně prostou představou: Vakuum není "prázdný prostor", ale je v něm přítomno nekonečně mnoho (diracovských) částic, které zaplňují všechny (jednočásticové) stavy se zápornými energiemi. Protože se jedná o fermiony[126], je takovéto schéma v principu smysluplné. Vzhledem k tomu, že hodnoty všech veličin jsou měřeny relativně vůči jejich hodnotám vakuovým, nemusí být ani fyzikálně nepřijatelné. Navíc takovýto model vakua musí v principu umožňovat předpovědi experimentálně ověřitelné. Nejmarkantnější příklad představuje proces, při kterém je jakýmkoliv způsobem[127] jedné částici se zápornými energiemi

[125] To samozřejmě nevylučuje, aby pro dobře definovaný okruh jevů poskytoval velice dobrou aproximaci popisu reality.

[126] Abychom se vyhnuli zbytečnému nedorozumění, připomeňme, že sice první práce svědčící ve prospěch obecného vztahu mezi spinem a statistikou se objevily až téměř o deset let později [35], [36], Pauliho vylučovací princip však již byl nejen znám [37] a obecně akceptován, ale byly již také rozpracovány jeho důsledky pro statistickou fyziku, a to vedle Fermiho [38] právě Diracem [39].

[127] Např. pohlcením fotonu elektronem, když elektron je chápán jako diracovská částice.

předána tak velká energie, že její konečná energie se stane kladnou. Výsledkem pak bude přítomnost jedné nové[128] diracovské částice s kladnou energií a vznik jedné "díry" v moři diracovských částic s energiemi zápornými reprezentujícím vakuum. Takovéto "vakuum s jednou dírou" bude mít elektrický náboj rovný náboji vakua zmenšeným (algebraicky) o e, kde e je náboj diracovské částice. Protože velikost náboje vakua je definitoricky rovna nule, má náboj vakua s jednou dírou hodnotu opačnou než náboj diracovské částice. Obdobnou úvahou se dospěje k závěru, že i v ostatních směrech se "díra ve vakuu" chová jako částice, která se od diracovské částice liší pouze znaménkem náboje, tj. (v dnešní terminologii) představuje její antičástici. Pokud je možno částici z Diracova moře vytrhnout a vytvořit tak ve vakuu "díru", musí být možný i proces opačný: diracovská částice s kladnou energií může do díry "spadnout", tj. její energie se stane zápornou s tím, že zbývající energie je odnesena jinými objekty (např. vyzářenými fotony). Výsledkem takovéhoto "anihilačního procesu" je tedy zánik jedné diracovské částice společně s jednou její antičásticí.

Andersonův objev pozitronu [40] proto mohl být mimo vší pochybnost považován za triumf Diracovy "děrové teorie".[129] Ani o existenci předpovězených anihilačních procesů nemůže být nejmenších pochyb.[130] Přesto přese všecko Diracova děrová teorie představuje jen historickou epizodu, která se sice bezesporu zasloužila o určitý zlom v myšlení[131] a poskytla inspiraci v mnoha směrech,[132] kterou je však dnes nutno

[128]Nevylučujeme možnost, že již na začátku procesu mohly být přítomny nějaké diracovské částice s kladnými energiemi.

[129]Abychom neuvedli čtenáře ve zbytečný omyl, poznamenejme, že Diracova cesta k předpovědi existence pozitronu ve skutečnosti nebyla tak přímočará. Ve výše citované práci [34] se ještě pokoušel interpretovat díry po elektronech se zápornými energiemi jako *protony*. Teprve v následné práci [41] se smířil s tím, že se musí jednat o částici, která se liší od elektronu pouze znaménkem náboje.

[130]Připomeňme, že např. dvoufotonová anihilace elektron-pozitronového páru dnes v převážné většině případů již nepředstavuje zkoumaný proces, ale dobře zvládnutý *nástroj* výzkumu.

[131]Rozhodně měla zásadní vliv na odklon od naivního nahlížení na vakuum jako na "prázdný prostor", tj od představy, o jejíž neudržitelnosti snad již dnes žádný fyzik nepochybuje.

[132]Připomeňme alespoň užitečnost pojmu "díra" ve fyzice pevných látek, či fyzice jaderné a atomové, kde úlohu Diracova moře částic se zápornými energiemi přebírají fermiony, jejichž energie jsou sice kladné, ale menší než příslušná "Fermiho mez".

považovat za překonanou.[133] Dnes můžeme jen spekulovat o tom, co by to znamenalo, kdyby k jejímu překonání nedošlo – jak bychom se asi dokázali vypořádat se skutečností, že antičástice nade vši pochybnost existují i pro *bosony*, ...

Pro ty, kteří se hlouběji zamýšlejí nad cestami, kterými přírodní vědy postupně docházejí k hlubšímu, ucelenějšímu a přesnějšímu pochopení "reality" poznamenejme, že právě uvedená "předpověď" děrové teorie o existenci pozitronu není jediným případem souvisejícím s Diracovou rovnicí, kdy je obdržen pozoruhodně *dobrý výsledek*, přestože *předpoklady*, na jejichž základě byl "odvozen", jsou snadno *napadnutelné*:

Když jsme diskutovali interakci s elektromagnetickým polem, povšimli jsme si, že magnetické momenty elektronů a mionů souhlasí s promilovou přesností s hodnotami "odvozenými" z předpokladu, že se jedná o diracovské částice. Z výsledku úlohy U.3.33. však čtenář snadno sezná, že ve skutečnosti pouhým přidáním *Pauliho členu* do rovnice (3.391) můžeme docílit toho, aby popisovala diracovskou částici, jejíž magnetický moment má *jakoukoliv* předem zadanou hodnotu. Přitom v rámci uvažovaného algoritmu, v němž by zmíněná rovnice měla představovat kvantově mechanickou pohybovou rovnici, nelze mít proti přítomnosti tohoto členu sebemenších námitek (až snad na estetické), protože nenarušuje požadavky invariance na takovouto rovnici kladené.[134] Teprve v rámci kvantové teorie pole pochopíme, v čem spočívá zásadní rozdíl mezi Pauliho členem a ostatními členy popisujícími elektromagnetickou interakci diracovské částice.[135]

---

[133]Na tomto konstatování nic nemění ani skutečnost, že i dnes užíváme její *terminologii* pro popis některých jevů, přestože je již chápeme v podstatně odlišném rámci (většinou představovaném kvantovou teorií pole), než jaký poskytovala děrová teorie.

[134]Jen díky tomu je tuto rovnici s Pauliho členem možno úspěšně využívat pro popis elektromagnetických interakcí např. protonu, či neutronu v procesech s nepříliš velkým přenosem impulsu. Připomeňme, že současná experimentální data [18] odpovídají následujícím hodnotám magnetických momentů těchto částic: $\mu_p = \left(2.792\,847\,39 \pm 6 \times 10^{-8}\right) \mu_N$, resp. $\mu_n = -\left(1.913\,042\,8 \pm 5 \times 10^{-7}\right) \mu_N$, kde jaderný magneton $\mu_N \equiv \frac{e\hbar}{2Mc}$ a M je hmota protonu.

[135]Zatím si pouze povšimněme toho, že "vazbová konstanta" δ v Pauliho členu má odlišný rozměr než konstanta $e/\hbar c$, charakterizující "sílu" *minimální elektromagnetické interakce* (popisované záměnou (3.389): $\partial_\mu \to D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu$).

Nakonec i sama cesta vedoucí k Diracově rovnici a ke "kvantově mechanickému algoritmu" na ní vybudovaném může sloužit jako příklad "odvození" výsledků sice pozoruhodných, ale podstatně odlišných od těch, které jsme odvozovali. Vzpomeňme si, že nejprve jsme z nechuti k nelokálnímu hamiltoniánu

$$c\sqrt{\hat{\boldsymbol{P}}^2 + M^2c^2} \tag{3.535}$$

dospěli k rovnici Klein-Gordonově. Tu jsme odvrhli zejména proto, že představovala diferenciální rovnici druhého řádu v čase, a "odvodili" jsme rovnici Diracovu. U ní jsme však časem byli nuceni odvrhnout řešení se zápornými frekvencemi, což ve svých důsledcích znamená, že jsme se i v algoritmu budovaném na této rovnici museli smířit s přítomností operátoru (3.535) v jeho hamiltoniánu (srov. formuli (3.400)). O nic méně uspokojivého výsledku bychom ovšem dosáhli, kdybychom od samého počátku vyšli ze "Schrödingerovy rovnice" s hamiltoniánem (3.535), tj. z rovnice (2.6). Přitom se čtenář snadno přesvědčí,[136] že pokud v "kvantově mechanickému algoritmu" budovaném na K-G rovnici tak, jak bylo naznačeno v 2. Kapitole, odvrhneme řešení se zápornými frekvencemi, potom příslušná pohybová rovnice je ekvivalentní právě zmíněné "Schrödingerově rovnici". Důvod, proč ani tento algoritmus nepředstavuje zcela vnitřně konzistentní relativistickou kvantovou mechaniku, je naprosto stejný jako u algoritmu budovaném na rovnici Diracově – nelze v něm definovat operátor polohy. Můžeme tedy tvrdit, že žádný z těchto dvou algoritmů není ani horší, ani lepší než druhý. Jediný rozdíl mezi nimi spočívá v tom, že jeden se týká částice bezspinové, kdežto druhý částice se spinem $\frac{1}{2}$.

3.3 Úlohy

U.3.1. Ukažte, že mezi elementy Pauliho matic platí identity

$$\delta_{\alpha\omega}\,\delta_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\omega} + \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\gamma\omega}\right),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\gamma\beta} = \frac{3}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\omega} - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\gamma\omega}\,.$$

[136] Viz též úlohu U.2.1.

U.3.2. Využijte vlastností Pauliho matic k důkazu vztahu

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) = -i\hbar\frac{1}{r}\left[2 + r\frac{\partial}{\partial r} + \left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right)\right].$$

U.3.3. Uvažujte 16 matic Γ_A definovaných tabulkou

A	Γ_A
1	1
$2,3,4,5$	$\gamma^0,\ \gamma^1,\ \gamma^2,\ \gamma^3$
$6,7,8$	$\Sigma^{01},\ \Sigma^{02},\ \Sigma^{03}$
$9,10,11$	$\Sigma^{12},\ \Sigma^{23},\ \Sigma^{31}$
12	γ_5
$13,14,15,16$	$\gamma_5\gamma^0,\ \gamma_5\gamma^1,\ \gamma_5\gamma^2,\ \gamma_5\gamma^3$

Povšimněte si, že každá dvojice z nich vybraná je tvořena maticemi, které spolu buď komutují, nebo antikomutují.
Ukažte, že
i)

$$\mathrm{Sp}\Gamma_A = 4\delta_{A,1}\,,$$

ii)

$$\left(\Gamma_A\right)^2 = \varepsilon_A\,,$$

kde

$$\varepsilon_A \equiv \begin{cases} +1 & \text{pro} \quad A = 1,2,9,10,11,12,14,15,16 \\ -1 & \text{pro} \quad A = 3,4,5,6,7,8,13 \end{cases}$$

iii)

$$\mathrm{Sp}\Gamma_A\Gamma^B = 4\kappa_A\delta_{A,B}\,,$$

kde jsme v souhlase s tenzorovým značením zavedli

$$\Gamma^A \equiv \xi_A\Gamma_A\,,$$

$$\xi_A \equiv \begin{cases} +1 & \text{pro} \quad A = 1,2,9,10,11,12,13 \\ -1 & \text{pro} \quad A = 3,4,5,6,7,8,14,15,16 \end{cases}$$

a

$$\kappa_A \equiv \varepsilon_A \xi_A = \begin{cases} +1 & \text{pro} \quad A = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 \\ -1 & \text{pro} \quad A = 13,14,15,16. \end{cases}$$

Dokažte, že všech 16 matic Γ_A je lineárně nezávislých, a tedy libovolnou čtvercovou matici[137] lze zapsat jako

$$\mathsf{W} = \sum_{A=1}^{16} w_A \Gamma^A,$$

kde

$$w_A = \frac{\kappa_A}{4} \operatorname{Sp} \Gamma_A \mathsf{W}.$$

Výše uvedený rozvoj tedy má tvar

$$\mathsf{W} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \kappa_A \Gamma^A \operatorname{Sp} \Gamma_A \mathsf{W}.$$

Ukažte, že odtud plyne rovnost

$$|b\rangle\langle a| = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \kappa_A \langle a| \Gamma_A |b\rangle \Gamma^A,$$

v níž $|b\rangle$, resp. $\langle a|$ je libovolná jednosloupcová, resp. jednořádková matice. Na jejím základě dokažte identitu

$$\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \kappa_A (\Gamma_A)_{\alpha\beta} \left(\Gamma^A\right)_{\delta\gamma}.$$

Dokažte, že při libovolně pevně zvolených hodnotách A, B platí

$$\Gamma_B \Gamma^A \Gamma^B = \kappa_B \omega_{AB} \Gamma^A,$$

[137] V zájmu stručnějšího vyjadřování, tam kde nehrozí nebezpečí nedorozumění, neuvádíme ty z rozměrů matic, které jsou z kontextu evidentní, tak např. v uvedeném tvrzení pod čtvercovými maticemi rozumíme samozřejmě pouze matice se čtyřmi řádky a čtyřmi sloupci, atp.

kde

$$\omega_{AB} \equiv \begin{cases} +1 & \text{pokud} \quad [\Gamma_A, \Gamma_B] = 0 \\ -1 & \text{pokud} \quad \{\Gamma_A, \Gamma_B\} = 0. \end{cases}$$

Využijte tohoto vztahu k důkazu relace

$$\langle c|\, \mathsf{U}\Gamma_B\, |b\rangle \langle a|\, \mathsf{Z}\Gamma^B\, |d\rangle = \frac{\kappa_B}{4} \sum_{A=1}^{16} \kappa_A\, \omega_{AB}\, \langle c|\, \mathsf{U}\Gamma^A\, |d\rangle \langle a|\, \mathsf{Z}\Gamma_A\, |b\rangle$$

platné pro libovolné čtvercové matice U, Z.

U.3.4. Dokažte, že čtvercová matice A komutuje se všemi čtyřmi maticemi γ_μ právě tehdy, když je násobkem jednotkové matice.

U.3.5. Z úlohy U.3.3. víme, že součin libovolné dvojice z matic

$$\Gamma_A \equiv \{1,\, \gamma_\mu,\, \Sigma_{\nu\rho},\, \gamma_5,\, \gamma_5\gamma_\sigma\}$$

lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto šestnácti matic. Najděte explicitní tvar těchto lineárních kombinací. Zejména ukažte, že platí

$$\gamma_\mu\gamma_\nu = -i\,\Sigma_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\,,$$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu\Sigma_{\nu\rho} &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma^\sigma + i\,(g_{\mu\nu}\gamma_\rho - g_{\mu\rho}\gamma_\nu)\,, \\ \Sigma_{\nu\rho}\gamma_\mu &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma^\sigma - i\,(g_{\mu\nu}\gamma_\rho - g_{\mu\rho}\gamma_\nu)\,, \end{aligned}$$

$$\Sigma_{\nu\rho}\gamma_5 = \gamma_5\Sigma_{\nu\rho} = \frac{i}{2}\varepsilon_{\nu\rho\sigma\mu}\Sigma^{\sigma\mu}\,,$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\nu\rho}\Sigma_{\mu\sigma} = \;& g_{\nu\mu}g_{\rho\sigma} - g_{\rho\mu}g_{\nu\sigma} \\ & + i\left[g_{\rho\mu}\Sigma_{\nu\sigma} - g_{\nu\mu}\Sigma_{\rho\sigma} + g_{\nu\sigma}\Sigma_{\rho\mu} - g_{\rho\sigma}\Sigma_{\nu\mu}\right] \\ & + i\varepsilon_{\nu\rho\mu\sigma}\gamma_5\,. \end{aligned}$$

U.3.6. Nalezněte nejobecnější tvar unitárních matic $S(P)$, $S(T)$, C, A_5, vyhovujících požadavkům

$$\mathsf{S}(P)\,\gamma_0 = \gamma_0\,\mathsf{S}(P)\,, \quad \mathsf{S}(P)\,\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\gamma}\,\mathsf{S}(P)\,,$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S}(T)\,\gamma_\mu^\top &= \gamma_\mu\,\mathsf{S}(T)\,, \\
\mathsf{C}\gamma_\mu^\top &= -\gamma_\mu \mathsf{C}, \\
\mathsf{A}_5\gamma_\mu &= -\gamma_\mu \mathsf{A}_5\,.
\end{aligned}
$$

U.3.7. Nechť šestice čtvercových matic $\mathsf{A}^{\mu\nu} = -\mathsf{A}^{\nu\mu}$, $(\mu, \nu = 0, \cdots, 3)$ vyhovuje komutačním relacím

$$
[\mathsf{A}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = 2i\left(g^{\nu\rho}\gamma^\mu - g^{\mu\rho}\gamma^\nu\right),
$$

$$
[\mathsf{A}^{\mu\nu}, \mathsf{A}^{\rho\sigma}] = 2i\left(g^{\mu\sigma}\mathsf{A}^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}\mathsf{A}^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho}\mathsf{A}^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma}\mathsf{A}^{\mu\rho}\right).
$$

Dokažte, že těmito požadavky jsou matice $\mathsf{A}^{\mu\nu}$ určeny jednoznačně, tj. že výše uvedené rovnice mají jediné řešení

$$
\mathsf{A}^{\mu\nu} = \Sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,.
$$

U.3.8. Dokažte identity

i)

$$
\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho = \left(S_{\mu\nu\rho\sigma} - i\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\right)\gamma^\sigma,
$$

kde

$$
S_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\,.
$$

ii)

$$
\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu}\gamma_5 + \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\rho\gamma_\sigma\,.
$$

U.3.9. Využijte existence matice nábojového sdružení k důkazu relace

$$
\mathrm{Sp}\,(\not a_1 \not a_2 \cdots \not a_n) = \mathrm{Sp}\,(\not a_n \cdots \not a_2 \not a_1)\,.
$$

U.3.10. Dokažte antikomutační relaci

$$
\{\not a, \not b\} = 2\,(a \cdot b)
$$

a využijte ji k důkazu rekurentní relace

$$
\mathrm{Sp}\,(\not a_1 \not a_2 \cdots \not a_n) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1}\,(a_n \cdot a_j)\,\mathrm{Sp}\left(\not a_1 \not a_2 \cdots \boxed{\not a_j} \cdots \not a_{n-1}\right),
$$

kde $\boxed{\not{a}_j}$ značí, že v příslušném výrazu je nutno vynechat faktor $\not{a}_j$.

U.3.11. Dokažte, že platí

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \not{a}\, \gamma^\mu &= -2\not{a}, \\
\gamma_\mu \not{a}\not{b}\, \gamma^\mu &= 4\,(a\cdot b)\,, \\
\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\, \gamma^\mu &= -2\not{c}\not{b}\not{a}, \\
\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\, \gamma^\mu &= 2\,(\not{b}\not{c}\not{d}\not{a} + \not{a}\not{d}\not{c}\not{b})\,.
\end{aligned}$$

U.3.12. Dokažte, že platí

$$\begin{aligned}
\not{a}\gamma_\mu \not{a} &= 2a_\mu \not{a} - a^2\gamma_\mu\,, \\
\not{a}\gamma_\mu\gamma_\nu \not{a} &= 2\,(a_\mu\gamma_\nu - a_\nu\gamma_\mu)\not{a} + a^2\gamma_\mu\gamma_\nu\,, \\
\not{a}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho \not{a} &= 2\,(a_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho - a_\nu\gamma_\mu\gamma_\rho + a_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu)\not{a} - a^2\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\,.
\end{aligned}$$

U.3.13. Dokažte relaci

$$\not{a}\not{b}\not{c} + \not{c}\not{b}\not{a} = 2\left[(b\cdot c)\not{a} - (a\cdot c)\not{b} + (a\cdot b)\not{c}\right].$$

Přesvědčte se, že první z formulí uvedených v úlohách U.3.11. a U.3.12. představují speciální případ této relace.

U.3.14. Dokažte relaci

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu &= \\
&2\left[g_{\mu\nu}\gamma_\alpha\gamma_\beta + g_{\mu\alpha}\gamma_\beta\gamma_\nu - g_{\mu\beta}\gamma_\alpha\gamma_\nu + g_{\nu\alpha}\gamma_\beta\gamma_\mu - g_{\nu\beta}\gamma_\alpha\gamma_\mu\right].
\end{aligned}$$

Přesvědčte se, že druhé z formulí uvedených v úlohách U.3.11. a U.3.12. představují speciální případ této relace.

U.3.15. Dokažte, že

$$\mathrm{Sp}\,(\gamma_5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = -4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma.$$

U.3.16. Dokažte, že v chirální reprezentaci je matice nábojového sdružení dána výrazem

$$\mathsf{C} = i\,\alpha_2 = i\begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

U.3.17. V rámci diskuse Klein-Gordonovy rovnice jsme ve formuli (2.14) zavedli nábojové sdružení skalárních veličin φ jako jejich obyčejné komplexní sdružení.
Ukažte, že existuje taková realizace Diracovy algebry, že v jejím rámci totéž platí o bispinorech, tj. že v rámci *této* realizace je $\psi_C = \psi^*$.
Přesvědčte se, že tak tomu je v případě realizace *Majoranovy*, v níž

$$\gamma^\mu \equiv \mathsf{U}\gamma^\mu_D\mathsf{U}^\dagger,$$

kde γ^μ_D jsou γ-matice v Diracově reprezentaci, tj. matice definované formulí (3.49) a unitární matice

$$\mathsf{U} \equiv \frac{\exp(i\pi/4)}{2}\left(\gamma^0_D + \gamma^5_D\right)\left(1 - \gamma^2_D\right).$$

Nalezněte explicitní tvar matic γ^μ v Majoranově reprezentaci. Ukažte, že všechny elementy těchto matic jsou ryze imaginární. Přesvědčte se, že pro komponenty bispinoru v *této* reprezentaci představuje Diracova rovnice (3.30) soustavu diferenciálních rovnic s *reálnými* koeficienty.

U.3.18. Nechť $\psi_\alpha(n)$, $(\alpha = 1, \cdots, 4)$ jsou komponenty bispinoru $\psi(n)$. Víme, že pro libovolnou dvojici hodnot α, β představuje součin $(\psi_\alpha(1))^*\,\psi_\beta(2)$ lineární kombinaci výrazů

Skalár	$S(1,2) \equiv \bar\psi(1)\,\psi(2)$
Pseudoskalár	$P(1,2) \equiv \bar\psi(1)\,\gamma_5\,\psi(2)$
Vektor	$V^\mu(1,2) \equiv \bar\psi(1)\,\gamma^\mu\,\psi(2)$
Axiální vektor	$A^\mu(1,2) \equiv \bar\psi(1)\,\gamma_5\gamma^\mu\psi\,(2)$
Tenzor	$T^{\mu\nu}(1,2) \equiv \bar\psi(1)\,\Sigma^{\mu\nu}\psi(2)$

Je zřejmé, že jakýkoliv *skalár* $S(1,2,3,4)$, který lze vytvořit lineární kombinací veličin $(\psi_\alpha(1))^* \, \psi_\beta(2) \, (\psi_\gamma(3))^* \, \psi_\delta(4)$, musí být možné vyjádřit jako lineární kombinaci následujících skalárních výrazů

Skalární variant	$S_S(1,2;3,4) \equiv S(1,2)\,S(3,4)$
Pseudoskalární variant	$S_P(1,2;3,4) \equiv P(1,2)\,P(3,4)$
Vektorový variant	$S_V(1,2;3,4) \equiv V_\mu(1,2)\,V^\mu(3,4)$
Axiálně vektorový variant	$S_A(1,2;3,4) \equiv A_\mu(1,2)\,A^\mu(3,4)$
Tenzorový variant	$S_T(1,2;3,4) \equiv T_{\mu\nu}(1,2)\,T^{\mu\nu}(3,4)$

tj.

$$S(1,2,3,4) = \sum_Q C_Q S_Q(1,2;3,4)\,,$$

kde C_Q jsou konstanty a Q probíhá hodnoty S, P, V, A, T. Skalární jsou ovšem také veličiny $S_Q(1,4;3,2)$, a tedy musí existovat vztah (*Pauli-Fierzova transformace*)

$$S_Q(1,4;3,2) = \sum_{Q'} C_{Q,Q'} S_{Q'}(1,2;3,4)\,.$$

Na základě výsledků úlohy U.3.3. dokažte, že koeficienty $C_{Q,Q'}$ mají hodnoty uvedené v následující tabulce, v níž řádky a sloupce jsou číslovány proměnnou Q, resp. Q'.

	S	P	V	A	T
S	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$-1/4$	$1/8$
P	$1/4$	$1/4$	$-1/4$	$1/4$	$1/8$
V	1	-1	$-1/2$	$-1/2$	0
A	-1	1	$-1/2$	$-1/2$	0
T	3	3	0	0	$-1/2$

Ukažte, že pro libovolné čtvercové matice U, Z platí

$$\sum_{B=n_Q}^{N_Q} \langle c|\, \mathsf{U}\Gamma_B \,|b\rangle\langle a|\, \mathsf{Z}\Gamma^B \,|d\rangle = \sum_{Q'} D_{Q,Q'} \sum_{A=n_{Q'}}^{N_{Q'}} \langle a|\, \mathsf{Z}\Gamma_A \,|b\rangle\langle c|\, \mathsf{U}\Gamma^A \,|d\rangle\,,$$

kde
$$D_{T,T} \equiv C_{T,T}$$
a
$$D_{Q,Q'} \equiv C_{Q,Q'}\,,\ D_{Q,T} \equiv 2C_{T,Q}\,,\ D_{T,Q'} \equiv \frac{1}{2}C_{T,Q'} \quad \text{pro} \quad Q, Q' \neq T.$$

Hodnoty n_Q, N_Q jsou dány v následující tabulce

Q	n_Q	N_Q
S	1	1
P	12	12
V	2	5
A	13	16
T	6	11

U.3.19. Na základě výsledku úlohy U.3.18. dokažte, že platí

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(1)\,\gamma^{\mu}\,\mathsf{P}_{\pm}\psi(2)\,\bar{\psi}(3)\,\gamma_{\mu}\,(1+a\gamma_5)\,\psi(4) \quad =& \\ & 2\,(1\mp a)\,\bar{\psi}(3)\,\mathsf{P}_{\pm}\psi(2)\,\bar{\psi}(1)\,\mathsf{P}_{\mp}\psi(4) \\ & -(1\pm a)\,\bar{\psi}(3)\,\gamma_{\mu}\,\mathsf{P}_{\pm}\psi(2)\,\bar{\psi}(1)\,\gamma^{\mu}\,\mathsf{P}_{\pm}\psi(4)\,,\end{aligned}$$

kde
$$\mathsf{P}_{\pm} \equiv \frac{1}{2}\,(1\pm\gamma_5)\,.$$

Povšimněte si, že odtud speciálně plynou relace

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(1)\,\gamma^{\mu}\,\mathsf{P}_{\pm}\psi(2)\,\bar{\psi}(3)\,\gamma_{\mu}\mathsf{P}_{\pm}\psi(4) &= -\bar{\psi}(3)\,\gamma_{\mu}\,\mathsf{P}_{\pm}\psi(2)\,\bar{\psi}(1)\,\gamma^{\mu}\,\mathsf{P}_{\pm}\psi(4) \\ \bar{\psi}(1)\,\gamma^{\mu}\,\mathsf{P}_{\pm}\psi(2)\,\bar{\psi}(3)\,\gamma_{\mu}\mathsf{P}_{\mp}\psi(4) &= 2\bar{\psi}(3)\,\mathsf{P}_{\pm}\psi(2)\,\bar{\psi}(1)\,\mathsf{P}_{\mp}\psi(4)\,.\end{aligned}$$

U.3.20. Podle nerelativistické teorie by Hilbertův prostor jednočásticové soustavy měl být charakteristickým prostorem operátoru $\hat{\mathsf{T}}^2$ příslušným k vlastní hodnotě $(-1)^{2s}$, kde s je spin příslušné částice.[138]

---
[138] Viz formule (9.191) v [1].

Ukažte, že také operátor časové inverze diracovské částice této podmínce vyhovuje.

U.3.21. Dokažte, že matice $\mathsf{P}_+(\boldsymbol{p})$ a $\mathsf{P}_\lambda(\boldsymbol{\Sigma}\cdot\widetilde{\boldsymbol{p}})$ vystupující ve formuli (3.300) navzájem komutují.

U.3.22. Ukažte, že pravděpodobnost naměření helicity λ u diracovské částice s impulsem $\boldsymbol{p}$ ve stavu s helicitou v soustavě nekonečného impulsu rovnou $\frac{1}{2}\zeta$ je dána výrazem

$$w_\lambda(\zeta) = \frac{1}{2} + \lambda\zeta D(\boldsymbol{p}),$$

kde

$$D(\boldsymbol{p}) \equiv \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\left(1 - \frac{M^2c^2}{p^3 + p^0}\right).$$

Ukažte, že v případě, kdy $p^3 \gg Mc, |\boldsymbol{p}_\perp|$, odtud dostáváme pro pravděpodobnost, že bude naměřena hodnota helicity odlišná od helicity v soustavě nekonečného impulsu, předpověď

$$w_\lambda(\zeta) \simeq \frac{M^2c^2 + \boldsymbol{p}_\perp^2}{4p_3^2}.$$

U.3.23. Ukažte, že komponenty $s^\mu(-\boldsymbol{v})$ definované formulí (3.331) lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} s^0(-\boldsymbol{v}) &= \frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}}{Mc}, \\ \boldsymbol{s}(-\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{s} + \frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}}{M\left(E + Mc^2\right)}\boldsymbol{p}. \end{aligned}$$

Ukažte, že pro úhel $\alpha(\boldsymbol{p})$ mezi vektory $\boldsymbol{s}(-\boldsymbol{v})$ a $\boldsymbol{p}$ platí

$$\operatorname{tg}\alpha(\boldsymbol{p}) = \frac{Mc^2}{E}\operatorname{tg}\alpha,$$

kde α je úhel mezi vektory $\boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{p}$.
Povšimněte si, že
i) $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \alpha(\boldsymbol{p}) = \pi/2$ pro všechny hodnoty impulsu $\boldsymbol{p}$.
ii) $\alpha < \pi/2 \Rightarrow \alpha(\boldsymbol{p}) < \pi/2$ a přitom $\alpha(\boldsymbol{p})$ monotonně ubývá s růstem

energie tak, že pro $E \to \infty$ $\alpha(\boldsymbol{p}) \to 0$.
iii) $\alpha > \pi/2 \Rightarrow \alpha(\boldsymbol{p}) > \pi/2$ a přitom $\alpha(\boldsymbol{p})$ monotónně roste s růstem energie tak, že pro $E \to \infty$ $\alpha(\boldsymbol{p}) \to \pi$,
tj. pokud je projekce vektoru $\boldsymbol{s}$ do směru impulsu $\boldsymbol{p}$ kladná (záporná), potom se vektor $\boldsymbol{s}(-\boldsymbol{v})$ "stáčí" s růstem energie čím dále tím více do (proti) směru impulsu.
iv) že v případě $\alpha = 0$, tj. pro $\boldsymbol{s} = \widetilde{\boldsymbol{p}}$, platí

$$\begin{aligned} s^0(-\boldsymbol{v}) &= \frac{|\boldsymbol{p}|}{Mc}, \\ \boldsymbol{s}(-\boldsymbol{v}) &= \frac{E}{Mc^2}\widetilde{\boldsymbol{p}}. \end{aligned}$$

Ukažte, že

$$\boldsymbol{s}^2(-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{s}^2 + \left(\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}}{Mc}\right)^2 .$$

U.3.24. Ukažte, že pokud diracovská částice s nenulovou hmotou má impuls $\boldsymbol{p}$ a helicitu λ, potom má spin ve své klidové soustavě orientován ve směru $2\lambda\widetilde{\boldsymbol{p}}$, a tedy platí (srov. (3.332))

$$\gamma_5 \not{s}_{\boldsymbol{p}}\, u(\boldsymbol{p};\, \lambda) = 2\lambda\, u(\boldsymbol{p};\, \lambda)\,,$$

kde čtyřvektor $s_{\boldsymbol{p}}$ má komponenty

$$s^0_{\boldsymbol{p}} = \frac{|\boldsymbol{p}|}{Mc}, \qquad \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}} = \frac{E}{Mc^2}\widetilde{\boldsymbol{p}}.$$

U.3.25. Nechť diracovská částice s impusem $\boldsymbol{p}$ má ve své klidové soustavě spin orientován ve směru $\boldsymbol{s}$. Určete pravděpodobnost, že při měření její helicity bude obdržena hodnota $\frac{1}{2}\lambda$.

U.3.26. Dokažte, že matice $\mathsf{S}(-\boldsymbol{v})$ definovaná formulí (3.300) vyhovuje komutační relaci[139]

$$[\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\Sigma},\, \mathsf{S}(-\boldsymbol{v})] = i\sqrt{\frac{2}{M\,(E+Mc^2)}}\,[\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{p}]\cdot\boldsymbol{\alpha}.$$

[139] Opět z ní vidíme, že bispinor $u(\boldsymbol{p};\varepsilon\boldsymbol{s})$ definovaný formulí (3.320) představuje vlastní vektor matice $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\Sigma}$ pouze tehdy, když vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{s}$ jsou lineárně závislé.

U.3.27. Ukažte, že mezi diracovským hamiltoniánem

$$\hat{\mathsf{H}} \equiv c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{P}} + \beta M c^2$$

a operátory spinu, resp. orbitálního momentu platí relace

$$\left[\hbar \hat{\boldsymbol{L}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = -\left[\hbar \hat{\boldsymbol{S}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = 2ic\,\boldsymbol{\alpha} \times \hat{\boldsymbol{P}},$$

$$\left[\left(\hbar \hat{\boldsymbol{L}}\right)^2, \hat{\mathsf{H}}\right] = 2i\hbar c \left\{ (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{x})\, \hat{\boldsymbol{P}}^2 - \left[\left(\boldsymbol{x} \cdot \hat{\boldsymbol{P}}\right) - i\hbar\right] \left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{P}}\right) \right\}.$$

Všimněte si, že tyto komutátory jsou úměrné rychlosti světla c. Podle nerelativistické kvantové mechaniky orbitální moment i spin volné částice jsou integrály pohybu, a tedy jim odpovídající operátory s hamiltoniánem *komutují*. Na druhé straně kdykoliv je použitelná nerelativistická teorie, musí být její předpovědi prakticky shodné s relativistickými, ve kterých provedeme formálně limitu $c \to \infty$. Na první pohled se proto může zdát, že platnost právě nalezených vztahů znemožňuje, aby teorie opírající se o Diracovu rovnici mohla reprodukovat (*úspěšné*) výsledky nerelativistické kvantové mechaniky. Řešte tento paradox.

U.3.28. Ukažte, že požadavek (3.206) kladený na bispinory odpovídající stavům diracovské částice, vyjádřený v termínech čtyřkomponentových funkcí (3.244), odpovídajících stavům s daným impulsem, lze (při kovariantní normalizaci) vyjádřit ve tvaru

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{2E}} \sum_j b(\boldsymbol{p}, j)\, u(\boldsymbol{p}, j) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}\right).$$

Ukažte, že koeficienty tohoto rozvoje jsou dány výrazem

$$b(\boldsymbol{p}, j) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} u^\dagger(\boldsymbol{p}, j) \int d^3\boldsymbol{x} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}\right) \psi(\boldsymbol{x}).$$

Ukažte, že platí

$$\|\psi\|^2 = \int d^3\boldsymbol{p} \sum_j |b(\boldsymbol{p}, j)|^2.$$

Dokažte, že bispinor $\psi(\boldsymbol{x})$, takový, že

$$\int d^3\boldsymbol{x}\, \psi^\dagger(\boldsymbol{x})\, \psi(\boldsymbol{x}) \neq 0, \infty\,,$$

odpovídá stavu diracovské částice právě tehdy, když pro všechna $\boldsymbol{p}, j$ platí

$$v^\dagger(\boldsymbol{p},\, j) \int d^3\boldsymbol{x} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right) \psi\,(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Dokažte, že konstantní hermitovská matice A může představovat operátor odpovídající nějaké dynamické proměnné diracovské částice jedině tehdy, když pro všechna $\boldsymbol{p}, j, k$ platí

$$v^\dagger(-\boldsymbol{p},\, j)\, \mathsf{A} u(\boldsymbol{p},\, k) = 0.$$

U.3.29. Nechť $f_\pm(p)$ je jakékoliv řešení rovnice

$$(\not{p} \mp Mc)\, f_\pm(p) = 0.$$

Ukažte, že potom pro libovolnou 4×4 matici A platí

$$\pm 2Mc\bar{f}_\pm(p')\,\mathsf{A} f_\pm(p) = \bar{f}_\pm(p')\left(\left\{\mathsf{A}, \frac{\not{p}+\not{p}'}{2}\right\} + \left[\mathsf{A}, \frac{\not{p}-\not{p}'}{2}\right]\right) f_\pm(p)\,.$$

Speciálně pro $\mathsf{A} \equiv \gamma^\mu$ odtud dostáváme *Gordonovu identitu*

$$\pm 2Mc\bar{f}_\pm(p')\,\gamma^\mu f_\pm(p) = \bar{f}_\pm(p')\left((p+p')^\mu - i\,(p-p')_\nu\,\Sigma^{\mu\nu}\right) f_\pm(p)\,.$$

U.3.30. Ukažte, že "operátor polohy" volné diracovské částice v Heisenbergově reprezentaci

$$\hat{\boldsymbol{X}}(t) \equiv \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{\mathsf{H}}\,t\right) \boldsymbol{x} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathsf{H}}\,t\right),$$

kde

$$\hat{\mathsf{H}} \equiv c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{P}} + \beta Mc^2,$$

lze vyjádřit ve tvaru[140]

$$\hat{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{x} + c\hat{\boldsymbol{P}}\hat{\mathsf{H}}^{-1}t + \frac{i}{2}c\left(\boldsymbol{\alpha} - c\hat{\boldsymbol{P}}\hat{\mathsf{H}}^{-1}\right)\hat{\mathsf{H}}^{-1}\left[\exp\left(-\frac{2i}{\hbar}\hat{\mathsf{H}}\,t\right) - 1\right].$$

Jeho odvození se stane téměř triviálním, pokud si povšimnete, že platí antikomutační relace

$$\left\{\left(\hat{\mathsf{H}}\boldsymbol{\alpha} - c\hat{\boldsymbol{P}}\right), \hat{\mathsf{H}}\right\} = 0$$

a díky ní

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{\mathsf{H}}\,t\right)\left(\hat{\mathsf{H}}\boldsymbol{\alpha} - c\hat{\boldsymbol{P}}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathsf{H}}\,t\right) = \left(\hat{\mathsf{H}}\boldsymbol{\alpha} - c\hat{\boldsymbol{P}}\right)\exp\left(-\frac{2i}{\hbar}\hat{\mathsf{H}}\,t\right).$$

U.3.31. Ukažte, že pokud elektromagnetické pole není příliš silné, potom v nerelativistickém režimu je hustota proudu definovaného formulí (3.132) dána výrazem

$$\boldsymbol{j} \equiv c\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi \simeq \frac{\hbar}{2iM}\Phi^\dagger\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\Phi - \frac{e}{Mc}\boldsymbol{A}\Phi^\dagger\Phi + \frac{\hbar}{2M}\mathrm{rot}\Phi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\Phi,$$

kde spinor Φ představuje horní (tj. velké) komponenty bispinoru ψ vyjádřeného v Diracově realizaci.

U.3.32. Nechť bispinor $\psi(x)$ je řešením rovnice (3.391) pro diracovskou částici s hmotou M a nábojem e nacházející se ve vnějším elektromagnetickém poli.

Ukažte, že potom nábojově sdružený bispinor

$$\psi_C(x) \equiv \mathsf{C}\beta\psi^*(x)$$

[140]Povšimněte si, že pokud by na pravé straně následující formule byly pouze první dva členy, potom by nalezený výsledek předpovídal, že časová závislost střední hodnoty polohového vektoru diracovské částice v jakémkoliv stavu by měla odpovídat klasickému pohybu relativistické částice s rychlostí shodnou se střední hodnotou rychlosti v uvažovaném stavu. Přítomnost posledního členu pak byla interpretována tak, že u diracovské částice se přes zmíněný "klasický pohyb" překrývá ještě další, rychlý periodický pohyb (nepřehlédněme, že frekvence v něm zastoupené mají hodnoty $\nu \geq 2Mc^2/\hbar$, což i pro tak lehkou částici jakou je elektron znamená $\nu \geq 1.6 \cdot 10^{21}s^{-1}$), pro který se vžil Schrödingerem zavedený termín *"Zitterbewegung"*.

vyhovuje rovnici, která z rovnice (3.391) vznikne záměnou $e \to -e$, tj. odpovídá diracovské částici s *toutéž* hmotou a s *opačným* nábojem, nacházející se v tomtéž vnějším poli.

U.3.33. Uvažujte dvě inerciální souřadné soustavy. Nechť světobod x, který má ve výchozí soustavě souřadnice x^μ, je v druhé souřadné soustavě popsán souřadnicemi

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\omega)\, x^\nu + b^\mu \,.$$

Jestliže hodnoty vnějšího elektromagnetického pole lze ve výchozí soustavě popsat pomocí čtyřpotenciálu $A^\mu(x)$, potom z hlediska druhé soustavy jsou popsatelné pomocí čtyřpotenciálu

$$A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu(\omega)\, A^\nu\Big(\Lambda^{-1}\,(x-b)\Big)\,.$$

Nechť bispinor $\psi(x)$ je řešením rovnice

$$\left(i\left[\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}A_\mu(x)\right]\gamma^\mu - \kappa\right)\psi(x) = 0\,. \tag{3.536}$$

Ukažte, že potom bispinor

$$\psi'(x) \equiv \exp\left\{\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right\}\psi\Big(\Lambda^{-1}\,(x-b)\Big)$$

je řešením rovnice

$$\left(i\left[\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}A'_\mu(x)\right]\gamma^\mu - \kappa\right)\psi'\,(x) = 0\,. \tag{3.537}$$

Proto říkáme, že rovnice (3.390) je invariantní vůči (nehomogenním) Lorentzovým transformacím.
Jestliže hodnoty vnějšího pole lze popsat čtyřpotenciálem $A^\mu(x)$, potom totéž je pravdou i o čtyřpotenciálu

$$A'^\mu(x) \equiv A^\mu(x) - \partial^\mu\lambda(x)\,, \tag{3.538}$$

kde $\lambda(x)$ je libovolná skalární funkce. Ukažte, že když bispinor $\psi(x)$ vyhovuje rovnici (3.536), potom bispinor

$$\psi'\,(x) \equiv \psi(x)\exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\lambda(x)\right\} \tag{3.539}$$

vyhovuje rovnici (3.537). Proto říkáme, že rovnice (3.390) je invariantní vůči kalibračním transformacím, tj. vůči současné záměně

$$A^{\mu}(x) \to A'^{\mu}(x)\,, \qquad \psi(x) \to \psi'(x)\,,$$

kde čárkované veličiny jsou definovány formulemi (3.538), (3.539).
Ukažte, že obě tyto vlastnosti invariance má i rovnice

$$\left(i\left[\partial_{\mu} + \frac{ie}{\hbar c}A_{\mu}(x)\right]\gamma^{\mu} + \delta F_{\mu\nu}(x)\,\Sigma^{\mu\nu} - \kappa\right)\psi(x) = 0\,, \tag{3.540}$$

která vznikne z rovnice (3.390) přidáním *Pauliho členu*

$$\delta F_{\mu\nu}(x)\,\Sigma^{\mu\nu}\psi(x)\,,$$

v němž δ je (libovolná) reálná konstanta a

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x)$$

je tenzor uvažovaného vnějšího elektromagnetického pole.
Ukažte, že pokud pohybovou rovnicí diracovské částice je rovnice (3.540), potom magnetický moment této částice má hodnotu

$$\mu = \frac{e\hbar}{2Mc} - 2\hbar c\delta.$$

U.3.34. Ukažte, že pro libovolný reálný vektor $\boldsymbol{a}$ je matice

$$\mathsf{A}(\boldsymbol{a}) \equiv \exp\{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}\}$$

unitární a lze ji vyjádřit ve tvaru

$$\mathsf{A}(\boldsymbol{a}) = \cos a + (\widetilde{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{\gamma})\sin a,$$

kde $a \equiv |\boldsymbol{a}|$.
Ukažte, že pokud vektor $\boldsymbol{a}$ je (anti)paralelní s $\boldsymbol{p}$, platí

$$\mathsf{A}(\boldsymbol{a})\,\mathsf{H}(\boldsymbol{p})\,\mathsf{A}^{\dagger}(\boldsymbol{a}) = c\,\mathsf{A}^{2}(\boldsymbol{a})\,[Mc - (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma})]\,\beta.$$

Ukažte, že tato matice je úměrná matici β právě tehdy, když

$$a = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{|\boldsymbol{p}|}{Mc},$$

a že potom je

$$\mathsf{A}(\boldsymbol{a})\, \mathsf{H}\,(\boldsymbol{p})\, \mathsf{A}^{\dagger}(\boldsymbol{a}) = \pm E\beta,$$

kde horní, resp. dolní znaménko platí tehdy, když $2a \in \langle 0, \pi/2\rangle$ mod. 2π, resp. $2a \in \langle \pi, 3\pi/2\rangle$ mod. 2π.
Tedy Foldy-Wouthuysenovu transformační matici pro volnou částici lze v p-reprezentaci vyjádřit ve tvaru

$$\exp\{i\mathsf{F}_0\} \equiv \mathsf{S}_0,$$

kde

$$\mathsf{F}_0 \equiv -\frac{i}{2} (\widetilde{\boldsymbol{p}} \cdot \gamma) \operatorname{arctg} \frac{|\boldsymbol{p}|}{Mc},$$

a přitom pod arctg je třeba rozumět "hlavní větev" této funkce.
Ukažte, že

$$\mathsf{S}_0 = \frac{1}{\sqrt{2E\,(E + Mc^2)}} \left[E + Mc^2 + c\,(\boldsymbol{p} \cdot \gamma)\right].$$

U.3.35. Ukažte, že platí

$$\mathsf{S}_0^{\dagger} \hat{\boldsymbol{x}} \mathsf{S}_0 = \hat{\boldsymbol{x}} + i\frac{\hbar c}{2E}\gamma - \frac{\hbar c^2}{2E^2\,(E + Mc^2)} \left\{E\,[\Sigma \times \boldsymbol{p}] + ic\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{p} \cdot \gamma)\right\} \equiv \hat{\boldsymbol{x}}_{FW},$$

kde[141]

$$\hat{\boldsymbol{x}} \equiv i\hbar \boldsymbol{\nabla}$$

a matice S_0 je definována v úloze U.3.34.

U.3.36. Ukažte, že složky operátoru $\hat{\boldsymbol{x}}_{FW}$, definovaného v úloze U.3.35. vyhovují komutačním relacím

$$\begin{aligned} \left[(\hat{\mathsf{x}}_{FW})_j\,, (\hat{\mathsf{x}}_{FW})_k\right] &= 0, \\ \left[(\hat{\mathsf{x}}_{FW})_j\,, p_k\right] &= i\hbar\delta_{jk}\,. \end{aligned}$$

[141] Gradient v následující formuli se samozřejmě týká proměnné $\boldsymbol{p}$.

U.3.37. Ukažte, že pro operátor $\hat{\boldsymbol{x}}_{FW}$ definovaný v úloze U.3.35. platí

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{FW}\,,\mathsf{H}(\boldsymbol{p})\right] = \frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}\frac{\mathsf{H}(\boldsymbol{p})}{E}\,.$$

Pro tento operátor je tedy bispinor odpovídající volné diracovské částici s impulsem $\boldsymbol{p}$ vlastním vektorem příslušným k vlastní hodnotě $c^2\boldsymbol{p}/E$, tak jak očekáváme od operátoru rychlosti.

U.3.38. Ukažte, že platí[142]

$$\mathsf{S}_0^\dagger \Sigma \mathsf{S}_0 = \boldsymbol{\Sigma} + i\frac{c}{2E}\left[\boldsymbol{p}\times\gamma\right] - \frac{c^2}{E\,(E+Mc^2)}\left[\boldsymbol{p}\times\left[\Sigma\times\boldsymbol{p}\right]\right] \equiv \Sigma_{FW}$$

Dokažte, že tato matice komutuje s maticí $\mathsf{H}(\boldsymbol{p})$.
Dokažte, že také operátor

$$\hat{\boldsymbol{L}}_{FW} \equiv \frac{1}{\hbar}\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{FW}\times\boldsymbol{p}\right]$$

komutuje s $\mathsf{H}(\boldsymbol{p})$.

U.3.39. Nechť $\hat{\mathrm{F}}(t)$ je operátorová funkce reálné proměnné t. Ukažte, že derivaci její n-té mocniny lze zapsat ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathsf{F}}^n = n!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{(k+1)!\,(n-1-k)!}\,\hat{\mathsf{F}}^{n-1-k}\,\hat{\mathsf{C}}_k\,,$$

kde k-násobný komutátor

$$\left[\hat{\mathsf{F}},\left[\hat{\mathsf{F}},\cdots\left[\hat{\mathsf{F}},\frac{d}{dt}\hat{\mathsf{F}}\right]\cdots\right]\right] \equiv \hat{\mathsf{C}}_k$$

a

$$\hat{\mathsf{C}}_0 \equiv \frac{d}{dt}\hat{\mathsf{F}}.$$

Na základě tohoto výsledku dokažte relaci

$$\frac{d}{dt}\exp\left(-\hat{\mathsf{F}}\right) = -\exp\left(-\hat{\mathsf{F}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathsf{C}}_n}{(n+1)!}\,.$$

[142] Matice $\frac{1}{2}\Sigma_{FW}$ se někdy nazývá operátorem středního spinu diracovské částice.

U.3.40. Uvažujte Diracovu rovnici

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \left(\beta Mc^2 + c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{P}} + \beta V_S\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\psi(x)$$

popisující částici ve vnějším *skalárním* poli, jehož vliv je popisován "potenciální energií" $\beta V_S(\boldsymbol{x})$. Pomocí Foldy-Wouthuysenovy transformace ukažte, že tato rovnice je až do členů 3. řádu fyzikálně ekvivalentní Pauliho rovnici s hamiltoniánem

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{H}}_P \;\equiv\; & Mc^2 + \frac{\hat{\boldsymbol{P}}^2}{2M} - \frac{\left|\hat{\boldsymbol{P}}\right|^4}{8M^3c^2} \\ & + V_S - \frac{1}{8M^2c^2}\left[4V_S\hat{\boldsymbol{P}}^2 - 4i\hbar\left(\boldsymbol{\nabla}V_S\cdot\hat{\boldsymbol{P}}\right) - \hbar^2\triangle V_S\right] \\ & + \hat{\mathsf{V}}_{SL} + O\left(V_S^2M^{-3}\right),\end{aligned}$$

kde člen

$$\hat{\mathsf{V}}_{SL} \equiv -\frac{\hbar}{(2Mc)^2}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\left[\boldsymbol{\nabla}V_S\times\hat{\boldsymbol{P}}\right],$$

popisující spin-orbitální interakci lze v případě sféricky symetrického pole zapsat ve tvaru

$$\hat{\mathsf{V}}_{SL} = -\left(\frac{\hbar}{2Mc}\right)^2\frac{1}{r}\frac{dV_S}{dr}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}},$$

který se od výrazu (3.442) popisujícího spin-orbitální interakci v případě, kdy šlo o pole *vektorové*[143] liší pouze znaménkem.[144]
Najděte explicitní tvar výše uvedeného výrazu $O\left(V_S^2M^{-3}\right)$.

U.3.41. Uvažujte jednoelektronový atom, případně iont. Nechť E_{nlj} jsou jeho energetické hladiny spočtené v aproximaci, v níž jádro považujeme za pouhý zdroj sféricky symetrického elektrostatického pole (tj. za zadané sféricky symetrické rozdělení náboje). Jádro s nenulovým

[143] Nezapomeňme, že elektromagnetické pole jsme popisovali pomocí čtyřpotenciálu A^μ.

[144] Právě díky tomuto znaménku jsou důsledky spin-orbitální interakce v jaderné spektroskopii opačné než ve spektroskopii atomové.

spinem však má také nenulový magnetický moment. Diskutujte jeho vliv na energetické spektrum[145] uvažovaného atomu v aproximaci, kdy ho považujeme za elementární magnetický dipól $\boldsymbol{\mu}$ lokalizovaný v počátku.
Připomeňme, že pole vyvolané takovýmto dipólem lze popsat pomocí vektorového potenciálu

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}$$

a odpovídající magnetickou indukcí je

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mu}\delta(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{4\pi r^3}\left[\boldsymbol{\mu} - 3(\boldsymbol{\mu}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}})\tilde{\boldsymbol{x}}\right].$$

Magnetickému momentu jádra odpovídá operátor

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = g_A\mu_N\,\hat{\boldsymbol{\imath}},$$

kde jaderný magneton

$$\mu_N \equiv \frac{e\hbar}{2M_Pc}$$

(M_P je hmota protonu $\simeq 938\ MeV/c^2$) a pro operátor spinu jádra jsme užili symbolu $\hat{\boldsymbol{\imath}}$.
Označme J velikost celkového impulsmomentu soustavy elektron plus jádro, j velikost celkového impulsmomentu elektronu a i velikost spinu jádra. Hyperjemná interakce vede k rozštěpení výše zmíněných hladin E_{nlj} v závislosti na velikosti J. Ukažte, že v nejnižším řádu poruchové teorie lze její příspěvek k energetickému spektru vyjádřit ve tvaru

$$\delta E_{nljJ} = \frac{\alpha\hbar^3 g_A}{4cMM_P}\frac{l(l+1)\left[J(J+1) - j(j+1) - i(i+1)\right]}{j(j+1)}\left(r^{-3}\right)_{nl},$$

kde

$$\left(r^{-3}\right)_{nl} \equiv \langle nlm|\left|\hat{\boldsymbol{X}}\right|^{-3}|nlm\rangle$$

a $\hat{\boldsymbol{X}}$ je operátor polohy elektronu. V případě s-stavů je nutno ve výše uvedené formuli provést záměnu

$$l(l+1)\left(r^{-3}\right)_{nl} \to \frac{1}{2}\left|R_{n,l=0}(r=0)\right|^2,$$

[145]Pro odpovídající interakci se užívá termínu *hyperjemná interakce*.

kde $R_{n,l}(r)$ je radiální část vlnové funkce.
Ukažte, že v aproximaci, kdy elektrostatické pole jádra považujeme za ryze coulombické vyvolané bodovým nábojem Ze, lze výše uvedenou formuli zapsat ve tvaru

$$\delta E_{nljJ} = Mc^2 g_A \frac{M}{ZM_P} \frac{(Z\alpha)^4}{2n^3} \frac{J(J+1) - j(j+1) - i(i+1)}{j(j+1)\,(2l+1)}.$$

Pro zadané j, i probíhá J hodnoty $|j-i|, \cdots, j+i$, a tedy podle této formule dochází vlivem hyperjemné interakce k rozštěpení hladiny E_{nlj} na multiplet sestávající z $2k+1$ podhladin, kde

$$k \equiv \min(i, j)\,,$$

přitom nejmenší energie odpovídá stavu s celkovým impulsmomentem $J = |j-i|$. Pro šířku tohoto multipletu dostáváme předpověď

$$\begin{aligned} \triangle E_{nlj} &= \delta E_{nlj\,J=j+i} - \delta E_{nlj\,J=|j-i|} \\ &= Mc^2 \frac{(Z\alpha)^4}{2n^3} \frac{M}{M_P} \frac{2g_A}{Z} \frac{k\,(2K+1)}{j\,(j+1)\,(2l+1)}\,, \end{aligned}$$

kde

$$K \equiv \max\,(i, j)\,.$$

V případě vodíkového atomu je

$$Z = 1, \quad k = i = \frac{1}{2}, \quad K = j, \quad g_A \equiv g_P\,,$$

a tedy

$$\triangle E_{nlj} = Mc^2 \frac{\alpha^4}{2n^3} \frac{M}{M_P} g_P \frac{2j+1}{j\,(j+1)\,(2l+1)}\,.$$

Připomeňme, že experimentální hodnota magnetického momentu protonu odpovídá hodnotě $g_P \simeq 5.6$. Odtud vidíme, že předpovězené rozštěpení je o 2-3 řády menší než v případě *jemné struktury*, tj. než šířka $\triangle E_n$ určená formulí (2.74). Proto se v této souvislosti oprávněně hovoří o *hyperjemné struktuře* energetických hladin. Povšimněte si, že předpovězená šířka hyperjemného rozštěpení energie základního stavu vodíkového atomu je $\triangle E_0 \simeq 5.9 \cdot 10^{-6} eV$. Tento výsledek se obvykle formuluje v termínech odpovídající frekvence jako

$$\triangle E_0 / (2\pi\hbar) \simeq 1.4 \cdot 10^9 s^{-1}.$$

U.3.42. Pokuste se spočíst koeficient odrazu R diracovské částice s energií $E > 0$ od potenciálového skoku výšky $V > 0$ způsobem, který jsme poznali v nerelativistické teorii, tj. nalezením takového stacionárního řešení Diracovy rovnice s hamiltoniánem

$$\hat{\mathsf{H}} \equiv c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{P}} + \beta M c^2 + \theta(z)\, V, \tag{3.541}$$

které před bariérou představuje (formálně) superpozici řešení pro volnou částici s impulsem ve směru $\boldsymbol{e}_3$ ("dopadající vlna") a s impulsem ve směru opačném ("odražená vlna"), kdežto v oblasti schodu se "nešíří" žádná vlna směrem před schod, tj. hledané řešení má mít tvar

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{x}) &= u(\boldsymbol{p}) \exp\Big(\frac{i}{\hbar} pz\Big) + b\, u(-\boldsymbol{p}) \exp\Big(-\frac{i}{\hbar} pz\Big) \quad \text{pro } z \leq 0, \\ \psi(\boldsymbol{x}) &= d\, u(\boldsymbol{q}) \exp\Big(\frac{i}{\hbar} qz\Big) \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{pro } z \geq 0, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= p\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{q} = q\boldsymbol{e}_3\,, \\ p &= \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - M^2c^4}, \\ \mathrm{Im} q &\geq 0. \end{aligned}$$

Ukažte, že tento postup vede k předpovědím:
i) V případě $V < 2Mc^2$:

$$\begin{aligned} R &< 1 \quad \text{pro } E \in \Big(V + Mc^2, \infty\Big), \\ R &= 1 \quad \text{pro } E \in \Big(Mc^2, V + Mc^2\Big). \end{aligned}$$

ii) V případě $V > 2Mc^2$:

$$\begin{aligned} R &< 1 \quad \text{pro } E \in \Big(V + Mc^2, \infty\Big), \\ R &= 1 \quad \text{pro } E \in \Big(V - Mc^2, V + Mc^2\Big), \\ R &> 1 \quad \text{pro } E \in \Big(Mc^2, V - Mc^2\Big). \end{aligned}$$

Poslední řádek představuje tzv. *Kleinův paradox.*
Pokuste se odhalit jeho
a) formální příčinu (spočtěte hustotu proudu pravděpodobnosti odpovídající nalezenému stacionárnímu řešení)
b) fyzikální příčinu (srovnejte spektrum vlastních hodnot operátoru (3.541) pro případ $V > 0$ s jeho spektrem v případě $V = 0$).

