

Geometrické metody fyziky 1

Libor Šnobl¹

10. května 2021

¹Rukopis přednášky do L^AT_EXu přepsal student Jaroslav Kysela, upozorněním na chyby a překlady přispěla řada dalších studentů. Tento text dosud neobsahuje texty cvičení, které jsou nedílnou součástí kurzu a objasňují motivaci pojmů zde zavedených a jejich využití ve fyzice.

Obsah

1	Diferencovatelné variety	3
1.1	Cvičení	5
2	Tečné vektory k varietě	7
2.1	Zavedení tečného vektoru pomocí křivek	7
2.2	Zavedení tečného vektoru pomocí zobrazení	8
2.3	Cvičení	10
3	Tečný bundle, vektorová pole, integrální křivky	12
3.1	Cvičení	15
4	Abstraktnější pohled na vektorová pole	18
4.1	Cvičení	21
5	Diferenciální formy	23
5.1	Cvičení	26
6	Operace s diferenciálními formami	28
6.1	Cvičení	31
7	Zobrazení indukovaná zobrazením variet, podvariety	34
7.1	Tečné a kotečné zobrazení	34
7.2	Indukovaná zobrazení řezů fibrovaných prostorů	35
7.3	Podvariety	36
7.4	Cvičení	37
8	Lieova derivace	39
8.1	Vlastnosti Lieovy derivace	40
8.2	Cvičení	43
9	Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky	44
9.1	Cvičení	47
10	Integrace forem	50
10.1	Cvičení	53
11	Integrace na varietách s hranicí, Stokesova věta	55
11.1	Poincaréovo lemma	58
11.2	Cvičení	60

12 Variety s dodatečnou strukturou	62
12.1 Cvičení	66

Kapitola 1

Diferencovatelné variety

Geometrickými vlastnostmi matematických struktur se zabývají dvě základní oblasti matematiky:

- **Algebraická geometrie** zkoumá útvary v daném prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{CP}^n, \dots)$ zadané jako množina řešení (systémů) polynomiálních rovnic, tzv. algebraické variety (angl. variety), které mohou obsahovat různé typy singularit, viz např. $x \cdot y = 0$ v $\mathbb{R}^2[x, y]$. Jedná se o velice abstraktní oblast matematiky.
- **Diferenciální geometrie**, neboli globální analýza, zkoumá topologické prostory, které jsou lokálně ztotožnitelné s $\mathbb{R}^n$, ze kterého se na ně přenáší pojmy známé z analýzy. Podstatné jsou vnitřní vlastnosti a jejich popis v různých souřadnicích, nikoliv způsob vnoření do nějakého vektorového či afinního prostoru. Základním pojmem je tzv. diferencovatelná (neboli hladká) varieta (angl. manifold).

My se budeme věnovat základním pojmům druhé jmenované. Nejprve uveďme pár definic:

Definice 1.1. Topologický prostor (M, τ) je **Hausdorffův** právě tehdy, když pro každá dvě různá $x, y \in M$ navzájem různá existují $U = U^\circ \ni x, V = V^\circ \ni y$ taková, že $U \cap V = \emptyset$.

Definice 1.2. Necht' $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \in \tau, \{V_\beta\}_{\beta \in J} \in \tau$ jsou dvě otevřená pokrytí topologického prostoru (M, τ) , tj. $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M = \bigcup_{\beta \in J} V_\beta$, pak $\{V_\beta\}_{\beta \in J}$ je **zjemněním** $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ právě tehdy, když pro každé $\beta \in J$ existuje $\alpha \in I$ takové, že $V_\beta \subset U_\alpha$.

Definice 1.3. Otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ topologického prostoru (M, τ) je **lokálně konečné** právě tehdy, když pro každý bod $x \in M$ existuje konečná podmnožina $J \subset I$ taková, že $\forall \alpha \in I \setminus J$ platí $x \notin U_\alpha$.

Definice 1.4. Topologický prostor (M, τ) je **parakompaktní** právě tehdy, když ke každému otevřenému pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ existuje lokálně konečné zjemnění.

Definice 1.5. Necht' (M, τ) je topologický prostor, $U = U^\circ \subset M, V = V^\circ \subset \mathbb{R}^n$. Pak homeomorfismus $\varphi : U \rightarrow V$ nazýváme **mapa** či **lokální souřadnice** na M . U nazýváme **souřadnicové okolí** v M .

Definice 1.6. Otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ topologického prostoru (M, τ) vybavené mapami $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme **atlas** na M a n nazýváme **dimenzí atlasu**. Atlas obvykle značíme $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. (Připomeňme, že $\varphi_\alpha(U_\alpha) = (\varphi_\alpha(U_\alpha))^\circ \subset \mathbb{R}^n$.)

Poznamenejme, že existence atlasu výrazně omezuje možnou strukturu uvažovaného topologického prostoru, neboť znamená, že topologický prostor je lokálně homeomorfní $\mathbb{R}^n$. Dimenzí topologického prostoru vybaveného atlasem rozumíme dimenzi daného atlasu, $\dim M = n$. Z konstrukce je zřejmé, že libovolné dva atlasy na stejném topologickém prostoru musí mít stejnou dimenzi.

Označme C^∞ prostor hladkých, tj. libovolněkrát diferencovatelných, funkcí, a C^ω prostor analytických funkcí (tj. funkcí, jejichž Taylorův rozvoj konverguje v okolí každého bodu).

Definice 1.7. Buď $k \in \mathbb{N}$, popř. $k \in \{\infty, \omega\}$. Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ na M je **třídy C^k** právě tehdy, když zobrazení

$$\tau_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

je třídy C^k pro všechna $\alpha, \beta \in I$ taková, že $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Definice 1.8. Zobrazení $\tau_{\alpha\beta}$ (1.1) z předchozí definice nazýváme **přechodová funkce**.

Definice 1.9. Mapa (U, φ) je **C^k –kompatibilní** s atlasem $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I} \Leftrightarrow (\forall \alpha \in I : U \cap U_\alpha \neq \emptyset) (\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ je třídy C^k a současně $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ je třídy C^k , tj. $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ je difeomorfismus třídy C^k).

Standardně budeme uvažovat C^∞ , tj. funkce libovolněkrát diferencovatelné.

Definice 1.10. Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ třídy C^k na M je **maximální** právě tehdy, když obsahuje všechny mapy s ním C^k -kompatibilní. Maximální atlas třídy C^∞ na M nazýváme **diferencovatelná** či **hladká struktura** na M .

Definice 1.11. Topologický Hausdorffův parakompaktní prostor (M, τ) vybavený diferencovatelnou strukturou nazýváme **diferencovatelná varieta** (neboli **hladká varieta**).

Místo parakompaktnosti se často žádá silnější podmínka, a sice aby byl prostor (M, τ) **lokálně kompaktní** (tj. každý bod p má kompaktní okolí neboli kompaktní množinu obsahující otevřenou množinu obsahující p) se **spočetnou bází topologie**, to znamená, že existuje spočetná indexová množina I a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} : U_\alpha = U_\alpha^\circ$ takové, že každá otevřená množina V je sjednocením množin z $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, tj. $\exists J \subset I : V = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$.

Díky lokálnímu ztotožnění topologického prostoru M s prostorem $\mathbb{R}^n$ pomocí atlasu můžeme na M derivovat, zkoumat hladkost atd. Většinou se setkáme s varietami pokrytými nejvýše spočetným systémem map. Pak lze topologii τ převést pomocí φ_α^{-1} z $\mathbb{R}^n$ a nemusí být zadána předem. Maximalita atlasu se vyžaduje za účelem jednoznačnosti pojmu varieta. Při praktickém počítání použijeme spíše atlas s minimálním počtem map.

Pokud chceme vyznačit, že na zadané varietě M pracujeme v konkrétních zvolených souřadnicích $(x_1, \dots, x_n)$, používáme pro zadání variety často zkrácené označení $M[x_1, \dots, x_n]$. Až zavedeme orientaci variety v kapitole 10, budeme též předpokládat, že takto vyznačené souřadnice $(x_1, \dots, x_n)$ jsou kladně orientované.

Definice 1.12. Spojité zobrazení $\phi : M \rightarrow N$ dvou diferencovatelných variet M a N je **hladké** (tj. třídy C^∞) právě tehdy, když pro každou mapu $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ z atlasu M a pro každou mapu (V_β, ψ_β) z atlasu N , kde $\phi(U_\alpha) \cap V_\beta \neq \emptyset$, je zobrazení $\psi_\beta \circ \phi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \phi^{-1}(V_\beta)) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi_\beta(\phi(U_\alpha) \cap V_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ hladké, kde $m = \dim M$ a $n = \dim N$.

U variet budeme dále vždy implicitně uvažovat zobrazení, která jsou hladká, nebude-li výslovně uvedeno jinak.

Definice 1.13. Hladkou bijekci $\phi : M \rightarrow N$ takovou, že ϕ^{-1} je též hladké, nazýváme **difeomorfismus** variet M a N .

Difeomorfnní variety považujeme za ekvivalentní a pro praktické účely je ztotožňujeme, např. $S^2 \simeq \mathbb{CP}^1$ (viz cvičení).

Diferencovatelné variety v mnoha případech zadáváme pomocí vazeb, tj. jako vzor $F^{(-1)}(y_0)$ nějakého vybraného bodu $y_0 \in \mathbb{R}^r$ při daném zobrazení $F : \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^r$. Topologii na $F^{(-1)}(y_0)$ uvažujeme indukovanou z $\mathbb{R}^{n+r}$ (indukuje se tak lokální kompaktnost, spočetná báze a to, že prostor je Hausdorffův), mapy vytváříme pomocí věty o implicitní funkci. Jejím aplikací dostáváme následující větu.

Věta 1.14. Buď $F : \mathbb{R}^{r+n} \rightarrow \mathbb{R}^r$ třídy C^∞ , $y_0 \in \mathbb{R}^r$,

$$F^{(-1)}(y_0) = \{x \in \mathbb{R}^{r+n} | F(x) = y_0\} \neq \emptyset \quad (1.2)$$

a necht' pro všechna $x \in F^{(-1)}(y_0)$ platí $\text{rank } dF(x) = \dim \mathbb{R}^r = r$. Pak $F^{(-1)}(y_0)$ je diferencovatelnou varietou dimenze n s mapami vytvořenými s využitím věty o implicitní funkci.

Máme-li dvě variety $(M, \tau, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I})$, $(N, \sigma, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J})$, $\dim M = m$, $\dim N = n$, pak lze na $M \times N$ přirozeně zavést **součinovou topologii** $\tau \times \sigma$ (otevřené množiny jsou konečné průniky kartézských součinů otevřených množin a libovolná jejich sjednocení). S mapami $\chi_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $\chi_{\alpha\beta}(u, v) = (\varphi_\alpha(u), \psi_\beta(v))$, je pak taková množina $M \times N$ $(m+n)$ -rozměrnou diferencovatelnou varietou.

Pokud $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, tak může nastat situace, kdy jsou všechny přechodové funkce $\tau_{\alpha\beta} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ na svém definičním oboru holomorfní. Pak říkáme, že atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ je **holomorfní** a definuje n -rozměrnou **komplexní varietu**. Každá n -rozměrná komplexní varieta je $2n$ -rozměrnou reálnou varietou, opačná implikace obecně neplatí. Vzhledem k různým možným způsobům ztotožnění $\mathbb{R}^{2n}$ a $\mathbb{C}^n$ může jedna $2n$ -rozměrná reálná varieta odpovídat mnoha (i nekonečně) neekvivalentním strukturám komplexní variety.

1.1 Cvičení

Cvičení 1.1. Ukažte, že $\mathbb{R}^n$ se standardní topologií je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor se spočetnou bazí topologie.

Cvičení 1.2. Ukažte, že pokud množina M je vybavená konečným systémem podmnožin $\{U_i\}_{i \in I}$, $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ a bijekcí $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ takovým, že

$$\tau_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

je homeomorfismus kdykoliv je $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, je možné na M zavést přirozeným způsobem topologii takovou, že $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ je atlas třídy C^0 na M . Pokud všechna τ_{ij} jsou třídy C^k , máme atlas třídy C^k .

Cvičení 1.3. Ukažte, že sféra

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

je diferencovatelnou varietou.

Návod. S^2 je topologický prostor s topologií indukovanou z $\mathbb{R}^3$. Zkonstruujeme atlas tvořený dvěma mapami

$$\begin{aligned} U_N &= S^2 - \{(0, 0, -1)\}, & \varphi_N : U_N &\rightarrow \mathbb{R}^2[U, V] : & \varphi_N(x, y, z) &= \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right), \\ U_S &= S^2 - \{(0, 0, 1)\}, & \varphi_S : U_S &\rightarrow \mathbb{R}^2[u, v] : & \varphi_S(x, y, z) &= \left(\frac{x}{1-z}, \frac{-y}{1-z} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ukažte, že zobrazení $\varphi_{N,S}$ přiřazují bodům z S^2 průnik přímky spojující daný bod (x, y, z) s jižním, resp. severním, pólem $(0, 0, -1)$ ($(0, 0, 1)$) s rovinou xy , s otočením orientace v případě mapy φ_S . Jedná se o tzv. **stereografické projekce**. Ověřte, že se jedná o homeomorfismy. Nalezněte přechodovou funkci

$$\tau_{SN}(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right) \quad (1.4)$$

a ukažte že je třídy C^∞ na svém definičním oboru a podobně její inverze.

Vzhledem k tomu, že uvedené mapy lze reinterpretovat jako zobrazení do $\mathbb{C}$, $z = u + iv$, $Z = U + iV$ a přechodové funkce mají pak tvar $\tau_{SN}(z) = \frac{1}{z}$, $\tau_{NS}(Z) = \frac{1}{Z}$, tj. jsou holomorfní, jedná se též o komplexní varietu.

