

Diracovy spinory pro rovinné vlny

Speciální Lorentzovy transformace (boosty) jsou na Diracových (bi)spinorech realizovány maticí

$$B(\theta) = \exp(-i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}),$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor ve směru, v němž boost působí, $\theta \equiv \ln \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ je *rapidita* a $\mathbf{N} = \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha}$ je vektor generátorů boostů.

- (i) V Diracově reprezentaci γ -matic ukažte, že vektory matic $\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ (generátory rotací spinu) a $\mathbf{N}$ splňují obvyklé komutační relace Lorentzovy grupy,

$$\begin{aligned} [M_i, M_j] &= i\varepsilon_{ijk} M_k, \\ [M_i, N_j] &= i\varepsilon_{ijk} N_k, \\ [N_i, N_j] &= -i\varepsilon_{ijk} M_k. \end{aligned}$$

- (ii) Spočítejte matici $B(\theta)$ pro boost, který urychlí částici o hmotnosti m z klidu na impuls $\mathbf{p}$. Mělo by vám vyjít

$$B(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} E+m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & E+m \end{pmatrix}.$$

- (iii) Najděte čtyři lineárně nezávislá řešení Diracovy rovnice (dvě s kladnou a dvě se zápornou energií) pro volnou částici v klidu. S pomocí výsledku předchozí části najděte lineárně nezávislá řešení Diracovy rovnice s daným impulsem. Normujte je podle standardní konvence $\bar{u}u = 2m$ pro řešení s kladnou energií, resp. $\bar{v}v = -2m$ pro řešení se zápornou energií. Očekávaný výsledek je

$$u^{(i)}(\mathbf{p}) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi^{(i)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi^{(i)} \end{pmatrix}, \quad v^{(i)}(\mathbf{p}) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi^{(i)} \\ \chi^{(i)} \end{pmatrix},$$

kde $\chi^{(i)}$, $i = 1, 2$ je vhodně zvolená ortonormální báze dvoukomponentních komplexních vektorů.