Propagátor Schrödingerova pole při nenulové hustotě

Uvažujme systém identických nerelativistických částic se spinem 1/2. Připomeňte si, že při nenulové hustotě není základním stavem Fockovo vakuum $|0\rangle$, nýbrž *Fermiho moře*,

$$|F\rangle = \prod_{\substack{|\mathbf{k}|<k_F \\ \sigma=\uparrow\downarrow}} a^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}|0\rangle,$$

kde k_F je *Fermiho impuls*. Propagátor je potom přirozeně definován jako střední hodnota časově uspořádaného součinu operátorů v tomto základním stavu,

$$\mathrm{i}G_{\sigma\sigma'}(\mathbf{x}t,\mathbf{x}'t') = \langle F|T\{\psi_\sigma(\mathbf{x},t)\psi^\dagger_{\sigma'}(\mathbf{x}',t')\}|F\rangle.$$

(i) Dokažte, že pro nenulový Fermiho impuls nabude Fourierova transformace propagátoru tvar

$$G_{\sigma\sigma'}(\mathbf{k},\omega) = \delta_{\sigma\sigma'}\left[\frac{\theta(|\mathbf{k}|-k_F)}{\omega-E_\mathbf{k}+\mathrm{i}\varepsilon}+\frac{\theta(k_F-|\mathbf{k}|)}{\omega-E_\mathbf{k}-\mathrm{i}\varepsilon}\right].$$

(ii) Se znalostí propagátoru lze vypočítat vakuovou střední hodnotu libovolného jednočásticového operátoru. Ukažte, že speciálně střední hodnota operátoru hustoty počtu částic v bodě $\mathbf{x}$ je dána vztahem

$$-\mathrm{i}\lim_{\mathbf{x}'\to\mathbf{x}}\lim_{t'\to t+}\sum_\sigma G_{\sigma\sigma}(\mathbf{x}t,\mathbf{x}'t'),$$

a explicitně tuto hustotu spočtěte. Měl by vám vyjít důvěrně známý výsledek $k_F^3/3\pi^2$.