$[\phi(x,t), \pi(y,t)] = i\delta(x-y)$

$[\phi, \phi]$

Příklad 1

1.Napiště Lagrangian hustoty pro reálné klasické skalární pole ϕ, které splňuje Klein-Gordonovu rovnici a spočtěte odpovídající Hamiltonián H.

2. Formulujte odpovídající kvantovou teorii tím, že postulujete komutační relace a odvoďte Heisenbergovu pohybovou rovnici pro $\hat{\phi}$. Rovnici vyřešte. Ukažte, že kvantové pole $\hat{\phi}$ se dá psát ve tvaru:

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^{+}(x) + \hat{\phi}^{-}(x) \tag{1}$$

$$\hat{\phi}^{-}(x) = [\hat{\phi}^{+}(x)]^{-} \tag{2}$$

$$\hat{\phi}^{+}(x) = 1/(2\pi)^3 \int \frac{d^{+}p}{2\omega_p} \hat{a}(p) e^{-ipx} \tag{3}$$

$$\omega_p = p_p = (p^2 + m^2)^{1/2} \tag{4}$$

3. Postulujte komutační relaci pro $\hat{a}(p)$ aa $\hat{a}(p)^{+}$ a ukažte,že jsou konzistentní s komutačními relacemi pro pole, které jste formulovali v první části.

4. S pomocí $\hat{a}(p), \hat{a}(p)^{+}$ napište vyjádření pro Hamiltonián $\hat{H}$ a operátor počtu částic $\hat{N}$ a spočtěte $< 0 \mid \hat{\phi}^{+}(x)\hat{\phi}^{+}(y)\hat{a}(p)^{p_1 \hat{a}(p)^{p_2} |0>}$.

5. Popište , co je normální uspořádaní a jak se dá použít k záměně $\hat{H}$ a $\hat{H}^{'}$, kde $\hat{H}^{'} \mid 0 >= 0$.

1 Příklad 2

1.Uveďte, stručně argumenty, které vedou a Diracovu rovnici pro volný elektron $(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x) = 0$ (uveďte požadované vlastnosti γ matice) .

2.Odvoďte transformační vlastnosti $\Psi(x) \longrightarrow \Psi_L(x) = s(L)\Psi(L^{-1x})$ Diracovy vlnové rovnice vzhledem k Lorentzově transformaci L.

3. Pro transformaci $L^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}$, kde $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\mu\nu}$ je infinitezimální (tj. jednotlivé komponenty jsou $\ll 1$) ověřte , že $S(L) = 1 - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$.

4. Uvažujte případ kdy L odpovídá infinitezimální rotaci. Jak se transformují řešení Diracovy rovnice vzhledem k infinitezimální rotacím. Pro ilustraci můžete uvažovat jen rotaci kolem osy z.

$\psi(x) \to \psi_L(x) = S(L)\psi(L^{-1}x)$

1.Napiště Lagrangian hustoty pro reálné klasické skalární pole ϕ, které splňuje Klein-Gordonovu rovnici a spočtěte odpovídající Hamiltonián H.

(1)

LAGRANGIÁN PRO REÁLNE KLASICKÉ SKALÁRNÍ POLE

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2}$$

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \qquad \pi = \dot{\phi}$$

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2}$$

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H}$$

2. Formulujte odpovídající kvantovou teorii tím, že postulujete komutační relace a odvoďte Heisenbergovu pohybovou rovnici pro $\hat{\phi}$. Rovnici vyřešte. Ukažte, že kvantové pole $\hat{\phi}$ se dá psát ve tvaru:

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^+(x) + \hat{\phi}^-(x) \tag{1}$$

$$\hat{\phi}^-(x) = [\hat{\phi}^+(x)]^- \tag{2}$$

$$\hat{\phi}^+(x) = 1/(2\pi)^3 \int \frac{d^+p}{2\omega_p}\hat{a}(p)e^{-ipx} \tag{3}$$

$$\omega_p = p_p = (p^2 + m^2)^{1/2} \tag{4}$$

(2)

$$\boxed{\text{Platí} \quad H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right]}$$

$$\dot{\phi} = i[H,\phi]$$

$$\boxed{\text{Heisenbergovy pohybové rovnice:} \quad \dot{\phi} = i[H,\phi], \quad \dot{\pi} = i[H,\pi]}$$

$$\boxed{\text{Potrebujem postulovať} \quad [\phi(x,t),\pi(y,t)] = i\delta(x-y), \quad [\phi(x,t),\phi(y,t)] = 0 = [\pi(x,t),\pi(y,t)]}$$

$$\dot{\phi} = i[H,\phi] = i\int d^3x'\,[\mathcal{H}(x',t),\phi(x,t)]$$

$$[\mathcal{H}(x',t),\phi(x,t)] = \left[\frac{1}{2}\pi^2(x',t) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(x',t))^2 + m^2\phi(x',t),\, \phi(x,t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\pi^2(x',t),\phi(x,t)] = \frac{1}{2}\pi(x',t)[\pi(x',t),\phi(x,t)] + \frac{1}{2}[\pi(x',t),\phi(x,t)]\pi(x',t)$$

$$= i\delta(x'-x)\pi(x',t) = -i\pi(x,t)\delta(x-x')$$

$$\dot{\phi} = i[H,\phi] = i\int d^3x'\,[\mathcal{H},\phi] = \pi(x,t)$$

$$\dot{\pi} = i[H,\pi] = i\int d^3x'\,[\mathcal{H}(x',t),\pi(x,t)]$$

$$[\mathcal{H}(x',t),\pi(x,t)] = \left[\frac{1}{2}\pi^2(x',t) + \frac{1}{2}(\nabla'\phi(x',t))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x',t),\, \pi(x,t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[(\nabla'\phi(x',t))^2,\pi(x,t)] + \frac{1}{2}m^2[\phi^2(x',t),\pi(x,t)] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\nabla'\phi(x',t)[\nabla'\phi(x',t),\pi(x,t)] + [\nabla'\phi(x',t),\pi(x,t)]\nabla'\phi(x',t) + m^2\phi(x',t)[\phi(x',t),\pi(x,t)] + m^2[\phi(x',t),\pi(x,t)]\phi(x',t)\Big]$$

$$\boxed{= i\nabla' \phi(x',t)\, \nabla' \delta(x-x') + i m^2 \phi(x',t)\, \delta(x-x')}$$

$$\Rightarrow \dot{\Pi} = i[H, \Pi] = i \int d^3x' \left(i\nabla' \phi(x',t)\, \nabla' \delta(x-x') + i m^2 \phi(x',t)\, \delta(x-x') \right) =$$

$$= \nabla^2 \phi(x',t) - m^2 \phi(x',t)$$

$$\dot{\Pi} = \ddot{\phi} = \nabla^2 \phi - m^2 \phi$$

$$\boxed{\begin{gathered} \Rightarrow (\ddot{\phi} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi) = 0 \\ (\Box + m^2)\phi = 0 \end{gathered}}$$

2. Formulujte odpovídající kvantovou teorii tím, že postulujete komutační relace a odvoďte Heisenbergovu pohybovou rovnici pro $\hat{\phi}$. Rovnici vyřešte. Ukažte, že kvantové pole $\hat{\phi}$ se dá psát ve tvaru:

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^+(x) + \hat{\phi}^-(x) \tag{1}$$

$$\hat{\phi}^-(x) = [\hat{\phi}^+(x)]^- \tag{2}$$

$$\hat{\phi}^+(x) = 1/(2\pi)^3 \int \frac{d^+p}{2\omega_p} \hat{a}(p) e^{-ipx} \tag{3}$$

$$\omega_p = p_p = (p^2 + m^2)^{1/2} \tag{4}$$

3. Postulujte komutační relaci pro $\hat{a}(p)$ aa $\hat{a}(p)^+$ a ukažte,že jsou konzistentní s komutačními relacemi pro pole, které jste formulovali v první části.