Cvičení 1.4. Ukažte, že **komplexní projektivní prostor**

$$\mathbb{CP}^n = \{\mathbb{C}\text{-span}\{\vec{v}\} \mid \vec{v} \in \mathbb{C}^{n+1}, \vec{v} \neq 0\}$$

je diferencovatelnou varietou dimenze $2n$ a též komplexní varietou dimenze n .

Návod. Systém souřadnicových okolí a map konstruujeme následovně: zavedeme souřadnice na $\mathbb{C}^{n+1}$: $\vec{v} = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ a definujeme okolí

$$\begin{aligned} U_i &= \{\mathbb{C}\text{-span}\{\vec{v}\} \mid \vec{v} \in \mathbb{C}^{n+1}, v_i \neq 0\}, \\ \varphi_i : U_i &\rightarrow \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}, \quad \varphi_i(v_0, v_1, \dots, v_n) = \left(\frac{v_0}{v_i}, \frac{v_1}{v_i}, \dots, \frac{v_{i-1}}{v_i}, \frac{v_{i+1}}{v_i}, \dots, \frac{v_n}{v_i} \right). \end{aligned}$$

kde $i = 0, \dots, n$. Nalezněte odpovídající přechodové funkce a ověřte jejich hladkost, resp. holomorfnost.

Obdobně lze definovat též **reálný projektivní prostor**

$$\mathbb{RP}^n = \{\mathbb{R}\text{-span}\{\vec{v}\} \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^{n+1}, \vec{v} \neq 0\}$$

jako diferencovatelnou varietu dimenze n .

Cvičení 1.5. Ukažte, že komplexní projektivní prostor $\mathbb{CP}^1 = \{\mathbb{C}\text{-span}\{\vec{v}\} \mid \vec{v} \in \mathbb{C}^2, \vec{v} \neq 0\}$ je izomorfní sféře S^2 .

Návod. Vhodným způsobem ztotožněte obrazy map v $\mathbb{CP}^1$ a S^2 a ověřte, že je to konzistentní při přechodu k jiným mapám.

Kapitola 2

Tečné vektory k varietě

Chceme zavést na diferencovatelné varietě obdobu tečného vektoru k ploše či křivce a derivace ve směru vektoru v $\mathbb{R}^n$. Vzhledem k tomu, že nemáme k dispozici vektorový prostor, do něhož by naše varieta byla vnořená a v němž bychom mohli tečné vektory konstruovat, máme zobecněním vlastností tečných vektorů ke křivkám a plochám dvě přirozené možnosti: definovat tečné vektory pomocí křivek a pomocí zobrazení z prostoru hladkých funkcí na varietě do reálných čísel, odrážejícího vlastnosti směrové derivace. Nejprve obě možnosti prozkoumáme a pak ukážeme, že takto zkonstruované pojmy tečného vektoru jsou ve skutečnosti matematicky ekvivalentní.

2.1 Zavedení tečného vektoru pomocí křivek

Definice 2.1. Hladké zobrazení $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, kde $a < 0 < b$, nazýváme (**hladká**) **křivka** na varietě M vycházející z bodu $p_0 = \gamma(0)$.

Definice 2.2. Vektorový prostor hladkých (C^∞) funkcí na varietě M značíme $C^\infty(M)$.

Zavádíme ekvivalenci mezi křivkami vycházejícími z $p_0 \in M$:

$$\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \tilde{\gamma}) \right|_{t=0}, \quad \forall f \in C^\infty(M). \quad (2.1)$$

Protože $f \circ \gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $0 \in (a, b)$, má derivace $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0}$ smysl.

Definice 2.3. Tečný vektor X k varietě M v bodě $p_0 \in M$ je třída ekvivalence křivek $[\gamma]$ vycházejících z bodu p_0 .

Definice 2.4. Derivace funkce f ve směru tečného vektoru $X = [\gamma]$, $f \in C^\infty(M)$, je pro libovolnou $\gamma \in [\gamma]$ dána vztahem

$$Xf = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \right|_{t=0}. \quad (2.2)$$

Z definice ekvivalence křivek je zřejmé, že derivace funkce ve směru tečného vektoru nezávisí na výběru křivky reprezentující třídu ekvivalence.

Uvažujme nyní lokální souřadnice $x^i = \varphi^i(p)$, kde $p \in U = U^\circ$, $\varphi^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, a zvolme $p_0 \in U$ s lokálními souřadnicemi $x_0^i = \varphi^i(p_0)$ a libovolnou funkci $f \in C^\infty(M)$. Reálnou funkci

$$F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) = \varphi(U)^\circ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3)$$

nazýváme **vyjádření funkce f v lokálních souřadnicích** φ (či souřadnicích (x^i)). Většinou ji značíme stejně jako samotnou funkci f a použité souřadnice vyplývají z kontextu.

Následně můžeme tečný vektor ztotožnit se směrovou derivací

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x_0}, \quad (2.4)$$

kde $X^i = X\varphi^i = \frac{d}{dt}(\varphi^i \circ \gamma) \Big|_{t=0} \in \mathbb{R}$. Všimněme si, že $\varphi^i \circ \gamma$ je i -tá složka křivky γ v souřadnicovém vyjádření φ .

Důvodem pro ztotožnění tečného vektoru a jemu odpovídající směrové derivace (2.4) je skutečnost, že dle vztahu pro derivaci složené funkce máme pro libovolnou hladkou funkci $f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x_0} F &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(\varphi^i \circ \gamma) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \varphi^{-1}) \Big|_{x_0} = \\ &= \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (f \circ \gamma) \Big|_{t=0}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

(kde $x_0^i = \varphi^i(\gamma(0))$). Tedy $Xf = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x_0} F$.

Obvykle píšeme $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{p_0}$ místo $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p_0)}$, tj. ztotožňujeme bod a jeho souřadnicové vyjádření v souřadnicích použitých v daném výrazu.

Poznámka 2.5. Souřadnice až na výjimky píšeme s horními indexy. Nadále budeme využívat **sumační konvenci** – index vyskytující se jednou nahoře a jednou dole se sčítá od 1 do dimenze variety.

Nechť $\vec{X} = (X^i) \in \mathbb{R}^n$. Pak zobrazení $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definované jako $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{p_0}$ je působením tečného vektoru $[\gamma]$, kde křivku γ je v souřadnicích (x^i) možné zapsat například ve tvaru $\gamma^i(t) = x^i(p_0) + t X^i$.

Při změně souřadnic $(x^i) \rightarrow (\tilde{x}^i)$ se souřadnicové vyjádření tečného vektoru mění podle vztahu pro derivaci složené funkce: $X^i = \frac{d}{dt} x^i(\gamma(t)) \Big|_{t=0}$ a $\tilde{X}^i = \frac{d}{dt} \tilde{x}^i(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \Big|_{p_0} \frac{d}{dt} x^j(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \Big|_{p_0} X^j$, z čehož plyne vztah

$$X = \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \Big|_{p_0} = X^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \Big|_p \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \Big|_{p_0} = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{p_0}. \quad (2.6)$$

2.2 Zavedení tečného vektoru pomocí zobrazení

Definice 2.6. Tečný vektor X k varietě M v bodě $p \in M$ je zobrazení $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ vyhovující následujícím podmínkám:

1. $X(af + g) = aXf + Xg$, $\forall f, g \in C^\infty(M)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, tj. **linearita**,
2. $X(fg) = f(p)(Xg) + (Xf)g(p)$, $\forall f, g \in C^\infty(M)$, tzv. **Leibnizovo pravidlo**,
3. $\forall f, g \in C^\infty(M) : (\exists U = U^\circ \ni p, f|_U = g|_U \Rightarrow Xf = Xg)$, tzv. **lokalita**.

Věta 2.7. Uvedené dvě definice tečného vektoru jsou ekvivalentní.

Důkaz. $X = [\gamma] \rightarrow X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, X^i = \frac{d}{dt}(\varphi^i \circ \gamma)|_{t=0}$ splňuje linearitu, Leibnizovo pravidlo i lokality.

Naopak, mějme $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ vyhovující vlastnostem uvedeným v definici 2.6. Definujme $X^i = X\varphi^i$, kde $\varphi = (x^i)$ jsou souřadnice na okolí U bodu p . K tomu přísně vzato potřebujeme φ^i jako funkci na celém M , k jejímu definování využijeme podmínku lokality. Nechtě $U_1 \subset U_2$ jsou vzory otevřených do sebe vnořených koulí v $\mathbb{R}^n \cap \varphi(U)$ se středem v bodě $\varphi(p)$, tj. $U_1 \subset U_2 \subset U$. Předpokládejme pro určitost, že koule $\varphi(U_1)$ má poloměr ϵ a $\varphi(U_2)$ poloměr 2ϵ . Definujme:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^i &= x^i && \text{na } U_1, \\ \tilde{\varphi}^i &= 0 && \text{na } M \setminus U_2, \\ \tilde{\varphi}^i &= \text{hladká interpolace} && \text{na } U_2 \setminus U_1. \end{aligned}$$

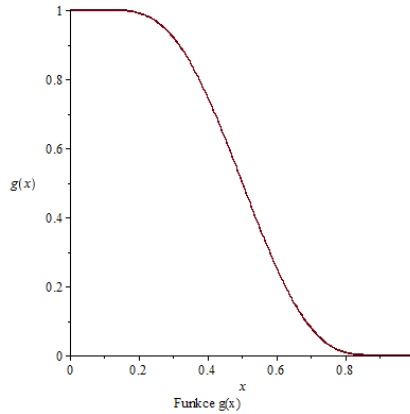
Existence vhodné interpolující funkce se ukáže využitím následující funkce $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, viz [4]: uvážíme nejprve funkci $f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(x-1)x}\right), & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ nebo } 1 \leq x. \end{cases}$$

Tato funkce je hladká na $\mathbb{R}$, jak se snadno ověří jejím explicitním derivováním a limitami $x \rightarrow 0^+$ a $x \rightarrow 1^-$. Následně se její integrací definuje nová hladká funkce $g(x)$,

$$g(x) = \frac{\int_x^1 f(y)dy}{\int_0^1 f(y)dy}, \quad (2.7)$$

kteřá je hladká na $\mathbb{R}$, rovná 1 pro $x \leq 0$ a nulová pro $x \geq 1$.



Zavedením $F(q) = g\left(\frac{\|\varphi(q) - \varphi(p)\|}{\epsilon} - 1\right)$ pak dostáváme hladkou funkci F na U rovnou 1 uvnitř koule U_1 a rovnou 0 mimo kouli U_2 . Jejím součinem se souřadnicovými funkcemi φ^i pak nacházíme hledané $\tilde{\varphi}^i$ na U , které hladce dodefinujeme na celou varietu M jako nulovou funkci na $M \setminus U$.

Z této konstrukce plyne existence $\tilde{\varphi}^i \in C^\infty(M)$ a $X^i = Xx^i \equiv X\tilde{\varphi}^i$ nezávisí na volbě U_1, U_2 (díky podmínce lokality). Definujme $\tilde{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, což je vyjádření tečného vektoru podle první definice 2.3. Chceme ukázat, že $\forall f \in C^\infty(M)$ platí $Xf = \tilde{X}f$. Funkce $f \in C^\infty(U_1)$ (viz rozšíření souřadnicových funkcí výše) má v lokálních souřadnicích tvar $f(x^1, \dots, x^n)$. Bez újmy na obecnosti zvolíme souřadnice tak, že $\varphi(p) = \vec{0}$. Z Taylorova

rozvoje pro funkci f plyne: $f(\vec{x}) = f(\vec{0}) + x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{\vec{0}} + g(\vec{x})$, kde g je nějaká hladká funkce na okolí $\vec{0}$, $g(\vec{0}) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x^i} \Big|_{\vec{0}} = 0$ a tedy:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{0}) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(t\vec{x}) dt \\ &= - \int_0^1 \frac{d}{dt} (1-t) \frac{d}{dt} f(t\vec{x}) dt \\ &= -[(1-t) \frac{d}{dt} f(t\vec{x})]_0^1 + \int_0^1 (1-t) \frac{d^2}{dt^2} f(t\vec{x}) dt \\ &= x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{\vec{0}} + \int_0^1 (1-t) x^i x^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f(t\vec{x}) dt \\ &= x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{\vec{0}} + \underbrace{x^i x^j \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} g(t\vec{x}) dt}_{g(\vec{x}) = x^i x^j g_{ij}(\vec{x})}, \end{aligned}$$

kde $g_{ij}(\vec{x}) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f(t\vec{x}) dt = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} g(t\vec{x}) dt$ jsou nějaké hladké funkce na oblasti konvergence Taylorova rozvoje. Z linearit a Leibnizova pravidla plyne $X(\text{konst.}) = 0$ a tedy: $Xf = 0 + X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{\vec{0}} + X(x^i x^j g_{ij}(\vec{x}))$. Použitím Leibnizova pravidla navíc dostáváme $X(x^i x^j g_{ij}(\vec{x})) = 0$, neboť nám po jeho aplikaci zůstane v každém členu alespoň jedno $x^i \Big|_0 = 0$. Celkem $Xf = \tilde{X}f$ a obě definice tečného vektoru jsou tedy ekvivalentní. ■

Důsledek 2.8. Množina tečných vektorů k M v $p \in M$ má přirozenou strukturu vektorového prostoru.

Důkaz. Uvažovaná zobrazení $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor, neboť součet a konstantní násobek zobrazení splňujících podmínky v definici 2.6 je též splňuje. ■

Definice 2.9. Tečný prostor $T_p M$ k varietě M v bodě $p \in M$ je vektorový prostor tvořený tečnými vektory k M v p . Dimenze tečného prostoru k M v $p \in M$ je rovná dimenzi variety, $\dim T_p M = \dim M$.