U.3.43. Ukažte, že pro "operátor rychlosti" definovaný formulí (3.504) platí
i)

$$\frac{1}{2}\sum_j \frac{u^\dagger(\boldsymbol{p}, j)\,\hat{\boldsymbol{v}}\,u(\boldsymbol{p}, j)}{u^\dagger(\boldsymbol{p}, j)\,u(\boldsymbol{p}, j)} = \frac{c^2}{4E}\boldsymbol{p},$$

kde $u(\boldsymbol{p}, j)$ jsou libovolné jednosloupcové matice vyhovující rovnicím (3.245) a (3.246).
ii)

$$\frac{u^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})\,\hat{\boldsymbol{v}}\,u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})}{u^\dagger(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})\,u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})} = \frac{c^2}{4E}\boldsymbol{p},$$

kde $\boldsymbol{s}$ je libovolný jednotkový vektor a $u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})$ je odpovídající jednosloupcová matice zkonstruovaná podle formule (3.320).

Kapitola 4

Částice

V přírodě se setkáváme s nepřeberným počtem jevů, k jejichž vystižení se jako neocenitelný nástroj jeví pojem "částice". Každá teorie, která aspiruje na to být teorií fyzikální, musí tuto skutečnost adekvátně vystihnout. Kvantová mechanika se o to pokusila ve své nerelativistické i relativistické verzi, a to s pozoruhodným úspěchem. Předpovědi *nerelativistické* teorie byly (a jsou) v neobyčejně dobrém souhlasu s experimentem ve všech případech, kdy se jedná o stavy, v nichž klidové energie částic dominují všem ostatním příspěvkům k hodnotě celkové energie[1]. Navíc, v těchto případech malé odchylky od velice přesných dat bylo možno připsat na vrub (zanedbávaných) relativistických korekcí. Tento názor byl nejen dobře fyzikálně motivován, ale významně podpořen zejména skutečností, že již započtení odpovídajících oprav v nejnižším přiblížení (a to jak co do řádu poruchové teorie, tak co do odchylky relativistického od nerelativistického popisu příslušných fyzikálních veličin) vedlo vesměs k podstatnému zlepšení souhlasu předpovědí s daty. Bylo proto přirozené očekávat, že dalšího zlepšení bude dosaženo, když se podaří příslušný problém adekvátně formulovat v rámci *relativistické* kvantové *mechaniky*. Na řadě konkrétních případů (zejména z oblasti spektroskopie) se ukázalo, že toto očekávání nebylo neoprávněné – pokud jde o jevy dominované klidovou energií příslušných částic. Je téměř nemyslitelné, že by šlo o pouhou náhodu. Máme proto dobré

[1] O stavech, které představují superpozici stacionárních stavů, v níž hlavní příspěvky připadají na ty, jejichž energie jsou dominovány klidovými energiemi příslušných částic, říkáme, že v nich "dominuje nerelativistcký režim".

důvody předpokládat, že kvantová mechanika (relativistická i nerelativistická) adekvátně popisuje[2] *mnoho* stránek (téměř všechny, se kterými se máme možnost setkat v běžném životě, ale i celé řady dalších) fyzikálního světa.

Na druhé straně je zřejmé, že kvantová mechanika *nemůže* poskytnout rámec pro adekvátní popis *všech* stránek fyzikálního světa – a to zcela nezávisle na tom, zda se jedná o teorii, která je, či není plně vnitřně konzistentní z hlediska čistě matematického. V tomto případě není podstatné to, že jde o teorii *kvantovou*, ale že jde o *mechaniku*, tj. o teorii, v níž systém je určen zadáním počtu a druhů částic, "které tento systém tvoří". Jinými slovy řečeno, mechanika představuje teorii, která ex definitione nepřipouští žádné procesy, při nichž dochází ke změnám počtu a/nebo druhů částic, a to ani vlivem vnějších polí, ani v důsledku interakce mezi jednotlivými částicemi systému samotného. Na druhé straně dnes víme, že nepřeberné množství nejrůznějších druhů takovýchto procesů bylo nade vši pochybnost pozorováno. Vždy přitom jde o procesy, v nichž dochází ke "změnám energie jednotlivých částic" tak velkým, že jsou srovnatelné s klidovou energií některé částice, tj. procesy probíhající daleko od nerelativistického režimu.

Je dobře si připomenout, že relativistická kvantová mechanika naráží na zásadní problémy právě tehdy, když se ji pokusíme aplikovat ve výše naznačené oblasti. Vzpomeňme alespoň na problém vázaných stavů v extrémně silném coulombickém poli, či na Kleinův paradox. Také problém s popisem částice lokalizované s přesností převyšující Comptonovu vlnovou délku spadá do zmíněné oblasti. Z Heisenbergových relací neurčitosti totiž víme, že při měření kinetické energie[3] částice v takovémto stavu by se značnou pravděpodobností měla být zjištěna hodnota převyšující její energii klidovou, jinými slovy řečeno, vliv zařízení (filtru, vnějšího pole,...) na částici, kterou má lokalizovat, je tak silný, že je jí schopno předat energii převyšující energii klidovou. Z tohoto hlediska fakt, že relativistická kvantová mechanika přestává být vnitřně konzistentní právě v této oblasti, je možno považovat za její *klad*. Signalizuje totiž, že představuje aproximaci k nějaké bohatší teorii, teorii fyzikálního systému, jehož *stavy* budou moci "obsahovat"

[2]Přesněji řečeno, že poskytuje adekvátní rámec k popisu

[3]V klidové soustavě, tj. v soustavě, v níž je střední hodnota impulsu rovna nule.

různé počty částic a přitom v procesech dominovaných nerelativistickým režimem bude dynamika stavu se zadanými počty jednotlivých druhů částic jen málo ovlivňována faktem, že se systém může nacházet i ve stavech s jinými počty a/nebo druhy částic.

Jestliže zmíněná bohatší teorie má být teorií kvantovou, potom naznačená situace může nastat, když stavy s pevně zadaným počtem jednotlivých druhů částic jsou zobrazovány elementy nějakého podprostoru $\mathcal{H}_P$ Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ přiřazeného zmíněnému systému. Pokud dynamika celého systému je determinována hamiltoniánem $\hat{\mathsf{H}}$, potom *kvantově mechanická aproximace* popisu dynamiky soustavy výše zmíněných částic bude zřejmě determinována nějakým "efektivním hamiltoniánem" $\hat{\mathsf{H}}_P$, pro který platí

$$\hat{\mathsf{H}}_P = \hat{\mathsf{P}}\hat{\mathsf{H}}_\mathsf{P}\hat{\mathsf{P}},$$

kde $\hat{\mathsf{P}}$ je projekční operátor na podprostor $\mathcal{H}_P$. Úspěch kvantové mechaniky pak signalizuje, že pro ty vektory $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_P$, které odpovídají stavům dominovaným nerelativistickým režimem, řešení pohybové rovnice[4]

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle &= \hat{\mathsf{H}}\,|\psi(t)\rangle\,, \\ |\psi(t_0)\rangle &= |\psi\rangle \end{aligned}$$

je prakticky ekvivalentní[5] s řešením rovnice

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle &= \hat{\mathsf{H}}_P\,|\psi(t)\rangle\,, \\ |\psi(t_0)\rangle &= |\psi\rangle\,. \end{aligned}$$

Zatímco v případě mechaniky je otázka, zda umožňuje formulovat výroky v termínech opírajících se o pojem "částice", téměř triviální,[6] v obecném případě tomu tak ani zdaleka není. Na základě čeho máme rozhodnout, zda nějaká kvantová teorie je schopna vystihnout jevy, které popisujeme v termínech částic? K tomu, abychom mohli v rámci

[4]Počínaje touto kapitolou budeme – pokud nebude řečeno něco jiného – užívat jednotky, v nichž $\hbar = c = 1$.

[5]v časovém intervalu $\langle t_0, t)$, odpovídajícím studovanému procesu

[6]Je ex definitione konstruována tak, aby popisovala "chování příslušných částic".

nějaké teorie adekvátně popsat situaci, kdy v běžném jazyce mluvíme o individuální částici, je zřejmě nezbytné, aby fyzikální systém popisovaný takovouto teorií mohl být ve *stavech,* které takovéto částici odpovídají. To mj. znamená, že spektrum celkového impulsu a energie tohoto systému musí obsahovat takové hodnoty P^μ, že

$$P_\mu P^\mu = M^2,$$

kde M je hmota zmíněné částice.

Z předchozího již víme, že v kvantové teorii operátor celkového impulsu a energie libovolného systému je třeba identifikovat s operátory reprezentující generátory prostoro-časových translací. Tedy v kvantové teorii otázka existence jednočásticových stavů nějakého systému intimně souvisí s otázkou reprezentace Poincaréovy grupy na Hilbertově prostoru tohoto systému. Ve skutečnosti jde jen o jeden z aspektů klíčové role, kterou tato grupa hraje v relativistické kvantové teorii. Právě z tohoto hlediska se proto věnujme Poincaréově grupě trochu podrobněji.

4.1 Poincaréova grupa

4.1.1 Translace

Řekneme, že nová souřadná soustava vznikla z výchozí translací $T(a)$, pokud je vůči ní v klidu, její souřadné osy jsou paralelní s výchozími, pouze počátek je posunut do místa $(-\boldsymbol{a})$ a škála na jejích hodinách je posunuta (ve směru "pohybu ručiček") o hodnotu $(-a^0)$.

Jestliže souřadnice světobodu mají ve výchozí soustavě hodnotu x^μ, potom z hlediska nové souřadné soustavy mají souřadnice *téhož* světobodu hodnotu

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu. \tag{4.1}$$

Je zřejmé, že dvě po sobě provedené translace představují opět translaci a přitom výsledek je nezávislý na pořadí, v jakém byly zmíněné dvě translace provedeny. Všechny možné takovéto translace tvoří čtyřparametrickou abelovskou grupu (translací v Minkowského prostoru), jejíž elementy jsou jednoznačně určeny hodnotami parametrů a^μ tak,

že
$$T(a)\,T(b) = T(a+b)\,. \tag{4.2}$$

Tedy v každé reprezentaci této grupy lze operátor $\hat{\mathsf{U}}(a)$ přiřazený elementu $T(a)$ zapsat ve tvaru

$$\hat{\mathsf{U}}(a) = \exp\Big(ia_\mu \hat{\mathsf{P}}^\mu\Big)\,, \tag{4.3}$$

kde operátory $\hat{\mathsf{P}}^\mu$ reprezentující generátory této grupy všechny navzájem komutují
$$\Big[\hat{\mathsf{P}}^\mu, \hat{\mathsf{P}}^\nu\Big] = 0. \tag{4.4}$$

4.1.2 Nehomogenní vlastní Lorentzovy transformace

Translace můžeme ovšem "skládat" také s Lorentzovými transformacemi. Jestliže nová soustava vznikne transformací $G\Big(\Lambda\Big(\omega_{(1)}\Big)\,, a_{(1)}\Big)$ z výchozí tak, že nejprve provedeme vlastní Lorentzovu transformaci $\Lambda\Big(\omega_{(1)}\Big)$ a po ní translaci $T\Big(a_{(1)}\Big)$, potom hodnoty souřadnic téhož světobodu v nové a výchozí soustavě spolu souvisí vztahem

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\Big(\omega_{(1)}\Big)\,x^\nu + a^\mu_{(1)}\,. \tag{4.5}$$

Přejdeme-li z této soustavy opět do další, tranformací $G\Big(\Lambda\Big(\omega_{(2)}\Big)\,, a_{(2)}\Big)$, potom v takto vzniklé soustavě bude mít uvažovaný světobod souřadnice

$$\begin{aligned} x''^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu\Big(\omega_{(2)}\Big)\,x'^\nu + a^\mu_{(2)} \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho\Big(\omega_{(2)}\Big)\,\Big[\Lambda^\rho{}_\nu\Big(\omega_{(1)}\Big)\,x^\nu + a^\rho_{(1)}\Big] + a^\mu_{(2)} \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu\Big(\omega_{(1,2)}\Big)\,x^\nu + a^\mu_{(1,2)}\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

kde
$$\Lambda^\mu{}_\nu\Big(\omega_{(1,2)}\Big) \equiv \Lambda^\mu{}_\rho\Big(\omega_{(2)}\Big)\,\Lambda^\rho{}_\nu\Big(\omega_{(1)}\Big) \tag{4.7}$$

představuje opět vlastní Lorentzovu transformaci a

$$a^\mu_{(1,2)} \equiv \Lambda^\mu{}_\rho\Big(\omega_{(2)}\Big)\,a^\rho_{(1)} + a^\mu_{(2)}\,. \tag{4.8}$$

Jinými slovy řečeno, do poslední soustavy jsme mohli přejít také přímo ze soustavy výchozí provedením nejprve vlastní Lorentzovy transformace $\Lambda\big(\omega_{(1,2)}\big)$, následované translací $T\big(a_{(1,2)}\big)$. Tedy všechny takovéto transformace tvoří grupu a násobení mezi jejími elementy $G(\Lambda(\omega), a)$ je determinováno relací

$$\begin{aligned} G\Big(\Lambda\big(\omega_{(2)}\big), a_{(2)}\Big)\, G\Big(\Lambda\big(\omega_{(1)}\big), a_{(1)}\Big) &= \\ G\Big(\Lambda\big(\omega_{(2)}\big)\,\Lambda\big(\omega_{(1)}\big), \Lambda\big(\omega_{(2)}\big)\, a_{(1)} + a_{(2)}\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Tato desetiparametrická Lieova grupa se nazývá *Poincaréovou* grupou[7] $\mathcal{P}$.

4.1.3 Reprezentace Poincaréovy grupy

Vzhledem k tomu, že libovolný element Poincaréovy grupy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$G(\Lambda(\omega), a) = G(1, a)\, G(\Lambda(\omega), 0)\,, \tag{4.10}$$

bude také v každé reprezentaci platit analogický vztah mezi odpovídajícími operátory

$$\hat{\mathsf{U}}(\omega, a) = \hat{\mathsf{U}}(a)\, \hat{\mathsf{U}}(\omega)\,. \tag{4.11}$$

Přitom víme, že operátory přiřazené translacím $T(a)$, resp. vlastním Lorentzovým transformacím $\Lambda(\omega)$ musí mít tvar (4.3), resp.[8]

$$\hat{\mathsf{U}}(\omega) = \exp\Big(\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\hat{\mathsf{M}}^{\mu\nu}\Big)\,, \tag{4.12}$$

kde operátory $\hat{\mathsf{P}}^{\mu}$, $\hat{\mathsf{M}}^{\mu\nu}$ odpovídají generátorům těchto transformací, a tedy musí vyhovovat komutačním relacím (4.4), resp.[9]

$$\Big[\hat{\mathsf{M}}^{\mu\nu}, \hat{\mathsf{M}}^{\rho\sigma}\Big] = i\,\Big(g^{\mu\sigma}\,\hat{\mathsf{M}}^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}\,\hat{\mathsf{M}}^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho}\,\hat{\mathsf{M}}^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma}\,\hat{\mathsf{M}}^{\mu\rho}\Big) \tag{4.13}$$

v každé reprezentaci grupy translací, resp. vlastní Lorentzovy grupy. Tyto relace samy o sobě ovšem ještě nezaručují, že operátory $\hat{\mathsf{U}}(\omega, a)$

[7] Nebo též nehomogenní (vlastní) Lorentzovou grupou.
[8] Srovnej s formulí (1.35).
[9] Srovnej s relací (1.33).

definované pravou stranou formule (4.11) vyhovují relacím (viz (4.7) – (4.9))

$$\hat{U}\left(\omega_{(1,2)}, a_{(1,2)}\right) = \hat{U}\left(\omega_{(2)}, a_{(2)}\right) \hat{U}\left(\omega_{(1)}, a_{(1)}\right) \tag{4.14}$$

i tehdy, když se nejedná o pouhé skládání dvou translací, nebo skládání dvou vlastních Lorentzových transformací. K tomu, aby tomu tak bylo, musí být evidentně splněny ještě relace mezi operátory $\hat{P}^\mu$ a $\hat{M}^{\mu\nu}$, odpovídající zákonům skládání translací s vlastními Lorentzovými transformacemi, tj. musí např. platit

$$\hat{U}(\omega, 0)\, \hat{U}(1, a)\, \hat{U}(-\omega, 0) = \hat{U}(1, \Lambda(\omega)\, a)\,. \tag{4.15}$$

Zderivováním této relace pro $a = 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{U}(\omega)\, \hat{P}^\mu\, \hat{U}^{-1}(\omega) &= \Lambda_\nu{}^\mu(\omega)\, \hat{P}^\nu \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu(-\omega)\, \hat{P}^\nu, \end{aligned} \tag{4.16}$$

a tedy do veličin prvního řádu v ω

$$\left(1 + \frac{i}{2}\, \omega_{\alpha\beta} \hat{M}^{\alpha\beta}\right) \hat{P}^\mu \left(1 - \frac{i}{2}\, \omega_{\alpha\beta} \hat{M}^{\alpha\beta}\right) = \hat{P}^\mu + \omega^\mu{}_\nu\, \hat{P}^\nu,$$

tj.

$$\frac{i}{2}\, \omega_{\alpha\beta} \left[\hat{M}^{\alpha\beta}, \hat{P}^\mu\right] = \omega_{\alpha\nu}\, g^{\mu\alpha}\, \hat{P}^\nu.$$

S využitím toho, že $\hat{M}^{\mu\nu} = -\hat{M}^{\nu\mu}$ a

$$\frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial \omega_{\rho\sigma}} = \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\rho}\,, \tag{4.17}$$

odtud dostáváme

$$\left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{P}^\rho\right] = i \left(g^{\nu\rho}\, \hat{P}^\mu - g^{\mu\rho}\, \hat{P}^\nu\right). \tag{4.18}$$

Snadno se lze přesvědčit, že tyto komutační relace, spolu s dříve nalezenými (4.4), (4.13):

$$\left[\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu\right] = 0, \tag{4.19}$$

$$\left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{M}^{\rho\sigma}\right] = i \left(g^{\mu\sigma}\, \hat{M}^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}\, \hat{M}^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho}\, \hat{M}^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma}\, \hat{M}^{\mu\rho}\right), \tag{4.20}$$

již zajišťují, že operátory (4.11) vyhovují relacím (4.14) pro *všechny* elementy Poincaréovy grupy.

Libovolné operátory $\hat{\mathsf{M}}^{\mu\nu}, \hat{\mathsf{P}}^{\rho}$ vyhovující komutačním relacím (4.18) – (4.20) realizují reprezentaci *Poincaréovy algebry*. Zavedeme-li (srov. definice (1.32)) operátory

$$\hat{\mathsf{H}} \equiv \hat{\mathsf{P}}^0, \tag{4.21}$$

$$\hat{\mathsf{J}}_k \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}\hat{\mathsf{M}}^{lm}, \tag{4.22}$$

$$\hat{\mathsf{K}}_j \equiv \hat{\mathsf{M}}^{0j}, \tag{4.23}$$

můžeme výše uvedené komutační relace definující Poincaréovu algebru ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\left[\hat{\mathsf{P}}_j, \hat{\mathsf{P}}_k\right] = \left[\hat{\boldsymbol{P}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = \left[\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = 0, \tag{4.24}$$

$$\left[\hat{\mathsf{J}}_j, \hat{\mathsf{J}}_k\right] = -\left[\hat{\mathsf{K}}_j, \hat{\mathsf{K}}_k\right] = i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathsf{J}}_l\,, \tag{4.25}$$

$$\left[\hat{\mathsf{J}}_j, \hat{\mathsf{P}}^k\right] = i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathsf{P}}^l, \tag{4.26}$$

$$\left[\hat{\mathsf{J}}_j, \hat{\mathsf{K}}_k\right] = i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathsf{K}}_l\,, \tag{4.27}$$

$$\left[\hat{\mathsf{K}}_j, \hat{\mathsf{P}}^k\right] = -i\delta_{jk}\hat{\mathsf{H}}, \tag{4.28}$$

$$\left[\hat{\boldsymbol{K}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = -i\hat{\boldsymbol{P}}. \tag{4.29}$$

Casimirovy operátory Poincaréovy grupy

Z Schurova lemmatu víme, že libovolný výraz utvořený z generátorů grupy, který se všemi generátory komutuje, musí být v každé ireducibilní reprezentaci realizován nějakým násobkem operátoru identity. Takové výrazy budeme nazývat *Casimirovými operátory* (srov. Doplněk L v [1]). Prostor libovolné ireducibilní reprezentace grupy tak představuje charakteristický podprostor každého Casimirova operátoru příslušný k nějaké jeho vlastní hodnotě. Díky tomu lze ireducibilní reprezentace jednoznačně (až na ekvivalenci) určit zadáním odpovídajících vlastních hodnot všech nezávislých Casimirových operátorů.

V případě Poincaréovy grupy jsme již nalezli, že generátory translací se vůči vlastním Lorentzovým transformacím chovají jako čtyřvektor, tj. že pro ně platí relace (4.16). Zcela analogicky zjistíme, že generátory vlastní Lorentzovy grupy se transformují jako komponenty antisymetrického tenzoru druhého řádu, tj. platí

$$\hat{\mathsf{U}}^{-1}(\omega)\,\hat{\mathsf{M}}^{\mu\nu}\,\hat{\mathsf{U}}(\omega) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\omega)\,\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}(\omega)\,\hat{\mathsf{M}}^{\rho\sigma}. \tag{4.30}$$

Pomocí nich tedy můžeme běžným způsobem (násobením, úžením) konstruovat další tenzorové veličiny. Tak např. okamžitě vidíme, že pro operátor

$$\hat{P}^2 \equiv \hat{\mathsf{P}}_{\mu}\,\hat{\mathsf{P}}^{\mu} \tag{4.31}$$

platí

$$\left[\hat{\mathsf{U}}(\omega)\,,\hat{P}^2\right] = 0 \tag{4.32}$$

a díky komutačním relacím (4.19) také

$$\left[\hat{\mathsf{U}}(a)\,,\hat{P}^2\right] = 0. \tag{4.33}$$

Tedy $\hat{\boldsymbol{P}}^2$ představuje Casimirův operátor Poincaréovy grupy.

Definujme *vektor Pauli-Lubanského*

$$\hat{\mathsf{W}}^{\mu} \equiv -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\hat{\mathsf{M}}_{\nu\rho}\,\hat{\mathsf{P}}_{\sigma}\,. \tag{4.34}$$

Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby se přesvědčil, že takto definované operátory se nejen skutečně chovají vůči vlastním Lorentzovým transformacím jako komponenty čtyřvektoru, tj. splňují relaci

$$\hat{\mathsf{U}}^{-1}(\omega)\,\hat{\mathsf{W}}^{\mu}\,\hat{\mathsf{U}}(\omega) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\omega)\,\hat{\mathsf{W}}^{\nu}, \tag{4.35}$$

ale také komutují se všemi generátory translací, tj. platí

$$\left[\hat{\mathsf{W}}^{\mu},\hat{\mathsf{P}}^{\nu}\right] = 0. \tag{4.36}$$

Odtud pak okamžitě vidíme, že také operátor

$$\hat{W}^2 \equiv \hat{\mathsf{W}}_{\mu}\hat{\mathsf{W}}^{\mu} \tag{4.37}$$

je Casimirovým operátorem Poincaréovy grupy.

Pro další je užitečné si všimnout, že komponenty Pauli-Lubanského vektoru lze též zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{W}}^0 &= \hat{\boldsymbol{P}}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}, \\ \hat{\boldsymbol{W}} &= \hat{\mathsf{H}}\,\hat{\boldsymbol{J}} - \left[\hat{\boldsymbol{P}}\times\hat{\boldsymbol{K}}\right]. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Unitární reprezentace Poincaréovy grupy

Podle teorie relativity jsou všechny souřadné soustavy, které spolu souvisejí nějakou transformací patřící do Poincaréovy grupy $\mathcal{P}$, navzájem ekvivalentní. Tedy jestliže nějakému fyzikálnímu systému přiřadíme ve vybrané soustavě Hilbertův prostor $\mathcal{H}$, potom *tentýž* Hilbertův prostor lze přiřadit tomuto systému v každé soustavě, kterou z ní obdržíme jakoukoliv transformací $G(\Lambda(\omega)\,,a) \in \mathcal{P}$. Jestliže z hlediska výchozí soustavy je systém ve stavu popsaném vektorem $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, potom z hlediska transformované soustavy je ve stavu, který lze popsat vektorem

$$|\psi'\rangle \equiv \hat{\mathsf{U}}(\omega, a)\,|\psi\rangle \in \mathcal{H}. \tag{4.39}$$

Přitom bez újmy na obecnosti můžeme požadovat,[10] aby

$$\|\psi'\| = \|\psi\|\,. \tag{4.40}$$

Z Wignerovy věty[11] víme, že operátor $\hat{\mathsf{U}}(\omega, a)$ musí být unitární lineární, nebo antilineární. Protože spojitou změnou hodnot parametrů lze transformaci $G(\Lambda(\omega)\,,a)$ převést v transformaci identickou, tj. v transformaci $G(1, a)$, nemůže operátor $\hat{\mathsf{U}}(\omega, a)$ být antilineárním.

Operátory $\hat{\mathsf{U}}(\omega, a)$ musí respektovat zákon skládání uvažovaných transformací. Pokud by stavům byly přiřazeny *vektory*, plynula by odtud podmínka

$$\hat{\mathsf{U}}\Big(g_{(2)}\Big)\,\hat{\mathsf{U}}\Big(g_{(1)}\Big) = \hat{\mathsf{U}}\Big(g_{(1,2)}\Big)\,, \tag{4.41}$$

kde jsme pro zjednodušení označili

$$\hat{\mathsf{U}}\Big(g_{(j)}\Big) \equiv \hat{\mathsf{U}}\Big(\omega_{(j)}, a_{(j)}\Big)\,. \tag{4.42}$$

Jinými slovy řečeno, v takovémto případě by operátory $\hat{\mathsf{U}}(g)$ musely realizovat unitární reprezentaci Poincaréovy grupy na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Skutečnost, že stavům nejsou přiřazeny vektory, ale paprsky, vede k tomu, že důsledky zákona skládání transformací jsou slabší – musí platit pouze relace

$$\hat{\mathsf{U}}\Big(g_{(2)}\Big)\,\hat{\mathsf{U}}\Big(g_{(1)}\Big) = \exp\Big\{i\,\varphi\Big(g_{(2)}, g_{(1)}\Big)\Big\}\,\hat{\mathsf{U}}\Big(g_{(1,2)}\Big)\,, \tag{4.43}$$

---

[10] Nezapomeňme, že stavům jsou přiřazeny paprsky a je jen na nás, který z vektorů k paprsku náležejících si vybereme k jeho určení.

[11] Viz Doplněk B v [1]. V nejnovější literatuře lze její důkaz nalézt např. v [10].

kde $\varphi\big(g_{(2)}, g_{(1)}\big)$ je reálná funkce naznačených parametrů, tj. operátory $\hat{\mathsf{U}}(g)$ musí tvořit *projektivní reprezentaci* grupy. Ukazuje se, že v případě Poincaréovy grupy se ve skutečnosti stačí omezit na vyšetřování jejích reprezentací, pokud pod pojem "reprezentace" zahrneme i reprezentace "dvojznačné".

Uvedené výsledky představují speciální případ mnohem obecněji platných závěrů, které hrají důležitou roli i v mnoha dalších oblastech. Zde je pouze stručně shrneme: Jestliže unitární operátory $\hat{\mathsf{U}}(g)$, definované na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ tvoří projektivní reprezentaci N-parametrické Lieovy grupy $\mathcal{G}$, potom tyto operátory lze zapsat jako

$$\hat{\mathsf{U}}(g(\alpha)) = \exp\left\{i\sum_{a=1}^{N}\alpha_a\,\hat{\mathsf{X}}_a\right\}, \tag{4.44}$$

kde α_a jsou reálné parametry a $\hat{\mathsf{X}}_a$ jsou samosdružené operátory. Z požadavku, aby vztah (4.43) platil pro $\alpha_a \to 0$ (tj. v blízkosti jednotkového elementu grupy $\mathcal{G}$), nalezneme, že tyto operátory musí vyhovovat komutačním relacím

$$\left[\hat{\mathsf{X}}_a, \hat{\mathsf{X}}_b\right] = i\sum_{c=1}^{N} C^c{}_{ab}\,\hat{\mathsf{X}}_c + i\,C_{ab}, \tag{4.45}$$

kde $C^c{}_{ab}$ jsou strukturní konstanty[12] grupy $\mathcal{G}$ a

$$C_{ab} = -C_{ba} \tag{4.46}$$

jsou reálná čísla, která musí vyhovovat relacím

$$\sum_{c=1}^{N}\left(C^c{}_{ab}\,C_{cd} + C^c{}_{bd}\,C_{ca} + C^c{}_{da}\,C_{cb}\right) = 0 \quad \text{pro} \quad a, b, d = 1, \cdots, N. \tag{4.47}$$

Pro poslední členy na pravé straně komutačních relací (4.45) (které je samozřejmě třeba chápat jako příslušné násobky operátoru identity) se užívá názvu *centrální náboje* (central charges). Jsou to tedy pouze centrální náboje, které v *okolí jednotkového elementu* grupy $\mathcal{G}$ determinují

[12]Pokud čtenáři není jasný význam některých termínů z teorie grup, kterých zde užíváme, nalezne jejich definice v [1] – Doplněk L.

odlišnost operátorů realizujících projektivní reprezentaci od operátorů realizujících reprezentaci téže grupy.

Někdy ovšem může jít o odlišnost zcela nepodstatnou: Předpokládejme, že na prostoru $\mathcal{H}$ existuje i unitární reprezentace grupy $\mathcal{G}$, tj. existují unitární operátory $\hat{\hat{\mathsf{U}}}(g)$, pro které platí

$$\hat{\hat{\mathsf{U}}}\Big(g_{(2)}\Big)\,\hat{\hat{\mathsf{U}}}\Big(g_{(1)}\Big) = \hat{\hat{\mathsf{U}}}\Big(g_{(1,2)}\Big)\,. \tag{4.48}$$

Přitom víme, že je lze vyjádřit ve tvaru

$$\hat{\hat{\mathsf{U}}}(g(\alpha)) = \exp\left\{i\sum_{a=1}^{N}\alpha_a\hat{\hat{\mathsf{X}}}_a\right\}, \tag{4.49}$$

kde operátory $\hat{\hat{\mathsf{X}}}_a$ vyhovují komutačním relacím

$$\left[\hat{\hat{\mathsf{X}}}_a,\hat{\hat{\mathsf{X}}}_b\right] = i\sum_{c=1}^{N}C^c{}_{ab}\,\hat{\hat{\mathsf{X}}}_c\,. \tag{4.50}$$

Definujeme-li

$$\hat{\mathsf{X}}_a \equiv \hat{\hat{\mathsf{X}}}_a + \xi_a\,, \tag{4.51}$$

kde ξ_a jsou libovolná (pevně zadaná) reálná čísla, potom snadno zjistíme, že tyto operátory vyhovují komutačním relacím (4.45), v nichž

$$C_{ab} = -\sum_{c=1}^{N}C^c{}_{ab}\,\xi_c\,, \tag{4.52}$$

a operátory (4.44) vyhovují relacím (4.43), v nichž

$$\varphi\Big(g_{(2)},g_{(1)}\Big) = \sum_{a=1}^{N}\Big[\alpha_a(2)+\alpha_a(1)-\alpha_a(1,2)\Big]\xi_a\,. \tag{4.53}$$

Konstanty (4.52) pochopitelně vyhovují rovnicím (4.47), důležitější však je, že pro mnohé grupy žádná jiná řešení těchto rovnic *neexistuje,* tj. neexistují pro ně žádné *pravé projektivní* reprezentace.[13] Je možno

[13] Pravou projektivní (intrinsically projective) reprezentací se nazývá taková projektivní reprezentace, kterou nelze pouhou transformací (4.51) generátorů změnit v reprezentaci.

dokázat, že tak tomu je nejen pro všechny poloprosté grupy, ale také např. pro grupu Poincaréovu.

Z uvedeného je zřejmé, že pokud nejde o pravou projektivní reprezentaci, potom v okolí jednotkového elementu je odlišnost projektivní reprezentace od reprezentace naprosto triviální. To však vůbec neznamená, že by to musela být pravda i tehdy, když se vzdálíme z okolí jednotkového elementu. Tak tomu obecně je jedině u grup *jednoduše souvislých*. Na druhé straně však víme, že ke každé m-násobně souvislé grupě $\mathcal{G}$ existuje právě jedna *univerzální pokrývací grupa* $\widetilde{\mathcal{G}}$, tj. grupa, která je jednoduše souvislá a přitom může být homomorfně (lokálně izomorfně) zobrazena na $\mathcal{G}$. Každá z reprezentací grupy $\widetilde{\mathcal{G}}$ je buď reprezentací grupy $\mathcal{G}$, nebo je její víceznačnou (až m-značnou) reprezentací. Odtud vidíme, že výše uvedený výrok o tom, že projektivní reprezentace, pokud nejsou pravými projektivními, se jen triviálně liší od reprezentací, je obecně platným, pokud pod termín reprezentace zahrneme v případě vícenásobně souvislých grup i reprezentace víceznačné.

Připomeňme, že jak grupa rotací v třírozměrném Euklidově prostoru ($\equiv SO(3)$), tak vlastní Lorentzova grupa ve čtyřrozměrném Minkowského prostoru ($\equiv SO(3,1)$) jsou grupami dvojnásobně souvislými. Odpovídající univerzální pokrývací grupou v těchto případech je grupa $SU(2)$, resp. $SL(2,C)$[14].

Wignerova konstrukce unitárních ireducibilních reprezentací Poincaréovy grupy

Z předchozího víme, že
i) nemusíme separátně vyšetřovat projektivní reprezentace, pokud mezi studované reprezentace zahrneme i reprezentace dvojznačné;
ii) libovolný vektor z prostoru každé pevně vybrané ireducibilní repre-

[14] $SO(n)$ je grupou všech ortogonálních $n \times n$ matic s determinantem rovným jedné;

$SO(m,n)$ je grupou vlastních Lorentzových transformací Minkowského prostoru s m prostorovými a n časovými dimenzemi (tj. metrický tenzor $g_{\mu\nu}$ je diagonální a na diagonále se m-krát vyskytuje -1 a n-krát $+1$);

$SU(n)$ je grupou všech unitárních $n \times n$ matic s determinantem rovným jedné;

$SL(n,C)$ je grupou všech komplexních $n \times n$ matic s determinantem rovným jedné.

zentace Poincaréovy grupy je vlastním vektorem operátoru $\hat{\boldsymbol{P}}^2$ příslušným ke *stejné* vlastní hodnotě;
iii) generátory $\hat{\mathsf{P}}^\mu$ všechny navzájem komutují.
Tedy bázi Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ libovolné unitární ireducibilní reprezentace Poincaréovy grupy můžeme utvořit z vektorů $|p,\xi\rangle$, pro které platí

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{P}}^\mu\,|p,\xi\rangle &= p^\mu\,|p,\xi\rangle\,, \\ p_\mu p^\mu &= p^2, \end{aligned} \tag{4.54}$$

kde p^2 je nějaká *reálná*[15] *konstanta* a ξ je parametr, který čísluje nějakou ortogonální bázi v každém charakteristickém podprostoru společných vlastních vektorů operátorů $\hat{\mathsf{P}}^\mu$. Z formule (4.3) pak vidíme, že pokud jde o operátory reprezentující translace, je jejich působení na uvedenou bázi téměř triviální:

$$\hat{\mathsf{U}}(a)\,|p,\xi\rangle = \exp(ip^\mu a_\mu)\,|p,\xi\rangle\,. \tag{4.55}$$

Na druhé straně v případě vlastních Lorentzových transformací z formule (4.16) víme, že

$$\hat{\mathsf{U}}(\omega)\,\hat{\mathsf{P}}^\mu\,|p,\xi\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu(-\omega)\,\hat{\mathsf{P}}^\nu\,\hat{\mathsf{U}}(\omega)\,|p,\xi\rangle\,,$$

tj.

$$p^\mu\,\hat{\mathsf{U}}(\omega)\,|p,\xi\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu(-\omega)\,\hat{\mathsf{P}}^\nu\,\hat{\mathsf{U}}(\omega)\,|p,\xi\rangle\,,$$

což je totéž jako

$$\hat{\mathsf{P}}^\mu\hat{\mathsf{U}}(\omega)\,|p,\xi\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu(\omega)\,p^\nu\,\hat{\mathsf{U}}(\omega)\,|p,\xi\rangle\,. \tag{4.56}$$

Jinými slovy řečeno, vektor $\hat{\mathsf{U}}(\omega)\,|p,\xi\rangle$ patří do charakteristického podprostoru operátorů $\hat{\mathsf{P}}^\mu$ příslušného k vlastním hodnotám

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\omega)\,p^\nu, \tag{4.57}$$

a tedy musí ho být možno vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\hat{\mathsf{U}}(\omega)\,|p,\xi\rangle = \sum_{\xi'} A_{\xi',\xi}(\omega,p)\,|\Lambda(\omega)\,p,\xi'\rangle\,. \tag{4.58}$$

[15]Unitarita reprezentace vyžaduje samosdruženost generátorů $\hat{\mathsf{P}}^\mu$, a tedy realitu vlastních hodnot p^μ.

Odtud vidíme, že do Hilbertova prostoru (kterékoliv pevně zvolené) unitární ireducibilní reprezentace mohou náležet vektory $|p,\xi\rangle, |p',\xi'\rangle$ jedině tehdy, když existuje vlastní Lorentzova transformace $\Lambda(\omega)$ taková, že platí relace (4.57).

Díky tomu můžeme všechny unitární ireducibilní reprezentace Poincaréovy grupy rozdělit podle šesti tříd čtyřvektorů invariantních vůči vlastním Lorentzovým tranformacím, tak jak jsou uvedeny v následující tabulce.

# třídy	Vlastnostosti 4-vektorů	4-vektor k^μ	Malá grupa[16]
1	$p_\mu p^\mu = 0,\ \ p^0 = 0 \Leftrightarrow p^\mu = 0$	$\{0,\mathbf{0}\}$	$SO(3,1)$
2	$p_\mu p^\mu = M^2,\ \ M > 0,\ \ p^0 > 0$	$\{M,\mathbf{0}\}$	$SO(3)$
3	$p_\mu p^\mu = 0,\ \ p^0 > 0$	$\{1,0,0,1\}$	$ISO(2)$
4	$p_\mu p^\mu = M^2,\ \ M > 0,\ \ p^0 < 0$	$\{-M,\mathbf{0}\}$	$SO(3)$
5	$p_\mu p^\mu = 0,\ \ p^0 < 0$	$\{-1,0,0,1\}$	$ISO(2)$
6	$p_\mu p^\mu = -M^2 < 0$	$\{0,0,0,M\}$	$SO(2,1)$

Přitom každý vektor p^μ ze zadané třídy lze získat vhodnou vlastní Lorentzovou transformací z libovolného jiného vektoru téže třídy, speciálně ho tedy můžeme získat transformací "standardního vektoru" k^μ, specifikovaného pro každou třídu v předposledním sloupci tabulky. Tato Lorentzova transformace ovšem není zadáním vektoru p^μ určena jednoznačně. Okamžitě např. vidíme, že pokud je

$$p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\omega)\, k^\nu, \tag{4.59}$$

potom určitě také platí

$$p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\tilde{\omega}) k^\nu, \tag{4.60}$$

kde

$$\Lambda(\tilde{\omega}) \equiv \Lambda(\omega''; p)\, \Lambda(\omega)\, \Lambda(\omega'; k) \tag{4.61}$$

[16] Grupa $ISO(2)$ obsahuje invariantní abelovskou podgrupu ($\equiv T(2)$) translací v rovině. Faktorgrupa $ISO(2)/T(2) = SO(2)$.

a $\Lambda(\omega'; k)$, resp. $\Lambda(\omega''; p)$ je libovolná transformace, vůči níž je čtyřvektor k, resp. p invariantní, tj. platí

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\omega'; k)\, k^{\nu} &= k^{\mu}, \\ \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\omega''; p)\, p^{\nu} &= p^{\mu}. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Snadno nahlédneme, že množina všech vlastních Lorentzových transformací, vůči nimž je invariantní kterýkoliv (pevně vybraný) čtyřvektor p, tvoří podgrupu. Wigner ji nazval *malou grupou* $\mathcal{W}(p)$. Není snad nutno zdůrazňovat, že do malé grupy dvou různých čtyřvektorů patří různé transformace.[17] Podstatné však je, že pro všechny čtyřvektory patřící do téže třídy jsou odpovídající malé grupy navzájem izomorfní, tj. představují pouze různé realizace téže grupy. O kterou grupu se jedná, je uvedeno v posledním sloupci tabulky.

Vraťme se však ke vztahu (4.59). Při pevně zvoleném standardním vektoru dané třídy[18] můžeme z množiny všech transformací $\Lambda(\omega)$, které splňují relaci (4.59), evidentně nějakým předpisem vybrat transformaci jedinou. Pro *tuto* transformaci, která je již zadáním čtyřvektoru p určena jednoznačně, budeme užívat symbolu $\mathsf{L}(p)$. Zdůrazněme ještě jednou, že to, kterou konkrétní Lorentzovu transformaci symbol $\mathsf{L}(p)$ představuje, záleží nejen na p, ale také na výše zmíněném předpisu. Nezávisle na jeho volbě ovšem vždy platí

$$L^{\mu}{}_{\nu}(p)\, k^{\nu} = p^{\mu}. \tag{4.63}$$

V dalším se o některých z těchto předpisů ještě blíže zmíníme. Následující úvahy jsou však na jejich konkretizaci zcela nezávislé.

Dříve zmíněné vektory báze prostoru $\mathcal{H}$ budeme nyní identifikovat s

$$|p, \xi\rangle \equiv N(p)\, \hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p))\, |k, \xi\rangle\,, \tag{4.64}$$

kde $N(p)$ je normalizační konstanta, kterou budeme specifikovat později, a $\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p))$ je operátor, který v uvažované reprezentaci odpovídá výše uvedené transformaci $\mathsf{L}(p)$.[19] Relaci (4.58) pak můžeme pro libo-

[17] A to i tehdy, když oba patří do *téže* třídy.

[18] Níže naznačený postup samozřejmě zůstává v platnosti i tehdy, když volbu standardních vektorů provedeme jinak, než uvedeno v tabulce.

[19] Podobně v následujícím budeme (podle toho, co je typograficky přehlednější, nebo v daném kontextu co do obsahu srozumitelnější) zapisovat např. operátor odpovídající Lorentzově transformaci $\Lambda(\omega)$ jako $\hat{\mathsf{U}}(\Lambda(\omega))$, nebo $\hat{\mathsf{U}}(\omega)$, nebo $\hat{\mathsf{U}}(\Lambda)$ ap.

volnou vlastní Lorentzovu transformaci zapsat ve tvaru

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathsf{U}}(\Lambda)\,|p,\xi\rangle &= N(p)\,\hat{\mathsf{U}}(\Lambda)\,\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p))\,|k,\xi\rangle \\
&= N(p)\,\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(\Lambda p))\,\hat{\mathsf{U}}^\dagger(\mathsf{L}(\Lambda p))\,\hat{\mathsf{U}}(\Lambda)\,\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p))\,|k,\xi\rangle \\
&= N(p)\,\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(\Lambda p))\,\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{W}(\Lambda,p))\,|k,\xi\rangle\,, \qquad (4.65)
\end{aligned}
$$

kde

$$
\mathsf{W}(\Lambda,p) \equiv \mathsf{L}^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,\mathsf{L}(p)\,. \qquad (4.66)
$$

Ale

$$
\begin{aligned}
[\mathsf{W}(\Lambda,p)]^\mu{}_\nu k^\nu &= \left[\mathsf{L}^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\right]^\mu{}_\rho [\mathsf{L}(p)]^\rho{}_\nu k^\nu \\
&= \left[\mathsf{L}^{-1}(\Lambda p)\right]^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu p^\nu \\
&= \left[\mathsf{L}^{-1}(\Lambda p)\right]^\mu{}_\rho (\Lambda p)^\rho \\
&= k^\mu, \qquad (4.67)
\end{aligned}
$$

odkud vidíme, že transformace $\mathsf{W}(\Lambda,p)$ je elementem malé grupy čtyřvektoru k, a tedy

$$
\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{W}(\Lambda,p))\,|k,\xi\rangle = \sum_{\xi'} D_{\xi'\xi}(\mathsf{W}(\Lambda,p))\,|k,\xi'\rangle\,, \qquad (4.68)
$$

kde $D_{\xi'\xi}(\mathsf{W})$ jsou elementy unitární matice $\mathsf{D}(\mathsf{W})$ přiřazené transformaci W v nějaké ireducibilní reprezentaci malé grupy $\mathcal{W}(k)$.

Dosazením do pravé strany formule (4.65) dostáváme

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathsf{U}}(\Lambda)\,|p,\xi\rangle &= N(p)\sum_{\xi'} D_{\xi'\xi}(\mathsf{W}(\Lambda,p))\,\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(\Lambda p))\,|k,\xi'\rangle \\
&= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\xi'} D_{\xi'\xi}(\mathsf{W}(\Lambda,p))\,|\Lambda p,\xi'\rangle\,. \qquad (4.69)
\end{aligned}
$$

Tedy k tomu, abychom nalezli všechny unitární ireducibilní reprezentace Poincaréovy grupy stačí, když nalezneme tyto reprezentace pro malou grupu odpovídající každé ze šesti tříd čtyřvektorů specifikovaných ve výše uvedené tabulce. Pro nás jsou ovšem důležité pouze reprezentace realizovatelné v prostorech, které lze identifikovat s Hilbertovými prostory fyzikálních systémů, tj. operátory $\hat{\mathsf{P}}^\mu$ reprezentující generátory translací musí současně hrát úlohu operátorů celkového čtyřimpulsu této soustavy. Vzhledem k tomu, že žádná fyzikální soustava nemá zápornou energii a její čtyřimpuls není prostorové povahy, nebudeme se zde blíže zabývat posledními třemi třídami.

Vakuum Čtyřimpuls $p^\mu = 0$ je evidentně invariantní vůči všem vlastním Lorentzovým transformacím, tj. jeho malou grupou je grupa $SO(3,1)$. Vzhledem k tomu, že jde o grupu nekompaktní, její jedinou konečněrozměrnou unitární ireducibilní reprezentací je triviální jednorozměrná reprezentace přiřazující každému elementu jednotku. Již tento prostý fakt má závažný fyzikální důsledek: Stav s nulovým čtyřimpulsem představuje vakuum. Z uvedeného vyplývá, že žádná relativisticky invariantní kvantová teorie nemůže připustit konečný stupeň degenerace vakua, tj. vakuum musí být buď nedegenerované, nebo jeho stupeň degenerace je nekonečný.

Částice s nenulovou hmotou Čtyřvektor časového charakteru s kladnou nultou komponentou, tj. čtyřvektor p, pro který platí

$$p_\mu p^\mu = M^2, \qquad p^0 \equiv E > 0, \tag{4.70}$$

můžeme identifikovat se čtyřimpulsem částice s klidovou hmotou $M > 0$. Standardní čtyřvektor

$$k^\mu \equiv \{M, \mathbf{0}\} \tag{4.71}$$

(představující jeho hodnotu v klidové soustavě této částice) je evidentně invariantní vůči všem prostorovým natočením, kdežto vůči žádnému boostu invariantní není. Odpovídající malou grupou tedy je grupa $SO(3)$, tj. transformace (4.66) v tomto případě představuje rotaci. V souhlase s vžitou terminologií ji budeme nazývat *Wignerovou rotací.*

Je zřejmé, že pro operátor (4.31) platí

$$\hat{P}^2 \left|k,\xi\right\rangle = M^2 \left|k,\xi\right\rangle . \tag{4.72}$$

Z formulí (4.38),(4.71) vidíme, že v našem případě je

$$\hat{\mathrm{W}}^0 \left|k,\xi\right\rangle = 0, \tag{4.73}$$

$$\hat{\boldsymbol{W}} \left|k,\xi\right\rangle = M \hat{\boldsymbol{J}} \left|k,\xi\right\rangle , \tag{4.74}$$

a tedy

$$\hat{W}^2 \left|k,\xi\right\rangle = -M^2 j\,(j+1) \left|k,\xi\right\rangle , \tag{4.75}$$

kde j je celé nebo polocelé nezáporné číslo, odpovídající spinu uvažované částice. Vzhledem k tomu, že $\hat{P}^2$, $\hat{W}^2$ jsou Casimirovy operátory, zůstanou formule (4.72),(4.75) v platnosti i tehdy, když v nich provedeme záměnu

$$|k,\xi\rangle \to |p,\xi\rangle\,.$$

V případě uvažované třídy čtyřimpulsů můžeme tedy každou ireducibilní reprezentaci charakterizovat zadáním dvojice reálných parametrů M, j, z nichž první je kladný a druhý představuje nějaké celé nebo polocelé nezáporné číslo.

Z relace (4.74) vidíme, že kety $|k,\xi\rangle$ lze zvolit tak, aby představovaly vlastní vektory operátoru $\left(\hat{\boldsymbol{J}}\cdot\boldsymbol{s}\right)$, kde $\boldsymbol{s}$ je *libovolný* pevně zvolený jednotkový vektor. Parametr ξ v uvažované reprezentaci tedy probíhá $2j+1$ hodnot, za které můžeme zvolit $\xi = -j,\cdots,j$. Obvykle se volí $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}_3$ a navíc se požaduje splnění Condon-Shortleyovy fázové konvence.[20] Nebude-li řečeno něco jiného, budeme se této volby přidržovat i my, tj. kety $|k,\xi\rangle$ budou vyhovovat relacím

$$\hat{\mathsf{J}}_3\,|k,\xi\rangle = \xi\,|k,\xi\rangle\,, \tag{4.76}$$
$$\hat{\mathsf{J}}_\pm\,|k,\xi\rangle = \alpha^{(\pm)}(j,\xi)\,|k,\xi\pm 1\rangle\,, \tag{4.77}$$

kde

$$\alpha^{(\pm)}(j,\xi) \equiv \sqrt{(j\mp\xi)\,(j\pm\xi+1)}. \tag{4.78}$$

Povšimněme si také toho, že rovnost (4.76) lze s využitím definice (4.64) ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p))\,\hat{\mathsf{W}}^3\,\hat{\mathsf{U}}^\dagger(\mathsf{L}(p))\,|p,\xi\rangle = M\xi\,|p,\xi\rangle\,. \tag{4.79}$$

Tedy ket $|p,\xi\rangle$ představuje vlastní vektor operátoru $\hat{\mathsf{W}}^3(\mathsf{L}(p))$ příslušný k vlastní hodnotě $M\xi$, kde[21]

$$\hat{\mathsf{W}}^\mu(\mathsf{L}(p)) \equiv \hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p))\,\hat{\mathsf{W}}^\mu\,\hat{\mathsf{U}}^\dagger(\mathsf{L}(p)) = [\mathsf{L}(p)]_\nu{}^\mu\,\hat{\mathsf{W}}^\nu. \tag{4.80}$$

Pokud $\mathsf{R} \equiv \Lambda(\boldsymbol{n},\varphi)$ představuje libovolné natočení, potom

$$\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{R}) = \exp\left(i\varphi\,\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}\right) \tag{4.81}$$

[20] Viz [1]–Doplněk F.

[21] Poslední rovnost je přímým důsledkem relace (4.35).

a z formulí (4.76) - (4.78) dostáváme

$$\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{R})\,|k,\xi\rangle = \sum_{\xi'} |k,\xi'\rangle\langle k,\xi'|\exp\!\left(i\varphi\,\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}\right)|k,\xi\rangle \tag{4.82}$$

$$= \sum_{\xi'=-j}^{j} D^{(j)}_{\xi'\xi}(\mathsf{R})\,|k,\xi'\rangle\,, \tag{4.83}$$

kde $D^{(j)}_{\xi'\xi}(\mathsf{R})$ jsou elementy ortogonální matice $\mathsf{D}^{(j)}(\mathsf{R})$ přiřazené rotaci R v $2j+1$ rozměrné reprezentaci grupy $SO(3)$. Všechny tyto matice již známe.[22] Ovšem k tomu, abychom skutečně znali pravou stranu formule (4.69), tj. abychom dokončili konstrukci diskutované ireducibilní reprezentace, musíme ještě specifikovat normalizační konstantu $N(p)$ a transformaci $\mathsf{L}(p)$, vystupující v definici (4.66) Wignerovy rotace $\mathsf{W}(\Lambda, p)$. V obou případech to do značné míry představuje přijetí určité konvence.

Věnujme se nejprve otázce volby normalizační konstanty. Při ní musíme respektovat skutečnost, že konstruovaná reprezentace má být *unitární,* a tedy operátory přiřazené jejím generátorům musí být samosdružené. O vlastních vektorech *samosdružených* operátorů $\hat{\boldsymbol{P}}$ pak víme, že vedle rovnice

$$\hat{\boldsymbol{P}}\,|p,\xi\rangle = \boldsymbol{p}\,|p,\xi\rangle \tag{4.84}$$

musí vyhovovat i podmínce

$$\langle p,\xi\,|p',\xi'\rangle = f(p)\,\delta_{\xi\xi'} 2E\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,, \tag{4.85}$$

kde $f(p)$ je nějaká, zatím blíže nespecifikovaná, nenulová funkce.[23] Připomeňme, že odpovídající relace uzavřenosti v prostoru uvažované reprezentace má potom tvar

$$\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2Ef(p)} \sum_{\xi=-j}^{j} |p,\xi\rangle\langle p,\xi| = 1. \tag{4.86}$$

[22] Viz Doplněk M v [1]. Nesmíme však zapomenout, že zatím co [1] jsme rotace uvažovali ve smyslu aktivní interpretace, nyní je pojednáváme ve smyslu interpretace pasivní. Z formálního hlediska jde o vzájemnou záměnu významu transformací R a R^{-1}. Tedy symbolem $\mathsf{D}^{(j)}$ jsou zde označovány matice, které obdržíme *transponováním* matic označených stejným symbolem v [1].

[23] Faktor $2E$ je nenulový, takže jeho explicitní zavedení není na úkor obecnosti uvedeného vztahu.

Z formule (4.69) přitom dostáváme

$$\langle p', \xi | \hat{\mathsf{U}}^{\dagger}(\Lambda)\, \hat{\mathsf{U}}(\Lambda)\, |p, \xi\rangle = \left|\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\right|^2 \sum_{\xi''\xi'} \left(D^{(j)}_{\xi''\xi}(\mathsf{W})\right)^* D^{(j)}_{\xi'\xi}(\mathsf{W})\, \langle \Lambda p', \xi'' |\, \Lambda p, \xi'\rangle\,, \tag{4.87}$$

a tedy díky unitaritě operátorů $\hat{\mathsf{U}}(\Lambda)$ a matic $\mathsf{D}^{(j)}(\mathsf{W})$ musí platit

$$\frac{1}{|N(p)|^2}\, \langle p', \xi\, |p, \xi\rangle = \frac{1}{|N(\Lambda p)|^2}\, \langle \Lambda p', \xi |\, \Lambda p, \xi\rangle\,, \tag{4.88}$$

kde jsme využili toho, že díky relaci (4.85) poslední faktor na pravé straně předcházejícího vztahu vymizí pro všechna $\xi'' \neq \xi'$. Porovnáním s formulí (4.85) vidíme, že výraz

$$\frac{f(p)}{|N(p)|^2}$$

musí být invariantní vůči vlastním Lorentzovým transformacím, neboť veličina $2E\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')$ vůči těmto transformacím invariantní je. To je jediná podmínka, kterou je nutno splnit.

