1. přednáška + 2. přednáška

Definice: Lieova grupa

Lieova grupa je diferencovatelná varieta G vybavená binární operací $*: G\times G \to G$, takovou, že:

i) $(G,*)$ je grupa

ii) zobrazení $*: G\times G \to G$, $^{-1}: G \to G$ jsou hladká.

Poznámka:

Základními příklady Lieových grup jsou maticové grupy $GL(n,\mathbb{R}) := \{\mathbb{M}\in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det \mathbb{M} \neq 0\}$ a jejich podgrupy (viz níže).

Skutečně, $\det: \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n,n}, \mathbb{R})$ a $G = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = G^{0}$ je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{n,n}$ a tedy triviálně diferencovatelná varieta.

Složky součinu matic a jejich inverze jsou polynomy ve složkách původních matic a jsou tedy hladké.

Definice: Maticové Lieovy grupy

Maticové Lieovy grupy jsou vložené podvariety $GL(n,\mathbb{R})$ nebo $GL(n,\mathbb{C})$, které jsou současně uzavřené k maticovému násobení a inverzi.

- $SL(n,\mathbb{R}) := \{\mathbb{M}\in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det \mathbb{M} = 1\}$ (speciální lineární grupa)

- $O(n) := \{\mathbb{O}\in GL(n,\mathbb{R}) \mid \mathbb{O}^T\mathbb{O} = \mathbb{I}\}$ (ortogonální grupa)

- $U(n) := \{\mathbb{U}\in GL(n,\mathbb{C}) \mid \mathbb{U}^*\mathbb{U} = \mathbb{I}\}$ (unitární grupa)

Věta: o implicitní funkci

Buďte $F: M \to V$ hladké zobrazení variet, $\dim M = n$, $\dim V = r$, $q \in F(M) \subset V$. Nechť platí:

$$\operatorname{rank} F_*|_p = r \,, \quad \forall p \in F^{-1}(q).$$

Potom $F^{(-1)}(q)$ je $(n-r)$-rozměrná vložená podvarieta M.
Tečný prostor k podvarietě $F^{(-1)}(q)$ v bodě p je dán jako:

$$T_p F^{(-1)}(q) = \ker F_*|_p .$$

Poznámka:

$$F_*|_p X = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(F(p+tx) - F(p)\right)$$

Definice: Levá a pravá translace

Buďte G Lieova grupa, $g \in G$.
Levou, resp. pravou translací rozumíme difeomorfismus L_g, resp. R_g, tak, že $L_g h := g \cdot h$, resp. $R_g := h \cdot g$, $\forall h \in G$.

Definice: Levoinvariantní a pravoinvariantní vektorová pole

Levoinvariantní, resp. pravoinvariantní vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(G)$, jsou vektorová pole splňující $L_{g*}X = X$, resp. $R_{g*}X = X$, $\forall g \in G$.

Poznámka:

- Pro $h \in G$: $X|_{gh} = L_{g*}(X|_h)$, $X|_{hg} = R_{g*}(X|_h)$
- Levoinvariantní vektorové pole je jednoznačně určeno svým tečným vektorem v libovolném pevně zvoleném bodě $g \in G$ (obvykle se volí e): $X|_g = L_{g*}(X|_e)$.

Věta:

Vektorový prostor levoinvariantních vektorových polí $\mathfrak{g} \subset\subset \mathfrak{X}(G)$ je isomorfní T_eG, tj.: $\mathfrak{g} \simeq T_eG$.

Poznámka:

Kotečné zobrazení: $(\phi^* f)(p) = (f \circ \phi)(p)$

Věta:

Vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(G)$ chápané jako zobrazení $X: C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ je levoinvariantní právě tehdy, když

$$L_g^* \circ X = X \circ L_g^* \quad , \forall g \in G$$

Důsledek:

Pro levoinvariantní vektorová pole $X, Y \in \mathfrak{g}$ platí:

$$L_g \circ [X,Y] = [X,Y] \circ L_g ,$$

Tj.: $\mathfrak{g}$ je uzavřená vzhledem ke komutaci

Definice: Lieova algebra Lieovy grupy

Buď G Lieova grupa.

Potom Lieovou algebrou Lieovy grupy G rozumíme

$\mathfrak{g} := \{X \in \mathfrak{X}(G) \,|\, X = L_{g*}X\}$.

Definice Lieova algebra

Lieova algebra $(M,+,\cdot,[\cdot,\cdot])$ je vektorový prostor $(M,+,\cdot)$ vybavený bilineárním zobrazením $[\cdot,\cdot]: M\times M \to M$, splňující:

i) $[X,Y]=-[Y,X]$ (antisymetrie)

ii) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ (Jacobiho identita).

Zobrazení $[\cdot,\cdot]$ se pak nazývá Lieova závorka

Definice: Strukturní konstanty

Buď M Lieova algebra, $\mathcal{X} := (X_1,\dots,X_n)$ její báze. Lieova závorka $[\cdot,\cdot]$ je pak jednoznačně určena svým působením na bazické vektory: $[X_i,X_j] = C_{ij}{}^k X_k C_{ij}{}^k$. Koeficienty $(C_{ij}{}^k)_{i,j,k=1}^n$ se nazývají strukturní konstanty Lieovy algebry M v bázi $\mathcal{X}$.

Poznámka:

V důsledku vlastností Lieovy závorky splňují strukturní konstanty

$$C_{ij}{}^k = -C_{ji}{}^k \quad , \quad C_{il}{}^m C_{jk}{}^l + C_{jl}{}^m C_{ki}{}^l + C_{kl}{}^m C_{ij}{}^l = 0$$

Poznámka:

Levoinvariantní vektorová pole jsou úplná.

3. přednáška + 4. přednáška

Definice: Homomorfismus

Hladké zobrazení $\Phi : G \to H$ Lieových grup je

i) homomorfismus, jestliže $\Phi(g_1 *_G g_2) = \Phi(g_1) *_H \Phi(g_2), \forall g_1, g_2 \in G$

ii) isomorfismus, jestliže je homomorfismus a bijekce a Φ^{-1} je hladké.

Definice: Jednoparametrická podgrupa

Jednoparametrická podgrupa v G je homomorfismus $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to G$.

Důsledek:

Obraz jednoparametrické podgrupy je podgrupa * H v G izomorfní jednorozměrné diferencovatelné varietě.

Věta:

Jednoparametrické podgrupy v G jsou integrální křivky levoinvariantních vektorových polí, tj. elementů Lieovy algebry, vycházející z e.

$$\dot{\varphi}(t) = L_{\varphi(t)*}(X|_e) = X|_{\varphi(t)}$$

Definice: Exponenciální zobrazení

Buďte G Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra.
Potom definujeme $\exp : \mathfrak{g} \to G$ jako:

$$\exp(tX) := \varphi(t), \quad \exp(X) := \varphi(1).$$

Kde φ je integrální křivka levoinvariantního vektorového pole $X \in \mathfrak{g}$ vycházející z e: $\dot{\varphi}(t) = X(\gamma(t))$, $\gamma(0) = e$.

Značíme $\exp(X) =: e^X$

Poznámka:

Protože φ je homomorfismus, platí:

$$\varphi(t+s) = e^{(t+s)X} = \varphi(t)\cdot\varphi(s) = e^{tX}e^{sX}$$

Věta:

Pro libovolnou čtvercovou matici $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ platí

$$\det e^{A} = e^{\operatorname{Tr} A}.$$

Věta:

Buď G Lieova grupa.
Potom $\exp: \mathfrak{g} \to G : X \mapsto e^{X}$ je lokální difeomorfismus okolí $0 \in \mathfrak{g}$ na okolí $e \in G$.

Definice: Deformační retrakt

Buď M diferencovatelná varieta a V její prostě vnořená podvarieta. Pokud existuje ~~[illegible]~~ spojité zobrazení
$r: [0,1] \times M \to M$ takové, že:

i) $r(0,m) = m, \ \forall m \in N$

ii) $r(t,v) = v, \ \forall v \in V, \forall t \in [0,1]$

iii) $r(1,m) \in V, \ \forall m \in M$

říkáme, že podvarieta V je deformační retrakt variety M.