2.3 Cvičení

Cvičení 2.1. Uvažujte dvě variety M_ϵ , kde $\epsilon = \pm 1$. Každá je popsána dvěma mapami $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takovými, že

$$\text{Ran}(\varphi_1) = (0, 2\pi) \times (-1, 1), \quad \text{Ran}(\varphi_2) = (-\pi, \pi) \times (-1, 1).$$

Přechodová funkce τ_{12} má definiční obor $((0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)) \times (-1, 1)$ a je dána předpisem

$$\begin{aligned} \tau_{12}(\theta, \sigma) &= (\theta, \sigma), & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ &= (\theta - 2\pi, \epsilon\sigma) = (\tilde{\theta}, \tilde{\sigma}), & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Určete, o jaké geometrické objekty se jedná.

Výsledek. Plášť válce, resp. Möbiův list.

Cvičení 2.2. Uvažujte variety a mapy z cvičení 2.1 a bod $p_0 \in U_1 \cap U_2$. Převeďte tečný vektor

$$X = \alpha \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{p_0} + \beta \left. \frac{\partial}{\partial \sigma} \right|_{p_0}$$

vyjádřený v souřadnicích $[\theta, \sigma]$ v mapě φ_1 do souřadnic $[\tilde{\theta}, \tilde{\sigma}]$ v mapě φ_2 .

Výsledek. Výsledek se liší dle hodnoty $\theta(p_0)$:

- $\theta(p_0) \in (0, \pi) : X = \alpha \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{p_0} + \beta \left. \frac{\partial}{\partial \sigma} \right|_{p_0},$
- $\theta(p_0) \in (\pi, 2\pi) : X = \alpha \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{p_0} + \beta \left. \frac{\partial}{\partial \sigma} \right|_{p_0}.$

Cvičení 2.3. Uvažujte varietu $M = \mathbb{R}^+$ s mapami $\varphi_1 : M \rightarrow \mathbb{R}^+ : \varphi_1(x) = x$ a $\varphi_2 : M \rightarrow \mathbb{R} : y \equiv \varphi_2(x) = \ln(x)$. Tečný vektor $X = \left. \frac{d}{dx} \right|_{p_0} \in T_{x_0}M$ vyjádřete v souřadnicích y .

Výsledek. $X = \frac{1}{x_0} \left. \frac{d}{dy} \right|_{p_0} = \frac{1}{\exp y_0} \left. \frac{d}{dy} \right|_{p_0}.$

Cvičení 2.4. Uvažujte sféru S^2 popsanou stereografickými projekcemi a tečné vektory $X_1 = \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_p, X_2 = \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p$ v bodě $p \in U_N \cap U_S$. Najděte vyjádření těchto vektorů v souřadnicích $[U, V]$ na U_N .

Výsledek. $X_1 = (V^2 - U^2) \left. \frac{\partial}{\partial U} \right|_p - 2UV \left. \frac{\partial}{\partial V} \right|_p, X_2 = 2UV \left. \frac{\partial}{\partial U} \right|_p + (V^2 - U^2) \left. \frac{\partial}{\partial V} \right|_p.$

Cvičení 2.5. V $\mathbb{R}^3$ uvažujte kartézské souřadnice $[x, y, z]$ a sférické souřadnice $[r, \theta, \phi]$,

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (2.8)$$

Tečné vektory $X_1 = \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p, X_2 = \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p, X_3 = \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_p$ a $X_4 = \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \Big|_p$ převeďte do sférických souřadnic.

Návod. Je snazší vyjádřit Jacobiho matici $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$ a určit její inverzi než počítat vyjádření souřadnic r, θ, ϕ pomocí x, y, z a následně počítat parciální derivace.

Výsledek.

$$\begin{aligned} X_1 &= \sin \theta \cos \phi \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_p + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \right|_p, \\ X_2 &= \sin \theta \sin \phi \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_p + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \right|_p, \\ X_3 &= \cos \theta \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_p - \frac{\sin \theta}{r} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p, \\ X_4 &= \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \right|_p. \end{aligned}$$

Kapitola 3

Tečný bundle, vektorová pole, integrální křivky

V předchozí kapitole zavedené tečné vektory jsou vázány na konkrétní bod variety. Jsou tudíž vhodnými objekty k popisu např. rychlosti částice v konkrétním bodě její trajektorie (jak je ostatně vidět i z jejich definice pomocí tříd ekvivalence křivek). V řadě situací v matematice a fyzice se ale setkáváme s tím, že vektor je zadán v každém bodě prostoru, např. vektor intenzity elektrického pole. V této kapitole si proto zkonstruujeme vhodný, tomu odpovídající, matematický objekt, tzv. vektorové pole.

Zavedme disjunktí sjednocení všech $T_p M$, $p \in M$:

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M = \{X_p \in T_p M \mid p \in M\}, \quad (3.1)$$

tj. $V \in TM \Leftrightarrow \exists p \in M, X \in T_p M : V = X$.

Na TM zavádíme zobrazení $\pi : TM \rightarrow M$, $\pi(X_p) = p$. Na TM můžeme přirozeným způsobem zavést strukturu diferencovatelné variety. Buď $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x_\alpha^i))\}_{\alpha \in I}$ diferencovatelný atlas na M , $\dim M = n$. Pak zavedeme na TM atlas $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, kde $V_\alpha = \pi^{(-1)}(U_\alpha)$ a $\psi_\alpha : V_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ jsou definovány předpisem:

$$\psi_\alpha(X_p) = (x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p), X_\alpha^1(p), \dots, X_\alpha^n(p)), \text{ kde } X_p = X_\alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \Big|_p.$$

Zobrazení ψ_α je bijekce. Zvolíme na TM takovou topologii, aby bylo ψ_α i π spojitě, tj. vzory otevřených množin při zobrazeních ψ_α i π definujeme jako otevřené množiny v TM a doplníme jejich konečné průniky a libovolná sjednocení. Přechodové zobrazení má tvar $(\tau_{\alpha\beta} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}, X_p = X_\beta^i \frac{\partial}{\partial x_\beta^i} \Big|_p)$:

$$\tau_{\alpha\beta}(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, X_\alpha^1, \dots, X_\alpha^n) = (x_\beta^1(x_\alpha), \dots, x_\beta^n(x_\alpha), X_\beta^1, \dots, X_\beta^n),$$

kde $X_\beta^i = \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j} \Big|_p \cdot X_\alpha^j$. Zobrazení $\tau_{\alpha\beta}$ je hladké, neboť zobrazení

$$(X_\alpha^1, \dots, X_\alpha^n) \rightarrow \left(\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j} \Big|_p \cdot X_\alpha^j \right)_{i=1}^n$$

je hladké jako funkce $2n$ proměnných x^i a X^i a $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ je hladké dle předpokladu.

Definice 3.1. Diferencovatelnou varietu TM nazýváme **tečný fibrovaný prostor** (též **tečný bundle**). TM je speciálním případem tzv. fibrovaného prostoru.

Definice 3.2. Fibrovaný prostor (angl. fibre bundle) je diferencovatelná varieta E , nazývaná **totální prostor**, vybavená následujícími dodatečnými strukturami:

1. Diferencovatelnou varietou M zvanou **báze** neboli **bázová varieta** se surjektivním zobrazením $\pi : E \rightarrow M$ zvaným **projekce** a otevřeným pokrytím $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$.
2. Diferencovatelnou varietou F zvanou **typické vlákno** s difeomorfizmy $\psi_\alpha : \pi^{(-1)}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ zvanými **lokální trivializace** splňujícími (π_1 je projekce na první složku kartézského součinu $U_\alpha \times F$):

$$\pi_1 \circ \psi_\alpha = \pi|_{\pi^{(-1)}(U_\alpha)}.$$

Definice 3.3. Necht $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Zobrazení $\tau_{\alpha\beta}(p) : F \rightarrow F$ takové, že

$$(\forall u \in F) ((p, \tau_{\alpha\beta}(p)u) = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, u)),$$

nazýváme **přechodová funkce na vlákne** při přechodu z trivializace (U_α, ψ_α) do trivializace (U_β, ψ_β) .

Je třeba si neplést $\tau_{\alpha\beta}$ s přechodovou funkcí u variet. Přechodová funkce na vlákne je zobrazením typického vlákna sama na sebe a parametricky závisí na uvažovaném bodě bázové variety.

Poznámka 3.4. Fibrovaný prostor $(E, M, F, \pi, \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I})$ často značíme jen E nebo $E \xrightarrow{\pi} M$, jsou-li další struktury jasné z kontextu.

Často klademe omezení na přípustné lokální trivializace: připouštíme pouze takové trivializace, kdy všechny přechodové funkce na vlákne leží ve vhodné vybrané grupě zobrazení $F \rightarrow F$, tj. ve vhodné podgrupě grupy všech difeomorfizmů $\text{Diff}(F)$. Vybranou grupu nazýváme **strukturní grupa** fibrovaného prostoru E . Může jít o případy, kdy má F dodatečnou strukturu, jako např. vektorový prostor nebo varieta s metrikou.

Pokud F má strukturu vektorového prostoru, je přirozené požadovat, aby strukturní grupa fibrovaného prostoru E s typickým vláknem F byla grupa regulárních lineárních operátorů $GL(F)$ nebo její vhodná podgrupa (např. grupa ortogonálních operátorů v případě vektorového prostoru se skalárním součinem). Takový fibrovaný prostor nazýváme **vektorový fibrovaný prostor**.

Definice 3.5. Pro dané $p \in M$ nazýváme $\pi^{(-1)}(p)$ **vlákno nad bodem p** . $\pi^{(-1)}(p)$ je diferencovatelná varieta izomorfní typickému vláknem F (izomorfismus není určen jednoznačně, při zvolené trivializaci předpis pro něj zní: $x \rightarrow \pi_2(\psi_\alpha(x))$, $x \in \pi^{(-1)}(p)$).

Definice 3.6. Řez fibrovaného prostoru E definujeme jako hladké zobrazení $\sigma : M \rightarrow E$ vyhovující podmínce $\pi \circ \sigma = id$. Množinu všech řezů E značíme $\Gamma(E)$.

Poznámka 3.7. Řezy vektorového fibrovaného prostoru tvoří vektorový prostor vzhledem k bodovému sčítání, $(\alpha\sigma_1 + \sigma_2)(p) = \alpha\sigma_1(p) + \sigma_2(p)$.

Definice 3.8. Lokální řez na okolí $U = U^\circ \subset M$ je hladké zobrazení $\sigma : U \rightarrow E$ splňující $\pi \circ \sigma = id|_U$.

Definice 3.9. Zobrazením fibrovaných prostorů (E, M, F, π) a $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{F}, \tilde{\pi})$ (angl. bundle map) nazveme dvojici zobrazení $\phi : E \rightarrow \tilde{E}$ a $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ vyhovující podmínce: $\tilde{\pi} \circ \phi = \varphi \circ \pi$.

Definice 3.10. Fibrovaný prostor $E \xrightarrow{\pi} M$ je **triviální**, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení fibrovaných prostorů $E \xrightarrow{\pi} M$ a $M \times F \xrightarrow{\pi_1} M$.

Definice 3.11. Vektorové pole X na varietě M je řez tečného bundlu, tj. $X \in \Gamma(TM)$. Množinu všech vektorových polí na varietě M značíme $\mathcal{X}(M)$ nebo $\Gamma(TM)$ (viz důsledek 4.8 níže).

Jinak řečeno, vektorové pole přiřazuje každému $p \in M$ tečný vektor $X(p) \in T_p M$ hladkým způsobem, tj. v libovolných souřadnicích $X(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}$, kde $X^i \in C^\infty(U)$.

Definice 3.12. Integrální křivka vektorového pole $X \in \mathcal{X}(M)$ vycházející z bodu $p_0 \in M$ je hladké zobrazení $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, $a < 0 < b$, $\gamma(0) = p_0$, takové, že

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) \equiv \dot{\gamma}(t) = X|_{\gamma(t)}. \quad (3.2)$$

Přitom $\dot{\gamma}(t)$ je definováno jako tečný vektor v $\gamma(t) \in M$ určený třídou ekvivalence $[\tilde{\gamma}]$, kde $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t + s)$, $s \in (a - t, b - t)$.

V lokálních souřadnicích máme integrální křivku popsánu jako řešení autonomní soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{d}{dt}\gamma^i(t) = X^i(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)), \quad \gamma^i(0) = x^i(p_0), \quad \forall i \in \hat{n}, \text{ kde } \gamma^i(t) = x^i(\gamma(t)). \quad (3.3)$$

Definice 3.13. Vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$ je **úplné** právě tehdy, když lze každou jeho integrální křivku rozšířit na integrální křivku zobrazující celé $\mathbb{R}$ do M .

Sloučením všech integrálních křivek vycházejících z jednotlivých bodů variety do jedné matematické struktury dostáváme

Definice 3.14. Tok vektorového pole $X \in \mathcal{X}(M)$ je zobrazení $\Psi_X : U \rightarrow M$, kde $U = U^\circ \subset M \times \mathbb{R}$ a $M \times \{0\} \subset U$, takové, že $(\forall p \in M)(\Psi_X(p, 0) = p)$ a $\Psi_X(p, t) = \gamma_X^p(t)$ je integrální křivka vektorového pole X vycházející z bodu $p \in M$.

Z teorie diferenciálních rovnic vyplývá, že existuje právě jedno hladké zobrazení Ψ_X na určitém maximálním souvislém okolí U . Dále budeme často psát $\Psi_X^t(p) \equiv \Psi_X(p, t)$, kde $\Psi_X^t : M \rightarrow M$.