Skalárne pole je možné zapísať ako:
kde ϕ^+ je časť s kladnou frekvenciou ϕ^- zápornou

Chceme sa dostať ku tvaru

$$\phi(x) = \sum_p \underbrace{a(p) e^{-ipx}}_{\phi^+} + \underbrace{a^+(p) e^{ipx}}_{\phi^-}$$

POTREBUJEM FOUR. TRANSFORM $\boxed{\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} e^{-ipx} \tilde{\phi}(p)}$

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \longrightarrow \int d^4p\, e^{-ipx} (p^2 - m^2) \tilde{\phi}(p) = 0$$

$$(p^2 - m^2)\tilde{\phi}(p) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\phi}(p) = f(p)\, \delta(p^2 - m^2)$$

$$\tilde{\phi}(p) = f(p) \frac{\delta(p_0 + \sqrt{p^2 + m^2})}{2\sqrt{p^2 + m^2}} + f(p) \frac{\delta(p_0 - \sqrt{\ })}{2\sqrt{\ }}$$

$$= f(p) \frac{\delta(p_0 + \omega_p)}{2\omega_p} + f(p) \frac{\delta(p_0 - \omega_p)}{2\omega_p}$$

$$\longrightarrow \boxed{\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} e^{-ipx} \tilde{\phi}(p)}$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3\, 2\omega_p} e^{-ipx} \left(f(p)\delta(p_0 + \omega_p) + f(p)\delta(p_0 - \omega_p) \right)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left(f(p) e^{-ipx} + g(p) e^{ipx} \right)$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left(a(p) e^{-ipx} + a^+(p) e^{ipx} \right)$$

$$\phi(x) = \sum_p \left(a(p) e^{-ipx} + a^+(p) e^{ipx} \right)$$

③ $[\hat{a}(p), \hat{a}^+(p')] = (2\pi^3) 2\omega_p \delta(p-p') = \delta_{pp'}$

$[\hat{a}(p), \hat{a}(p')] = [\hat{a}^+(p), \hat{a}^+(p')] = 0$

$$\phi(x) = \sum_p \left(a(p) e^{-ipx} + a^+(p) e^{ipx} \right)$$

$$\pi = \dot{\phi} = \sum_p (-i\omega_p) \left(a(p) e^{-ipx} - a^+(p) e^{ipx} \right)$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = \sum_{pp'} [a(p) e^{-ipx} + a^+(p) e^{ipx}, a(p') e^{-ip'y} + a^+(p') e^{ip'y}]$$

$$= \sum_{pp'} [a(p) e^{-ipx}, a^+(p') e^{ip'y}] + [a^+(p) e^{ipx}, a(p) e^{-ip'y}]$$

$$= \sum_p e^{-ipx+ip'y} - e^{ipx-ipy} \quad \ldots = 0$$

$$[\phi(x), \pi(y)] = \sum_{pp'} [(a(p) e^{-ipx} + a^+(p) e^{ipx}), (-i\omega_p) (a(p) e^{-ip'y} - a^+(p) e^{ip'y})] =$$

$$= \sum_{pp'} (-i\omega_p) [a(p) e^{-ipx}, -a^+(p) e^{ip'y}] + (-i\omega_p) [a^+ e^{ipx}, a e^{-ip'y}] =$$

$$= \sum_p i\omega_p \left(e^{-ip(x-y)} + e^{ip(x-y)} \right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} 2i\omega_p e^{-ip(x-y)} = i\delta(x-y)$$

4. S pomocí $\hat{a}(p), \hat{a}(p)^+$ napište vyjádření pro Hamiltonián $\hat{H}$ a operátor počtu částic $\hat{N}$ a spočtěte $< 0 \mid \hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}^+(y)\hat{a}(p)^{p_1\hat{a}(p)^{p_2}|0>}$.

5. Popište , co je normální uspořádaní a jak se dá použít k záměně $\hat{H}$ a $\hat{H}'$, kde $\hat{H}' \mid 0 >= 0$.

(4)

$$\boxed{\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\sum_p \omega_p \left(a(p)\, a^+(p) + a^+(p)\, a(p) \right) \\ &= \sum_p \omega_p \left(a^+(p)\, a(p) + \frac{1}{2}\delta_{pp} \right) \end{aligned}}$$

$$N = \sum_p a^+(p)\, a(p)$$

$$\langle 0 | \phi^+(x)\, \phi^+(y)\, a^+(p_1)\, a^+(p_2) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^+(x) \phi^+(y) \, | p_1, p_2 \rangle =$$

$$= \langle 0 | \sum_{p_1} a(p_1)\, e^{-ixp_1} \sum_{p_2} a(p_2)\, e^{-iyp_2} \, | p_1, p_2 \rangle =$$

$$= \langle 0 | \sum_{p_1} e^{-ixp_1} \sum_{p_2} e^{-iyp_2} \, | 0 \rangle = \langle 0 | \frac{1}{4\omega_{p_1}\omega_{p_2}} \delta(x)\delta(y) | 0 \rangle$$

(5) normální uspořádání

$$\phi(x)\phi(y) = \left(\phi^+(x) + \phi^-(x) \right)\left(\phi^+(y) + \phi^-(y) \right) =$$

$$= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y)$$

$$:\phi(x)\,\phi(y): = \phi(x)\,\phi(y) - \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle$$

← odčítame energiu vakuového stavu

Platí ! $\langle 0 | :\phi(x)\phi(y): | 0 \rangle = 0$

↑ $::$ posúvame $\forall \phi^+$ doprava $\forall \phi^-$ doľava → tzn. ϕ^+ má a , ϕ^- má a^+ ⇒ a doprava, a^+ doľava !

$$H = \frac{1}{2}\sum_p \omega_p \left(a(p)\, a^+(p) + a^+(p)\, a(p) \right) \Rightarrow H' = \frac{1}{2}\sum \omega_p :\, a(p)\, a^+(p) + a^+(p)\, a(p) :$$

$$H' = \frac{1}{2}\sum \omega_p\, 2 \left(a^+(p)\, a(p) \right) = \sum_p \omega_p\, a^+(p)\, a(p)$$

$$H'|0\rangle = 0$$

$$p^\mu = \frac{1}{2}\sum_p p^\mu : aa^+ + a^+ a := \sum p^\mu \, a^+ a$$

Vacuum energy - Diracovo pole

~~$H = \frac{1}{2}\left(a(p)a^+(p) + a^+(p)a(p)\right) = a^+(p)a(p) + \frac{1}{2}\delta_{pp}$~~

KG ↓

$$H = \sum_p \omega_p \, a^+(p) a(p)$$

pretože $\delta_{pp} = (2\pi)^3 \delta(0) = \int d^3x \, e^{\pm ipx} \Big|_{p=0} = \int d^3x = V$

$$H = \sum_p \sum_\lambda \omega_p \left(a^+(p,\lambda) a(p,\lambda) + b^+(p,\lambda) b(p,\lambda) \right) - \sum_p 2\omega_p \delta_{pp'}$$

$\delta_{pp} = (2\pi)^3 2\omega_p \delta(0) =$ hustota energie $\cdot V$

$\Rightarrow$ energia zákl. stavu $= E_0 = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p V$

DIVERGUJE

IR+UV divergence

$$H = \sum_p \sum_\lambda \omega_p \left(a_\lambda^+ a_\lambda - b_\lambda b_\lambda^+ \right)$$

1 Příklad 2

1.Uveďte, stručně argumenty, které vedou a Diracovu rovnici pro volný elektron $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) = 0$ (uveďte požadované vlastnosti γ matice) .

2.Odvoďte transformační vlastnosti $\Psi(x) \longrightarrow \Psi_L(x) = s(L)\Psi(L^{-1x})$ Diracovy vlnové rovnice vzhledem k Lorentzově transformaci L.

3. Pro transformaci $L^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}$, kde $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\mu\nu}$ je infinitezimální (tj. jednotlivé komponenty jsou $\ll 1$) ověřte , že $S(L) = 1 - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$.

4. Uvažujte případ kdy L odpovídá infinitezimální rotaci. Jak se transformují řešení Diracovy rovnice vzhledem k infinitezimální rotacím. Pro ilustraci můžete uvažovat jen rotaci kolem osy z.

1 - Dôvodom odvodenia Dirac. rovnice bola nespokojnosť s KG (hustota pravdepodobnosti nie je pozitívne definitná)

- KG je dif. rovnice 2. řádu

- Dirac chcel vyriešiť tieto problémy "linearizovaním" relat. vlnovej funkcie

Diracova rovnica má tvar $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) = 0$

Príd: $J_\mu = i(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*)$ $\quad \cdot\, \rho = J_0$ (norma) je pozitívne def.