Definice: Jednoduchá souvislost

Souvislý topologický prostor M je jednoduše souvislý, právě tehdy, když pro každou spojitou uzavřenou křivku $\gamma: [0,1] \to M$, existuje spojité zobrazení $\Phi: [0,1] \times [0,1] \to M$ takové, že:

$$\forall t \in [0,1] : \ \Phi(0,t) = \gamma(t) \ \wedge \ \Phi(1,t) = \gamma(0)$$

Věta:

Nechť V je deformační retrakt M, potom

i) M je souvislá $\Leftrightarrow$ V je souvislá

ii) M je jednoduše souvislá $\Leftrightarrow$ V je jednoduše souvislá

Věta:

Souvislá Lieova grupa G nemusí být celá pokryta exponenciálním zobrazením. Tj. může se stát $\exp(\mathfrak{g}) \subset G \wedge \exp(\mathfrak{g}) \neq G$.

Věta:

Buďte G Lieova grupa, $g \in G$. (souvislá)

Pak existuje $n \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g} : g = e^{X_1} \cdot \ldots \cdot e^{X_n}$.

Poznámka:

Ve skutečnosti lze v předchozí větě volit $n = 2$.

Věta:

Tok generovaný levoinvariantním vektorovým polem $X \in \mathfrak{g}$ je 1-parametrická grupa pravých translací.

$$\Psi_X^t(g) = g e^{tX} = R_{e^{tX}}(g), \text{ tj.: } \Psi_X^t = R_{e^{tX}}$$

Důsledek:

$X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{X}(G)$: $R_g^* \circ Y - Y \circ R_g^* = 0, \forall g \in G \Rightarrow [X,Y] = 0$

Věta:

Buďte M diferencovatelná varieta, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, $p \in M$.

Pak platí:

$$([X,Y]f)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2}\left(f(\Psi_Y^{-t}(\Psi_X^{-t}(\Psi_Y^t(\Psi_X^t(p))))) - f(p)\right)$$

5. přednáška + 6. přednáška

Důsledek:
Buďte $A, B \in gl(V)$.
Potom $[A,B]|_{\mathbb{I}} = A|_{\mathbb{I}} \cdot B|_{\mathbb{I}} - B|_{\mathbb{I}} A|_{\mathbb{I}}$.

Integrabilní distribuce a podalgebry/podgrupy

Definice: Distribuce
Buďte M diferencovatelná varieta, $\dim M = n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$.
k-rozměrná distribuce na M je zobrazení $\Delta : M \sim \mathcal{P}(T_pM) : p \mapsto \Delta_p$,
tak, že Δ_p je je k-rozměrný podprostor T_pM a je hladké ve smyslu:

$$\forall p \in M : \exists U = U^\circ \subset M, p \in U : \exists X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(U) : \forall q \in U : \Delta_p(q) = \operatorname{span}\{X_1(q), \ldots, X_k(q)\}$$

Definice: Integrální podvarieta
Mějme k-rozměrnou distribuci Δ na M.
Vnořená podvarieta N, $\dim N = l \leq k$, je integrální podvarieta distribuce Δ, právě tehdy, když $\forall p \in N : T_pN \subset \Delta(p)$

Definice: Integrabilní distribuce
k-rozměrná distribuce je (úplně) integrabilní právě tehdy, když:

$\forall p \in M : \exists U = U^\circ \subset M, p \in U : \exists (x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^{n-k})$ souřadnice takové, že pro libovolné konstanty pro než to má smysl rovnice $y^i = konst^i$, $i \in \widehat{n-k}$ určují k-rozměrné integrální podvariety.

Souřadnice $(x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^{n-k})$ se nazývají Frobeniova mapa

Věta: Frobeniova

Mějme k-rozměrnou distribuci Δ na varietě M, $\dim M = n \geq k$. Potom Δ je (úplně) integrabilní, právě tehdy, když $[\Delta,\Delta] \subset \Delta$.

tj.: $\forall p \in M : [\Delta,\Delta](p) = \text{span}\{[X,Y](p) \mid X,Y \in \mathfrak{X}(U); \forall q \in U : X(q), Y(q) \subset \Delta(q)\}$

Poznámka: (značení)

- $X \in \mathfrak{X}(U) : X \in \Delta|_U \iff \forall q \in U : X(q) \in \Delta(q)$

- Lze ukázat, že takto konstruované integrální podvariety lze hladce navazovat:

k-rozměrné

N_1, N_2 integrální podvariety k-rozměrné distribuce: $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$.
→ Na průniku se musí shodovat
→ lze definovat hladkou podvarietu $N_1 \cup N_2$.

Tímto způsobem zkonstruujeme maximální podvariety ve smyslu integrální podvariety dané distribuce obsahující všechny integrální podvariety, které s ní mají neprázdný průnik.

Definice: Maximální listy, Foliace

Maximální integrální podvariety nazýváme maximální listy. Rozdělení variety M do maximálních listů integrabilní distribuce Δ nazýváme foliace

Věta: Chevalley

Maximální listy integrabilní distribuce Δ na varietě M jsou prostě vnořené podvariety v M

Poznámka:

Mějme G Lieovu grupu, $\mathfrak{g}$ její algebru, $\mathfrak{h}$ podalgebra $\mathfrak{g}$, dim $\mathfrak{h} = k$.

→ $\mathfrak{h}$ je k-rozměrná distribuce na G.

Buď H její maximální list obsahující e.

Q: Lze na H definovat grupové operace?

~~[illegible]~~

$g \in H \to L_g(H)$: $T_{\tilde{g} \in L_g(H)} L_g(H) = T_{gh} L_g H = L_{g*}(T_h H) = L_{g*}(\mathfrak{h}|_h) = \mathfrak{h}|_{gh}$

$\tilde{g} = gh$

→ $L_g(H)$ je opět integrální podvarieta distribuce $\mathfrak{h}$ a zároveň maximální list

$g \in H \cap L_g(H) \Rightarrow L_g(H) = H \Rightarrow \forall h \in H : gh \in H \Rightarrow H$ je uzavřená na $*$

$e \in H \cap L_{g^{-1}}(H) \Rightarrow L_{g^{-1}}(H) = H \Rightarrow g^{-1} \in H$

Hladkost $*$, $^{-1}$ plyne z hladkosti na G.

Důsledek:

Buď G Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ její algebra a $\mathfrak{h}$ podalgebra v $\mathfrak{g}$. Pak existuje právě jedna prosté vnořená podvarieta H v G taková, že H je Lieovou grupou vzhledem k $*$, $^{-1}$ z G a její Lieova algebra je isomorfní $\mathfrak{h}$.

Definice: Akce grupy na varietě

Mějme Lieovu grupu G, diferencovatelnou varietu M.
Hladké zobrazení $\Phi: G \times M \to M$ splňující:

i) $\Phi(g_1, \Phi(g_2, m)) = \Phi(g_1 g_2, m)$, $\forall g_1, g_2 \in G, \forall m \in M$.

ii) $\Phi(e, m) = m$, $\forall m \in M$

nazýváme (levá) akce grupy G na varietě M.

Definice: Levé cosety

Levé cosety definujeme jako $g \cdot H = \{gh \mid h \in H\}$, tj. orbity pravé akce podgrupy H na grupě G.

Poznámka:

- Orbita akce Φ ~~na~~ grupy G na M procházející $m \in M$ je $O_m := \{\Phi(g,m) \mid g \in G\}$

- Pokud H je uzavřená podgrupa Lieovy grupy G, potom na $G/H = \{gh \mid g \in G\}$ lze definovat právě jednu diferencovatelnou strukturu takovou, že vzhledem k projekci $\pi : G \to G/H$, $\pi(g) = gH$ je $(G, G/H, H, \pi)$ fibrovaný prostor s bází G/H, typickým vláknem H a projekcí π.

Definice: Efektivní/volná/tranzitivní akce

Akce G na M je:

i) efektivní $:\Leftrightarrow \forall g \in G : \forall m \in M : \Phi(g,m) = m \Rightarrow g = e$

ii) volná $:\Leftrightarrow \forall g \in G : \exists m \in M : \Phi(g,m) = m \Rightarrow g = e$

iii) tranzitivní $:\Leftrightarrow \forall m_1, m_2 \in M : \exists g \in G : m_2 = \Phi(g, m_1)$

Poznámka:

- Pokud akce je efektivní, pak ze znalosti akce lze z $\Phi(g_1, \Phi(g_2, m)) = \Phi(g_1 g_2, m)$ rekonstruovat grupové násobení.