V lokálních souřadnicích (x^i) , kde jsme označili $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, máme:

$$\begin{aligned} \Psi_X &\leftrightarrow (\Psi_X^i) : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad V_1 = V_1^\circ \subset \mathbb{R}^n, \quad V_2 = V_2^\circ \subset \mathbb{R}, \quad 0 \in V_2 : \\ \frac{\partial}{\partial t}\Psi_X^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, t) &= X^i(\Psi_X(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, t)), \quad \forall(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) \in V_1, \quad t \in V_2, \\ \Psi_X^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, 0) &= \tilde{x}^i, \quad \forall(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) \in V_1. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že konkrétní tvar integrálních křivek či toku daného vektorové pole samozřejmě závisí na použitých souřadnicích. Jak uvidíme ve cvičeních, složitost řešení soustavy (3.3) se může v závislosti na zvolených souřadnicích dosti podstatně lišit. Lze

ukázat, že pro vektorové pole nenulové na okolí bodu $p \in M$ vždy existují lokální souřadnice na nějakém, možná menším, okolí bodu $p \in M$, v nichž má dané vektorové pole tvar $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Bohužel nalezení těchto souřadnic je ekvivalentní nalezení toku vektorového pole X .

Z autonomie soustavy (3.3) a věty o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic vyplývá

Důsledek 3.15. $\Psi_X^s \circ \Psi_X^t(p) = \Psi_X^{s+t}(p)$, pokud má levá strana smysl, tj. $(\Psi_X^t(p), s) \in U$, $(p, t) \in U$.

Z tohoto důsledku též plyne, že pokud daná integrální křivka protne sama sebe, tak už se uzavírá, tj. integrální křivky jsou izomorfní buďto otevřenému intervalu (vč. celého $\mathbb{R}$) nebo kružnici.

3.1 Cvičení

Cvičení 3.1. V $\mathbb{R}^2[x, y]$ uvažujte vektorová pole $X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$. Najděte jejich integrální křivky a určete, zda jsou tato vektorová pole úplná.

Řešení. Pro X_1 máme rovnice pro integrální křivku $\gamma_1(t)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma_1^1(t) &\equiv \frac{d}{dt}x(\gamma_1(t)) = x(\gamma_1(t)) = \gamma_1^1(t), \\ \frac{d}{dt}\gamma_1^2(t) &\equiv \frac{d}{dt}y(\gamma_1(t)) = y(\gamma_1(t)) = \gamma_1^2(t), \\ \gamma_1^1(0) &= x_0, \quad \gamma_1^2(0) = y_0.\end{aligned}$$

Tyto rovnice jsou na sobě nezávislé a separovatelné, tudíž nacházíme řešení ve tvaru $\ln(\gamma_1^1(t)) = t + C_1$, $\ln(\gamma_1^2(t)) = t + C_2$. Dosazením počáteční podmínky pak máme

$$\gamma_1(t) = (x_0 \exp t, y_0 \exp t) \quad (\equiv \Psi_{X_1}(x_0, y_0, t)).$$

Analogicky, pro vektorové pole X_2 máme rovnice pro integrální křivku $\gamma_2(t)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma_2^1(t) &\equiv \frac{d}{dt}x(\gamma_2(t)) = -y(\gamma_2(t)) = -\gamma_2^2(t), \\ \frac{d}{dt}\gamma_2^2(t) &\equiv \frac{d}{dt}y(\gamma_2(t)) = x(\gamma_2(t)) = \gamma_2^1(t), \\ \gamma_2^1(0) &= x_0, \quad \gamma_2^2(0) = y_0.\end{aligned}$$

Tuto soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty řešíme dosazením řešení v předpokládaném tvaru $\gamma_2(t) = (a, b) \cdot \exp(\lambda t)$. Tím dostáváme soustavu homogenních lineárních rovnic:

$$\lambda \cdot a + b = 0, \quad -a + \lambda \cdot b = 0.$$

Matice soustavy $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ musí být singulární, aby existovalo nenulové řešení, tudíž máme $\lambda = \pm i$. Po nalezení odpovídajících konstant a, b pro každou z uvedených hodnot λ nacházíme superpozici těchto řešení obecné řešení naší soustavy diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\gamma_2(t) = (\gamma_2^1(t), \gamma_2^2(t)) = C_1 \cdot (1, -i) \cdot \exp(it) + C_2 \cdot (1, i) \cdot \exp(-it).$$

Dosazením počáteční podmínky a úpravou výsledku do explicitně reálného tvaru získáme integrální křivku ve tvaru

$$\gamma_2(t) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t) (\equiv \Psi_{X_2}(x_0, y_0, t)).$$

Evidentně obě integrální křivky γ_1, γ_2 jsou pro libovolnou počáteční podmínku definovány pro libovolnou hodnotu $t \in \mathbb{R}$, obě vektorová pole jsou tedy úplná. Jako množiny bodů jsou tyto křivky v prvním případě polopřímky daného směru vycházející z počátku souřadnic, ale jej neobsahující, resp. konstantní křivka $\gamma_1(t) = (0, 0)$, v druhém případě kružnice se středem v počátku, resp. opět konstantní křivka $\gamma_2(t) = (0, 0)$.

Cvičení 3.2. Vektorová pole z cvičení 3.1 převedte do polárních souřadnic $[r, \varphi]$, kde

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (3.4)$$

a najděte jejich integrální křivky v těchto souřadnicích.

Řešení. Dosazením transformace tečných vektorů při změně souřadnic dostáváme

$$\begin{aligned} X_1 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} = r \cos \varphi \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \\ &\quad + r \sin \varphi \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = r \frac{\partial}{\partial r}, \\ X_2 &= x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = r \cos \varphi \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \\ &\quad - r \sin \varphi \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Integrální křivky mají proto jednoduchý tvar, $\gamma_1(t) = (r_0 \exp t, \varphi_0)$, $\gamma_2(t) = (r_0, \varphi_0 + t)$.

Cvičení 3.3. Je vektorové pole $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ na $\mathbb{R}[x]$ úplné?

Výsledek. $\Psi_x^t(x) = \frac{x}{1-tx}$. Není definováno $\Psi_x^{\frac{1}{x}}(x)$, tudíž není úplné.

Cvičení 3.4. Najděte tok vektorového pole $X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial z} \in \Gamma(TM)$, kde $M = \mathbb{R}^3[x, y, z]$.

Výsledek. $\Psi_X^t(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z + (x^2 + y^2)t)$.

Cvičení 3.5. Na $S^2[U, V]$ uvažujte vektorové pole $X = (V^2 - U^2) \frac{\partial}{\partial U} - 2UV \frac{\partial}{\partial V}$ na U_N . Najděte jeho integrální křivky.

Řešení. Řešíme rovnice

$$\dot{U} = V^2 - U^2, \quad \dot{V} = -2UV. \quad (3.5)$$

Z druhé rovnice vyloučíme U a dosadíme do první rovnice, čímž získáme jednu diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{\ddot{V}}{2V} - \frac{3}{4} \frac{(\dot{V})^2}{V^2} + V^2 = 0.$$

Po přenásobení integračním faktorem $\frac{\dot{V}}{V^2}$ ji lze jednou zintegrovat na separovatelnou diferenciální rovnici 1. řádu

$$\frac{1}{4V^3} (\dot{V})^2 = C - V.$$

Následným výpočtem kvadratury a dosazením počáteční podmínky nacházíme řešení rovnice (3.5) ve tvaru

$$\gamma(t) = \left(\frac{U_0 + t(U_0^2 + V_0^2)}{1 + 2tU_0 + t^2(U_0^2 + V_0^2)}, \frac{V_0}{1 + 2tU_0 + t^2(U_0^2 + V_0^2)} \right).$$

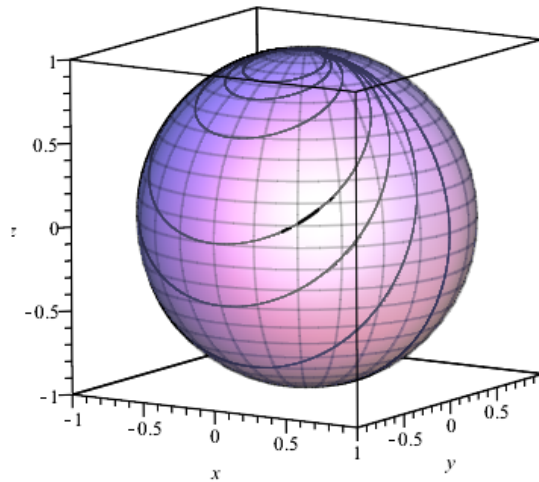
Cvičení 3.6. Převedte vektorové pole X z cvičení 3.5 do souřadnic $[u, v]$ na U_S , ukažte, že vektorové pole X lze definovat jako hladké vektorové pole na celé sféře S^2 , nalezněte jeho tok v souřadnicích $[u, v]$ a výsledek převedte do souřadnic $[U, V]$.

Návod. Využitím cvičení 2.4 máme $X = \frac{\partial}{\partial u}$, tj. X lze hladce definovat ve všech bodech pokrytých atlasem, což je celá varieta S^2 , $\Psi_X^t(u, v) = (u + t, v)$ a převedením počáteční podmínky ze souřadnic $[U, V]$ a výsledku do souřadnic $[U, V]$ nacházíme

$$\Psi_X^t(U, V) = \left(\frac{U + t(U^2 + V^2)}{1 + 2tU + t^2(U^2 + V^2)}, \frac{V}{1 + 2tU + t^2(U^2 + V^2)} \right).$$

Cvičení 3.7. Zjistěte, zda je vektorové pole z cvičení 3.5 po dodefinování jako ve cvičení 3.6 úplné.

Návod. V tomto případě je třeba dbát na to, ve kterém souřadnicovém okolí se pohybujeme. Zdánlivě vektorové pole $X = (V^2 - U^2)\frac{\partial}{\partial U} - 2UV\frac{\partial}{\partial V}$ úplné není, neboť pro $V_0 = 0$ lze pro konečnou hodnotu křivkového parametru t opustit souřadnicové okolí U_N . Nicméně po převedení do souřadnic $[u, v]$ vidíme, že v těchto souřadnicích problém zmizí, limitě $|U| \rightarrow \infty$ odpovídá bod $(u, v) = (0, 0)$, kterým integrální křivka vektorového pole $X = \frac{\partial}{\partial u}$ bez problému hladce prochází. Vektorové pole X je tudíž úplné. Viz obrázek integrálních křivek níže. Poznamenejme, že integrální křivky nejsou až na jednu výjimku uzavřené, limitně pro $t \rightarrow \pm\infty$ vycházejí z a vcházejí do severního pólu $N = (0, 0, 1)$. Ten ale leží na samostatné konstantní integrální křivce, neboť v něm je vektorové pole $X = (V^2 - U^2)\frac{\partial}{\partial U} - 2UV\frac{\partial}{\partial V}$ rovné nule.



Kapitola 4

Abstraktnější pohled na vektorová pole

Na vektorová pole definovaná v předchozí kapitole lze nahlížet ještě jiným způsobem, obdobně jako tečné vektory lze definovat jako tečné vektory ke křivkám nebo jako zobrazení z prostoru funkcí do číselného tělesa. Tento jiný úhel pohledu nám přirozeněji ukáže některé vlastnosti vektorových polí. K tomu nejprve potřebujeme definovat několik pojmů z oblasti abstraktní algebry.

Definice 4.1. Algebra $A = (V, m)$ je dvojice tvořená vektorovým prostorem V nad tělesem reálných čísel a bilineárním zobrazením m , násobením v algebře A ,

$$m : V \times V \rightarrow V. \quad (4.1)$$

Množinu V nazýváme **nosič algebry** A .

Pokud bude použité násobení m v algebře A zřejmé z kontextu, často nerozlišujeme mezi algebrou a jejím nosičem, $A \equiv V$.

V matematice se takto zavedená algebra někdy přesněji označuje jako **(lineární) algebra nad tělesem** $\mathbb{R}$, neboť je možné obecněji uvažovat algebry jako moduly nad okruhy vybavené binární operací násobení prvků z modulu. Pro naše účely jiné algebry nebudeme potřebovat, proto přívlastky lineární či nad tělesem $\mathbb{R}$ nebudeme užívat.

Definice 4.2. Algebra (V, m) je:

1. **asociativní** právě tehdy, když $m(u, m(v, w)) = m(m(u, v), w)$ pro všechna $u, v, w \in V$,
2. **komutativní** neboli **abelovská** právě tehdy, když $m(u, v) = m(v, u)$ pro všechna $u, v \in V$,
3. **Lieova** právě tehdy, když platí následující dvě podmínky pro všechna $u, v, w \in V$:
 - (a) $m(u, v) = -m(v, u)$, tj. **antisymetrie**,
 - (b) $m(u, m(v, w)) + m(v, m(w, u)) + m(w, m(u, v)) = 0$, tj. **Jacobiho identita**.

Vhodné značení pro násobení v algebře vybíráme podle vlastností operace – např. asociativní násobení značíme jako součin, $m(x, y) = x \cdot y$, násobení v Lieově algebře nazýváme **Lieova závorka** a značíme $m(x, y) = [x, y]$.

Příklad 4.3. Algebry lze zavést mj. následujícími způsoby:

- $(\mathcal{L}(V), \circ)$, kde $\mathcal{L}(V)$ je prostor lineárních operátorů na vektorovém prostoru V a $\circ$ je skládání lineárních operátorů, je asociativní algebra,
- $(\mathcal{L}(V), [\cdot, \cdot])$, kde $[A, B] = A \circ B - B \circ A$, je Lieova algebra,
- $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$, kde $\{\cdot, \cdot\}$ je Poissonova závorka, je Lieova algebra,
- $(C^\infty(M), \cdot)$, kde $(f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p)$ pro $f, g \in C^\infty(M)$, $p \in M$, je komutativní asociativní algebra.