Mezi nejčastěji užívané volby patří

$$N(p) = f(p) = 1 \tag{4.89}$$

a

$$N(p) = \sqrt{\frac{f(p)}{f(k)}}\,, \qquad f(p) = \frac{1}{2E}\,. \tag{4.90}$$

Obě mají své výhody a nevýhody. Proto se ani jedné z nich nebudeme vyhýbat. Abychom jasně odlišili, kdy máme kterou na mysli, budeme kety definované pravou stranou formule (4.64) označovat nadále symbolem $|p, \xi\rangle$ při volbě (4.89), kdežto v případě volby (4.90) budeme pro tyto veličiny užívat symbolu $|\boldsymbol{p}, \xi\rangle$, tj. platí např.

$$|p, \xi\rangle \equiv \hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p))\, |k, \xi\rangle\,, \tag{4.91}$$

$$\langle p, \xi\, |p', \xi'\rangle = 2E\delta_{\xi\xi'}\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')\,, \tag{4.92}$$

$$\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2E} \sum_{\xi=-j}^{j} |p, \xi\rangle\langle p, \xi| = 1, \tag{4.93}$$

$$\hat{\mathsf{U}}(\Lambda)\,|p,\xi\rangle = \sum_{\xi'} D^{(j)}_{\xi'\xi}(\mathsf{W}(\Lambda,p))\,|\Lambda p,\xi'\rangle\,, \tag{4.94}$$

kdežto

$$|\boldsymbol{p},\xi\rangle \equiv \sqrt{\frac{E}{k^0}}\,\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p))\,|k,\xi\rangle\,, \tag{4.95}$$

$$\langle \boldsymbol{p},\xi\,|\boldsymbol{p}',\xi'\rangle = \delta_{\xi\xi'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,, \tag{4.96}$$

$$\int d^3\boldsymbol{p} \sum_{\xi=-j}^{j} |\boldsymbol{p},\xi\rangle\langle\boldsymbol{p},\xi| = 1, \tag{4.97}$$

$$\hat{\mathsf{U}}(\Lambda)\,|\boldsymbol{p},\xi\rangle = \sqrt{\frac{E'}{E}} \sum_{\xi'} D^{(j)}_{\xi'\xi}(\mathsf{W}(\Lambda,p))\,|\boldsymbol{p}',\xi'\rangle\,, \tag{4.98}$$

kde

$$E' \equiv p'^0 = \Lambda^0{}_\mu p^\mu$$

a třívektor $\boldsymbol{p}'$ má komponenty

$$p'^k = \Lambda^k{}_\mu p^\mu.$$

Pokud jde o transformaci $\mathsf{L}(p)$, opět se nejčastěji setkáváme se dvěma způsoby její volby:
A) $\mathsf{L}(p)$ je *čistý boost*, tj.

$$\mathsf{L}(p) \equiv \Lambda(-\widetilde{\boldsymbol{v}}, v)\,, \tag{4.99}$$

kde

$$\boldsymbol{v} \equiv \frac{\boldsymbol{p}}{E}\,. \tag{4.100}$$

Výhodou této volby je, že při ní Wignerova rotace $\mathsf{W}(\mathsf{R},p)$ odpovídající libovolné rotaci R je totožná s touto rotací[24], tj.

$$\mathsf{W}(\mathsf{R},p) = \mathsf{R}. \tag{4.101}$$

Tedy *při této volbě* $\mathsf{L}(p)$ je např.

$$\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{R})\,|\boldsymbol{p},\xi\rangle = \sum_{\xi'} D^{(j)}_{\xi'\xi}(\mathsf{R})\,|\mathsf{R}\boldsymbol{p},\xi'\rangle\,, \tag{4.102}$$

[24] Viz úlohu U.4.1.

tj. v tomto případě je popis *rotací* identický s tím, který jsme používali v nerelativistické kvantové mechanice.
Pro úplnost dodejme, že v *tomto* případě se veličina odpovídající operátoru

$$\frac{\hat{\mathsf{W}}^{\mu}(\mathsf{L}(p))}{M}$$

někdy nazývá *kovariantním spinem.*
B) $\mathsf{L}(p)$ je boost ve směru $-\boldsymbol{e}_3$ následovaný pootočením o úhel φ kolem téže osy[25] a takovým natočením kolem osy $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{e}_3$, které převede směr $\boldsymbol{e}_3$ do směru impulsu $\boldsymbol{p}$, tj.

$$\mathsf{L}(p) \equiv \mathsf{R}(\tilde{\boldsymbol{p}})\, \mathsf{B}(u)\,, \tag{4.103}$$

kde[26]

$$\begin{aligned} \mathsf{R}(\tilde{\boldsymbol{p}}) &\equiv \exp\Big\{i\vartheta\,[\mathsf{M}_1 \sin\varphi - \mathsf{M}_2\cos\varphi]\Big\}\exp(-i\varphi\mathsf{M}_3) && (4.104)\\ &= \exp(-i\varphi\mathsf{M}_3)\exp(-i\vartheta\mathsf{M}_2)\,, && (4.105)\end{aligned}$$

kde ϑ, φ jsou sférické úhly vektoru $\boldsymbol{p}$ a

$$\mathsf{B}(u) \equiv \exp\{-iu\mathsf{N}_3\}\,, \tag{4.106}$$

kde u je rapidita odpovídající velikosti rychlosti (4.100):

$$v = \frac{|\boldsymbol{p}|}{E}\,, \tag{4.107}$$

tj.

$$\mathrm{ch}u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \mathrm{sh}u = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,. \tag{4.108}$$

Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby na základě relace (4.80) dokázal, že v *tomto* případě platí

$$\frac{\hat{\boldsymbol{J}}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}{\left|\hat{\boldsymbol{P}}\right|}\,|p,\xi\rangle = \xi\,|p,\xi\rangle\,, \tag{4.109}$$

---

[25]Zde jde samozřejmě pouze o volbu fázové konvence, která se v dalším ukáže být výhodnou.

[26]Viz úlohu U.1.7. v 1. Kapitole.

tj. v uvažovaném případě kety $|p, \xi\rangle$ jsou vlastními vektory *helicity*[27]. Pokud v dalším budeme chtít zdůraznit, že máme na mysli právě tuto volbu $\mathsf{L}(p)$, budeme k označení parametruru ξ užívat symbolu λ.[28]

Částice s nulovou hmotou Čtyřvektor světelného charakteru s kladnou nultou komponentou, tj. čtyřvektor p, pro který platí

$$p_\mu p^\mu = 0, \qquad p^0 \equiv E > 0, \tag{4.110}$$

můžeme identifikovat se čtyřimpulsem částice s nulovou klidovou hmotou. Standardní čtyřvektor k:

$$k^\mu \equiv \{1, 0, 0, 1\} \tag{4.111}$$

je evidentně invariantní vůči libovolnému pootočení kolem osy $\boldsymbol{e}_3$, tj. odpovídající malá grupa jistě obsahuje jako svoji podgrupu grupu $SO(2)$ tvořenou všemi možnými rotacemi $\mathrm{R}(\boldsymbol{e}_3, \varphi)$. Vůči žádným jiným *čistým* pootočením čtyřimpuls (4.111) invariantní není.

V souřadné soustavě, která se vůči výchozí posouvá rychlostí $\boldsymbol{w}$, má čtyřvektor k komponenty

$$\begin{aligned} k'^0 &= \gamma\,(1 - w\cos\vartheta)\,, \\ k'_{\|} &= \gamma\,(\cos\vartheta - w)\,, \\ \boldsymbol{k}'_{\perp} &= \boldsymbol{k}_{\perp}, \end{aligned} \tag{4.112}$$

[27]Nepřehlédněte, že pro částici v klidu je její helicita definitoricky totožná s projekcí jejího spinu na osu $\boldsymbol{e}_3$.

[28]Vzhledem k tomu, že připouštíme i dvojznačné reprezentace, nemusí být ket $|p, \xi\rangle$ ve skutečnosti určen jednoznačně ani po zadání $\mathsf{L}(p)$. Odstranit tuto zbývající nejednoznačnost však nečiní žádné potíže. Tak např. ve zde uvažovaném případě budeme pod operátorem vystupujícím ve formuli (4.64) vždy rozumět

$$\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p)) \equiv \hat{\mathsf{R}}(\widetilde{\boldsymbol{p}})\,\hat{\mathsf{B}}(u)\,,$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{R}}(\widetilde{\boldsymbol{p}}) &\equiv \exp\Big(-i\varphi\hat{\mathsf{J}}_3\Big)\exp\Big(-i\vartheta\hat{\mathsf{J}}_2\Big) \\ &= \exp\Big\{i\vartheta\Big[\hat{\mathsf{J}}_1\sin\varphi - \hat{\mathsf{J}}_2\cos\varphi\Big]\Big\}\exp\Big(-i\varphi\hat{\mathsf{J}}_3\Big)\,, \\ \hat{\mathsf{B}}(u) &\equiv \exp\Big\{-iu\hat{\mathsf{K}}_3\Big\} \end{aligned}$$

a přitom $\vartheta \in \langle 0, \pi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

kde jsme užili standardní zkratku

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}, \tag{4.113}$$

ϑ je úhel svíraný rychlostí $\boldsymbol{w}$ s osou $\boldsymbol{e}_3$ a

$$\begin{aligned} k'_{\parallel} &\equiv \boldsymbol{k}' \cdot \widetilde{\boldsymbol{w}}, \\ \boldsymbol{k}'_{\perp} &\equiv \boldsymbol{k}' - k'_{\parallel}\widetilde{\boldsymbol{w}}, \\ \boldsymbol{k}_{\perp} &\equiv \boldsymbol{k} - \widetilde{\boldsymbol{w}} \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{4.114}$$

Z požadavku

$$k'^0 = 1 \tag{4.115}$$

dostáváme

$$\cos\vartheta = \frac{1-\sqrt{1-w^2}}{w}. \tag{4.116}$$

Ponecháváme čtenáři, aby se v rámci úlohy U.4.3. přesvědčil, že pro každou hodnotu $w \in \langle 0, 1)$ existuje právě jeden úhel $\vartheta \in (0, \pi/2\rangle$ vyhovující této rovnici.

Následným pootočením kolem osy

$$\frac{\boldsymbol{e}_3 \times \widetilde{\boldsymbol{w}}}{\sin\vartheta}$$

o úhel

$$\delta = \pi + 2\vartheta \quad \mod 2\pi,$$

případně doplněným dalším pootočením o libovolný úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ kolem osy $\boldsymbol{e}_3$ přejdou

$$k'^{\mu} \to k^{\mu}.$$

Snadno nahlédneme, že žádná jiná než právě popsaná kombinace boostu a natočení nemůže nechat standardní čtyřvektor (4.111) nezměněn. Odtud je již zřejmé, že malá grupa je v uvažovaném případě grupou *třiparametrickou*: Každý její element bychom mohli jednoznačně určit např. zadáním velikosti a polárního úhlu rychlosti $\boldsymbol{w}$, doplněným zadáním výše uvedeného úhlu φ. Ve skutečnosti je však výhodnější provést tuto parametrizaci poněkud jinak: Již v první kapitole jsme v rámci úlohy U.1.12. zkonstruovali *tříparametrickou* podgrupu $ISO(2)$ vlastních Lorentzových transformací a zjistili, že vůči ní je standardní čtyřvektor

(4.111) invariantní, a tedy právě tato podgrupa je zde diskutovanou malou grupou. Díky výsledku zmíněné úlohy také víme, že libovolný element této malé grupy lze jednoznačně určit zadáním parametrů α, β, φ tak, že

$$\mathsf{\Lambda}(\alpha, \beta; \varphi) \equiv \mathsf{S}(\alpha, \beta)\, \mathsf{R}(\boldsymbol{e}_3, \varphi)\,, \tag{4.117}$$

kde

$$\mathsf{R}(\boldsymbol{e}_3, \varphi) \equiv \exp(i\varphi \mathsf{M}_3)\,, \tag{4.118}$$

$$\mathsf{S}(\alpha, \beta) \equiv \exp\{\mathrm{i}\,(\alpha \mathsf{A} + \beta \mathsf{B})\}\,, \tag{4.119}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &\equiv \mathsf{N}_1 - \mathsf{M}_2\,, \\ \mathsf{B} &\equiv \mathsf{N}_2 + \mathsf{M}_1\,. \end{aligned} \tag{4.120}$$

V libovolné unitární reprezentaci Poincaréovy grupy tedy odpovídající operátor můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{\Lambda}(\alpha, \beta; \varphi)) = \exp\left\{i\left(\alpha\hat{\mathsf{A}} + \beta\hat{\mathsf{B}}\right)\right\}\exp\left(i\varphi\hat{\mathsf{J}}_3\right), \tag{4.121}$$

kde samosdružené oprátory

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{A}} &\equiv \hat{\mathsf{K}}_1 - \hat{\mathsf{J}}_2\,, \\ \hat{\mathsf{B}} &\equiv \hat{\mathsf{K}}_2 + \hat{\mathsf{J}}_1 \end{aligned} \tag{4.122}$$

vyhovují komutačním relacím

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathsf{A}}, \hat{\mathsf{B}}\right] &= 0, \\ \left[\hat{\mathsf{J}}_3, \hat{\mathsf{A}}\right] &= i\hat{\mathsf{B}}, \\ \left[\hat{\mathsf{J}}_3, \hat{\mathsf{B}}\right] &= -i\hat{\mathsf{A}}. \end{aligned} \tag{4.123}$$

Z první z nich okamžitě vidíme, že v uvažovaném případě lze kety $|k, \xi\rangle$ vystupující ve formuli (4.64) jistě zvolit tak, aby představovaly společné vlastní vektory operátorů $\hat{\mathsf{A}}, \hat{\mathsf{B}}$. Na druhé straně však z posledních dvou komutačních relací plyne[29]

$$\begin{aligned} \exp\left(i\varphi\hat{\mathsf{J}}_3\right)\hat{\mathsf{A}}\exp\left(-i\varphi\hat{\mathsf{J}}_3\right) &= \hat{\mathsf{A}}\cos\varphi - \hat{\mathsf{B}}\sin\varphi, \\ \exp\left(i\varphi\hat{\mathsf{J}}_3\right)\hat{\mathsf{B}}\exp\left(-i\varphi\hat{\mathsf{J}}_3\right) &= \hat{\mathsf{A}}\sin\varphi + \hat{\mathsf{B}}\cos\varphi, \end{aligned} \tag{4.124}$$

[29] Viz úlohu U.1.12. k první kapitole.

a tedy jestliže ket $|k,\xi\rangle \equiv |k,a,b,\lambda\rangle$ je společným vlastním vektorem operátorů $\hat{\mathsf{A}}, \hat{\mathsf{B}}$ příslušným k vlastním hodnotám a, resp. b, tj. vyhovuje rovnicím

$$\hat{\mathsf{P}}^{\mu}\,|k,a,b,\lambda\rangle = k^{\mu}\,|k,a,b,\lambda\rangle\,, \tag{4.125}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{A}}\,|k,a,b,\lambda\rangle &= a\,|k,a,b,\lambda\rangle\,, \\ \hat{\mathsf{B}}\,|k,a,b,\lambda\rangle &= b\,|k,a,b,\lambda\rangle\,, \end{aligned} \tag{4.126}$$

potom pro ket

$$|k,a',b',\lambda\rangle \equiv \exp\!\left(-i\varphi\hat{\mathsf{J}}_3\right)|k,a,b,\lambda\rangle$$

platí

$$\hat{\mathsf{P}}^{\mu}\,|k,a',b',\lambda\rangle = k^{\mu}\,|k,a',b',\lambda\rangle\,, \tag{4.127}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{A}}\,|k,a',b',\lambda\rangle &= a'\,|k,a',b',\lambda\rangle\,, \\ \hat{\mathsf{B}}\,|k,a',b',\lambda\rangle &= b'\,|k,a',b',\lambda\rangle\,, \end{aligned} \tag{4.128}$$

kde

$$\begin{aligned} a' &\equiv a\cos\varphi - b\sin\varphi, \\ b' &\equiv a\sin\varphi + b\cos\varphi. \end{aligned} \tag{4.129}$$

Odtud vidíme, že pokud v prostoru uvažované reprezentace Poincaréovy grupy existuje vlastní vektor čtyřimpulsu příslušný k vlastní hodnotě k^{μ}, který je současně společným vlastním vektorem samosdružených operátorů $\hat{\mathsf{A}}, \hat{\mathsf{B}}$ příslušným k vlastním hodnotám a, resp. b, potom v něm existuje také vektor, který představuje vlastní vektor čtyřimpulsu patřící k *téže* vlastní hodnotě k^{μ}, a přitom je společným vlastním vektorem $\hat{\mathsf{A}}, \hat{\mathsf{B}}$ příslušným k vlastním hodnotám a', b', definovaným poslední formulí, v níž φ může mít libovolnou hodnotu z intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Tedy pokud alespoň jedno z čísel a, b je nenulové, probíhají odpovídající hodnoty a', b' celé spojité intervaly. Přestože takovéto reprezentace mají dobrý matematický smysl, blíže se jimi zabývat nebudeme. Zajímají nás totiž pouze reprezentace na prostorech, které můžeme identifikovat s Hilbertovým prostorem jednočásticových stavů, a přitom zatím nic nenasvědčuje tomu, že by v přírodě existovaly nějaké částice, jejichž stav by při daném impulsu bylo třeba specifikovat nějakou další pozorovatelnou se *spojitým* spektrem vlastních hodnot.

V dalším se proto omezíme pouze na případ $a = b = 0$ a nazveme

$$|k, \lambda\rangle \equiv |k, a = 0, b = 0, \lambda\rangle \,. \tag{4.130}$$

Odpovídající reprezentace malé grupy $ISO(2)$ je jednorozměrná[30] a parametr λ můžeme identifikovat s vlastní hodnotou operátoru $\hat{\mathsf{J}}_3$, tj. ket $|k, \lambda\rangle$ vyhovuje rovnici

$$\hat{\mathsf{J}}_3 \, |k, \lambda\rangle = \lambda \, |k, \lambda\rangle \,. \tag{4.131}$$

Z formule (4.122) navíc víme, že pro něj platí relace

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{K}}_1 \, |k, \lambda\rangle &= \hat{\mathsf{J}}_2 \, |k, \lambda\rangle \,, \\ \hat{\mathsf{K}}_2 \, |k, \lambda\rangle &= -\hat{\mathsf{J}}_1 \, |k, \lambda\rangle \,. \end{aligned} \tag{4.132}$$

Odtud, s využitím vyjádření (4.38), již snadno zjistíme, že tento ket vyhovuje také rovnicím[31]

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{W}}^0 \, |k, \lambda\rangle &= \hat{\mathsf{W}}^3 \, |k, \lambda\rangle = \lambda \, |k, \lambda\rangle \,, \\ \hat{\mathsf{W}}^1 \, |k, \lambda\rangle &= \hat{\mathsf{W}}^2 \, |k, \lambda\rangle = 0, \end{aligned} \tag{4.133}$$

a tedy také

$$\hat{W}_\mu \hat{W}^\mu \, |k, \lambda\rangle = \left[\left(\hat{\mathsf{W}}^0 \right)^2 - \left(\hat{\mathsf{W}}^3 \right)^2 \right] |k, \lambda\rangle = 0. \tag{4.134}$$

Uvažovaná třída ireducibilních reprezentací je tak charakterizována nulovými vlastními hodnotami obou Casimirových operátorů $\hat{P}^2$, $\hat{W}^2$. Vlastní hodnoty operátoru $\hat{\mathsf{J}}_3$ mohou v prostoru libovolné unitární reprezentace Poincaréovy grupy nabývat pouze celých nebo polocelých

[30] To by nás nemělo příliš překvapit. Připomeňme, že $ISO(2)/T(2) = SO(2)$ a přitom všechny ireducibilní reprezentace $SO(2)$ jsou jednorozměrné, kdežto jedinou konečněrozměrnou unitární reprezentací $T(2)$ je triviální jednorozměrná reprezentace.

[31] Tedy ket $|k, \lambda\rangle$ je také společným vlastním vektorem všech čtyř komponent Pauli-Lubanského vektoru, a to takovým, že $\hat{\mathsf{W}}^\mu \, |k, \lambda\rangle = \lambda k^\mu \, |k, \lambda\rangle$.

hodnot[32], a tedy parametr λ, vystupující v ketu $|k,\lambda\rangle$ může být roven kterémukoliv z celých nebo polocelých čísel.

Z formule (4.117) víme, že v diskutovaném případě lze matici $\mathsf{W}(\Lambda, p)$, definovanou formulí (4.66), vyjádřit jako

$$\mathsf{W}(\Lambda,p) = S(\alpha(\Lambda,p)\,,\beta(\Lambda,p))\,\mathsf{R}(\boldsymbol{e}_3,\varphi(\Lambda,p))\,, \tag{4.135}$$

a tedy odpovídající operátor vystupující na levé straně rovnosti (4.68) má tvar

$$\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{W}(\Lambda,p)) = \exp\Big\{i\left(\alpha(\Lambda,p)\,\hat{\mathsf{A}} + \beta(\Lambda,p)\,\hat{\mathsf{B}}\right)\Big\}\exp\Big(i\varphi(\Lambda,p)\,\hat{\mathsf{J}}_3\Big) \tag{4.136}$$

a díky relacím (4.131),(4.132) v *uvažovaných reprezentacích* je

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{W}(\Lambda,p))\,|k,\lambda\rangle &= \exp\Big\{i\left(\alpha(\Lambda,p)\,\hat{\mathsf{A}} + \beta(\Lambda,p)\,\hat{\mathsf{B}}\right)\Big\}\exp\Big(i\varphi(\Lambda,p)\,\hat{\mathsf{J}}_3\Big)\,|k,\lambda\rangle \\ &= \exp\Big\{i\lambda\varphi(\Lambda,p)\Big\}\,|k,\lambda\rangle \\ &= \sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}(\mathsf{W}(\Lambda,p))\,|k,\lambda'\rangle\,,\end{aligned} \tag{4.137}$$

tj.

$$D_{\lambda'\lambda}(\mathsf{W}(\Lambda,p)) = \delta_{\lambda\lambda'}\exp\Big\{i\lambda\varphi(\Lambda,p)\Big\}. \tag{4.138}$$

Tedy v diskutovaném případě tranformační zákon (4.69) nabývá tvaru

$$\hat{\mathsf{U}}(\Lambda)\,|p,\lambda\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\exp\Big\{i\lambda\varphi(\Lambda,p)\Big\}\,|\Lambda p,\lambda\rangle\,. \tag{4.139}$$

Pokud jde o normalizační konstanty $N(p)$, situace je naprosto stejná jako v dříve uvažovaném případě částice s nenulovou hmotou.

Pokud jde o transformaci $\mathsf{L}(p)$, zvolíme ji tak, aby co nejvíce odpovídala výše popsané volbě B v případě částice s nenulovou hmotou: nejprve provedeme takový boost rychlostí $-w\boldsymbol{e}_3$, aby čtyřvektor, určený ve výchozí soustavě komponentami $k^\mu \equiv \{1,0,0,1\}$, měl v nové soustavě komponenty $\{p^0,0,0,p^0\}$, následovaný pootočením o úhel φ kolem téže osy a potom provedeme takové natočení kolem osy $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}_3$,

[32] Nezapomeňme, že pod termínem reprezentace rozumíme i reprezentace víceznačné, což v daném případě (díky dvojnásobné souvislosti uvažované grupy) znamená reprezentace maximálně dvojznačné.

aby odpovídající výsledný třívektor $\boldsymbol{p}$ měl požadovaný směr $\widetilde{\boldsymbol{p}}$. Přesněji řečeno, v dalším pod operátorem $\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p))$ budeme rozumět

$$\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p)) \equiv \hat{\mathsf{R}}(\widetilde{\boldsymbol{p}})\,\hat{\mathsf{B}}(u)\,, \tag{4.140}$$

kde

$$\hat{\mathsf{R}}(\widetilde{\boldsymbol{p}}) \equiv \exp\left(-i\varphi\hat{\mathsf{J}}_3\right)\exp\left(-i\vartheta\hat{\mathsf{J}}_2\right) \tag{4.141}$$

a

$$\hat{\mathsf{B}}(u) \equiv \exp\left(-iu\hat{\mathsf{K}}_3\right), \tag{4.142}$$

kde $\vartheta \in \langle 0,\pi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ jsou sférické úhly vektoru $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ a u je rapidita odpovídající výše zmíněné rychlosti[33]:

$$\mathrm{tgh}\, u = w = \frac{|\boldsymbol{p}|^2 - 1}{|\boldsymbol{p}|^2 + 1}, \tag{4.143}$$

tj.

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\, u &= \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{|\boldsymbol{p}|^2 + 1}{2\,|\boldsymbol{p}|}, \\ \mathrm{sh}\, u &= \frac{w}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{|\boldsymbol{p}|^2 - 1}{2\,|\boldsymbol{p}|}. \end{aligned} \tag{4.144}$$

Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby na základě relace (4.80) dokázal, že pro kety

$$|p,\lambda\rangle \equiv N(p)\exp\left(-i\varphi\hat{\mathsf{J}}_3\right)\exp\left(-i\vartheta\hat{\mathsf{J}}_2\right)\exp\left(-iu\hat{\mathsf{K}}_3\right)|k,\lambda\rangle \tag{4.145}$$

platí

$$\frac{\hat{\mathsf{W}}^0}{\left|\hat{\boldsymbol{P}}\right|}|p,\lambda\rangle = \frac{\hat{\boldsymbol{J}}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}{\left|\hat{\boldsymbol{P}}\right|}|p,\lambda\rangle = \lambda\,|p,\lambda\rangle\,, \tag{4.146}$$

a tedy kety vystupující ve formuli (4.139) představují vlastní stavy helicity.

---

[33] Nepřehlédněme, že w může být i záporné.

Prostorová a časová inverze

Již z první kapitoly víme, že skládáním inverzí s transformacemi vlastní Lorentzovy grupy obdržíme opět grupu – Lorentzovu grupu. Přitom pravidla o skládání inverzí s vlastními Lorentzovými transformacemi je možno vystihnout relacemi (1.50),(1.51) mezi transformačními maticemi P, T odpovídajícími prostorové, resp. časové inverzi a maticemi $\Lambda(\boldsymbol{n}, \varphi)\,, \Lambda(\boldsymbol{n}, v)$ odpovídajícími čistému pootočení, resp. boostu:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\Lambda(\boldsymbol{n},\varphi)\,\mathsf{P} &= \Lambda(\boldsymbol{n},\varphi)\,, \\ \mathsf{P}\Lambda(\boldsymbol{n},v)\,\mathsf{P} &= \Lambda(-\boldsymbol{n},v)\,, \end{aligned} \tag{4.147}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{T}\Lambda(\boldsymbol{n},\varphi)\,\mathsf{T} &= \Lambda(\boldsymbol{n},\varphi)\,, \\ \mathsf{T}\Lambda(\boldsymbol{n},v)\,\mathsf{T} &= \Lambda(-\boldsymbol{n},v)\,. \end{aligned} \tag{4.148}$$

Tedy operátory

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{P}} &\equiv \hat{\mathsf{U}}(\mathsf{P})\,, \\ \hat{\mathsf{T}} &\equiv \hat{\mathsf{U}}(\mathsf{T}) \end{aligned} \tag{4.149}$$

přiřazené inverzím musí v libovolné unitární reprezentaci Lorentzovy grupy splňovat relace

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{P}}\hat{\mathsf{U}}(\Lambda(\boldsymbol{n},\varphi))\,\hat{\mathsf{P}}^{-1} &= \hat{\mathsf{U}}(\Lambda(\boldsymbol{n},\varphi))\,, \\ \hat{\mathsf{P}}\hat{\mathsf{U}}(\Lambda(\boldsymbol{n},v))\,\hat{\mathsf{P}}^{-1} &= \hat{\mathsf{U}}(\Lambda(-\boldsymbol{n},v))\,, \end{aligned} \tag{4.150}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{T}}\hat{\mathsf{U}}(\Lambda(\boldsymbol{n},\varphi))\,\hat{\mathsf{T}}^{-1} &= \hat{\mathsf{U}}(\Lambda(\boldsymbol{n},\varphi))\,, \\ \hat{\mathsf{T}}\hat{\mathsf{U}}(\Lambda(\boldsymbol{n},v))\,\hat{\mathsf{T}}^{-1} &= \hat{\mathsf{U}}(\Lambda(-\boldsymbol{n},v))\,. \end{aligned} \tag{4.151}$$

Snadno nahlédneme, že také skládáním časové a prostoré inverze s transformacemi Poincaréovy grupy obdržíme opět grupu.[34] Uvážíme-li, že posunutí souřadné soustavy o $\boldsymbol{a}$ následované časovou (prostorovou) inverzí je ekvivalentní s časovou (prostorovou) inverzí následovanou posunutím o $\boldsymbol{a}$ (o $-\boldsymbol{a}$) a že časové posunutí o a^0 následované prostorovou (časovou) inverzí je ekvivalentní prostorové (časové) inverzi

[34] Mnohdy se až pro tuto výslednou grupu užívá termínu Poincaréova grupa.

následované časovým posunutím o a^0 (o $-a^0$), vidíme, že v libovolné unitární reprezentaci této grupy musí navíc platit

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathsf{P}} \exp\left(i\hat{\mathsf{P}}^0 a_0\right) \hat{\mathsf{P}}^{-1} &= \exp\left(i\hat{\mathsf{P}}^0 a_0\right), \\
\hat{\mathsf{P}} \exp\left(-i\hat{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{a}\right) \hat{\mathsf{P}}^{-1} &= \exp\left(i\hat{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{a}\right),
\end{aligned} \tag{4.152}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathsf{T}} \exp\left(i\hat{\mathsf{P}}^0 a_0\right) \hat{\mathsf{T}}^{-1} &= \exp\left(-i\hat{\mathsf{P}}^0 a_0\right), \\
\hat{\mathsf{T}} \exp\left(-i\hat{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{a}\right) \hat{\mathsf{T}}^{-1} &= \exp\left(-i\hat{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{a}\right).
\end{aligned} \tag{4.153}
$$

V případě infinitesimálních vlastních Lorentzových transformací a translací můžeme požadavky (4.150) – (4.153) vyjádřit v termínech generátorů Poincaréovy grupy jako

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathsf{P}}\, i\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\mathsf{P}}^{-1} &= i\hat{\boldsymbol{J}}, \\
\hat{\mathsf{P}}\, i\hat{\boldsymbol{K}}\hat{\mathsf{P}}^{-1} &= -i\hat{\boldsymbol{K}}, \\
\hat{\mathsf{P}}\, i\hat{\boldsymbol{P}}\hat{\mathsf{P}}^{-1} &= -i\hat{\boldsymbol{P}}, \\
\hat{\mathsf{P}}\, i\hat{\mathsf{H}}\hat{\mathsf{P}}^{-1} &= i\hat{\mathsf{H}},
\end{aligned} \tag{4.154}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathsf{T}}\, i\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\mathsf{T}}^{-1} &= i\hat{\boldsymbol{J}}, \\
\hat{\mathsf{T}}\, i\hat{\boldsymbol{K}}\hat{\mathsf{T}}^{-1} &= -i\hat{\boldsymbol{K}}, \\
\hat{\mathsf{T}}\, i\hat{\boldsymbol{P}}\hat{\mathsf{T}}^{-1} &= i\hat{\boldsymbol{P}}, \\
\hat{\mathsf{T}}\, i\hat{\mathsf{H}}\hat{\mathsf{T}}^{-1} &= -i\hat{\mathsf{H}}.
\end{aligned} \tag{4.155}
$$

Pokud by fyzikální zákony byly invariantní i vůči prostorové a časové inverzi, musela by na Hilbertově prostoru libovolného fyzikálního systému existovat unitární reprezentace uvažované grupy. Přitom každému elementu této grupy by byl přiřazen unitární operátor lineární *nebo* antilineární. V případě dříve diskutovaných elementů Poincaréovy grupy jsme viděli, že se nutně jedná o operátory *lineární*. Z posledních z relací (4.154),(4.155) je zřejmé, že operátor prostorové inverze $\hat{\mathsf{P}}$ musí být *lineárním*, kdežto operátor časové inverze $\hat{\mathsf{T}}$ musí být *antilineárním* – stačí si uvědomit, že energetické spektrum žádného fyzikálního systému nemůže obsahovat záporné hodnoty. Tedy relace (4.154), (4.155) mezi operátory reprezentujícími inverze a operátory reprezentujícími generátory Poincaréovy grupy lze ekvivalentně zapsat ve tvaru komutačních a antikomutačních relací

$$\left[\hat{\mathsf{P}}, \hat{\boldsymbol{J}}\right] = \left\{\hat{\mathsf{P}}, \hat{\boldsymbol{P}}\right\} = \left\{\hat{\mathsf{P}}, \hat{\boldsymbol{K}}\right\} = \left[\hat{\mathsf{P}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = 0, \tag{4.156}$$

$$\left\{\hat{\mathsf{T}}, \hat{\boldsymbol{J}}\right\} = \left\{\hat{\mathsf{T}}, \hat{\boldsymbol{P}}\right\} = \left[\hat{\mathsf{T}}, \hat{\boldsymbol{K}}\right] = \left[\hat{\mathsf{T}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = 0. \tag{4.157}$$

Dnes sice víme, že, přesně vzato, přírodní zákony *nejsou* invariantní ani vůči prostorové, ani vůči časové inverzi. To ovšem vůbec neznamená, že by výše naznačené reprezentace neměly dobrý matematický smysl. A co je pro nás ještě důležitější, jsou zajímavé i z hlediska fyzikálního. Vše totiž nasvědčuje tomu, že za "narušení" invariance vůči zmíněným inverzím jsou "zodpovědné" pouze *slabé* interakce. Právě díky nim budou např. poslední z relací (4.154),(4.155) v Hilbertově prostoru reálného fyzikálního systému platit pouze přibližně. Prozatím budeme tuto skutečnost ignorovat a vyšetříme působení operátorů $\hat{\mathsf{P}}, \hat{\mathsf{T}}$ v prostoru jednočásticových stavů.

Prostorová inverze

Částice s nenulovou hmotou Kety $|k, \xi\rangle$ vyhovující rovnici (4.76) představují společné vlastní vektory operátorů $\left\{\hat{\mathsf{H}}, \hat{\mathsf{J}}_3, \hat{\boldsymbol{P}}\right\}$ příslušné k vlastním hodnotám $\{M, \xi, \mathbf{0}\}$. Z komutačních relací (4.156) okamžitě vidíme, že totéž je pravdou o ketu $\hat{\mathsf{P}}\,|k, \xi\rangle$, a tedy musí platit

$$\hat{\mathsf{P}}\,|k, \xi\rangle = \eta^{(P)}\,|k, \xi\rangle\,, \tag{4.158}$$

kde *vnitřní parita* uvažované částice musí splňovat podmínku

$$\left|\eta^{(P)}\right| = 1 \tag{4.159}$$

plynoucí z unitarity operátoru $\hat{\mathsf{P}}$.

K tomu, abychom mohli nalézt vyjádření pro ket $\hat{\mathsf{P}}\,|p, \xi\rangle$, musíme nejprve specifikovat transformaci $\mathsf{L}(p)$, nebo přesněji operátor $\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p))$, vystupující v definici (4.64):

A) V případě báze $|p,\xi\rangle$, tvořené vlastními vektory třetí složky *kovariantního spinu*, tj. když je

$$|p,\xi\rangle \equiv N(p)\exp\left(-iu\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{K}}\right)|k,\xi\rangle\,, \tag{4.160}$$

kde u je rapidita odpovídající velikosti rychlosti (4.100), tj. definovaná vztahy (4.108):

$$\mathrm{ch}u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,, \qquad \mathrm{sh}u = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,,$$

z antikomutačních relací (4.156):

$$\left\{\hat{\mathsf{P}},\hat{\boldsymbol{K}}\right\} = 0 \tag{4.161}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{P}}\,|p,\xi\rangle &= N(p)\exp\left(iu\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{K}}\right)\hat{\mathsf{P}}\,|k,\xi\rangle \\ &= \frac{N(p)}{N(\mathsf{P}p)}\eta^{(P)}\,|\mathsf{P}p,\xi\rangle\,.\end{aligned} \tag{4.162}$$

Asi bychom těžko hledali publikaci, v níž by "normalizační konstanta" $N(p)$ nevyhovovala podmínce[35]

$$N(\mathsf{P}p) = N(p)\,. \tag{4.163}$$

Při jejím splnění se pak předcházející relace zjednoduší na

$$\hat{\mathsf{P}}\,|p,\xi\rangle = \eta^{(P)}\,|\mathsf{P}p,\xi\rangle\,. \tag{4.164}$$

B) V případě báze tvořené vlastními vektory *helicity*, tj. když

$$|p,\xi\rangle \equiv |p,\lambda\rangle = N(p)\,\hat{\mathsf{R}}(\tilde{\boldsymbol{p}})\exp\left\{-iu\hat{\mathsf{K}}_3\right\}|k,\lambda\rangle\,, \tag{4.165}$$

kde u má stejný význam jako ve formuli (4.160) a

$$\hat{\mathsf{R}}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \equiv \exp\left(-i\varphi\hat{\mathsf{J}}_3\right)\exp\left(-i\vartheta\hat{\mathsf{J}}_2\right)\,, \tag{4.166}$$

---

[35] V každém případě je tato podmínka splněna jak při volbě (4.89), tak při volbě (4.90).

kde sférické úhly vektoru $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ leží v intervalech $\vartheta \in \langle 0, \pi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, z relací (4.156):

$$\left[\hat{\mathsf{P}}, \hat{\boldsymbol{J}}\right] = \left\{\hat{\mathsf{P}}, \hat{\boldsymbol{K}}\right\} = 0 \tag{4.167}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{P}}\, |p, \lambda\rangle &= N(p)\, \hat{\mathsf{R}}(\widetilde{\boldsymbol{p}}) \exp\left\{iu\hat{\mathsf{K}}_3\right\} \hat{\mathsf{P}}\, |k, \lambda\rangle \\ &= \eta^{(P)} N(p)\, \hat{\mathsf{R}}(\widetilde{\boldsymbol{p}}) \exp\left\{iu\hat{\mathsf{K}}_3\right\} |k, \lambda\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.168}$$

Vzpomeneme-li si, že[36]

$$\langle k, \lambda'| \exp\left\{-i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\right\} |k, \lambda\rangle = \delta_{\lambda,-\lambda'} \,(-1)^{j-\lambda}\,, \tag{4.169}$$

kde j je velikost spinu uvažované částice, vidíme, že

$$|k, \lambda\rangle = (-1)^{j-\lambda} \exp\left\{i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\right\} |k, -\lambda\rangle\,. \tag{4.170}$$

Na druhé straně z komutačních relací

$$\left[\hat{\mathsf{J}}_j, \hat{\mathsf{K}}_k\right] = i\varepsilon_{jkl}\, \hat{\mathsf{K}}_l$$

víme, že

$$\exp\left\{-i\alpha\hat{\mathsf{J}}_2\right\} \hat{\mathsf{K}}_3 \exp\left\{i\alpha\hat{\mathsf{J}}_2\right\} = \hat{\mathsf{K}}_3 \cos\alpha + \hat{\mathsf{K}}_1 \sin\alpha\,, \tag{4.171}$$

a tedy

$$\exp\left\{iu\hat{\mathsf{K}}_3\right\} \exp\left\{i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\right\} = \exp\left\{i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\right\} \exp\left\{-iu\hat{\mathsf{K}}_3\right\}, \tag{4.172}$$

což nám umožňuje relaci (4.168) přepsat do tvaru

$$\hat{\mathsf{P}}\, |p, \lambda\rangle = \eta^{(P)} \,(-1)^{j-\lambda}\, N(p)\, \hat{\mathsf{R}}(\widetilde{\boldsymbol{p}}) \exp\left\{i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\right\} \exp\left\{-iu\hat{\mathsf{K}}_3\right\} |k, -\lambda\rangle\,. \tag{4.173}$$

Uvážíme-li, že sférickými úhly směru $-\widetilde{\boldsymbol{p}}$ jsou $\vartheta' = \pi - \vartheta, \varphi' = \varphi \pm \pi$, kde horní znaménko platí pro $\varphi < \pi$ a dolní pro $\varphi \geq \pi$, vidíme, že

$$\hat{\mathsf{R}}(-\widetilde{\boldsymbol{p}}) \equiv \exp\left(-i\,(\varphi \pm \pi)\,\hat{\mathsf{J}}_3\right) \exp\left(-i\,(\pi - \vartheta)\,\hat{\mathsf{J}}_2\right), \tag{4.174}$$

[36] Viz formule (M.54) v [1].

a tedy

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{R}}^{-1}(-\tilde{\boldsymbol{p}})\,\hat{\mathsf{R}}(\tilde{\boldsymbol{p}})\exp\Big\{i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\Big\} &= \exp\Big(-i\,(\vartheta-\pi)\,\hat{\mathsf{J}}_2\Big)\exp\Big(i\,(\varphi\pm\pi)\,\hat{\mathsf{J}}_3\Big)\times\\ &\quad\times\exp\Big(-i\varphi\hat{\mathsf{J}}_3\Big)\exp\Big(-i\,(\vartheta-\pi)\,\hat{\mathsf{J}}_2\Big)\\ &= \exp\Big(-i\,(\vartheta-\pi)\,\hat{\mathsf{J}}_2\Big)\exp\Big(\pm i\pi\hat{\mathsf{J}}_3\Big)\times\\ &\quad\times\exp\Big(-i\,(\vartheta-\pi)\,\hat{\mathsf{J}}_2\Big)\\ &= \exp\Big(\pm i\pi\hat{\mathsf{J}}_3\Big)\,, \end{aligned} \tag{4.175}$$

kde jsme využili toho, že díky komutační relaci

$$\Big[\hat{\mathsf{J}}_2,\hat{\mathsf{J}}_3\Big] = i\hat{\mathsf{J}}_1$$

je (srov. odvození vztahu (4.172))

$$\exp\Big\{\pm i\pi\hat{\mathsf{J}}_3\Big\}\exp\Big\{i\alpha\hat{\mathsf{J}}_2\Big\} = \exp\Big\{-i\alpha\hat{\mathsf{J}}_2\Big\}\exp\Big\{\pm i\pi\hat{\mathsf{J}}_3\Big\}\,. \tag{4.176}$$

Díky vztahu (4.175) lze relaci (4.173) ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{P}}\,|p,\lambda\rangle &= \eta^{(P)}\,(-1)^{j-\lambda}\,N(p)\,\hat{\mathsf{R}}(-\tilde{\boldsymbol{p}})\exp\Big\{-iu\hat{\mathsf{K}}_3\Big\}\exp\{\mp i\pi\lambda\}\,|k,-\lambda\rangle\\ &= \eta^{(P)}\,(-1)^{j-\lambda}\exp\{\mp i\pi\lambda\}\,\frac{N(p)}{N(\mathsf{P}p)}\,|\mathsf{P}p,-\lambda\rangle\,,\end{aligned}$$

který se při splnění rovnosti (4.163) zjednoduší na

$$\hat{\mathsf{P}}\,|p,\lambda\rangle = \eta^{(P)}\,(-1)^{j-\lambda}\exp\{\mp i\pi\lambda\}\,|\mathsf{P}p,-\lambda\rangle\,. \tag{4.177}$$

Částice s nulovou hmotou Právě nalezené výsledky dokazují, že unitární ireducibilní reprezentaci Poincaréovy grupy realizovanou v Hilbertově prostoru stavů jakékoliv částice s *nenulovou* hmotou lze vždy doplnit operátorem $\hat{\mathsf{P}}$, splňujícím všechny podmínky kladené na operátor reprezentující prostorovou inverzi. Pro *nehmotné* částice to však již obecně možné není. Stačí si uvědomit, že z relací (4.156):

$$\Big[\hat{\mathsf{P}},\hat{\boldsymbol{J}}\Big] = \Big\{\hat{\mathsf{P}},\hat{\boldsymbol{P}}\Big\} = 0$$

plyne

$$\hat{\mathsf{P}}\,\frac{\hat{\boldsymbol{J}}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}{\Big|\hat{\boldsymbol{P}}\Big|} = -\frac{\hat{\boldsymbol{J}}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}{\Big|\hat{\boldsymbol{P}}\Big|}\,\hat{\mathsf{P}}, \tag{4.178}$$

a tedy působením operátoru prostorové inverze na libovolný vlastní vektor helicity obdržíme opět vlastní vektor helicity, který však přísluší k *opačné* vlastní hodnotě. Z předchozího však víme, že v případě libovolné ireducibilní reprezentace Poincaréovy grupy realizované na Hilbertově prostoru nehmotné částice nabývá helicita *jedinou* hodnotu λ. Tedy (až na případ $\lambda = 0$) k tomu, aby bylo možno na Hilbertově prostoru nehmotné částice definovat operátor prostorové inverze, musí na něm reprezentace Poincaréovy grupy představovat direktní součet alespoň dvou[37] ireducibilních reprezentací, z nichž jedna odpovídá helicitě λ a druhá helicitě $-\lambda$.

Je zřejmé, že pro jeden pevně vybraný impuls $\boldsymbol{p}$ můžeme vždy požadovat, aby platilo

$$\hat{\mathsf{P}}\,|p,\lambda\rangle = \zeta\,|\mathsf{P}p,-\lambda\rangle\,, \tag{4.179}$$

kde ζ je číslo s jednotkovou absolutní hodnotou. Konkrétní volba je opět otázkou pouhé konvence. V dalším ji provedeme tak, aby byla co nejpodobnější volbě, kterou jsme přijali u částice s nenulovou hmotou. Povšimněme si proto, že pro $M \neq 0$ z formulí (4.158),(4.170) plyne relace

$$\hat{\mathsf{Y}}\,|k,\lambda\rangle = \eta^{(P)}\,(-1)^{j-\lambda}\,|k,-\lambda\rangle\,, \tag{4.180}$$

kde j je spin uvažované částice a operátor

$$\hat{\mathsf{Y}} \equiv \exp\Big(-i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\Big)\,\hat{\mathsf{P}} \tag{4.181}$$

reprezentuje zrcadlení v rovině $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\}$.

Pod spinem nehmotné částice *definitoricky* rozumíme absolutní hodnotu její helicity. Proto v případě $M = 0$ budeme požadovat, aby platilo

$$\hat{\mathsf{Y}}\,|k,\lambda\rangle = \eta^{(P)}\,|k,-\lambda\rangle \quad \text{pro } \lambda \geq 0. \tag{4.182}$$

Zopakováním postupu, který nás přivedl k formuli (4.177), pak již čtenář jistě sám snadno zjistí, že pro libovolný impuls $\boldsymbol{p}$ (při $\lambda \geq 0$) je

$$\hat{\mathsf{P}}\,|p,\lambda\rangle = \eta^{(P)}\exp\{\mp i\pi\lambda\}\,|\mathsf{P}p,-\lambda\rangle\,, \tag{4.183}$$

kde horní (dolní) znaménko platí, když úhel φ směru $\tilde{\boldsymbol{p}}$ je menší (větší nebo roven) π.

[37] V dalším se omezíme na případ, kdy se jedná *právě* o dvě, tj. mlčky předpokládáme, že uvažovaná částice nemá žádné dodatečné stupně volnosti.

Časová inverze

Částice s nenulovou hmotou Ket $|k, \xi\rangle$ vyhovující rovnici (4.76) představuje společný vlastní vektor operátorů $\left\{\hat{\mathsf{H}}, \hat{\mathsf{J}}_3, \hat{\boldsymbol{P}}\right\}$ příslušný k vlastním hodnotám $\{M, \xi, \mathbf{0}\}$. Z relací (4.157):

$$\left[\hat{\mathsf{T}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = \left\{\hat{\mathsf{T}}, \hat{\mathsf{J}}_3\right\} = \left\{\hat{\mathsf{T}}, \hat{\boldsymbol{P}}\right\} = 0$$

vidíme, že ket $\hat{\mathsf{T}}\,|k, \xi\rangle$ je společným vlastním vektorem těchže operátorů příslušným k vlastním hodnotám $\{M, -\xi, \mathbf{0}\}$, a tedy musí platit

$$\hat{\mathsf{T}}\,|k, \xi\rangle = \zeta_\xi\,|k, -\xi\rangle\,, \tag{4.184}$$

kde číslo ζ_ξ je v absolutní hodnotě rovno jedné. V důsledku *antilinearity* operátoru $\hat{\mathsf{T}}$ však (na rozdíl od vnitřní parity vystupující v relaci (4.158), v níž operátor $\hat{\mathsf{P}}$ je lineárním) toto číslo *závisí* na ξ:
Aplikací operátoru $\hat{\mathsf{T}}$ na obě strany rovnosti (4.77) dostáváme

$$-\left(\hat{\mathsf{J}}_1 \mp i\hat{\mathsf{J}}_2\right)\hat{\mathsf{T}}\,|k, \xi\rangle = \alpha^{(\pm)}(j, \xi)\,\hat{\mathsf{T}}\,|k, \xi \pm 1\rangle\,,$$

tj.

$$-\alpha^{(\mp)}(j, -\xi)\,\zeta_\xi\,|k, -\xi \mp 1\rangle = \alpha^{(\pm)}(j, \xi)\,\zeta_{\xi\pm 1}\,|k, -\xi \mp 1\rangle\,,$$

a tedy

$$\zeta_{\xi\pm 1} = -\zeta_\xi\,, \tag{4.185}$$

neboť (viz definici (4.78))

$$\alpha^{(\mp)}(j, -\xi) = \alpha^{(\pm)}(j, \xi)\,. \tag{4.186}$$

Obecné řešení relací (4.185) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\zeta_\xi = \eta^{(T)}\,(-1)^{j-\xi}\,, \tag{4.187}$$

tj. rovnost (4.184) upřesnit jako

$$\hat{\mathsf{T}}\,|k, \xi\rangle = \eta^{(T)}\,(-1)^{j-\xi}\,|k, -\xi\rangle\,, \tag{4.188}$$

kde[38]

$$\left|\eta^{(T)}\right| = 1.$$

K tomu, abychom mohli vyjádřit ket $|p,\xi\rangle$ pro $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$, musíme nejprve specifikovat operátor $\hat{\mathsf{U}}(\mathsf{L}(p))$, vystupující v definici (4.64):

A. V případě báze $|p,\xi\rangle$ tvořené vlastními vektory třetí složky *kovariantního spinu* z relace (4.151) víme, že

$$\hat{\mathsf{T}} \exp\left(-iu\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{K}}\right) \hat{\mathsf{T}}^{-1} = \exp\left(iu\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{K}}\right), \tag{4.189}$$

díky čemuž po aplikaci operátoru $\hat{\mathsf{T}}$ na obě strany rovnosti (4.160) dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{T}}\,|p,\xi\rangle &= N^*(p) \exp\left(iu\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{K}}\right) \hat{\mathsf{T}}\,|k,\xi\rangle \\ &= \eta^{(T)} (-1)^{j-\xi} N^*(p) \exp\left(iu\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{K}}\right) |k,-\xi\rangle\,, \end{aligned}$$

a tedy

$$\hat{\mathsf{T}}\,|p,\xi\rangle = \eta^{(T)} (-1)^{j-\xi} \frac{N^*(p)}{N(\mathsf{P}p)} |\mathsf{P}p,-\xi\rangle\,.$$

Jestliže normalizační konstanty volíme tak, že jsou reálné a vyhovují požadavku (4.163)[39], právě nalezený transformační zákon se zjednoduší na

$$\hat{\mathsf{T}}\,|p,\xi\rangle = \eta^{(T)} (-1)^{j-\xi} |\mathsf{P}p,-\xi\rangle\,. \tag{4.190}$$

B. V případě báze tvořené vlastními vektory *helicity*, tj. vektory (4.165):

$$|p,\lambda\rangle = N(p)\,\hat{\mathsf{R}}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \exp\left\{-iu\hat{\mathsf{K}}_3\right\} |k,\lambda\rangle \tag{4.191}$$

využijeme toho, že na základě formulí (4.170) a (4.188) víme, že je

$$\begin{aligned} \exp\left\{-i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\right\} |k,\lambda\rangle &= (-1)^{j-\lambda} |k,-\lambda\rangle\,, \\ \hat{\mathsf{T}}\,|k,\lambda\rangle &= \eta^{(T)} (-1)^{j-\lambda} |k,-\lambda\rangle\,, \end{aligned}$$

a tedy

$$\hat{\mathsf{T}}\,|k,\lambda\rangle = \eta^{(T)} (-1)^{2j} \exp\left\{i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\right\} |k,\lambda\rangle \tag{4.192}$$

---

[38] Ve skutečnosti lze volbou fází vektorů $|k,\xi\rangle$ vždy docílit toho, aby bylo $\eta^{(T)} = 1$. Konkrétní hodnota faktoru $\eta^{(T)}$ vystupujícího ve formuli (4.187) je tedy otázkou čisté konvence, tj. nemá (na rozdíl od vnitřní parity $\eta^{(P)}$) žádný *fyzikální* význam.

[39] Obě tyto podmínky splňují snad všechny v praxi používané normalizace.

a že díky relacím (4.151) platí nejen vztah (4.189), ale také

$$\hat{\mathsf{T}}\,\hat{\mathsf{R}}(\widetilde{\boldsymbol{p}}) = \hat{\mathsf{R}}(\widetilde{\boldsymbol{p}})\,\hat{\mathsf{T}}. \tag{4.193}$$

Aplikací operátoru $\hat{\mathsf{T}}$ na obě strany rovnosti (4.191) tak dostáváme

$$\begin{aligned}
\hat{\mathsf{T}}\,|p,\lambda\rangle &= N^*(p)\,\hat{\mathsf{R}}(\widetilde{\boldsymbol{p}})\exp\Big\{iu\hat{\mathsf{K}}_3\Big\}\,\hat{\mathsf{T}}\,|k,\lambda\rangle \\
&= \eta^{(T)}\,(-1)^{2j}\,N^*(p)\,\hat{\mathsf{R}}(\widetilde{\boldsymbol{p}})\exp\Big\{iu\hat{\mathsf{K}}_3\Big\}\exp\Big\{i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\Big\}\,|k,\lambda\rangle \\
&= \eta^{(T)}\,(-1)^{2j}\,N^*(p)\,\hat{\mathsf{R}}(\widetilde{\boldsymbol{p}})\exp\Big\{i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\Big\}\exp\Big\{-iu\hat{\mathsf{K}}_3\Big\}\,|k,\lambda\rangle \\
&= \eta^{(T)}\,(-1)^{2j}\exp\{\pm i\pi\lambda\}\,\frac{N^*(p)}{N(\mathsf{P}p)}\,|\mathsf{P}p,\lambda\rangle\,, \qquad (4.194)
\end{aligned}$$

kde jsme k obdržení poslední rovnosti využili výsledku (4.175). Při obvyklých normalizacích, kdy je $N^*(p) = N(\mathsf{P}p)$, se nalezený transformační zákon zjednoduší na

$$\hat{\mathsf{T}}\,|p,\lambda\rangle = \eta^{(T)}\,(-1)^{2j}\exp\{\pm i\pi\lambda\}\,|\mathsf{P}p,\lambda\rangle\,. \tag{4.195}$$

Částice s nulovou hmotou Z relací (4.25),(4.26),(4.157):

$$\begin{aligned}
\Big[\hat{\mathsf{J}}_j,\hat{\mathsf{J}}_k\Big] &= i\,\varepsilon_{jkl}\,\hat{\mathsf{J}}_l, \\
\Big[\hat{\mathsf{J}}_j,\hat{\mathsf{P}}^k\Big] &= i\,\varepsilon_{jkl}\,\hat{\mathsf{P}}^l,
\end{aligned}$$

$$\Big\{\hat{\mathsf{T}},\hat{\boldsymbol{J}}\Big\} = \Big\{\hat{\mathsf{T}},\hat{\boldsymbol{P}}\Big\} = \Big[\hat{\mathsf{T}},\hat{\mathsf{H}}\Big] = 0$$

snadno zjistíme, že ket $\hat{\mathsf{T}}\,|\mathsf{P}p,\lambda\rangle$, kde $|p,\lambda\rangle$ je společným vlastním vektorem operátorů $\hat{\mathsf{P}}^\mu$ a helicity příslušným k vlastním hodnotám p^μ a λ, představuje opět vlastní vektor zmíněných operátorů příslušný k *těmže* vlastním hodnotám. Tedy jistě můžeme pro vybraný impuls $\boldsymbol{p}$ paralelní s $\boldsymbol{e}_3$ požadovat, aby platilo (srov. vztah (4.179))

$$\exp\Big\{-i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\Big\}\,\hat{\mathsf{T}}\,|p,\lambda\rangle = \zeta_\lambda\,|p,\lambda\rangle\,. \tag{4.196}$$

V zájmu co nejužší analogie s dříve diskutovaným případem částice s nenulovou hmotou budeme v dalším užívat konvenci

$$\exp\Big\{-i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\Big\}\,\hat{\mathsf{T}}\,|k,\lambda\rangle = \eta^{(T)}\,(-1)^{2\lambda}\,|k,\lambda\rangle\,. \tag{4.197}$$

Zopakováním kroků, které nás přivedly k formuli (4.195), pak obdržíme hledaný transformační zákon ve tvaru

$$\hat{\mathsf{T}}\,|p,\lambda\rangle = \eta^{(T)}\,(-1)^{2\lambda}\exp\{\pm i\pi\lambda\}\,|\mathsf{P}p,\lambda\rangle\,. \tag{4.198}$$

Dříve než na čas opustíme problematiku časové inverze, si povšimněme ještě alespoň dvou skutečností:

i) Operátor časové inverze je možno (na rozdíl od operátoru inverze prostorové) definovat na Hilberově prostoru nehmotné částice s nenulovou helicitou i tehdy, když se jedná o prostor příslušný *ireducibilní* reprezentaci Poincaréovy grupy, tj. časová inverze *nevyžaduje*, aby pro nehmotnou částici, která může být ve stavu s helicitou λ, nutně existovaly také stavy s helicitou $-\lambda$.

ii) Ze vztahu (4.190) dostáváme

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{T}}^2\,|p,\xi\rangle &= \left(\eta^{(T)}\right)^*(-1)^{j-\xi}\,\hat{\mathsf{T}}\,|\mathsf{P}p,-\xi\rangle \\ &= (-1)^{2j}\,|p,\xi\rangle\,.\end{aligned} \tag{4.199}$$

Podobně ze vztahu (4.198) s přihlédnutím k *antilinearitě* operátoru $\hat{\mathsf{T}}$ obdržíme

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{T}}^2\,|p,\lambda\rangle &= \left(\eta^{(T)}\right)^*(-1)^{2\lambda}\exp\{\mp i\pi\lambda\}\,\hat{\mathsf{T}}\,|\mathsf{P}p,\lambda\rangle \\ &= \exp\{\mp 2i\pi\lambda\}\,|p,\lambda\rangle \\ &= (-1)^{2|\lambda|}\,|p,\lambda\rangle\,,\end{aligned} \tag{4.200}$$

kde jsme k obdržení prostřední rovnosti využili faktu, že pokud druhá komponenta impulsu $\boldsymbol{p}$ je kladná, tj. odpovídající úhel $\varphi < \pi$, potom druhá komponenta impulsu $-\boldsymbol{p}$ je záporná, tj. odpovídající úhel $\varphi > \pi$ a naopak.