- Uvažujme $\Phi : G \times M \to M$ tranzitivní, $x_0 \in M$, $G_{x_0} := \{g \in G \mid \Phi(g, x_0) = x_0\}$ je (pod)grupa izotropie, stability, stabilizátor, malá grupa bodu x_0.

$\overline{G_{x_0}} = G_{x_0} \Rightarrow G/G_{x_0}$ je diferencovatelná varieta

Poznámka: Pokračování z předchozí strany

$x \in M \Rightarrow \exists g \in G : x = \Phi(g, x_0)$

$\rightarrow G_x = g G_{x_0} g^{-1}$

Pokud navíc G_{x_0} je normální pak $G_{x_0} = G_x$.

Věta:

Máme-li tranzitivní akci G na M, $x_0 \in M$, G_{x_0} jeho podgrupa stability, pak $M \simeq G/G_{x_0}$.

Definice: Homogenní prostor

Takovou M nazýváme homogenní prostor.

Reprezentace Lieových grup a algeber

Definice: Reprezentace Lieovy grupy

Reprezentace Lieovy grupy G na vektorovém prostoru V konečné dimense je homomorfismus $\rho : G \to Gl(V)$

Definice: Reprezentace Lieovy algebry

Reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na vektorovém prostoru V je zobrazení $\rho : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}(V)$ tak, že

lineární

$[\rho(x), \rho(y)] = \rho([x,y]), \forall x,y \in \mathfrak{g}$

Poznámka:

Každá reprezentace grupy definuje akci G na daném V předpisem

$$\phi(g,v) := \rho(g)\cdot v\,,$$

která je lineární ve smyslu $\phi(g,\alpha v+w)=\alpha\phi(g,v)+\phi(g,w)$.

Naopak každá akce G na V splňující $\uparrow$ definuje reprezentaci.

Definice: Věrná reprezentace

Reprezentace ρ Lieovy grupy G / algebry $\mathfrak{g}$ je věrná právě tehdy, když ρ je prosté zobrazení.

Poznámka:

Máme-li věrnou reprezentaci, tak z ní můžeme zrekonstruovat strukturu G / $\mathfrak{g}$.

Pak mluvíme o realizaci dané grupy / algebry.

Definice: (1) reducibilní / úplně reducibilní soubor operátorů

Soubor lineárních operátorů $\Sigma \subset \mathcal{L}(V)$ je:

i) reducibilní $:\Leftrightarrow \exists W \subset\subset V, W \neq \{0\} : \Sigma(W) = \mathrm{span}\{S(x) \mid S \in \Sigma, x \in W\} \subset W$

ii) ireducibilní $:\Leftrightarrow W \subset\subset V, W \neq V ; \Sigma(W) \subset W \Rightarrow W = \{0\}$

iii) úplně reducibilní $:\Leftrightarrow \forall W \subset\subset V, \Sigma(W) \subset W : \exists \tilde{W} \subset\subset V : \Sigma(\tilde{W}) \subset \tilde{W} \wedge V = \tilde{W} \oplus W$

Reprezentace ρ je reducibilní / ireducibilní / úplně reducibilní, právě tehdy, když $\mathrm{Ran}(\rho)$ je –//–.

7. přednáška + 8. přednáška

Věta: Schurovo lemma

Buď V komplexní vektorový prostor, $\dim V < \infty$, $\Sigma \subset gl(V)$ ireducibilní soubor operátorů na V.
Pak pro každý $A \in gl(V)$, takový, že $[A,S]=0, \forall S \in \Sigma$
existuje $\lambda \in \mathbb{C} : A = \lambda \mathbb{1}$.

Důkaz:

· V nad $\mathbb{C}$, $\dim V < \infty \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, v \in V, v \neq 0 : (A - \lambda \mathbb{1})v = 0$.
Označme $W_\lambda = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$

Pro všechna $w \in W_\lambda$, $S \in \Sigma$: $A(Sw) = SAw = \lambda Sw$
→ $Sw \in W_\lambda$ → W_λ je invariantní podprostor vzhledem k Σ
→ $W_\lambda = V$ → $A = \lambda \mathbb{1}$

Věta: Obrácené Schurovo lemma

Buď V komplexní ~~pod~~ vektorový prostor, $\dim V < \infty$, $\Sigma \in gl(V)$ úplně reducibilní soubor operátorů na V. Pak platí:

$$\forall A \in gl(V), [A,S]=0, \forall S \in \Sigma : \exists \lambda \in \mathbb{C}, A = \lambda \mathbb{1} \Rightarrow \Sigma \text{ je ireducibilní}$$

Důkaz:

Nechť W je $\neq \{0\}$ je invariantní podprostor vzhledem k Σ,
z úplné reducibility plyne, že:

$$\exists \tilde{W} < V : \tilde{W} \oplus W = V \wedge \Sigma(\tilde{W}) \subset \tilde{W}$$

Definujme $A \in gl(V)$: $A|_W = \mathbb{1}|_W \wedge A|_{\tilde{W}} = 0|_{\tilde{W}}$ ...

Z rozkladu $V = W \oplus \tilde{W}$ vidíme, že:

Pro $w \in W, S \in \Sigma$: $ASw = Sw = S(Aw)$
$\tilde{w} \in \tilde{W}, S \in \Sigma$: $AS\tilde{w} = 0 = S(A\tilde{w})$

$\to [A,S]=0, \forall S \in \Sigma \to \lambda = 1, \tilde{W} = \{0\} \to W = V$

Poznámka: Vztah mezi Lieovou algebrou a Lieovou grupou
Které Lieovy grupy odpovídají dané abstraktní Lieově algebře?
- Omezíme se pouze na souvislé grupy.

Definice: Nakrytí
Mějme souvislou diferencovatelnou varietu M.
Nechť $\bar{M}$ je diferencovatelná varieta vybavená zobrazením
$\pi : \bar{M} \to M$ splňující:
i) $\forall p \in M : \exists U = U^{\circ} \subset M, p \in U$: $\exists$ indexová množina I:
$\forall \alpha \in I : U_\alpha = U_\alpha^{\circ} \wedge U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset, \alpha \neq \beta : \pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

ii) $\forall \alpha \in I : \pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ je difeomorfismus.

Pak $\bar{M}$ nazýváme nakrytí M.

Pokud $\bar{M}$ je navíc jednoduše souvislé, pak mluvíme o univerzálním nakrytí.

Věta:
Máme-li $(\bar{M}_1, \pi_1), (\bar{M}_2, \pi_2)$ dvě univerzální nakrytí dané souvislé variety M, $\pi_1 : \bar{M}_1 \to M$, $\pi_2 : \bar{M}_2 \to M$.
Pak existuje difeomorfismus $\phi : \bar{M}_1 \to \bar{M}_2$ tak, že:

$$\pi_1 = \pi_2 \circ \phi$$

Věta:

Ke každé souvislé varietě existuje její univerzální nakrytí.

Věta: Ado

Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra konečná dimense.
Pak existuje její věrná konečněrozměrná reprezentace.
Tj.: $\mathfrak{g}$ lze reprezentovat jako maticovou algebru

Věta:

Ke každé Lieově algebře $\mathfrak{g}$ konečné dimense existuje ~~až~~ (až na isomorfismus) právě jedna souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa G taková, že její Lieova algebra je isomorfní $\mathfrak{g}$.

Všechny souvislé Lieovy grupy s Lieovou algebrou $\mathfrak{g}$ lze najít jako G/D, kde D je diskrétní normální podgrupa v G.

Poznámka:

D je diskrétní ve smyslu:

$$\forall d \in D : \exists U = U^\circ \subset G, d \in U : U \cap D = \{d\}$$

Lieovy algebry

Nebude-li řečeno jinak bude $\mathfrak{g}$ označovat Lieovu algebru nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$ konečné dimenze.