γ matice majú vlastnosti $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_{4\times4}$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^2 \otimes \sigma^i$$

$\gamma^0\gamma^i = -\gamma^i\gamma^0 = (\gamma^0\gamma^i)^+$ $\qquad (\gamma^0)^+ = \gamma^0 \quad (\gamma^i)^+ = -\gamma^i$

$\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{1}$

$\gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^i$ $\qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$(\gamma^5)^+ = \gamma^5 \qquad \gamma^5\gamma^5 = \mathbb{1}$

$\gamma^0 = \sigma^3 \otimes \mathbb{1} \qquad \gamma^i = i\sigma^2 \otimes \sigma^i \qquad \sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$

Diracův Hamiltonián : $i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{i}\alpha\cdot\nabla + \beta m\right)\Psi = H_D\Psi$

$\{\alpha_i, \alpha_k\} = 0$

$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad \forall i \neq k$

$\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$

$\Rightarrow (i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)\Psi = 0$ $\qquad |(\gamma^0)^{-1}$

$(i\partial_0 + i(\gamma^0)^{-1}\gamma^i\partial_i - (\gamma^0)^{-1}m)\Psi = 0$

$\Rightarrow i\partial_0\Psi = \left(\frac{1}{i}\underbrace{(\gamma^0)^{-1}\gamma^i}_{\alpha}\partial_i + \underbrace{(\gamma^0)^{-1}}_{\beta} m\right)\Psi$

Příklad 2 byl stejný pouze v podotázce 2.1, potom se měla odvodit řešení pro pozitivní a negativní energie (u(p) a v(p)), dokázat relace \bar{u}(p,\labmda)\gamma^0u(p,\lambda')=2\omega_p \delta_{\lambda\lambda'}=\bar{v}(p,\lambda)\gamma^0v(p,\lambda), \bar{u}(p,\lambda)\gamma^0v(-p,\lambda)=0.

2 typy riešení $\psi^+(p) = u(p)\, e^{-ipx} = u(p)\, e^{-i\omega t + ipx}$ kladná energia

$\psi^-(p) = v(p)\, e^{ipx}$ záporná

Riešenie pre $u(p)$:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(p) = \begin{pmatrix} E-m & -\sigma p \\ \sigma p & -(E+m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} = 0$$

$$(E-m)\chi - \sigma p \varphi = 0$$
$$\sigma p \chi - (E+m)\varphi = 0$$
$$\varphi = \frac{\sigma p}{E+m}\chi$$

$$\Rightarrow \psi_p^+(x) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\sigma p}{E+m}\chi \end{pmatrix} e^{-ipx}$$

pre $v(p)$:

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)\, v(p) = 0 \qquad \Rightarrow \psi_p^-(x) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \frac{\sigma p}{E+m}\varphi \\ \varphi \end{pmatrix} e^{ipx}$$

Dokázať

$$\bar u_\lambda(p)\gamma^0 u_{\lambda'}(p) = 2\omega_p \delta_{\lambda\lambda'} = \bar v_\lambda(p)\gamma^0 v_\lambda(p)$$

$$\bar u_\lambda u_{\lambda'} = 2m\delta_{\lambda\lambda'}$$
$$\bar v_\lambda v_{\lambda'} = -2m\delta_{\lambda\lambda'}$$
$$\bar u_\lambda v_{\lambda'} = 0 = \bar v_\lambda u_{\lambda'}$$

$$(\not p - m)\, u(p) = 0 \qquad \frac{\not p}{m} u(p) = u(p)$$
$$\bar u(\not p - m) = 0 \qquad \bar u(p)\frac{\not p}{m} = \bar u(p)$$

$$(\not p + m)\, v(p) = 0 \qquad -\frac{\not p}{m} v(p) = v(p)$$
$$\bar v(\not p + m) = 0 \qquad -\bar v(p)\frac{\not p}{m} = \bar v(p)$$

$$\bar u_\lambda(p)\gamma^0 u_{\lambda'}(p) = \frac{1}{2}\left(\bar u_\lambda(p)\gamma^0 u_{\lambda'}(p) + \bar u_\lambda(p)\gamma^0 u_{\lambda'}(p)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\bar u_\lambda(p)\frac{\not p}{m}\gamma^0 u_{\lambda'}(p) + \bar u_\lambda(p)\gamma^0\frac{\not p}{m} u_{\lambda'}(p)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\bar u_\lambda(p)\underbrace{\left\{\frac{\not p}{m},\gamma^0\right\}}_{\frac{2p_0}{m}} u_{\lambda'}(p)\right) = \frac{2p_0}{2m}\delta_{\lambda\lambda'} m = 2p_0\delta_{\lambda\lambda'} = 2\omega_p\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\bar u_\lambda(p)\gamma^0 v_\lambda(p) = 0 = \frac{1}{2m}\left(\bar u_\lambda \not p \gamma^0 v_{\lambda'} - \bar u_\lambda \gamma^0 \not p v_{\lambda'}\right) = \frac{1}{2m}\bar u_\lambda [\not p, \gamma^0] v_{\lambda'} = 0$$

Pak byl zadaný tvar pole psí pomocí módů a a b a komutační relace mezi a, b, a^\dagger a b^\dagger a z nich jsme měli odvodit komutační relace mezi psí a psí^\dagger.
Dál bylo napsat proud pro Diracovo pole a dokázat, že se zachovává a pak ukázat, jak souvisí náboj, definovaný pomocí nulté složky toho pole s částicemi a antičásticemi.

?

$$\psi(x) = \sum_p \left(a(p) e^{-ipx} + b^+(p) e^{ipx} \right)$$

$$\psi^+(x) = \sum_p \left(b(p) e^{-ipx} + a^+(p) e^{ipx} \right)$$

$$[\psi(x), \psi^+(y)] = \Big[\sum_p a(p) e^{-ipx} + b^+(p) e^{ipx} , \sum b(p) e^{-ip'y} + a^+(p) e^{ip'y} \Big]$$

$$= \sum_p \left([a(p) e^{-ipx}, a^+(p) e^{ip'y}] + [b^+(p) e^{ipx}, b(p) e^{-ip'y}] \right)$$

$$= \sum_p \left(e^{-ip(x-y)} + e^{ip(x-y)} \right) = \int_p \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \, 2 \, e^{-ip(x-y)}$$

$$= \frac{1}{\omega_p} \delta(x-y)$$

Dál bylo napsat proud pro Diracovo pole a dokázat, že se zachovává a pak ukázat, jak souvisí náboj, definovaný pomocí nulté složky toho pole s částicemi a antičásticemi.

$$\bar{\psi} = \psi^{+} \gamma^{0}$$

Vlnové funkce sú nahradené poľami!

Prúd pre Dirac. pole $\quad J_\mu(x) = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi(x)$

mám ukázať, že $\quad \partial_\mu J^\mu = 0$

$$\partial_\mu \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi(x) \right) = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) =$$

$$= im \bar{\psi}\psi - im \psi \bar{\psi} = 0$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$
$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi \qquad | i$$
$$-\gamma^\mu \partial_\mu \psi = -im\psi$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\bar{\psi} = 0$$
$$i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} = -m\bar{\psi}$$
$$\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} = im\bar{\psi}$$

$$Qa^{+} = a^{+}Q + Qa^{+} - a^{+}Q = a^{+}Q + [Q, a^{+}]$$
$$=$$

$$Q = :\int d^3x\, J^0(x) : = :\int d^3x\, \psi^{+}_{(x)} \psi_{(x)}:$$

$$Q = \sum_{p,\lambda} \left[a^{+}_{\lambda}(p)\, a_{\lambda}(p) - b^{+}_{\lambda}(p)\, b_{\lambda}(p) \right]$$

$$Q\, a^{+}_{\lambda}(p) = a^{+}_{\lambda}(p)(Q+1)$$

$$Q\, b^{+}_{\lambda}(p) = b^{+}_{\lambda}(p)(Q-1)$$

$a^{+}_{\lambda}(p)$ a $b^{+}_{\lambda}(p)$ vytvárajú častice typu a, b s rovnakou 4-hyb. (rovnakou pokov. hm.) a helicitou

Ide o identické častice, avšak vidíme, že $a^{+}_{\lambda}(p)$ vytvára častice s opačným nábojom než b

Q ztotožňujeme s el. nábojom

a – častice
b – antičastice

2.Odvoďte transformační vlastnosti $\Psi(x) \longrightarrow \Psi_L(x) = s(L)\Psi(L^{-1x})$ Diracovy vlnové rovnice vzhledem k Lorentzově transformaci L.