Definice 4.4. Derivace algebry (V, m) je lineární zobrazení $D : V \rightarrow V$ vyhovující podmínce

$$D(m(x, y)) = m(D(x), y) + m(x, D(y)), \quad \forall x, y \in V. \quad (4.2)$$

Příklad 4.5. Necht' $(V, \cdot)$ je asociativní algebra. Ukážeme, že na $(V, \cdot)$ je operace

$$D_C : V \rightarrow V, \quad D_C(A) = [C, A] = C \cdot A - A \cdot C$$

derivací.

Důkaz. $D_C(A \cdot B) = C \cdot A \cdot B - A \cdot B \cdot C = C \cdot A \cdot B - A \cdot C \cdot B + A \cdot C \cdot B - A \cdot B \cdot C = (C \cdot A - A \cdot C) \cdot B + A \cdot (C \cdot B - B \cdot C) = (D_C(A)) \cdot B + A \cdot (D_C(B))$. ■

Příklad 4.6. $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$, $f \in C^\infty(M)$, $D_f(g) = \{f, g\}$.

Věta 4.7. Uvažujme hladkou varietu M a $C^\infty(M)$ jako asociativní komutativní algebru s násobením daným předpisem $(f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p)$. Označme $\mathcal{X}(M)$ vektorový prostor všech derivací algebry $C^\infty(M)$, tj. všech zobrazení $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ s vlastnostmi $X(af + g) = aXf + Xg$, $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$. Pak lze vzájemně jednoznačně zobrazit $\mathcal{X}(M)$ na množinu všech vektorových polí $\Gamma(TM)$ předpisem $X(p)(f) \equiv (Xf)(p)$, kde $X \in \mathcal{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, $p \in M$. Jinak řečeno,

$$\mathcal{X}(M) \simeq \Gamma(TM). \quad (4.3)$$

Důkaz. Necht' $X \in \Gamma(TM)$, tj. máme hladké zobrazení $X : M \rightarrow TM$, $X(p) \in T_p M$. Definujme $\tilde{X} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ předpisem $(\tilde{X}f)(p) = X(p)f$. Z hladkosti X vyplývá, že $\tilde{X}f$ je v každých lokálních souřadnicích hladké zobrazení, tj. je hladké i na celé varietě M . Z vlastností tečných vektorů pak vyplývá linearita a podmínka na derivaci (4.2) v libovolném bodě $p \in M$,

$$\tilde{X}(fg)(p) = (\tilde{X}f)(p)g(p) + f(p)(\tilde{X}g)(p).$$

Naopak, buď $\tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$. Definujme

$$X(p) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad X(p)f = (\tilde{X}f)(p).$$

Evidentně platí $X(p)(af + g) = aX(p)f + X(p)g$, $X(p)(f \cdot g) = X(p)f \cdot g(p) + f(p) \cdot X(p)g$. Dále ověříme podmínku lokality, tj.

$$\forall f, g \in C^\infty(M) : (\exists U = U^\circ \ni p, f|_U = g|_U \Rightarrow X(p)f = X(p)g).$$

Ekvivalentně ji můžeme přepsat ve tvaru:

$$\forall f \in C^\infty(M) : (\exists U = U^\circ \ni p, f|_U = 0 \Rightarrow X(p)f = 0).$$

Uvažujeme tedy funkci f , která je nulová na okolí U bodu p . V lokálních souřadnicích lze do U vnořit otevřenou křivku se středem v bodě p . Dále zkonstruujeme pomocnou funkci $g \in C^\infty(M)$ takovou, že $(\forall q \notin U)(g(q) = 0)$ a $g(p) = 1$, sestavenou vhodným přeskálováním intervalu a kartézským součinem funkcí tvaru $g_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g_0(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^2}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Lze snadno ověřit, že $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\lim_{x \rightarrow 1^-} g_0^{(n)}(x) = 0)$. Tudíž máme funkci gf nulovou na celé varietě M , pro níž musí platit $\tilde{X}(fg) = 0$ a tedy

$$0 = \left(\tilde{X}(fg) \right) (p) = \left(\tilde{X}(f)g + f\tilde{X}(g) \right) (p) = g(p) \cdot X(p)f + f(p) \cdot X(p)g,$$

kde $f(p) = 0$ a $g(p) = 1$. Celkem zjišťujeme, že $X(p)f = 0$, tj. $X(p)$ vyhovuje i lokalitě. Už tedy víme, že $X(p) \in T_p M$. Zbývá dokázat hladkost vzniklého vektorového pole, tj. $X \in \Gamma(TM)$. Ta vyplývá z toho, že $\tilde{X} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, a tudíž složky vektorového pole v souřadnicovém vyjádření, které se dají určit způsobem $X^i(p) = \tilde{X}(x^i)(p)$, jsou hladké funkce.

(Je vhodné si uvědomit, že díky již dokázané lokalitě $X(p)$, tj. nezávislosti $(\tilde{X}f)(p)$ na chování f mimo okolí bodu p , lze k $\tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ definovat jeho zúžení $\tilde{X}|_U \in \mathcal{X}(U)$ tak, že $(\forall q \in U) (\forall f \in C^\infty(M)) ((\tilde{X}|_U f)(q) = (\tilde{X}f)(q))$. Poté můžeme $\tilde{X}|_U$ aplikovat na souřadnicové funkce $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ a definovat v lokálních souřadnicích $X = \tilde{X}|_U(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$, kde $\tilde{X}|_U(x^i) \in C^\infty(U)$.) ■

Poznámka 4.8. Nadále budeme ztotožňovat $\mathcal{X}(M)$ a $\Gamma(TM)$ a využívat definici vektorového pole vhodnější pro právě řešenou úlohu.

Věta 4.9. Množina všech derivací $\text{Der}(A)$ dané algebry A tvoří Lieovu algebru.

Důkaz. To, že $\text{Der}(A)$ je vektorový prostor, je zřejmé. Lieova závorka na $\text{Der}(A)$ se definuje $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$. Ověření:

$$\begin{aligned} [D_1, D_2] m(u, v) &= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)m(u, v) \\ &= D_1(m(D_2u, v) + m(u, D_2v)) - D_2(m(D_1u, v) + m(u, D_1v)) \\ &= m(D_1D_2u, v) + m(D_2u, D_1v) + m(D_1u, D_2v) + m(u, D_1D_2v) \\ &\quad - m(D_2D_1u, v) - m(D_1u, D_2v) - m(D_2u, D_1v) - m(u, D_2D_1v) \\ &= m(D_1D_2u, v) + m(u, D_1D_2v) - m(D_2D_1u, v) - m(u, D_2D_1v) \\ &= m([D_1, D_2]u, v) + m(u, [D_1, D_2]v). \end{aligned}$$

Antisymetrie $[\cdot, \cdot]$ a Jacobiho identita vyplývají ze způsobu definice $[\cdot, \cdot]$. ■

Důsledek 4.10. $(\mathcal{X}(M), [\cdot, \cdot])$ je nekonečněrozměrná Lieova algebra vektorových polí na varietě M s Lieovou závorkou definovanou způsobem $(\forall X, Y \in \mathcal{X}(M))([X, Y] = X \circ Y - Y \circ X)$.

Často uvažujeme i vektorová pole definovaná na podmnožině $U \subset M$ jako $X : U \rightarrow TM$, $\pi \circ X = \text{id}|_U$. Pokud $U = U^\circ$, pak všechny vlastnosti $\mathcal{X}(M)$ platí i pro $\mathcal{X}(U)$. Jinak některé pojmy, např. $[\cdot, \cdot]$, mohou ztratit význam.

Souřadnicové vyjádření komutátoru vektorových polí vyjádříme následovně. Necht' (x^i) jsou souřadnice na $U = U^\circ$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(U)$, $f \in C^\infty(U)$. Pak

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} f \right) - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j} f \right) \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} f \end{aligned}$$

a tedy

$$[X, Y] = (X(Y^j) - Y(X^j)) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (4.4)$$

4.1 Cvičení

Cvičení 4.1. Určete komutátory vektorových polí

$$X_1 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.5)$$

na $\mathbb{R}^3[x, y, z]$. Ukažte, že $\mathbb{R}\text{-span}\{X_1, X_2, X_3\}$ tvoří podalgebru v $\mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$.

Výsledek. $[X_1, X_2] = -X_3$, $[X_2, X_3] = -X_1$, $[X_3, X_1] = -X_2$.

Cvičení 4.2. V $\mathbb{R}[x]$ uvažujte vektorová pole $X_k = x^k \frac{\partial}{\partial x}$, $k = 0, 1, \dots$. Ukažte, že $\mathbb{R}\text{-span}\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ tvoří Lieovu algebru a že jediné její konečněrozměrné podalgebry dimenze větší než 1 generované prvky X_k jsou $\mathbb{R}\text{-span}\{X_1, X_k\}$, kde $k = 0$ nebo $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ a $\mathbb{R}\text{-span}\{X_0, X_1, X_2\}$.

Návod. Využijte

$$\begin{aligned} [X_k, X_l] &= X_k(x^l) \frac{\partial}{\partial x} - X_l(x^k) \frac{\partial}{\partial x} = lx^{k+l-1} \frac{\partial}{\partial x} - kx^{k+l-1} \frac{\partial}{\partial x} = \\ &= (l - k)x^{k+l-1} \frac{\partial}{\partial x} = (l - k)X_{k+l-1}. \end{aligned}$$

Cvičení 4.3. Ukažte, že obecné rychlosti v Lagrangeově mechanice se při změně obecných souřadnic transformují jako tečné vektory ke konfigurační varietě, zatímco obecné hybnosti $p_j = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^j}$ se transformují jinak a určete jak.

Návod. Obecné rychlosti získáváme derivací trajektorie v daném bodě, tj. jsou tečnými vektory definovanými pomocí trajektorie - křivky. Při změně souřadnic $\tilde{q}^j = \tilde{q}^j(q^k)$ transformují

$$\dot{\tilde{q}}^j = \frac{d}{dt} \tilde{q}^j(t) = \frac{d}{dt} \tilde{q}^j(q(t)) = \left. \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^k} \right|_{q(t)} \frac{d}{dt} q^k(t) = \left. \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^k} \right|_{q(t)} \dot{q}^k. \quad (4.6)$$

Obecné hybnosti se při změně souřadnic $\tilde{q}^j = \tilde{q}^j(q^k)$ transformují podle předpisu

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i &= \frac{\partial \tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} = \frac{\partial L(q(\tilde{q}), \dot{q}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}))}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} = \left. \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^j} \right|_{q=q(\tilde{q}), \dot{q}=\dot{q}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})} \frac{\partial \dot{q}^j(q, \dot{q})}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} = \\ &= p_j \frac{\partial \dot{q}^j(q, \dot{q})}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} = p_j \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i}, \end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti jsme využili transformaci (4.6) po záměně q a $\tilde{q}$. Pro zjednodušení zápisu jsme potlačili indexy v argumentech vyznačujících funkční závislosti.

Cvičení 4.4. Na varietě $M = \mathbb{R}^2[p, q]$ uvažujte tzv. Hamiltonovská vektorová pole

$$X_H = -\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q},$$

kde $H = H(p, q) \in C^\infty(M)$. Hledejte integrální křivky vektorového pole X_H pro následující volby funkce H :

1. $H = \frac{1}{2}p^2$,
2. $H = \frac{1}{2}p^2 + \kappa q$,
3. $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$,

a porovnejte je s řešením Hamiltonových pohybových rovnic pro volnou částici, konstantní silové pole a harmonický oscilátor v jednom prostorovém rozměru.

Cvičení 4.5. Ukažte, že S^3 lze chápat jako fibrovaný prostor nad $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ s vláknem S^1 .

Návod. Jedná se o tzv. **Hopfovou fibraci**. Sféru S^3 uvažujeme jako jednotkovou sféru v $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$,

$$S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}.$$

Projekci $\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ definujeme předpisem $\pi(z_0, z_1) = \mathbb{C}\text{-span}\{(z_0, z_1)\}$. Vláknem nad bodem $V = \mathbb{C}\text{-span}\{(z_0, z_1)\}$ je pak tvořeno všemi vektory z S^3 , které svým lineárním obalem definují stejný jednorozměrný podprostor V , tj. jsou rovny $\alpha \cdot (z_0, z_1)$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Vláknem nad bodem je tudíž izomorfní množině komplexních jednotek

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1\} \simeq S^1.$$

Pro dokončení popisu struktury fibrovaného prostoru $S^3 \rightarrow S^2$ zbývá zkonstruovat lokální trivializace. K tomu stačí uvážit atlas na $\mathbb{CP}^1$ z cvičení 1.4. Máme souřadnicová okolí a mapy

$$\begin{aligned} U_0 &= \{\mathbb{C}\text{-span}\{(1, z)\} \mid z \in \mathbb{C}\}, & \varphi_0(\mathbb{C}\text{-span}\{(1, z)\}) &= z, \\ U_1 &= \{\mathbb{C}\text{-span}\{(z, 1)\} \mid z \in \mathbb{C}\}, & \varphi_1(\mathbb{C}\text{-span}\{(z, 1)\}) &= z. \end{aligned}$$

Lokální trivializace definujeme předpisem

$$\begin{aligned} \psi_0(\alpha \cdot (1, z)) &= \left(\mathbb{C}\text{-span}\{(1, z)\}, \frac{\alpha}{|\alpha|} \right), & \forall \alpha \cdot (1, z) \in S^3, \\ \psi_1(\alpha \cdot (z, 1)) &= \left(\mathbb{C}\text{-span}\{(z, 1)\}, \frac{\alpha}{|\alpha|} \right), & \forall \alpha \cdot (z, 1) \in S^3. \end{aligned}$$

Pro přechodovou funkci na vlákně pak nacházíme ($\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$)

$$\begin{aligned} \psi_1(\psi_0^{-1}(\mathbb{C}\text{-span}\{(1, z)\}, \alpha)) &= \psi_1\left(\alpha \cdot \frac{(1, z)}{\sqrt{1 + |z|^2}}\right) = \psi_1\left(\alpha \frac{z}{|z|} \cdot \frac{(1/z, 1)}{\sqrt{1 + |1/z|^2}}\right) = \\ &= \left(\mathbb{C}\text{-span}\{(1/z, 1)\}, \alpha \frac{z}{|z|}\right) = (\mathbb{C}\text{-span}\{(1/z, 1)\}, \tau_{01}(\mathbb{C}\text{-span}\{(1, z)\})\alpha), \end{aligned}$$

tudíž přechodová funkce na vlákně má tvar $\tau_{01}(\mathbb{C}\text{-span}\{(1, z)\})\alpha = \frac{z}{|z|} \cdot \alpha$.