Definice: Podalgebra

Podalgebra Lieovy grupy $\mathfrak{g}$ je $\mathfrak{h}$, podprostor v $\mathfrak{g}$ takový, že

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = \text{span}\{[X,Y] \mid X,Y \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{h}$$

Definice: Ideál

Ideál $\mathfrak{h}$ v Lieově algebře $\mathfrak{g}$ je podalgebra v $\mathfrak{g}$ tak, že

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}.$$

Poznámka:

Pokud máme ideál $\mathfrak{h}$ v $\mathfrak{g}$, na faktor prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ lze definovat strukturu Lieovy algebry (tzv. faktor algebry):

$$X,Y \in \mathfrak{g}: \; [X+\mathfrak{h}, Y+\mathfrak{h}] := [X,Y]+\mathfrak{h}$$

Definice: Abelovská / Prostá / Poloprostá Lieova algebra

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá:

i) Abelovská, pokud $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \{0\}$
ii) Prostá, pokud $\mathfrak{g}$ nemá jiné ideály, než $\{0\}$ a $\mathfrak{g}$,
iii) Poloprostá, pokud [illegible] nemá nenulové ideály

Poznámka:

Je-li $\mathfrak{g}$ prostá, je nutně i poloprostá

Definice:

Řekneme, že Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je součtem ideálů $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$, přímé sčítanci, když i) $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ jsou ideály

ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_1 \oplus \mathfrak{z}_2$

direktní součet ideálů

Důsledek:

Pro libovolné ideály $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ tak, že $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_1 \oplus \mathfrak{z}_2$ platí

$$[\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2] = 0$$

Definice: (Ne)rozložitelná algebra

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je:

i) rozložitelná, pokud existují ideály $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dim \mathfrak{z}_i \geq 1 : \mathfrak{g} = \mathfrak{z}_1 \oplus \mathfrak{z}_2$

ii) nerozložitelná, pokud není rozložitelná

Definice: Centrum algebry

Centrum algebry $\mathfrak{g}$ je $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ definována jako:

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} \,/\, \forall y \in \mathfrak{g} : [x,y] = 0\} = \{x \in \mathfrak{g} \,/\, [x,\mathfrak{g}] = 0\}$$

Definice: Charakteristické série ideálů

Pro Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ definujeme tři charakteristické série ideálů:

i) Derivovaná série : $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(j)} := [\mathfrak{g}^{(j-1)}, \mathfrak{g}^{(j-1)}]$, $j \in \mathbb{N}$

ii) Dolní centrální série : $\mathfrak{g}^{1} := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{j} := [\mathfrak{g}^{j-1}, \mathfrak{g}]$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

iii) Horní centrální série : $\zeta^1 := \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $\zeta^{j} := \{x \in \mathfrak{g} \,/\, [x, \mathfrak{g}] \subset \zeta^{j-1}\}$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Definice: Řešitelná / Nilpotentní algebra

Při stejném značení jako v předchozí definici, řekneme, že algebra $\mathfrak{g}$ je

i) Řešitelná, pokud $\exists k \in \mathbb{N}: \mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$

ii) Nilpotentní, pokud $\exists k \in \mathbb{N}: \mathfrak{g}^{k} = \{0\}$

Poznámka:

$\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^{i+1}$ → Nilpotentní algebra je řešitelná

Věta:

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní, právě tehdy, když existuje $j \in \mathbb{N}: \xi^{j} = \mathfrak{g}$.

Poznámka:

Máme-li podalgebru či ideál, můžeme zkoumat její podobu, poloprostotu, řešitelnost, nilpotentnost.
Tj. uvažujeme ji jako novou algebru a zkoumáme její vlastnosti.

Definice: Radikál, nilradikál

Maximální řešitelný ideál v $\mathfrak{g}$ nazýváme radikál Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ a maximální nilpotentní ideál v $\mathfrak{g}$ nazýváme nilradikál

Věta: Levi

direktní součet algeber

Buď $\mathfrak{g}$ Lieova algebra konečné dimense, $\mathfrak{r}$ její radikál. Pak existuje poloprostá Lieova podalgebra $\mathfrak{p}$ tak, že $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \overset{+}{\oplus} \mathfrak{r}$.

Definice: Derivace

Lineární zobrazení $D: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ nazýváme derivace, jestliže

$\forall x,y \in \mathfrak{g}: D[x,y] = [Dx,y] = [x,Dy]$.

9. přednáška

Definice: Adjungovaná akce / reprezentace

Mějme Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ Lieovy grupy G. Pak definujeme:

i) Adjungovanou akci: $\Phi_g : G \to G : h \mapsto ghg^{-1}$

ii) Adjungovanou reprezentaci: $Ad_g : G \to Gl(\mathfrak{g}) : Ad(g)X := \Phi_{g*}(X)$

iii) Adjungovanou reprezentaci: $ad : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g}) : ad(X) := Ad_*|_e(X)$

Věta:

Pro adjungovanou reprezentaci $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$ platí

$$ad_X Y = [X,Y] \quad , \forall X,Y \in \mathfrak{g}$$

Poznámka: (Důsledek)

Zobrazení $ad : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$ lze definovat obecně bez ohledu na Lieovu grupu G předpisem $ad(X)Y := [X,Y]$ a platí, že:

i) ad je reprezentace

ii) pro pevné $X \in \mathfrak{g}$ je $ad(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ derivace

Poznámka: Vztah reálných a komplexních Lieových algeber

Pro $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{R}$ lze definovat její komplexifikaci jako:

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} + i\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$$

Tj: $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \{X + iY \mid X, Y \in \mathfrak{g}\}$ a $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$

V opačném případě bázi $(X_i)_{i=1}^n$ doplníme o $(iX_i)_{i=1}^n$ a uvažujeme pouze násobení reálnými čísly a platí $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$.

10. přednáška + 11. přednáška

Definice: Reálná forma komplexní algebry

Reálná forma dané komplexní algebry $\mathfrak{g}$ je libovolná Lieova algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ taková, že $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$

Definice: Homo/endo/iso/automorfismus Lieových algeber

Lineární zobrazení ϕ Lieových algeber $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$ je

i) homomorfismus, jestliže $\forall x,y \in \mathfrak{g} : \phi([x,y]) = [\phi(x),\phi(y)]$

ii) endomorfismus, jestliže je homomorfismus a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

iii) isomorfismus, jestliže je bijektivní homomorfismus.

iv) automorfismus, jestliže je isomorfismus a endomorfismus.

Definice: Invariance bilineární formy (vzhledem k automorfismům)

Symetrická bilineární forma ω na Lieově algebře $\mathfrak{g}$ je

i) invariantní vzhledem k automorfismům, jestliže pro každý automorfismus ϕ platí: $\forall x,y \in \mathfrak{g} : \omega(\phi(x),\phi(y)) = \omega(x,y)$.

ii) ad-variantní (invariantní), jestliže platí:

$\forall x,y,z \in \mathfrak{g} : \omega([x,y],z) + \omega(y,[x,z]) = 0$

Poznámka:

Pokud je ω invariantní vzhledem k automorfismům, pak je taktéž invariantní.

Definice: Killingova forma

Killingova forma K na Lieově algebře $\mathfrak{g}$ je definována jako:

$K(x,y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$, $\forall x,y \in \mathfrak{g}$

Poznámka:

K je bilineární symetrická forma invariantní vzhledem k automorfismům.

Věta:

Buďte $\mathfrak{g}$ Lieova algebra, $\mathfrak{h}$ její ideál.
Pak pro jeho Killingovu formu platí: $K_{\mathfrak{h}} = K_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$.

Definice: Ortogonální doplněk vzhledem ke K

Ortogonální doplněk ideálu $\mathfrak{h}$ vzhledem ke Killingově formě K na $\mathfrak{g}$ je

$$\mathfrak{h}^{\perp} := \{x \in \mathfrak{g} \mid K(x,y) = 0, \forall y \in \mathfrak{h}\}$$

Poznámka:

Je-li $\mathfrak{h}$ ideál, pak i $\mathfrak{h}^{\perp}$ je ideál.

Věta:

Buď $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfismus Lieových algeber.
Potom platí: i) $(\phi(\mathfrak{g}))^{(k)} = \phi(\mathfrak{g}^{(k)})$
ii) $(\phi(\mathfrak{g}))^{k} = \phi(\mathfrak{g}^{k})$

Důsledek:

Buď $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfismus Lieových algeber.
Je-li $\mathfrak{g}$ řešitelná (nilpotentní), pak $\operatorname{Ran} \phi$ je řešitelná (nilpotentní).

Věta:

Je-li $\mathfrak{h} \subset Z(\mathfrak{g})$ ideál $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ je nilpotentní, pak i $\mathfrak{g}$ je nilpotentní.

Důsledek:

Označme $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} := \{\mathrm{ad}_x \mid x \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, pak
i) $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě tehdy, když $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ je řešitelná.
ii) $\mathfrak{g}$ je nilpotentní právě tehdy, když $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ je nilpotentní.