Tedy závěr, že kvadrát operátoru časové inverze je pro částice s celým spinem roven operátoru identity, kdežto pro částice se spinem polocelým se od něho liší pouze svým znaménkem, ke kterému jsme došli v rámci nerelativistické kvantové mechaniky,[40] zůstává v platnosti i pro relativistické kvantové teorie.

[40] Viz formuli (9.191) v [1].

4.2 Vícečásticové stavy

V předchozím jsme zjistili jak je třeba v rámci relativistické kvantové teorie popisovat jednočásticové stavy.[41] Nalezené výsledky by bez problému umožnily popsat i stavy vícečásticové, pokud by částice navzájem neinteragovaly. I když jde o situaci realitě neodpovídající,[42] naznačme si, jak lze takovýto popis realizovat. Uvidíme totiž, že algoritmus, který k tomu použijeme, nám pomůže při hledání cest k popisu systémů realističtějších.

4.2.1 Neinteragující částice

Pro zjednodušení se nejprve pokusme popsat systém, který může být ve stavech odpovídajících libovolnému počtu navzájem neinteragujících stejných částic se spinem j a s nenulovou hmotou M. Dále budeme požadovat, aby se tento systém mohl nalézat také ve vakuovém stavu. Víme tedy, že k Hilbertovu prostoru $\mathcal{H}$ našeho systému patří normalizovaný vektor $|0\rangle$ popisující vakuum a kety $|p, \xi\rangle$, odpovídající jednočásticovým stavům.[43] Víme také, že je na něm možno realizovat unitární reprezentaci Poincaréovy grupy, případně doplněné prostorovými a časovými inverzemi. Abychom zdůraznili, že jde o systém, "jehož částice" navzájem neinteragují, budeme dříve zavedené symboly pro operátory reprezentující generátory Poincaréovy grupy, stejně jako operátory od-

[41] Je dobře si uvědomit, že jsme nikde nepožadovali, aby popisovaná částice byla (v nějakém smyslu) *elementární*. Každá částice je zde charakterizována pouze svojí hmotou M a spinem j (v případě $M = 0$, helicitou λ). Vůbec nevylučujeme, že by částice nemohla mít nějaké vnitřní stupně volnosti. Pokud jsou možné stavy s toutéž hodnotou M a j (resp. λ), lišící se vlastní hodnotou nějaké další pozorovatelné (např. náboje), potom je z hlediska výše diskutovaného popisu považujeme za částice různé. Zdůrazněme však ještě jednou, že závěry předcházející i nasledující diskuse můžeme stejně dobře užít pro částici představovanou elektronem jako pro α-částici, přestože v druhém případě jistě nikdo nepochybuje o tom, že se nejedná o částici bezstrukturní.

[42] Konec konců je to jen díky interakcím, že o částici můžeme získat jakoukoliv informaci, včetně informace nejzákladnější, tj. že částice "existuje".

[43] Pro určitost uvažujeme vlastní stavy třetí komponenty kovariantního spinu, a tedy také implicitně předpokládáme, že se jedná o částice s nenulovou hmotou. Zopakování níže uvedených úvah v případě vlastních stavů helicity pro hmotné i nehmotné částice ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení.

povídající inverzím doplňovat dolním indexem $_{(0)}$. Tedy na uvažovaném prostoru $\mathcal{H}$ jsou definovány operátory $\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}, \hat{\mathsf{H}}_{(0)}, \hat{\boldsymbol{J}}_{(0)}, \hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}$ a případně ještě operátory $\hat{\mathsf{P}}_{(0)}, \hat{\mathsf{T}}_{(0)}$ splňující relace

$$\left[\hat{\mathsf{P}}^j_{(0)}, \hat{\mathsf{P}}^k_{(0)}\right] = \left[\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}, \hat{\mathsf{H}}_{(0)}\right] = \left[\hat{\boldsymbol{J}}_{(0)}, \hat{\mathsf{H}}_{(0)}\right] = 0, \tag{4.201}$$

$$\left[\hat{\mathsf{J}}^j_{(0)}, \hat{\mathsf{J}}^k_{(0)}\right] = -\left[\hat{\mathsf{K}}^j_{(0)}, \hat{\mathsf{K}}^k_{(0)}\right] = i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathsf{J}}^l_{(0)}, \tag{4.202}$$

$$\left[\hat{\mathsf{J}}^j_{(0)}, \hat{\mathsf{P}}^k_{(0)}\right] = i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathsf{P}}^l_{(0)}, \tag{4.203}$$

$$\left[\hat{\mathsf{J}}^j_{(0)}, \hat{\mathsf{K}}^k_{(0)}\right] = i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathsf{K}}^l_{(0)}, \tag{4.204}$$

$$\left[\hat{\mathsf{K}}^j_{(0)}, \hat{\mathsf{P}}^k_{(0)}\right] = -i\delta_{jk}\hat{\mathsf{H}}_{(0)}, \tag{4.205}$$

$$\left[\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}, \hat{\mathsf{H}}_{(0)}\right] = -i\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}, \tag{4.206}$$

$$\left[\hat{\mathsf{P}}_{(0)}, \hat{\boldsymbol{J}}_{(0)}\right] = \left\{\hat{\mathsf{P}}_{(0)}, \hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}\right\} = \left\{\hat{\mathsf{P}}_{(0)}, \hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}\right\} = \left[\hat{\mathsf{P}}_{(0)}, \hat{\mathsf{H}}_{(0)}\right] = 0, \tag{4.207}$$

$$\left\{\hat{\mathsf{T}}_{(0)}, \hat{\boldsymbol{J}}_{(0)}\right\} = \left\{\hat{\mathsf{T}}_{(0)}, \hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}\right\} = \left[\hat{\mathsf{T}}_{(0)}, \hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}\right] = \left[\hat{\mathsf{T}}_{(0)}, \hat{\mathsf{H}}_{(0)}\right] = 0 \tag{4.208}$$

a přitom platí

$$\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)} \left|0\right\rangle = \hat{\mathsf{H}}_{(0)} \left|0\right\rangle = \hat{\boldsymbol{J}}_{(0)} \left|0\right\rangle = \hat{\boldsymbol{K}}_{(0)} \left|0\right\rangle = 0, \tag{4.209}$$

$$\hat{\mathsf{P}}_{(0)} \left|0\right\rangle = \hat{\mathsf{T}}_{(0)} \left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle, \tag{4.210}$$

$$\hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda, a) \left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle, \tag{4.211}$$

$$\left\langle 0 \,\middle|\, 0\right\rangle = 1, \tag{4.212}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)} \left|p, \xi\right\rangle = \boldsymbol{p} \left|p, \xi\right\rangle, \tag{4.213}$$

$$\hat{\mathsf{H}}_{(0)} \left|p, \xi\right\rangle = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2} \left|p, \xi\right\rangle, \tag{4.214}$$

$$\left(\hat{\mathsf{W}}_{(0)}\right)_\mu \hat{\mathsf{W}}^\mu_{(0)} \left|p, \xi\right\rangle = -M^2 j\,(j+1) \left|p, \xi\right\rangle, \tag{4.215}$$

$$\hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda, a) \left|p, \xi\right\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \exp(ia \cdot \Lambda p) \sum_{\xi'=-j}^{j} D^{(j)}_{\xi'\xi}(\mathsf{W}(\Lambda, p)) \left|\Lambda p, \xi'\right\rangle, \tag{4.216}$$

$$\hat{\mathsf{P}}_{(0)} \left|p, \xi\right\rangle = \frac{N(p)}{N(\mathsf{P}p)} \eta^{(P)} \left|\mathsf{P}p, \xi\right\rangle, \tag{4.217}$$

$$\hat{\mathsf{T}}_{(0)}\,|p,\xi\rangle = \eta^{(T)}\,(-1)^{j-\xi}\,\frac{N^*(p)}{N(\mathsf{P}p)}\,|\mathsf{P}p,-\xi\rangle\,, \tag{4.218}$$

$$\langle p,\xi\,|p',\xi'\rangle = 2Ef(p)\,\delta_{\xi\xi'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,, \tag{4.219}$$

kde

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda,a) &\equiv \hat{\mathsf{U}}_{(0)}(a)\,\hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda)\,,\\ \hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda) &\equiv \exp\Big(\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\hat{\mathsf{M}}^{\mu\nu}_{(0)}\Big)\,,\\ \hat{\mathsf{U}}_{(0)}(a) &\equiv \exp\Big(ia_\mu\hat{\mathsf{P}}^{\mu}_{(0)}\Big)\,.\end{aligned} \tag{4.220}$$

Kreační a anihilační operátory

Již v rámci nerelativistické kvantové mechaniky jsme poznali,[44] jak užitečný nástroj při popisu soustav nerozlišitelných částic hrají kreační a anihilační operátory. Definujme[45] proto *anihilační* operátory $\hat{\mathsf{a}}(p,\xi)$tak, že
i)

$$\hat{\mathsf{a}}(p,\xi)\,|0\rangle = 0, \tag{4.221}$$

ii) operátory jim sdružené představují operátory *kreační*, tj. platí

$$\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p,\xi)\,|0\rangle = |p,\xi\rangle \tag{4.222}$$

a přitom jsou splněny *buď komutační, nebo antikomutační* relace

$$[\hat{\mathsf{a}}(p,\xi)\,,\hat{\mathsf{a}}(p',\xi')]_\mp = \left[\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p,\xi)\,,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p',\xi')\right]_\mp = 0, \tag{4.223}$$

$$\left[\hat{\mathsf{a}}(p,\xi)\,,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p',\xi')\right]_\mp = 2Ef(p)\,\delta_{\xi\xi'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,, \tag{4.224}$$

z nichž poslední zaručuje, že kety $|p,\xi\rangle$ dané vztahem (4.222) splňují normalizační podmínku (4.219).
Dále budeme požadovat, aby platily relace

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda,a)\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p,\xi)\,\hat{\mathsf{U}}^\dagger_{(0)}(\Lambda,a) &= \qquad\qquad (4.225)\\ = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\exp(ia\cdot\Lambda p)\sum_{\xi'=-j}^{j} D^{(j)}_{\xi'\xi}&(\mathsf{W}(\Lambda,p))\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\Lambda p,\xi')\,,\end{aligned}$$

[44] Viz Kapitolu 10 v [1].

[45] Přesněji řečeno, konstruujeme Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ tak, aby na něm takovéto operátory existovaly a aby níže uvedené vektory (4.239) (pro $N=0,\cdots,\infty$) tvořily jeho bázi.

díky nimž kety $|p,\xi\rangle$ dané vztahem (4.222) jistě vyhovují transformačnímu zákonu (4.216).
Podobně relace (4.217), resp. (4.218) jsou automaticky splněny, pokud platí

$$\hat{\mathsf{P}}_{(0)}\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p,\xi)\,\hat{\mathsf{P}}_{(0)}^{-1} = \frac{N(p)}{N(\mathsf{P}p)}\,\eta^{(P)}\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\mathsf{P}p,\xi)\,, \tag{4.226}$$

respektive

$$\hat{\mathsf{T}}_{(0)}\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p,\xi)\,\hat{\mathsf{T}}_{(0)}^{-1} = \eta^{(T)}\,(-1)^{j-\xi}\,\frac{N^*(p)}{N(\mathsf{P}p)}\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\mathsf{P}p,-\xi)\,. \tag{4.227}$$

Porovnáním veličin prvního řádu v a_μ z formule (4.225) pro $\Lambda = 1$ dostáváme

$$\left[\hat{\mathsf{P}}^\mu_{(0)},\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p,\xi)\right] = p^\mu\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p,\xi)\,, \tag{4.228}$$

tj. operátor $\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p,\xi)$ hraje úlohu "posunovacího operátoru", zvedajícího vlastní hodnotu operátoru $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$ (tj. celkové energie) o $\sqrt{\boldsymbol{p}^2+M^2}$ a posunujícího vlastní hodnotu operátoru $\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}$ (tj. celkového impulsu) o $\boldsymbol{p}$. Tedy tento operátor skutečně lze interpretovat jako operátor "rodící" částici, která má hmotu M a impuls $\boldsymbol{p}$.

Počínaje formulí (4.213) jsme všechny vztahy uváděli ve tvaru platném při libovolné volbě funkcí $N(p)$, $f(p)$, omezené pouze požadavkem invariance poměru $f(p)\,/\,|N(p)|^2$ vůči Lorentzovým transformacím. V dalším již budeme pracovat v duchu dříve zavedené konvence: Symboly $|p,\xi\rangle$, $\hat{\mathsf{a}}(p,\xi)\,,\cdots$ budeme rezervovat k označení těchto veličin při volbě $N(p) = f(p) = 1$, kdežto tytéž veličiny při volbě $f(p) = \frac{1}{2E}$, $N(p) = \sqrt{\frac{E}{k^0}}$ budeme označovat $|\boldsymbol{p},\xi\rangle\,,\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p},\xi)\,,\cdots$, tj. místo relací (4.219), (4.223) – (4.227) bude v dalším platit

$$\langle p,\xi\,|p',\xi'\rangle = 2E\delta_{\xi\xi'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,, \tag{4.229}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{\mathsf{a}}(p,\xi)\,,\hat{\mathsf{a}}(p',\xi')]_\mp &= \left[\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p,\xi)\,,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p',\xi')\right]_\mp = 0,\\
\left[\hat{\mathsf{a}}(p,\xi)\,,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p',\xi')\right]_\mp &= 2E\delta_{\xi\xi'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,,
\end{aligned} \tag{4.230}$$

$$\hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda,a)\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p,\xi)\,\hat{\mathsf{U}}^\dagger_{(0)}(\Lambda,a) = \exp(ia\cdot\Lambda p)\sum_{\xi'=-j}^{j} D^{(j)}_{\xi'\xi}(\mathsf{W}(\Lambda,p))\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\Lambda p,\xi')\,, \tag{4.231}$$

$$\hat{\mathsf{P}}_{(0)}\,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(p,\xi)\,\hat{\mathsf{P}}^{-1}_{(0)} = \eta^{(P)}\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(\mathsf{P}p,\xi)\,, \tag{4.232}$$

$$\hat{\mathsf{T}}_{(0)}\,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(p,\xi)\,\hat{\mathsf{T}}^{-1}_{(0)} = \eta^{(T)}\,(-1)^{j-\xi}\,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(\mathsf{P}p,-\xi)\,, \tag{4.233}$$

respektive

$$\langle \boldsymbol{p},\xi\,|\boldsymbol{p}',\xi'\rangle = \delta_{\xi\xi'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,, \tag{4.234}$$

$$\begin{aligned} [\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p},\xi)\,,\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p}',\xi')]_{\mp} &= \left[\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(\boldsymbol{p},\xi)\,,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}',\xi')\right]_{\mp} = 0, \\ \left[\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p},\xi)\,,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}',\xi')\right]_{\mp} &= \delta_{\xi\xi'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,, \end{aligned} \tag{4.235}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda,a)\,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(\boldsymbol{p},\xi)\,\hat{\mathsf{U}}^{\dagger}_{(0)}(\Lambda,a) &= \\ = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{E}}\exp(ia\cdot\Lambda p)\sum_{\xi'=-j}^{j} D^{(j)}_{\xi'\xi}(\mathsf{W}(\Lambda,p))\,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}\left(\overrightarrow{\Lambda p},\xi'\right), \end{aligned} \tag{4.236}$$

kde jsme symbolem $\overrightarrow{\Lambda p}$ označili třívektor s komponentami $\left(\overrightarrow{\Lambda p}\right)^k \equiv \Lambda^k{}_\mu p^\mu = \Lambda^k{}_j p^j + \Lambda^k{}_0 E$,

$$\hat{\mathsf{P}}_{(0)}\,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(\boldsymbol{p},\xi)\,\hat{\mathsf{P}}^{-1}_{(0)} = \eta^{(P)}\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(-\boldsymbol{p},\xi)\,, \tag{4.237}$$

$$\hat{\mathsf{T}}_{(0)}\,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(\boldsymbol{p},\xi)\,\hat{\mathsf{T}}^{-1}_{(0)} = \eta^{(T)}\,(-1)^{j-\xi}\,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(-\boldsymbol{p},-\xi)\,. \tag{4.238}$$

Definujme nyní ket[46]

$$|\boldsymbol{p}_1,\xi_1;\boldsymbol{p}_2,\xi_2;\cdots;\boldsymbol{p}_N,\xi_N\rangle \equiv \hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_1,\xi_1)\,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_2,\xi_2)\cdots\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_N,\xi_N)\,|0\rangle\,. \tag{4.239}$$

Díky formulím (4.228),(4.209) víme, že se jedná o společný vlastní vektor operátorů $\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}$ a $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$ příslušný vlastním hodnotám odpovídajícím celkovému impulsu a energii soustavy N neinteragujících částic, z nichž každá má hmotu M, a přitom jedna z nich má impuls $\boldsymbol{p}_1$, jiná $\boldsymbol{p}_2$, jiná $\cdots\boldsymbol{p}_N$. Navíc z formulí (4.236),(4.209) vidíme, že pokud je systém z hlediska naší soutavy ve stavu popsaném ketem (4.239), potom

[46] V zájmu stručnosti uvádíme následující relace pouze pro volbu $f(p) = \frac{1}{2E}$, $N(p) = \sqrt{\frac{E}{k^0}}$. Doporučujeme však čtenáři, aby zjistil, jak by bylo nutno níže nalezené výsledky modifikovat, pokud bychom zvolili $N(p) = f(p) = 1$.

z hlediska soustavy, která z ní vznikne Poincaréovou transformací, je ve stavu popsaném ketem

$$\hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda, a)\,|\boldsymbol{p}_1, \xi_1; \boldsymbol{p}_2, \xi_2; \cdots; \boldsymbol{p}_N, \xi_N\rangle = \prod_{k=1}^{N} \sqrt{\frac{\left(\Lambda p_{(k)}\right)^0}{E_{(k)}}} \exp\!\left(ia \cdot \Lambda p_{(k)}\right) \times$$
$$\sum_{\xi'=-j}^{j} D^{(j)}_{\xi'\xi}\left(\mathsf{W}\left(\Lambda, p_{(k)}\right)\right) \left|\overrightarrow{\Lambda p}_1, \xi_1'; \overrightarrow{\Lambda p}_2, \xi_2'; \cdots; \overrightarrow{\Lambda p}_N, \xi_N'\right\rangle, \quad (4.240)$$

tj. vektor (4.239) se transformuje jako direktní součin vektorů odpovídajících příslušným jednočásticovým stavům.
Podobně z formulí (4.237), respektive (4.238) díky platnosti relací (4.210) obdržíme

$$\hat{\mathsf{P}}_{(0)}\,|\boldsymbol{p}_1, \xi_1; \boldsymbol{p}_2, \xi_2; \cdots; \boldsymbol{p}_N, \xi_N\rangle = \left(\eta^{(P)}\right)^N |-\boldsymbol{p}_1, \xi_1; -\boldsymbol{p}_2, \xi_2; \cdots; -\boldsymbol{p}_N, \xi_N\rangle, \quad (4.241)$$

respektive

$$\hat{\mathsf{T}}_{(0)}\,|\boldsymbol{p}_1, \xi_1; \boldsymbol{p}_2, \xi_2; \cdots; \boldsymbol{p}_N, \xi_N\rangle = \quad (4.242)$$
$$= \left(\eta^{(T)}\right)^N \prod_{k=1}^{N} (-1)^{j-\xi_k}\, |-\boldsymbol{p}_1, -\xi_1; -\boldsymbol{p}_2, -\xi_2; \cdots; -\boldsymbol{p}_N, -\xi_N\rangle.$$

Nalezené výsledky ukazují, že kety $|\boldsymbol{p}_1, \xi_1; \boldsymbol{p}_2, \xi_2; \cdots; \boldsymbol{p}_N, \xi_N\rangle$ lze bezesporně interpretovat jako vektory popisující N nerozlišitelných částic, z nichž *jedna* má impuls $\boldsymbol{p}_1$ a třetí složku kovariantního spinu ξ_1, *jiná* impuls $\boldsymbol{p}_2$ a třetí složku kovariantního spinu ξ_2, ... , a přitom se jedná o bosony nebo fermiony, v závislosti na tom, zda ve formulích (4.235) platí komutační či antikomutační relace.

Jestliže příslušná částice nemá žádné další stupně volnosti, potom Hilbertův prostor diskutovaného fyzikálního systému můžeme ztotožnit s prostorem, jehož báze je tvořena kety (4.239) pro $N = 0, \cdots, \infty$.[47] Takto zkonstruovaný Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ se obvykle nazývá prostorem *Fockovým.* Libovolný element $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}$ můžeme vyjádřit ve tvaru rozvoje

---

[47]Pro $N = 0$ pod ketem (4.239) definitoricky rozumíme dříve zavedený ket $|0\rangle$. Pokud nebude hrozit nebezpečí nedorozumění, budeme obdobné zjednodušení zápisu užívat i v dalším.

$$\begin{aligned}|\Phi\rangle &= c_0\,|0\rangle + \int d^3\boldsymbol{p}_1 \sum_{\xi_1} c_1(\boldsymbol{p}_1,\xi_1)\,|\boldsymbol{p}_1,\xi_1\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2!}}\int d^3\boldsymbol{p}_1 d^3\boldsymbol{p}_2 \sum_{\xi_1,\xi_2} c_2(\boldsymbol{p}_1,\xi_1;\boldsymbol{p}_2,\xi_2)\,|\boldsymbol{p}_1,\xi_1;\boldsymbol{p}_2,\xi_2\rangle + \cdots \qquad (4.243) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{N!}}\int d^3\boldsymbol{p}_1\cdots d^3\boldsymbol{p}_N \sum_{\xi_1\cdots\xi_N} c_N(\boldsymbol{p}_1,\xi_1;\cdots;\boldsymbol{p}_N,\xi_N)\,|\boldsymbol{p}_1,\xi_1;\cdots;\boldsymbol{p}_N,\xi_N\rangle\,,\end{aligned}$$

kde komplexní funkce $c_N(\boldsymbol{p}_1,\xi_1;\cdots;\boldsymbol{p}_N,\xi_N)$ jsou invariantní, resp. mění znaménko při záměně $(\boldsymbol{p}_j,\xi_j) \rightleftarrows (\boldsymbol{p}_k,\xi_k)$ pro libovolnou dvojici $j \neq k$: $j,k = 1,\cdots,N$, v závislosti na tom, zda ve formuli (4.235) platí komutační či antikomutační relace.

Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby se přesvědčil, že z *komutačních* relací (4.235) plyne vztah

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p}_N,\xi_N)\cdots\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p}_1,\xi_1)\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}'_1,\xi'_1)\cdots\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}'_N,\xi'_N)\,|0\rangle &= \qquad (4.244) \\ = \delta_{NN'}\sum_P \delta_{\xi_1\xi'_{i_1}}\delta\big(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}'_{i_1}\big)\cdots\delta_{\xi_N\xi'_{i_N}}\delta\big(\boldsymbol{p}_N-\boldsymbol{p}'_{i_N}\big)\,,\end{aligned}$$

kde suma probíhá přes všechny permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & N \\ i_1 & \cdots & i_N \end{pmatrix}.$$

Díky němu pro koeficienty rozvoje (4.243) obdržíme výraz

$$c_N(\boldsymbol{p}_1,\xi_1;\cdots;\boldsymbol{p}_N,\xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\langle \boldsymbol{p}_1,\xi_1;\cdots;\boldsymbol{p}_N,\xi_N|\,\Phi\rangle\,, \qquad (4.245)$$

po jehož dosazení do tohoto rozvoje dospějeme k relaci uzavřenosti

$$1 = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\int d^3\boldsymbol{p}_1\cdots d^3\boldsymbol{p}_N \sum_{\xi_1\cdots\xi_N} |\boldsymbol{p}_1,\xi_1;\cdots;\boldsymbol{p}_N,\xi_N\rangle\langle \boldsymbol{p}_1,\xi_1;\cdots;\boldsymbol{p}_N,\xi_N|\,, \qquad (4.246)$$

v níž N-tý člen na pravé straně není ničím jiným než projekčním operátorem do N-částicového podprostoru, tj. do prostoru N-částicových stavů studovaného systému.

Pomocí této relace mj. ihned dostaneme vyjádření kvadrátu normy vektoru (4.243) ve tvaru

$$\|\Phi\|^2 \equiv \langle\Phi|\,\Phi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \int d^3\boldsymbol{p}_1 \cdots d^3\boldsymbol{p}_N \sum_{\xi_1\cdots\xi_N} |c_N(\boldsymbol{p}_1,\xi_1;\cdots;\boldsymbol{p}_N,\xi_N)|^2 . \tag{4.247}$$

V případě *antikomutačních* relací (4.235) obdržíme místo (4.244) vztah

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p}_N,\xi_N)\cdots\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p}_1,\xi_1)\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p_1',\xi_1')\cdots\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p_N',\xi_N')\,|0\rangle &= \\ = \delta_{NN'}\sum_P \varepsilon_P \delta_{\xi_1\xi'_{i_1}}\,\delta\big(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}'_{i_1}\big)\cdots\delta_{\xi_N\xi'_{i_N}}\,\delta\big(\boldsymbol{p}_N-\boldsymbol{p}'_{i_N}\big)\,,\end{aligned} \tag{4.248}$$

kde parita permutace

$$\varepsilon_P \equiv \begin{cases} +1 & \text{pro sudé } P, \\ -1 & \text{pro liché } P, \end{cases} \tag{4.249}$$

formule (4.245) – (4.247) však zůstanou v platnosti bez jakékoliv změny.

Právě nalezené výsledky nám dovolují interpretovat komplexní funkci $c_N(\boldsymbol{p}_1,\xi_1;\cdots;\boldsymbol{p}_N,\xi_N)$ jako amplitudu hustoty pravděpodobnosti toho, že ve stavu uvažovaného systému, popsaném vektorem $|\Phi\rangle$ nalezneme právě N částic, z nichž jedna bude mít třetí komponentu kovariantního spinu rovnu ξ_1 a impuls $\boldsymbol{p}_1$, jiná třetí komponentu kovariantního spinu rovnu ξ_2 a impuls $\boldsymbol{p}_2,\cdots$.

Definujeme-li

$$\hat{\mathsf{N}}(\xi) \equiv \int d^3\boldsymbol{p}\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p},\xi)\,\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p},\xi)\,, \tag{4.250}$$

potom na základě formule (4.235)[48] snadno zjistíme, že tento operátor vyhovuje komutačním relacím

$$\Big[\hat{\mathsf{N}}(\xi)\,,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p},\xi')\Big] = \delta_{\xi\xi'}\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p},\xi)\,, \tag{4.251}$$

díky nimž ho můžeme interpretovat jako operátor počtu částic s třetí složkou kovariantního spinu rovnou ξ. Z formule (4.250) pak vidíme, že operátor

$$\hat{\mathsf{N}}(\boldsymbol{p},\xi) \equiv \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p},\xi)\,\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p},\xi) \tag{4.252}$$

hraje úlohu operátoru hustoty (v impulsovém prostoru) počtu částic s třetí složkou kovariantního spinu rovnou ξ.

---

[48]Nezávisle na tom, zda v ní vystupují komutační či antikomutační relace.

Ze samotné konstrukce Fockova prostoru plyne, že libovolný operátor $\hat{\mathsf{F}}$ na tomto prostoru definovaný, lze vyjádřit pomocí kreačních a anihilačních operátorů ve tvaru

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{F}} &= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{N'=0}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{p}_1\cdots d^3\boldsymbol{p}_N\int d^3\boldsymbol{p}'_1\cdots d^3\boldsymbol{p}'_{N'}\\ &\quad \sum_{\xi_1\cdots\xi_N}\sum_{\xi'_1\cdots\xi'_{N'}} F_{N,N'}(\boldsymbol{p}_1,\xi_1;\cdots;\boldsymbol{p}_N,\xi_N;\boldsymbol{p}'_1,\xi'_1;\cdots;\boldsymbol{p}'_{N'},\xi'_{N'})\times\\ &\quad \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}_1,\xi_1)\cdots\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}_N,\xi_N)\,\hat{\mathsf{a}}(p'_{N'},\xi'_{N'})\cdots\hat{\mathsf{a}}(p'_1,\xi'_1)\,, \end{aligned}\tag{4.253}$$

kde $F_{N,N'}$ jsou komplexní funkce příslušných proměnných. Speciálně si povšimněme, že v tomto tvaru vyjádřené operátory celkové energie a impulsu neinteragujících částic můžeme zapsat jako

$$\hat{\mathsf{H}}_{(0)} = \int d^3\boldsymbol{p}\sum_{\xi} E\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p},\xi)\,\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p},\xi) = \int d^3\boldsymbol{p}\sum_{\xi} E\,\hat{\mathsf{N}}(\boldsymbol{p},\xi)\,, \tag{4.254}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)} = \int d^3\boldsymbol{p}\sum_{\xi} \boldsymbol{p}\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p},\xi)\,\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p},\xi) = \int d^3\boldsymbol{p}\sum_{\xi} \boldsymbol{p}\,\hat{\mathsf{N}}(\boldsymbol{p},\xi)\,. \tag{4.255}$$

Čtenář se jistě sám snadno přesvědčí, že díky (anti)komutačním relacím (4.235) operátory vystupující na pravých stranách posledních dvou formulí vyhovují komutačním relacím (4.228).

Zobecnění naznačené konstrukce tak, aby poskytovala popis systému, který se může vyskytovat ve stavech odpovídajících libovolnému počtu nejrůznějších druhů částic, z nichž některé mohou být bosony a jiné fermiony, je evidentní: Stačí, když každému druhu částic přiřadíme vlastní kreační a anihilační operátory tak, že pokud $\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p},\xi;n)$ je anihilační operátor odpovídající n-tému druhu částic, potom platí

$$\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p},\xi;n)\,|0\rangle = 0 \tag{4.256}$$

a relace

$$\begin{aligned}\left[\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p},\xi;n)\,,\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p}',\xi';n')\right]_\mp &= \left[\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p},\xi;n)\,,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}',\xi';n')\right]_\mp = 0,\\ \left[\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p},\xi;n)\,,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}',\xi';n')\right]_\mp &= \delta_{nn'}\delta_{\xi\xi'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,,\end{aligned}\tag{4.257}$$

v nichž se jedná o antikomutátory pouze tehdy, když jak částice n, tak částice n' je fermionem.[49] V takovémto případě pak místo formule (4.246) dostáváme pro relaci uzavřenosti vyjádření

$$\begin{aligned} 1 \;=\; & \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \frac{1}{n_1! \cdots n_N!} \int d^3\boldsymbol{p}_1^{(1)} \cdots d^3\boldsymbol{p}_{n_1}^{(1)} \sum_{\xi_1^{(1)} \ldots \xi_{n_1}^{(1)}} \cdots \\ & \cdots \int d^3\boldsymbol{p}_1^{(N)} \cdots d^3\boldsymbol{p}_{n_N}^{(N)} \\ & \sum_{\xi_1^{(N)} \ldots \xi_{n_N}^{(N)}} \left|\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \xi_1^{(1)}; \cdots; \boldsymbol{p}_{n_N}^{(N)}, \xi_{n_N}^{(N)}\right\rangle \left\langle \boldsymbol{p}_1^{(1)}, \xi_1^{(1)}; \cdots; \boldsymbol{p}_{n_N}^{(N)}, \xi_{n_N}^{(N)}\right|, \end{aligned} \tag{4.258}$$

kde N udává počet druhů částic a

$$\begin{aligned} & \left|\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \xi_1^{(1)}; \cdots; \boldsymbol{p}_{n_1}^{(1)}, \xi_{n_1}^{(1)}; \boldsymbol{p}_1^{(2)}, \xi_1^{(2)}; \cdots; \boldsymbol{p}_{n_N}^{(N)}, \xi_{n_N}^{(N)}\right\rangle \equiv \\ & \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \xi_1^{(1)}; 1\right) \cdots \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\boldsymbol{p}_{n_1}^{(1)}, \xi_{n_1}^{(1)}; 1\right) \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\boldsymbol{p}_1^{(2)}, \xi_1^{(2)}; 2\right) \cdots \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\boldsymbol{p}_{n_N}^{(N)}, \xi_{n_N}^{(N)}; N\right) |0\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.259}$$

Povšimněme si ještě toho, že operátor

$$\hat{\mathsf{N}}(\xi, n) \equiv \int d^3\boldsymbol{p}\, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi; n)\, \hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p}, \xi; n) \tag{4.260}$$

vyhovuje komutačním relacím

$$\left[\hat{\mathsf{N}}(\xi, n)\,, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi'; n')\right] = \delta_{nn'}\delta_{\xi\xi'}\, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi; n)\,, \tag{4.261}$$

díky nimž ho můžeme interpretovat jako operátor počtu částic druhu n s třetí složkou kovariantního spinu rovnou ξ. Operátory celkové energie a impulsu neinteragujících částic pak může vyjádřit jako

$$\hat{\mathsf{H}}_{(0)} = \int d^3\boldsymbol{p} \sum_{n=1}^{N} \sum_{\xi_n} E(\boldsymbol{p}, n)\, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi_n; n)\, \hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p}, \xi_n; n)\,, \tag{4.262}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)} = \int d^3\boldsymbol{p} \sum_{n=1}^{N} \sum_{\xi_n} \boldsymbol{p}\, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi_n; n)\, \hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p}, \xi_n; n)\,, \tag{4.263}$$

[49] Ve skutečnosti, pokud se jedná o vztah mezi operátory týkající se *různých* druhů částic, jde o speciální (i když velice výhodný) výběr konvence. Je možno ukázat (viz [43]), že jsme např. mohli stejně dobře požadovat, aby kreační operátory, odpovídající dvěma různým fermionům navzájem komutovaly, aniž by to mělo jakékoliv *fyzikální* důsledky.

kde

$$E(\boldsymbol{p}, n) \equiv \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M_n^2} \tag{4.264}$$

a M_n je hmota částice druhu n.

Vnitřní symetrie Výše zavedený Fockův prostor jsme konstruovali tak, že na něm existuje unitární reprezentace Poincaréovy grupy realizovaná operátory $\hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda, a)$, které vedle požadavku

$$\hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda, a)\,|0\rangle = |0\rangle \tag{4.265}$$

vyhovují relacím

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda, a)\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi, n)\,\hat{\mathsf{U}}^\dagger_{(0)}(\Lambda, a) &= \\ = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{E}}\exp(ia\cdot\Lambda p) &\sum_{\xi'=-j^{(n)}}^{j^{(n)}} D^{(j^{(n)})}_{\xi'\xi}(\mathsf{W}(\Lambda, p))\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\overrightarrow{\Lambda p}, \xi', n\right), \end{aligned} \tag{4.266}$$

kde

$$p^0 = E \equiv \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M_n^2}\,.$$

Povšimněme si, že na obou stranách těchto relací vystupují kreační operátory odpovídající *téže částici*, ale pro *různé* hodnoty kinematických proměnných.[50] Podobně je tomu i u operátorů reprezentujících prostorovou, resp. časovou inverzi, které vedle požadavku

$$\hat{\mathsf{P}}_{(0)}\,|0\rangle = \hat{\mathsf{T}}_{(0)}\,|0\rangle = |0\rangle \tag{4.267}$$

vyhovují relacím

$$\hat{\mathsf{P}}_{(0)}\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi, n)\,\hat{\mathsf{P}}^{-1}_{(0)} = \eta_n^{(P)}\hat{\mathsf{a}}^\dagger(-\boldsymbol{p}, \xi, n)\,, \tag{4.268}$$

$$\hat{\mathsf{T}}_{(0)}\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi, n)\,\hat{\mathsf{T}}^{-1}_{(0)} = \eta_n^{(T)}\,(-1)^{j^{(n)}-\xi}\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(-\boldsymbol{p}, -\xi, n)\,. \tag{4.269}$$

Na diskutovaném prostoru však mohou existovat i reprezentace dalších grup ($\equiv \mathcal{G}$) realizované unitárními operátory $\hat{\mathsf{U}}(g)$, jejichž vlastnosti jsou v jistém smyslu opačné: *nemění kinematické charakteristiky* částic,

[50] Fyzikálně to odráží skutečnost, že pozorovatelé užívající různé souřadné soustavy vidí tytéž částice, ale hodnoty jejich impulsů a spinových charakteristik závisí na tom, v jaké souřadné soutavě jsou určovány.

ale mohou mezi sebou "míchat" *různé druhy* částic. V dalším se zaměříme na ty z těchto operátorů, pro které platí

$$\hat{\mathsf{U}}(g)\,|0\rangle = |0\rangle \tag{4.270}$$

a přitom

$$\hat{\mathsf{U}}(g)\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p},\xi,n)\,\hat{\mathsf{U}}^\dagger(g) = \sum_{n'} U_{n'n}(g)\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p},\xi,n')\,, \tag{4.271}$$

kde $U_{n'n}(g)$ představují elementy unitárních matic $\mathsf{U}(g)$, kterými je realizována nějaká reprezentace uvažované grupy $\mathcal{G}$.[51] Z hlediska těchto transformací hrají kinematické proměnné naprosto pasivní roli, tj. tyto transformace neodrážejí žádné vlastnosti prostoročasu – proto se o nich obvykle mluví jako o transformacích *vnitřních symetrií.* Formálně se to odráží v tom, že všechny operátory vnitřních symetrií komutují s operátory reprezentujícími Poincaréovu grupu, tj.

$$\left[\hat{\mathsf{U}}(g), \hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda, a)\right] = 0, \tag{4.272}$$

což mj. vyžaduje, aby platilo

$$\left[\hat{\mathsf{U}}(g), \hat{\mathsf{H}}_{(0)}\right] = \left[\hat{\mathsf{U}}(g), \hat{\boldsymbol{J}}_{(0)}\right] = 0. \tag{4.273}$$

Pokud $\mathcal{G}$ je $\mathcal{N}$-parametrickou Lieovou grupou, potom každý její element g je jednoznačně určen hodnotou $\mathcal{N}$ reálných parametrů $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mathcal{N}} \equiv \alpha\ )$ a operátory $\hat{\mathsf{U}}(g)$, resp. matice $\mathsf{U}(g)$ možno vyjádřit ve tvaru

$$\hat{\mathsf{U}}(g(\alpha)) \equiv \hat{\mathsf{U}}(\alpha) = \exp\left\{i\sum_{a=1}^{\mathcal{N}} \alpha_a \hat{\mathsf{X}}_a\right\}, \tag{4.274}$$

resp.

$$\mathsf{U}(g(\alpha)) \equiv \mathsf{U}(\alpha) = \exp\left\{i\sum_{a=1}^{\mathcal{N}} \alpha_a \mathsf{t}_a\right\}, \tag{4.275}$$

[51] Čtenář se jistě sám snadno přesvědčí, že operátory $\hat{\mathsf{U}}(g)$ vyhovující těmto relacím tvoří také unitární reprezentaci této grupy.

kde samosdružené operátory $\hat{\mathsf{X}}_a$ i hermitovské matice t_a realizují reprezentaci generátorů grupy $\mathcal{G}$, tj. reprezentaci odpovídající Lieovy algebry, a tedy vyhovují komutačním relacím

$$\left[\hat{\mathsf{X}}_a, \hat{\mathsf{X}}_b\right] = i \sum_{c=1}^{N} C^c{}_{ab} \hat{\mathsf{X}}_c, \tag{4.276}$$

$$[\mathsf{t}_a, \mathsf{t}_b] = i \sum_{c=1}^{N} C^c{}_{ab} \mathsf{t}_c, \tag{4.277}$$

kde $C^c{}_{ab}$ jsou strukturní konstanty grupy $\mathcal{G}$.

Porovnáním veličin prvního řádu v α na obou stranách formulí (4.271), resp. (4.270) nalezneme, že platí komutační relace

$$\left[\hat{\mathsf{X}}_a, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi, n)\right] = \sum_{n'} (t_a)_{n'n} \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi, n'), \quad a = 1, \ldots, \mathcal{N} \tag{4.278}$$

a přitom

$$\hat{\mathsf{X}}_a |0\rangle = 0, \quad a = 1, \ldots, \mathcal{N}. \tag{4.279}$$

Z komutační relace (4.273) navíc vidíme, že musí platit

$$\left[\hat{\mathsf{X}}_a, \hat{\mathsf{H}}_{(0)}\right] = 0, \tag{4.280}$$

tj. operátory $\hat{\mathsf{X}}_a$ představují integrály pohybu *neinteragujících* částic.

Ve speciálním případě, když matice t_a, odpovídající některému z generátorů je diagonální, tj. když (pro určitou hodnotu a) je

$$(t_a)_{n'n} = q_n \, \delta_{n'n}, \tag{4.281}$$

operátor

$$\hat{\mathsf{Q}} \equiv \hat{\mathsf{X}}_a \tag{4.282}$$

splňuje komutační relace

$$\left[\hat{\mathsf{Q}}, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi, n)\right] = q_n \, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi, n), \tag{4.283}$$

z nichž okamžitě vidíme, že ket (4.259) je jeho vlastním vektorem, takovým, že

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{Q}} \left|\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \xi_1^{(1)}; \cdots; \boldsymbol{p}_{n_1}^{(1)}, \xi_{n_1}^{(1)}; \boldsymbol{p}_1^{(2)}, \xi_1^{(2)}; \cdots; \boldsymbol{p}_{n_N}^{(N)}, \xi_{n_N}^{(N)}\right\rangle &= \\ = \sum_{j=1}^{N} n_j q_j \left|\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \xi_1^{(1)}; \cdots; \boldsymbol{p}_{n_1}^{(1)}, \xi_{n_1}^{(1)}; \boldsymbol{p}_1^{(2)}, \xi_1^{(2)}; \cdots; \boldsymbol{p}_{n_N}^{(N)}, \xi_{n_N}^{(N)}\right\rangle . \end{aligned} \tag{4.284}$$

Díky tomu můžeme $\hat{\mathsf{Q}}$ interpretovat jako operátor odpovídající nějakému "náboji"[52]. Číslo q_n pak udává hodnotu tohoto náboje pro částici druhu n. Povšimněme si také toho, že tento operátor lze vyjádřit pomocí kreačních a anihilačních operátorů jako

$$\hat{\mathsf{Q}} = \sum_n q_n \hat{\mathsf{N}}(n)\,, \tag{4.285}$$

kde

$$\hat{\mathsf{N}}(n) \equiv \sum_\xi \hat{\mathsf{N}}(\xi, n) = \sum_\xi \int d^3\boldsymbol{p}\, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi, n)\, \hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p}, \xi, n) \tag{4.286}$$

je operátor počtu částic druhu n.

Vraťme se však ještě zpátky k formuli (4.271). Je zřejmé, že druhy částic lze vždy očíslovat tak, aby postupně vytvářely skupiny takové, že žádná z uvažovaných transformací navzájem "nemíchá" částice patřící do různých skupin. Matice $\mathsf{U}(g)$ pak mají kvazidiagonální tvar, v němž každé z těchto skupin odpovídá jedna submatice na diagonále. Uvážíme-li, že relaci (4.273) lze splnit jedině tehdy, když se mezi sebou mohou "míchat" pouze ty částice, které mají stejné hmoty a stejné spiny, (tj. k tomu, aby maticový element $U_{n'n}(g)$ mohl být nenulový, je nezbytné, aby hmota i spin částice n' měly stejné hodnoty jako u částice n), vyvstává přirozeně otázka, zda výše zmíněné submatice vůbec mohou být více než jednorozměrné. Demonstrujme nejprve na jednom jednoduchém, ale velice důležitém konkrétním případu, že to skutečně možné je:

V dalším uvidíme, proč v rámci relativistické kvantové teorie docházíme k závěru, že ke *každé* částici n musí existovat její *antičástice* ($\equiv \bar{n}$), tj. částice, která má *stejnou* hmotu i spin jako částice n, ale *opačnou* hodnotu *všech* "nábojů".[53] Proto hraje důležitou roli diskrétní symetrie nazývaná *nábojovým sdružením*, která je na Fockově prostoru

---

[52]Pod "nábojem" zde rozumíme nejen elektrický náboj, ale i leptonové číslo, baryonové číslo, třetí složku izospinu či jakékoliv jiné *aditivní kvantové číslo*.

[53]Není snad nutno zdůrazňovat, že tento závěr je v naprostém souladu se všemi známými experimentálními výsledky. Přitom ovšem nutno pamatovat, že "striktně neutrální" částice, tj. částice, které mají *všechny* náboje nulové, jsou se svými antičásticemi identické – tak tomu je např. v případě fotonu γ a neutrálního pionu π^0.

realizována unitárním operátorem $\hat{\mathsf{C}}$, takovým, že

$$\hat{\mathsf{C}}\,|0\rangle = |0\rangle \tag{4.287}$$

a

$$\hat{\mathsf{C}}\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p},\xi,n)\,\hat{\mathsf{C}}^{-1} = \eta_n^{(C)}\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p},\xi,\bar{n})\,, \tag{4.288}$$

kde $\eta_n^{(C)}$ je *nábojová parita* částice n, pro kterou platí

$$\eta_n^{(C)} = \eta_{\bar{n}}^{(C)} = \pm 1. \tag{4.289}$$

Odtud vidíme, že operátor nábojového sdružení $\hat{\mathsf{C}}$ patří mezi uvažované operátory vnitřních symetrií $\hat{\mathsf{U}}(g)$, neboť pro něj platí

$$\hat{\mathsf{C}}^2 = 1, \tag{4.290}$$

a tedy představuje spolu s operátorem identity reprezentaci grupy[54] S_2. Očíslujeme-li druhy částic tak, že mezi částicí a jí odpovídající antičásticí nefiguruje žádný jiný druh částic, potom odpovídající matice $\mathsf{U}(g)$ má kvazidiagonální tvar, v němž každé částici a její antičástici odpovídá jedna submatice. Každá z těchto submatic společně s odpovídající jednotkovou maticí představuje opět reprezentaci grupy S_2. Tato reprezentace je jednorozměrná (a tedy ireducibilní), resp. dvourozměrná (a tedy reducibilní) v závislosti na tom, zda příslušná částice je, či není identická se svojí antičásticí.

Nábojové sdružení tak představuje diskrétní transformaci vnitřních symetrií uvažovaného typu, která hraje v relativistické kvantové teorii a v jejích praktických aplikacích velice významnou roli. Naznačená konstrukce ovšem dovoluje bez problémů nalézt i celou řadu dalších operátorů "vnitřních symetrií", tvořících reprezentace také Lieových grup. Tak např. jestliže ve formuli (4.271) vezmeme $\mathsf{U}(g) \equiv \mathsf{U}(\alpha;n)$, kde $\mathsf{U}(\alpha;n)$ je diagonální matice, jejíž všechny diagonální elementy jsou jednotkové, až na n-tý, který je dán výrazem $\exp(i\alpha)$, potom odpovídající operátory $\hat{\mathsf{U}}(\alpha;n)$, v nichž n je pevně zvolené číslo a parametr α nabývá všech možných reálných hodnot, tvoří reprezentaci grupy $U(1)$. Totéž

[54] Připomeňme, že grupa S_N je grupou permutací N prvků. Grupa S_2 má právě dvě neekvivalentní ireducibilní reprezentace. Obě jsou jednorozměrné. První je triviální, tj. přiřazuje oběma prvkům číslo $+1$, kdežto ve druhé je transpozici přiřazeno číslo -1. (Blíže viz [1] – Doplněk O.)

je evidentně pravdou i o operátorech obdržených jako součin více operátorů $\hat{\mathsf{U}}(\alpha; n)$, z nichž všechny odpovídají téže hodnotě α, ale různým hodnotám n. Podobně, jestliže ve formuli (4.271) $\mathsf{U}(g) \equiv \mathsf{U}(\boldsymbol{\alpha}; n \neq \bar{n})$, kde $\mathsf{U}(\boldsymbol{\alpha}; n \neq \bar{n})$ je[55] kvazidiagonální, se submaticemi na diagonále odpovídajícími vždy jednomu druhu částice a její antičástici, které jsou všechny rovny jednotkové matici, s výjimkou jediné, která odpovídá některému (pevně zvolenému) z druhů částic ($\equiv n$), které nejsou identické se svými antičásticemi, kdy tuto submatici definujeme výrazem

$$\exp(i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \,.$$

Snadno se přesvědčíme, že odpovídající operátory $\hat{\mathsf{U}}(\boldsymbol{\alpha}; n \neq \bar{n})$, u nichž druh částice $n \neq \bar{n}$ je pevně zvolený a každý z trojice parametrů $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ probíhá všechny možné reálné hodnoty, tvoří reprezentaci grupy $SU(2)$. Také součiny více operátorů $\hat{\mathsf{U}}(\boldsymbol{\alpha}; n \neq \bar{n})$, z nichž všechny odpovídají témuž $\boldsymbol{\alpha}$, ale různým $n \neq \bar{n}$ opět tvoří reprezentaci $SU(2)$.

Jakkoliv proti žádnému z těchto operátorů nelze mít z *formálního* hlediska žádné námitky, o praktické užitečnosti většiny z nich si nelze činit žádné iluze. Stačí si uvědomit, že operátory odpovídající v každé z těchto reprezentací generátorům příslušné grupy popisují sice integrály pohybu pro soustavu *volných* částic, ale ve valné většině případů, po zahrnutí interakce mezi částicemi odpovídající zákony zachování již platit nebudou. Tak např. snadno nahlédneme, že generátor grupy $U(1)$ v reprezentaci realizované operátory $\hat{\mathsf{U}}(\alpha; n)$ není ničím jiným než operátorem počtu částic druhu n. Pro neinteragující částice by se počet částic každého (pevně zvoleného) druhu skutečně zachovával (jak je zřejmé i ze struktury operátoru $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$ na pravé straně formule (4.262)), díky interakci mezi částicemi se však tyto počty mohou měnit. O tom svědčí nade vši pochybnost experimentální data. Na druhé straně všechna dosud získaná experimentální data jsou v souladu např. se zákony zachování elektrického náboje, baryonového čísla, leptonového čísla, ..., což jsou vesměs aditivní kvantová čísla odpovídající operátorům, které lze ztotožnit s některými z generátorů grupy $U(1)$, resp. $SU(2)$, v některé z výše naznačených realizací. V jiných realizacích některé z generátorů těchto grup jsou identické s operátory odpovídajícími aditivním kvantovým číslům takovým jako je podivnost, šarm, ..., která sice nejsou

[55] Při číslování druhů částic tak, jak výše uvedeno v souvislosti s operátorem nábojové sdruženosti.

integrály pohybu, ale jejichž zachování je, v jistém smyslu, jen "slabě narušeno". Takovému slabému narušení může odpovídat např. to, že příslušný operátor komutuje nejen s operátorem $\hat{H}_{(0)}$, ale i s "podstatnou částí" operátoru $\hat{H}_{(I)}$ (např. komutuje s tou částí $\hat{H}_{(I)}$, která popisuje silné interakce, ale nekomutuje s tou částí $\hat{H}_{(I)}$, která odpovídá interakcím slabým a/nebo elektromagnetickým).

Je proto přirozené očekávat, že pouze ty z výše naznačených reprezentací grupy $U(1)$, resp. $SU(2)$, u nichž (některé) generátory jsou shodné s operátory odpovídajícími dynamickým proměnným, které se buď zachovávají, nebo jejichž zachování je jen slabě narušeno, mohou být fyzikálně zajímavé. Přitom bychom ovšem neměli zapomenout, že sice známe mnoho různých druhů částic se stejným spinem, ale neznáme žádný případ[56], kdy by k nějaké částici existovala (vedle antičástice) další částice se stejnou hmotou.

Na druhé straně však existují skupiny částic, jejichž hmoty se od sebe navzájem liší podstatně méně než od hmot částic do téže skupiny nenáležejících. Navíc, částice patřící do téže skupiny se i v některých jiných ohledech chovají "podobně". Je proto přirozené očekávat, že popis, v němž rozdíl mezi hmotami částic patřících do téže skupiny zanedbáme, může poskytovat dobrou aproximaci skutečnosti. *Formálně* pak lze dokonce na všechny druhy částic patřící do téže skupiny pohlížet jako na částici jedinou, která se může nacházet v různých stavech z hlediska nějakých "vnitřních stupňů volnosti". Transformace vnitřních symetrií pak odpovídají transformacím v prostoru odpovídajícím těmto vnitřním stupňům volnosti. Zanedbání hmotových rozdílů mezi částicemi téže skupiny nám umožňuje prakticky beze zbytku zopakovat úvahy, které jsme v předchozím provedli při konstrukci reprezentací grup $U(1)$, $SU(2)$, vycházeje z rovnosti hmot částice a antičástice. Pouze rozměr submatic nacházejících se na diagonále matic $\mathsf{U}(g)$ bude nyní dán počtem druhů částic patřících do jednotlivých skupin ($\Leftrightarrow$ počtem nezávislých vnitřních stavů odpovídající "zobecněné částice"). Protože do některých skupin mohou patřit i více než dva druhy částic, můžeme tak dospět k nejrůznějším reprezentacím, a to i dalších než dříve

[56]Do nedávna experimentální data nevylučovala možnost, že neutrina všech tří druhů jsou nehmotnými částicemi. Dnes (leden 2000) však již vše nasvědčuje tomu, že jejich hmoty stejné nejsou.

zmíněných grup. Většina z takto získaných operátorů $\hat{U}(g)$ bude opět fyzikálně málo zajímavá. Zato ty z nich, které odpovídají vnitřní symetrii interagujících částic, tj. komutují i s operátorem $\hat{H}_{(I)}$ (nebo alespoň s jeho podstatnou částí), poskytují velice účinný nástroj pro fyzikální analýzu.

Při zadaném operátoru $\hat{H}_{(I)}$ můžeme na uvažovaném Hilbertově prostoru hledat všechny možné reprezentace všech možných grup symetrií, které jsou realizovány operátory komutujícími s $\hat{H}_{(I)}$. Většinou je však postup právě opačný: Z toho, či jiného důvodu dospějeme k názoru, že interagující částice by měly respektovat nějakou grupu $\mathcal{G}$ vnitřních symetrií. Tak např. z předchozího víme, že jednotlivé submatice kvazidiagonálních matic $\mathsf{U}(g)$ musí realizovat unitární reprezentaci grupy $\mathcal{G}$. Vzhledem k tomu, že každou unitární reprezentaci lze vyjádřit jako direktní součet reprezentací ireducibilních, vidíme, že pokud $\mathcal{G}$ je grupou vnitřních symetrií, potom musí být možné všechny druhy částic rozdělit do skupin ($\equiv$ multipletů) odpovídajících ireducibilním reprezentacím této grupy. Porovnáním počtu částic v jednotlivých skupinách (tj. částic, které mají všechny stejné spiny a blízké hmoty[57]) se známými rozměry ireducibilních reprezentací jednotlivých grup tak můžeme usoudit, která z nich má naději sehrát úlohu grupy vnitřních symetrií[58]. Jakmile přiřadíme všechny multiplety částic ke konkrétním ireducibilním reprezentacím grupy[59] $\mathcal{G}$, je matice $\mathsf{U}(g)$ do značné míry specifikována.[60] Známe-li tuto matici, známe pravou stranu relací (4.271), a tedy i operátory $\hat{\mathsf{U}}(g)$, reprezentující grupu $\mathcal{G}$ na uvažovaném Hilbertově prostoru. Předpoklad, že tyto operátory komutují s $\hat{H}_{(I)}$ (nebo s podstatnou částí tohoto operátoru), pak vede k netriviálním předpovědím. O některých z nich se zmíníme v příští kapitole. Z toho, do jaké míry jsou tyto předpovědi v souladu s experimentálními daty pak lze usoudit, nakolik je

[57]V dalším budeme požadovat, aby také odpovídající "nábojová parita" $\eta^{(C)}$ byla pro všechny stejná.

[58]Pochopitelně zde jde o hledání možných *neabelovských* grup vnitřních symetrií, neboť víme, že všechny ireducibilní reprezentace grup abelovských jsou jednorozměrné.

[59]Pro $\mathcal{G} \equiv SU(2)$ jsou unitární ireducibilní reprezentace jednoznačně určeny svým rozměrem. V obecném případě však udání rozměru ke specifikaci unitární ireducibilní reperezentace grupy $\mathcal{G}$ nestačí.

