

Kapitola 1

Tenzorový součin matic

Definice 1.1. Buď $\mathbb{F}$ komutativní těleso. Pro matice $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ a $B \in \mathbb{F}^{r \times s}$ definujeme tenzorový součin $A \otimes B$ jako matici o rozměru $mr \times ns$ zapsanou blokově:

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Poznámka 1.2. Tenzorový součin matic lze definovat i nad nekomutativními tělesy, ztrácí však naprostou většinu svých zajímavých vlastností. Budeme tedy v celé kapitole uvažovat pouze komutativní tělesa.

Pozorování 1.3. Pro tenzorový součin matic $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ a $B \in \mathbb{F}^{r \times s}$ platí, že

$$(A \otimes B)_{(i-1)r+k, (j-1)s+\ell} = A_{ij}B_{k\ell}. \quad (1.1) \quad \text{eq:irk}$$

Příklad 1.4. Mějme například matice $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2B & B \\ \Theta & 2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

zatímco

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} 3A & -A \\ 2A & 2A \\ \Theta & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 1.5. Jde vidět, že tenzorový součin není komutativní. Platí však, že matice $A \otimes B$ a $B \otimes A$ se liší pouze permutací řádků a sloupců; jsou-li navíc A a B čtvercové, pak platí $A \otimes B \sim B \otimes A$.

1.1 Základní vlastnosti tenzorového součinu

Pozorování 1.6. Tenzorový součin je lineární v obou argumentech, tedy platí, že

$$\begin{aligned} A \otimes (\alpha B + C) &= \alpha(A \otimes B) + A \otimes C \\ \text{a} \quad (\alpha A + B) \otimes C &= \alpha(A \otimes C) + B \otimes C, \end{aligned}$$

mají-li výrazy na pravých stranách smysl.

TS:v1

Věta 1.7. Budte A, C matice, které lze v tomto pořadí maticově násobit, a B, D matice, které lze v tomto pořadí násobit. Pak lze násobit i matice $A \otimes B$ a $C \otimes D$ a platí:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

Důkaz. Matice A a C lze násobit, platí tedy, že $A \in \mathbb{F}^{m \times o}$, $C \in \mathbb{F}^{o \times n}$, podobně $B \in \mathbb{F}^{r \times q}$, $D \in \mathbb{F}^{q \times s}$. Podle definice $A \otimes B \in \mathbb{F}^{mr \times oq}$ a $C \otimes D \in \mathbb{F}^{oq \times ns}$. Příslušné dimenze tedy sedí a my můžeme matice $A \otimes B$ a $C \otimes D$ v tomto pořadí násobit.

Tenzorové součiny matic A, B a C, D vypadají takto:

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1o}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2o}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mo}B \end{pmatrix}, \\ C \otimes D &= \begin{pmatrix} C_{11}D & C_{12}D & \cdots & C_{1n}D \\ C_{21}D & C_{22}D & \cdots & C_{2n}D \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{o1}D & C_{o2}D & \cdots & C_{on}D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jak víme, součin matic můžeme též psát blokově a použít přitom stejný zápis jako při násobení po prvcích. Toho pro přehlednost využijeme:

$$\begin{aligned} [(A \otimes B)(C \otimes D)]_{ij} &= \sum_{k=1}^o [A \otimes B]_{ik} [C \otimes D]_{kj} = \sum_{k=1}^o (A_{ik}B)(C_{kj}D) \\ &= \sum_{k=1}^o A_{ik}C_{kj}BD = (AC)_{ij}BD = [AC \otimes BD]_{ij}, \end{aligned}$$

kde v posledním kroku jsme použili definici tenzorového součinu. $\square$

Poznámka 1.8. Upozorňujeme čtenáře na použití indexů v minulém důkazu. Indexy ij myslíme ij -tý blok matice, tj. $[A \otimes B]_{ij} = A_{ij}B$. Píšeme-li však indexy pouze u matice, která vystupuje v tenzorovém součinu na prvním místě, myslíme tím skutečně její prvek, tj. $(A)_{ij} = A_{ij}$; z definice tenzorového součinu totiž vyplývá, že prvek první matice odpovídá bloku matice tenzorového součinu. Věříme, že tato lehká nedůslednost nepovede ke zmatení čtenáře.

TS:v2

Věta 1.9. Jsou-li A, B regulární matice, je jejich tenzorový součin rovněž regulární matice a platí:

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Důkaz. Obě tvrzení budeme dokazovat současně; platí totiž ekvivalence A je regulární $\Leftrightarrow$ existuje A^{-1} . Upravíme výraz $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1})$ pomocí předchozí věty:

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (A^{-1}A) \otimes (B^{-1}B) = I_m \otimes I_r = I_{mr},$$

kde m je počet řádků matice A , r počet řádků matice B . Poslední krok si laskavý čtenář jistě rád sám rozmyslí. $\square$

Věta 1.10. Je-li $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$ podobná $\tilde{A}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ podobná $\tilde{B}$, pak také

$$A \otimes B \sim \tilde{A} \otimes \tilde{B} \quad a \quad A \otimes I_n + I_m \otimes B \sim \tilde{A} \otimes I_n + I_m \otimes \tilde{B}.$$