Definice: Nilpotentní operátor

Lineární operátor $A \in gl(V)$ je nilpotentní, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$: $A^n = 0$.

Věta: Jordanův rozklad ⊛

Buď $A \in gl(V)$, $\dim V < \infty$ (V nad $\mathbb{C}$).

Pak existuje jednoznačně určená dvojice operátorů $S, N \in gl(V)$:

i) $A = S + N$

ii) S je diagonalizovatelný a N je nilpotentní

iii) $[S, N] = 0$

Definice: Ad-Nilpotentní vektor

Vektor $x \in \mathfrak{g}$ je adnilpotentní, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$: $(ad_x)^n = 0$.

Lemma:

Pokud operátor $A \in gl(V)$ je nilpotentní, pak je také ad-nilpotentní jakožto prvek $gl(V)$.

Lemma:

Buď $\mathfrak{I}$ ideál v $\mathfrak{g} \subset gl(V)$.

Označme $W := \bigcap_{A \in \mathfrak{I}} \ker A = \{ v \in V \mid Av = 0, \forall A \in \mathfrak{I} \}$.

Pak $\mathfrak{g}(W) \subset W$, tj.: W je invariantní podprostor.

Lemma:

Buď $\mathfrak{g}$ podalgebra v $gl(V)$ taková, že všechny prvky $\mathfrak{g}$ jsou nilpotentní.

Potom existuje $v \in V, v \neq 0$: $Av = 0$, $\forall A \in \mathfrak{g}$.

Poznámka: ⊛

S, N lze vyjádřit jako polynomy v A.

12. přednáška + 13. přednáška

Lemma:

Buď $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ Lieova algebra nilpotentních operátorů nad V.
Pak existuje báze $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ V taková, že:

$$\forall A \in \mathfrak{g}: Ax_1 = 0 \wedge Ax_i \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}\}, \forall i \geq 2.$$

Tj.: $A^{\mathcal{X}}$ jsou horní trojúhelníkové matice s nulovou diagonálou

Důsledek:

Při stejném značení jako v předchozím lemmatu,
$\mathfrak{g}$ je nilpotentní algebra

Věta: Engelova

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní právě tehdy, když
každý vektor $x \in \mathfrak{g}$ je ad-nilpotentní.
Každá komplexní maticová nilpotentní Lieova algebra $\mathfrak{g}$ má
ve vhodné bázi tvar:

$$X = \begin{pmatrix} A_1(X) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m(X) \end{pmatrix}, \text{ kde } A_i(X) = \begin{pmatrix} \lambda_i(X) & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i(X) \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathfrak{g}^{\#}$$

Lemma:

Buď V komplexní vektorový prostor a $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ řešitelná algebra operátorů.
Pak existuje $v \in V, v \neq 0$ a $\lambda \in \mathfrak{g}^{\#}$: $Xv = \lambda(X)v$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Věta: Lieova

Buď $\mathfrak{g}$ podalgebra $\mathfrak{gl}(V)$, kde V je komplexní vektorový prostor
konečné dimense.
Potom $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě tehdy, když existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru V,
v níž mají všechny operátory $A \in \mathfrak{g}$ horní trojúhelníkový tvar.

Důsledek:

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě tehdy, když její derivovaná algebra $g^{(2)} = g^{(1)}$ je nilpotentní.

Věta:

Buď $\mathfrak{g}$ podalgebra $gl(V)$.
Nechť pro každé $A, B \in \mathfrak{g}$ je $Tr(AB) = 0$.
Pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná.

Věta: 1. Cartanovo kritérium

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě tehdy, když $K(x,y) = 0$ pro všechna $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^{(1)}$.

Definice: Radikál Killingovy formy

Radikál Killingovy formy je ortogonální doplněk Lieovy algebry vzhledem ke Killingově formě:

$$rad\, K := g^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g} \mid K(x,y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

Věta: 2. Cartanovo kritérium

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je poloprostá, právě tehdy, když její Killingova forma K je nedegenerovaná, tj.: $g^{\perp} = \{0\}$.

Věta:

Poloprostá Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je direktním součtem prostých ideálů.

Důsledek:

Všechny nenulové ideály v poloprosté Lieově algebře $\mathfrak{g}$ jsou také poloprosté (a jsou součtem prostých ideálů $\mathfrak{g}$)

Věta:

Všechny derivace poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ jsou vnitřní.

Definice: Normalizátor

Normalizátor podalgebry $\mathfrak{h}$ v $\mathfrak{g}$ je množina:

$$\mathrm{Norm}(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x,\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}.$$

Poznámka:

Evidentně $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Norm}(\mathfrak{h})$.

Pokud navíc $\mathfrak{h}$ je ideál, pak $\mathrm{Norm}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Definice: Cartanova podalgebra

Cartanova podalgebra Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je libovolná nilpotentní podalgebra $\mathfrak{g}_0$, která je rovna svému normalizátoru.

Poznámka:

Cartanova podalgebra je pro algebru nad $\mathbb{C}$ určena jednoznačně až na automorfismus.

Definice: Zobecněné vlastní podprostory

Buď $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra, $x \in \mathfrak{g}$.

Pak definujeme zobecněné vlastní podprostory operátoru ad_x jako:

$$\mathfrak{g}_\lambda(x) := \lim_{k\to\infty} \ker(\mathrm{ad}_x - \lambda I)^k, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Poznámka:

i) Pokud $\lambda \notin \sigma(ad_x)$, pak $\mathfrak{g}_\lambda(x) = 0$.

ii) $\dim \mathfrak{g} < \infty \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 : \ker(ad_x - \lambda \mathbb{I})^{k_0} = \ker(ad_x - \lambda \mathbb{I})^k$.

iii) $\mathfrak{g} = \dot{+}_{\lambda \in \sigma(ad_x)} \mathfrak{g}_\lambda(x)$, $\forall x \in \mathfrak{g}$

iv) $\dim \mathfrak{g}_0(x) \geq 1$

Definice: Nulita prvku

Při stejném značení jako v předchozí definici nazveme $\dim \mathfrak{g}_0(x)$ nulita prvku $x \in \mathfrak{g}$.

Definice: Regulární prvek

Řekneme, že $x \in \mathfrak{g}$ je regulární, jestliže:

$$\dim \mathfrak{g}_0(x) = \min_{y \in \mathfrak{g}} \dim \mathfrak{g}_0(y).$$

Poznámka:

Skoro všechny prvky $x \in \mathfrak{g}$ jsou regulární ve smyslu, že je-li $(e_n)_{n=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ báze $\mathfrak{g}$ a $x = \alpha^n e_n$, pak

$$\mu(\{(\alpha_n)_{n=1}^{\dim \mathfrak{g}} \in \mathbb{C}^n \mid x \text{ není regulární}\}) = 0.$$

Kde μ je Lebesgueova míra na $\mathbb{C}^n$.

Lemma:

Pro libovolná $x, y, z \in \mathfrak{g}$ platí:

$$(ad_x - (\lambda + \mu)\mathbb{I})^k [y, z] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} [(ad_x - \lambda \mathbb{I})^j y, (ad_x - \mu \mathbb{I})^{k-j} z]$$

14. přednáška + 15. přednáška

Důsledek:

Pro každý prvek $x \in \mathfrak{g}$ platí:

$$[\mathfrak{g}_\lambda(x), \mathfrak{g}_\mu(x)] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}(x).$$

Lemma:

Buď $x \in \mathfrak{g}$ regulární prvek algebry $\mathfrak{g}$.
Potom $\mathfrak{g}_0(x)$ je nilpotentní podalgebra $\mathfrak{g}$.

Důsledek: ⊛

Buď $x \in \mathfrak{g}$ regulární prvek algebry $\mathfrak{g}$.
Potom $ad_{\mathfrak{g}_0(x)}/\mathfrak{g}$ je reprezentace nilpotentní algebry $\mathfrak{g}_0(x)$ na vektorovém prostoru $\mathfrak{g}$.
Tj.: Nilpotentní komplexní maticová algebra.

Z maticové verze Engelovy věty víme, že existuje báze $\mathfrak{g}$ a funkcionály $(\lambda_k)_{k=1}^{m} \subset (\mathfrak{g}_0(x))^*$ takové, že pro všechny $y \in \mathfrak{g}_0(x)$ máme blokově diagonální tvar ad_y.

$$ad_y = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & & ? \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} \lambda_1(y) & & ? \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_1(y) \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} \lambda_m(y) & & ? \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_m(y) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Věta:

Buďte $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra, $x \in \mathfrak{g}$ regulární prvek. Potom $\mathfrak{g}_0(x)$ je Cartanova podalgebra.

