Vlastnosti Diracových γ-matic

(i) Lorentzovy transformace Diracova bispinoru jsou generovány sadou matic

$$\sigma^{\alpha\beta} \equiv \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$$

v tom smyslu, že tyto matice splňují stejné komutační relace jako generátory Lorentzovy grupy $M^{\alpha\beta}$, jež jsou definovány vztahem

$$(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = \mathrm{i}(g^{\mu\alpha} g^\beta_\nu - g^{\mu\beta} g^\alpha_\nu).$$

Konečná Lorentzova transformace $\Lambda = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta})$ je na Diracově bispinoru reprezentována maticí $S(\Lambda) = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta})$.

Dokažte, že Diracovy γ-matice se vůči Lorentzovým transformacím chovají jako kontravariantní čtyřvektor, tj.

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Návod: Začněte s infinitezimální Lorentzovou transformací a s pomocí fundamentálních antikomutačních relací pro γ-matice odvoďte komutátor

$$[\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] = -(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \gamma^\mu.$$

(ii) Antikomutační relace $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ určují γ-matice až na podobnostní transformaci. Vycházeje z Diracovy reprezentace γ-matic, proveďte podobnostní transformaci maticí $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Ukažte, že v této tzv. *chirální reprezentaci* jsou generátory spinových rotací i boostů, a tudíž i matice všech konečných Lorentzových transformací, blokově diagonální.

Poznámka: Tato skutečnost ukazuje, že Diracův (bi)spinor je *reducibilní* reprezentací vlastní Lorentzovy grupy. Lze jej složit ze dvou dvoukomponentních *Weylových spinorů*, v řeči teorie grup je přímým součtem ireducibilních reprezentací $D^{(\frac{1}{2},0)} \oplus D^{(0,\frac{1}{2})}$. Operace parity zaměňuje tyto dvě reprezentace, její zahrnutí tedy vyžaduje použití Diracova bispinoru namísto spinoru Weylova.

(iii) Dokažte následující identity pro γ-matice:

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma^\mu &= 4, \\
\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu &= -2\gamma^\alpha, \\
\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta}, \\
\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\mu &= -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha, \\
\mathrm{Tr}(\gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma^\beta \gamma_\nu)\,\mathrm{Tr}(\gamma^\gamma \gamma^\mu \gamma^\delta \gamma^\nu) &= 32(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}).
\end{aligned}$$