[60]Jednotlivé submatice na diagonále matice $\mathsf{U}(g)$ jsou tím determinovány, až na unitární podobnostní transformaci (stejnou pro všechny elementy g).

grupa $\mathcal{G}$ akceptovatelná jako grupa vnitřních symetrií. Při takto vybrané grupě $\mathcal{G}$ a specifikaci ireducibilních reprezentací odpovídajících jednotlivým multipletům částic pak můžeme hledat strukturu, jakou musí mít operátor $\hat{\mathsf{H}}_{(I)}$, má-li komutovat s odpovídajícími operátory $\hat{\mathsf{U}}(g)$.

V dalším budeme (ve smyslu kvantové teorie pole) požadovat, aby příslušná vnitřní symetrie, kterou doposud formulujeme v termínech transformačních vlastností kreačních operátorů částic, byla také vnitřní symetrií odpovídajících polí. Později uvidíme, že tomu tak bude právě tehdy, když se kreační operátory antičástic budou transformovat stejně jako anihilační operátory částic: Označíme-li $\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(h;H)$ kreační operátor[61] částice h patřící do multipletu H, potom relace (4.271) znamená, že pro každý multiplet H platí

$$\hat{\mathsf{U}}(g)\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(h;H)\,\hat{\mathsf{U}}^{\dagger}(g) = \sum_{h'} U_{h'h}(g;H)\,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(h';H)\,, \tag{4.291}$$

kde $\mathsf{U}(g;H)$ jsou zadané matice realizující unitární reperezentaci $D(\mathcal{G};H)$ grupy $\mathcal{G}$. Sdružením obou stran této rovnosti dostaneme odpovídající transformační zákon pro anihilační operátory:

$$\hat{\mathsf{U}}(g)\hat{\mathsf{a}}(h;H)\,\hat{\mathsf{U}}^{\dagger}(g) = \sum_{h'} U^{*}_{h'h}(g;H)\,\hat{\mathsf{a}}(h';H)\,. \tag{4.292}$$

Odtud vidíme, že antičástice $\bar{h}$ k částicím h z multipletu H tvoří multiplet $\bar{H}$ a pro jejich kreační operátory platí

$$\hat{\mathsf{U}}(g)\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}\left(\bar{h};\bar{H}\right)\hat{\mathsf{U}}^{\dagger}(g) = \sum_{\bar{h}'} U_{\bar{h}'\bar{h}}\left(g;\bar{H}\right)\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}\left(\bar{h}';\bar{H}\right), \tag{4.293}$$

kde

$$\mathsf{U}(g;\bar{H}) \equiv \mathsf{U}^{*}(g;H) = \left[[\mathsf{U}(g;H)]^{-1}\right]^{\mathsf{T}}. \tag{4.294}$$

Tento poznatek se někdy formuluje jako výrok "antičástice se transformují kontragradientně".[62]

---

[61] Pro zjednodušení zápisu v dalším potlačujeme argumenty specifikující impuls a spinovou charakteristiku příslušné částice.

[62] Připomeňme (viz Doplněk L v [1]), že pokud matice $\mathsf{U}(g)$ tvoří reprezentaci $D(\mathcal{G})$ grupy $\mathcal{G}$, potom také matice $\mathsf{U}^{*}(g)$, resp. $\left[[\mathsf{U}(g)]^{-1}\right]^{T}$ realizují reprezentaci ($\equiv D^{*}(\mathcal{G})$, resp. $\bar{D}(\mathcal{G})$) téže grupy. Přitom se o $D^{*}(\mathcal{G})$, resp. $\bar{D}(\mathcal{G})$ mluví jako o reprezentaci komplexně sdružené, resp. kontragradientní.

Není snad nutno zdůrazňovat, že pokud $\mathcal{G}$ je grupou vnitřní symetrie, potom totéž je pravdou i o každé její podgrupě . Každá ireducibilní reprezentace grupy $\mathcal{G}$ je samozřejmě také reprezentací libovolné podgrupy $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Z hlediska této podgrupy však již může jít o direktní součet více ireducibilních reprezentací. Odtud je zřejmé, že pokud se nám podaří rozdělit částice do multipletů odpovídajících ireducibilním reprezentacím grupy $\mathcal{H}$, ihned vyvstane otázka, zda nelze (byť za cenu, že budeme velkorysejší v definici "blízkosti hmot") tyto multiplety spojit do supermultipletů, které by odpovídaly ireducibilním reprezentacím nějaké větší grupy $\mathcal{G} \supset \mathcal{H}$. Hledání takovýchto "vyšších symetrií" bylo věnováno velké úsilí v šedesátých letech, a to zejména potom, co (nezávisle na sobě) M. Gell-Mann a Y. Ne'eman ukázali, že grupa $SU(3)$ (přesněji řečeno, její realizace, o níž se stalo běžným hovořit jako o "the eightfold way") má všechny atributy úspěšného kandidáta na tuto roli. Podrobnější diskuse této problematiky však přesahuje rámec této knihy.[63] Věnujme proto trochu pozornosti pouze té nejjednodušší z neabelovských grup vnitřních symetrií, a to grupě *izospinových* transformací:

Připomeňme, že W. Heisenberg si již počátkem 30-tých let uvědomil [31] výhodnost pracovat s protonem ($\equiv p$) a neutronem ($\equiv n$) jako s nukleonem ($\equiv N$) ve dvou různých (v dnešní terminologii) izospinových[64] stavech: Proton a neutron mají nejen velice blízké hmoty[65], ale již tehdy vše nasvědčovalo tomu, že z hlediska "jaderných sil" mezi těmito částicemi není možno zjistit žádný rozdíl.[66] Pokud by neexistovaly žádné další hadrony[67] ($\equiv$ silně interagující částice), potom by takováto *nábojová nezávislost* jaderných sil byla určitě zaručena požadavkem, aby ta část operátoru $\hat{\mathsf{H}}_{(I)}$, která popisuje silné interakce,

[63] Blíže se s ní čtenář může seznámit např. ve sborníku [19].

[64] Termín *izospin* se dnes běžně užívá jako ekvivalent termínu *izotopický spin*. Ve starší literatuře se čtenář může setkat i s označením *izobarický spin*.

[65] Neutron je o necelých 1.3 MeV (tj. o zhruba 1.3 promile) těžší než proton.

[66] V dnešní terminologii to znamená, že pomocí *silných* interakcí nelze odlišit proton od neutronu. Z hlediska interakcí elektromagnetických či slabých je ovšem rozdíl mezi těmito částicemi markantní: proton je nabitý, kdežto neutron neutrální, proton je stabilní, kdežto (volný) neutron se (v důsledku slabých interakcí) rozpadá.

[67] nebo pokud by zanedbání jejich existence z toho, nebo jiného důvodu představovalo pro určitou oblast studovaných jevů (např. pro energetické hladiny jader) přijatelnou aproximaci

komutovala s operátory

$$\hat{U}(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \exp\left(i\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{T}}\right), \tag{4.295}$$

takovými, že[68]

$$\hat{U}(\boldsymbol{\alpha}) \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger(p) \\ \hat{a}^\dagger(n) \end{pmatrix} \hat{U}^\dagger(\boldsymbol{\alpha}) = U(\boldsymbol{\alpha}; N) \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger(p) \\ \hat{a}^\dagger(n) \end{pmatrix}, \tag{4.296}$$

kde

$$U(\boldsymbol{\alpha}; N) \equiv \exp\{i\,\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{t}\,(N)\}, \tag{4.297}$$

$$\boldsymbol{t}\,(N) \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \tag{4.298}$$

a $\boldsymbol{\sigma}$ jsou Pauliho matice. Přitom by operátory (4.295) s kreačními operátory všech ostatních částic komutovaly. Pro $\boldsymbol{\alpha} \to \mathbf{0}$ z těchto relací dostáváme

$$\left[\hat{T}_3, \hat{a}^\dagger(p)\right] = \frac{1}{2}\,\hat{a}^\dagger(p), \qquad \left[\hat{T}_3, \hat{a}^\dagger(n)\right] = -\frac{1}{2}\,\hat{a}^\dagger(n),$$

$$\left[\hat{T}_+, \hat{a}^\dagger(p)\right] = \left[\hat{T}_-, \hat{a}^\dagger(n)\right] = 0, \tag{4.299}$$

$$\left[\hat{T}_+, \hat{a}^\dagger(n)\right] = \hat{a}^\dagger(p), \qquad \left[\hat{T}_-, \hat{a}^\dagger(p)\right] = \hat{a}^\dagger(n),$$

kde

$$\hat{T}_\pm \equiv \hat{T}_1 \pm i\hat{T}_2. \tag{4.300}$$

Odtud pak vidíme, že operátory $\hat{T}_j$, vystupující na pravé straně formule (4.295) vyhovují komutačním relacím

$$\left[\hat{T}_j, \hat{T}_k\right] = i\varepsilon_{jkl}\hat{T}_l, \tag{4.301}$$

a tedy operátory $\hat{U}(\boldsymbol{\alpha})$ realizují reprezentaci grupy $SU(2)$.

Díky požadavku (4.270):

$$\hat{U}(\boldsymbol{\alpha})\,|0\rangle = |0\rangle \tag{4.302}$$

---

[68] Výrazu na levé straně formule (4.296) je třeba rozumět tak, že operátory uvedené před a za sloupcem je nutno "aplikovat" na každý element sloupce, kdežto na pravé straně téže formule jde o prosté maticové násobení. Obdobnou symboliku budeme užívat i v dalším.

relace (4.296) zajišťuje, že pro kety popisující jednonukleonové stavy platí

$$\hat{\mathsf{U}}(\boldsymbol{\alpha}) \begin{pmatrix} |p\rangle \\ |n\rangle \end{pmatrix} = \mathsf{U}(\boldsymbol{\alpha}; N) \begin{pmatrix} |p\rangle \\ |n\rangle \end{pmatrix}, \tag{4.303}$$

a tedy

$$\begin{gathered} \hat{\mathsf{T}}_3 \, |p\rangle = \frac{1}{2} \, |p\rangle \,, \qquad \hat{\mathsf{T}}_3 \, |n\rangle = -\frac{1}{2} \, |n\rangle \,, \\ \hat{\mathsf{T}}_+ \, |p\rangle = \hat{\mathsf{T}}_- \, |n\rangle = 0, \\ \hat{\mathsf{T}}_- \, |p\rangle = |n\rangle \,, \qquad \hat{\mathsf{T}}_+ \, |n\rangle = |p\rangle \,. \end{gathered} \tag{4.304}$$

Po formální stránce jsou tyto vztahy shodné s transformačními zákony nerelativistické kvantové mechaniky pro spinovou část vlnové funkce částice se spinem $\frac{1}{2}$ při natočení o úhel $|\boldsymbol{\alpha}|$ kolem osy $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$. Proto se o výše zmíněných stupních volnosti v tomto případě mluví jako o *izospinu* a o $\hat{\mathsf{U}}(\boldsymbol{\alpha})$ jako o operátorech natočení v izospinovém prostoru. O nukleonu se pak říká, že představuje izospinor. Proton a neutron pak představují elementy izodubletu odpovídající třetí složce izospinu rovné $+\frac{1}{2}$, resp. $-\frac{1}{2}$. Z formálního hlediska to znamená, že

$$\begin{aligned} |p\rangle &= \left| t = \frac{1}{2}, t_3 = \frac{1}{2}; N \right\rangle, \\ |n\rangle &= \left| t = \frac{1}{2}, t_3 = -\frac{1}{2}; N \right\rangle, \end{aligned} \tag{4.305}$$

kde $|t, t_3; N\rangle$ je společný vlastní vektor operátorů $\hat{\boldsymbol{T}}^2$ a $\hat{\mathsf{T}}_3$ příslušný k vlastním hodnotám $t\,(t+1)$ a t_3, právě tak jako, že

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{a}}^\dagger(p) &= \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(t = \frac{1}{2}, t_3 = \frac{1}{2}; N\right), \\ \hat{\mathsf{a}}^\dagger(n) &= \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(t = \frac{1}{2}, t_3 = -\frac{1}{2}; N\right), \end{aligned} \tag{4.306}$$

kde na pravých stranách stojí kanonické komponenty ireducibilního tenzoru[69] řádu t, tj. formule (4.299), (4.304) mají tvar

$$\left[\hat{\mathsf{T}}_3, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(t, t_3; N)\right] = t_3 \, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(t, t_3; N) \,,$$

[69] Viz [1]: část 2.8 a Doplňky F a L.

$$\left[\hat{\mathsf{T}}_{\pm}, \hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(t, t_3; N)\right] = \alpha^{(\pm)}(t, t_3)\, \hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(t, t_3 \pm 1; N)\,, \tag{4.307}$$

respektive

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{T}}_3 \,|t, t_3; N\rangle &= t_3 \,|t, t_3; N\rangle\,, \\ \hat{\mathsf{T}}_{\pm} \,|t, t_3; N\rangle &= \alpha^{(\pm)}(t, t_3) \,|t, t_3 \pm 1; N\rangle\,, \end{aligned} \tag{4.308}$$

kde

$$\alpha^{(\pm)}(t, t_3) \equiv \sqrt{(t \mp t_3)\,(t \pm t_3 + 1)}\,. \tag{4.309}$$

Je dobře známo, že v případě grupy $\mathcal{G} \equiv SU(2)$ je $\bar{D}(\mathcal{G}) = D(\mathcal{G})$. Mohlo by se proto zdát, že vše, co jsme řekli o dubletu nukleonů, můžeme beze zbytku užít i v případě dubletu antinukleonů, tj. že formule (4.305) – (4.309) zůstanou v platnosti i tehdy, když v nich provedeme záměny $N \to \bar{N}$, $p \to \bar{n}$, $n \to \bar{p}$. Brzy se přesvědčíme, že tomu tak není[70].

Nejprve však připomeňme, že dnes vedle nukleonů známe mnoho dalších hadronů. K tomu, aby výrok o izospinové invarianci silných interakcí byl smysluplný, je nutno znát i jejich transformační vlastnosti vůči rotacím v izoprostoru. Všechna experimentální data nasvědčují tomu, že skutečně každý hadron představuje vlastní stav třetí komponenty izospinu a že všechny hadrony lze uspořádat do izomultipletů, tj. multipletů odpovídajících ireducibilním reprezentacím grupy $SU(2)$. To znamená, že pro kreační operátory $[2t(H) + 1]$ hadronů patřících do téhož multipletu[71] H platí

$$\hat{\mathsf{U}}(\boldsymbol{\alpha})\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(h; H)\, \hat{\mathsf{U}}^{\dagger}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{h'} U_{h'h}(\boldsymbol{\alpha}; H)\, \hat{\mathsf{a}}^{\dagger}(h'; H)\,, \tag{4.310}$$

[70] Abychom předešli zbytečnému nedorozumění, zdůrazněme, že tento výsledek *není* v rozporu s výše uvedeným konstatováním. Nesmíme zapomenout, že z rovnosti $\bar{D}(\mathcal{G}) = D(\mathcal{G})$ plyne pouze to, že unitární matice $\mathsf{U}(g)$ realizující reprezentaci $D(\mathcal{G})$ souvisejí s maticemi $\mathsf{U}^*(g)$ podobnostní transformací nezávislou na g, tj. že existuje unitární matice A, taková, že pro všechny elementy $g \in \mathcal{G}$ je

$$\mathsf{U}^*(g) = \mathsf{A}\mathsf{U}(g)\mathsf{A}^{\dagger}.$$

[71] Formálně je lze opět všechny považovat za různé izospinové stavy jediného hadronu H.

kde unitární matice

$$\mathsf{U}(\boldsymbol{\alpha}; H) \equiv \exp\{i\,\boldsymbol{\alpha}\cdot \boldsymbol{t}(H)\}\,, \tag{4.311}$$

realizují reprezentaci $D^{(t(H))}$ grupy $SU(2)$, a tedy hermitovské matice $\boldsymbol{t}(H)$ vyhovují komutačním relacím

$$[\mathsf{t}_j(H)\,, \mathsf{t}_k(H)] = i\varepsilon_{jkl}\,\mathsf{t}_l(H)\,. \tag{4.312}$$

Formule (4.310) je pak splněna právě tehdy, když platí komutační relace

$$\left[\hat{\mathsf{T}}_j, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(h; H)\right] = \sum_{h'} (\mathsf{t}_j(H))_{h'h}\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(h'; H)\,. \tag{4.313}$$

Vzhledem k tomu, že každý z hadronů je nejen "nositelem třetí složky izospinu", ale lze ho (v zadaném multipletu H) také pomocí hodnoty tohoto kvantového čísla jednoznačně identifikovat, víme, že matice $\mathsf{t}_3(H)$ je diagonální. Krom toho lze bez újmy na obecnosti požadovat, aby pro libovolný pevně zvolený hadron h byla v komutační realci (4.313) respektována Condon-Shortleyova fázová konvence[72], tj. aby platilo

$$\begin{aligned}\left[\hat{\mathsf{T}}_3, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(h(t_3)\,; H)\right] &= t_3\hat{\mathsf{a}}^\dagger(h(t_3)\,; H)\,,\\ \left[\hat{\mathsf{T}}_\pm, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(h(t_3)\,; H)\right] &= \alpha^{(\pm)}(t, t_3)\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(h(t_3 \pm 1)\,; H)\,,\end{aligned} \tag{4.314}$$

kde $t \equiv t(H)$. Pokud do multipletu H nepatří žádná částice současně se svojí antičásticí, potom lze vždy kreační operátory zvolit tak, aby poslední formule platila pro všechny hadrony z tohoto multipletu. Jinými slovy řečeno, v takovémto případě můžeme zmíněné kreační operátory identifikovat s kanonickými komponentami ireducibilního tenzoru řádu $t(H)$:

$$\hat{\mathsf{a}}^\dagger(t, t_3; H) \equiv \hat{\mathsf{a}}^\dagger(h(t_3)\,; H)\,, \tag{4.315}$$

(kde $t \equiv t(H)\,,\ t_3 \equiv t_3(h)$), které ex definitione vyhovují komutačním relacím

$$\begin{aligned}\left[\hat{\mathsf{T}}_3, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(t, t_3; H)\right] &= t_3\hat{\mathsf{a}}^\dagger(t, t_3; H)\,,\\ \left[\hat{\mathsf{T}}_\pm, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(t, t_3; H)\right] &= \alpha^{(\pm)}(t, t_3)\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(t, t_3 \pm 1; H)\,.\end{aligned} \tag{4.316}$$

---

[72] Viz Dopněk F v [1].

Sdružením vztahů (4.314) dostáváme

$$\left[\hat{\mathsf{T}}_3, \hat{\mathsf{a}}\left(h(t_3)\,;H\right)\right] = -t_3 \hat{\mathsf{a}}(h(t_3)\,;H)\,,$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{\mathsf{T}}_\mp, \hat{\mathsf{a}}(h(t_3)\,;H)\right] &= -\alpha^{(\pm)}(t,t_3)\,\hat{\mathsf{a}}(h(t_3\pm 1)\,;H) \\ &= -\alpha^{(\mp)}(t,-t_3)\,\hat{\mathsf{a}}(h(t_3\pm 1)\,;H)\,,\end{aligned} \tag{4.317}$$

kde jsme využili toho, že pro funkce (4.309) platí

$$\alpha^{(\pm)}(t,t_3) = \alpha^{(\mp)}(t,-t_3)\,. \tag{4.318}$$

Tedy výše zmíněný požadavek, aby se kreační operátory antihadronů[73] $\bar{h}$

$$\hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\bar{h}(-t_3)\,;\bar{H}\right) \equiv \frac{1}{\eta_H^{(C)}}\,\hat{\mathsf{C}}\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(h(t_3)\,;H)\,\hat{\mathsf{C}}^\dagger \tag{4.319}$$

transformovaly jako anihilační operátory hadronů, můžeme nyní vyjádřit ve tvaru

$$\left[\hat{\mathsf{T}}_3, \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\bar{h}(t_3)\,;\bar{H}\right)\right] = t_3 \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\bar{h}(t_3)\,;\bar{H}\right),$$

$$\left[\hat{\mathsf{T}}_\pm, \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\bar{h}(t_3)\,;\bar{H}\right)\right] = -\alpha^{(\pm)}(t,t_3)\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\bar{h}(t_3\pm 1)\,;\bar{H}\right). \tag{4.320}$$

Odtud vidíme, že pokud multiplet $\bar{H}$ je *odlišný* od multipletu H, potom $[2t(H)+1]$ operátorů

$$\hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(t,t_3;\bar{H}\right) \equiv (-1)^{t_3}\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\bar{h}(t_3)\,;\bar{H}\right) \tag{4.321}$$

představuje kanonické komponenty ireducibilního tenzoru řádu[74] $t \equiv t\left(\bar{H}\right) = t(H)$. Ve speciálním případě nukleonů to znamená, že pokud

[73] Ve značení na levé straně následující formule již anticipujeme fakt, že libovolné aditivní kvantové číslo (a takovým je i třetí složka izospinu) má pro antičástici vždy opačnou hodnotu než pro částici.

[74] Tento výsledek by nás neměl příliš překvapit: Transformační vlastnosti operátorů $\hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\bar{h}(t_3)\,;\bar{H}\right)$ jsou ex definitione shodné s transformačními vlastnostmi operátorů $\hat{\mathsf{a}}(h(-t_3)\,;H)$. Na druhé straně z úlohy 2.90 v [1] víme, že pokud operátory $\hat{\mathsf{a}}^\dagger(t,t_3;H)$ tvoří komponenty nějakého ireducibilního tenzoru řádu t, potom operátory $(-1)^{t_3}\,\hat{\mathsf{a}}(t,-t_3;H)$ představují opět kanonické komponenty tenzoru téhož řádu.

požadujeme platnost relací (4.304) pro protony a neutrony, potom pro antiprotony a antinukleony musí platit vztahy

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{T}}_3 \left|\bar{n}\right\rangle = \frac{1}{2}\left|\bar{n}\right\rangle, \qquad \hat{\mathsf{T}}_3 \left|\bar{p}\right\rangle = -\frac{1}{2}\left|\bar{p}\right\rangle, \\ \hat{\mathsf{T}}_+ \left|\bar{n}\right\rangle = \hat{\mathsf{T}}_- \left|\bar{p}\right\rangle = 0, \\ \hat{\mathsf{T}}_- \left|\bar{n}\right\rangle = -\left|\bar{p}\right\rangle, \qquad \hat{\mathsf{T}}_+ \left|\bar{p}\right\rangle = -\left|\bar{n}\right\rangle. \end{aligned} \tag{4.322}$$

Podobně z relace (4.303) plyne, že[75]

$$\hat{\mathsf{U}}(\boldsymbol{\alpha}) \begin{pmatrix} \left|\bar{n}\right\rangle \\ -\left|\bar{p}\right\rangle \end{pmatrix} = \mathsf{U}(\boldsymbol{\alpha}; N) \begin{pmatrix} \left|\bar{n}\right\rangle \\ -\left|\bar{p}\right\rangle \end{pmatrix}. \tag{4.323}$$

Již dříve jsme se zmínili o tom, že existují hadrony, které jsou identické se svými antičásticemi. Je zřejmé, že mohou náležet pouze do multipletů $H = \bar{H}$. Samozřejmě, že i pro hadrony z takovéhoto multipletu musí být relace (4.314) ekvivalentní s relací (4.320). Snadno nahlédneme, že v tomto případě lze z příslušných kreačních operátorů vytvořit kanonické složky odpovídajícího ireducibilního tenzoru, a to např. tak, že je definujeme jako[76]

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{a}}^\dagger(t, t_3; H) &\equiv \hat{\mathsf{a}}^\dagger(h(t_3)\,; H) && \text{pro } t_3 \leq 0, \\ \hat{\mathsf{a}}^\dagger(t, t_3; H) &\equiv (-1)^{t_3}\, \hat{\mathsf{a}}^\dagger(h(t_3)\,; H) && \text{pro } t_3 > 0. \end{aligned} \tag{4.324}$$

Tak např. v případě pionů (které tvoří izotriplet a mají $\eta_\pi^{(C)} = +1$) můžeme identifikovat

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{a}}^\dagger(1, -1; \pi) &\equiv \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\pi^-\right), \\ \hat{\mathsf{a}}^\dagger(1, 0; \pi) &\equiv \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\pi^0\right), \\ \hat{\mathsf{a}}^\dagger(1, +1; \pi) &\equiv -\hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\pi^+\right). \end{aligned} \tag{4.325}$$

Nepřehlédněme, že díky tomu např. sice platí

$$\hat{\mathsf{T}}_+ \left|\pi^-\right\rangle = \sqrt{2}\left|\pi^0\right\rangle, \tag{4.326}$$

[75]Nepřehlédněme, že na pravé straně vystupuje *tatáž* matice $\mathsf{U}(\boldsymbol{\alpha}; N)$ jako ve formuli (4.303).

[76]Zde jsme termínu "částice" užili pro ty členy multipletu H, které mají nekladnou třetí složku izospinu. Pochopitelně jsme mohli užít i jinou konvenci. Nezapomeňme, že relace částice $\leftrightarrow$ antičástice je naprosto symetrická.

ale

$$\hat{\mathsf{T}}_{+}\left|\pi^{0}\right\rangle = -\sqrt{2}\left|\pi^{+}\right\rangle. \tag{4.327}$$

Jakmile umíme vyjádřit kreační operátory jednotlivých hadronů pomocí kanonických komponent ireducibilních tenzorových operátorů, můžeme[77] vyjádřit také součiny více kreačních operátorů jako lineární kombinace kanonických komponent ireducibilních tenzorových operátorů. Právě tak umíme vyjádřit vícehadronové stavy jako lineární kombinace společných vlastních stavů třetí komponenty a kvadrátu izospinu. Tím máme k disposici vše, co potřebujeme k využívání tak mocného nástroje, jaký představuje Wigner-Eckartův teorém[78]. Právě toho se, zejména v subjaderné a jaderné fyzice, bohatě využívá.

Vraťme se však ještě jednou k relacím (4.314). "Vynásobením" obou jejích stran operátory $\hat{\mathsf{C}}$ a $\hat{\mathsf{C}}^{\dagger}$ zleva, respektive zprava obdržíme vztahy, které můžeme na základě definice (4.319) vyjádřit ve tvaru

$$\left[\hat{\mathsf{T}}'_3, \hat{\mathsf{a}}^{\dagger}\left(\bar{h}(-t_3)\,;\bar{H}\right)\right] = t_3\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}\left(\bar{h}(-t_3)\,;\bar{H}\right),$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{\mathsf{T}}'_{\pm}, \hat{\mathsf{a}}^{\dagger}\left(\bar{h}(-t_3)\,;\bar{H}\right)\right] &= \alpha^{(\pm)}(t,t_3)\,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}\left(\bar{h}(-t_3\mp 1)\,;\bar{H}\right) \\ &= \alpha^{(\mp)}(t,-t_3)\,\hat{\mathsf{a}}^{\dagger}\left(\bar{h}(-t_3\mp 1)\,;\bar{H}\right),\end{aligned} \tag{4.328}$$

kde

$$\hat{\mathsf{T}}'_j \equiv \hat{\mathsf{C}}\,\hat{\mathsf{T}}_j\,\hat{\mathsf{C}}^{\dagger}. \tag{4.329}$$

Porovnáním s formulí (4.320) vidíme, že tyto vztahy budou splněny tehdy, když

$$\hat{\mathsf{C}}\,\hat{\mathsf{T}}_3\,\hat{\mathsf{C}}^{\dagger} = -\hat{\mathsf{T}}_3, \qquad \hat{\mathsf{C}}\,\hat{\mathsf{T}}_{\pm}\,\hat{\mathsf{C}}^{\dagger} = -\hat{\mathsf{T}}_{\mp}, \tag{4.330}$$

tj. tehdy, když mezi operátory izospinu a nábojového sdružení platí relace

$$\left\{\hat{\mathsf{C}}, \hat{\mathsf{T}}_1\right\} = \left[\hat{\mathsf{C}}, \hat{\mathsf{T}}_2\right] = \left\{\hat{\mathsf{C}}, \hat{\mathsf{T}}_3\right\} = 0. \tag{4.331}$$

---

[77] Viz § 2.8 v [1].
[78] Viz § 2.8 v [1].

4.2.2 Interagující částice

Pokusme se nyní naznačený formalismus co nejjednodušším způsobem rozšířit tak, aby respektoval fakt, že fyzikální částice mezi sebou interagují. Vyjdeme přitom ze dvou prostých postřehů:
i) Pokud jednotlivé částice nejsou od sebe navzájem dostatečně vzdálené, potom jejich celková energie není dána součtem kinetických energií každé z nich.
ii) Pokud žádná z částic není dostatečně blízko k jiné, potom chování soustavy více reálných částic se neliší od chování *stejné* soustavy částic *neinteragujících.*

Je dobře si uvědomit, že jakkoliv jsou tyto postřehy formulovány vágně, popisují fakta, bez nichž by užívání pojmu částice k popisu fyzikálních jevů v jazyce běžného života, tak jak jsme na něj doposud zvyklí, ztrácel smysl.[79]

K tomu, abychom v rámci kvantové teorie co nejsnáze zajistili splnění důsledků druhého z výše uvedených postřehů, budeme předpokládat, že Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ studované "reálné" fyzikální soustavy (tj. soustavy vystihující existenci vzajemně interagujících částic) je totožný s Fockovým prostorem *odpovídající* "idealizované" soustavy, jejíž chování lze vystihnout v termínech neinteragujících částic.

K tomu, abychom zajistili respektování prvního z výše uvedených postřehů, vyjádříme hamiltonián $\hat{\mathsf{H}}$ studované soustavy ve tvaru

$$\hat{\mathsf{H}} = \hat{\mathsf{H}}_{(0)} + \hat{\mathsf{H}}_{(I)}, \tag{4.332}$$

kde $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$ je hamiltonián zmíněné idealizované soustavy, kterou jsme diskutovali v předcházející části, tj. operátor představující součet kinetických energií jednotlivých částic, a tedy operátor $\hat{\mathsf{H}}_{(I)} \neq 0$ vystihuje *pouze* interakci *mezi* příslušnými částicemi.[80] Ve všech ostatních ohledech však částice vystupující v obou soustavách jsou naprosto stejné,

[79] Aby nedošlo k zbytečnému nedorozumění, připomeňme, že v současnosti užíváme termínu "částice" i v poněkud *jiném* smyslu, se kterým se v dalším seznámíme. Pro takovéto "částice" výše uvedené postřehy již platit nemusí. V této části však budeme užívat pojmu částice výhradně v "konzervativním" smyslu, který se o výše uvedené dva postřehy opírá.

[80] Zdůrazněme však již nyní, že operátor $\hat{\mathsf{H}}_{(I)}$ ani zdaleka *nemusí* být totožný s "interakčním hamiltoniánem" v tom smyslu, v jakém je tento termín užíván v rámci kvantové teorie pole. V dalším se o tom bohatě přesvědčíme.

tj. mají tytéž hmoty, spiny, parity, elektrické náboje,.... Proto také požadujeme, aby oba operátory $\hat{\mathsf{H}}$ i $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$ měly stejné spektrum vlastních hodnot.

Uvědomíme-li si, že každý z operátorů $\hat{\mathsf{H}}$, $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$ má představovat generátor časové translace, vidíme, že na tomtéž Fockově prostoru $\mathcal{H}$ musíme být schopni zkonstruovat *dvě různé* unitární reprezentace Poincaréovy grupy. Generátory první z nich jsou dány dříve uvažovanými operátory $\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}, \hat{\mathsf{H}}_{(0)}, \hat{\boldsymbol{J}}_{(0)}, \hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}$ vyhovujícími komutačním relacím (4.201) – (4.206). K tomu, aby samosdružené operátory $\hat{\boldsymbol{P}}, \hat{\mathsf{H}}, \hat{\boldsymbol{J}}, \hat{\boldsymbol{K}}$ mohly představovat odpovídající generátory v druhé reperezentaci, musí vyhovovat obdobným komutačním relacím, tj. musí platit

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{\mathsf{P}}^j, \hat{\mathsf{P}}^k\right] &= 0, \\
\left[\hat{\mathsf{J}}^j, \hat{\mathsf{J}}^k\right] &= i\,\varepsilon_{jkl}\,\hat{\mathsf{J}}^l, \\
\left[\hat{\mathsf{J}}^j, \hat{\mathsf{P}}^k\right] &= i\,\varepsilon_{jkl}\,\hat{\mathsf{P}}^l,
\end{aligned}
\tag{4.333}
$$

$$\left[\hat{\boldsymbol{P}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = \left[\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = 0, \tag{4.334}$$

$$\left[\hat{\mathsf{K}}^j, \hat{\mathsf{P}}^k\right] = -i\,\delta_{jk}\,\hat{\mathsf{H}}, \tag{4.335}$$

$$\left[\hat{\boldsymbol{K}}, \hat{\mathsf{H}}\right] = -i\,\hat{\boldsymbol{P}}, \tag{4.336}$$

$$\left[\hat{\mathsf{J}}^j, \hat{\mathsf{K}}^k\right] = i\,\varepsilon_{jkl}\,\hat{\mathsf{K}}^l, \tag{4.337}$$

$$\left[\hat{\mathsf{K}}^j, \hat{\mathsf{K}}^k\right] = -\,i\,\varepsilon_{jkl}\,\hat{\mathsf{J}}^l. \tag{4.338}$$

K jejich splnění je nezbytné, aby se vedle $\hat{\mathsf{H}}$, ještě alespoň některé další z těchto operátorů lišily od svých partnerů s indexem $_{(0)}$. Snadno nahlédneme, že když identifikujeme[81]

$$\hat{\boldsymbol{P}} \equiv \hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}, \qquad \hat{\boldsymbol{J}} \equiv \hat{\boldsymbol{J}}_{(0)}, \tag{4.339}$$

potom budou jistě splněny komutační relace (4.333). Z požadavku (4.334) pak plyne, že operátor $\hat{\mathsf{H}}_{(I)}$ musí vyhovovat podmínkám

$$\left[\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}, \hat{\mathsf{H}}_{(I)}\right] = \left[\hat{\boldsymbol{J}}_{(0)}, \hat{\mathsf{H}}_{(I)}\right] = 0. \tag{4.340}$$

[81] Tak tomu ve většině v praxi užívaných modelů a teorií skutečně je.

Z požadavku (4.335) dostáváme

$$\left[\hat{\mathsf{K}}^j, \hat{\mathsf{P}}^k_{(0)}\right] = -i\delta_{jk}\left(\hat{\mathsf{H}}_{(0)} + \hat{\mathsf{H}}_{(I)}\right),$$

což je díky komutačním relacím (4.205) totéž jako

$$\left[\hat{\mathsf{K}}^j_{(I)}, \hat{\mathsf{P}}^k_{(0)}\right] = -i\delta_{jk}\hat{\mathsf{H}}_{(I)}, \tag{4.341}$$

kde operátor

$$\hat{\boldsymbol{K}}_{(I)} \equiv \hat{\boldsymbol{K}} - \hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}, \tag{4.342}$$

a tedy evidentně musí být

$$\hat{\boldsymbol{K}} \neq \hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}. \tag{4.343}$$

Navíc komutační relace (4.336) vyžaduje, aby

$$\left[\left(\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)} + \hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}\right), \left(\hat{\mathsf{H}}_{(0)} + \hat{\mathsf{H}}_{(I)}\right)\right] = -i\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)},$$

což díky vztahu (4.206) znamená, že musí platit

$$\left[\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}, \hat{\mathsf{H}}_{(I)}\right] = -\left[\hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}, \hat{\mathsf{H}}\right]. \tag{4.344}$$

Podobně z relací (4.337) a (4.204) dostaneme požadavek

$$\left[\hat{\mathsf{J}}^j_{(0)}, \hat{\mathsf{K}}^k_{(I)}\right] = i\varepsilon_{jkl}\hat{\mathsf{K}}^l_{(I)} \tag{4.345}$$

a z relace (4.338) v kombinaci s druhou relací (4.202) požadavek

$$\left[\hat{\mathsf{K}}^j_{(I)}, \hat{\mathsf{K}}^k\right] = -\left[\hat{\mathsf{K}}^j_{(0)}, \hat{\mathsf{K}}^k_{(I)}\right]. \tag{4.346}$$

V dalším budeme předpokládat, že na uvažovaném Fockově prostoru jsou definovány operátory $\hat{\mathsf{H}}_{(I)}$, $\hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}$ vyhovující vztahům (4.340), (4.341), (4.344) – (4.346). Z následující kapitoly se pak stane zřejmým, v jakém smyslu je třeba chápat výrok o *stejnosti* zmíněný ve výše uvedeném postřehu.

Pokud v uvažovaném Fockově prostoru byly definovány operátory prostorové inverze $\hat{\mathsf{P}}_{(0)}$ a/nebo časové inverze $\hat{\mathsf{T}}_{(0)}$, potom tuto úlohu budou hrát i z hlediska systému, jehož částice mezi sebou interagují. Proto v dalším již index $_{(0)}$ v označení těchto operátorů opustíme.

Požadavek invariance vůči prostorové, resp. časové inverzi pak vyžaduje, aby vedle vztahů (4.207) ještě platila komutační relace

$$\left[\hat{\mathsf{P}}, \hat{\mathsf{H}}_{(I)}\right] = \left\{\hat{\mathsf{P}}, \hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}\right\} = 0, \tag{4.347}$$

respektive

$$\left[\hat{\mathsf{T}}, \hat{\mathsf{H}}_{(I)}\right] = \left[\hat{\mathsf{T}}, \hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}\right] = 0. \tag{4.348}$$

Podobně, požadavek invariance vůči grupě vnitřních symetrií $\mathcal{G}$ vyžaduje, aby vedle relace (4.273) platilo i

$$\left[\hat{\mathsf{U}}(g), \hat{\mathsf{H}}_{(I)}\right] = 0. \tag{4.349}$$

Pokud je tato grupa Lieovou, potom poslední relace zaručuje, že operátory reprezentující její generátory představují integrály pohybu i pro částice interagující.

4.3 Úlohy

U.4.1. Dokažte, že pokud $\mathsf{L}\,(p)$ představuje čistý boost, potom pro Wignerovu rotaci

$$\mathsf{W}(\mathsf{R}, p) \equiv \mathsf{L}^{-1}(\mathsf{R}p)\,\mathsf{R}\mathsf{L}(\mathsf{R}p)$$

odpovídající libovolné rotaci R platí

$$\frac{\partial \mathsf{W}(\mathsf{R}, p)}{\partial p^k} = 0,$$

a tedy *v tomto případě* platí

$$\mathsf{W}(\mathsf{R}, p) = \mathsf{R}.$$

U.4.2. Ukažte, že v případě transformace $\mathsf{L}\,(p)$ definované formulí (4.103) jsou kety definované formulemi (4.64),(4.76) vlastními vektory helicity příslušnými k vlastní hodnotě ξ.

U.4.3. Nechť $\vartheta(w) \in \langle 0, \pi)$ je řešením rovnice

$$\cos\vartheta = \frac{1 - \sqrt{1 - w^2}}{w}.$$

Ukažte, že pro každou hodnotu $w \in \langle 0,1)$ existuje právě jedno $\vartheta\,(w)$. Ukažte, že toto řešení je monotonně ubývající funkcí w a přitom $\vartheta(w=0)=\pi/2$ a $\vartheta(w\to\infty)\to 0$.
Povšimněte si, že odtud speciálně plyne, že $\vartheta(w)$ pro všechna $w \in \langle 0,1)$ leží v intervalu $(0,\pi/2\rangle$.

U.4.4. Ukažte, že pro částici s nenulovou hmotou platí

$$\hat{\mathsf{Y}}\,|\boldsymbol{p}=0,\lambda\rangle = \eta\,(-1)^{s-\lambda}\,|\boldsymbol{p}=0,-\lambda\rangle\,,$$

kde

$$\hat{\mathsf{Y}} \equiv \exp\left(-i\pi\hat{\mathsf{J}}_2\right)\hat{\mathsf{P}}$$

a $\hat{\mathsf{P}}$ je operátor prostorové inverze, λ značí helicitu a s,η je spin, resp. vnitřní parita uvažované částice.

U.4.5. Ukažte, že kety $|T,T_3;NN\rangle$ popisující stavy s danou hodnotou izospinu a jeho třetí komponenty v dvounukleonové soustavě lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}
|1,+1;NN\rangle &= |pp\rangle\,,\\
|1,0;NN\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|pn\rangle + |np\rangle\Big\},\\
|1,-1;NN\rangle &= |nn\rangle\,,\\
\\
|0,0;NN\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{|pn\rangle - |np\rangle\Big\}.
\end{aligned}$$

U.4.6. Ukažte, že ket popisující zadaný pion se zadaným nukleonem představuje následující lineární kombinace vlastních vektorů $|T,T_3;\pi N\rangle$ izospinu a jeho třetí komponenty

$$\begin{aligned}
\left|\pi^+p\right\rangle &= -\,|3/2,+3/2;\pi N\rangle\,,\\
\left|\pi^0p\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{2}\,|3/2,+1/2;\pi N\rangle - |1/2,+1/2;\pi N\rangle\right\},\\
\left|\pi^-p\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{|3/2,-1/2;\pi N\rangle - \sqrt{2}\,|1/2,-1/2;\pi N\rangle\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\pi^+ n\right\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{|3/2,+1/2;\pi N\rangle + \sqrt{2}\,|1/2,+1/2;\pi N\rangle\right\},\\
\left|\pi^0 n\right\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{2}\,|3/2,-1/2;\pi N\rangle + |1/2,-1/2;\pi N\rangle\right\},\\
\left|\pi^- n\right\rangle &= |3/2,-3/2;\pi N\rangle\,.
\end{aligned}$$

U.4.7. Ukažte, že dvoupionové stavy s danými hodnotami izospinu a jeho třetí komponenty jsou popsány následujícími kety $|T, T_3; \pi\pi\rangle$

$$\begin{aligned}
|2,+2;\pi\pi\rangle &= \left|\pi^+\pi^+\right\rangle,\\
|2,+1;\pi\pi\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left|\pi^+\pi^0\right\rangle + \left|\pi^0\pi^+\right\rangle\right\},\\
|2,0;\pi\pi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{-\left|\pi^+\pi^-\right\rangle + 2\left|\pi^0\pi^0\right\rangle - \left|\pi^-\pi^+\right\rangle\right\},\\
|2,-1;\pi\pi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left|\pi^0\pi^-\right\rangle + \left|\pi^-\pi^0\right\rangle\right\},\\
|2,-2;\pi\pi\rangle &= \left|\pi^-\pi^-\right\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|1,+1;\pi\pi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\left|\pi^+\pi^0\right\rangle + \left|\pi^0\pi^+\right\rangle\right\},\\
|1,0;\pi\pi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{-\left|\pi^+\pi^-\right\rangle + \left|\pi^-\pi^+\right\rangle\right\},\\
|1,-1;\pi\pi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left|\pi^0\pi^-\right\rangle - \left|\pi^-\pi^0\right\rangle\right\},
\end{aligned}$$

$$|0,0;\pi\pi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left|\pi^+\pi^-\right\rangle + \left|\pi^0\pi^0\right\rangle + \left|\pi^-\pi^+\right\rangle\right\}.$$

U.4.8. Dokažte, že pro operátor "nábojové symetrie": $\exp\left\{i\pi\hat{T}_2\right\}$ platí

$$\begin{aligned}
\exp\left\{i\pi\hat{T}_2\right\}\hat{T}_\pm &= -\hat{T}_\mp\exp\left\{i\pi\hat{T}_2\right\},\\
\exp\left\{i\pi\hat{T}_2\right\}\hat{T}_3 &= -\hat{T}_3\exp\left\{i\pi\hat{T}_2\right\}.
\end{aligned}$$

Na základě těchto relací dokažte, že operátor "G-parity"

$$\hat{\mathsf{G}} \equiv \hat{\mathsf{C}} \exp\left\{ i\pi \hat{\mathsf{T}}_2 \right\}$$

komutuje s operátory izospinu:

$$\left[\hat{\boldsymbol{T}}, \hat{\mathsf{G}}\right] = 0.$$

Ukažte, že platí

$$\left\{\hat{\mathsf{G}}, \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\pi^0\right)\right\} = \left\{\hat{\mathsf{G}}, \hat{\mathsf{a}}^\dagger\left(\pi^\pm\right)\right\} = 0,$$

a tedy, že libovolný n-pionový stav má G-paritu rovnou $(-1)^n$, tj. platí

$$\hat{\mathsf{G}} \left|\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n)\right\rangle = (-1)^n \left|\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n)\right\rangle,$$

kde každý ze symbolů $\pi(1)$ může představovat kterýkoliv z pionů, tj. může nabývat hodnot π^+, π^0, π^-.

Kapitola 5

Srážky a rozpady částic

Většinu informací o zákonitostech na úrovni mikrosvěta získáváme studiem srážkových experimentů. Se základními pojmy s těmito experimenty souvisejícími jsme se seznámili již v [1]. Připomeňme proto pouze, že počet procesů j-tého druhu proběhlých v důsledku bombardování (tenkého) terče svazkem částic lze vyjádřit ve tvaru

$$N_j = \sigma_j \, L, \tag{5.1}$$

kde L je tzv. *integrální luminozita*, což je veličina charakterizující experimentální uspořádání, užité ke studiu zmíněných procesů (která však sama na dynamice těchto procesů nezávisí), a σ_j je příslušný účinný průřez.

V [1] jsme se omezili pouze na diskusi experimentů "s pevným terčem" (fixed target experiments) a zjistili jsme, že v tomto případě je[1]

$$L = \int dxdy \, \nu_B(x,y) \, n_T \, \rho_T^{(2)}(x,y) \,, \tag{5.2}$$

kde osu dopadajícího svazku jsme identifikovali se třetí souřadnou osou a $\nu_B\,(x,y)$, resp. $n_T\rho_T^{(2)}(x,y)$ je počet částic prošlých jednotkovou ploškou postavenou kolmo k bombardujícímu svazku v místě $\boldsymbol{x}$, respektive

[1]Viz formuli (4.3) v [1]. V návaznosti na symboliku užívanou v případě colliderů (srov. úlohu U.5.1.) zde používáme značení poněkud odlišné než v [1]. Speciálně veličinu, kterou jsme v [1] nazývali $\rho_T^{(2)}\,(x,y)$, nyní označujeme jako $n_T\rho_T^{(2)}\,(x,y)$, kde n_T je celkový počet terčíkových částic.

plošná hustota terčíkových částic. Připomeňme ještě, že pokud je plošná hustota aktivní části terče konstantní, potom počet uvažovaných procesů připadajících na jednotku času lze zapsat ve tvaru

$$\frac{dN_j}{dt} = \sigma_j I_B \, n_T, \tag{5.3}$$

kde n_T je počet terčíkových částic v aktivní části terčíku a I_B je intezita bombardujícího svazku.

Převážnou většinu informací o dynamice na nejmenších vzdálenostech dnes ovšem získáváme z experimentů na tzv. colliderech, kdy ke srážkám dochází mezi částicemi ze dvou svazků urychlených částic, tj. v těchto případech ani jedna ze srážejících se částic není částí nějakého (pevného, tekutého či plynného) terče, který by byl vůči laboratoři v klidu. Snadno se dá ukázat, že i v těchto případech zůstává formule (5.1) v platnosti - což však již ovšem nelze tvrdit o formulích (5.2), (5.3).

Připomeňme také, že přítomnost ostatních částic ve svazcích a/nebo terčíku má zanedbatelný vliv na proces, který proběhne v důsledku interakce mezi dvojicí částic, které se "srazily". Díky tomu můžeme takovéto srážkové experimenty z teoretického hlediska analyzovat jako sérii procesů, v nichž je vždy na počátku (v okamžiku $t_i \ll 0$) systém připraven ve *dvoučásticovém stavu* tak, že příslušné dvě částice jsou od sebe natolik vzdálené, že jejich vzájemná interakce nehraje žádnou roli, a přitom obě letí k "místu srážky" (které obvykle identifikujeme s počátkem souřadnic) tak, aby do něho dospěly v okamžiku $t = 0$. V čase $t_f \gg 0$ pak zjišťujeme kinematiku (impulsy, případně nějaké spinové charakteristiky) a druhy částic "přítomných" po proběhlé srážce, a to opět v konfiguraci, kdy vzájemná interakce mezi těmito částicemi je zanedbatelná. I když při popisu toho kterého experimentu běžně hovoříme o impulsech srážejících se částic, jsme si vědomi toho, že ve skutečnosti se vždy jedná o nějakou superpozici stavů s impulsy spadajícími do jistého (dostatečně malého) okolí hodnot udávaných. Víme také, že pro určení účinných průřezů je detailní informace o této superpozici irelevantní, díky čemuž můžeme předpovědi účinných průřezů v rámci kvantové teorie získat vhodnou analýzou stavového vektoru odpovídajícího dominantnímu příspěvku ke zmíněné superpozici. Jakkoliv jsme k tomuto závěru dospěli v [1] analýzou provedenou v rámci nerelativistické teorie, její závěry zůstávají v platnosti i v teorii relativistické.

V nerelativistické kvantové mechanice jsme převážně pracovali v reprezentaci Schrödingerově. V případě kvantové teorie relativistické je však mnohem vhodnější reprezentace Heisenbergova, v níž rovnocennost inerciálních soustav nachází nejpřirozenější vyjádření. Proto, nebude-li explicite uvedeno něco jiného, je v dalším vždy třeba rozumět, že všechny údaje se vztahují k reprezentaci Heisenbergově, kterou ztotožňujeme s reprezentací Schrödingerovou (případně také s reprezentací Diracovou) v okamžiku $t = 0$. Jestliže ve výchozí soustavě je nějaké fyzikální skutečnosti přiřazen v Heisenbergově reprezentaci vektor $|\psi\rangle$, potom tutéž situaci z hlediska souřadné soustavy, která z výchozí vznikla Poincaréovou transformací $G(\Lambda, a)$, popisuje v Heisenbergově reprezentaci vektor $\hat{\mathsf{U}}(\Lambda, a)\,|\psi\rangle$.

5.1 S-matice

V případě studovaného srážkového procesu je (v pevně zvolené inerciální soustavě) systému v *kterémkoliv* okamžiku přiřazen vektor, který by v Schrödingerově reprezentaci popisoval stav tohoto systému v okamžiku $t = 0$ (tj. v "okamžiku srážky"). Jak takovýto vektor vyjádřit? Nechť $|\alpha, \beta\rangle$ je vektor, který popisuje ve *Schrödingerově* reprezentaci stav dvou částic lokalizovaných v okolí počátku, a to takový, že *pokud by tyto částice neinteragovaly*, dospěly by do tohoto stavu v okamžiku $t = 0$ ze stavu připraveného v okamžiku $t_i \ll 0$ tak, že v něm zmíněné dvě částice byly od sebe natolik vzdálené, že jejich vzájemná interakce byla nepodstatná.[2] Ve Schrödingerově reprezentaci je tomuto stavu přiřazen vektor

$$|\psi_{\alpha,\beta}\,(t_i)\,;t_i\rangle_{Sch} = \exp\Big(-i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_i\Big)\,|\alpha, \beta\rangle\,. \qquad (5.4)$$

Jestliže je náš "*reálný*" systém (tj. systém, jehož částice navzájem *interagují*) v okamžiku t_i připraven v tomto stavu, potom stav, do kterého dospěje v okamžiku $t = 0$, je ve Schrödingerově reprezentaci popsán

[2] To znamená, že interakce mezi zmíněnými částicemi prakticky neovlivňuje další vývoj stavu uvažovaného systému v časech *nepříliš vzdálených* od t_i.

vektorem

$$\begin{aligned} |\psi_{\alpha,\beta}(0);t_i\rangle_{Sch} &= \exp\left(i\hat{\mathsf{H}}t_i\right)|\psi_{\alpha,\beta}(t_i);t_i\rangle_{Sch} \\ &= \exp\left(i\hat{\mathsf{H}}t_i\right)\exp\left(-i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_i\right)|\alpha,\beta\rangle\,, \end{aligned} \tag{5.5}$$

což ovšem není nic jiného než hledaný vektor, který studovanému procesu přiřazujeme v reprezentaci Heisenbergově, tj.[3]

$$|\alpha,\beta;t_i\rangle = \hat{\Omega}(t_i)\,|\alpha,\beta\rangle\,, \tag{5.6}$$

kde

$$\hat{\Omega}(t) \equiv \exp\left(i\hat{\mathsf{H}}t\right)\exp\left(-i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t\right). \tag{5.7}$$

Obdobně, nechť $|\alpha_1,\cdots,\alpha_N\rangle$ je vektor, který ve Schrödingerově reprezentaci popisuje stav N částic lokalizovaných v okolí počátku, a to takový, že pokud by tyto částice neinteragovaly, dospěly by za dobu $t_f \gg 0$ do míst od sebe natolik vzdálených, že by jejich interakce byla nepodstatná. V Schrödingerově reprezentaci je tomuto stavu přiřazen vektor

$$|\psi_{\alpha_1,\cdots,\alpha_N}(t_f);t_f\rangle_{Sch} = \exp\left(-i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_f\right)|\alpha_1,\cdots,\alpha_N\rangle\,. \tag{5.8}$$

Reálný systém, jehož částice vzájemně interagují, do tohoto stavu v okamžiku t_f dospěje tehdy, když byl v okamžiku $t = 0$ ve stavu, který je ve Schrödingerově reprezentaci popsán vektorem

$$\begin{aligned} |\psi_{\alpha_1,\cdots,\alpha_N}(0);t_f\rangle_{Sch} &= \exp\left(i\hat{\mathsf{H}}t_f\right)|\psi_{\alpha_1,\cdots,\alpha_N}(t_f);t_f\rangle_{Sch} \\ &= |\alpha_1,\cdots,\alpha_N;t_f\rangle\,, \end{aligned} \tag{5.9}$$

kde

$$|\alpha_1,\cdots,\alpha_N;t_f\rangle \equiv \hat{\Omega}(t_f)\,|\alpha_1,\cdots,\alpha_N\rangle\,. \tag{5.10}$$

V rozptylovém procesu je studovaný systém v okamžiku t_i ve stavu, který je ve Schrödingerově reprezentaci popsán vektorem (5.4). V okamžiku t_f bude tedy ve stavu, který je ve Schrödingerově reprezentaci popsán vektorem

$$|\psi_{\alpha,\beta}(t_f);t_i\rangle_{Sch} = \exp\left\{-i\hat{\mathsf{H}}(t_f - t_i)\right\}|\psi_{\alpha,\beta}(t_i);t_i\rangle_{Sch} \tag{5.11}$$

[3]Nepřehlédněme, že zde časová proměnná t_i *neurčuje* čas, kdy se systém nachází ve stavu určovaném daným vektorem, ale počáteční okamžik odpovídajícího srážkového procesu.

a "hledáme ho ve stavu", který je ve Schrödingerově reprezentaci popsán vektorem (5.8). Amplitudu pravděpodobnosti, že ho v tomto stavu skutečně nalezneme, tedy můžeme vyjádřit jako skalární součin vektorů (5.8) a (5.11), což díky formulím (5.4), (5.10) lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{\alpha\beta\to\alpha_1,\cdots,\alpha_N}(t_f,t_i) = \\ &= \langle\alpha_1,\cdots,\alpha_N|\exp\left(i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_f\right)\exp\left\{-i\hat{\mathsf{H}}\left(t_f-t_i\right)\right\}\exp\left(-i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_i\right)|\alpha,\beta\rangle \\ &= \langle\alpha_1,\cdots,\alpha_N|\,\hat{\mathsf{S}}\left(t_f,t_i\right)|\alpha,\beta\rangle\,, \end{aligned} \tag{5.12}$$

kde

$$\hat{\mathsf{S}}\left(t_f,t_i\right)\equiv\hat{\Omega}^\dagger\left(t_f\right)\hat{\Omega}\left(t_i\right). \tag{5.13}$$

Z konstrukce, která nás k tomuto výsledku přivedla, je fyzikálně zřejmé, že pro *dostatečně velké* hodnoty t_f a $(-t_i)$ by pravá strana formule (5.12) neměla na t_f, t_i záviset, tj. mělo by (alespoň prakticky) platit

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta\to\alpha_1,\cdots,\alpha_N}\left(t_f,t_i\right)=\mathcal{A}_{\alpha\beta\to\alpha_1,\cdots,\alpha_N}. \tag{5.14}$$

Přitom

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta\to\alpha_1,\cdots,\alpha_N}=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_N|\,\hat{\mathsf{S}}\,|\alpha,\beta\rangle\equiv S_{\alpha_1\cdots\alpha_N,\alpha\beta}, \tag{5.15}$$

kde *operátor S-matice*[4]

$$\hat{\mathsf{S}}\equiv\left(\hat{\Omega}^{(-)}\right)^\dagger\hat{\Omega}^{(+)}, \tag{5.16}$$

a Møllerovy operátory

$$\hat{\Omega}^{(\pm)}\equiv\lim_{t\to\mp\infty}\hat{\Omega}\left(t\right). \tag{5.17}$$

Dále můžeme (alespoň formálně) postupovat zcela stejně jako v nerelativistickém případě: Ke každému vektoru $|\varphi\rangle\in\mathcal{H}$ definujeme vektory[5]

$$\begin{aligned} |\varphi;in\rangle &\equiv \left|\varphi^{(+)}\right\rangle\equiv\hat{\Omega}^{(+)}\,|\varphi\rangle\,, \\ |\varphi;out\rangle &\equiv \left|\varphi^{(-)}\right\rangle\equiv\hat{\Omega}^{(-)}\,|\varphi\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.18}$$

---

[4] Srovnejte s formulí (6.20) v [1].

