Skalární teorie s bilineární interakcí

Na cvičení jsme se pracovali s teorií dvou skalárních polí o stejné hmotě, která jsou spřažena bilineárním členem,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2 - \delta m^2 \phi_1\phi_2.$$

Jak už však víte, místo dvou reálných polí je možno ekvivalentně pracovat s jedním polem komplexním, $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2)$.

(i) Přepište výše uvedený lagrangián pomocí pole ϕ a komplexně sdruženého pole $\phi^\dagger$.

Poznámka: Pracujeme s klasickými poli, tj. ϕ a $\phi^\dagger$ komutují. Pro $\delta m^2 = 0$ by se váš výsledek měl redukovat na lagrangián volného komplexního pole,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi.$$

(ii) Pro $\delta m^2 = 0$ je lagrangián invariantní vůči změně fáze komplexního pole ϕ. Napište odpovídající noetherovský čtyřproud j^μ. Přidáním členu s δm^2 přestane být fázová symetrie přesná – spočtěte nyní divergenci proudu j^μ. Mělo by vám vyjít

$$\partial_\mu j^\mu = \delta m^2 (\phi\phi + \phi^\dagger\phi^\dagger).$$

Faktor u členu na pravé straně se může lišit v závislosti na volbě normalizace noetherovského proudu.

Návod: Použijte Eulerovy–Lagrangeovy pohybové rovnice.