2 $\psi(x) \to \psi_L(x) = s(L)\psi(L^{-1}x)$

Potrebujem ukázať, že $(i\gamma\partial_\mu - m)\psi_L(x) = 0$

$$(i\gamma\partial_\mu - m)\, s(L)\psi(L^{-1}x) = 0 \qquad | s(L)\, s(L)$$

$$s(L)s^{-1}(L)(i\gamma\partial - m)s(L)\,\psi(L^{-1}x) = 0$$

$$s(L)\left(i s^{-1}(L)\gamma^\mu\partial_\mu s(L) - m\right)\psi(\underbrace{L^{-1}x}_{x'}) = 0$$

$$s(L)\left(i s^{-1}(L)\gamma^\mu\partial_\mu s(L) - m\right)\psi(x') = 0$$

potrebujeme $s^{-1}(L)\gamma^\mu\partial_\mu s(L) = \gamma^\mu\partial'_\mu$

potom by $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_L(x) = s(L)(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi(x')$

a preto, že $\boxed{(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi(x) = 0 \Rightarrow (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_L(x) = 0}$

$$\partial'_\mu = L^\nu{}_\mu\partial_\nu$$

$$x' = L^{-1}x \quad \rightsquigarrow \quad x = Lx'$$

$$s^{-1}(L)\gamma^\mu\partial_\mu s(L) = \gamma^\nu\partial'_\nu = \gamma^\nu L^\mu{}_\nu\partial_\mu$$

$$\boxed{\Rightarrow s^{-1}(L)\gamma^\mu s(L) = \gamma^\nu L^\mu{}_\nu}$$

$S(L_1L_2) = S(L_1)S(L_2)$
$S(L^{-1}) = S^{-1}(L)$

3

$$L^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu} \qquad |\omega^{\mu\nu}| \ll 1$$

$$= -\omega^{\nu\mu}$$

$$\boxed{s^{-1}(L)\gamma^\mu s(L) = L^\mu{}_\nu\gamma^\nu}$$

$$s(L) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} \qquad s^{-1}(L) = \mathbb{1} + \frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}$$

$$L^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu} \qquad | \, \eta_{\gamma\nu}$$

$$L^{\mu}{}_{\gamma} = \delta^{\mu}{}_{\gamma} + \omega^{\mu}{}_{\gamma}$$

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$$

$$S^{-1}(L)\gamma^{\mu} S(L) = L^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$$

$$\left(\cancel{\mathbb{1}} + \frac{i}{4}\omega_{\rho\kappa}\sigma^{\rho\kappa}\right)\gamma^{\mu}\left(\cancel{\mathbb{1}} - \frac{i}{4}\omega_{\rho\kappa}\sigma^{\rho\kappa}\right) = \left(\cancel{\delta^{\mu}{}_{\nu}} + \omega^{\mu}{}_{\nu}\right)\gamma^{\nu}$$

$$\boxed{\frac{i}{4}\left[\omega_{\rho\kappa}\sigma^{\rho\kappa}, \gamma^{\mu}\right] = \omega^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}}$$

$$\frac{i}{4}\left[\omega_{\rho\kappa}\sigma^{\rho\kappa}, \gamma^{\mu}\right] = \eta^{\mu\lambda}\omega_{\lambda\nu}\gamma^{\nu} = \frac{1}{2}\omega_{\lambda\nu}\left(\eta^{\mu\lambda}\gamma^{\nu} - \eta^{\mu\nu}\gamma^{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{\omega_{\rho\kappa}}\,\frac{i}{4}\left[\sigma^{\rho\kappa}, \gamma^{\mu}\right] = \cancel{\omega_{\lambda\nu}}\,\frac{1}{2}\left(\eta^{\rho\mu}\gamma^{\kappa} - \eta^{\kappa\mu}\gamma^{\rho}\right)$$

Tato rovnosť je splněná pokud $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right]$

$$\frac{i}{4}\left(\frac{i}{2}\left[\left[\gamma^{\rho}, \gamma^{\kappa}\right], \gamma^{\mu}\right]\right) = -\frac{1}{8}\left(\underbrace{\left[\gamma^{\rho}\gamma^{\kappa}, \gamma^{\mu}\right]}_{\gamma^{\rho}\{\gamma^{\kappa}, \gamma^{\mu}\} - \{\gamma^{\rho}, \gamma^{\mu}\}\gamma^{\kappa}} - \left[\gamma^{\kappa}\gamma^{\rho}, \gamma^{\mu}\right]\right)$$

$$\gamma^\rho = L^\rho{}_\kappa \gamma^\kappa$$

3. Pro transformaci $L^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}$, kde $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\mu\nu}$ je infinitezimální (tj. jednotlivé komponenty jsou $\ll 1$) ověřte , že $S(L) = 1 - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$.

$$\left(\cancel{1} + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\gamma^\rho\left(\cancel{1} - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) = \left(\cancel{\delta^\rho{}_\kappa} + \omega^\rho{}_\kappa\right)\gamma^\kappa$$

[illegible] $\omega_{\mu\nu}$

$$\frac{i}{4}\left[\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho\right] = \omega^\rho{}_\kappa \gamma^\kappa = \omega_{\mu\nu}\eta^{\mu\rho}\gamma^\nu = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\left(\eta^{\mu\rho}\gamma^\nu - \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu\right)$$

$$\frac{i}{4}\cancel{\omega_{\mu\nu}}\left[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho\right] = \frac{1}{2}\cancel{\omega_{\mu\nu}}\left(\eta^{\mu\rho}\gamma^\nu - \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu\right)$$

to platí pokud $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$

$$\frac{i}{4}\left[\frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right], \gamma^\rho\right] = \frac{i}{4}\frac{i}{2}\left(\left[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\rho\right] - \left[\gamma^\nu\gamma^\mu, \gamma^\rho\right]\right) =$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\gamma^\mu\underbrace{\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\}}_{2\eta^{\nu\rho}} - \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\}\gamma^\nu - \gamma^\nu\{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} + \{\gamma^\nu, \gamma^\rho\}\gamma^\mu\right) =$$

$$= -\frac{1}{8}2\left(\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}\gamma^\nu - \gamma^\nu\eta^{\mu\rho} + \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\rho}\gamma^\nu - \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu\right) \qquad \checkmark$$

4. Uvažujte případ kdy L odpovídá infinitezimální rotaci. Jak se transformují řešení Diracovy rovnice vzhledem k infinitezimální rotacím. Pro ilustraci můžete uvažovat jen rotaci kolem osy z.

(4) Lorentz. Boosty v z ose

$$L_y = \begin{pmatrix} \cosh & 0 & -\sinh & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh & 0 & \cosh & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_0' = x_0 \cosh\eta - x_3 \sinh\eta$$
$$x_1' = x_1$$
$$x_2' = x_2$$
$$x_3' = x_3 \cosh\eta - x_0 \sinh\eta$$

η = rapidita

$\cosh\eta = \gamma$ relat. faktor

$$\Rightarrow L_z = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & -\sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix} \overset{|\eta| \ll 1}{\approx} \mathbb{1}_{4\times4} + \eta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zároveň $L \approx \mathbb{1} - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad \rightarrow L_z \approx \mathbb{1} - \frac{i}{4}\omega_{03} M^{03} + \frac{i}{4}\omega_{30} M^{30}$

$$\approx \mathbb{1} - 2\,\frac{i}{4}\,\omega_{03} M^{03}$$

$K_i = \frac{1}{2} M^{0i} \qquad K_3 = i$

$$K_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^{03} = 2i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S(L) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{0i}\sigma^{0i}\right) \longrightarrow S(L_z) = \exp\left(-\frac{i}{2}\eta\,\sigma^{03}\right)$$