[5] O těchto veličinách se často mluví jako o "in-stavech", resp. "out-stavech". O tom, zda pro ně v dalším budeme užívat označení $|\varphi;in\rangle\,,|\varphi;out\rangle$, či $\left|\varphi^{(+)}\right\rangle$, $\left|\varphi^{(-)}\right\rangle$, bude rozhodovat pouze to, které z nich je v dané souvislosti typograficky výhodnější.

Amplitudu (5.15) pak můžeme ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta\to\alpha_1,\cdots,\alpha_N} = \langle\alpha_1,\cdots,\alpha_N; out\,|\alpha,\beta; in\rangle\,. \tag{5.19}$$

Pokud $\{|\varphi_n\rangle\}$ je nějakou ortonormální bází Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$, potom je totéž pravdou také o $\left\{\left|\varphi_n^{(+)}\right\rangle\right\}$ a o $\left\{\left|\varphi_n^{(-)}\right\rangle\right\}$.[6] Odtud pak okamžitě zjistíme, že Møllerovy operátory jsou *unitární:*

$$\left(\hat{\Omega}^{(\pm)}\right)^{\dagger} = \left(\hat{\Omega}^{(\pm)}\right)^{-1}, \tag{5.20}$$

což zaručuje nejen unitaritu S-matice:

$$\hat{S}^{\dagger} = \hat{S}^{-1}, \tag{5.21}$$

ale i to, že pro libovolné vektory $|\varphi\rangle\,,|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ platí

$$\left\langle\varphi^{(+)}\left|\psi^{(+)}\right.\right\rangle = \left\langle\varphi^{(-)}\left|\psi^{(-)}\right.\right\rangle = \langle\varphi\,|\psi\rangle\,. \tag{5.22}$$

Povšimněme si také toho, že unitární transformaci mezi bázemi $\left\{\left|\varphi_n^{(+)}\right\rangle\right\}$ a $\left\{\left|\varphi_n^{(-)}\right\rangle\right\}$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}\left|\varphi_n^{(+)}\right\rangle &= \sum_m \left\langle\varphi_m^{(-)}\left|\varphi_n^{(+)}\right.\right\rangle\left|\varphi_m^{(-)}\right\rangle \\ &= \sum_m S_{mn}\left|\varphi_m^{(-)}\right\rangle,\end{aligned} \tag{5.23}$$

kde

$$S_{mn} \equiv \langle\varphi_m|\,\hat{S}\,|\varphi_n\rangle\,. \tag{5.24}$$

Z vyjádření (srov. formule (6.60), (6.61) v [1])

$$\hat{\Omega}^{(\pm)} = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\hat{G}^{(\pm)}(\omega)\,\hat{H}_{(I)}\delta\!\left(\omega - \hat{H}_{(0)}\right), \tag{5.25}$$

kde Greenův operátor

$$\hat{G}^{(\pm)}(\omega) \equiv \frac{1}{\omega - \hat{H} \pm i\varepsilon}\,, \tag{5.26}$$

[6] Nezapomínejme, že ve zde uvažovaném případě nemůže vzniknout žádný problém s vázanými stavy, neboť spektra operátorů $\hat{H}$ a $\hat{H}_{(0)}$ jsou stejná.

vidíme, že pro libovolný vlastní vektor $|\psi_E\rangle$ operátoru $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$:

$$\hat{\mathsf{H}}_{(0)}\,|\psi_E\rangle = E\,|\psi_E\rangle \tag{5.27}$$

platí

$$\left|\psi_E^{(\pm)}\right\rangle \equiv \hat{\Omega}^{(\pm)}\,|\psi_E\rangle = \left[1 + \hat{\mathsf{G}}^{(\pm)}(E)\,\hat{\mathsf{H}}_{(I)}\right]|\psi_E\rangle\,. \tag{5.28}$$

Přitom víme, že Greenův operátor vyhovuje rovnici

$$\hat{\mathsf{G}}^{(\pm)}(E) = \hat{\mathsf{G}}^{(\pm)}_{(0)}(E) + \hat{\mathsf{G}}^{(\pm)}_{(0)}(E)\,\hat{\mathsf{H}}_{(I)}\,\hat{\mathsf{G}}^{(\pm)}(E)\,, \tag{5.29}$$

kde

$$\hat{\mathsf{G}}^{(\pm)}_{(0)}(E) \equiv \frac{1}{\omega - \hat{\mathsf{H}}_{(0)} \pm i\varepsilon}\,. \tag{5.30}$$

Dosazením z této rovnice do pravé strany strany vztahu (5.28) nalezneme, že vektor $\left|\psi_E^{(\pm)}\right\rangle$ vyhovuje odpovídající *Lippman-Schwingerově rovnici*

$$\left|\psi_E^{(\pm)}\right\rangle = |\psi_E\rangle + \hat{\mathsf{G}}^{(\pm)}_{(0)}(E)\,\hat{\mathsf{H}}_{(I)}\left|\psi_E^{(\pm)}\right\rangle. \tag{5.31}$$

Víme také, že[7]

$$\hat{\mathsf{H}}\,\hat{\Omega}^{(\pm)} = \hat{\Omega}^{(\pm)}\,\hat{\mathsf{H}}_{(0)}, \tag{5.32}$$

a tedy řešení L-Sch rovnice (5.31) popisuje vlastní vektor celkové energie příslušný k vlastní hodnotě E:

$$\hat{\mathsf{H}}\left|\psi_E^{(\pm)}\right\rangle = E\left|\psi_E^{(\pm)}\right\rangle. \tag{5.33}$$

Vzhledem k tomu, že operátory

$$\hat{\boldsymbol{P}} \equiv \hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}, \qquad \hat{\boldsymbol{J}} \equiv \hat{\boldsymbol{J}}_{(0)}$$

komutují jak s $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$ (viz (4.201)), tak s $\hat{\mathsf{H}}$ (viz (4.334)), komutují také s $\hat{\Omega}\,(t)$, a tedy platí

$$\hat{\boldsymbol{P}}\,\hat{\Omega}^{(\pm)} = \hat{\Omega}^{(\pm)}\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}, \tag{5.34}$$

$$\hat{\boldsymbol{J}}\,\hat{\Omega}^{(\pm)} = \hat{\Omega}^{(\pm)}\hat{\boldsymbol{J}}_{(0)}. \tag{5.35}$$

[7] Viz odvození formule (6.34) v [1].

Konečně z relace (4.206) dostáváme

$$\begin{aligned}\left[\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}, \exp\left(i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t\right)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}t^n\left[\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}, \hat{\mathsf{H}}_{(0)}^n\right] \\ &= \hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}t^n\hat{\mathsf{H}}_{(0)}^{n-1} = t\hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}\exp\left(i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t\right).\end{aligned} \tag{5.36}$$

Podobně z relace (4.26) plyne vztah

$$\left[\hat{\boldsymbol{K}}, \exp\left(i\hat{\mathsf{H}}t\right)\right] = t\hat{\boldsymbol{P}}\exp\left(i\hat{\mathsf{H}}t\right) \tag{5.37}$$

a z něho rovnost

$$\begin{aligned}&\exp\left(i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_f\right)\left[\hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}, \exp\left\{-i\hat{\mathsf{H}}\left(t_f-t_i\right)\right\}\right]\exp\left(-i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_i\right) = \\ &\quad= -\left(t_f-t_i\right)\exp\left(i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_f\right)\hat{\boldsymbol{P}}\exp\left\{i\hat{\mathsf{H}}\left(t_f-t_i\right)\right\}\exp\left(-i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_i\right) \\ &-\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}\hat{\mathsf{S}}\left(t_f,t_i\right) + \left[\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}, \exp\left(i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_f\right)\right]\exp\left\{-i\hat{\mathsf{H}}\left(t_f-t_i\right)\right\}\exp\left(-i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_i\right) \\ &+\hat{\mathsf{S}}\left(t_f,t_i\right)\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)} + \exp\left(i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_f\right)\exp\left\{-i\hat{\mathsf{H}}\left(t_f-t_i\right)\right\}\left[\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}, \exp\left(-i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_i\right)\right],\end{aligned}$$

v níž se díky relaci (5.36) první člen na pravé straně ruší se součtem členů třetího a posledního, a tedy musí platit komutační relace

$$\left[\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}, \hat{\mathsf{S}}(t_f,t_i)\right] = -\exp\left(i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_f\right)\left[\hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}, \exp\left\{-i\hat{\mathsf{H}}\left(t_f-t_i\right)\right\}\right]\exp\left(-i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t_i\right),$$

která je ekvivalentní vztahu

$$\left[\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)} + \hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}(t_f)\right]\hat{\mathsf{S}}(t_f,t_i) = \hat{\mathsf{S}}(t_f,t_i)\left[\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)} + \hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}(t_i)\right], \tag{5.38}$$

v němž

$$\hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}(t) \equiv \exp\left(i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t\right)\hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}\exp\left(-i\hat{\mathsf{H}}_{(0)}t\right). \tag{5.39}$$

Pokud jsou maticové elementy operátoru $\hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}$ mezi vlastními vektory operátoru $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$ nesingulární,[8] potom se pro $|t| \to \infty$ stanou nulovými všechny maticové elementy

$$\langle\psi|\,\hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}(t)\,|\varphi\rangle, \tag{5.40}$$

[8] Přesněji řečeno, pokud jsou dostatečně hladkými funkcemi příslušných vlastních hodnot.

v nichž vektory $|\varphi\rangle, |\psi\rangle$ představují (dostatečně hladkou) superpozici vlastních vektorů operátoru $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$.[9] V dalším budeme požadovat, aby naznačené maticové elementy v limitě $|t| \to \infty$ vymizely pro libovolné vektory $|\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Jinými slovy řečeno, budeme předpokládat, že[10]

$$\lim_{t\to\pm\infty} \hat{\boldsymbol{K}}_{(I)}(t) = 0. \tag{5.41}$$

Z relace (5.38) pak pro $t_f = 0$, $t_i \to -\infty$, resp. $t_i = 0$, $t_f \to +\infty$ dostáváme

$$\hat{\boldsymbol{K}}\hat{\Omega}^{(+)} = \hat{\Omega}^{(+)}\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}, \tag{5.42}$$

respektive

$$\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}\left(\hat{\Omega}^{(-)}\right)^{\dagger} = \left(\hat{\Omega}^{(-)}\right)^{\dagger}\hat{\boldsymbol{K}}, \tag{5.43}$$

což je díky samosdruženosti operátorů $\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}, \hat{\boldsymbol{K}}$ ekvivalentní se vztahem

$$\hat{\boldsymbol{K}}\hat{\Omega}^{(-)} = \hat{\Omega}^{(-)}\hat{\boldsymbol{K}}_{(0)}. \tag{5.44}$$

Protože v libovolné unitární reprezentaci generátorům grupy odpovídají samosdružené operátory, zaručují relace (5.32), (5.34), (5.35), (5.42), (5.43) platnost vztahů

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{U}}(\Lambda, a)\,\hat{\Omega}^{(+)} &= \hat{\Omega}^{(+)}\hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda, a)\,, \\ \left(\hat{\Omega}^{(-)}\right)^{\dagger}\hat{\mathsf{U}}(\Lambda, a) &= \hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda, a)\left(\hat{\Omega}^{(-)}\right)^{\dagger}. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Z definice (5.16) pak vidíme, že operátor S-matice musí vyhovovat komutačním relacím

$$\left[\hat{\mathsf{S}}, \hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda, a)\right] = 0. \tag{5.46}$$

Nepřehlédněme, že v nich vystupují operátory $\hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda, a)$, které *nezávisí* na interakci mezi částicemi. To se může na první pohled zdát být podivné, protože vztah mezi vektory, které popisují v Heisenbergově reprezentaci tutéž fyzikální skutečnost z hlediska dvou souřadných

[9] Abychom porozuměli tomuto výroku, stačí si vzpomenout na Riemann-Lebesgueovu větu uvedenou v [1] – Doplněk C.

[10] Bližší rozbor tohoto předpokladu zde provádět nebudeme. Uveďme jen, že hraje podobnou úlohu, jako předpoklad o existenci limity (5.17) definující Møllerovy operátory.

soustav navzájem souvisejících Poincaréovou transformací $G(\Lambda, a)$, je dán operátory $\hat{\mathrm{U}}(\Lambda, a)$, jejichž generátory [11] na interakci mezi částicemi *závisejí*. Snadno se však přesvědčíme, že uvedené relace jsou s tímto konstatováním v souladu: Musíme si uvědomit, že pokud jsme reálnému fyzikálnímu systému v uvažovaném srážkovém procesu z hlediska naší souřadné soustavy v Heisenbergově reprezentaci přiřadili vektor $|\alpha, \beta; in\rangle$, potom je tatáž skutečnost z hlediska transformované soustavy popsána v této reprezentaci vektorem

$$|\alpha, \beta; in\rangle' \equiv \hat{\mathrm{U}}\,(\Lambda, a)\,|\alpha, \beta; in\rangle\,.$$

Právě tak "konfiguraci", v jaké systém po srážce hledáme, kterou jsme z hlediska naší soustavy vystihli v Heisenbergově reprezentaci vektorem $|\alpha_1, \cdots, \alpha_N; out\rangle$, odpovídá v této reprezentaci v transformované soustavě vektor

$$|\alpha_1, \cdots, \alpha_N; out\rangle' \equiv \hat{\mathrm{U}}(\Lambda, a)\,|\alpha_1, \cdots, \alpha_N; out\rangle\,.$$

Již sama unitarita operátorů $\hat{\mathrm{U}}(\Lambda, a)$ zaručuje, že

$$\langle\alpha_1, \cdots, \alpha_N; out\,|\alpha, \beta; in\rangle = \langle\alpha_1, \cdots, \alpha_N; out|\,\hat{\mathrm{U}}^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{\mathrm{U}}(\Lambda, a)\,|\alpha, \beta; in\rangle\,, \tag{5.47}$$

tj. hodnota amplitudy $\mathcal{A}_{\alpha\beta\to\alpha_1,\cdots,\alpha_N}$ je nezávislá na tom, ve které inerciální souřadné soustavě ji spočteme[12]. Na druhé straně na základě vztahů (5.18) dostáváme[13]

$$\begin{aligned}\langle\alpha_1, \cdots, \alpha_N; out|\,\hat{\mathrm{U}}^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{\mathrm{U}}(\Lambda, a)\,|\alpha, \beta; in\rangle &= \\ &= \langle\alpha_1, \cdots, \alpha_N|\left(\hat{\Omega}^{(-)}\right)^\dagger \hat{\mathrm{U}}^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{\mathrm{U}}(\Lambda, a)\,\hat{\Omega}^{(+)}\,|\alpha, \beta\rangle\end{aligned} \tag{5.48}$$

[11] V daném případě operátory $\hat{\mathrm{H}}$ a $\hat{\boldsymbol{K}}$.

[12] Tento výrok je pochopitelně téměř tautologií: Nezapomeňme, že právě požadavek invariance veličin tohoto typu vede k tomu, že v kvantové teorii musí být symetrie reprezentovány unitárními operátory, a přitom vztah mezi popisem studovaného fyzikálního systému z hlediska dvou souřadných soustav, které spolu souvisejí Poincaréovou transformací $G(\Lambda, a)$, je dán operátory $\hat{\mathrm{U}}(\Lambda, a)$.

[13] V následujících úpravách využíváme vedle vztahů (5.45) také unitarity operátorů $\hat{\mathrm{U}}(\Lambda, a)$ a $\hat{\mathrm{U}}_{(0)}(\Lambda, a)$. Díky ní a vzhledem k tomu, že uvedené vztahy platí pro každou Poincaréovu transformaci (a tedy i pro transformaci $G^{-1}(\Lambda, a)$), musí tyto vztahy zůstat v platnosti i tehdy, když v kterémkoliv z nich provedeme současně záměny $\hat{\mathrm{U}}(\Lambda, a) \to \hat{\mathrm{U}}^\dagger(\Lambda, a)$ a $\hat{\mathrm{U}}_{(0)}(\Lambda, a) \to \hat{\mathrm{U}}^\dagger_{(0)}(\Lambda, a)$.

$$= \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_N | \, \hat{U}^\dagger_{(0)}(\Lambda, a) \left(\hat{\Omega}^{(-)}\right)^\dagger \hat{\Omega}^{(+)} \hat{U}_{(0)}(\Lambda, a) \, |\alpha, \beta\rangle$$
$$= \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_N | \, \hat{U}^\dagger_{(0)}(\Lambda, a) \, \hat{S} \, \hat{U}_{(0)}(\Lambda, a) \, |\alpha, \beta\rangle ,$$

a tedy invariance (5.47) je skutečně zaručena tehdy, když operátor S-matice komutuje s operátory odpovídajícími Poincaréovým transformacím částic *neinteragujících.*

Je dobře si uvědomit, že samotný požadavek relativistické invariance teorie vyjádřený formulí (5.46) vede k netriviálním vztahům mezi elementy S-matice, a to zcela nezávisle na konkrétním tvaru operátoru $\hat{S}$.[14] Skutečně, označíme-li

$$|\psi; \Lambda, a\rangle \equiv \hat{U}_{(0)}(\Lambda, a) \, |\psi\rangle , \tag{5.49}$$

potom díky unitaritě operátoru $\hat{U}_{(0)}\,(\Lambda, a)$ je

$$\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_N; \Lambda, a | \, \hat{S} \, |\alpha, \beta; \Lambda, a\rangle = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_N | \, \hat{U}^{-1}_{(0)}(\Lambda, a) \, \hat{S} \, \hat{U}_{(0)}(\Lambda, a) \, |\alpha, \beta\rangle ,$$

a tedy relace (5.46) zaručuje, že pro všechna Λ, a platí

$$\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_N; \Lambda, a | \, \hat{S} \, |\alpha, \beta; \Lambda, a\rangle = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_N | \, \hat{S} \, |\alpha, \beta\rangle . \tag{5.50}$$

Snadno nalezneme i důsledky případných dalších symetrií: Jestliže je systém invariantní vůči *prostorové inverzi* ($\equiv$ P-invariantní), tj. pokud platí

$$\left[\hat{P}, \hat{H}_{(0)}\right] = \left[\hat{P}, \hat{H}_{(I)}\right] = 0, \tag{5.51}$$

potom z definice (5.7) vidíme, že také

$$\left[\hat{P}, \hat{\Omega}(t)\right] = 0, \tag{5.52}$$

a tedy

$$\left[\hat{P}, \hat{S}\right] = 0. \tag{5.53}$$

Díky unitaritě operátoru $\hat{P}$ odtud plyne relace

$$\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_N; P | \, \hat{S} \, |\alpha, \beta; P\rangle = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_N | \, \hat{S} \, |\alpha, \beta\rangle , \tag{5.54}$$

[14] To je velice důležité, protože exaktní konstrukce tohoto operátoru obvykle přesahuje naše síly.

kde
$$|\psi; P\rangle \equiv \hat{\mathsf{P}}\,|\psi\rangle \tag{5.55}$$
je vektor popisující prostorově invertovaný stav ke stavu popisovanému vektorem $|\psi\rangle$.

Podobně v případě invariance vůči transformacím *vnitřní symetrie*, tj. když platí
$$\left[\hat{\mathsf{U}}(g)\,,\hat{\mathsf{H}}_{(0)}\right] = \left[\hat{\mathsf{U}}(g)\,,\hat{\mathsf{H}}_{(I)}\right] = 0, \tag{5.56}$$
dostaneme
$$\left[\hat{\mathsf{U}}(g)\,,\hat{\mathsf{S}}\right] = 0 \tag{5.57}$$
a odtud odpovídající vztahy mezi elementy S-matice:
$$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_N;g|\,\hat{\mathsf{S}}\,|\alpha,\beta;g\rangle = \langle\alpha_1,\cdots,\alpha_N|\,\hat{\mathsf{S}}\,|\alpha,\beta\rangle\,, \tag{5.58}$$
kde
$$|\psi; g\rangle \equiv \hat{\mathsf{U}}(g)\,|\psi\rangle\,. \tag{5.59}$$

Poněkud odlišné důsledky má invariance vůči *časové inverzi* ($\equiv$ T-invariance): Je třeba si uvědomit, že např. relace (5.51) zaručují platnost vztahu (5.52), tj.
$$\hat{\mathsf{P}}\,\hat{\Omega}(t) = \hat{\Omega}(t)\,\hat{\mathsf{P}} \tag{5.60}$$
jenom díky *linearitě* operátoru $\hat{\mathsf{P}}$. Operátor časové inverze je však *antilineární*, a tak z komutačních relací
$$\left[\hat{\mathsf{T}},\hat{\mathsf{H}}_{(0)}\right] = \left[\hat{\mathsf{T}},\hat{\mathsf{H}}_{(I)}\right] = 0 \tag{5.61}$$
tentokrát plyne vztah
$$\hat{\mathsf{T}}\,\hat{\Omega}(t) = \hat{\Omega}(-t)\,\hat{\mathsf{T}}, \tag{5.62}$$
což v limitě $t \to \pm\infty$ znamená, že
$$\hat{\mathsf{T}}\,\hat{\Omega}^{(\pm)} = \hat{\Omega}^{(\mp)}\hat{\mathsf{T}}. \tag{5.63}$$
Označíme-li
$$|\psi; T\rangle \equiv \hat{\mathsf{T}}\,|\psi\rangle\,, \tag{5.64}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \left|\psi; T;^{in}_{out}\right\rangle &\equiv \hat{\Omega}^{(\pm)}\hat{\mathsf{T}}\,|\psi\rangle = \hat{\mathsf{T}}\hat{\Omega}^{(\mp)}\,|\psi\rangle \\ &= \hat{\mathsf{T}}\left|\psi;^{out}_{in}\right\rangle \equiv \left|\psi;^{out}_{in};T\right\rangle, \end{aligned} \tag{5.65}$$

vidíme, že

$$\begin{aligned} \langle\varphi; T; out\,|\psi; T; in\rangle &= \langle\varphi; T|\,\hat{\mathsf{S}}\,|\psi; T\rangle = \langle\varphi; in; T\,|\psi; out; T\rangle \\ &= \langle\psi; out\,|\varphi; in\rangle = \langle\psi|\,\hat{\mathsf{S}}\,|\varphi\rangle\,, \end{aligned} \tag{5.66}$$

kde předposlední rovnost je důsledkem antiunitarity operátoru $\hat{\mathsf{T}}$.[15] Speciálně pro dříve uvažované stavové vektory poslední relace, implikovaná T-invariancí nabývá tvaru

$$\langle\alpha_1, \cdots, \alpha_N; T|\,\hat{\mathsf{S}}\,|\alpha, \beta; T\rangle = \langle\alpha, \beta|\,\hat{\mathsf{S}}\,|\alpha_1, \cdots, \alpha_N\rangle\,. \tag{5.67}$$

Tedy zatímco P-invariance zajišťuje invarianci amplitudy vůči současné záměně *počátečního* stavu prostorově invertovaným *počátečním* stavem a konečného stavu prostorově invertovaným stavem konečným, T-invariance vyžaduje invarianci amplitudy vůči současné záměně *počátečního* stavu časově invertovaným stavem *koncovým* a konečného stavu časově invertovaným stavem počátečním.

Po tom, co jsme zjistili řadu vlastností, které musí mít operátor $\hat{\mathsf{S}}$, aby mohl hrát úlohu operátoru S-matice, ve kterém je soustředěna celá informace o tom, jak se dynamika systému projeví ve srážkových experimentech, soustřeďme se nyní na otázku, jak v rámci uvažovaného algoritmu prakticky získat předpovědi o veličinách v takovýchto experimentech měřených:

Předpokládejme, že jsme nějakým způsobem nalezli operátor $\hat{\mathsf{S}}$ vyhovující všem výše naznačeným požadavkům. Pokud by mezi částicemi interakce neexistovala, jednalo by se o operátor identity. Zapišme proto operátor S-matice ve tvaru[16]

$$\hat{\mathsf{S}} = 1 - i\hat{\mathsf{T}}. \tag{5.68}$$

[15] Viz formuli (R.32) v [1]-Doplněk R.

[16] Snažíme se, aby námi užívaná symbolika byla pokud možno shodná s tou, se kterou se čtenář může setkat v současné literatuře. Cenou za to je i to, že zde vědomě užíváme stejný symbol $\hat{\mathsf{T}}$, který v předchozím značil operátor časové inverze. Záměna naznačených dvou významů tohoto symbolu je však prakticky vyloučena, protože

Celá informace o dynamice je pak obsažena v operátoru $\hat{\mathsf{T}}$.

Vektor $|\alpha,\beta\rangle \in \mathcal{H}$ odpovídající počátečnímu stavu můžeme vyjádřit jako superpozici vektorů odpovídajících vlastním stavům impulsu každé z částic[17], tj.

$$|\alpha,\beta\rangle = \int d^3\boldsymbol{p}_1' d^3\boldsymbol{p}_2' \, g_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2') \, |\boldsymbol{p}_1',\xi_1,n_1;\boldsymbol{p}_2',\xi_2,n_2\rangle \,, \qquad (5.69)$$

kde

$$|\boldsymbol{p}_1',\xi_1,n_1;\boldsymbol{p}_2',\xi_2,n_2\rangle \equiv \hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}_1',\xi_1,n_1)\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}_2',\xi_2,n_2)\,|0\rangle \;, \qquad (5.70)$$

a funkce $g_{\alpha,\beta}\,(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')$ prakticky vymizí, pokud proměnné $\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2'$ leží mimo malé okolí hodnot $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$, o kterých se v uvažovaném experimentu hovoří jako o impulsech srážejících se částic. Obdobně můžeme vyjádřit i vektor $|\alpha_1,\cdots,\alpha_N\rangle$ odpovídající stavu "koncovému". Dynamika srážky je tedy evidentně zcela obsažena v maticových elementech operátoru S-matice mezi vektory popisujícími příslušné částice, z nichž každá má zadaný impuls a spinovou charakteristiku. Nepřekvapuje proto, že relevantní předpovědi o výsledku srážek lze získat na základě znalosti takovéhoto maticového elementu pro ty hodnoty kinematických proměnných, kterými se v běžném jazyce charakterizuje uvažovaná srážka. Snadno nalezneme algoritmus, který nám to skutečně umožní. Abychom se vyhnuli graficky nepřehledným výrazům, budeme v dalším často užívat velice zhuštěnou symboliku:

Tak pod $|i\rangle$ budeme rozumět vektor, který obdržíme aplikací kreačních operátorů odpovídajících částicím přítomným v počátečním stavu, z nichž každá má zadanou hodnotu svého impulsu a příslušné spinové charakteristiky. K tomu, abychom normalizaci tohoto vektoru určili jednoznačně, budeme požadovat, aby zmíněné kreační operátory spolu s odpovídajícími operátory anihilačními vyhovovaly (anti)komutačním relacím (4.257):

$$\left[\hat{\mathsf{a}}(\boldsymbol{p},\xi;n)\,,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}',\xi';n')\right]_{\mp} = \delta_{nn'}\delta_{\xi\xi'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,. \qquad (5.71)$$

z kontextu bude vždy dostatečně jasné, o který z nich se v daném případě jedná. Na druhé straně je však třeba mít na paměti, že v současnosti užívané konvence nejsou zcela jednotné. Pod označením $\hat{\mathsf{T}}$ se totiž někdy rozumí operátor s opačným znaménkem, než odpovídá formuli (5.68).

[17]Pro zjednodušení zápisu předpokládáme, že příslušné spinové charakteristiky mají pro každou částici v počátečním stavu ostrou hodnotu.

Obdobně je definován symbol $|f\rangle$ pro stavy koncové.

Zavedeme též běžně užívanou zkratku[18]

$$\delta_{fi} \equiv \langle f\,|i\rangle\,. \tag{5.72}$$

V souladu s rozkladem (5.68) pak budeme užívat konvenční formu zápisu pro odpovídající elementy S-matice[19]

$$S_{fi} \equiv \langle f|\,\hat{\mathsf{S}}\,|i\rangle = \delta_{fi} - i\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(P_f - P_i)\,T_{fi}, \tag{5.73}$$

kde P_i, P_f je hodnota celkového čtyřimpulsu v počátečním, resp. koncovém stavu.

Poslední formuli je často výhodnější vyjádřit pomocí tzv. invariantních amplitud. Důvodem je to, že relativistická invariance se ve veličinách T_{fi} neodráží nejjednodušším způsobem: Zatím co operátor $\hat{\mathsf{T}}$ (stejně jako operátor $\hat{\mathsf{S}}$) je "relativisticky invariantní", tj. platí

$$\left[\hat{\mathsf{T}}, \hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda, a)\right] = 0, \tag{5.74}$$

normalizace počátečního a koncového stavu (deteminovaná komutačními relacemi (5.71)) kovariantní není. Podstatné části této nepříjemnosti bychom se zbavili, kdybychom vektory $|i\rangle$ a $|f\rangle$ generovali z vakua pomocí kreačních operátorů[20]

$$\hat{\mathsf{a}}^\dagger(p, \xi; n) \equiv \sqrt{2E}\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger(\boldsymbol{p}, \xi; n)\,.$$

Tato volba však s sebou nese zase jiné nevýhody. Definujme proto tzv.

---

[18]Nesmíme ji ovšem zaměňovat s "Kroneckerovým delta", pro které užíváme obdobný symbol. Výraz (5.72) v obecném případě představuje lineární kombinaci součinů Diracových δ-funkcí od odpovídajících tříimpulsů a Kroneckerových δ od veličin určujících druh a spinové charakteristiky jednotlivých částic.

[19]Nutno přiznat, že tato standardně užívaná symbolika není příliš konzistentní. Nepřehlédněme, že zatímco $\langle f|\,\hat{\mathsf{S}}\,|i\rangle \equiv S_{fi}$, je obdobný maticový element operátoru $\hat{\mathsf{T}}$ vyjádřen jako $\langle f|\,\hat{\mathsf{T}}\,|i\rangle \equiv (2\pi)^4\,\delta^{(4)}(P_f - P_i)\,T_{fi}$. V posledním výrazu je faktor $(2\pi)^4$ samozřejmě pouze otázkou (vhodné) konvence, kdežto faktorizovat v něm δ-funkci jsme oprávněni jen díky tomu, že operátor $\hat{\mathsf{T}}$ musí komutovat s operátory $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}, \hat{\boldsymbol{P}}_{(0)}$.

[20]Porovnejte vztahy (4.230) a (4.235).

invariantní amplitudy[21]

$$M_{fi} \equiv \prod_{l=1}^{n_i} (2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_l}\, T_{fi} \prod_{j=1}^{n_f} (2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_j}, \tag{5.75}$$

kde n_f a n_i udává počet částic v koncovém, resp. v počátečním stavu.[22]

Vraťme se však k naší původní úloze: Na časovou jednotku připadající pravděpodobnost přechodu z počátečního stavu připraveného v okamžiku t_i do koncového stavu hledaného v okamžiku t_f, v němž je zadaný počet každého druhu částic, jednotlivé částice mají dané spinové charakteristiky a jejich impulsy leží v infinitesimálních okolích $d^3\boldsymbol{p}'_j$ zadaných hodnot $\boldsymbol{p}'_j$,[23] je dána výrazem

$$dw_{i\to f} = \frac{\left|\langle f|\,\hat{\mathrm{S}}\,(t_f, t_i)\,|i\rangle\right|^2}{T\,\left\||i\rangle\right\|^2} \prod_{j=1}^{n_f} d^3\boldsymbol{p}'_j, \tag{5.76}$$

kde

$$T \equiv t_f - t_i. \tag{5.77}$$

I když výraz na pravé straně předposlední formule musí zákonitě přivádět každého matematického puristu k nepříčetnosti[24], při trošce trpělivosti se brzy přesvědčíme, že na jeho základě dospějeme ke smysluplným výsledkům. Prozatím se omezme jen na konstatování, že formální absurdnost, na kterou zde narážíme, je pouhopouhou daní za to, že místo s elementy Hilbertova prostoru vyjádřenými ve tvaru "superpozice k δ-funkci normalizovaných vektorů", zde pracujeme pouze s jediným

---

[21]Faktory $(2\pi)^{3/2}$ jsou pochopitelně opět otázkou pouhé (vhodné a snad nejužívanější) konvence. Na druhé straně k tomu, aby níže uvedená veličina M_{fi} byla skutečně invariantní, je nutné, aby také spinové charakteristiky částic počátečního a koncového stavu byly v indexech $_{fi}$ zachyceny invariantním způsobem.

[22]Prozatím je pro nás $n_i = 2$. Brzy se však přesvědčíme, že nalezené výsledky nacházejí uplatnění i pro $n_i \neq 2$.

[23]Pro tuto veličinu se v anglosaské literatuře užívá názvu *differential transition rate*, proto o ní v dalším budeme mluvit jako o (diferenciální) rychlosti přechodu.

[24]Když ne pro nic jiného, tak alespoň proto, že vektor $|i\rangle$, jako vlastní vektor impulsů nepatří do Hilbertova prostoru – je "normalizován k δ-funkci", a tedy výraz $\left\||i\rangle\right\|^2$ obsahuje jako faktor "hodnotu" 3-rozměrné δ-funkce v počátku!

- byť "nejvýznamnějším" – z těchto vektorů.[25] Konec konců na podobnou situaci jsme si již měli možnost zvyknout v rámci nerelativistické kvantové mechaniky. Povzbuzeni touto zkušeností, udělejme další krok, který nás přivede k výrazu po *formální* stránce ještě absurdnějšímu: Využijme toho, že v reálných experimentálních podmínkách jsou časy $t_f, (-t_i)$ tak velké, že má dobrý smysl je nechat růst nade všechny meze, tj. provést záměnu $\hat{\mathrm{S}}\,(t_f, t_i) \to \hat{\mathrm{S}}$, současně s $T \to \infty$. Pokud konečný stav není zcela identický se stavem počátečním, tj. pro $|f\rangle \neq |i\rangle$, pak můžeme na základě rozkladu (5.73) hledanou pravděpodobnost vyjádřit ve tvaru

$$dw_{i\to f} = \lim_{T\to\infty} (2\pi)^8 \, \frac{\delta^{(4)}(P=0)\,\delta^{(4)}(P_f - P_i)}{T\,\||i\rangle\|^2} \, |T_{fi}|^2 \prod_{j=1}^{n_f} d^3\boldsymbol{p}'_j, \qquad (5.78)$$

v němž mj. vystupuje "hodnota" čtyřrozměrné δ-funkce v "počátku"! Jak tedy máme uvedený výraz chápat? Nejprve rozepišme čtyřrozměrnou δ-funkci jako

$$\delta^{(4)}(P) = \delta\!\left(P^0\right) \delta^{(3)}(\boldsymbol{P})\,.$$

Vzhledem k tomu, že operátor $\hat{\boldsymbol{P}}$ komutuje nejen s $\hat{\mathrm{H}}_{(0)}$, ale i s $\hat{\mathrm{H}}$, snadno nahlédneme, že maticový element $\langle f|\,\hat{\mathrm{S}}(t_f, t_i)\,|i\rangle$ musí obsahovat faktor $\delta^{(3)}(\boldsymbol{P}_f - \boldsymbol{P}_i)$ i při konečných hodnotách časů t_f, t_i. Na druhé straně operátor $\hat{\mathrm{H}}_{(0)}$ s $\hat{\mathrm{H}}_{(I)}$ nekomutuje. To má za následek, že pro konečné hodnoty t_f, t_i v tomto maticovém elementu místo faktoru $\delta\!\left(P_f^0 - P_i^0\right)$ vystupuje funkce $\delta_T\!\left(P_f^0 - P_i^0\right)$ celkové energie počátečního a koncového stavu, která s rostoucí hodnotou časového intervalu T sice prakticky vymizí všude kromě malého okolí bodu $P_f^0 = P_i^0$, ale i v tomto bodě má konečnou hodnotu. Tuto skutečnost lze efektivně vystihnout tím, že ve výrazu (5.78) provedeme záměnu

$$\delta\!\left(P^0 = 0\right) \to \frac{1}{2\pi} \int_{t_i}^{t_f} \exp\left(-iP^0 t\right) dt\Big|_{P^0=0} = \frac{T}{2\pi}. \qquad (5.79)$$

[25] Stačí si uvědomit, že kdybychom na pravé straně formule (5.76) zaměnili $|i\rangle$ dříve uvažovaným vektorem $|\alpha,\beta\rangle \in \mathcal{H}$, všechny výše naznačené potíže by okamžitě zmizely.

Dospíváme tak k vyjádření hledané pravděpodobnosti ve tvaru

$$
\begin{aligned}
dw_{i\to f} &= (2\pi)^7 \, \frac{\delta^{(3)}(\boldsymbol{P}=\boldsymbol{0})}{\||i\rangle\|^2}\, \delta^{(4)}(P_f - P_i)\, |T_{fi}|^2 \prod_{j=1}^{n_f} d^3\boldsymbol{p}_j' \\
&= \frac{(2\pi)^{7-3n_i}}{(2E_1)\cdots(2E_{n_i})}\, \frac{\delta^{(3)}(\boldsymbol{P}=\boldsymbol{0})}{\||i\rangle\|^2}\, \delta^{(4)}(P_f - P_i)\, |M_{fi}|^2 \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d^3\boldsymbol{p}_j'}{(2\pi)^3\, 2E_j'} .
\end{aligned}
\tag{5.80}
$$

K tomu, abychom pochopili, jak nakládat se zbývajícím problematickým faktorem

$$
\frac{\delta^{(3)}(\boldsymbol{P}=\boldsymbol{0})}{\||i\rangle\|^2}\,, \tag{5.81}
$$

je dobře si znovu připomenout, že pokud bychom počáteční stav popsali *normalizovatelným* vektorem $|\alpha,\beta\rangle$, potom by v analogickém vyjádření pro diskutovanou pravděpodobnost žádný takovýto (špatně definovaný) výraz nevystupoval. Navíc je zřejmé, že výsledek srážkových experimentů nemůže záviset na tom, zda celé experimentální zařízení umístíme do nějaké obrovské krychle, jejíž stěny jsou velice vzdáleny kterékoliv části experimentálního zařízení a přitom jsou pro všechny částice neprostupné. Při realistickém popisu tedy nemůže předpověď pravděpodobnosti odpovídajících srážkových procesů být prakticky jakkoliv ovlivněna tím, když částicím (formálně) znemožníme, aby se mohly dostat vně zmíněné krychle. Z matematického hlediska to znamená, že studovaný systém by přestal být invariantní vůči translacím, spektrum vlastních hodnot jednotlivých komponent impulsů by bylo diskrétní[26], a tedy odpovídající vlastní vektory by byly normalizovatelné. Výrazy typu

$$
\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{x}\, \exp\left(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right),
$$

v nichž integrace probíhá přes celý 3-rozměrný euklidovský prostor, by pak byly nahrazeny (pro diskrétní vlastní hodnoty impulsu) veličinami definovanými analogickým výrazem, v němž však integrace probíhá pouze přes objem V zmíněné krychle. Tedy speciálně

$$
\delta^{(3)}(\boldsymbol{0}) \to \frac{V}{(2\pi)^3}\,. \tag{5.82}
$$

[26] Ovšem velice "husté": vzdálenost mezi sousedními vlastními hodnotami by byla $2\pi/L$, kde L je délka hrany zmíněné krychle.

Z výše uvedeného je přitom zřejmé, že počínaje nějakým dostatečně velkým objemem V, veličiny měřitelné v uvažovaném srážkovém experimentu, již na velikosti V záviset nemohou, tj. musí mít hodnoty prakticky shodné s limitními odpovídajícími $V \to \infty$. Odkud se tedy bere problematický faktor (5.81), pokud je pravdou to, co jsme opakovaně zdůrazňovali, že totiž experimentálně měřené veličiny nemohou (prakticky) záviset na detailním průběhu funkce $g_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2')$ determinující normalizovatelný vektor $|\alpha, \beta\rangle$, jako superpozici vlastních vektorů impulsů. Pokud je totiž pravdou, že podstatnou je pouze skutečnost, že funkce $g_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2')$ prakticky vymizí všude mimo dostatečně malé okolí bodu $(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2') = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$, potom by hodnota měřitelných veličin vyplývající z naší analýzy měla být prakticky invariantní vůči záměně funkce $g_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2')$ jakoukoliv jinou funkcí, jejíž nezanedbatelné hodnoty jsou omezeny na ještě menší okolí zmíněného bodu. Proč by tedy limitní záměna

$$g_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2') \to \delta^{(3)}(\boldsymbol{p}_1' - \boldsymbol{p}_1)\, \delta^{(3)}(\boldsymbol{p}_2' - \boldsymbol{p}_2) \tag{5.83}$$

tj. $|\alpha, \beta\rangle \to |i\rangle$ měla vést k jakýmkoliv nepříjemnostem? Řešení tohoto paradoxu je ovšem zřejmé každému, kdo ví o Heisenbergových relacích neurčitosti. Nesmíme totiž zapomenout, že pro naše úvahy bylo podstatné i to, že v počátečním stavu interakce mezi částicemi nehrála prakticky žádnou roli, což ovšem vyžaduje, aby byly *lokalizovány* v oblastech od sebe dostatečně vzdálených. Lokalizace částice však vyžaduje, aby v tomto stavu byly s nezanedbatelnou vahou zastoupeny její impulsy z oblasti, jejíž rozměry rostou se zmenšující se oblastí lokalizace. Odtud plynoucí neurčitost v počátečních impulsech srážejících se částic je ovšem v reálných experimentálních podmínkách nesrovnatelně menší než neurčitost vyplývající z technické nedokonalosti zařízení, kterými částice ke srážce připravujeme. Právě proto se o ní většinou explicite vůbec nehovoří. Její existence však vysvětluje, proč nás úvaha opírající se o limitní proces mohla přivést k paradoxu.

Nyní, když jsme pochopili odkud problémy typu (5.81) pramení, již snadno nalezneme také recept, jak je obejít, aniž bychom byli pokaždé nuceni pracovat s příslušnými superpozicemi vlastních stavů impulsů: Problematické výrazy nahradíme veličinami, které by jim odpovídaly v případě, že by celý systém byl uzavřen v krychli. Pokud je tato krychle dostatečně velká, nemohou žádné relevantní fyzikální veličiny být její přítomností ovlivněny, a tedy jejich hodnota v případě, kdy zde žádná krychle neexistuje, musí být totožná s limitním případem, kdy objem krychle roste nade všechny meze. Díky tomu můžeme formuli (5.80) přepsat do tvaru

$$dw_{i\to f} = \frac{(2\pi)^{4-3n_i}}{(2E_1)\cdots(2E_{n_i})} \lim_{V\to\infty} \frac{V}{\||i_V\rangle\|^2}\, \delta^{(4)}(P_f - P_i)\, |M_{fi}|^2 \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d^3\boldsymbol{p}'_j}{(2\pi)^3\, 2E'_j}, \tag{5.84}$$

kde $|i_V\rangle$ je vektor odpovídající počátečnímu stavu v případě, že částice se zadanými impulsy jsou uzavřeny ve zmíněné krychli.[27]

5.1.1 Účinný průřez

Na základě poslední formule již snadno nalezneme vyjádření pro účinný průřez procesu

$$b + a \to 1 + \cdots + N\,, \tag{5.85}$$

v němž jsme písmen b, a použili ke specifikaci bombardující, resp. terčíkové částice, kdežto k označení částic přítomných po srážce jsme využili číslic. V tomto případě je

$$|i\rangle \equiv \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}_b, \xi_b, b)\, \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}_a, \xi_a, a)\, |0\rangle\,, \tag{5.86}$$

a tedy[28]

$$\begin{aligned} \||i\rangle\|^2 &\equiv \langle i\,|i\rangle = \langle 0|\,\hat{a}(a)\,\hat{a}(b)\,\hat{a}^\dagger(b)\,\hat{a}^\dagger(a)\,|0\rangle \\ &= \langle 0|\,\hat{a}(a)\left[\hat{a}(b), \hat{a}^\dagger(b)\right]_\mp \hat{a}^\dagger(a)\,|0\rangle \\ &= \delta^{(3)}(\boldsymbol{p}_a - \boldsymbol{p}_a)\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}_b - \boldsymbol{p}_b)\,, \end{aligned} \tag{5.87}$$

kde jsme k obdržení poslední rovnosti využili toho, že částice, které se mají srazit, nemohou mít stejnou rychlost. Po provedení záměny (5.82) dostáváme

$$\||i_V\rangle\|^2 = \frac{V^2}{(2\pi)^6}\,, \tag{5.88}$$

[27] U veličin, u nichž v limitě $V \to \infty$ nevzniká žádný problém, závislost na V nevyznačujeme, tj. uvádíme již jejich limitní hodnotu.

[28] Pokud nebude hrozit nebezpečí z nedorozumění, budeme v dalším často užívat co nejzhuštěnější symboliku, tak v následující formuli hodnoty proměnných specifikujících impuls, spinovou charakteristiku a druh částice shrnujeme pod písmeno přiřazené této částici, tj. např. $\boldsymbol{p}_b, \xi_b, b \to b$.

a tedy předpověď (5.84) lze v uvažovaném případě zapsat ve tvaru

$$dw_{i\to f} = \lim_{V\to\infty} \frac{(2\pi)^4}{4E_a E_b V} \left|M_{fi}\right|^2 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \prod_{j=1}^{N} \frac{d^3 \boldsymbol{p}'_j}{(2\pi)^3\, 2E'_j}\,. \tag{5.89}$$

Nalezený výsledek ovšem odpovídá situaci, kdy se v krychli o objemu V nachází právě jedna terčíková částice a právě jedna částice bombardující, a přitom žádné místo v krychli není preferované (tj. pravděpodobnost nalezení příslušné částice v nějaké části krychle je určována výhradně velikostí této části). Tomu odpovídající hodnotu intenzity bombardujících částic v *klidové soustavě částice terčíkové* tedy můžeme vyjádřit jako

$$I_b = \frac{v_b}{V}\,, \tag{5.90}$$

kde v_b je rychlost bombardující částice, tj.

$$v_b = \frac{|\boldsymbol{p}_b|}{E_b} \tag{5.91}$$

a E_b, $\boldsymbol{p}_b$ jsou energie, resp. impuls bombardující částice v této soustavě, kterou v dalším budeme pro stručnost nazývat soustavou *laboratorní* a označovat zkratkou Lab.[29] Uvážíme-li ještě, že v této soustavě je[30] $E_a = m_a$, potom na základě relace (5.3) můžeme formuli (5.89) vyjádřit v termínech účinného průřezu procesu (5.85) jako

$$d\sigma_{i\to f} = \frac{V}{v_b}\, dw_{i\to f} = \frac{(2\pi)^4}{4m_a\, |\boldsymbol{p}_b|} \left|M_{fi}\right|^2 \delta^{(4)}\left(p_a + p_b - \sum_{j=1}^{N} p'_j\right) \prod_{j=1}^{N} \frac{d^3 \boldsymbol{p}'_j}{(2\pi)^3\, 2E'_j}\,, \tag{5.92}$$

kde hodnoty všech veličin vystupujících na pravé straně se vztahují k laboratorní souřadné soustavě. Nalezený výsledek však snadno přepíšeme do tvaru, který na volbě inerciální soustavy nezávisí:

---

[29]Zdůrazněme však, že v současných vysokoenergetických experimentech studujících srážky mezi částicemi ze svazků collideru tato souřadná soustava *není* vůči laboratoři, v níž je měření prováděno v klidu!

[30]Symbol M budeme zpočátku rezervovat pro invariantní amplitudu. Proto zde hmoty částic značíme malými písmeny.

Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení z relativistické kinematiky, aby se přesvědčil, že velikost impulsu částice b v klidové soustavě částice a je dána vzorcem

$$|\boldsymbol{p}_b| = \frac{1}{m_a}\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} = \frac{1}{2m_a}\sqrt{\lambda\left(s, m_a^2, m_b^2\right)}, \tag{5.93}$$

v němž jsme užili standardního značení pro "trojúhelníkovou" funkci[31]

$$\begin{aligned} \lambda(x,y,z) &\equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz & (5.94)\\ &= \left[x - \left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2\right]\left[x - \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2\right] & (5.95) \end{aligned}$$

a standardního symbolu s pro kvadrát těžišťové energie, tj. v tomto případě

$$s \equiv (p_a + p_b)^2\,, \tag{5.96}$$

kde p_a, p_b jsou čtyřimpulsy uvažovaných částic.

Výsledek (5.92) tedy skutečně lze přepsat do manifestačně invariant-

[31] Pro tuto funkci se také často užívá termínu *Källénova kvadratická forma*.

ního tvaru[32]

$$d\sigma_{i\to f} = \frac{(2\pi)^4}{2\sqrt{\lambda\left(s, m_a^2, m_b^2\right)}} \left|M_{fi}\right|^2 \delta^{(4)}\left(p_a + p_b - \sum_{j=1}^{N} p_j'\right) \prod_{j=1}^{N} \frac{d^3\boldsymbol{p}_j'}{(2\pi)^3\, 2E_j'}\,. \tag{5.97}$$

Zbývající δ-funkce vystupující na pravé straně poslední formule již není zdrojem žádných problémů. Je pouhým vyjádřením toho, že díky zachování celkového impulsu a energie není (při libovolně pevně zadaných hodnotách těchto veličin) pro N částic kinematicky dostupný celý $3N$-rozměrný impulsový prostor, ale pouze jeho $(3N-4)$-rozměrná nadplocha, která je vymezena právě touto δ-funkcí. Její velikost se dnes většinou charakterizuje hodnotou N-částicového *relativisticky invari-*

[32]Není snad nutno připomínat, že výrok o nulovosti čtyřvektoru je nezávislý na zvolené inerciální soustavě, a pokud snad čtenář pochybuje o invariantnosti elementu $\frac{d^3\boldsymbol{p}}{2E}$ a nechce se mu počítat příslušný jacobián, stačí když si uvědomí, že pro libovolnou funkci $f\left(E, \boldsymbol{p}\right)$, kde $E \equiv \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2}$ platí

$$\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2E} f(E, \boldsymbol{p}) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2}} f(E, \boldsymbol{p}) = \int d^4p\, \theta(p^0)\, \delta(p^2 - M^2)\, f(p)\,,$$

což se většinou zapisuje jako formální identita

$$\frac{d^3\boldsymbol{p}}{2E} = d^4p\, \theta(p^0)\, \delta(p^2 - M^2)\,.$$

V předchozím jsme implicitně předpokládali, že alespoň jedna ze srážejících se částic má nenulovou hmotu. Jen díky tomu jsme při diskusi účinného průřezu mohli vyjít z klidové soustavy terčíkové částice, *v níž* jsme rychlost bombardující částice vyjádřili ve tvaru

$$v_b = \frac{\sqrt{\left(p_a \cdot p_b\right)^2 - m_a^2 m_b^2}}{E_a E_b}.$$

Ten ovšem udává správně velikost relativní rychlosti i v jejich *těžišťové soustavě* . Proto asi nikoho příliš nepřekvapí, že nalezený výsledek (5.97) zůstává v platnosti i tehdy, když obě srážející se částice jsou nehmotné.

antního fázového prostoru[33]

$$\mathrm{Lips}\,(s; m_1,..,m_N) \equiv \int d\,\mathrm{Lips}\,(s; p_1,..,p_N)\,, \tag{5.98}$$

kde

$$d\,\mathrm{Lips}\,(s; p_1,..,p_N) \equiv (2\pi)^4\,\delta^{(4)}\left(P - \sum_{j=1}^{N} p_j\right) \prod_{j=1}^{N} \frac{d^3\boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3\, 2E_j}\,, \tag{5.99}$$

integrace ve formuli (5.98) probíhá přes každou komponentu každého tříimpulsu v mezích $(-\infty, \infty)$ a s opět značí kvadrát celkové energie v CMS, tj.

$$s \equiv P^2. \tag{5.100}$$

Nejdetailnější informaci, kterou lze o konečném stavu procesu (5.85) podat, představují hodnoty impulsů a spinových charakteristik všech částic v něm vystupujících. Každému zaznamenanému výsledku[34] srážky, který v daném experimentu přivedl k procesu (5.85), tak odpovídá bod ve fázovém prostoru. Množina všech takovýchto bodů tvoří odpovídající *rozptylový diagram* (scatter plot). Jestliže jsou v koncovém stavu více než dvě částice, představuje takovýto "diagram" rozdělení bodů v $(3N-4) > 2$ -rozměrném prostoru, a pod termínem "rozptylový diagram" se pak mnohdy rozumí i jeho projekce na nějakou vhodně zvolenou rovinu.

Jestliže v rámci určitého modelu či teorie umíme určit kvadrát absolutní hodnoty invariantní amplitudy, můžeme "monte-carlovsky" vygenerovat odpovídající rozptylový diagram s tím, že pravděpodobnost

---

[33] Standardní označení Lips představuje zkratku termínu "Lorentz invariant phase space", který se v anglicky psané literatuře často užívá jako ekvivalentní alternativa termínu "relativistically invariant phase space". V zájmu stručnosti budeme v dalším v tomto výrazu často vynechávat označení "relativisticky invariantní".

Termínu "(N-částicový) fázový prostor" budeme (v souhlase se vžitou konvencí) užívat nejen pro uvedenou kvantitativní charakteristiku zmíněné nadplochy, ale i pro tuto nadplochu samotnou.

[34] V zájmu zjednodušení odhlížíme nejen od konečné rozlišovací schopnosti a efektivnosti reálných detekčních zařízení souvisejících s jejich technickou nedokonalostí, ale i od skutečnosti, že v případě impulsů nelze ani v principu provést ideálně přesné určení jejich hodnot.

případu spadajícího do (dostatečně malého) objemu $\triangle$Lips fázového prostoru je podle formule (5.97) úměrná veličině

$$\frac{d\sigma_{i\to f}}{d\text{Lips}}\triangle\text{Lips} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda\left(s, m_a^2, m_b^2\right)}}\left|M_{fi}\right|^2 \triangle\text{Lips}. \tag{5.101}$$

Konfrontace takto vygenerovaného rozptylového diagramu s diagramem zkonstruovaným z experimentálních dat představuje jeden z nejúčinnějších nástrojů k posouzení, do jaké míry ten který model či teorie odpovídá "realitě".

Při dostatečně velké integrální luminozitě[35] představuje veličina

$$L\,\frac{d\sigma_{i\to f}}{d\text{Lips}} \tag{5.102}$$

hustotu "zasídlení" fázového prostoru body odpovídajícími jednotlivým případům příslušného procesu. *Integrální účinný průřez* uvažovaného procesu je definován jako

$$\sigma_{i\to f}^{(int)} \equiv \frac{N_{i\to f}}{L}, \tag{5.103}$$

kde $N_{i\to f}$ je celkový počet případů těchto procesů, proběhlých v důsledku srážek, odpovídajících integrální luminozitě L. Mohlo by se proto zdát, že

$$\sigma_{i\to f}^{(int)} = \int \frac{d\sigma_{i\to f}}{d\,\text{Lips}}\,d\,\text{Lips}, \tag{5.104}$$

kde integrace probíhá přes celý fázový prostor. Ve skutečnosti je to pravda jedině tehdy, když všechny částice v koncovém stavu jsou navzájem *rozlišitelné.*

Abychom ilustrovali, jak je tato situace pozměněna přítomností několika identických částic v koncovém stavu, uvažujme produkci pionového páru při srážce pionu π^- s protonem:

$$\pi^- + p \to \pi^- + \pi^- + \pi^+ + p,$$

tj. proces (5.85), v němž $1 \equiv \pi^-$, $2 \equiv \pi^-$, $3 \equiv \pi^+$, $4 \equiv p$. Nechť v konkrétním případu tohoto procesu jsou u záporně nabitých pionů

[35] Z formálního hlediska bychom měli stále mluvit o limitě $L \to \infty$.

naměřeny impulsy $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$. Je zřejmé, že nemáme žádnou možnost, jak rozhodnout, zda mu máme v rozptylovém diagramu přiřadit bod odpovídající hodnotám $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}'$, či bod $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}$. Nejjednodušší východisko z této situace je přiřadit takovémuto případu body oba.[36] Odtud je již zřejmý obecný postup: Každému případu procesu (5.85) je přiřazeno

$$\prod_g N_g!$$

bodů fázového prostoru, kde N_g je počet navzájem nerozlišitelných částic druhu g v koncovém stavu. V obecném případě je tedy

$$\sigma_{i\to f}^{(int)} = \frac{1}{\prod_g N_g!} \int \frac{d\sigma_{i\to f}}{d\,\mathrm{Lips}}\, d\,\mathrm{Lips}. \tag{5.105}$$

Polohu bodu fázového prostoru lze určit udáním odpovídajících hodnot $(3N-4)$ vhodně zvolených reálných parametrů $\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_{(3N-4)}\right)$. Vyjádříme-li element fázového prostoru jako

$$d\,\mathrm{Lips} = f\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_{(3N-4)}\right) d\alpha_1 \cdots d\alpha_{(3N-4)}, \tag{5.106}$$

potom *diferenciální účinný průřez*

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{i\to f}}{d\alpha_1 \cdots d\alpha_{(3N-4)}} &= \frac{d\sigma_{i\to f}}{d\,\mathrm{Lips}} f\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_{(3N-4)}\right) \qquad (5.107)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda\left(s, m_a^2, m_b^2\right)}} \left|M_{fi}\right|^2 f\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_{(3N-4)}\right). \end{aligned}$$

S takovýmto "maximálně diferenciálním" účinným průřezem se v praxi setkáváme řidčeji než s různými diferenciálními průřezy "v méně proměnných", které z něho obdržíme integrací přes oblasti dostupných hodnot zbývajících proměnných.

