

Příklad 1

1. Napište Lagrangian hustoty pro reálné klasické skalární pole ϕ , které splňuje Klein-Gordonovu rovnici a spočítejte odpovídající Hamiltonián H .

2. Formulujte odpovídající kvantovou teorii tím, že postulujete komutační relace a odvoďte Heisenbergovu pohybovou rovnici pro $\hat{\phi}$. Rovnici vyřešte. Ukažte, že kvantové pole $\hat{\phi}$ se dá psát ve tvaru:

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^+(x) + \hat{\phi}^-(x) \quad (1)$$

$$\hat{\phi}^-(x) = [\hat{\phi}^+(x)]^- \quad (2)$$

$$\hat{\phi}^+(x) = 1/(2\pi)^3 \int \frac{d^4p}{2\omega_p} \hat{a}(p) e^{-ipx} \quad (3)$$

$$\omega_p = p_p = (p^2 + m^2)^{1/2} \quad (4)$$

3. Postulujte komutační relaci pro $\hat{a}(p)$ a $\hat{a}(p)^+$ a ukažte, že jsou konzistentní s komutačními relacemi pro pole, které jste formulovali v první části.

4. S pomocí $\hat{a}(p), \hat{a}(p)^+$ napište vyjádření pro Hamiltonián $\hat{H}$ a operátor počtu částic $\hat{N}$ a spočítejte $\langle 0 | \hat{\phi}^+(x) \hat{\phi}^+(y) \hat{a}(p)^{p_1 \hat{a}(p)^{p_2}} | 0 \rangle$.

5. Popište, co je normální uspořádání a jak se dá použít k záměně $\hat{H}$ a $\hat{H}'$, kde $\hat{H}' | 0 \rangle = 0$.

1 Příklad 2

1. Uveďte, stručně argumenty, které vedou a Diracovu rovnici pro volný elektron $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0$ (uveďte požadované vlastnosti γ matice).

2. Odvoďte transformační vlastnosti $\Psi(x) \rightarrow \Psi_L(x) = s(L)\Psi(L^{-1}x)$ Diracovy vlnové rovnice vzhledem k Lorentzově transformaci L .

3. Pro transformaci $L^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}$, kde $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ je infinitezimální (tj. jednotlivé komponenty jsou $\ll 1$) ověřte, že $S(L) = 1 - \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$.

4. Uvažujte případ kdy L odpovídá infinitezimální rotaci. Jak se transformují řešení Diracovy rovnice vzhledem k infinitezimální rotacím. Pro ilustraci můžete uvažovat jen rotaci kolem osy z .