$-\gamma^0\gamma^3$

$$\sigma^{03} = \frac{i}{2}[\gamma^0, \gamma^3] = \frac{i}{2}\left(\gamma^0\gamma^3 - \gamma^3\gamma^0\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left(\gamma^0\gamma^3 \cdot 2\right)$$

$$\Rightarrow S(L_z) = \exp\left(-\frac{i}{2}\eta\, i\, \gamma^0\gamma^3\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\eta\,\gamma^0\gamma^3\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S(L_z) = \ldots = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\left[\mathbb{1} + \frac{q}{E+m}\gamma^0\gamma^3\right]$$

$$S(L_z) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \frac{q}{E+m}\sigma^3 \\ \frac{q}{E+m}\sigma^3 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Uvažujme částici v pokoj. soustavě s 4-hybností

Diracův spinor je v tvaru $u_\lambda(\bar{p}) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$. Boostneme systém do soustavy s rychlostí $-v$ v z směru

$\bar{q}^\mu = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p = L_z \bar{p} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ q \end{pmatrix} \quad \wedge \quad u_\lambda(p) = S(L_z)\, u_\lambda(\bar{p}) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \chi \\ \frac{q}{E+m}\sigma^3 \chi_\lambda \end{pmatrix}$

GOAL

QFT 27.1.2021

January 27, 2021

1 Příklad 1

Diskutujte (max. na 1 stranu) následující pojmy:

- Klein-Gordonova rovnice a její problémy
- Paritní transformace
- Diracova teorie děr a pozitron
- Helicita

2 Příklad 2

2.1

Dokažte, že platí-li infinitezimální transformace komplexního skalárního pole ϕ

$$\phi \to \phi' = \phi + \delta\phi,$$

pak čtyřproud

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)}\delta\phi + \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\dagger)}}\delta\phi^\dagger$$

splňuje rovnici kontinuity.

2.2

Ukažte že náboj

$$\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\ \mathrm{J}^0(\mathrm{x})$$

je konstantní v čase.

2.3

Mějme hustotu Lagrangiánu

$$\mathcal{L} = f(\phi^\dagger \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger)(\partial_\mu \phi),$$

f reálná funkce. Získejte J_μ, Q odpovídající

$$\phi \to \phi' = e^{-i\alpha}\phi$$

s malým reálným α. Jak J_μ souvisí s Noetherovým proudem?

2.4

Přepište operátor $\hat{Q}$ do řeči $\hat{\phi}, \hat{\phi}^\dagger$ a $\hat{\pi}, \hat{\pi}^\dagger$. Ukažte, že do řádu α se výše uvedená transformace dá psát

$$\hat{\phi} \to \hat{\phi}' = e^{i\hat{Q}\alpha}\ \hat{\phi}\ e^{-i\hat{Q}\alpha}.$$

Niekedy voľba Pauliho spinorov $\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
so spinom častice kvantovaným v smere z
nie je vhodnou voľbou báze v spin. priestore

Nie je nutné uvažovať os z, stačí uvažovať situáciu, kedy je smer určený pozdĺž 3-hybnosti častice

Spinový operátor $\hat{s} = \frac{1}{2}\Sigma$ nekomutuje s voľným diracovým Ham

$$[H_D, \hat{s}] = i\alpha \times p \neq 0$$

Projekcia spinu nie je zachovaná voči časovému vývoji
je vhodné preto bispinory označiť iným kv. č., kt. zachováva projekcie spinu

Vhodným kv. č. je helicita $\quad h = \frac{1}{2}\Sigma \frac{p}{|p|}$

$$[H_D, h] = 0 \quad , \quad h^2 = \frac{(\hat{s}p)(\hat{s}p)}{|p|^2} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ vl. hodnoty sú $h = \pm\frac{1}{2}$

1 Příklad 1

Diskutujte (max. na 1 stranu) následující pojmy:

- Klein-Gordonova rovnice a její problémy
- Paritní transformace
- Diracova teorie děr a pozitron
- Helicita

Relat. častica $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ $\quad p^\mu = (E, \vec{p})$ $\quad \vec{p} \to i\vec{\nabla}$ $\quad E \to i\frac{\partial}{\partial t}$

$$p^\mu p_\mu = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\phi(x) = m^2 \phi(x)$$

① $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0$ $\qquad p^\mu = (p_0, \underset{\sim}{p}) = (\omega_{\underset{\sim}{p}}, \underset{\sim}{p})$

$(\Box + m^2)\phi(x) = 0$

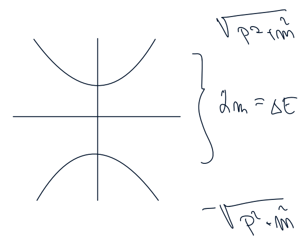
Riešenie $\phi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} e^{-ipx} \tilde{\phi}(p) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} \left(f(p) e^{-ipx} + g(p) e^{ipx} \right)$

Obecné riešenie KG je lin. superpozícia kladným a záporným riešeniam

→ Pokiaľ chceme $\phi(x)$ interpretovať ako vlnovú fci, musí jej norma byť PD, časovo nezávislá, Lorentzovo skalár (relat. invariantnosť)

PROBLÉMY

- norma je obecne nedefinitná. Keď sa obmedzíme na kladné energie tak PD
- $\|\phi\| = i \int d^3x \left[\phi^* \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \phi^* \right] = i \int d^3x \, \rho$ kde ρ nemôže reprezentovať hustotu pravdepod. ale skôr hustotu náboja
- Ďalším problémom je, že pre ľub. rovinnú vlnu $\Psi(x) = N e^{\pm i(\omega t - px)}$ splňajúcu KG platí $E^2 = \omega_p^2 = \vec{p}^2 + m^2$



$\Rightarrow E = -\sqrt{p^2 + m^2}$ je rovnako dôležitá ako $E = \sqrt{p^2 + m^2}$

to ale vedie na ~~nespojitosť~~ skok v energetickom spektre

v klas. fyzike neexistuje žiaden spojitý proces, kt. by to umožnil

v QM ide o vyžiarenie 2 alebo viac fotonov

ak by sme mali kv. časticu, kt. by splňala KG viedlo by to k perpetum mobile 1. druhu

PARITNÁ TRANSFORMÁCIA

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \xrightarrow{P} x^\mu_P = (t, -\vec{x})$$

$$x^\mu_P = P^\mu{}_\nu \, x^\nu$$

$$P^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

Spĺňa vlastnosti Lorentz. grupy $\quad P^\mu{}_\alpha P^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad$ P-element L grupy

$$\det P = -1$$

$$S(P)\gamma^\mu S^{-1}(P) = P^\mu_\nu \gamma^\nu \iff S^{-1}(P)\gamma^\mu S(P) = P^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

$$S(P)\gamma^0 S^{-1}(P) = -(-1)^{\delta_{\mu 0}} \gamma^\mu$$

keď uvažujeme $\quad S(P) = \gamma^0 \Rightarrow \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = -(-1)^{\delta_{\mu 0}} \gamma^\mu$

Obecne $\quad S(P) = e^{i\varphi} \gamma^0$

Paritou transformovaný bispinor $\quad \psi_P(x) = S(P)\psi(P^{-1}x) = e^{i\varphi}\gamma^0 \psi(P^{-1}x)$

$$= e^{i\varphi}\gamma^0 \psi(x_P)$$

Diracova teorie děr

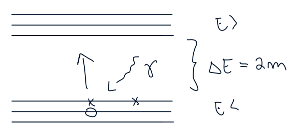
Díváme sa na fyz. význam riešení s negatívnou energiou

V Dirac. teorii základný stav atomu nepredstavuje stav s najnižšou energiou, keďže existuje kontinuum záporných energetických stavov od $(-mc^2$ do $-\infty)$

To platí aj keď uvažujeme Coulomb. potenciál

$$E = \pm\sqrt{(p-eA)^2+m^2}+e\varphi$$

$$(\Delta E)_{min} = (E^{>}-E^{<})_{min} = 2m$$



Aby sa Dirac vyhol vyžarovaciemu paradoxu, postuloval "more" - vákuum, kde všetky energetické stavy s $E^{<}$ sú obsadené.
Pre absenciu externých polí predstavuje vákuum kontinuum zápornej energie $E^{<}$

Je možné, že ak príde fotón s energiou aspoň $2m$, môže stimulovať preskoky e^- z $E^{<}$ do $E^{>}$, výsledkom čoho je vznik diery

$$E_{OBS} = E_{VAC} + |E_e^{<}| \quad \Rightarrow$$

pozorovateľ mora s 1 dierou

$$Q_{OBS} = Q_{VAK} + |e| \quad \Rightarrow$$ diere možno pripísať náboj $Q_{OBS} - Q_{VAK} = |e| > 0$

$\Rightarrow$ $\exists$ častica s nábojom $|e|$ a pozitívnou energiou

$$P_{OBS} = P_{VAC} - p \quad \Rightarrow$$ diera nesie hybnosť $-p$

Podobne postupujeme so spinom ...