Převážná většina experimentálních dat se doposud týká srážek nepolarizovaných částic a/nebo případů, u nichž nejsou v koncovém stavu určovány spinové charakteristiky částic. Odpovídající účinné průřezy

[36] Snadno se lze přesvědčit, že právě tomu odpovídá i interpretace výše diskutované veličiny $d\sigma_{i\to f}$, pokud mezi kreačními operátory generujícími vektor $|f\rangle$ z vakua se vyskytuje několik odpovídajících téže částici.

obdržíme z výše uvedených prostým vystředováním přes hodnoty spinových charakteristik nepolarizovaných částic v počátečním stavu a/nebo vysčítáním přes tyto hodnoty u těch částic v koncovém stavu, u nichž spinové charakteristiky neměříme. Formálně to vyžaduje pouze všude v předcházejících formulích provést prostou záměnu

$$|M_{fi}|^2 \to \left|\widetilde{M}_{fi}\right|^2 \equiv \sum |M_{fi}|^2 , \tag{5.108}$$

kde symbol $\sum$ představuje výše zmíněné středování a/nebo sčítání přes hodnoty odpovídajících spinových charakteristik.

Binární procesy

Abychom si učinili lepší představu o právě nalezených obecných výsledcích, věnujme se se jim trochu blíže v nejjednodušším případě, kdy srážka vede ke dvoučásticovému koncovému stavu. Odpovídající fázový prostor takovýchto binárních procesů je jen dvoudimenzionální. Jeho element nejsnáze vyjádříme v CMS:[37]

$$\begin{aligned} d\,\mathrm{Lips}\,(s;p_1,p_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{4E_1^*E_2^*}\,\delta\Big(\sqrt{s}-E_1^*-E_2^*\Big)\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}_1^*+\boldsymbol{p}_2^*)\,d^3\boldsymbol{p}_1^*d^3\boldsymbol{p}_2^* \\ &= \frac{1}{16\pi^2}\,\delta\Big(\sqrt{s}-E_1^*-E_2^*\Big)\,\frac{|\boldsymbol{p}_1^*|^2}{E_1^*E_2^*}d\,|\boldsymbol{p}_1^*|\,d\Omega^*, \end{aligned} \tag{5.109}$$

kde $d\Omega^*$ je element prostorového úhlu ve směru $\boldsymbol{p}_1^*$ a

$$E_j^* \equiv \sqrt{|\boldsymbol{p}_1^*|^2 + m_j^2}. \tag{5.110}$$

Odtud vidíme, že

$$d(E_1^* + E_2^*) = \left(\frac{1}{E_1^*} + \frac{1}{E_2^*}\right)|\boldsymbol{p}_1^*|\,d|\boldsymbol{p}_1^*|,$$

tj.

$$\frac{|\boldsymbol{p}_1^*|^2}{E_1^*E_2^*}\,d|\boldsymbol{p}_1^*| = \frac{|\boldsymbol{p}_1^*|}{E_1^*+E_2^*}\,d(E_1^*+E_2^*)\,. \tag{5.111}$$

[37] Při všech následujících úpravách samozřejmě mlčky rozumíme, že se jedná o výrazy, které jsou součástí integrálu přes proměnné, které v nich vystupují ve formě diferenciálů.

Dosazením do formule (5.109) tak dospíváme k hledanému výrazu

$$d\,\mathrm{Lips}\,(s; p_1, p_2) = \frac{1}{16\pi^2}\frac{|\boldsymbol{p}^*|}{\sqrt{s}}d\,\Omega^*, \tag{5.112}$$

v němž $|\boldsymbol{p}^*|$ je řešením rovnice

$$\sqrt{|\boldsymbol{p}^*|^2 + m_1^2} + \sqrt{|\boldsymbol{p}^*|^2 + m_2^2} = \sqrt{s}, \tag{5.113}$$

tj. představuje velikost impulsu každé z uvažovaných dvou částic.

Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení z relativistické kinematiky, aby se přesvědčil, že

$$|\boldsymbol{p}^*| = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{\lambda\left(s, m_1^2, m_2^2\right)} = \sqrt{\frac{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}{s}} \tag{5.114}$$

a

$$E_1^* = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, \qquad E_2^* = \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}}. \tag{5.115}$$

Na základě výsledku (5.112) můžeme diferenciální účinný průřez (5.108) v případě binárních procesů vyjádřit jako

$$\frac{d\sigma_{i\to f}}{d\Omega^*} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda\left(s, m_a^2, m_b^2\right)}}\left|M_{fi}\right|^2 \frac{1}{16\pi^2}\frac{\left|\boldsymbol{p}_f^*\right|}{\sqrt{s}}, \tag{5.116}$$

kde velikost impulsu každé z částic v koncovém stavu $\left|\boldsymbol{p}_f^*\right|$ je dána pravou stranou formule (5.114). Uvážíme-li, že velikost impulsu každé z částic v počátečním stavu ($\equiv |\boldsymbol{p}_i^*|$), obdržíme z $\left|\boldsymbol{p}_f^*\right|$ prostou záměnou $m_1^2, m_2^2 \to m_a^2, m_b^2$, můžeme poslední formuli přepsat do (snad nejužívanějšího) tvaru

$$\frac{d\sigma_{i\to f}}{d\Omega^*} = \frac{1}{64\pi^2 s}\frac{\left|\boldsymbol{p}_f^*\right|}{\left|\boldsymbol{p}_i^*\right|}\left|M_{fi}\right|^2, \tag{5.117}$$

který se v případě *pružného rozptylu* zjednoduší na

$$\frac{d\sigma_{i\to f}}{d\Omega^*} = \frac{1}{64\pi^2 s}\left|M_{fi}\right|^2. \tag{5.118}$$

Pokud všechny čtyři částice uvažovaného binárního procesu jsou *bezspinové*, potom studovaná úloha je invariantní vůči natočení kolem směru impulsu bombardující částice v CMS[38]. Zvolíme-li v tomto směru třetí souřadnou osu, potom účinný průřez nemůže záviset na hodnotě úhlu φ^*, a tedy formule (5.117) je *v tomto případě* ekvivalentní výrazu

$$\frac{d\sigma_{i\to f}}{d\cos\vartheta^*} = \frac{1}{32\pi s}\frac{\left|\boldsymbol{p}_f^*\right|}{\left|\boldsymbol{p}_i^*\right|}\left|M_{fi}\right|^2, \tag{5.119}$$

který snadno přepíšeme do tvaru nezávislého na souřadné soustavě:

Definujeme-li *kvadrát přeneseného (čtyř)impulsu* jako

$$\begin{aligned} t &\equiv (p_b - p_1)^2 \\ &= m_b^2 + m_1^2 - 2\left(E_b^* E_1^* - \left|\boldsymbol{p}_i^*\right|\left|\boldsymbol{p}_f^*\right|\cos\vartheta^*\right), \end{aligned} \tag{5.120}$$

potom

$$dt = 2\left|\boldsymbol{p}_i^*\right|\left|\boldsymbol{p}_f^*\right| d\cos\vartheta^*,$$

a tedy formule (5.119) je ekvivalentní s výrazem

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{i\to f}}{dt} &= \frac{1}{64\pi s}\frac{1}{\left|\boldsymbol{p}_i^*\right|^2}\left|M_{fi}\right|^2 \\ &= \frac{1}{64\pi}\frac{1}{\left[(p_a\cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2\right]}\left|M_{fi}\right|^2, \end{aligned} \tag{5.121}$$

kde jsme v poslední rovnosti využili vyjádření velikosti těžišťového impulsu ve tvaru (5.114).

Výsledky binárních procesů ze srážkových experimentů s pevným terčem se často prezentují udáním diferenciálních účinných průřezů podle energie částice 2 ($\equiv E_2$) v laboratorní soustavě, tj. v soustavě, v níž $p_a = \{m_a, \mathbf{0}\}$, $p_b = \{E_b, \boldsymbol{p}_b\}$. Díky zachování čtyřimpulsu je

$$\begin{aligned} t &\equiv (p_b - p_1)^2 = (p_a - p_2)^2 \\ &= m_a^2 + m_2^2 - 2m_a E_2, \end{aligned} \tag{5.122}$$

[38] Totéž je samozřejmě pravdou také v každé soustavě, která s CMS souvisí jakýmkoliv boostem podél této osy symetrie, tj. např. v klidové soustavě kterékoliv ze srážejících se částic.

a tedy

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{i\to f}}{dE_2} &= 2m_a \frac{d\sigma_{i\to f}}{dt} \\
&= \frac{2m_a}{64\pi s} \frac{1}{m_a^2 \left[E_b^2 - m_b^2\right]} \left|M_{fi}\right|^2 \\
&= \frac{1}{32\pi m_a \left|\boldsymbol{p}_b\right|^2} \left|M_{fi}\right|^2 , \qquad (5.123)
\end{aligned}$$

kde m_a je hmota terčíkové částice a $\boldsymbol{p}_b$ je impuls bombardující částice v Lab., jehož velikost je dána formulí (5.93).

Pokud mají některé částice vystupující ve studovaném procesu *nenulový spin*, ale srážející se částice jsou *nepolarizované a o spinové charakteristiky koncového stavu se nezajímáme*, potom odpovídající účinné průřezy jsou dány výrazy, které z formulí (5.119) – (5.123) obdržíme odpovídající záměnou (5.108).

5.1.2 Rozpad nestabilních částic

V předchozím jsme hovořili o srážce *dvou* částic. Projde-li si čtenář tuto diskusi znova, zjistí, že v ní bylo podstatné jen to, že
i) interakce mezi částicemi prakticky nijak neovlivňovala chování systému v čase $t_i \ll 0$,
ii) vliv této interakce se stal podstatným ("došlo ke srážce") až v době $t \simeq 0$.
Jinými slovy řečeno, formule (5.84) zůstává v platnosti i pro $n_i \neq 2$.

Případem $n_i \geq 3$ se zde blíže zabývat nebudeme (přestože hraje důležitou roli např. v astrofyzice). Podstatnější pro nás je, že uvedenou formuli lze využít i pro $n_i = 1$. Na první pohled se může zdát, že v tomto případě nelze dospět k ničemu jinému než k naprosto triviálnímu výsledku. Striktně vzato, v rámci dosud diskutovaného formalismu by tomu tak skutečně muselo být: Jestliže operátor $\hat{\mathsf{H}}_{(I)}$ popisuje interakci pouze *mezi* částicemi, potom operátor $\hat{\Omega}(t)$ působí na vektor odpovídající jakémukoliv jednočásticovému stavu jako operátor identity. Tedy v případě jednočásticových stavů není žádný rozdíl mezi *in-* a *out-*stavy, tj. operátor S-matice působí na jednočásticové stavy jako operátor identity - jinými slovy řečeno, v rámci dosud diskutovaného formalismu byla "částice" ex definitione částicí *stabilní*.

Z experimentu však víme, že v přírodě existují i *nestabilní* částice, tj. objekty, které se po určitou dobu chovají prakticky stejně jako stabilní částice, ale po uplynutí dostatečně dlouhé doby se rozpadnou. To ovšem znamená, že odpovídající systém se může nacházet ve *stavech*, které lze ve výše uvedeném smyslu interpretovat jako stavy jedné nestabilní částice. Jak rozpoznat, které vektory příslušného Hilbertova prostoru odpovídají takovýmto stavům? Místo toho, abychom se zde pokoušeli o hlubší analýzu této otázky, využijeme naší zkušenosti z nerelativistické kvantové mechaniky. Vztah mezi nestabilními a stabilními částicemi je totiž do značné míry analogický vztahu mezi kvazistacionárními a stacionárními stavy. Přitom v nerelativistické kvantové teorii jsme poznali, že označení "kvazistacionární stav" lze dát exaktní matematický smysl v termínech analytických vlastností elementů S-matice.[39] Podstatu problému však možno pochopit i bez hlubších znalostí z této oblasti. Měla by se stát zřejmou již z následujícího, téměř triviálního příkladu:

V rámci nerelativistické kvantové mechaniky uvažujme částici, která je v okamžiku t_i ve stavu popsaném (ve Schrödingerově reprezentaci) vlnovou funkcí

$$\psi(\boldsymbol{x}, t_i) = \psi(\boldsymbol{x}) \equiv \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right). \tag{5.124}$$

Pokud se tato částice nachází ve vnějším poli popsaném potenciální energií

$$V(r) = V_0(r) \equiv \frac{1}{2Ma^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2, \tag{5.125}$$

potom v tomto stavu zůstane navždy, neboť jde o její *stacionární* stav. Stačí si uvědomit, že se jedná o vlastní funkci operátoru

$$\hat{\mathsf{H}}_0 \equiv -\frac{1}{2M}\triangle + V_0(r) \tag{5.126}$$

odpovídající vlastní hodnotě

$$E_0 \equiv \frac{3}{2}\frac{1}{Ma^2}, \tag{5.127}$$

[39] Blíže viz Kapitolu 5.: Analytičnost v teorii rozptylu v [1].

a tedy popisující základní stav izotropního harmonického oscilátoru, jehož vlastní frekvence

$$\omega = \frac{1}{Ma^2}.$$

To mj. znamená, že v tomto *vázaném* stavu uvažovaná částice zůstává lokalizována v okolí počátku.[40]

Podívejme se, jak se tato situace změní, když potenciální energie popisující vliv vnějšího pole nemá tvar (5.125), ale

$$V(r) = V_0(r) + V_I(r)\,, \tag{5.128}$$

kde

$$V_I(r) \equiv [\exp(-\beta r) - 1]\, V_0(r)\,, \quad \beta > 0. \tag{5.129}$$

V principu je situace kvalitativně odlišná: V tomto případě je celé energetické spektrum spojité, a tedy (nezávisle na konkrétní hodnotě parametru β) neexistují žádné vázané stavy. Na druhé straně pokud je $\beta \ll 1/a$, potom je hodnota funkce $V_I(r)$ téměř zanedbatelná kdekoliv v oblasti lokalizace částice nacházející se ve stavu odpovídajícím vlnové funkci (5.124), tj. pro částici nacházející se ve zmíněném stavu "je téměř jedno", zda vnější pole na ni působící odpovídá potenciální energii (5.129), či (5.125). Z formálního hlediska je to způsobeno tím, že celá odlišnost časového vývoje stavu částice v uvažovaných případech spočívá pouze na přítomnosti, či nepřítomnosti členu $V_I(r)\,\psi(\boldsymbol{x},t)$ na pravé straně Schrödingerovy rovnice

$$i\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2M}\triangle + V(r)\right]\psi(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{5.130}$$

V případě $\beta \ll 1/a$ je však pro *všechny* hodnoty $\boldsymbol{x}$

$$|V_I(r)\,\psi(\boldsymbol{x})| \ll |V_0(r)\,\psi(\boldsymbol{x})|\,, \tag{5.131}$$

a tedy pro časy t nepříliš větší než t_i řešení rovnice (5.130) s počáteční podmínkou (5.124) bude prakticky nezávislé na tom, zda potenciální energie má tvar (5.125) nebo (5.128). Teprve pro $t \gg t_i$ se rozdíl stane

[40] Pravděpodobnost jejího nalezení kdekoliv v hloubi klasicky nedostupné oblasti (tj. ve vzdálenosti $r \gg a\sqrt{3}$) je nejen na čase nezávislá, ale také zanedbatelná.

podstatným - speciálně, pro dostatečně velké hodnoty t se v případě $V_I(r) \neq 0$ stane nezanedbatelnou pravděpodobnost nalezení částice *vně* počáteční oblasti lokalizace.

Naznačená časová závislost rozdělení pravděpodobnosti v případě $V_I(r) \neq 0$ je prostým důsledkem toho, že normalizovatelná vlnová funkce (5.124) není vlastní funkcí hamiltoniánu

$$\hat{\mathsf{H}} = \hat{\mathsf{H}}_0 + V_I. \tag{5.132}$$

Na druhé straně je zřejmé, že ji můžeme vyjádřit jako superpozici takovýchto vlastních funkcí:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int dE\, a(E)\, \psi_E(\boldsymbol{x}), \tag{5.133}$$

kde funkce $\psi_E(\boldsymbol{x})$ představují (k δ-funkci normalizovaná) řešení rovnice[41]

$$\hat{\mathsf{H}}\, \psi_E(\boldsymbol{x}) = E\psi_E(\boldsymbol{x}). \tag{5.134}$$

Snadno nahlédneme, že pokud je $\beta \ll 1/a$, potom k této superpozici přispívají převážně vlastní funkce, jejichž vlastní hodnoty E leží blízko k E_0, tj. funkce $a(E)$ prakticky vymizí všude vně malého okolí $\triangle E$ bodu E_0. Vlnovou funkci popisující stav částice v okamžiku t pak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{x}, t) &= \int dE\, a(E) \exp\{-iE\,(t - t_i)\}\, \psi_E\,(\boldsymbol{x}) \qquad (5.135) \\ &= \exp\{-iE_0 \triangle t\} \int dE\, a(E) \exp\{-i\,(E - E_0)\,\triangle t\}\, \psi_E(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

kde

$$\triangle t \equiv t - t_i. \tag{5.136}$$

Odtud vidíme, že pro

$$\triangle t \ll \frac{1}{\triangle E} \tag{5.137}$$

je

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) \simeq \exp\{-iE_0 \triangle t\}\, \psi(\boldsymbol{x}), \tag{5.138}$$

[41] V daném případě jsou tyto funkce současně vlastními funkcemi impulsmomentu příslušné k nulové vlastní hodnotě.

a tedy po dobu $\triangle t \ll \frac{1}{\triangle E}$ se stav popisovaný vlnovou funkcí (5.124) chová prakticky stejně jako vázaný stav s energií E_0.

Vraťme se však k otázce popisu rozpadu nestabilní částice. Jestliže pod operátorem $\hat{\mathsf{H}}$ ve formuli (4.332) nadále rozumíme generátor časových translací v reprezentaci Poincaréovy grupy realizované operátory $\hat{\mathsf{U}}\,(\omega, a)$, které zprostředkovávají vztah mezi popisem téže skutečnosti z hlediska různých inerciálních soustav, a pod $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$ operátor, který by představoval generátor časových translací téže grupy v reprezentaci realizované operátory $\hat{\mathsf{U}}_{(0)}\,(\omega, a)$, které by mohly hrát analogickou roli ve světě, jehož dynamika by byla poněkud odlišná.[42] Význam operátoru $\hat{\mathsf{H}}_{(I)}$ se ovšem v tomto případě již nedá zredukovat na popis interakce *mezi* částicemi. Stav, který je jednočásticový z hlediska $\hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\omega, a)$, můžeme popsat vektorem

$$|\alpha\rangle = \int d^3\boldsymbol{p}\, g_\alpha(\boldsymbol{p})\, |\boldsymbol{p}, \xi, n\rangle\,, \tag{5.139}$$

který je vlastním vektorem operátoru

$$\hat{\mathsf{H}}^2_{(0)} - \hat{\boldsymbol{P}}^2 \tag{5.140}$$

příslušným k vlastní hodnotě m_0^2. Pokud funkce $g_\alpha(\boldsymbol{p})$ vymizí všude kromě nějakého malého okolí hodnoty $\boldsymbol{p}_0$, potom má v tomto stavu částice (prakticky) impuls $\boldsymbol{p}_0$ a třetí složku kovariantního spinu ξ. Pokud by byl tento vektor také vlastním vektorem operátoru

$$\hat{\mathsf{H}}^2 - \hat{\boldsymbol{P}}^2, \tag{5.141}$$

jednalo by se o částici stabilní. Jestliže představuje superpozici takovýchto vlastních stavů, k níž přispívají (prakticky jen) ty, jejichž vlastní hodnoty leží v rozmezí $(m \pm \Gamma)^2$, kde

$$\Gamma \ll m, \tag{5.142}$$

potom zřejmě popisuje částici nestabilní. Stačí si uvědomit, že v klidové soustavě (tj. pro $\boldsymbol{p}_0 = \mathbf{0}$) je uvedený výrok (prakticky) ekvivalentní tvrzení, že vektor $|\alpha\rangle$ představuje superpozici těch vlastních vektorů

[42] V takovémto světě by mj. neexistovaly nestabilní částice.

hamiltoniánu $\hat{\mathsf{H}}$, jejichž vlastní hodnoty spadají do intervalu $(m \pm \Gamma)$. Mohli bychom proto zopakovat podstatnou část úvah, které jsme provedli v souvislosti s kvantově mechanickými kvazistacionárními stavy.

Na druhé straně je dobře si uvědomit, že

i) operátor $\hat{\mathsf{S}}(t_f, t_i)$, definovaný formulí (5.13), není ničím jiným než evolučním operátorem v Diracově reprezentaci.[43] Formule (5.12) pak je pouhým speciálním případem vyjádření amplitudy pravděpodobnosti toho, že systém, který se v okamžiku t_i nacházel ve stavu popsaném (v tomto okamžiku t_i) v Diracově reprezentaci vektorem $|\psi\rangle$, bude v okamžiku t_f nalezen ve stavu popsaném (v tomto okamžiku t_f) v Diracově reprezentaci vektorem $|\varphi\rangle$ ve tvaru

$$\mathcal{A}_{\psi\to\varphi}(t_f, t_i) = \langle\varphi|\, \hat{\mathsf{S}}(t_f, t_i)\, |\psi\rangle\,. \tag{5.143}$$

ii) K jednoduché struktuře pravé strany formule (5.84) jsme dospěli díky tomu, že místo superpozice (5.69) vlastních vektorů operátoru $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$ popisující v Diracově reprezentaci v okamžiku t_i stav, ve kterém se studovaný systém v tomto okamžiku nacházel, jsme mohli pracovat s jediným z těchto vektorů ($\equiv |i\rangle$) a obdobnou superpozici vyjadřující vektor $|\alpha_1, \cdots, \alpha_N\rangle$ popisující v okamžiku t_f v Diracově reprezentaci stav, ve kterém náš systém v tomto okamžiku hledáme, opět nahradit jediným vlastním vektorem ($\equiv |f\rangle$) operátoru $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$.

Z uvedeného je zřejmé, že cestu vedoucí k formuli (5.84) můžeme téměř beze zbytku zopakovat, i když na jejím počátku nahradíme vektor (5.69) popisující v Diracově reprezentaci dvoučásticový počáteční stav vektorem (5.139) popisující stav jednočásticový a tak dospět k závěru, že formuli

$$dw_{i\to f} = \prod_{k=1}^{n_i} \frac{1}{(2\pi)^3\, 2E_k} \lim_{V\to\infty} \frac{V}{\||i_V\rangle\|^2} \left|M_{fi}\right|^2 d\mathrm{Lips}\left(s; p'_1, \ldots, p'_N\right) \tag{5.144}$$

lze využít i pro studium rozpadů nestabilních částic:[44]

$$a \to 1 + \cdots + N. \tag{5.145}$$

[43]Viz formuli (11.45) v [1]. Pro úplnost poznamenejme, že jako synonymum termínu "Diracova reprezentace" se užívá i "reprezentace interakční".

[44]Pečlivý čtenář jistě nepřehlédl, že bychom asi těžko hledali důvody, proč tentýž vektor (5.139) by měl pro každou dostatečně velkou hodnotu $-t_i$ reprezentovat v Diracově reprezentaci v okamžiku t_i stav odpovídající přítomnosti jedné nestabilní čás-

V tomto případě je ovšem $n_i = 1$ a

$$\left\| |i_V\rangle \right\|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} V, \tag{5.146}$$

a tedy

$$dw_{i\to f} = \frac{1}{2E_a} \left|M_{fi}\right|^2 d\mathrm{Lips}\left(m_a^2; p_1,..,p_N\right). \tag{5.147}$$

V klidové soustavě tato pravděpodobnost udává diferenciál *rozpadové šířky*

$$d\Gamma_{i\to f} = \frac{1}{2m_a} \left|M_{fi}\right|^2 d\mathrm{Lips}\left(m_a^2; p_1,..,p_N\right). \tag{5.148}$$

Tak např. v nejjednodušším případě, kdy v koncovém stavu jsou jen dvě částice, odtud s využitím formule (5.112) dostáváme

$$\frac{d\Gamma_{i\to f}}{d\Omega} = \frac{|\boldsymbol{p}|}{32\pi^2 m_a^2} \left|M_{fi}\right|^2, \tag{5.149}$$

kde $d\Omega$ je element prostorového úhlu ve směru impulsu $\boldsymbol{p}$ jednoho z produktů uvažovaného dvoučásticového rozpadu v klidové soustavě rozpadající se částice. Přitom z formulí (5.114),(5.95) již víme, že

$$|\boldsymbol{p}| = \frac{1}{2m_a}\sqrt{\left[m_a^2 - (m_1 + m_2)^2\right]\left[m_a^2 - (m_1 - m_2)^2\right]}. \tag{5.150}$$

Pro srovnání předpovědí teorie s experimentálními daty o rozpadu je role veličiny $d\Gamma_{i\to f}$ zcela analogická té, kterou hraje veličina $d\sigma_{i\to f}$ v případě srážek. Příslušné úvahy zde proto již nebudeme znovu opakovat. Omezíme se pouze na konstatování, že analogem integrálního účinného průřezu (5.105) je zde *parciální rozpadová šířka*

$$\Gamma_{i\to f} = \frac{1}{\prod_g N_g!} \int \frac{d\Gamma_{i\to f}}{d\,\mathrm{Lips}} \, d\,\mathrm{Lips} \tag{5.151}$$

---

tice. Po formální stránce to mj. znamená, že záměnu $\delta_T\left(P_f^0 - P_i^0\right) \to \delta\left(P_f^0 - P_i^0\right)$ nemůžeme provést tak bezstarostně jako dříve – nezapomeňme na diskusi před formulí (5.79). Podrobnější analýza však vede k závěru, že praktická aplikovatelnost formule (5.147) by mohla být ohrožena jen u takových procesů, u kterých by rozpadová šířka (5.152) nebyla podstatně menší než kterákoliv z energií charakterizujících příslušný proces. Takovýmito výjimečnými případy se však zde blíže zabývat nebudeme.

a analogem totálního účinného průřezu je *celková (rozpadová) šířka*

$$\Gamma_i \equiv \sum_f \Gamma_{i\to f}, \tag{5.152}$$

jejíž převrácená hodnota definuje *dobu života*[45]

$$\tau_i \equiv \frac{1}{\Gamma_i}. \tag{5.153}$$

5.1.3 Vlastnosti invariantních amplitud

V předchozím jsme poznali, jak lze v rámci libovolné relativistické kvantové teorie umožňující zkonstruovat invariantní amplitudy M_{fi} získat předpovědi experimentálně ověřitelné studiem srážek a rozpadů částic. Při zadaných částicích v počátečním a koncovém stavu představuje M_{fi} nějakou komplexní funkci impulsů a spinových charakteristik všech těchto částic. Její konkrétní tvar pochopitelně závisí na dynamice studovaného systému.[46] Na druhé straně je však třeba mít na paměti, že ani zdaleka ne každá komplexní funkce zmíněných proměnných může hrát úlohu invariantní amplitudy. Ukazuje se, že k tomu musí splňovat některé podmínky, a to *zcela nezávisle* na předpokladech o konkrétní dynamice. Experimentální ověřování toho, zda naměřená data nejsou s těmito podmínkami v rozporu, tak představují testování předpokladu, že relativistická kvantová teorie je teorií fyzikální.

Vedle těchto zcela obecných vlastností je účelné vyšetřovat důsledky případných dalších předpokladů, které sice již nemusí každá relativistická kvantová teorie splňovat, ale na druhé straně jsou takového charakteru, že nevymezují dynamiku příliš detailně. Jejich užitečnost vynikne zejména, když si uvědomíme, že v rámci konkrétní relativistické kvantové teorie exaktní nalezení invariantních amlitud zpravidla překračuje naše schopnosti.

[45] V posledních třech formulích je pod indexem $_i$ třeba rozumět symbol udávající nejen druh rozpadající se částice, ale i spinovou charakteristiku jejího počátečního stavu. Sumace ve formuli (5.152) pak probíhá přes všechny "rozpadové kanály", které zde rozumíme vymezené nejen vyjmenováním druhů částic v příslušném koncovém stavu, ale také zadáním jejich spinových charakteristik.

[46] V rámci zde diskutovaného formalismu to znamená (při zadaném operátoru $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$) závislost na konkrétní volbě operátoru $\hat{\mathsf{H}}_{(I)}$.

Naznačme si nejprve důsledky alespoň dvou požadavků, kterým musí každá relativistická kvantová teorie vyhovovat[47]:

Relativistická invariance

Požadavek relativistické invariance nás přivedl k formuli (5.46), díky níž musí platit

$$\langle f|\,\hat{\mathsf{S}}\,|i\rangle = \langle \Lambda f|\,\hat{\mathsf{S}}\,|\Lambda i\rangle\,, \tag{5.154}$$

kde

$$\begin{aligned} |\Lambda i\rangle &\equiv \hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda)\,|i\rangle\,, \\ |\Lambda f\rangle &\equiv \hat{\mathsf{U}}_{(0)}(\Lambda)\,|f\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.155}$$

Na základě relací (4.265), (4.266) a definicí (5.73),(5.75) obdržíme vztah (5.154) vyjádřený v termínech invariantních amplitud. Ve speciálním případě, kdy všechny částice v počátečním i koncovém stavu jsou bezspinové, tak dospějeme k závěru, že invariantní amplitudy musí být vyjádřitelné jako funkce všech možných nezávislých skalárních veličin, které lze zkonstruovat ze čtyřimpulsů jednotlivých částic.[48] Snadno zjistíme[49], že pokud součet počtu částic v počátečním a koncovém stavu je $N \geq 4$, potom existuje právě $3N - 10$ takovýchto nezávislých skalárů. Ve speciálním případě $N = 4$ se za ně často s výhodou volí dvě z *Mandelstamových proměnných*, kterým je věnován Doplněk B.

Unitarita

Zapíšeme-li operátor S-matice ve tvaru (5.68):

$$\hat{\mathsf{S}} = 1 - i\hat{\mathsf{T}},$$

[47] Dalším velice důležitým (a prakticky všeobecně přijímaným) požadavkem je respektování kauzality. Na tomto místě se však omezme pouze na konstatování, že tento požadavek se odráží ve vlastnostech "analytičnosti" invariantních amplitud (srov. Kap. 5 v [1]).

[48] Vyjádření důsledků relativistické invariance v termínech invariantních amplitud v obecném případě se zde blíže zabývat nebudeme. Omezme se pouze na konstatování, že jich lze využít např. k vyjádření těchto amplitud ve tvaru analogickém rozvoji amplitudy rozptylu podle parciálních vln, se kterým jsme se seznámili v nerelativistické kvantové mechanice. Připomeňme, že tam se jednalo o přímý důsledek invariance vůči natočení souřadné soustavy.

[49] Viz úlohu U.5.7.

potom požadavek unitarity (5.21), který můžeme ekvivalentně vyjádřit jako

$$\hat{\mathsf{S}}^\dagger\hat{\mathsf{S}} = \hat{\mathsf{S}}\hat{\mathsf{S}}^\dagger = 1, \tag{5.156}$$

v termínech operátoru $\hat{\mathsf{T}}$ představuje vztahy

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{T}} - \hat{\mathsf{T}}^\dagger &= -i\,\hat{\mathsf{T}}^\dagger\,\hat{\mathsf{T}},\\ \hat{\mathsf{T}} - \hat{\mathsf{T}}^\dagger &= -i\,\hat{\mathsf{T}}\,\hat{\mathsf{T}}^\dagger.\end{aligned} \tag{5.157}$$

Zapíšeme-li maticové elementy těchto operátorů mezi vektory odpovídajícími počátečnímu a koncovému stavu příslušného procesu ve tvaru (srov. (5.73))

$$\langle f|\,\hat{\mathsf{T}}\,|i\rangle = (2\pi)^4\,\delta^{(4)}(P_f - P_i)\,T_{fi}, \tag{5.158}$$

potom z posledních relací zjistíme, že musí platit

$$\begin{aligned}T_{fi} - T_{if}^* &= -i\,(2\pi)^4\int dn\,\delta^{(4)}\,(P_n - P_i)\,T_{nf}^*\,T_{ni}\,,\\ T_{fi} - T_{if}^* &= -i\,(2\pi)^4\int dn\,\delta^{(4)}\,(P_n - P_i)\,T_{fn}\,T_{in}^*\,.\end{aligned} \tag{5.159}$$

Přitom pod symbolickou integrací na pravé straně je třeba rozumět zkratku nejen pro sumaci a integraci, ale i pro zahrnutí všech výrazů s faktoriály tak, jak vystupují na pravé straně relace uzavřenosti (4.258). Jinými slovy řečeno, při odvozování posledních formulí jsme na pravé straně vztahů (5.157) tuto relaci uzavřenosti symbolicky zapsali jako

$$\begin{aligned}1 &= \int dn\,|n\rangle\langle n|\\ &\equiv \sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\frac{1}{n_1!\cdots n_N!}\\ &\quad \int d^3\boldsymbol{p}_1^{(1)}\cdots d^3\boldsymbol{p}_{n_1}^{(1)}\sum_{\xi_1^{(1)}\ldots\xi_{n_1}^{(1)}}\cdots\cdots\int d^3\boldsymbol{p}_1^{(N)}\cdots d^3\boldsymbol{p}_{n_N}^{(N)}\\ &\quad \sum_{\xi_1^{(N)}\ldots\xi_{n_N}^{(N)}}\left|\boldsymbol{p}_1^{(1)},\xi_1^{(1)};\cdots;\boldsymbol{p}_{n_N}^{(N)},\xi_{n_N}^{(N)}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{p}_1^{(1)},\xi_1^{(1)};\cdots;\boldsymbol{p}_{n_N}^{(N)},\xi_{n_N}^{(N)}\right|.\end{aligned} \tag{5.160}$$

Na základě definice (5.75) můžeme požadavky (5.159) ekvivalentně vyjádřit v termínech invariantních amplitud. Takto obdržené vztahy obvykle nazýváme *podmínkami unitarity* pro invariantní amplitudy. Je dobře si uvědomit, že se jedná o nelineární vztahy, kterým musí vyhovovat všechny funkce, které aspirují na úlohu invariantních amplitud. Na druhé straně bychom neměli přehlédnout, že nezávisle na tom, zda známe konkrétní tvar invariantních amplitud, poskytují tyto relace netriviální nástroj k testování kvantové teorie. Povšimněme si proto alespoň toho, že ve speciálním případě, kdy počáteční stav je identický se stavem koncovým, se formule (5.159) zjednoduší na

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Im}T_{ii} &= -(2\pi)^4 \int dn\, \delta^{(4)}(P_n - P_i)\, |T_{in}|^2 , \\ 2\,\mathrm{Im}T_{ii} &= -(2\pi)^4 \int dn\, \delta^{(4)}(P_n - P_i)\, |T_{ni}|^2 . \end{aligned} \tag{5.161}$$

Tyto relace musí platit zcela nezávisle na tom, kolik částic je přítomno v počátečním stavu. Zde se však věnujme pouze případu, kdy v počátečním stavu jsou právě dvě částice. Navíc, abychom se vyhnuli výrazům graficky málo přehledným, budeme na chvíli předpokládat existenci pouze jediného druhu částic. V takovém případě se čtenář jistě sám snadno přesvědčí, že druhou z posledních relací lze pomocí invariantních amplitud zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Im}M_{ii} = {} & -(2\pi)^4 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \prod_{j=1}^{N} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3\, 2E_j} \times \\ & \sum_{\xi_j=-s}^{s} \left| M_{\boldsymbol{p}_1\xi_1,\cdots,\boldsymbol{p}_N\xi_N\,;i} \right|^2 \delta^{(4)}\left(P_i - \sum_{j=1}^{N} p_j \right) . \end{aligned} \tag{5.162}$$

Porovnáním s formulemi (5.97),(5.105) vidíme, že zde na pravé straně vystupuje pro každou hodnotu N výraz

$$2\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}\, \sigma_{i\to N}^{(int)} , \tag{5.163}$$

kde m_a, m_b jsou hmoty částic v počátečním stavu a $\sigma_{i\to N}^{(int)}$ představuje integrální účinný průřez odpovídající všem případům, kdy po srážce částic z daného počátečního stavu $|i\rangle$ je v koncovém stavu právě N částic. Uvážíme-li, že (viz (5.114)), že

$$\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} = 2\,|\boldsymbol{p}_i^*|\,\sqrt{s} , \tag{5.164}$$

vidíme, že relace (5.162) se zjednoduší na vztah

$$\mathrm{Im} M_{ii} = -2\sqrt{s}\,|\boldsymbol{p}_i^*|\,\sigma_i^{(tot)}, \tag{5.165}$$

v němž $\sigma_i^{(tot)}$ je totální účinný průřez pro srážky uvažovaných částic z daného počátečního stavu $|i\rangle$. Obdržený výsledek není nic jiného než *optický teorém*, který známe již z nerelativistické teorie (viz zejména formuli (6.204) v [1]). Tam uvažovaná amplituda pružného rozptylu $f_{i,i}$ přitom souvisí se zde diskutovanou invariantní amplitudou vztahem

$$f_{i,i} = -\frac{1}{8\pi\sqrt{s}}\,M_{ii}\,. \tag{5.166}$$

Věnujme nyní trochu pozornosti několika transformacím, vůči nimž ta, či ona teorie může, ale nemusí být invariantní, tj. případné narušení odpovídající symetrie samo o sobě ještě nediskvalifikuje příslušnou teorii z role kandidáta na teorii fyzikální.

Vnitřní symetrie

i) Jednoparametrické lieovské grupy symetrie.

Z předcházející kapitoly víme, že generátor jakékoliv jednoparametrické grupy vnitřní symetrie je na Hilbertově prostoru uvažovaného fyzikálního systému reprezentován operátorem, který je identický s operátorem $\hat{\mathsf{Q}}$ odpovídajícím nějakému (zobecněnému) náboji. Ex definitione je tento náboj integrálem pohybu soustavy navzájem neinteragujících částic. Jestliže také interakce mezi částicemi je invariantní vůči této grupě, potom operátor $\hat{\mathsf{Q}}$ komutuje nejen s $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$, ale i s $\hat{\mathsf{H}}_{(I)}$, a tedy i s operátorem S-matice. Odtud okamžitě vidíme, že takovém případě mohou být nenulové pouze amplitudy těch procesů, u nichž hodnota odpovídajícího celkového náboje v koncovém stavu je stejná jako ve stavu počátečním[50].

Všechna existující experimentální data jsou v souladu s předpokladem, že úlohu takovéhoto zachovávajícího se náboje může vedle elektrického náboje hrát např. i baryonové číslo, leptonové číslo a celá řada dalších aditivních kvantových čísel. Existují ovšem i teorie, které předpovídají narušení zákonů zachování některých z nich. Pokud toto narušení je tak slabé, že předpovídaná pravděpodobnost procesů, které

[50]Nezapomeňme, že jde o aditivní kvantové číslo, tj. celkový náboj v daném N-částicovém stavu je roven součtu nábojů jednotlivých částic v něm vystupujících.

mohou probíhat jen díky němu, je tak malá, že není v rozporu s faktem, že tyto procesy nebyly dosud pozorovány[51], nelze takovéto teorie a priory zavrhnout.

Existují ovšem i takové zobecněné náboje, pro něž zákon zachování má jistě jen přibližnou platnost. Jim odpovídající generátor $\hat{Q}$ sice komutuje s "podstatnou částí" operátoru $\hat{H}_{(I)}$, ale nikoliv s tímto operátorem celým. O té části operátoru $\hat{H}_{(I)}$ (nebo o odpovídající interakci), která nekomutuje s operátorem $\hat{Q}$, pak říkáme, že *narušuje* diskutovanou symetrii. Tak např. *podivnost* (strangeness) je příkladem aditivního kvantového čísla, u něhož všechna experimentální data nasvědčují tomu, že k narušení jeho zákona zachování dochází pouze v důsledku slabých interakcí, tj. odpovídající generátor $\hat{Q}$ komutuje s tou částí operátoru $\hat{H}_{(I)}$, která popisuje silné a elektromagnetické interakce, kdežto s částí odpovídající interakcím slabým nekomutuje.

ii) Neabelovské lieovské grupy symetrie.
Z invariance vakua vůči grupě $\mathcal{G}$:

$$\hat{U}(g)\,|0\rangle = |0\rangle \qquad \text{pro } \forall g \in \mathcal{G} \tag{5.167}$$

a z relací (4.271) víme, že vektory popisující jednočásticové stavy (s daným impulsem a spinovou charakteristikou) představují bázi reprezentace grupy $\mathcal{G}$, která je realizována maticemi, jejichž elementy vystupují na pravé straně těchto relací. Vícečásticové stavy pak představují bázi prostoru direktního součinu takovýchto reprezentací. Tento direktní součin můžeme vyjádřit jako direktní součet ireducibilních reprezentací grupy $\mathcal{G}$. Pomocí Clebsch-Gordanových koeficientů grupy $\mathcal{G}$ pak lze vektory báze prostoru každé z těchto ireducibilních reprezentací vyjádřit v termínech příslušných vícečásticových stavů (et vice versa). Dokážeme-li nějaký operátor vyjádřit jako lineární kombinaci tenzorových operátorů grupy $\mathcal{G}$, potom při výpočtu jeho maticových elementů mezi vektory popisujícími stavy se zadanými částicemi můžeme s výhodou využívat odpovídající Wigner-Eckartův teorém.[52] Speciálně, je-li

[51]Může přitom jít i o takové procesy, jako jsou rozpady protonu, tj. o rozpady částice, o níž bezpečně víme, že její střední doba života je větší než 1.5×10^{25} let, tj. o patnáct řádů větší než stáří vesmíru.

[52]Blíže viz Doplněk L v [1].

$\mathcal{G}$ naznačenou grupou vnitřní symetrie, tj. jestliže operátory $\hat{\mathsf{U}}(g)$, pro $\forall g \in \mathcal{G}$ komutují nejen s $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$, ale i s $\hat{\mathsf{H}}_{(I)}$, potom operátor S-matice je z hlediska grupy $\mathcal{G}$ skalárním operátorem, a tedy W - E teorém pro něj nabývá nejjednoduššího tvaru.[53] Ilustrujme to na příkladu binárních hadronových procesů

$$h^{(1)}\left(t_3^{(1)}\right) + h^{(2)}\left(t_3^{(2)}\right) \to h^{(3)}\left(t_3^{(3)}\right) + h^{(4)}\left(t_3^{(4)}\right), \tag{5.168}$$

kde $h^{(j)}\left(t_3^{(j)}\right)$ je hadron z multipletu $H^{(j)}$, jehož třetí složka izospinu má hodnotu $t_3^{(j)}$. Jestliže zanedbáme vliv interakcí narušujících izospinovou invarianci[54], potom invariantní amplituda procesu (5.168) má z hlediska izospinové grupy $SU(2)$ strukturu

$$\left\langle t^{(4)}, t_3^{(4)}; H^{(4)}\right| \left\langle t^{(3)}, t_3^{(3)}; H^{(3)}\right| \hat{\mathsf{S}}(t=0, t_3=0) \left|t^{(1)}, t_3^{(1)}; H^{(1)}\right\rangle \left|t^{(2)}, t_3^{(2)}; H^{(2)}\right\rangle, \tag{5.169}$$

kde $t^{(j)}$ je izospin multipletu $H^{(j)}$. Na základě našich znalostí o "skládání impulsmomentů" přitom víme, že platí

$$\begin{aligned} &\left|t^{(1)}, t_3^{(1)}; H^{(1)}\right\rangle \left|t^{(2)}, t_3^{(2)}; H^{(2)}\right\rangle = \\ &\sum_{t=\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|}^{t^{(1)}+t^{(2)}} \left(t^{(1)}\, t^{(2)}\, t_3^{(1)}\, t_3^{(2)} \middle|\, t\, t_3^{(1)} + t_3^{(2)}\right) \left|t, t_3^{(2)} + t_3^{(2)}; H^{(1)}, H^{(2)}\right\rangle \end{aligned} \tag{5.170}$$

a obdobný rozvoj pro vektor odpovídající v maticovém elementu (5.169) koncovému stavu. Tedy tento maticový element může přepsat do tvaru

$$\sum_{t'=\left|t^{(3)}-t^{(4)}\right|}^{t^{(3)}+t^{(4)}} \sum_{t=\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|}^{t^{(1)}+t^{(2)}} \left(t^{(1)}\, t^{(2)}\, t_3^{(1)}\, t_3^{(2)} \middle|\, t\, t_3^{(1)} + t_3^{(2)}\right) \times$$

[53] Nepřehlédněme však, že W - E teorém lze využít při studiu elementů S-matice i tehdy, když operátor $\hat{\mathsf{S}}$ obsahuje komponenty představující (z hlediska grupy $\mathcal{G}$) tenzorové operátory nenulového řádu. Z dalšího bude zřejmé, že tak tomu bude tehdy, když operátory $\hat{\mathsf{U}}(g)$ sice s určitou částí operátoru $\hat{\mathsf{H}}_{(I)}$ nekomutují, ale tato část narušující symetrii $\mathcal{G}$ je natolik "malá", že ji lze považovat za poruchu. Pokud tuto poruchu dokážeme vyjádřit jako lineární kombinaci tenzorových operátorů grupy $\mathcal{G}$, potom totéž umíme pro operátor, kterým v daném řádu poruchové teorie aproximujeme operátor $\hat{\mathsf{S}}$. Této skutečnosti se v praxi bohatě využívá.

[54] Prakticky to znamená zanedbání vlivu existence slabých a elektromagnetických interakcí na proces (5.168).

$$\Big(t^{(3)}\, t^{(4)}\, t_3^{(3)}\, t_3^{(4)}\Big|\, t\, t_3^{(3)} + t_3^{(4)}\Big) \times$$
$$\Big\langle t', t_3^{(3)} + t_3^{(4)}; H^{(3)}, H^{(4)} \Big| \hat{\mathsf{S}}(0,0) \Big| t, t_3^{(1)} + t_3^{(2)}; H^{(1)}, H^{(2)} \Big\rangle . \quad (5.171)$$

Ale z W-E teorému víme,[55] že pro libovolný izoskalární operátor $\hat{\mathsf{A}}$ platí

$$\langle t', t_3'; a|\, \hat{\mathsf{A}}\, |t, t_3; b\rangle = \delta_{t,t'} \delta_{t_3,t_3'} A(t; a, b)\,, \qquad (5.172)$$

neboť

$$(0\, t\, 0\, t_3|\, t' t_3') \sim \delta_{t,t'} \delta_{t_3,t_3'}\,, \qquad (5.173)$$

a tedy invariantní amplitudy všech procesů (5.168), v nichž vystupují částice ze *zadaných* izomultipletů $H^{(1)}, \cdots, H^{(4)}$, je možno vyjádřit ve tvaru

$$\delta_{t_3^{(1)}+t_3^{(2)}, t_3^{(3)}+t_3^{(4)}} \sum_t \Big(t^{(1)}\, t^{(2)}\, t_3^{(1)}\, t_3^{(2)}\Big|\, t\, t_3^{(1)} + t_3^{(2)}\Big) \times$$
$$\Big(t^{(3)}\, t^{(4)}\, t_3^{(3)}\, t_3^{(4)}\Big|\, t\, t_3^{(3)} + t_3^{(4)}\Big) M\Big(t; H^{(1)}, \cdots, H^{(4)}\Big)\,, \quad (5.174)$$

kde suma probíhá přes průnik množin hodnot[56] $\Big\{\Big|t^{(1)} - t^{(2)}\Big|, \cdots, t^{(1)} + t^{(2)}\Big\}$ a $\Big\{\Big|t^{(3)} - t^{(4)}\Big|, \cdots, t^{(3)} + t^{(4)}\Big\}$.

Amplitudy $M\Big(t; H^{(1)}, \cdots, H^{(4)}\Big)$ samozřejmě závisejí na impulsech a spinových charakteristikách hadronů vystupujících v procesu (5.168), ale vůbec nezávisejí na třetích komponentách izospinu těchto hadronů. Počet hodnot celkového izospinu t, přes které se sčítá ve formuli (5.174), je zpravidla podstatně menší než počet procesů (5.168) při pevně zvolených izomultipletech $H^{(1)}, \cdots, H^{(4)}$. Vyjádření (5.174) pak vede k předpovědi netriviálních relací mezi amplitudami různých procesů, kterých se účastní hadrony patřící do pevně zvolených izomultipletů. Obdobné relace plynoucí z izospinové invariance i pro jiné než binární procesy již jistě čtenář dokáže odvodit sám. Několik konkrétních příkladů nalezne i mezi úlohami uvedenými na konci této kapitoly.

[55]Viz např. formuli (2.162) v [1].

[56]Pokud je tento průnik nulový, jsou uvažované procesy zakázány, tj. odpovídající invariantní amplitudy jsou rovny nule.

Diskrétní symetrie

i) Nábojová sdruženost

Pokud operátor nábojové sdruženosti $\hat{\mathsf{C}}$ komutuje nejen s hamiltoniánem navzájem neinteragujících částic $\hat{\mathsf{H}}_{(0)}$, ale také s operátorem $\hat{\mathsf{H}}_{(I)}$ popisujícím interakci mezi částicemi, mluvíme o C-invariantní teorii. V každé C-invariantní teorii proto operátor S-matice musí vyhovovat podmínce

$$\left[\hat{\mathsf{C}}, \hat{\mathsf{S}}\right] = 0, \tag{5.175}$$

která je (díky unitaritě operátoru $\hat{\mathsf{C}}$) ekvivalentní relaci

$$\hat{\mathsf{C}}^{\dagger}\hat{\mathsf{S}}\hat{\mathsf{C}} = \hat{\mathsf{S}}. \tag{5.176}$$

Tedy v libovolné C-invariantní teorii platí

$$\langle f|\, \hat{\mathsf{C}}^{\dagger}\hat{\mathsf{S}}\hat{\mathsf{C}}\, |i\rangle = \langle f|\, \hat{\mathsf{S}}\, |i\rangle\,. \tag{5.177}$$

Uvážíme-li, že hmoty částice a její antičástice jsou stejné, potom vidíme, že mezi invariantními amplitudami v každé C-invariantní teorii platí relace

$$M_{Cf,Ci} = \prod_{j=1}^{N_f} \left(\eta_{n_j}^{(C)}\right)^{*} \prod_{l=1}^{N_i} \eta_{n_l}^{(C)} M_{f,i}\,, \tag{5.178}$$

kde

$$\begin{aligned} i &\equiv \left\{n_1, \boldsymbol{p}_1, \xi_1; \ldots; n_{N_i}, \boldsymbol{p}_{N_i}, \xi_{N_i}\right\}, \\ f &\equiv \left\{n'_1, \boldsymbol{p}'_1, \xi'_1; \ldots; n'_{N_f}, \boldsymbol{p}'_{N_f}, \xi'_{N_f}\right\} \end{aligned} \tag{5.179}$$

a veličiny $n_l, \boldsymbol{p}_l, \xi_l$ určují postupně druh, impuls a spinovou charakteristiku[57] l-té částice počátečního stavu a $n'_j, \boldsymbol{p}'_j, \xi'_j$ hrají obdobnou úlohu pro j-tou částici stavu koncového. Přitom

$$\begin{aligned} Ci &\equiv \left\{\bar{n}_1, \boldsymbol{p}_1, \xi_1; \ldots; \bar{n}_{N_i}, \boldsymbol{p}_{N_i}, \xi_{N_i}\right\}, \\ Cf &\equiv \left\{\bar{n}'_1, \boldsymbol{p}'_1, \xi'_1; \ldots; \bar{n}'_{N_f}, \boldsymbol{p}'_{N_f}, \xi'_{N_f}\right\}. \end{aligned} \tag{5.180}$$

[57] Pod spinovou charakteristikou budeme v následujícím vždy rozumět třetí složku kovariantního spinu. Doporučujeme však čtenáři, aby všechny úvahy zopakoval také pro případ, kdy úlohu této charakteristiky hraje helicita.

Z relace (5.178) okamžitě plyne, že libovolná C-invariantní teorie předpovídá, že rychlosti přechodu každého pevně vybraného procesu a procesu, který se od něho liší pouze záměnou všech částic odpovídajícími antičásticemi, musí být stejné.

C-invariance může také některé procesy zakázat: Tak např. v případě, kdy všechny částice počátečního i koncového stavu jsou striktně neutrální (tj. identické se svými antičásticemi), je

$$Ci = i, \qquad Cf = f. \tag{5.181}$$

Odpovídající amplituda $M_{f,i}$ může tedy být nenulová pouze tehdy, když je roven $+1$ faktor násobící tuto amplitudu na pravé straně relace (5.178).V dalším uvidíme, že nábojová parita fotonu je rovna -1. V předchozím jsme již uvedli, že pro pion má tato parita hodnotu $+1$. Tedy C-invariance zakazuje rozpad mezonu π^0 na lichý počet fotonů. Tato předpověď je v naprostém souhlasu s experimentálními daty: Zatímco téměř 90% rozpadů π^0 probíhá kanálem

$$\pi^0 \to 2\gamma,$$

nikdy nebyl pozorován rozpad této částice na lichý počet fotonů. Přitom současná experimentální data dovolují tvrdit, že pravděpodobnost, že rozpad π^0 proběhne kanálem

$$\pi^0 \to 3\gamma\,,$$

je menší než 3.8×10^{-8}.[58]

Na druhé straně zdůrazněme, že invariance vůči nábojovému sdružení nemá univerzální platnost. Všechna dostupná experimentální data jsou v souladu s předpověďmi tzv. *standardního modelu.*[59] V jeho rámci

[58]Zde a v dalších obdobných výrocích je mlčky rozuměno, že jde o tvzení na úrovni věrohodnosti (confidence level) $CL = 90\%$.

[59]Standardním modelem zde (v souladu se současnou terminologií) rozumíme kvantovou chromodynamiku a Weinberg-Glashow-Salamův model popisující silné, respektive elektroslabé interakce. Prozatím jen uveďme, že v obou případech se jedná o neabelovské kalibrační kvantové teorie pole. Se základy kalibračních kvantových teorií se seznámíme až ve třetím díle této knihy. Se standardním modelem (nebo s jeho jednotlivými částmi) se pak čtenář může blíže seznámit např. v [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29] [30]. Studium této literatury by nemělo představovat vážnější problém nikomu, kdo úspěšně zvládnul látku pojednanou i ve zbývajících částech této učebnice.

popis silných a elektromagnetických interakcí respektuje C-invarianci, slabé interakce však tuto invarianci narušují (a to v jistém smyslu maximálně možným způsobem), tj. komutační relaci (5.175) a všechny důsledky z ní plynoucí můžeme využívat pouze v těch případech (případně s tou přesností), kdy vliv interakcí slabých lze považovat za zanedbatelný.

ii) Prostorová inverze

Při vyšetřování důsledků invariance vůči prostorové inverzi ($\equiv$ P-invariance) můžeme prakticky beze zbytku zopakovat kroky, které jsme provedli při diskusi C-invariance. Na základě komutační relace (5.53):

$$\left[\hat{\mathsf{P}},\hat{\mathsf{S}}\right] = 0 \tag{5.182}$$

tak nalezneme, že v libovolné P-invariantní ($\Leftrightarrow$ paritu zachovávající) teorii musí mezi předpovídanými hodnotami invariantních amplitud platit relace

$$M_{Pf,Pi} = \prod_{j=1}^{N_f} \left(\eta_{n_j}^{(P)}\right)^* \prod_{l=1}^{N_i} \eta_{n_l}^{(P)} M_{f,i} \,, \tag{5.183}$$

kde

$$\begin{aligned} Pi &\equiv \left\{n_1, -\boldsymbol{p}_1, \xi_1; \ldots; n_{N_i}, -\boldsymbol{p}_{N_i}, \xi_{N_i}\right\}, \\ Pf &\equiv \left\{n'_1, -\boldsymbol{p}'_1, \xi'_1; \ldots; n'_{N_f}, -\boldsymbol{p}'_{N_f}, \xi'_{N_f}\right\}. \end{aligned} \tag{5.184}$$

V relaci (5.183) (na rozdíl od relace (5.178)) vždy stojí na obou stranách hodnoty amplitudy *téhož* procesu odpovídající *různým* hodnotám kinematických proměnných, charakterizujícím jednotlivé částice počátečního a koncového stavu. Z této relace např. ihned vidíme, že P-invariance vylučuje, aby rychlost přechodu jakéhokoliv procesu mohla záviset na skalárním součinu impulsu kterékoliv z částic s vektorem určujícím orientaci spinu některé z částic (v klidové soustavě této částice).[60]

[60]Připomeňme, že právě experimentálním nalezením ([20]) korelace mezi směrem impulsu elektronů z β-rozpadu orientovaných jader ^{60}Co a polarizačním vektorem těchto jader (do hemisféry ve směru spinu ^{60}Co vyletuje méně elektronů než do hemisféry opačné) bylo nade vší pochybnost prokázáno, že P-invariance striktně platit nemůže.