Definice: Kořeny Lieovy algebry

Nenulová λ_k z důsledku ⊛ se nazývají kořeny Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Množinu všech kořenů algebry $\mathfrak{g}$ značíme Δ.

Poznámka:

Kořeny algebry evidentně závisí na výběru Cartanovy podalgebry $\mathfrak{g}_0(x)$.

Definice: Kořenový podprostor, kořenový vektor

Podprostor $\mathfrak{g}_\lambda$ příslušející kořenu λ se nazývá kořenový podprostor. Vektor $y_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$ se nazývá kořenový vektor.

Lemma:

Buď $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(X)$ její Cartanova podalgebra definovaná pomocí regulárního prvku X. Potom pro všechna $h \in \mathfrak{g}_0$, $\lambda \in \Delta$ a $y \in \mathfrak{g}_\lambda$ platí:

$$K(h,y)=0.$$

Lemma:

Buďte $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $h \in \mathfrak{g}_0$. Pak platí implikace:

$$\forall \lambda \in \Delta : \lambda(h) = 0 \Rightarrow h = 0 \quad (\Leftrightarrow \operatorname{span} \Delta = \mathfrak{g}_0^*)$$

Věta: Alternativní definice Cartanovy podalgebry

Podalgebra $\mathfrak{g}_0$ komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je Cartanovou podalgebrou algebry $\mathfrak{g}$ právě tehdy, když $\mathfrak{g}_0$ je maximální abelovskou podalgebrou takovou, že ad_h je poloprostý operátor pro všechny prvky $h \in \mathfrak{g}_0$.

Poznámka: Shrnutí pro komplexní poloprosté Lieovy algebry

Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, $\Delta = \{\lambda\} \subset \mathfrak{g}_0^*$ odpovídající systém kořenů. Pak máme rozklad na kořenové podprostory $\mathfrak{g}_\lambda$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \dot{+} \left(\dot{+}_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}_\lambda \right),$$

které splňují:

i) $\lambda \in \Delta \Leftrightarrow \lambda \neq 0 \wedge \mathfrak{g}_\lambda = \bigcap_{h \in \mathfrak{g}_0} \ker(ad_h - \lambda(h)\mathbb{I}) \neq 0$

ii) $[h_1, h_2] = 0, \quad \forall h_1, h_2 \in \mathfrak{g}_0$

iii) $ad_h : \mathfrak{g}_\lambda \to \mathfrak{g}_\lambda$ je násobek jednotkového operátoru, tj.:

$$ad_h|_{\mathfrak{g}_\lambda} = \lambda(h)\, \mathbb{I}|_{\mathfrak{g}_\lambda}, \quad \forall h \in \mathfrak{g}_0, \lambda \in \Delta$$

iv) $ad_{X_\lambda} : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_{\mu+\lambda}$, tj.:

ad_{X_λ} je nilpotentní pro všechny $\lambda \in \Delta, X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$

v) $\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\lambda$, pro všechny $\lambda \in \Delta$

Poznámka:

Nadále budeme uvažovat pouze komplexní poloprosté algebry.

Lemma:

$\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$, pro všechny $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$, $\alpha + \beta \neq 0$

Lemma:

$K|_{\mathfrak{g}_0} \equiv K|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0}$ je nedegenerovaná.

Pro každý kořen $\lambda \in \Delta$ existuje jednoznačně určené $h_\lambda \in \mathfrak{g}_0$, takové, že pro všechna $h \in \mathfrak{g}_0$ je $\lambda(h) = K(h, h_\lambda)$

Lemma:

Buď $\alpha \in \Delta$.

Potom $-\alpha \in \Delta$ a pro všechna $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ platí:

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = K(X_\alpha, X_{-\alpha}) h_\alpha$$

Lemma:

Pro libovolné $\alpha \in \Delta$ platí:

$$\alpha(h_\alpha) = K(h_\alpha, h_\alpha) \neq 0$$

Definice: $T_\alpha, a_{\beta\alpha}$

Pro daný kořen $\alpha \in \Delta$ definujeme:

$$T_\alpha := \frac{2}{K(h_\alpha,h_\alpha)} h_\alpha = \frac{2}{\alpha(h_\alpha)} h_\alpha .$$

$$a_{\beta\alpha} := \beta(T_\alpha) = \frac{2K(h_\beta,h_\alpha)}{K(h_\alpha,h_\alpha)} .$$

Pro daný kořen $\alpha \in \Delta$ zvolme $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ splňující $K(X_\alpha, X_{-\alpha}) = \frac{2}{\alpha(h_\alpha)}$.

Potom platí:

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = K(X_\alpha, X_{-\alpha}) h_\alpha = T_\alpha$$

$$[T_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2 X_{\pm\alpha} ,$$

což jsou komutační relace Lieovy algebry $sl(2,\mathbb{C})$ v bázi tvořené maticemi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Věta: Konečně-rozměrné reprezentace (ireducibilní) algebry $sl(2,\mathbb{C})$

Buď V komplexní vektorový prostor konečné dimense.
Nechť lineární operátory $T, X_\pm$ splňují:

$$[X_+, X_-] = T, \qquad [T, X_\pm] = \pm 2 X_\pm .$$

a působí na V ireducibilně.
Potom existuje báze $\mathcal{X} = (x_i)_{i=1}^{\dim V-1}$ splňující:

$$T x_j = (n-2j) x_j, \quad X_- x_j = x_{j+1}, \quad X_+ x_j = j(n-j+1) x_{j-1}, \quad n := \dim V - 1$$

Lemma:

Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{h}$ její Cartanova podalgebra, Δ příslušná množina kořenů. Potom platí:

i) Pro každou dvojici kořenů $\alpha, \beta \in \Delta$ existují $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq 0 \leq q$ taková, že $\{\beta + k\alpha\}_{k=p}^{q}$ je nepřerušená posloupnost kořenů, případně obsahující nulu).

Žádné jiné kořeny tvaru $\beta + \ell\alpha$ neexistují a platí:

$$a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = 2\frac{\beta(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)} = 2\frac{K(h_\beta, h_\alpha)}{K(h_\alpha, h_\alpha)} = -(p+q) \in \mathbb{Z}.$$

ii) Nechť $\alpha \in \Delta$.
Potom $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ a jediné násobky α, které jsou kořeny jsou $\beta = \pm\alpha$.

iii) Buďte $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha + \beta \neq 0$.
Potom $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

iv) Buď $\alpha, \beta \in \Delta$, $a_{\beta\alpha} \neq 0$, označme $\varepsilon := \operatorname{sgn}(a_{\beta\alpha})$.
Potom $\beta - \varepsilon\alpha, \beta - 2\varepsilon\alpha, \ldots, \beta - a_{\beta\alpha}\alpha$ jsou kořeny.

Definice: Cartanova celá čísla

$a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = 2\frac{K(h_\beta, h_\alpha)}{K(h_\alpha, h_\alpha)} = -(p+q)$ nazýváme Cartanova celá čísla.

Věta: Weylova - Chevalley normální forma

Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ příslušný systém kořenů.

Pak $\mathfrak{g}$ jako vektorový prostor je direktním součtem $\mathfrak{g}_0$ a jednorozměrných kořenových podprostorů $\mathfrak{g}_\alpha = \text{span}(E_\alpha)$.

Platí: i) $\alpha(h)E_\alpha = [h, E_\alpha]$, $\forall h \in \mathfrak{g}_0$

ii) $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathfrak{g}_0 \wedge [E_\alpha, E_{-\alpha}] \neq 0$, $\forall \alpha \in \Delta$

iii) $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}$ pro $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha + \beta \neq 0$.
Pokud navíc $\alpha + \beta \in \Delta$, je $N_{\alpha\beta} \neq 0$.

Definice: Reálný lineární obal

Zavádíme označení pro reálné vektorové prostory definované jako reálné lineární obaly všech vektorů h_α, resp. všech kořenů α:

$$\mathfrak{h} := \mathbb{R}\text{-span}\{h_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}, \quad \mathfrak{h}^* := \mathbb{R}\text{-span}\{\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$$

Věta: Skalární součin na $\mathfrak{h}^*$

Bilineární symetrické zobrazení $(\cdot,\cdot) : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \to \mathbb{R}$ definované jako:

$$(\alpha, \beta) := K(h_\alpha, h_\beta),$$

je skalární součin na $\mathfrak{h}^*$.