$\Rightarrow$ Diera v mori odpovedá nábojovo konjug. riešeniu $\psi_\lambda^{(-)}$ negat. energ. vl. funkcii

$$\psi_\lambda^{(-)} \xrightarrow{\ell} \psi_{-\lambda}^{(+)}$$

Diera = antičastica = pozitron

Helicita

Niekedy sa stáva, že voľba Pauliho spinorov $\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
so spinom častice kvantovaným v z-osi nie je vhodnou
voľbou báze v spinorovom priestore.
Miesto z osi môžme uvažovať ľubovoľný ktorýkoľvek kvantovaný smer.
V takom prípade je výhodné uvažovať o situácii kedy je smer určený pozdĺž
3-hybnosti častice.

Zavádza sa preto helicita ako projekcia spinu do smeru 3-hybnosti : $h = \frac{1}{2} \Sigma \frac{p}{|p|}$

Spinový operátor $\hat{s} = \frac{1}{2} \Sigma$ nekomutuje s voľným Dirac. Hamilt.

$$[H_D, \hat{s}] = i\alpha \times p \neq 0$$

Projekcia spinu nie je zachovaná voči časovému vývoju a
preto je výhodné bispinory označiť iným kv. číslom, kt. by zachovávalo projekciu spinu pri časovej evolúcii

$$[H_D, h] = 0 \quad \wedge \quad h^2 = \frac{(\hat{s} \cdot p)\,(\hat{s} \cdot p)}{|p|^2} = \frac{1}{4}$$

pravotočivá častica

$\Rightarrow$ vl. hodnoty sú $h = \pm \frac{1}{2}$

ľavotočivá

2 Příklad 2

2.1

Dokažte, že platí-li infinitezimální transformace komplexního skalárního pole ϕ

$$\phi \to \phi' = \phi + \delta\phi,$$

pak čtyřproud

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\dagger)} \delta\phi^\dagger$$

splňuje rovnici kontinuity.

2.2

Ukažte že náboj

$$\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\ \mathrm{J}^0(\mathrm{x})$$

je konstantní v čase.

① Skalární pole $\phi \to \phi' = \phi + \delta\phi$

Lagr. na zachovával $\delta\mathcal{L} = 0$ $\delta\mathcal{L} = \int dy \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi(y)} \delta\phi(y)$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi(y)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} \delta(x-y) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \partial_\mu \delta(x-y)$$

Pohybová rovnice: $\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) \delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \partial_\mu \delta\phi(x) =$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right] = 0$$

PRŮD: $\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^+)} \delta\phi^+ \right) = 0$

(2.2) $\int d^3x\, J^0(x) =$

$$\frac{d}{dt}Q = \partial_0 Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \partial_0 J^0(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \partial^3 x \nabla J = -\int_S dS\, J \to 0$$

2.3

Mějme hustotu Lagrangiánu

$$\mathcal{L} = f(\phi^\dagger\phi)(\partial^\mu\phi^\dagger)(\partial_\mu\phi),$$

f reálná funkce. Získejte J_μ, Q odpovídající

$$\phi \to \phi' = e^{-i\alpha}\phi$$

s malým reálným α. Jak J_μ souvisí s Noetherovým proudem?

(2.3) $\mathcal{L} = f(\phi^+\phi)(\partial^\mu\phi^+)(\partial_\mu\phi)$

$J_\mu \qquad \phi \to \phi' = e^{-i\alpha}\phi$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi_1)^2 + (\partial_\mu\phi_2)^2\right] + \frac{1}{2}m^2(\phi_1^2+\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\lambda(\phi_1^2+\phi_2^2)$$

$$= (\partial_\mu\phi^+)(\partial^\mu\phi) - m^2(\phi^+\phi) - \lambda(\phi^+\phi)^2$$

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha}\phi$$
$$\phi^+ \to (\phi^+)' = e^{-i\alpha}\phi^+$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\phi' \\ (\phi^+)'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi \\ \phi^+\end{pmatrix}$$

$$T = -i\frac{dG}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_\mu = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}T_{11}\phi - i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^+)}T_{22}\phi^+ = -i(\partial_\mu\phi^+)\phi + i(\partial^\mu\phi)\phi^+$$

$$= i\left[(\partial^\mu\phi)\phi^+ - (\partial_\mu\phi^+)\phi\right]$$

2.3

Mějme hustotu Lagrangiánu

$$\mathcal{L} = f(\phi^\dagger\phi)(\partial^\mu\phi^\dagger)(\partial_\mu\phi),$$

f reálná funkce. Získejte J_μ, Q odpovídající

$$\phi \to \phi' = e^{-i\alpha}\phi$$

s malým reálným α. Jak J_μ souvisí s Noetherovým proudem?

2.4

Přepište operátor $\hat{Q}$ do řeči $\hat{\phi}, \hat{\phi}^\dagger$ a $\hat{\pi}, \hat{\pi}^\dagger$. Ukažte, že do řádu α se výše uvedená transformace dá psát

$$\hat{\phi} \to \hat{\phi}' = e^{i\hat{Q}\alpha}\ \hat{\phi}\ e^{-i\hat{Q}\alpha}.$$

(2.3) Noether proud: $J_\alpha(x) = -i \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\alpha\phi_n)} T_{nq}\, \phi_q(x)$

$$T = -i \left.\frac{dG}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$$

v tomto případe G je ϕ' $\Rightarrow$ $T = 1$

$$J_\mu(x) = -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_n)} T\phi = -i\, f(\phi^+\phi)(\partial^\mu\phi^+)$$

pričom $Q = \int d^3x\, J_0 = -i \int d^3x\, f(\phi^+\phi)\underbrace{(\partial^0\phi^+)}_{\pi}$

(2.4)

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

$$\mathcal{L} = (\partial^\alpha\phi^+)(\partial_\alpha\phi) - m^2(\phi^+\phi) - \lambda(\phi^+\phi)^2$$

$\phi' = e^{i\alpha}\phi$
$(\phi^+)' = e^{-i\alpha}\phi$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\phi' \\ (\phi^+)'\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha}\end{pmatrix}}_{G}\begin{pmatrix}\phi \\ \phi^+\end{pmatrix}$$

$$T = -i \left.\frac{dG}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$J_\mu(x) = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_n)} T_{nq} \phi_q(x)$$

$$J_\mu(x) = -i(\partial^\mu \phi^+) \cdot 1 \cdot \phi - i(\partial_\mu \phi)(-1)\phi^+ = i((\partial_\mu \phi)\phi^+ - (\partial^\mu \phi^+)\phi)$$

pričom $Q = \int d^3x \, J_0 = i \int d^3x \, (\pi \phi^+ - \pi^+ \phi)$

$$u_\lambda = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\sigma p}{E+m} \chi_\lambda \end{pmatrix} \qquad v_\lambda = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\sigma p}{E+m} \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_\lambda = u_\lambda^* \gamma^0 = \sqrt{E+m} \left(\chi_\lambda , \frac{-\sigma p}{E+m} \chi_\lambda \right)$$

$$\bar{u}_{\lambda'} u_\lambda = (E+m) \left(\chi_{\lambda'} , -\frac{\sigma p}{E+m} \chi_{\lambda'} \right) \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\sigma p}{E+m} \chi_\lambda \end{pmatrix} = (E+m) \left(\chi_{\lambda'} \chi_\lambda - \frac{\sigma p \, \sigma p}{(E+m)(E+m)} \chi_{\lambda'} \chi_\lambda \right)$$

$$= (E+m) \chi_{\lambda'} \chi_\lambda - (E-m) \chi_{\lambda'} \chi_\lambda = 2m \chi_{\lambda'} \chi_\lambda$$

Písemná zkouška z kvantové teorie pole I (120 minut) - 21. ledna, 2022

Příklad 1: Předpokládejte, že $p^2 = m^2$ a nechť

$$\Lambda_\pm = \frac{1}{2m}(m \pm \gamma p)\,.$$

1. S využitím vztahu $(\gamma p)^2 = m^2$ ukažte, že $\Lambda_\pm \psi$ je vždy vlastní vektor matice γp s vlastními hodnotami $\pm m$.