Snadno nahlédneme, že vedle výše naznačené korelace mezi hodnotami invariantních amplitud pevně zvoleného procesu v různých částech fázového prostoru, může také P-invariance některé procesy zakázat: Tak např. žádná P-invariantní teorie nemůže být v souladu s rozpadem jakékoliv psedoskalární částice (tj. částice s nulovým spinem a paritou rovnou -1) na dvě částice skalární (tj. bezspinové částice s paritou $+1$). Skutečně, díky nulovosti spinu všech zúčastněných částic, může v uvažovaném případě invariantní amplituda záviset pouze na impulsech $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2$. Ze zákona zachování impulsu přitom víme, že

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 \,,$$

a tedy $M_{f,i}$ musí být možno vyjádřit jako funkci impulsů částic v koncovém stavu. Navíc, využijeme-li k tomuto vyjádření hodnoty zmíněných impulsů v klidové soustavě rozpadající se částice (tj. soustavě, v níž $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{0}$, a tedy $\boldsymbol{p}'_1 = -\boldsymbol{p}'_2$), potom z rotační invariance plyne, že $M_{f,i}$ může záviset pouze na $|\boldsymbol{p}'_1|$, což je veličina invariantní vůči záměně $\boldsymbol{p}'_j \to -\boldsymbol{p}'_j$. Na druhé straně faktor stojící na pravé straně relace (5.183) před amplitudou $M_{f,i}$ je v uvažovaném případě roven (-1), a tedy tuto relaci lze splnit jedině tehdy, když invariantní amplituda vymizí.[61]

Nakonec poznamenejme, že v rámci standardního modelu popis silných a elektromagnetických interakcí respektuje P-invarianci, kdežto slabé interakce ji narušují (a to v jistém smyslu maximálně možným způsobem), tj. komutační relaci (5.182) a všechny důsledky z ní plynoucí můžeme využívat pouze v těch případech (případně s tou přesností), kdy vliv interakcí slabých lze považovat za zanedbatelný.

iii) Časová inverze

Postupem, který nás při vyšetřování důsledků invariance vůči časové inverzi ($\equiv$ T-invariance), tj. důsledků platnosti komutačních relací (5.61):

$$\left[\hat{\mathsf{T}}, \hat{\mathsf{H}}_{(0)}\right] = \left[\hat{\mathsf{T}}, \hat{\mathsf{H}}_{(I)}\right] = 0, \tag{5.185}$$

přivedl k formuli (5.67), snadno zjistíme, že v každé T-invariantní teorii musí invariantní amplitudy vyhovovat vztahům

$$M_{Ti,Tf} = \prod_{j=1}^{N_f} (-1)^{s'_j - \xi'_j} \left(\eta^{(T)}_{n'_j}\right)^* \prod_{l=1}^{N_i} (-1)^{s_l - \xi_l} \, \eta^{(T)}_{n_l} M_{f,i} \,, \tag{5.186}$$

[61] Viz též úlohu U.5.11.

kde s, s' značí velikost spinu příslušné částice a

$$\begin{aligned} Ti &\equiv \left\{n_1, -\boldsymbol{p}_1, -\xi_1; \ldots; n_{N_i}, -\boldsymbol{p}_{N_i}, -\xi_{N_i}\right\}, \\ Tf &\equiv \left\{n'_1, -\boldsymbol{p}'_1, -\xi'_1; \ldots; n'_{N_f}, -\boldsymbol{p}'_{N_f}, -\xi'_{N_f}\right\}. \end{aligned} \tag{5.187}$$

Vyjádření důsledků T-invariance v termínech rychlostí přechodu nesouvisí s relacemi (5.186) tak přímočaře jako v dříve uvažovaných případech C- a P-invariance. Nesmíme totiž zapomenout, že v relaci (5.186) si vyměnily roli počáteční (koncový) stav s časově invertovaným koncovým (počátečním) stavem, a tedy ve výrazech (5.84) pro rychlosti přechodu odpovídajících dvou procesů vystupují také *různé* faktory násobící kvadrát absolutní hodnoty invariantní amplitudy příslušného procesu.

Podle standardního modelu je T-invariance narušena, a to opět pouze slabými interakcemi, a přitom k tomu, aby nedošlo ke konfliktu s experimentálními daty, je nezbytné, aby toto narušení bylo nenulové, ale *mnohem menší* než dříve zmíněné narušení P-, resp. C-invariance.

iv) CPT

Ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení, aby nalezl relace, kterým musí vyhovovat invariantní amplitudy spočtené v rámci libovolné teorie, která sice není invariantní ani vůči C, ani vůči P separátně, ale je invariantní vůči CP, tj. v teorii, ve které sice je

$$\left[\hat{\mathsf{C}}, \hat{\mathsf{S}}\right] \neq 0, \qquad \left[\hat{\mathsf{P}}, \hat{\mathsf{S}}\right] \neq 0, \tag{5.188}$$

ale přitom platí

$$\left[\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{P}}, \hat{\mathsf{S}}\right] = 0. \tag{5.189}$$

Podobně může vyšetřit i důsledky invariance vůči ostatním "kombinovaným transformacím": CT a PT. V dalším uvidíme, že jakkoliv není nijak obtížné zkonstruovat[62] velice uspokojivé relativistické kvantové teorie, které nejsou invariantní nejen vůči žádné z transformací C, P, T separátně, ale ani vůči žádné kombinaci jejich *dvojic*[63], nikdo nedokázal nalézt uspokojivou relativistickou kvantovou teorii, která by nebyla

[62] Poznámka pro experty: Zde máme samozřejmě na mysli konstrukce teorie pouze v pragmatickém smyslu, tj. konstrukce umožňující např. poruchové výpočty.

[63] Takovou teorii představuje také citovaný standardní model.

invariantní vůči kombinované transformaci realizované postupným provedením (v jakémkoliv pořadí) všech *tří* transformací CPT.[64]

Postupem, který nás přivedl k relacím (5.178), resp. (5.183), resp. (5.186) jako důsledkům komutačních relací (5.175), resp. (5.182), resp. (5.185), snadno nalezneme, že pokud v nějaké teorii platí

$$\left[\hat{\Theta}, \hat{H}_{(0)}\right] = \left[\hat{\Theta}, \hat{H}_{(I)}\right] = 0, \tag{5.190}$$

kde operátor $\hat{\Theta}$ představuje součin operátorů $\hat{C}$, $\hat{P}$, $\hat{T}$ v jakémkoliv (pevně zvoleném) pořadí, potom v jejím rámci spočtené invariantní amplitudy musí splňovat relace

$$M_{\Theta i,\Theta f} = \exp\left\{\alpha_\Theta(i,f)\right\} M_{f,i}\,, \tag{5.191}$$

kde

$$\begin{aligned} \Theta i &\equiv \left\{\bar{n}_1, \boldsymbol{p}_1, -\xi_1; \ldots; \bar{n}_{N_i}, \boldsymbol{p}_{N_i}, -\xi_{N_i}\right\}, \\ \Theta f &\equiv \left\{\bar{n}'_1, \boldsymbol{p}'_1, -\xi'_1; \ldots; \bar{n}'_{N_f}, \boldsymbol{p}'_{N_f}, -\xi'_{N_f}\right\} \end{aligned} \tag{5.192}$$

a fáze

$$\alpha_\Theta(i,f) = \alpha^*_\Theta(i,f) \tag{5.193}$$

je jednoznačně určena spinovými charakteristikami a paritami $\eta^{(C)}$, $\eta^{(P)}$, $\eta^{(T)}$ každé z částic v počátečním a koncovém stavu. Přitom pokud je $i = f$, potom je vždy

$$\exp\left\{\alpha_\Theta(i,i)\right\} = 1,$$

tj. relace (5.191) se zjednoduší na

$$M_{\Theta i,\Theta i} = M_{i,i} \tag{5.194}$$

Pokud $|i\rangle$ představuje dvoučásticový stav, potom odtud, díky optickému teorému, plyne, že CPT-invariance zajišťuje rovnost totálního

[64]Teprve až se (v druhém díle této knihy) seznámíme s tzv. CPT-teorémem, pochopíme, že vůbec nejde o náhodu nebo o malou invenci "konstruktérů" relativistických kvantových teorií.

účinného průřezu srážek mezi částicemi, z nichž každá má zadanou hodnotu třetí komponenty kovariantního spinu, a totálního účinného průřezu srážek (při téže energii) mezi odpovídajícími antičásticemi s opačnými hodnotami třetí složky kovariantního spinu. Speciálně pak odtud vidíme, že podle libovolné CPT-invariantní teorie totální účinný průřez srážek mezi nepolarizovanými částicemi musí mít stejnou hodnotu jako totální účinný průřez srážek mezi odpovídajícími nepolarizovanými antičásticemi.

Podobně, jestliže $|i\rangle$ je stavem jednočásticovým, potom relace (5.194) v kombinaci s relacemi (5.162) a (5.148) – (5.153) zajišťuje, že doba života částice se zadanou hodnotou třetí složky kovariantního spinu musí být stejná jako doba života odpovídající antičástice s opačnou hodnotou třetí složky kovariantního spinu. Z rotační invariance však plyne, že doba života částice nemůže záviset na orientaci jejího spinu v její klidové soustavě. Odtud vidíme, že CPT-invariance zaručuje tutéž dobu života pro částici jako pro její antičástici.

Není snad nutno zdůrazňovat, že standardní model je CPT-invariantní a že žádná analýza experimentálních dat dosud nenalezla jakoukoliv indikaci, která by signalizovala narušení CPT-symetrie.

5.2 Úlohy

U.5.1. Ve svazcích collideru jsou částice většinou soustředěny do shluků. V závislosti na typu zařízení a druhu částic se počet takovýchto shluků obíhajících v prstenci[65] pohybuje od jednoho až po několik tisíc. V každém z těchto shluků je obvykle řádově kolem $10^{10} \div 10^{11}$ částic. Jejich laboratorní rychlost se jen velice málo liší od rychlosti světla[66] – pro zjednodušení tuto odchylku zde zanedbávejte.
A. Ukažte, že
i) průchodem dvou proti sobě se pohybujících shluků částic a a b dojde

[65] Pro zjednodušení vyjadřování z našich úvah vynecháváme collidery lineární.
[66] Tak např. pro laboratorní rychlost v elektronu s energií $E \simeq 87\,GeV$ (což odpovídá collideru LEP) z relace $1 - v^2 = (m/E)^2$ dostáváme $1 - v^2 \simeq 2(1-v) \simeq \left(\frac{0.5\,MeV}{87\times 10^3\,MeV}\right)^2$, tj. $(1-v) \simeq 1.7 \times 10^{-11}$.

k "vytvoření" integrální luminozity

$$L = \frac{n_a n_b}{S_{eff}},$$

kde

$$S_{eff} \equiv \int dx dy \rho_b^{(2)}(x,y)\, \rho_b^{(2)}(x,y)$$

a $n_{a,b}$, $\rho_{b,b}^{(2)}$ je počet částic, resp. příčný profil (tj. k jednotce normalizované rozdělení částic v rovině kolmé ke směru pohybu) příslušného shluku.
ii) V případě kruhových gaussovských příčných profilů je

$$S_{eff} = 4\pi R^2 \exp\frac{\Delta^2}{4R^2},$$

kde

$$R^2 \equiv \frac{1}{2}\left(R_a^2 + R_b^2\right),$$

kde $R_{a,b}$ je střední kvadratický poloměr příslušného shluku a Δ je vzdálenost mezi jejich podélnými (tj. paralelními se směrem svazku) osami.
B. Nechť v jednoprstencovém collideru je po obvodu prstence rovnoměrně rozloženo N_- shluků elektronů a N_+ shluků pozitronů. Nechť poměr N_-/N_+ je celým číslem (shluky e^-, e^+ se tedy vzájemně střetávají na $2N_-$ místech $\equiv$ interakčních oblastech). Ukažte, že v *každé* z interakčních oblastí dochází každou sekundu ke generování luminozity

$$\mathcal{L} = \frac{2I_+ I_-}{e^2 N_- f S_{eff}},$$

kde I_+ (I_-) je ta část elektrického proudu v prstenci, která je nesena pozitrony (elektrony), e je elementární náboj a f je frekvence oběhu, tj. prakticky $f = 1/D$, kde D je obvod prstence.
C. Nechť v dvouprstencovém collideru jsou svazky e^-, e^+ po obvodu prstenců rozděleny rovnoměrně (tj. nejsou soustředěny do shluků) a nechť v interakční oblasti vůči sobě svírají tupý úhel $\pi - \alpha$, kde $\alpha \neq 0$. Ukažte, že potom
i) v interakční oblasti dochází každou sekundu ke generování luminozity

$$\mathcal{L} = \frac{I_+ I_-}{e^2 h_{eff} \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

kde efektivní výška svazků h_{eff} je definovaná vztahem

$$h_{eff}^{-1} \equiv \int dy \rho_{+}^{(1)}(y)\, \rho_{-}^{(1)}(y)\,,$$

v němž

$$\rho_{\pm}^{(1)}(y) \equiv \int dx \rho_{\pm}^{(2)}(x, y)$$

představuje *vertikální*[67] *profil* (tj. k jednotce normalizované rozdělení intenzity) příslušného svazku.

ii) V případě kruhových gaussovských příčných profilů je

$$h_{eff} = \sqrt{\pi}\, h \exp \frac{\delta^2}{h^2},$$

kde δ udává, o kolik jsou svazky navzájem posunuty v horizontálním směru a

$$h^2 \equiv \frac{1}{2}\left(h_{+}^2 + h_{-}^2\right),$$

kde $h_{\pm}$ je střední kvadratická výška příslušného svazku.

U.5.2. Ukažte, že velikost relativní rychlosti mezi částicemi a, b

$$v_{ab} \equiv |\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_b|$$

je v libovolné inerciální soustavě dána vzorcem

$$v_{ab} = \frac{1}{2E_a E_b}\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2) + 4\boldsymbol{p}_a^2 \boldsymbol{p}_b^2 \sin^2 \vartheta}$$

kde E_j a $\boldsymbol{p}_j$, resp. ϑ udává energii a impuls částice j, resp. úhel svíraný impulsy zmíněných částic v uvažované soustavě.

Povšimněte si, že (podle teorie relativity) relativní rychlost

i) *není* veličinou invariantní,

ii) v každé soustavě, v níž jsou impulsy obou částic paralelní nebo antiparalelní[68], relativní rychlost v_{ab} souvisí s invariantem $\lambda(s, m_a^2, m_b^2)$ jednoduchým vztahem

$$v_{ab} = \frac{1}{2E_a E_b}\sqrt{\lambda\left(s, m_a^2, m_b^2\right)} = \frac{1}{E_a E_b}\sqrt{(p_a \cdot p_b) - m_a^2 m_b^2}\,.$$

[67]Předpokládáme, že oba svazky leží v horizontální rovině, což odpovídá standardnímu experimentálnímu uspořádání. Druhou souřadnou osu volíme kolmo na tuto rovinu.

[68]Tak tomu je mj. v jejich CMS a v klidové soustavě kterékoliv z nich.

Nepřehlédněte, že velikost této "rychlosti" není omezena rychlostí světla, ale jejím dvojnásobkem.

U.5.3. Uvažujte dvě částice o hmotách m_1, m_2. Ukažte, že energii každé z nich v jejich CMS lze vyjádřit ve tvaru

$$E_j^* = \frac{s + m_j^2 - m_k^2}{2\sqrt{s}}, \qquad j \neq k = 1, 2.$$

Uvažujte souřadnou soustavu, která se vůči CMS pohybuje proti směru jednotkového vektoru $\boldsymbol{n}^*$ takovou rychlostí, že celkový impuls diskutované dvojice částic má v této soustavě velikost $|\boldsymbol{P}|$. Ukažte, že energii první částice v této soustavě lze zapsat jako

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[E_1^* \sqrt{s + \boldsymbol{P}^2} + |\boldsymbol{P}| \left(\boldsymbol{p}_1^* \cdot \boldsymbol{n}^* \right) \right].$$

Využijte tohoto výsledku k odvození elementu dvoučásticového fázového prostoru ve tvaru

$$d\,\mathrm{Lips}\,(s; p_1, p_2) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{|\boldsymbol{P}|}\, d\varphi\, dE_1, \tag{5.195}$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je polární úhel vektoru $\boldsymbol{p}_1$ v rovině kolmé k celkovému impulsu $\boldsymbol{P}$. Ukažte, že energie E_1 probíhá (nezávisle na velikosti úhlu φ) všechny hodnoty z intervalu $\langle E_{1\,\mathrm{min}}, E_{1\,\mathrm{max}} \rangle$, kde

$$E_{1\,{}^{\mathrm{max}}_{\mathrm{min}}} = \frac{1}{2s} \left[\left(s + m_1^2 - m_2^2 \right) \sqrt{s + \boldsymbol{P}^2} \pm |\boldsymbol{P}| \sqrt{\lambda\left(s, m_1^2, m_2^2\right)} \right].$$

Povšimněte si, že

$$\frac{d\mathrm{Lips}}{d\varphi dE_1}$$

je v celém fázovém prostoru konstantní.

Na základě obdržených výsledků odvoďte výraz (5.123) pro diferenciální účinný průřez.

U.5.4. Zdůvodněte, proč ve vyjádření elementu tříčásticového fázového prostoru lze užít identitu

$$\delta^{(4)}\left(P - \sum_{j=1}^{3} p_j \right) = \delta^{(4)}(P - P_{12} - p_3)\, \delta^{(4)}\left(P_{12} - \sum_{k=1}^{2} p_k \right) \Theta\left(P_{12}^0\right) d^4 P_{12}$$

a na jejím základě ukažte, že

$$dLips(s; p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2\pi} dLips(s; P_{12}, p_3)\, dLips(s_{12}; p_1, p_2)\, ds_{12},$$

kde

$$\begin{aligned} P_{12} &\equiv p_1 + p_2, \\ s_{12} &\equiv (P_{12})^2, \end{aligned}$$

tj. s_{12} je kvadrát celkové energie prvních dvou částic v *jejich* (tj. dvoučásticové) těžišťové soustavě ($\equiv$ CMS12).
Díky formuli (5.112) tedy platí

$$dLips(s; p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{|\boldsymbol{p}_3^*|}{\sqrt{s}}\, d\Omega_3^* \frac{|\boldsymbol{p}_1^{**}|}{\sqrt{s_{12}}}\, d\Omega_1^{**} ds_{12},$$

kde jsme dvěma hvězdičkami označili veličiny vztažené k CMS12.
Uvědomíte-li si, že celkový impuls prvních dvou částic v CMS je

$$\boldsymbol{P}_{12}^* = -\boldsymbol{p}_3^*,$$

potom již jistě bez potíží dokážete převést předcházející formuli do tvaru

$$d\,\text{Lips}(s; p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{(4\pi)^5} \frac{1}{s}\, ds_{12} ds_{23} d\Omega_3^* d\varphi,$$

v němž

$$s_{23} \equiv (p_2 + p_3)^2$$

a φ je polární úhel vektoru $\boldsymbol{p}_1^*$ v rovině kolmé na vektor $\boldsymbol{p}_3^*$.
Povšimněte si, že

$$\frac{dLips}{ds_{12} ds_{23} d\Omega_3^* d\varphi}$$

je v celém fázovém prostoru konstantní.[69]

[69]Rozdělení tříčásticových případů v závislosti na proměnných s_{12}, s_{23} (tj. na kvadrátech celkové energie příslušné dvojice částic v *jejich* těžišťové soustavě) tvoří tzv. *Dalitzův diagram*, který představuje velice účinný nástroj k fenomenologickému studiu procesů vedoucích k tříčásticovým stavům: Povšimněme si, že pokud příslušná invariantní amplituda na proměnných s_{12}, s_{23} nezávisí, potom hustota bodů odpovídajících jednotlivým případům je v celé kinematicky dostupné části Dalitzova diagramu všude stejná. Proto např. koncentrace případů kolem nějaké z hodnot proměnné s_{12} může být interpretována jako signál, že studovaný proces "probíhá přes dvoučásticový stav", v němž vedle částice 3 figuruje nestabilní částice (s hmotou rovnou $\sqrt{s_{12}}$), která se následně rozpadla na částice 1 a 2.

U.5.5. Ukažte, že množina kinematicky dostupných hodnot kvadrátu přeneseného čtyřimpulsu t je při zadané celkové těžišťové energii binárního procesu

$$b + a \to 1 + 2$$

dána intervalem $t \in \langle t_1, t_0 \rangle$, kde

$$t_{\substack{0\\1}} \equiv \frac{1}{4s}\left(m_a^2 - m_b^2 + m_2^2 - m_1^2\right)^2 - \left(|\boldsymbol{p}_i^*| \mp |\boldsymbol{p}_f^*|\right)^2 .$$

Ukažte, že pro *pružný rozptyl* je

$$t = -2\,|\boldsymbol{p}^*|^2\,(1 - \cos\vartheta^*)\,,$$

a tedy

$$\begin{aligned} t_1 &= -4\,|\boldsymbol{p}^*|^2\,, \\ t_0 &= 0. \end{aligned}$$

U.5.6. Ukažte, že skalární součin čtyřimpulsů libovolných dvou částic není nikdy menší než součin jejich hmot, tj. že platí

$$p_1 \cdot p_2 \geq m_1 m_2.$$

Povšimněte si, že odtud plynou nerovnosti

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)^2 &\geq (m_1 + m_2)^2\,, \\ (p_1 - p_2)^2 &\leq (m_1 - m_2)^2\,. \end{aligned}$$

U.5.7. Uvažujte proces, v němž se zachovává impuls a energie. Nechť N je celkový počet částic v tomto procesu, tj. součet počtu částic přítomných v počátečním a koncovém stavu. Nechť všechny tyto částice jsou bezspinové.
Ukažte, invariantní amplitudu každého takovéhoto procesu lze (při zadaných hmotách všech částic)
v případě $N = 3$ vyjádřit jako funkci jediné nezávislé proměnné a
v případě $N \geq 4$ jako funkci $3N - 10$ nezávislých proměnných.

U.5.8. Dokažte, že izospinová invariance vyžaduje, aby (při zadané energii) účinné průřezy srážek pionů s nukleony splňovaly "trojúhelníkovou nerovnost"

$$\left[\sqrt{\sigma_{el}(\pi^- p)} - \sqrt{2\sigma_{cex}(\pi^- p)}\right]^2 \leq \sigma_{el}\left(\pi^+ p\right) \leq \left[\sqrt{\sigma_{el}(\pi^- p)} + \sqrt{2\sigma_{cex}(\pi^- p)}\right]^2,$$

kde $\sigma_{el}\,(\pi^\pm p)$, resp. $\sigma_{cex}\,(\pi^- p)$ je účinný průřez pružných srážek $\pi^\pm$ na protonech, resp. "rozptylu s výměnou náboje"

$$\pi^- + p \to \pi^0 + n.$$

Experimentální data jsou v souladu s touto předpovědí.

U.5.9. Ukažte, že pokud interakce mezi piony a nukleony ve stavech s izospinem $\frac{1}{2}$ je zanedbatelná vůči jejich interakci ve stavech s izospinem 3/2, potom musí mezi účinnými průřezy definovanými v úloze U.5.8. platit relace

$$\sigma_{el}\left(\pi^+ p\right) : \sigma_{cex}\left(\pi^- p\right) : \sigma_{el}\left(\pi^- p\right) = 9 : 2 : 1\,.$$

Tento vztah je v dobrém souhlasu s experimentálními daty o srážkách při kinetických energiích pionů v klidové soustavě nukleonu E_{Lab} až do $\sim$ 300 MeV. Bližší analýza dat ukazuje, že jde hlavně o odraz silné interakce v P-vlně pro $J = 3/2$, kde při $E_{Lab} \simeq 190\,MeV$ dochází k rezonanci. Jde o historicky první rezonanci nalezenou při studiu $\pi - N$ srážek, slavnou 3-3 rezonanci, kterou můžeme interpretovat jako kvazivázaný stav pionu s nukleonem, dnes nazývaný částicí $\triangle(1232)$. Tato částice sehrála velice důležitou roli na cestě k současné subnukleární fyzice. Z hlediska $SU(3)$-symetrie patří do decupletu baryonů se spinem 3/2. Přesvědčte se, že číslo 1232 v jejím označení odpovídá její hmotě v MeV.

U.5.10. Deuteron představuje izosinglet (tj. má nulový izospin)[70]. K^+, resp. K^0 mezon má třetí složku izospinu rovnu $\frac{1}{2}$, resp. -$\frac{1}{2}$ a dohromady tvoří izodublet. Hyperon Λ^0 je izosinglet, kdežto hyperon Σ^0 sice také má nulovou třetí složku izospinu, ale patří (spolu s $\Sigma^\pm$) do izotripletu. Na základě těchto znalostí dokažte, že izospinová invariance vede k předpovědím následujících relací mezi účinnými průřezy:

$$\sigma\left(pp \to d\pi^+\right) \;=\; 2\,\sigma\left(np \to d\pi^0\right),$$

[70]Pokuste se nalézt důvody, ve prospěch tohoto tvrzení.

$$\begin{aligned}
\sigma\left(\pi^+ d \to K^+ p \Lambda^0\right) &= \sigma\left(\pi^- d \to K^0 n \Lambda^0\right), \\
\sigma\left(\pi^+ d \to K^+ p \Sigma^0\right) &= \sigma\left(\pi^- d \to K^0 n \Sigma^0\right).
\end{aligned}$$

Všechny tyto relace jsou ve velmi dobrém souhlasu s experimentálními daty.

U.5.11. Dokažte, že žádná P-invariantní teorie nemůže být v souhlase s pozorováním rozpadu skalární částice na trojici částic pseudoskalárních.

Dodatek A

Soustavy elektromagnetických jednotek

Forma popisu elektromagnetických jevů na klasické úrovni v sobě zahrnuje několik konvencí. Jednotlivé soustavy elektromagnetických jednotek se navzájem liší volbou hodnot konstant v těchto konvencích vystupujících. Blíže se s touto problematikou může čtenář seznámit např. v klasických monografiích [12],[13]. Zde se omezíme na pouhou prezentaci základních vztahů ve tvaru, který umožňuje jejich vyjádření v kterékoliv z nejčastěji užívaných jednotek.[1]

A.1 Konvence

Definice elektrického náboje a magnetické indukce závisí na dvou konvenčně volených konstantách k, $\widetilde{k}$.

A.1.1 Konvence popisu elektrického náboje e

Coulombův zákon

$$|\boldsymbol{F}| = k\,\frac{e_1 e_2}{r^2}\,. \tag{A.1}$$

[1] Mlčky rozumíme, že příslušné soustavy jsou ve vakuu.

A.1.2 Konvence popisu magnetického indukce B

Faradayův zákon elektromagnetické indukce

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \widetilde{k}\, \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0. \tag{A.2}$$

Intenzita magnetického pole

$$\boldsymbol{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B}, \tag{A.3}$$

kde μ_0 je *permeabilita vakua.*

A.1.3 Konvence popisu intenzity elektrického pole E

Lorentzova síla

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \widetilde{k}\,[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]\right), \tag{A.4}$$

kde rychlost

$$\boldsymbol{v} \equiv \dot{\boldsymbol{x}} \equiv \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}.$$

Elektrická indukce

$$\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \tag{A.5}$$

kde ε_0 je *permitivita vakua.*

A.1.4 Hodnoty parametrů v jednotlivých soustavách

soustava	ε_0	μ_0	k	$\widetilde{k}$
SI[2]	$(c^2\mu_0)^{-1}$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$	1
Heavisidova-Lorentzova	1	1	$(4\pi)^{-1}$	c^{-1}
Gaussova	1	1	1	c^{-1}
Elektrostatická	1	c^{-2}	1	1
Magnetostatická	c^{-2}	1	c^2	1

[2]Hodnota μ_0 v SI je udána v jednotkách $\mathrm{H\,m^{-1}}$.

A.1.5 Konstanta jemné struktury a Bohrův magneton

Konstanta jemné struktury

$$\alpha \equiv k\,\frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}\,, \tag{A.6}$$

Bohrův magneton

$$\mu \equiv \widetilde{k}\,\frac{e\hbar}{2M}\,, \tag{A.7}$$

kde M, e je hmota elektronu, resp. elementární náboj ($\equiv$ náboj pozitronu). Připomeňme, že

$$\mu \simeq 5.79 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{T}} = 5.78 \times 10^{-9}\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{G}}\,. \tag{A.8}$$

A.2 Maxwellovy rovnice

1. série

$$\widetilde{k}\,c^2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 4\pi k\,\boldsymbol{j}\,,$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 4\pi k\,\rho\,. \tag{A.9}$$

2.série

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \widetilde{k}\,\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0\,,$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0\,. \tag{A.10}$$

Hustota energie elektromagnetického pole

$$\mathcal{H}_F = \frac{1}{8\pi k}\left(\boldsymbol{E}^2 + c^2\widetilde{k}^2\boldsymbol{B}^2\right). \tag{A.11}$$

Hustota lagrangiánu elektromagnetického pole

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{8\pi k}\left(\boldsymbol{E}^2 - c^2\widetilde{k}^2\boldsymbol{B}^2\right). \tag{A.12}$$

Skalární a vektorový potenciál:
Vyjádření

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \tilde{k}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},$$
$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{A.13}$$

zaručuje splnění 2. série Maxwellových rovnic (A.10).

A.2.1 Zápis v kovariantním tvaru

4-potenciál

$$A^\mu \equiv \left\{A^0, \boldsymbol{A}\right\}, \qquad A^0 \equiv \frac{1}{\tilde{k}c}\varphi. \tag{A.14}$$

4-proud (hustoty elektrického náboje)

$$j^\mu \equiv \{c\rho, \boldsymbol{j}\}. \tag{A.15}$$

Tenzor elektromagnetického pole

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{A.16}$$

tj.[3]

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/\tilde{k}c & -E_2/\tilde{k}c & -E_3/\tilde{k}c \\ E_1/\tilde{k}c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/\tilde{k}c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/\tilde{k}c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.17}$$

Hustota lagrangiánu elektromagnetického pole

$$\mathcal{L}_F = -\frac{c^2\tilde{k}^2}{16\pi k} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{A.18}$$

Hustota lagrangiánu interakce elektromagnetického pole s jeho zdroji

$$\mathcal{L}_I = -\tilde{k}\, j_\mu A^\mu. \tag{A.19}$$

[3] Řádky, (sloupce) jsou číslovány shora dolů (zleva do prava) postupně čísly 0, 1, 2, 3.

1. série Maxwellových rovnic

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{k}{\widetilde{k}}\, j^{\nu} \tag{A.20}$$

představuje Euler-Lagrangeovy rovnice (pro pole A^{ρ}) odpovídající hustotě lagrangiánu

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_F\,.$$

A.2.2 Speciální Lorentzovy transformace

Pokud se čárkovaná soustava pohybuje vůči nečárkované rychlostí $\boldsymbol{v}$, potom

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}\,, \qquad \boldsymbol{E}'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\boldsymbol{E}_{\perp} + \widetilde{k}\,[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]\right)\,, \tag{A.21}$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel}\,, \qquad \boldsymbol{B}'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\boldsymbol{B}_{\perp} - \frac{[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}]}{\widetilde{k}c^2}\right)\,, \tag{A.22}$$

kde $A_{\parallel}$, $\boldsymbol{A}_{\perp}$ značí projekci vektoru $\boldsymbol{A}$ do směru $\boldsymbol{v}$, resp. na rovinu kolmou k $\boldsymbol{v}$.

A.3 Elektromagnetické pole interagující s bodovým nábojem

Lagrangiánem této soustavy je

$$L(t) = L_P(t) + L_F(t) + L_I(t)\,, \tag{A.23}$$

kde

$$L_P(t) = -Mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}{c^2}}\,, \tag{A.24}$$

a

$$L_F(t) \equiv \int d^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{L}_F(\boldsymbol{x},t)\,, \qquad L_I\,(t) \equiv \int d^3\boldsymbol{x}\,'\mathcal{L}_I(\boldsymbol{x}',t)\,, \tag{A.25}$$

kde integrandy jsou dány formulemi (A.18),(A.19) a přitom v druhé z nich má 4-proud komponenty

$$j^0(\boldsymbol{x}', t) = c\rho(\boldsymbol{x}', t) = ce\delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}(t)) \ ,$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}', t) = e\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)\,\delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}(t)) \ , \tag{A.26}$$

tj.

$$\begin{aligned} L_I(t) &= -\widetilde{k}e\left\{cA^0(\boldsymbol{x}(t), t) - \dot{\boldsymbol{x}}(t)\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(t), t)\right\} \\ &= e\left\{-\varphi(\boldsymbol{x}(t), t) + \widetilde{k}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(t), t)\right\}. \end{aligned} \tag{A.27}$$

Euler-Lagrangeovy rovnice v případě lagrangiánu (A.23) představují 1. sérii Maxwellových rovnic (A.20) spolu s *Newton-Lorentzovou rovnicí*

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}, \tag{A.28}$$

kde na pravé straně vystupuje Lorentzova síla (A.4) , přitom ("kinetický") impuls

$$\boldsymbol{p} \equiv \frac{M\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{A.29}$$

N-L rovnici (A.28) lze vyjádřit v kovariantním tvaru jako

$$M\,\frac{du^\mu}{d\tau} = \widetilde{k}eF^{\mu\nu}\,u_\nu\,, \tag{A.30}$$

kde *4-rychlost*

$$u^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\{c, \boldsymbol{v}\}\,, \tag{A.31}$$

a přírůstek *vlastního času*

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,dt\,.$$

Z lagrangiánu (A.23) dostáváme pro *kanonický impuls*

$$\boldsymbol{\pi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{p} + \widetilde{k}e\boldsymbol{A}, \tag{A.32}$$

a tedy hamiltoniánem uvažované soustavy je

$$H = H_F + H_{PI}\,, \tag{A.33}$$

kde

$$H_F \equiv \int d^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{H}_F \tag{A.34}$$

je hamiltonián volného elektromagnetického pole (viz (A.11)) a

$$H_{PI} \equiv \boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - (L_P + L_I) = c\sqrt{\left(\boldsymbol{\pi} - \widetilde{k} e \boldsymbol{A}\right)^2 + M^2 c^2} + e\varphi \tag{A.35}$$

je hamiltonián částice ve vnějším elektromagnetickém poli.

Dodatek B

Mandelstamovy proměnné

Uvažujme binární proces

$$1 + 2 \to 3 + 4. \tag{B.1}$$

Definujme čtyřvektory

$$\begin{aligned} P_j &\equiv p_j && \text{pro } j = 1, 2, \\ P_j &\equiv -p_j && \text{pro } j = 3, 4, \end{aligned}$$

kde p_j je čtyřimpuls částice j. Je zřejmé, že potom platí

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{4} P_j &= 0, \\ P_j^2 &= m_j^2, \end{aligned} \tag{B.2}$$

kde m_j je hmota částice j.

Z každé čtveřice čtyřvektorů P_j vyhovujících podmínkám (B.2) lze utvořit dva nezávislé skaláry, za které můžeme zvolit libovolnou dvojici ze tří *Mandelstamových proměnných* definovaných jako

$$\begin{aligned} s &\equiv (P_1 + P_2)^2 = (P_3 + P_4)^2 , \\ t &\equiv (P_1 + P_3)^2 = (P_2 + P_4)^2 , \\ u &\equiv (P_1 + P_4)^2 = (P_2 + P_3)^2 . \end{aligned} \tag{B.3}$$

V důsledku relací (B.2) jsou navzájem svázány vztahem

$$s + t + u = \mathcal{M}^2, \tag{B.4}$$

v němž

$$\mathcal{M}^2 \equiv \sum_{j=1}^{4} m_j^2. \tag{B.5}$$

Jestliže (B.1) je kinematicky povoleným procesem, potom je totéž pravdou i o procesech[1]

$$1 + \bar{3} \to \bar{2} + 4 \tag{B.6}$$

a

$$\bar{3} + 2 \to \bar{1} + 4, \tag{B.7}$$

kde $\bar{j}$ značí antičástici částice j. Identifikujeme-li v posledních dvou procesech

$$P_1 \equiv p_1, \quad P_2 \equiv -p_{\bar{2}}, \quad P_3 \equiv p_{\bar{3}}, \quad P_4 \equiv -p_4, \tag{B.8}$$

resp.

$$P_1 \equiv -p_{\bar{1}}, \quad P_2 \equiv p_2, \quad P_3 \equiv p_{\bar{3}}, \quad P_4 \equiv -p_4, \tag{B.9}$$

budou opět splněny podmínky (B.2), a tedy mezi skalárními veličinami (B.3) bude platit vztah (B.4).

Z definice (B.3) je zřejmé, že v případě procesu (B.1) udává proměnná s hodnotu kvadrátu celkové energie v CMS. V případě procesů (B.6), (B.7) má tento fyzikální význam proměnná t, resp. u. Proto se o procesech (B.1), (B.6), (B.7) často mluví jako o s-, resp. t-, resp. u-kanálu téhož (zobecněného) procesu. Označíme-li kvadrát těžišťové energie v jednotlivých kanálech symbolem s, doplněným dolním indexem specifikujícím příslušný kanál, potom podle výše uvedené definice je

$$s_s = s, \quad s_t = t, \quad s_u = u. \tag{B.10}$$

Kvadrátem přeneseného čtyřimpulsu rozumíme kvadrát rozdílu čtyřimpulsů první částice počátečního stavu a první částice stavu koncového.[2] Označíme-li ho symbolem t, opět doplněným dolním indexem, specifikujícím příslušný kanál, potom snadno zjistíme, že platí

$$t_s = t, \quad t_t = s, \quad t_u = t. \tag{B.11}$$

[1] Tj. v těchto procesech jsou respektovány nejen zákony zachování impulsu a energie, ale i všechny zákony zachování nábojů, které jsou respektovány v procesu (B.1).

[2] Pod "první", či "druhá" částice je třeba rozumět, že symbol této částice vystupuje jako první, resp. druhý na příslušné straně formulí specifikujících daný proces.

Užijeme-li k označení kvadrátu rozdílu čtyřimpulsů první částice počátečního stavu a druhé částice stavu koncového symbolu u s odpovídajícím indexem, potom z relací (B.4), (B.10), (B.11) ihned vidíme, že platí

$$u_s = u, \quad u_t = u, \quad u_u = s. \tag{B.12}$$

Pro zjednodušení předpokládejme, že všechny čtyři částice vystupující v uvažovaných procesech jsou bezspinové. Invariantní amplitudu každého z procesů (B.1), (B.6), (B.7) lze vyjádřit jako funkci dvou nezávislých kinematických skalárů, za které můžeme zvolit např. kvadrát těžišťové energie a kvadrát přeneseného čtyřimpulsu v příslušném procesu. Tedy invariantní amplitudy odpovídající s-, t-, u-kanálu uvažovaného procesu možno vyjádřit jako[3]

$$\begin{aligned} M_s(s_s, t_s) &= M(s = s_s, t = t_s, u = u_s)\,, \\ M_t(s_t, t_t) &= M(s = t_t, t = s_t, u = u_t)\,, \\ M_u(s_u, t_u) &= M(s = u_u, t = t_u, u = s_u)\,, \end{aligned} \tag{B.13}$$

neboť oblasti hodnot proměnných s, t, u, kinematicky dostupné v jednotlivých kanálech se navzájem *nepřekrývají*. Přesvědčit se o tom můžeme analýzou kinematiky v jednotlivých kanálech. Tak např. v s-kanálu mají komponenty čtyřimpulsů jednotlivých částic v CMS hodnoty

$$p_j = \left\{E_j^*, \boldsymbol{p}_j^*\right\}, \tag{B.14}$$

kde

$$\boldsymbol{p}_2^* = -\boldsymbol{p}_1^*, \quad \boldsymbol{p}_4^* = -\boldsymbol{p}_3^*, \tag{B.15}$$

$$E_j^* = \sqrt{\boldsymbol{p}_j^{*2} + m_j^2} \tag{B.16}$$

[3] O skutečnosti, že invariantní amplitudy procesů ve všech třech kanálech lze vyjádřit pomocí jediné funkce $M(s, t, u)$, se obvykle hovoří jako o ***křížové symetrii (crossing symmetry)***. Je dobře si uvědomit, že pokud bychom nic dalšího o funkci $M(s, t, u)$ nebyli schopni říci, byla by křížová symetrie pouhým triviálním odrazem níže zmíněné disjunktnosti oblastí kinematicky dostupných v jednotlivých kanálech. Situace se však radikálně změní, pokud jsme schopni dokázat, že hodnoty v oblastech odpovídajících jednotlivým kanálům spolu navzájem souvisejí analytickým prodloužením. Potom křížová symetrie představuje jeden z velice účinných ***neporuchových*** nástrojů relativistické kvantové teorie. Poznamenejme proto, že obdobné relace křížové symetrie mezi amplitudami ve zmíněných kanálech lze formulovat i tehdy, když částice v nich vystupující mají nenulový spin.

a přitom (viz (5.93), (5.95))

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1^{*2} &= \frac{1}{4s_s}\left[s_s - (m_1+m_2)^2\right]\left[s_s - (m_1-m_2)^2\right], \\ \boldsymbol{p}_3^{*2} &= \frac{1}{4s_s}\left[s_s - (m_3+m_4)^2\right]\left[s_s - (m_3-m_4)^2\right], \end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned} E_1^* &= \frac{s_s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s_s}}, \\ E_3^* &= \frac{s_s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s_s}}, \end{aligned} \tag{B.18}$$

kde

$$\sqrt{s_s} = E_1^* + E_2^* = E_3^* + E_4^* . \tag{B.19}$$

Tedy

$$\begin{aligned} t_s &\equiv (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 \\ &= m_1^2 + m_3^2 - 2\left[E_1^* E_3^* - |\boldsymbol{p}_1^*|\,|\boldsymbol{p}_3^*|\cos\vartheta^*\right]. \end{aligned} \tag{B.20}$$

Odtud je již zřejmé, že v s-kanále, při dané hodnotě CMS energie $\sqrt{s_s}$, kvadrát přeneseného čtyřimpulsu může nabývat všech hodnot z intervalu

$$t_s \in \left\langle (t_s(s_s))_{\min}, (t_s(s_s))_{\max} \right\rangle, \tag{B.21}$$

kde

$$(t_s(s_s))_{\substack{\max\\ \min}} \equiv m_1^2 + m_3^2 - 2\left[E_1^* E_3^* \mp |\boldsymbol{p}_1^*|\,|\boldsymbol{p}_3^*|\right]. \tag{B.22}$$

Odtud vidíme, že oblast Mandelstamových proměnných kinematicky dostupnou v s-kanále je možno vymezit vztahy

$$s \geq \max\left\{(m_1+m_2)^2, (m_3+m_4)^2\right\} \tag{B.23}$$

a při každé pevné hodnotě s z tohoto intervalu

$$t \in \left\langle (t_s(s))_{\min}, (t_s(s))_{\max} \right\rangle. \tag{B.24}$$

Při zadaných hodnotách s, t je již hodnota proměnné u jednoznačně určena vztahem (B.4). Odtud je zřejmé, že při zadané hodnotě s je oblast hodnot u, kinematicky dostupných v s-kanále dána intervalem

$$u \in \left\langle (u_s(s))_{\min}, (u_s(s))_{\max} \right\rangle, \tag{B.25}$$

kde

$$\left(u_s(s)\right)_{\substack{\max\\ \min}} = \mathcal{M}^2 - s - \left(t_s\left(s\right)\right)_{\substack{\min\\ \max}} . \tag{B.26}$$

Díky T. W. B. Kibblemu však známe elegantnější způsob, který umožňuje určit kinematicky dostupné oblasti pro všechny kanály najednou. K tomu definujme čtyřvektor[4]

$$K_\mu \equiv \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P_1^\nu P_2^\rho P_3^\sigma . \tag{B.27}$$

Vyjádříme-li tyto komponenty v klidové soustavě první částice, nebo přesněji řečeno v soustavě, v níž je

$$P_1^\nu = \{\pm E_1, \mathbf{0}\} , \tag{B.28}$$

potom

$$K_\mu \equiv \pm E_1 \varepsilon_{\mu 0 \rho\sigma} P_2^\rho P_3^\sigma ,$$

a tedy

$$\begin{aligned} K^0 &= 0, \\ \boldsymbol{K} &= \pm E_1 \left[\boldsymbol{P}_2 \times \boldsymbol{P}_3\right] . \end{aligned} \tag{B.29}$$

Odtud vidíme, že vždy platí

$$K_\mu K^\mu \leq 0. \tag{B.30}$$

Na druhé straně s využitím relace

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\sigma\mu\nu\rho}\varepsilon^{\sigma\alpha\beta\gamma} = & -g_\mu{}^\alpha g_\nu{}^\beta g_\rho{}^\gamma + g_\mu{}^\alpha g_\nu{}^\gamma g_\rho{}^\beta - g_\mu{}^\beta g_\nu{}^\gamma g_\rho{}^\alpha \\ & + g_\mu{}^\beta g_\nu{}^\alpha g_\rho{}^\gamma - g_\mu{}^\gamma g_\nu{}^\alpha g_\rho{}^\beta + g_\mu{}^\gamma g_\nu{}^\beta g_\rho{}^\alpha , \end{aligned} \tag{B.31}$$

[4]Ve skutečnosti jsme v této definici místo *prvních* tří čtyřvektorů P_j mohli použít libovolné tři různé čtyřvektory z této čtveřice. Snadno totiž nahlédneme, že díky první z relací (B.2) a díky úplné antisymetrii tenzoru $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ každá takováto volba vede k výsledku, který se od pravé strany formule (B.27) liší maximálně znaménkem. Z dalšího se přitom stane zřejmým, že pro konečný výsledek je toto znaménko naprosto irelevantní. Proto také ani níže užitý předpoklad $m_1 \neq 0$ není na újmu obecnosti. Jedinou výjimku tvoří případ, kdy všechny čtyři částice jsou nehmotné. Čtenář se však jistě sám dokáže přesvědčit o tom, že odpovídající kinematicky dostupnou oblast lze obdržet v limitě $m \to 0$ z kinematicky dostupné oblasti v případě, kdy všechny částice mají stejnou hmotu $m \neq 0$.

kterou již známe z úlohy U.1.10. v 1. kapitole, snadno nalezneme, že kvadrátem čtyřvektoru K je

$$K_\mu K^\mu = - \begin{vmatrix} P_1^2 & P_1 \cdot P_2 & P_1 \cdot P_3 \\ P_2 \cdot P_1 & P_2^2 & P_2 \cdot P_3 \\ P_3 \cdot P_1 & P_3 \cdot P_2 & P_3^2 \end{vmatrix} . \tag{B.32}$$

Vyjádříme-li skalární součiny v tomto determinantu pomocí definicí (B.3) jako

$$\begin{aligned} P_1 \cdot P_2 &= \frac{1}{2}\left[s - m_1^2 - m_2^2\right], \\ P_1 \cdot P_3 &= \frac{1}{2}\left[t - m_1^2 - m_3^2\right], \\ P_2 \cdot P_3 &= \frac{1}{2}\left[u - m_2^2 - m_3^2\right], \end{aligned} \tag{B.33}$$

potom s využitím relace (B.4) po jednoduchých úpravách nalezneme, že nerovnost (B.30) je ekvivalentní vztahu

$$\mathcal{M}^2 stu \geq as + bt + cu, \tag{B.34}$$

kde konstanty

$$\begin{aligned} a &\equiv \left[m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2\right]\left[m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2\right], \\ b &\equiv \left[m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2\right]\left[m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2\right], \\ c &\equiv \left[m_2^2 m_3^2 - m_1^2 m_4^2\right]\left[m_2^2 + m_3^2 - m_1^2 - m_4^2\right]. \end{aligned} \tag{B.35}$$

Rovnost ve formuli (B.30) (spolu se vztahem (B.4)) definuje *Kibblovu hraniční křivku* determinující *fyzikální oblasti* (tj. oblasti kinematicky dostupných hodnot) Mandelstamových proměnných ve všech procesech, u nichž je součet počtu částic přítomných v počátečním a koncovém stavu roven čtyřem. Tato křivka se rozpadá na několik větví odpovídajících různým kanálům. K tomu, abychom na základě jejich znalosti dokázali určit, kde leží oblast kinematicky dostupných hodnot pro jednotlivé kanály, si stačí uvědomit, že (viz úloha U.5.6. v 5. kapitole)

$$\begin{aligned} s_s &\geq \max\left\{(m_1 + m_2)^2, (m_3 + m_4)^2\right\}, \\ t_s &\leq \min\left\{(m_1 - m_3)^2, (m_2 - m_4)^2\right\}, \\ u_s &\leq \min\left\{(m_1 - m_4)^2, (m_2 - m_3)^2\right\} \end{aligned} \tag{B.36}$$

a obdobné vztahy pro tyto veličiny v t-, resp. v u-kanále, které z uvedených obdržíme prostou záměnou $m_2 \rightleftarrows m_3$, resp. $m_2 \rightleftarrows m_4$.

Nesmíme však zapomenout, že pokud hmota jedné z částic převyšuje součet hmot zbývajících tří, potom je kinematicky povolen také rozpad této částice, tj. jestliže je např.

$$m_1 > m_2 + m_3 + m_4 \,, \tag{B.37}$$

potom také invariantní amplitudu rozpadu

$$1 \to \bar{2} + 3 + 4 \tag{B.38}$$

můžeme vyjádřit jako

$$M_R = M(s,t,u) \,, \tag{B.39}$$

kde je nyní

$$P_1 \equiv p_1, \quad P_2 \equiv -p_{\bar{2}}, \quad P_3 \equiv -p_3, \quad P_4 \equiv -p_4, \tag{B.40}$$

což znamená, že Mandelstamovy proměnné jsou

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_1 - p_{\bar{2}})^2 = (p_3 + p_4)^2 \,, \\ t &\equiv (p_1 - p_3)^2 = (p_{\bar{2}} + p_4)^2 \,, \\ u &\equiv (p_1 - p_4)^2 = (p_{\bar{2}} + p_3)^2 \,, \end{aligned} \tag{B.41}$$

a tedy pro ně platí

$$\begin{aligned} (m_3 + m_4)^2 &\leq s \leq (m_1 - m_2)^2 \,, \\ (m_2 + m_4)^2 &\leq t \leq (m_1 - m_3)^2 \,, \\ (m_2 + m_3)^2 &\leq u \leq (m_1 - m_4)^2 \,. \end{aligned} \tag{B.42}$$

Nepřehlédněme, že v oblasti kinematicky dostupné rozpadovému kanálu (pokud takový existuje) mají všechny tři Mandelstamovy proměnné nezáporné hodnoty.

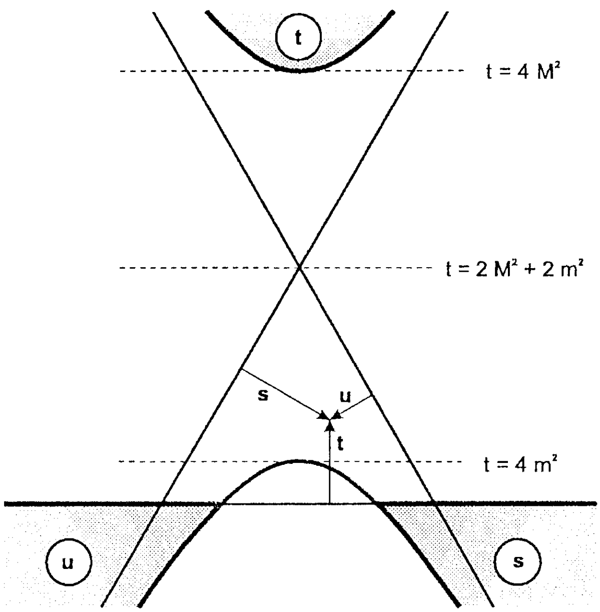
Grafické znázornění fyzikálních oblastí se zpravidla provádí v Mandelstamově diagramu pomocí "trojúhelníkových souřadnic". Jejich výhodnost spočívá v prostém faktu (jehož důkaz ponecháváme čtenáři), že algebraický součet "orientovaných vzdáleností"[5] libovolného bodu

[5] Orientovanou vzdáleností zde rozumíme vzdálenost od příslušné přímky vynásobenou faktorem +1, resp. −1, v závislosti na tom, zda daný bod leží v téže, resp. opačné polorovině než vnitřek níže zmíněného trojúhelníka.

v rovině od tří přímek probíhajících stranami rovnostranného trojúhelníka je roven výšce tohoto trojúhelníka. Zvolíme-li tuto výšku rovnu $\mathcal{M}^2$, potom každý bod v rovině můžeme jedno-jednoznačně identifikovat s hodnotami s, t, u vyhovujícími podmínce (B.4), s tím, že každou z výše zmíněných přímek identifikujeme s geometrickým místem bodů, odpovídajících hodnotám $s = 0$, resp. $t = 0$, resp. $u = 0$.[6]

Pro ilustraci je na Obr. B.1 uveden Mandelstamův diagram, v případě, kdy

$$\begin{aligned} m_1 &= m_3 = M, \\ m_2 &= m_4 = m. \end{aligned}$$



Obr. B.1

Fyzikální oblast každého kanálu je znázorněna jako ztemnělá část diagramu, doplněná názvem příslušného kanálu.

[6]Nepřehlédněme, že v případě rozpadového kanálu leží odpovídající fyzikální oblast celá *uvnitř* (případně včetně části hranice) zmíněného trojúhelníka.

B.1 Úlohy

U.B.1. Určte fyzikální oblasti a alespoň kvalitativně je vyznačte v odpovídajícím Mandelstamově diagramu pro případ, kdy částice $1, \cdots, 4$ ve formuli (B.1) představují

i) $1 = 2 = 3 = 4 = p$,

ii) $1 = 3 = p, \quad 2 = 4 = \pi^-$,

iii) $1 = 3 = p, \quad 2 = 4 = \gamma$,

iv) $1 = K^-, \quad 2 = 3 = \pi^+, \quad 4 = \pi^-$,

v) $1 = \mu^-, \quad 2 = \bar{\nu}_\mu, \quad 3 = e^-, \quad 4 = \bar{\nu}_e$.

Neutrina považujte za nehmotná. Hmoty zbývajících částic mají následující (zaokrouhlené) hodnoty:
$m_p = 938$ MeV, $m_\pi = 140$ MeV, $m_K = 494$ MeV, $m_\mu = 106$ MeV, $m_e = 0.5$ MeV.

Literatura

[1] Formánek J.: Úvod do kvantové teorie. Praha 1983.

[2] Schweber S. S.: An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. Evanston 1961 (ruský překlad 1963).

[3] Bjorken J. D. and Drell S. D: Relativistic Quantum Mechanics. New York 1964 (ruský překlad 1978).

[4] Itzykson C. and Zuber J. B.: Quantum Field Theory. New York 1980 (ruský překlad 1984).

[5] Chang S. J.: Introduction to Quantum Field Theory. Singapore 1990.

[6] Wu T.-Y. and Pauchy Hwang W.-Y.: Relativistic Quantum Mechanics and Quantum Field Theory. Singapore 1991.

[7] Gross G.: Field Theory. New York 1993.

[8] Beresteckij V. B., Lifšic E. M., Pitajevskij L. P.: Reljativistskaja Kvantovaja Teorija. Moskva 1968.

[9] Ynduráin F. J.: Relativistic Quantum Mechanics and Introduction to Quantum Field Theory. Berlin 1996.

[10] Weinberg S.: The Quantum Theory of Fields. Volume 1. Cambridge 1995.

[11] Thaller B.: The Dirac Equation. Berlin 1992.

[12] Sommerfeld A.: Elektrodynamik. Leipzig 1949 (ruský překlad 1958).

[13] Jackson J. D.: Classical Electrodynamics. New York 1962 (ruský překlad 1965).

[14] Kogut J. S. and Soper D. E., Phys. Rev. **D1** (1970), 2901.

[15] Kratzer A. und Franz W.: Transzendente Funktionen. Leipzig 1960 (ruský překlad 1963).

[16] Bethe H. A. and Salpeter E. E.: Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957 (ruský překlad 1960).

[17] Weinberg S.: The Quantum Theory of Fields. Volume 2. Cambridge 1996.

[18] Particle data group: Review of Particle Properties. **D54** (1996), 1.

[19] Gell-Mann M. and Ne'eman Y.: The Eightfold Way. New York 1964.

[20] Wu C. S. et al., Phys. Rev. **105** (1957), 1413.

[21] Weyl H., Z. Phys. **56** (1929), 330.

[22] Foldy L. L. and Wouthuysen S. A., Phys. Rev. **78** (1950), 29.

[23] Cheng T. P. and Li L. F.: Gauge Theory of Elementary Particle Physics. Oxford 1984.

[24] Quigg C.: Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions. London 1983.

[25] Huang K.: Quarks, Leptons and Qauge Fields. Singapore 1982.

[26] Ynduráin F. J.: The Theory of Quark and Gluon Interactions. Berlin 1993.

[27] Muta T: Foundations of QCD. Singapore 1987.

[28] Field R. D.: Applications of Perturbative QCD. 1989.

[29] Becher P., Böhm M., Joos H.: Gauge Theories of Strong and Electroweak Interactions. Chichester 1984.

[30] Hořejší J.: Elektroslabé sjednocení a stromová unitarita. Praha 1993.

[31] Heisenberg W., Z. Phys. **77** (1932), 1.

[32] Newton T. D. and Wigner E. P., Rev. Mod. Phys. **21** (1949), 400.

[33] Bjorken J. D. and Drell S. D: Relativistic Quantum Fields. New York 1965 (ruský překlad 1978).

[34] Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc. **A126** (1930), 360.

[35] Fierz H., Helv. Phys. Acta **12** (1939), 3.

[36] Pauli W., Phys. Rev. **58** (1940), 716.

[37] Pauli W., Z. Phys. **31** (1925), 765.

[38] Fermi E., Z. Phys. **36** (1926), 902.

[39] Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc. **A112** (1926), 661.

[40] Anderson C. D., Science **76** (1932), 238.

[41] Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc. **A133** (1931), 61.

[42] Gradštejn I. S., Ryžik I. M.: Tablici Integralov, Summ i Proizvedenij. Moskva 1963.

[43] Bogoljubov N. N., Logunov A. A., Oksak A. I., Todorov I. T.: Obščije Principy Kvantovoj Teorii Polja. Moskva 1987.

Rejstřík

ÚVOD DO RELATIVISTICKÉ KVANTOVÉ MECHANIKY A KVANTOVÉ TEORIE POLE /1

prof. ing. Jiří Formánek, DrSc.

Lektorovali: doc. Jiří Hořejší, DrSc.
prof. RNDr. Ján Pišút, DrSc.

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum
Ovocný trh 3, Praha 1
Praha 2004

Učební text pro posluchače Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze

Vytiskla tiskárna Nakladatelství Karolinum

1. dotisk 2. doplněného vydání

ISBN 80-246-0060-9

Tato publikace neprošla jazykovou
ani redakční úpravou nakladatelství