Důkaz. Z definice podobnosti matic existují matice R, S regulární takové, že $A = R^{-1}\tilde{A}R$ a $B = S^{-1}\tilde{B}S$. Pro tenzorový součin tedy platí

$$A \otimes B = (R^{-1}\tilde{A}R) \otimes (S^{-1}\tilde{B}S),$$

v obou závorkách použijeme na výrazy $R^{-1}\tilde{A}$ a $S^{-1}\tilde{B}$ dvakrát větu [TS:v1](#) 1.7:

$$= ((R^{-1}\tilde{A}) \otimes (S^{-1}\tilde{B}))(R \otimes S) = (R^{-1} \otimes S^{-1})(\tilde{A} \otimes \tilde{B})(R \otimes S),$$

a dále na první závorku větu [TS:v2](#) 1.9:

$$= (R \otimes S)^{-1}(\tilde{A} \otimes \tilde{B})(R \otimes S).$$

Protože tenzorový součin regulárních matic je regulární matice, první část tvrzení je dokázána.

Druhou část ukážeme snadno aplikací první, poněvadž jednotkové matice můžeme rozepsat jako $I_n = S^{-1}I_nS$, podobně I_m . Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} A \otimes I_n + I_m \otimes B &= (R^{-1}\tilde{A}R) \otimes (S^{-1}I_nS) + (S^{-1}I_mS) \otimes (R^{-1}\tilde{B}R) \\ &= (R \otimes S)^{-1}(\tilde{A} \otimes I_n)(R \otimes S) + (R \otimes S)^{-1}(\tilde{B} \otimes I_m)(R \otimes S). \quad \square \end{aligned}$$

Věta 1.11. Pro libovolné matice A, B platí

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T.$$

Důkaz. Buď $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, rozměry B jsou lhotejné.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Pro blokový zápis libovolné matice

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad \text{platí, že} \quad A^\top = \begin{pmatrix} A_1^\top & A_3^\top \\ A_2^\top & A_4^\top \end{pmatrix}.$$

Proto podle předchozího a z definice tenzorového součinu

$$(A \otimes B)^\top = \begin{pmatrix} A_{11}B^\top & A_{21}B^\top & \cdots & A_{m1}B^\top \\ A_{12}B^\top & A_{22}B^\top & \cdots & A_{m2}B^\top \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n}B^\top & A_{2n}B^\top & \cdots & A_{mn}B^\top \end{pmatrix} = A^\top \otimes B^\top. \quad \square$$

1.2 Spektrum tenzorového součinu

Poskytneme čtenáři dvě věty popisující spektrum tenzorového součinu. Jedna se bude týkat vlastních vektorů, druhá charakteristického polynomu.

Věta 1.12. *Budte x vlastní vektor matice $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$ k vlastnímu číslu λ a y vlastní vektor matice $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ k vlastnímu číslu μ . Pak $x \otimes y \in \mathbb{F}^{mn \times 1}$ je vlastní vektor matice $A \otimes B$, resp. $A \otimes I_n + I_m \otimes B$ k vlastnímu číslu $\lambda\mu$, resp. $\lambda + \mu$.*

Důkaz. Z předpokladů víme, že $Ax = \lambda x$ a $By = \mu y$. Z využitím předchozích vět tak dostáváme

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By = \lambda x \otimes \mu y = \lambda\mu(x \otimes y)$$

a

$$\begin{aligned} (A \otimes I_n + I_m \otimes B)(x \otimes y) &= Ax \otimes I_n y + I_m x \otimes By \\ &= \lambda(x \otimes y) + \mu(x \otimes y) = (\lambda + \mu)(x \otimes y). \quad \square \end{aligned}$$

theorem:pAB

Věta 1.13. *Nechť $\mathbb{F}$ je komutativní, a navíc algebraicky uzavřené těleso. Budte $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$ a $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ dvě čtvercové matice řádů m a n s charakteristickými polynomy*

$$p_A(t) = \prod_{i=1}^m (\lambda_i - t) \quad \text{a} \quad p_B(t) = \prod_{j=1}^n (\mu_j - t).$$

Pak pro charakteristické polynomy matic $A \otimes B$ a $A \otimes I_n + I_m \otimes B$ platí

$$p_{A \otimes B}(t) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\lambda_i \mu_j - t), \quad (1.2) \quad \text{eq:pAB}$$

$$p_{A \otimes I_n + I_m \otimes B}(t) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\lambda_i + \mu_j - t). \quad (1.3) \quad \text{eq:pAIIIB}$$

Důkaz. Větu ukážeme nejprve pro horní trojúhelníkové matice A, B . Takové matice mají na diagonále kořeny svého charakteristického polynomu:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1m} \\ 0 & \lambda_2 & A_{23} & \cdots & A_{2m} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & A_{(m-1)m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ 0 & \mu_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & B_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Tenzorový součin $A \otimes B$ bude opět horní trojúhelníková matice a její diagonální prvky, a tedy i kořeny charakteristického polynomu $p_{A \otimes B}(t)$, budou

$$\lambda_1 \mu_1, \lambda_1 \mu_2, \dots, \lambda_1 \mu_n, \lambda_2 \mu_1, \lambda_2 \mu_2, \dots, \lambda_2 \mu_n, \dots, \lambda_m \mu_1, \lambda_m \mu_2, \dots, \lambda_m \mu_n.$$