Kapitola 5

Diferenciální formy

V každém bodě variety můžeme uvažovat i další vektorové prostory, které jsou odvozené z tečného prostoru nějakou operací, např. dualizací nebo tenzorovým součinem. Z nich pak můžeme analogicky jako v případě tečného fibrovaného prostoru dále budovat nové vektorové fibrované prostory, sloužící pro popis různých užitečných geometrických objektů na varietách.

Definice 5.1. Kotečný prostor T_p^*M k varietě M v bodě p je vektorový prostor duální k tečnému prostoru T_pM . Prvky T_p^*M obvykle značíme řeckými písmeny a nazýváme **1-formy v bodě p** , tedy

$$\omega : T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega(aX + Y) = a\omega(X) + \omega(Y), \quad \forall X, Y \in T_pM, \forall a \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Mějme lokální souřadnice (x^i) na $U = U^\circ \subset M$, $p \in U$. Pak báze T_pM má tvar $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)_{i=1}^n$. Bázi T_p^*M k ní duální, tj. funkcionály $\varphi^i \in T_p^*M : \varphi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \delta_j^i$, značíme $\left(dx^i\Big|_p\right)_{i=1}^n$ (důvod pro toto značení bude zřejmý později, viz kapitola 6). Jinak psáno tedy $dx^i\Big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \delta_j^i$. Souřadnice 1-formy $\omega \in T_p^*M$ v bázi $(dx^i\Big|_p)$ značíme ω_i , tj.

$$\omega = \omega_i dx^i\Big|_p, \quad \text{kde} \quad \omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right). \quad (5.2)$$

Při změně souřadnic $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$, $\omega = \omega_i dx^i\Big|_p = \tilde{\omega}_i d\tilde{x}^i\Big|_p$ máme

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_p = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_p \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p$$

a tedy

$$\tilde{\omega}_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_p\right) = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_p \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_p \omega_j. \quad (5.3)$$

V důsledku pro transformaci bazických funkcionálů platí vztahy

$$d\tilde{x}^k\Big|_p = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j}\Big|_p dx^j\Big|_p. \quad (5.4)$$

Definice 5.2. Podobně jako jsme zavedli tečný fibrovaný prostor, zavádíme i strukturu známou jako **kotečný fibrovaný prostor** neboli **kotečný bundle** (angl. cotangent bundle) T^*M , který obsahuje

1. totální prostor $T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$,
2. projekci $\pi : T^*M \rightarrow M$ splňující $\pi(\omega) = p, \forall \omega \in T_p^*M$,
3. typické vlákno $F \simeq \mathbb{R}^n$,
4. lokální trivializace – buďte $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} : \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$, $U_\alpha = U_\alpha^\circ$ souřadnicová okolí se souřadnicemi (x_α^i) , pak definujeme systém lokálních trivializací (V_α, ψ_α) , $V_\alpha = \pi^{(-1)}(U_\alpha)$, $\psi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha \times F$, kde $(\omega = \omega_i^\alpha dx_\alpha^i|_p)$:

$$\psi_\alpha(\omega) = (p, (\omega_i^\alpha)_{i=1}^n)$$

(kde α indexuje trivializace, tj. není sčítacím indexem).

Topologii na T^*M zavádíme jako topologii indukovanou vzory otevřených množin při ψ_α , $\alpha \in I$.

Buď $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Pak z předchozí definice vyplývá, že přechodové funkce na vlákne tvaru

$$\tau_{\alpha\beta}(p)((\omega_i^\alpha)_{i=1}^n) = \left(\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^i} \omega_k^\alpha \right)_{i=1}^n,$$

kde $\omega = \omega_i^\alpha dx_\alpha^i|_p = \omega_j^\beta dx_\beta^j|_p$, $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, (\omega_i^\alpha)_{i=1}^n) = (p, (\omega_k^\alpha \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^j}(p))_{j=1}^n)$, jsou *inverzemi* přechodových funkcí na vlákne tečného bundlu a tečný a kotečný bundle jsou tedy geometricky odlišné struktury. Připomeňme, že přechodové funkce na vlákne $\tau_{\alpha\beta}(p)$ jsou lineární operátory na typickém vlákne $F = \mathbb{R}^n$ a hladce závisejí na volbě bodu $p \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Z výsledků cvičení 4.3 vidíme, že zatímco pro popis stavů v Lagrangeově mechanice na konfigurační varietě M je vhodným matematickým objektem tečný fibrovaný prostor TM , pro popis stavů v Hamiltonově formulaci využíváme kotečný fibrovaný prostor T^*M . Pokud je systém explicitně závislý na čase, tak v obou případech musíme do popisu zahrnout i časovou souřadnici, tj. pracujeme na $TM[q^i, \dot{q}_j] \times \mathbb{R}[t]$, resp. $T^*M[q^i, p_j] \times \mathbb{R}[t]$.

Definice 5.3. Diferenciální 1-forma ω na M je řez kotečného fibrovaného prostoru, $\omega \in \Gamma(T^*M)$. Většinou značíme $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$.

V lokálních souřadnicích (x^i) na souřadnicovém okolí U bodu p máme vyjádření formy $\omega \in \Gamma(T^*M)$ ve tvaru $\omega(p) = \omega_i(p) dx^i|_p$, kde $\omega_i \in C^\infty(U)$.

Definice 5.4. Buď $1 < k \leq n = \dim M$ a bod $p \in M$. Pak **k -forma v bodě p** je k -lineární totálně antisymetrické zobrazení

$$\omega : \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{k\text{-krát}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Tedy pro libovolnou k -tici tečných vektorů $X_1, \dots, X_k \in T_p M$ a libovolnou permutaci indexů $\pi \in S_k = \text{Bij}(\{1, \dots, k\})$ platí:

$$\omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) = \text{sgn } \pi \cdot \omega(X_1, \dots, X_k).$$

Vektorový prostor všech k -forem v bodě p značíme $\Lambda^k(T_p^*M)$ nebo $\Lambda_p^k M$, $\dim \Lambda_p^k M = \binom{n}{k}$.

Bud' $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)_{i=1}^n$ báze $T_p M$, $(dx^i|_p)_{i=1}^n$ báze $T_p^* M$, $i_1, \dots, i_k \in \hat{n}$. Bazické vektory prostoru $\Lambda_p^k M$ značíme $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p$, kde $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Definujeme je způsobem:

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\Big|_p \right) = \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn } \pi \delta_{j_1}^{i_{\pi(1)}} \dots \delta_{j_k}^{i_{\pi(k)}}, \quad j_1, \dots, j_k = 1, \dots, n. \quad (5.6)$$

Symbol $\wedge$ se nazývá **skobka** (angl. wedge).

Pro další použití můžeme rovnici (5.6) definovat k -formy $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p$ i pro libovolné seřazení indexů, ty ale pak již netvoří bázi z důvodu jejich zřejmé lineární závislosti.

Příklad 5.5. $\mathbb{R}^3[x^1, x^2, x^3] : dx^1 \wedge dx^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) = -1, dx^1 \wedge dx^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) = 0$

Pro snadnější práci s k -formami zavádíme tzv. **multiindexy**, kde $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ a $|J| = k$ označuje délku multiindexu. Máme

- $J = (j_1, \dots, j_k)$ obecný multiindex délky k ,
- $\vec{J} = (j_1, \dots, j_k)$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ vzestupně uspořádaný multiindex,
- $\delta_J^I = \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn } \pi \delta_{j_1}^{i_{\pi(1)}} \dots \delta_{j_k}^{i_{\pi(k)}}$, tj. δ_J^I je různé od nuly pouze, pokud J je permutací I , pak znaménko permutace určuje, zda je δ_J^I rovna $+1$ nebo -1 ,
- $dx^{\vec{J}} = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$,
- $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) = \delta_J^I$.

Souřadnicové vyjádření $\omega \in \Lambda_p^k M$ pak můžeme psát

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1}|_p \wedge \dots \wedge dx^{j_k}|_p = \omega_{\vec{J}} dx^{\vec{J}}|_p, \quad (5.7)$$

kde $\omega_{\vec{J}} = \omega_{j_1 \dots j_k} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\Big|_p\right)$. Tudíž $(dx^{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p)_{i_1 < \dots < i_k}$ neboli $dx^{\vec{I}}|_p$ tvoří bázi vektorového prostoru $\Lambda_p^k M$ (jehož dimenze je rovna $\binom{n}{k}$).

Podobně jako v případě tečného a kotečného prostoru konstruujeme disjunktním sjednocením $\Lambda_p^k M$ vektorový fibrováný prostor značený $\Lambda^k(T^*M)$ nebo $\Lambda^k M$,

$$\Lambda^k(T^*M) = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M). \quad (5.8)$$

Jeho bazickou varietou je M , projekcí $\pi : \Lambda^k M \rightarrow M$, kde $\pi(\omega) = p$ pro $\omega \in \Lambda_p^k M$, a typickým vláknem $F = \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.

Lokální trivializace na prostoru $\Lambda^k M$ zavádíme pomocí atlasu $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ na varietě M způsobem $\psi_\alpha : \pi^{(-1)}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$, kde $p \in U_\alpha$, $\omega \in \Lambda_p^k M$, $\omega = \omega_{\vec{J}} dx_{\alpha}^{\vec{J}}|_p$, $(\omega_{j_1, \dots, j_k})_{j_1 < j_2 < \dots < j_k}$ je $\binom{n}{k}$ -tice čísel:

$$\psi_\alpha(\omega_{\vec{J}} dx^{\vec{J}}|_p) = (p, (\omega_{j_1, \dots, j_k})_{j_1 < j_2 < \dots < j_k}).$$

Definice 5.6. Řez $\omega \in \Gamma(\Lambda^k M)$ nazýváme **diferenciální k -forma** na varietě M . Značíme $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k M)$.

Poznamenejme, že je možné též používat vyjádření diferenciální k -formy jako antisymetrického multilineárního zobrazení z kartézského součinu prostorů vektorových polí do hladkých funkcí na varietě,

$$\begin{aligned}\Omega^k(M) &= \{ \omega : \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M) \mid (\forall X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)) (\forall \pi \in S_k) \\ &\quad \Rightarrow (\omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn} \pi \omega(X_1, \dots, X_k)) \text{ a současně} \\ &\quad (\forall p \in M) (\forall X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k \in \mathcal{X}(M)) (\forall j \in \{0, 1, \dots, k\} : X_j(p) = Y_j(p)) \\ &\quad \Rightarrow (\omega(X_1, \dots, X_k)(p) = \omega(Y_1, \dots, Y_k)(p)) \}.\end{aligned}$$

Označme $\Lambda_p^0 M \equiv \mathbb{R}$.

Direktním součtem všech nenulových $\Lambda_p^k M$ (tj. $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, kde $n = \dim M$) dostáváme 2^n -rozměrný vektorový prostor $\Lambda_p^\bullet M$, tedy:

$$\Lambda_p^\bullet M = \Lambda_p^0 M \oplus \Lambda_p^1 M \oplus \dots \oplus \Lambda_p^n M.$$

K němu příslušný vektorový fibrovaný prostor (tj. vybudovaný podobně jako výše) značíme $\Lambda^\bullet(T^*M)$ nebo $\Lambda^\bullet M$. Prostor jeho řezů značíme $\Omega^\bullet(M) = \Gamma(\Lambda^\bullet M)$.

Definice 5.7. Prvky $\Omega^\bullet(M)$ nazýváme **diferenciální formy** na varietě M .