2. Ukažte, že $\Lambda_+ + \Lambda_- = 1$, $\Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = 0$ a $\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm$. Diskutujte význam těchto výsledků. Čemu v Diracově teorii odpovídají $\Lambda_\pm$.

3. Ukažte, že je možné nalézt vektory u_λ, v_λ, $\lambda = 1, 2$ takové, že

$$(\gamma p - m)u_\lambda = 0\,, \quad (\gamma p + m)v_\lambda = 0\,, \quad \lambda = 1,2\,,$$
$$\bar{u}_{\lambda'} u_\lambda = -\bar{v}_{\lambda'} v_\lambda = 2m\delta_{\lambda'\lambda}\,, \quad \bar{u}_{\lambda'} v_\lambda = 0\,, \quad \lambda', \lambda = 1, 2.$$

4. S využitím předchozích výsledků dokažte, že

$$\Lambda_+ = \sum_{\lambda=1}^{2} \frac{1}{2m} u_\lambda \bar{u}_\lambda\,, \qquad \Lambda_- = -\sum_{\lambda=1}^{2} \frac{1}{2m} v_\lambda \bar{v}_\lambda\,.$$

Příklad 2: Stručně diskutujte (né víc než na jednu stránku) každé z následujících témat:

1. Normálně uspořádaný součin pro bosonovká pole
2. Tenzor energie a hybnosti a 4-hybnost pro Klein–Gordonovo pole
3. Polní multiplety a teorém Emy Noetherové
4. Vakuová energie pro volné Diracovo pole

pokud $\chi_1 = \binom{1}{0} \Rightarrow \chi_2 = (1,0)$ $\Rightarrow$

$$\cancel{\tfrac{1}{2m}}(m + \gamma p) = \sum_{\lambda=1}^{2} \cancel{\tfrac{1}{2m}} u_\lambda \bar{u}_\lambda \quad | v_\lambda$$

$$m + \gamma p = \sum_{\lambda=1}^{2} u_\lambda \bar{u}_\lambda$$

$$(m + \gamma p) v_\lambda = \sum u_\lambda \underbrace{\bar{u}_\lambda v_\lambda}_{0} \quad \checkmark$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2m}}(m - \gamma p) = -\sum \cancel{\tfrac{1}{2m}} v_\lambda \bar{v}_\lambda \quad | u_\lambda$$

$$-(\gamma p - m) = -\sum v_\lambda \bar{v}_\lambda$$

$$+(\gamma p - m) u_\lambda = +\sum v_\lambda \underbrace{\bar{v}_\lambda u_\lambda}_{0} \quad \checkmark$$

$$\Lambda_+ = \frac{1}{2m}\left(\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E & -\sigma p \\ \sigma p & -E \end{pmatrix} \right)$$

$$\Lambda_+ \psi = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E + m & -\sigma p \\ \sigma p & -E + m \end{pmatrix}$$

$$\gamma p \Lambda_+ \psi = m \Lambda_+ \psi$$

$$\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E & -\sigma p \\ \sigma p & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E + m & -\sigma p \\ \sigma p & -E + m \end{pmatrix} = m\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E + m & -\sigma p \\ \sigma p & -E + m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & -\sigma p \\ \sigma p & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -\sigma p \\ \sigma p & -E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E^2 - \sigma p \sigma p & 0 \\ 0 & E^2 - \sigma p \sigma p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix} \Rightarrow E^2 - \sigma p \sigma p = m^2$$

$$\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E & -\sigma p \\ \sigma p & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E + m & -\sigma p \\ \sigma p & \underbrace{-E + m}_{-(E-m)} \end{pmatrix} = m\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E + m & -\sigma p \\ \sigma p & -E + m \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E(E+m) - \sigma p \sigma p & -\sigma p E + (E-m)\sigma p \\ \sigma p (E+m) - E\sigma p & -\sigma p \sigma p + E(E-m) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E + m & -\sigma p \\ \sigma p & -E + m \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E(E+m) - (E^2 - m^2) & -\sigma p\, m \\ \sigma p\, m & -(E^2 - m^2) + E(E-m) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E + m & -\sigma p \\ \sigma p & -E + m \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} E + m & -\sigma p \\ \sigma p & -E + m \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E + m & -\sigma p \\ \sigma p & -E + m \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_- \psi = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} m - E & \sigma p \\ -\sigma p & m + E \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2m}(-m)$$

$$\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E & -\sigma p \\ \sigma p & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m - E & \sigma p \\ -\sigma p & m + E \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} m - E & \sigma p \\ -\sigma p & m + E \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} Em - E^2 + \overbrace{\sigma p \sigma p}^{E^2 - m^2} & E\sigma p - \sigma p(m + E) \\ \sigma p(m - E) + E\sigma p & \cancel{\sigma p}\sigma p - E(m + E) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} Em - m^2 & -\sigma p\, m \\ \sigma p\, m & -m^2 - Em \end{pmatrix} =$$

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = 1 \qquad \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} m+E & -\sigma p \\ \sigma p & m-E \end{pmatrix} + \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} m-E & \sigma p \\ -\sigma p & m+E \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_+ \Lambda_- = \frac{1}{4m^2}\begin{pmatrix} (m+E)(m-E) + \sigma p \sigma p & \sigma p m + \sigma p E - \sigma p m - \sigma p E \\ \sigma p m - \sigma p E - \sigma p m + \sigma p E & \sigma p \sigma p + (m+E)(m-E) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4m^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OTÁZKA

Ide o projektorové operátory t.j. projektujú do kladných resp. negatívnych energetických stavov

(3) $(\gamma p - m) u_\lambda = 0 \qquad (\gamma p + m) v_\lambda = 0 \qquad \lambda = 1,2$

$\bar{u}_\lambda u_\lambda = -\bar{v}_{\lambda'} v_\lambda = 2m\,\delta_{\lambda'\lambda} \qquad \bar{u}_{\lambda'} v_\lambda = 0 \qquad \lambda', \lambda = 1$

u_λ:

$(\gamma p - m) u_\lambda = 0 \qquad \begin{pmatrix} E-m & -\sigma p \\ \sigma p & -(E+m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \varphi_\lambda \end{pmatrix} = \begin{matrix} (E-m)\chi_\lambda - \sigma p \varphi_\lambda = 0 \\ \sigma p \chi_1 - (E+m)\varphi_\lambda = 0 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \chi_\lambda = \frac{\sigma p}{E+m}\varphi_\lambda$$

$$u_\lambda = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\sigma p}{E+m}\chi_\lambda \end{pmatrix}$$

$$v_\lambda = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \frac{\sigma p}{E+m}\varphi_\lambda \\ \varphi_\lambda \end{pmatrix}$$