Z toho už dostáváme platnost rovnosti (1.2). eq: pAB

Podobně matice $A \otimes I_n + I_m \otimes B$ bude horní trojúhelníková a na její diagonále budou součty příslušných diagonálních prvků matic A a B , tedy platí také rovnost (1.3). eq: pAIB

Nyní musíme rozšířit platnost obou rovností na obecné matice, což uděláme s pomocí věty ???. Víme, že pro libovolné matice A, B existují trojúhelníkové matice $A_1 \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B_1 \in \mathbb{F}^{n \times n}$ takové, že $A \sim \tilde{A}$ a $B \sim \tilde{B}$. Potom matice $A \otimes B$ a $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ jsou podobné a mají stejný charakteristický polynom; stejně tak $A \otimes I_n + I_m \otimes B$ a $\tilde{A} \otimes I_n + I_m \otimes \tilde{B}$ jsou podobné. Spolu se shodností charakteristických polynomů $p_A(t) = p_{\tilde{A}}(t)$ a $p_B(t) = p_{\tilde{B}}(t)$ toto již dává tvrzení věty. □

1.3 Maticové rovnice

V této podkapitole se budeme zabývat řešením maticových rovnic

$$AXB = C, \tag{1.4}$$

$$\text{resp. } AX + XB = C \tag{1.5}$$

eq: AXBC

eq: AXXBC

pro známé matice $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$ a neznámou $X \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Po tělese $\mathbb{F}$ požadujeme pouze již zmiňovanou vlastnost komutativity. Zjevně se jedná o lineární rovnici, chceme tedy najít její matici a pravou stranu, a ukázat korespondenci mezi řešením vektorové a maticové rovnice. Abychom rovnice řešili, budeme potřebovat převádět matice z $\mathbb{F}^{m \times n}$ na vektory z $\mathbb{F}^{mn}$.

Definice 1.14. Buď $X \in \mathbb{F}^{m \times n}$ matice. Pak definujeme vektor $[X] \in \mathbb{F}^{mn}$ tak, že napíšeme všechny sloupce matice X pod sebe do jednoho sloupce:

$$[X] := \begin{pmatrix} X_{\bullet 1} \\ X_{\bullet 2} \\ \vdots \\ X_{\bullet n} \end{pmatrix}.$$

Přímo z definice vidíme, že zobrazení $[\cdot] : \mathbb{F}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{F}^{mn}$ je lineární a bijektivní, tedy je to izomorfismus.

Nyní se již věnujme rovnici (1.4) a zapišme ji po složkách:

$$(AXB)_{ij} = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n A_{ik} X_{k\ell} B_{\ell j} = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n (A_{ik} B_{\ell j}) X_{k\ell} = C_{ij}.$$

S využitím (1.1) platí, že

$$\begin{aligned} X_{k\ell} &= [X]_{(\ell-1)m+k,1}, \\ A_{ik} B_{\ell j} &= (B^T \otimes A)_{(j-1)m+i,(\ell-1)m+k}, \\ C_{ij} &= [C]_{(j-1)m+i,1}, \end{aligned}$$

což už s větou 1.9 dává následující tvrzení:

Věta 1.15. *Budte $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ a $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$ matice. Pak matice $X \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je řešením rovnice $AXB = C$ právě tehdy, když vektor $[X]$ je řešením rovnice $(B^T \otimes A)[X] = [C]$.*

Speciálně řešení je jednoznačné právě tehdy, když obě matice A , B jsou regulární.

Příklad 1.16. Řešme s využitím této věty rovnici

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{pmatrix}}_X \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}_C.$$

Tato rovnice je ekvivalentní rovnici s rozšířenou maticí soustavy

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 12 & 3 & 1 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 16 & 4 & 0 \end{array} \right)}_{(B^T \otimes A \mid [C])} \Rightarrow [X] = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/8 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ -1/8 \\ 1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 3/8 & -1/8 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Podívejme se nyní na rovnici (1.5) a pomocí znalosti řešení rovnic tvaru (1.4) ji upravme:

$$\begin{aligned} AX + XB &= C, \\ AXI_n + I_m XB &= C, \\ AXI_n &= Y \quad \wedge \quad I_m XB = C - Y, \\ (I_n \otimes A)[X] &= [Y] \quad \wedge \quad (B^T \otimes I_m)[X] = [C] - [Y], \\ (I_n \otimes A)[X] + (B^T \otimes I_m)[X] &= [C], \\ (I_n \otimes A + B^T \otimes I_m)[X] &= [C]. \end{aligned}$$

Tyto úpravy můžeme shrnout do věty.

Věta 1.17. *Budte $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ a $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$ matice. Pak matice $X \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je řešením rovnice $AX + XB = C$ právě tehdy, když vektor $x = [X]$ je řešením rovnice $(I_n \otimes A + B^T \otimes I_m)x = [C]$.*