Každá diferenciální forma $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ se dá jednoznačně rozložit na $\omega(p) = \sum_{k=0}^n \omega^{(k)}$, kde $\omega^{(k)} \in \Omega^k(M)$, tj. lokálně:

$$\omega(p) = \sum_{k=0}^n \omega^{(k)}, \quad \text{kde} \quad \omega^{(k)}(p) = \sum_{|J|=k} \omega_{\vec{J}}(p) dx^{\vec{J}}.$$

5.1 Cvičení

Cvičení 5.1. V $\mathbb{R}^3$ uvažujte kartézské souřadnice (x, y, z) a sférické souřadnice (r, θ, φ) (viz (2.8)). Následující diferenciální formy převedte z jedné souřadnic do druhé

$$dx, dy, dz, xdx + ydy + zdz, ydx - xdy, dx \wedge dy \wedge dz, dr, d\theta, d\varphi, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi.$$

Výsledek.

$$\begin{aligned}dx &= \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi, \\ dy &= \sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi, \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \\ x dx + y dy + z dz &= r dr, \\ y dx - x dy &= -r^2 \sin^2 \theta d\varphi, \\ dx \wedge dy \wedge dz &= r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi, \\ dr &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x dx + y dy + z dz), \\ d\theta &= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \left(\frac{xz dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{yz dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} dz \right), \\ d\varphi &= \frac{1}{x^2 + y^2} (-y dx + x dy), \\ dr \wedge d\theta \wedge d\varphi &= \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)}} dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Cvičení 5.2. Na sféře S^2 uvažujte stereografické souřadnice (u, v) , (U, V) a sférické souřadnice (θ, φ) :

$$(u, v) = \left(\frac{\sin \theta \cos \varphi}{1 - \cos \theta}, \frac{-\sin \theta \sin \varphi}{1 - \cos \theta} \right).$$

Převedte 1-formy dU , dV do souřadnic (u, v) a 2-formu $\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$ do souřadnic (u, v) , (U, V) .

Výsledek.

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} ((v^2 - u^2)du - 2uv dv), \quad dV = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} (2uv du + (v^2 - u^2)dv), \\ \omega &= \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2} du \wedge dv = \frac{4}{(1 + U^2 + V^2)^2} dU \wedge dV. \end{aligned}$$

Cvičení 5.3. Na varietě M dimenze n uvažujte dva souřadné systémy $(x^1, \dots, x^n)$ a $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$. Ukažte, že pro

$$\omega = \omega_{12\dots n} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \tilde{\omega}_{12\dots n} d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n \in \Omega^n(M)$$

platí

$$\tilde{\omega}_{12\dots n} = \omega_{12\dots n} \det \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)}.$$

Návod. Ze vztahu (5.6) zapište vzorec pro transformaci formy maximálního stupně pomocí determinantu odpovídající Jacobiho matice $\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)}$. Máme $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^j}$ a tedy platí

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n &\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n} \right) = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \tilde{x}^1} \dots \frac{\partial x^{j_n}}{\partial \tilde{x}^n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_n}} \right) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \frac{\partial x^{\pi(1)}}{\partial \tilde{x}^1} \dots \frac{\partial x^{\pi(n)}}{\partial \tilde{x}^n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left(\frac{\partial}{\partial x^{\pi(1)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\pi(n)}} \right) = \sum_{\pi \in S_n} \frac{\partial x^{\pi(1)}}{\partial \tilde{x}^1} \dots \frac{\partial x^{\pi(n)}}{\partial \tilde{x}^n} \text{sgn} \pi = \\ &= \det \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)}, \end{aligned}$$

což implikuje dle rovnice (5.7)

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \det \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)} d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n.$$

Kapitola 6

Operace s diferenciálními formami

Na prostorech k -forem v konkrétním bodě $p \in M$ a na řezech fibrovaných prostorů diferenciálních forem lze zavést několik užitečných operací, které z určitého úhlu ohledu je možné chápat jako zobecnění tzv. vektorové analýzy známé z fyziky pro $M = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, viz cvičení 6.1. Nyní se jimi budeme zabývat abstraktně, příklady jejich využití budou podrobněji nastíněny zejména v kapitole 9.

Definice 6.1. Na vektorovém prostoru $\Lambda_p^\bullet M$ zavádíme binární operaci zvanou **vnější součin** následujícím způsobem ($\tau \in \Lambda_p^k M$, $\omega \in \Lambda_p^l M$, $X_1, \dots, X_{k+l} \in T_p M$):

$$\tau \wedge \omega (X_1, \dots, X_{k+l}) = \sum_{\substack{\vec{I}, \vec{J} \\ |I|=k, |J|=l}} \delta_{(1, \dots, k+l)}^{\vec{I}, \vec{J}} \tau (X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \omega (X_{j_1}, \dots, X_{j_l}). \quad (6.1)$$

Pro obecné prvky $\tau, \omega \in \Lambda_p^\bullet M$ vnější součin definujeme distributivně:

$$\tau = \tau^{(0)} + \tau^{(1)} + \dots + \tau^{(n)}, \quad \omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \dots + \omega^{(n)} \Rightarrow \tau \wedge \omega = \sum_{a,b=0}^n \tau^{(a)} \wedge \omega^{(b)}.$$

Z této definice je zřejmé, že $\tau \wedge \omega \in \Lambda_p^{k+l} M$ (multilinearita je vidět po roznásobení pravé strany, antisymetrie využitím $\text{sgn } \pi_1 \circ \pi_2 = \text{sgn } \pi_1 \cdot \text{sgn } \pi_2$).

Příklad 6.2. Necht' $\tau = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ a $\omega = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$. Pak

$$\tau \wedge \omega = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}.$$

Věta 6.3. Vnější součin splňuje následující vlastnosti:

1. bilinearita, tj.

$$(a\tau_1 + \tau_2) \wedge \omega = a\tau_1 \wedge \omega + \tau_2 \wedge \omega, \quad \tau \wedge (a\omega_1 + \omega_2) = a\tau \wedge \omega_1 + \tau \wedge \omega_2, \quad \text{kde } \omega, \dots, \tau, \dots \in \Lambda_p^\bullet M, \quad a \in \mathbb{R},$$

2. $\tau \wedge \omega = (-1)^{k \cdot l} \omega \wedge \tau$, kde $\omega \in \Lambda_p^k M$, $\tau \in \Lambda_p^l M$,

3. asociativita, tj. $(\sigma \wedge \tau) \wedge \omega = \sigma \wedge (\tau \wedge \omega) \equiv \sigma \wedge \tau \wedge \omega$, kde $\sigma, \tau, \omega \in \Lambda_p^\bullet M$.

Důkaz. Bilinearita je zřejmá. Druhá z vlastností se ukáže následovně. Nechť $\omega \in \Lambda_p^k M$, $\tau \in \Lambda_p^l M$. Pak:

$$\begin{aligned}\tau \wedge \omega (X_1, \dots, X_{k+l}) &= \omega \wedge \tau (X_{l+1}, \dots, X_{k+l}, X_1, \dots, X_l) \\ &= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1, & \dots, & k, & k+1, \dots, & k+l \\ l+1, \dots, & k+l, & 1, & \dots, & l \end{pmatrix} \omega \wedge \tau (X_1, \dots, X_{k+l}) \\ &= (-1)^{k \cdot l} \omega \wedge \tau (X_1, \dots, X_{k+l}).\end{aligned}$$

A konečně, důkaz asociativity vyplývá z následujícího řetězce úprav. Nechť $\omega \in \Lambda_p^k M$, $\tau \in \Lambda_p^l M$, $\sigma \in \Lambda_p^m M$. Pak $(X_{\vec{I}} \equiv (X_{i_1}, \dots, X_{i_k}))$:

$$\begin{aligned}\omega \wedge (\tau \wedge \sigma)(X_1, \dots, X_{k+l+m}) &= \sum_{\substack{\vec{I}, \vec{M} \\ |I|=k, |M|=l+m}} \delta_{(1, \dots, k+l+m)}^{\vec{I} \vec{M}} \omega (X_{\vec{I}}) (\tau \wedge \sigma) (X_{\vec{M}}) \\ &= \sum_{\substack{\vec{I}, \vec{M} \\ |I|=k, |M|=l+m}} \sum_{\substack{\vec{J}, \vec{K} \\ |J|=l, |K|=m}} \delta_{(1, \dots, k+l+m)}^{\vec{I} \vec{M}} \delta_{\vec{M}}^{\vec{J} \vec{K}} \omega (X_{\vec{I}}) \tau (X_{\vec{J}}) \sigma (X_{\vec{K}}) \\ &= \sum_{\substack{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K} \\ |I|=k, |J|=l, |K|=m}} \delta_{(1, \dots, k+l+m)}^{\vec{I} \vec{J} \vec{K}} \omega (X_{\vec{I}}) \tau (X_{\vec{J}}) \sigma (X_{\vec{K}}).\end{aligned}$$

V poslední rovnosti jsme využili skutečnost, že $\delta_O^{\vec{I} \vec{M}} \delta_{\vec{M}}^{\vec{J} \vec{K}} = \delta_O^{\vec{I} \vec{J} \vec{K}} = \delta_O^{\vec{N} \vec{K}} \delta_{\vec{N}}^{\vec{I} \vec{J}}$. Pro formu $(\omega \wedge \tau) \wedge \sigma$ bychom dostali tentýž výsledek pro $((\omega \wedge \tau) \wedge \sigma) (X_1, \dots, X_{k+l+m})$. ■

V lokálních souřadnicích (x^i) máme $\tau = \tau_{\vec{I}} dx^{\vec{I}} \in \Lambda_p^k M$, $|I| = k$, $\omega = \omega_{\vec{J}} dx^{\vec{J}} \in \Lambda_p^l M$, $|J| = l$, a tedy:

$$\begin{aligned}\tau \wedge \omega &= \tau_{\vec{I}} \cdot \omega_{\vec{J}} dx^{\vec{I}} \wedge dx^{\vec{J}} = (\tau \wedge \omega)_{\vec{A}} dx^{\vec{A}}, \\ \text{kde } (\tau \wedge \omega)_{\vec{A}} &= (\tau \wedge \omega) \left(\frac{\partial}{\partial x^{a_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{a_{k+l}}} \right) = \delta_{\vec{A}}^{\vec{I} \vec{J}} \tau_{\vec{I}} \omega_{\vec{J}}, \\ dx^{\vec{I}} \wedge dx^{\vec{J}} &= \delta_{\vec{A}}^{\vec{I} \vec{J}} dx^{\vec{A}}, \quad |A| = k + l.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Takto zkonstruovanou 2^n -rozměrnou asociativní nekomutativní algebru $\Lambda_p^\bullet M$ s operací vnější součin nazýváme **vnější algebra** v bodě $p \in M$. Vnější součin zavádíme i na $\Omega^\bullet(M)$ způsobem:

$$(\tau \wedge \omega)(p) = \tau(p) \wedge \omega(p), \quad \tau, \omega \in \Omega^\bullet(M), \quad p \in M.$$

Tím se $\Omega^\bullet(M)$ stává algebrou. Je však současně též tzv. $C^\infty(M)$ -**modul**, neboť máme násobení $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ libovolnou funkcí $f \in C^\infty(M)$: $(f\omega)(p) = f(p)\omega(p)$ a platí $f(\omega_1 + \omega_2) = (f\omega_1) + (f\omega_2)$, $(fg)\omega = f(g\omega)$. Struktury $C^\infty(M)$ -modulu a algebry na $\Omega^\bullet(M)$ jsou kompatibilní ve smyslu:

$$(f\tau) \wedge \omega = \tau \wedge (f\omega) = f(\tau \wedge \omega), \quad f \in C^\infty(M), \quad \tau, \omega \in \Omega^\bullet(M).\tag{6.3}$$

Definice 6.4. Na prostoru diferenciálních forem $\Omega^\bullet(M)$ zavádíme **vnější derivaci**, což je lineární zobrazení $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ vyhovující následujícím podmínkám:

$$1. \quad d(\tau \wedge \omega) = d\tau \wedge \omega + (-1)^k \tau \wedge d\omega, \quad \text{kde } k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \tau \in \Omega^k(M), \quad \omega \in \Omega^\bullet(M),$$

2. $df(X) = Xf$, kde $f \in C^\infty(M) \equiv \Omega^0(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$,
3. $d^2\omega = 0$, $\omega \in \Omega^\bullet(M)$.

Druhá podmínka v lokálních souřadnicích (x^i) znamená, že $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, tj. vnější derivace funkce je prostě její derivací (totálním diferenciálem). Současně je zřejmý význam označení bazických 1-forem dx^i . Jsou to skutečně diferenciály souřadnicových funkcí x^i .

Věta 6.5. Operátor vnější derivace na varietě M existuje a je definujícími podmínkami určen jednoznačně.

Důkaz. Existenci a jednoznačnost operátoru d ukážeme v souřadnicích. Pak ukážeme, že na výběru souřadnic nezávisí.

V souřadnicích (x^i) na okolí $p \in M$ budeme zkoumat $d\omega(p)$, nejprve pro $f \in C^\infty(M)$. Obecně máme $df = (df)_i dx^i$ a tedy $df(X) = (df)_i X^i$ pro libovolný tečný vektor $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M$. Z druhé vlastnosti vnější derivace současně vyplývá, že $df(X) = Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Celkem tedy zjišťujeme, že $(df)_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ a $df(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i$.