Poznámka:

Máme-li $h \in \eta$, pak $ih \notin \eta$, neboť $K(ih,ih) = -K(h,h)$.

Definice: Kořenový diagram

Kořenový diagram je vyjádření kořenů $\alpha \in \Delta$ jako vektorů v Euklidově prostoru η^* se skalárním součinem $(\cdot,\cdot)$.

Definice: Zrcadlení podle nadroviny kolmé ke kořeni α

Zrcadlení podle nadroviny kolmé ke kořenu $\alpha \in \Delta$ je lineární zobrazení $S_\alpha : \eta^* \to \eta^*$ definované jako:

$$S_\alpha(\lambda) := \lambda - 2\frac{(\alpha,\lambda)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha$$

Poznámka:

Dvojitou aplikací S_α dostáváme:

$$S_\alpha(S_\alpha(\lambda)) = S_\alpha(\lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha) = \lambda$$

Definice: Weylova grupa W

Weylova grupa W kořenového systému Δ je grupa lineárních operátorů na η^* generovaná všemi zobrazeními S_α, kde $\alpha \in \Delta$.

Poznámka:

i) Weylova grupa W je konečná.
ii) W je podgrupou $O(\eta^*)$

Definice: Kladné a záporné kořeny

Pro $h_0 \in \mathfrak{h}$, $\alpha(h_0)$ pevné definujeme množiny kladných, resp. záporných kořenů předpisem:

$$\Delta^{\pm} := \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(h_0) \gtrless 0\}.$$

Na Δ definujeme částečné uspořádání jako:

$$\alpha \leq \beta :\Longleftrightarrow \alpha(h_0) \leq \beta(h_0)$$

Poznámka:

i) Rozklad evidentně závisí na volbě kořene h_0.

ii) $|\Delta^+| = |\Delta^-|$

Definice: Prosté kořeny

Při zvoleném rozdělení $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ definujeme prosté kořeny jako ty kladné kořeny, které nelze zapsat jako součet dvou jiných kladných kořenů:

$$\Delta^P := \{\alpha \in \Delta^+ \mid \forall \beta, \gamma \in \Delta^+ : \beta + \gamma \neq \alpha\}$$

Věta: Vlastnosti kořenového diagramu

Budiž $\mathfrak{g}$ komplexní polojednoduchá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ odpovídající systém kořenů rozdělený pomocí $h_0 \in \mathfrak{h}$ na kladné a záporné. Pak platí:

i) Každý $\alpha \in \Delta^+$ lze zapsat jako lineární kombinaci prostých kořenů:

$$\alpha = \sum_{\beta \in \Delta^P} c_\beta \beta ,$$

kde $c_\beta \in \mathbb{N}_0$

ii) Pro každou dvojici různých prostých kořenů $\alpha, \beta \in \Delta^P$, $\alpha \neq \beta$ platí $(\alpha, \beta) \leq 0$.
Tj.: úhel mezi prostými kořeny je tupý nebo ~~ostrý~~ pravý.

iii) Prosté kořeny Δ^P tvoří bázi $\mathfrak{h}^*$ a $\mathfrak{g}_0^*$.

Poznámka: Konstrukce kořenového diagramu

Při konstrukci kořenového diagramu je třeba začít prostými kořeny. Aplikací zrcadlení S_α, $\alpha \in \Delta^P$, získáme další kořeny (kladné i záporné). Zrcadlením i vzhledem nově získaným kořenům a opakovanými iteracemi tohoto postupu konstruujeme kořeny tak dlouho až získáme množinu $\tilde{\Delta}$, uzavřenou vůči všem zrcadlením S_α, $\alpha \in \tilde{\Delta}$.

Obecně lze ukázat (ověřit), že $\tilde{\Delta} = \Delta$.

Z tohoto postupu mimo jiné plyne, že délka libovolného kořene je rovna délce nějakého prostého kořene.

Definice: Cartanova matice $\mathcal{A}$

Cartanova matice $\mathcal{A}$ je definovaná jako:

$$\mathcal{A}_{ij} := 2\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}, \quad \alpha_i,\alpha_j \in \Delta^P$$

Věta: Vlastnosti Cartanovy matice $\mathcal{A}$

Pro Cartanovu matici $\mathcal{A}$ platí:

i) $\mathcal{A}_{ii} = 2$

ii) $\mathcal{A}_{ij} \leq 0$, pro $i \neq j$

iii) $\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ji} = 4\frac{|(\alpha_i,\alpha_j)|^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha_j,\alpha_j)} = 4\cos^2\sphericalangle\{\alpha_i,\alpha_j\} \Rightarrow \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ji} \in \{0,1,2,3\}$

$\rightarrow \sphericalangle\{\alpha_i,\alpha_j\} \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\}$

16. přednáška

Věta:

Mějme komplexní polo-prostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$, její Cartanovu podalgebru $\mathfrak{g}_0$ a odpovídající systém kořenů Δ.

Pokud $\Delta = \Delta_1 \dot{\cup} \Delta_2$, $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$, potom $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, kde:

$$\mathfrak{g}_i = \mathrm{span}\{h_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_i} \dot{+} \mathop{\Large +}_{\alpha \in \Delta_i} \mathrm{span}\{E_\alpha\}$$

Důsledek:

Souvislé komponenty Dynkinova diagramu odpovídají prostým ideálům.

Definice: Přípustný graf

Graf definující pomocí vztahu

$$(x,x) = \sum_{i=1}^{\ell} (x_i)^2 - \sum_{i \neq j}^{\ell} x_i x_j \sqrt{n_{ij}}$$

kvadratickou formu na $\mathbb{R}^\ell[x_1, \dots, x_\ell]$ nazveme přípustný, pokud je forma pozitivně definitní.

Lemma:

Přípustný graf:

i) neobsahuje uzavřené smyčky

ii) do každého jeho vrcholu vstupují nejvýše tři hrany

iii) pokud v přípustném grafu nahradíme dva vrcholy spojené jednou hranou jedním sloučeným vrcholem, dostaneme opět přípustný graf.

Věta: Cartanova klasifikace prostých komplexních Lieových algeber

Buď $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ odpovídající systém kořenů.
Potom její Dynkinův diagram má jednu z následujících podob:

i) A_ℓ : 

, $sl(\ell+1,\mathbb{C}), \ell \geq 1$

ii) B_ℓ : 

, $so(2\ell+1,\mathbb{C}), \ell \geq 2$

iii) C_ℓ : 

, $sp(2\ell,\mathbb{C}), \ell \geq 3$

iv) D_ℓ : 

, $so(2\ell,\mathbb{C}), \ell \geq 4$

Vyjímečné algebry:

i) E_6 : 

ii) E_7 : 

iii) E_8 : 

iv) F_4 : 

v) G_2 : 

Poznámka:

$A_\ell = sl(\ell+1,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{\ell+1,\ell+1} \mid tr A = 0\}$

$B_\ell = so(2\ell+1,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2\ell+1,2\ell+1} \mid A^T J + J A = 0\}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

$C_\ell = sp(2\ell,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2\ell,2\ell} \mid J A + A^T J = 0\}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

$D_\ell = so(2\ell,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2\ell,2\ell} \mid A^T J + J A = 0\}$, ~~$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$~~

17. přednáška

Poznámka:
V předchozí kapitole jsme dokončili klasifikaci všech konečně-rozměrných poloprostých komplexních algeber.
Připomeňme, že poloprosté algebry jsou součtem prostých ideálů.
V této kapitole se budeme zabývat, jak lze z této klasifikace odvodit klasifikaci reálných poloprostých algeber.

Poznámka: Konstrukce reálných forem
Z 2. Cartanova kritéria víme, že reálná algebra je poloprostá právě tehdy, když její komplexifikace je ~~prostá~~ poloprostá.
(Je vhodné si uvědomit, že pro prosté algebry totéž neplatí, komplexifikace prosté algebry ~~[illegible]~~ nemusí mít netriviální prosté ideály.)

Uvažme poloprostou reálnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \oplus_{\mathbb{R}} i\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$.