$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma p}{E+m} \end{pmatrix}$

$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \frac{\sigma p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad u_1 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad u_2 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sigma p}{E+m}\end{pmatrix}$$

$$v_1 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}\frac{\sigma p}{E+m}\\0\end{pmatrix} \qquad v_2 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\overline{u_1}\, u_2 = -\overline{v}_1 v_2 = 2m\,\delta_{\lambda'\lambda}$$

$$\overline{u}_\lambda u_\lambda = u_\lambda^+ \gamma^0 u_{\lambda'} = (E+m)\left(\chi_\lambda, \frac{\sigma p}{E+m}\chi_\lambda\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_{\lambda'}\\ \frac{\sigma p}{E+m}\chi'_\lambda\end{pmatrix} =$$

$$= (E+m)\left(\chi_\lambda, -\frac{\sigma p}{E+m}\chi_\lambda\right)\begin{pmatrix}\chi_{\lambda'}\\ \frac{\sigma p}{E+m}\chi'_\lambda\end{pmatrix} =$$

$$= (E+m)\left(\chi_\lambda\chi_{\lambda'} - \frac{\sigma p}{E+m}\frac{\sigma p}{E+m}\chi_\lambda\chi_{\lambda'}\right) =$$

$$= (E+m)\left(\chi_\lambda\chi_{\lambda'} - \frac{(E+m)(E-m)}{(E+m)(E+m)}\chi_\lambda\chi_{\lambda'}\right) =$$

$$= \left((E+m) - (E-m)\right)\chi_\lambda\chi_{\lambda'} = 2m\,\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\overline{v}_{\lambda'} v_\lambda = (E+m)\left(\frac{\sigma p}{E+m}\varphi, \varphi\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sigma p}{E+m}\varphi\\ \varphi\end{pmatrix} = \left(\frac{\sigma p}{E+m}\varphi, -\varphi\right)\begin{pmatrix}\frac{\sigma p}{E+m}\varphi\\ \varphi\end{pmatrix} =$$

$$= (E+m)\left(\frac{\sigma p}{E+m}\frac{\sigma p}{E+m}\varphi_\lambda\varphi_{\lambda'} - \varphi_\lambda\varphi_{\lambda'}\right) =$$

$$= \quad (E-m-E-m) = -2m\,\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\chi_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \chi_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad u_1 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{\sigma p}{E+m}\\0\end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix}\frac{\sigma p}{E+m}\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}0\\ \frac{\sigma p}{E+m}\\0\\1\end{pmatrix} \qquad u_2 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \frac{\sigma p}{E+m}\end{pmatrix}$$

$$\Lambda_+ = \sum \frac{1}{2m} u_\lambda \bar{u}_\lambda \qquad (\,(\,)^2$$

$$(\Lambda_+)^2 = \Lambda_+$$

$$\sum_{\lambda\lambda'} \frac{1}{2m}\frac{1}{2m} u_\lambda \underbrace{\bar{u}_\lambda u_{\lambda'}}_{2m\,\delta_{\lambda\lambda'}} \bar{u}_{\lambda'} = \sum_{\lambda\lambda'} \frac{1}{2m}\frac{1}{\cancel{2m}}\, \cancel{2m}\,\delta_{\lambda\lambda'}\, u_\lambda \bar{u}_{\lambda'}$$

$$= \sum_\lambda \frac{1}{2m} u_\lambda \bar{u}_\lambda$$

$$H = \sum_{p,\lambda} \omega_p \left(a_\lambda(p)\, a^+_\lambda(p) + b_\lambda(p)\, b^+_\lambda(p)\right) = \sum_{p,\lambda} \omega_p \left(a^+(p)\, a(p) + b^+(p)\, b(p)\right) - \sum_p 2\omega_p \delta_{pp'}$$

Příklad 2: Stručně diskutujte (né víc než na jednu stránku) každé z následujících témat:

1. Normálně uspořádaný součin pro bosonovká pole
2. Tenzor energie a hybnosti a 4-hybnost pro Klein–Gordonovo pole
3. Polní multiplety a teorém Emy Noetherové
4. Vakuová energie pro volné Diracovo pole

$$\sum_p a(p)\, e^{-ipx}$$

Skalárne pole $\quad \phi = \phi^+ + \phi^-$

$$\sum a^+(p)\, e^{ipx}$$

$$\phi(x)\phi(y) = \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y)$$

$$:\phi(x)\phi(y): = \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^-(y) + \dots$$

$$:\phi(x)\phi(y): = \phi(x)\phi(y) - \langle 0|\, \phi(x)\phi(y)|0\rangle$$

$$H = \frac{1}{2}\sum_p \omega_p \left(a(p)\, a^+(p) + a^+(p)\, a(p) \right)$$

$$:H: = \frac{1}{2}\sum_p \omega_p :\!\left(a(p)\, a^+(p) + a^+(p)\, a(p)\right) = \frac{1}{2}\sum \omega_p \left(2 a^+(p)\, a(p)\right) =$$

$$= \sum \omega_p\, a^+(p)\, a(p)$$

$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0$

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

$T^\mu{}_\nu = (\partial_\nu\phi)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}$

$T^\mu{}_\nu = (\partial_\nu\phi)(\partial^\mu\phi) - \delta^\mu{}_\nu\left(\frac{1}{2}(\partial_\rho\phi)(\partial^\rho\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right)$

$T^0{}_0 = \dot\phi^2 - \frac{1}{2}\dot\phi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$

$P_\nu = \int d^3x\, T^0{}_\nu$

$T^0{}_j = \partial_j\phi\,\partial^0\phi$

② $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0$

$T^\mu{}_\nu = \partial_\nu\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}$ $\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

$\Rightarrow (\partial_\nu\phi)(\partial^\mu\phi) - \delta^\mu{}_\nu\left(\frac{1}{2}(\partial_\rho\phi)(\partial^\rho\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right)$

$P_\nu = \int d^3x\, T^0{}_\nu$

$T^0{}_0 = \dot\phi^2 - \left(\frac{1}{2}\dot\phi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right) = \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$

$T^0{}_j = \partial_j\phi\,\partial^0\phi$

④ $H = \sum_p \sum_\lambda \omega_p\left(a^\dagger(p,\lambda)a(p,\lambda) + b^\dagger(p,\lambda)b(p,\lambda)\right) - \sum_p 2\omega_p\delta_{pp'}$

$$p^{\mu} = \frac{1}{2}\sum_p p^{\mu} : aa^+ + a^+ a := \sum p^{\mu} a^+ a$$

Vacuum energy - Diracovo pole

~~$H = \frac{1}{2}\left(a(p)a^+(p) + a^+(p)a(p)\right) = a^+(p)a(p) + \frac{1}{2}\delta_{pp}$~~

KG ⤵

$$H = \sum_p \omega_p a^+(p)a(p)$$

preleže $\delta_{pp} = (2\pi)^3 \delta(0) = \int d^3x \, e^{\pm ipx} \Big|_{p=0} = \int d^3x = V$

$$H = \sum_p \sum_\lambda \omega_p \left(a^+(p,\lambda)\, a(p,\lambda) + b^+(p,\lambda)\, b(p,\lambda) \right) - \sum_p 2\omega_p \delta_{pp'}$$

$\delta_{pp} = \cancel{(2\pi)^3} 2\omega_p \delta(0) =$ hustota energie $\cdot V$

$\Rightarrow$ energia zákl. stavu $= E_0 = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p V$

DIVERGUJE
IR+UV divergence

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi$$
$$\phi^\dagger \rightarrow \phi^{\dagger\prime} = e^{-i\alpha}\phi^\dagger$$

$$J_\mu = -i\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu(\partial\phi_n)}\,T_{nq}\phi_q$$

$$\begin{pmatrix}\phi' \\ \phi^{\dagger\prime}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha}\end{pmatrix}}_{G}\begin{pmatrix}\phi \\ \phi^\dagger\end{pmatrix}$$

$$T = -i\,\frac{\partial G}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$$
$$\Rightarrow T_{11} = 1$$
$$T_{22} = -1$$

Obecně $\quad \mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)(\partial_\mu\phi) - m^2(\phi^*\phi) - \lambda(\phi^*\phi)^2$

$$\Rightarrow J_\mu = -i(\partial_\mu\phi)\cdot T_{22}\cdot\phi^* - i(\partial_\mu\phi^*)\cdot T_{11}\cdot\phi = i[\phi^*(\partial_\mu\phi) - \phi(\partial_\mu\phi^*)]$$

$$Q = \int d^3x\, J^0 = i\int \phi^*\partial_0\phi - \phi\,\partial_0\phi^* = i\int \phi^+\pi^+ - \phi\pi =$$

IMPORTANT!

$$\pi^+(x,t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi^+} = \dot\phi$$

$$\pi^+(x,t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \dot\phi^+$$

$$[\phi,\pi] = i\delta(x-y)$$
$$[\phi^+,\pi^+] = i\delta(x-y)$$
$$\phi\pi = i + \pi\phi$$
$$\phi^+\pi^+ = i + \pi^+\phi^+$$
$$\Rightarrow 2i + \pi\phi + \pi^+\phi^+$$