Algebra $\mathfrak{g}$ se dá popsat jako reálná podalgebra v $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ charakterizovaná zobrazením ϕ:

$$\phi : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : \phi(u+iv) = u - iv, \quad \forall u,v \in \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g} = \{ x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid \phi(x) = x \}$$

Takto definované zobrazení ϕ má evidentně následující vlastnosti

i) $\phi \circ \phi = id$, ϕ je involutivní

ii) ϕ je antilineární

iii) ϕ je automorfismus

Poznámka:

Naopak mějme komplexní algebru $\mathfrak{g}$ a její involutivní antilineární automorfismus ϕ.

Pak

$$\mathfrak{g}_\phi := \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathfrak{g}(x) = x\}$$

nám určuje reálnou podalgebru $\mathfrak{g}_\phi \sim \mathfrak{g}_\mathbb{C} : (\mathfrak{g}_\phi)_\mathbb{C} = \mathfrak{g}$.

Věta:

Reálné formy komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ jsou popsány involutivními antilineárními automorfismy $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Věta: Weylova věta o kompaktních Lieových grupách

Buď $\mathfrak{g}$ reálná poloprostá Lieova algebra, G její odpovídající souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa.

Grupa G je kompaktní právě tehdy, když Killingova forma algebry $\mathfrak{g}$ je negativně definitní.

Poznámka:

Kompaktní Lieovy grupy mají jednu podstatnou vlastnost: lze na nich zavést způsob integrování, který je invariantní vůči levému i pravému přenásobení integrační proměnné prvkem grupy.

To nám mimo jiné umožňuje ukázat klíčový poznatek, že konečně-rozměrné reprezentace kompaktní Lieovy grupy jsou úplně redukovatelné.

Definice: Levoinvariantní diferenciální forma

Diferenciální forma $\omega \in \Omega^{\circ}(G)$ se nazývá levoinvariantní právě tehdy, když pro všechna $g, h \in G$ platí:

$$L_g^*(\omega|_{gh}) = \omega|_h$$

Formy θ^k duální k bázi $\mathfrak{g}$ jsou levoinvariantní 1-formy a tvoří bázi prostoru všech levoinvariantních 1-forem na G.
Diferenciální n-forma $\omega = \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n$, kde $n = \dim \mathfrak{g}$, je levoinvariantní objemový element na G, neboť je definována na celém G a je všude nenulová.

Poznámka:

Levoinvariantní 1-formy (θ^k) duální k bázi (X_j) v $\mathfrak{g}$ se strukturními konstantami $C_{jk}^{\ l}$, tj.: $[X_j, X_k] = \sum_m C_{jk}^{\ l} X_l$ vyhovují důležitému vztahu zvanému

Maurer-Cartanova rovnice

$$d\theta^j = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} C_{kl}^{\ j}\, \theta^k \wedge \theta^l$$

Věta:

Nechť G je kompaktní.
Pak levoinvariantní objemový element $\omega = \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n$ je současně pravoinvariantní $R_g^* \omega = \omega$.
Říkáme, že ω je biinvariantní objemový element či biinvariantní míra.

Poznámka:

Buď G kompaktní, ω výše zavedený biinvariantní objemový element.
Protože Lieova grupa je vždy orientovatelná, je integrál

$$\int_G \omega$$

definován až na volbu orientace a je konečný.

Vhodným výběrem orientace lze docílit

$$0 < \int_G \omega < \infty .$$

Důsledek:

Pro kompaktní Lieovu grupu G platí:

i) Pro libovolnou funkci $f \in C^\infty(G)$ je

$$\int_G f \cdot \omega = \int_G (f \circ L_g) \cdot \omega = \int_G (f \circ R_g) \cdot \omega$$

ii) Pro $\rho : G \to GL(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ Hilbertův prostor, $\dim \mathcal{H} < \infty$, zavedeme jeho zprůměrování přes grupu G jako:

$$(u, v)_G := \int_G (\rho(g)u, \rho(g)v) \cdot \omega .$$

Pro libovolné $\tilde{g} \in G$ a $u, v \in \mathcal{H}$ platí:

$$(\rho(\tilde{g})u, \rho(\tilde{g})v)_G = (u, v)_G$$

→ Vzhledem ke skalárnímu součinu $(\cdot,\cdot)_G$ je ρ unitární reprezentace kompaktní grupy G na $\mathcal{H}$.

Lemma:

Konečně-rozměrné reprezentace kompaktní Lieovy grupy G jsou unitární vůči vhodně zvolenému skalárnímu součinu. Proto jsou též úplně reducibilní.

Věta: Weylova

Konečně-rozměrné reprezentace komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ jsou úplně reducibilní.

Poznámka: Váhy a váhové podprostory dané representace

Uvažujme komplexní poloprostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{g}_0$ a kořenovým systémem Δ spolu s její representací ρ na komplexním vektorovém prostoru V konečné dimense.

Buďte $\alpha, \beta \in \Delta$.
Pak odpovídající $T_\alpha, T_\beta \in \mathfrak{g}_0$ komutují, neboť $[T_\alpha, T_\beta] = 0$.
Proto $\rho(\mathfrak{g}_0) = \{\rho(H) \mid H \in \mathfrak{g}_0\}$ je podprostor v $\mathcal{L}(V)$ tvořený komutujícími operátory.
Rádi bychom ukázali, že jsou diagonalizovatelné, protože v takovém případě lze V vyjádřit jako direktní součet společných vlastních podprostorů.

Uvažujme $\alpha \in \Delta$.
Pak $\operatorname{span}\{X_\alpha, X_{-\alpha}, [X_\alpha, X_{-\alpha}]\}$ je podalgebra isomorfní $sl(2,\mathbb{C})$ a tedy $\rho(X_\alpha), \rho(X_{-\alpha}), \rho(T_\alpha)$ definují representaci algebry $sl(2,\mathbb{C})$ na V, ta je dle Weylovy věty úplně reducibilní, tj. je direktním součtem ireducibilních representací $sl(2,\mathbb{C})$ a v každé z nich působí $\rho(T_\alpha)$ diagonálně.
Proto je operátor $\rho(T_\alpha)$ na V diagonalizovatelný a celé $\rho(\mathfrak{g}_0)$ je množinou komutujících diagonalizovatelných operátorů.
Vektorový prostor V lze poto rozložit na společné vlastní podprostory $\rho(\mathfrak{g}_0)$

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{g}_0^*} V_\lambda \,, \quad V_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{I})$$

Definice: Váha/váhový podprostor/váhový diagram/váhová mřížka

Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra s Cartanovou ~~$\mathfrak{g}_0$~~ podalgebrou $\mathfrak{g}_0$ a kořenovým systémem Δ a ρ její reprezentace na komplexním vektorovém prostoru V konečné dimense.

i) Váha reprezentace ρ je každý funkcionál $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ takový, že

$$V_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{I}) \neq \{0\}$$

ii) Příslušný V_λ nazýváme váhový podprostor reprezentace ρ příslušný váze λ.

iii) Váhový diagram reprezentace ρ jsou všechny její váhy vyjádřené jako vektory v Euklidově prostoru $\mathfrak{h}^*$.

iv) Váhová mřížka je množina $\mathcal{I} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(T_\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in \Delta\} \subset \mathfrak{h}^*$

Poznámka:

- Váhy leží v reálném prostoru $\mathfrak{h}^*$, protože $\alpha(\rho(T_\alpha)) \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

- Váhová mřížka $\mathcal{I}$ je mřížkou ve smyslu

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{I},\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \in \mathcal{I}$$

Bázi $(\lambda_j)_{j=1}^{\ell}$ mřížky $\mathcal{I}$ tvoří $\lambda_j \in \mathcal{I}$ takové, že pro každé $\lambda \in \mathcal{I}$ existují $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{Z}$ splňující ~~$\lambda =$~~

$$\lambda = \sum_{j=1}^{\ell} m_j \lambda_j$$

Věta:

Mějme ρ reprezentaci komplexní poloprosté algebry $\mathfrak{g}$ na vektorovém prostoru V.
Nechť Λ_ρ je množina všech jejích vah,

$$\Lambda_\rho = \{ \lambda \in \mathfrak{g}_0^* \,/\, V_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{I}) \neq 0 \}.$$

Potom $\Lambda_\rho \subset \mathcal{T}$,

$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_\rho} V_\lambda$ a Λ_ρ je invariantní vzhledem k působení Weylovy grupy W kořenového systému Δ.