Využitím první vlastnosti pro formu $\omega = \omega_{\vec{J}} dx^{\vec{J}}$ definujeme

$$d\omega = d\omega_{\vec{J}} \wedge dx^{\vec{J}} = \frac{\partial \omega_{\vec{J}}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{\vec{J}}. \quad (6.4)$$

Dále ověříme, zda takto definovaná operace splňuje vlastnosti $d^2 = 0$, $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = \dots$ pro formy ve tvaru $\omega_a = f_a dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ (dále rozšiřujeme linearitou):

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}, \\ d^2\omega &= \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}}_{\substack{\text{antisym. v } i, j \\ \text{sym. v } i, j}} \underbrace{dx^j \wedge dx^i}_{\text{antisym. v } i, j} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(f_1 f_2) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} \\ &= (f_2 df_1 + f_1 df_2) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} \\ &= (df_1 \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) \wedge (f_2 dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}) \\ &\quad + (-1)^k (f_1 dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) \wedge (df_2 \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}) \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2. \end{aligned}$$

Při změně souřadnic máme $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = f \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}} d\tilde{x}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{j_k}$ a

tedy vnější derivace formy ω definovaná předpisem (6.4) v souřadnicích $\tilde{x}^i$ vychází

$$\begin{aligned}
\tilde{d}\omega &= d \left(f \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}} \right) \wedge d\tilde{x}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^{j_k} \\
&= df \wedge \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}} \right) d\tilde{x}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^{j_k} \\
&\quad + f \left(\underbrace{\left(\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^{j_1}} \cdots \right)}_{\text{sym v } j_1, j} \underbrace{d\tilde{x}^j \wedge d\tilde{x}^{j_1}}_{\text{antisym v } j_1, j} \wedge \cdots + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \underbrace{\frac{\partial^2 x^{i_2}}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^{j_2}} \cdots}_{\text{sym. v } j_2, j} \right) \underbrace{d\tilde{x}^j \wedge d\tilde{x}^{j_1} \wedge d\tilde{x}^{j_2} \wedge \cdots}_{\text{antisym. v } j_2, j} + \cdots \right) \\
&= df \wedge \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}} \right) d\tilde{x}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^{j_k} \\
&= df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = d\omega.
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že takto definovaná operace d nezávisí na volbě lokálních souřadnic. ■

Speciální třídy k-form

- diferenciální forma $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ je **uzavřená** právě tehdy, když $d\omega = 0$,
- diferenciální forma $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ je **exaktní** právě tehdy, když existuje $\tau \in \Omega^\bullet(M)$: $\omega = d\tau$.

Všimněme si, že exaktní forma je automaticky též uzavřená. Ve fyzice o diferenciální formě τ často mluvíme jako o potenciálu pro formu ω . Potenciál může být skalární, pokud τ je funkce, vektorový, pokud τ je 1-forma apod.

Později, v kapitole 11 ukážeme, že pro libovolnou uzavřenou formu $\omega \in \Omega^k(M)$, $k \geq 1$ a bod $p \in M$ existuje jeho okolí $U = U^0$, $p \in U$ a $\tau \in \Omega^{k-1}(U)$ takové, že $\omega|_U = d\tau$.

Definice 6.6. Uvažujme bod $p \in M$, k -formu $\omega \in \Lambda_p^k M$ a tečný vektor $X \in T_p M$. $(k-1)$ -formu v bodě p definovanou předpisem

$$i_X \omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}). \quad (6.5)$$

nazýváme **vnitřní součin** či **zúžení** X a ω a značíme $i_X \omega \equiv X \lrcorner \omega$.

Pro $\omega \in \Omega^k(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$ je vnitřní součin definován bodově. Speciálně pro $\omega \in \Lambda_p^1 M = T_p^* M$ nebo $\omega \in \Omega^1(M)$ se zavádí značení $i_X \omega = \omega(X) \equiv \langle \omega, X \rangle \equiv \langle X, \omega \rangle$, kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je párování $T_p M$ a $T_p^* M \equiv \Lambda_p^1 M$.

6.1 Cvičení

Cvičení 6.1. V $\mathbb{R}^3$ popsaném v kartézských souřadnicích definujme následující přiřazení

$$\begin{aligned}
A &= A^x \frac{\partial}{\partial x} + A^y \frac{\partial}{\partial y} + A^z \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \leftrightarrow A^{(1)} = A^x dx + A^y dy + A^z dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3) \\
&\leftrightarrow A^{(2)} = A^x dy \wedge dz + A^y dz \wedge dx + A^z dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).
\end{aligned}$$

UkaŹte explicitnřm vřpořtem, Źe pak platř

$$\begin{aligned} df &= (\text{grad} f)^{(1)}, \\ dA^{(1)} &= (\text{rot} A)^{(2)}, \\ dA^{(2)} &= (\text{div} A) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Dřle ukaŹte, Źe $d^2 = 0$ je ekvivalentnř identitřm $\text{rot} \circ \text{grad} = 0$ a $\text{div} \circ \text{rot} = 0$.

Tento přřklad naznařuje, Źe při vyuŹevřnř křřvořarřch souřadnic, ve kterřch není zřejmř, jak zapsat Maxwellovy rovnice, je pro popis intenzity elektrickřho pole vhodnř vyuŹevřvat 1-formu, pro popis vektoru magnetickř indukce 2-formu. Pozdřji uvidřme, Źe tomu tak skutečně je a budeme schopni Maxwellovy rovnice psřt přřrozenřm zpřsobem v libovolnřm souřadnřm systřmu.

Uvedenř ztotoŹnřnř je zřvislř na vřbřru souřadnic, pokud ho chceme definovat obecnř, potřebujeme pojmy metrika a Hodgeův duřl, viz kapitola 12.

Cviřenř 6.2. V $\mathbb{R}^2$ uvaŹujte kartřzskř a polřnnř souřadnice. Podobnř jako v předchozřm přřkladř definujeme

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2).$$

Naleznřte vyjřdřenř vektorovřho pole $\text{grad} f$ v polřnnřch souřadnicřch a porovnejte jej s vřrazem pro vnřjřř derivaci funkce $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Vřsledek.

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Cviřenř 6.3. Magnetickř monopřl je hypotetickř konfigurace magnetickřho pole formřlnř stejnřho tvaru jako elektrickř pole bodovřho nřboje. UvaŹujte vektor magnetickř indukce odpovřdajřcř magnetickřmu monopřlu lokalizovanřmu v pořřtku kartřzskřch souřadnic v $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{g}{r^3} \vec{x} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}).$$

Přřradřte mu přřsluřnou 2-formu magnetickř indukce $B = (\vec{B})^{(2)}$. UkaŹte, Źe B je uzavřenř, tj. $\vec{B}$ vyhovuje Maxwellovř rovnici $\text{div} \vec{B} = 0$. Ve sfřrickřch souřadnicřch naleznřte formy A_N, A_S na $U_N = \mathbb{R}^3 \setminus \{(\vec{0}, 0, z) | z \leq 0\}$, $U_S = \mathbb{R}^3 \setminus \{(\vec{0}, 0, z) | z \geq 0\}$ takovř, Źe $B|_{U_N} = dA_N$, $B|_{U_S} = dA_S$.

Vřsledek.

$$\begin{aligned} B &= g \sin \theta d\theta \wedge d\varphi, \\ A_N &= g(1 - \cos \theta) d\varphi = g \frac{z - r}{r(x^2 + y^2)} (y dx - x dy), \\ A_S &= -g(1 + \cos \theta) d\varphi = g \frac{z + r}{r(x^2 + y^2)} (y dx - x dy), \end{aligned}$$

a ovřřte, Źe A_N, A_S je limitou moŹnř hladce dodefinovat na celřm U_N , resp. U_S .

Cvičení 6.4. Na varietě $S^2[u, v]$ uvažujte formu $\omega = \frac{1}{(u^2+v^2)^2} (2uvdu + (v^2 - u^2)dv)$. Určete $d\omega$. Dále hledejte $\alpha \in \Omega^1(S^2)$ takové, že $d\alpha = \frac{du \wedge dv}{(1+u^2+v^2)^2}$.

Výsledek. Máme

$$d\omega = 0,$$

což souvisí s tím, že v souřadnicích (U, V) máme $\omega = dV$. Formu $\alpha \in \Omega^1(S^2)$ se nepodaří nalézt. Později uvidíme důkaz, že to nelze, jakékoliv lokálně dobře definované řešení při pokusu o rozšíření na celou sféru S^2 někde diverguje (tj. zadané $d\alpha$ je příkladem formy uzavřené, ale nikoliv exaktní). Lokálně α existuje, např. v podobě

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{4} (1 + \cos \theta) d\phi = \frac{1}{2(1 + u^2 + v^2)} (u dv - v du) \\ &= \frac{1}{2(1 + U^2 + V^2)(U^2 + V^2)} (V dU - U dV). \end{aligned}$$

Kapitola 7

Zobrazení indukovaná zobrazením variet, podvariety

Uvažujme dvě variety M a N a hladké zobrazení $\phi : M \rightarrow N$. Budeme nyní zkoumat, jaká zobrazení lze na základě zobrazení $\phi : M \rightarrow N$ definovat mezi různými vektorovými prostory definovanými v bodech variet M a N a mezi prostory řezů odpovídajících vektorových fibrovaných prostorů s báзовými varietami M a N . Dále budeme analyzovat, ve kterých situacích je třeba se omezit pouze na zobrazení se speciálními vlastnostmi, např. difeomorfizmy.

7.1 Tečné a kotečné zobrazení

Definice 7.1. Tečné zobrazení ϕ_* v bodě $p \in M$ indukované zobrazením ϕ je zobrazení $\phi_* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$ definované předpisem

$$(\phi_*(X))f = X(f \circ \phi), \quad X \in T_p M, \quad f \in C^\infty(N). \quad (7.1)$$

Z definice vidíme, že zobrazení ϕ_* je lineární. V souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ$, kde $p \in U$, (y^a) na $V = V^\circ$, kde $\phi(p) \in V$, máme ϕ_* vyjádřené předpisem $\phi_*(X) = (\phi_*(X))^a \frac{\partial}{\partial y^a} \Big|_{\phi(p)}$ a tedy

$$\phi_*(X) = X^i \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^a} \Big|_{\phi(p)}, \quad (7.2)$$

jak vyplývá ze vztahu $(\phi_*(X))^a = (\phi_*(X))y^a = X(\varphi^a)$, kde $\varphi^a = y^a \circ \phi$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$.

Definice 7.2. Kotečné zobrazení ϕ^* v bodě $\phi(p) \in N$ indukované zobrazením ϕ je zobrazení $\phi^* : T_{\phi(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ definované předpisem

$$(\phi^*(\omega))X = \omega(\phi_*(X)), \quad X \in T_p M, \quad \omega \in T_{\phi(p)}^* N. \quad (7.3)$$

V souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ$, kde $p \in U$, (y^a) na $V = V^\circ$, kde $\phi(p) \in V$, máme pro ϕ^* vyjádření $\phi^*(\omega) = (\phi^*(\omega))_i dx^i|_p$, $\omega = \omega_a dy^a|_{\phi(p)}$, $\phi^* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^a} \Big|_{\phi(p)}$ (viz výše), z čehož plyne vztah $(\phi^*(\omega))_i = \omega \left(\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \right) = \omega_a \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \Big|_p$ a tedy

$$\phi^*(\omega) = \omega_a \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \Big|_p dx^i|_p.$$

Kotečné zobrazení ϕ^* můžeme dále přirozeně rozšířit na $\phi^* : \Lambda_{\phi(p)}^k N \rightarrow \Lambda_p^k M$ následujícím způsobem:

$$(\phi^*(\omega))(X_1, \dots, X_k) = \omega(\phi_*(X_1), \dots, \phi_*(X_k)), \quad X_1, \dots, X_k \in T_p M, \omega \in \Lambda_{\phi(p)}^k N. \quad (7.4)$$

Dále budeme obvykle místo $\phi_*(X)$, resp. $\phi^*(\omega)$, psát $\phi_* X$, resp. $\phi^* \omega$.

7.2 Indukovaná zobrazení řezů fibrovaných prostorů

Máme definována zobrazení ϕ_* v bodě p , ϕ^* v bodě $\phi(p)$. Lze je rozšířit na zobrazení celého $\mathcal{X}(M)$, resp. $\Omega^\bullet(M)$? V případě kotečného zobrazení ano. Pro libovolnou k -formu $\omega \in \Omega^k(N)$ definujeme $\phi^*(\omega) \in \Omega^k(M)$ předpisem

$$(\phi^* \omega)(p)(X_1, \dots, X_k) = \omega(\phi(p))(\phi_*(X_1|_p), \dots, \phi_*(X_k|_p)), \quad X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M) \quad (7.5)$$

(linearita, antisymetrie, závislost pouze na $X_i(p)$ je zřejmá, hladkost je vidět v lokálních souřadnicích).

Pro $f \in C^\infty(N)$ definujeme $\phi^* f = f \circ \phi$, z čehož plyne vztah $(\phi_* X)f = X(\phi^* f)$.

Příklad 7.3. Pro $\gamma : \mathbb{R}[t] \rightarrow M$ máme $\gamma_* \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_{t=0} = [\dot{\gamma}]$. Obecněji: $\gamma_* \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_t = \dot{\gamma}(t)$.

Definice 7.4. Výše zavedené zobrazení $\phi^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ nazýváme **pullback** při zobrazení $\phi : M \rightarrow N$.

Naopak $\phi_* : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(N)$ obecně definovat nelze. Důvody jsou dva:

1. $(\phi_* X)(\phi(p)) \equiv \phi_*(X|_p)$ není definován na celém N , ale jen na $\phi(M)$,
2. $(\phi_* X)(\phi(p))$ nemusí být korektně definováno: pokud existují dva body $p, \tilde{p} \in M$ takové, že $\phi(p) = \phi(\tilde{p})$ a současně platí $\phi_*(X_p) \neq \phi_*(X_{\tilde{p}}) \in T_{\phi(p)} N$, pak není jasné, kterou hodnotu bychom měli pro $\phi_* X$ v bodě $\phi(p)$ vybrat.

Pokud je ϕ difeomorfizmus, pak $\phi_* : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(N)$ existuje a je definováno předpisem

$$(\phi_* X)(\phi(p)) = \phi_*(X|_p). \quad (7.6)$$

Pokud je ϕ pouze prosté, ale nikoliv surjektivní, je $\phi_* X$ definováno jako prvek $\mathcal{X}(\phi(M))$, kde $\phi(M)$ není nutně otevřená množina. Podobně, pokud pro dané ϕ a X nevzniká problém s nejednoznačností, můžeme použít pro výsledek konstrukce bod po bodu označení $\phi_* X$.

Máme-li difeomorfizmus $\phi : M \rightarrow N$, můžeme definovat též $\phi^* : \mathcal{X}(N) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ jako

$$(\phi^* X)f = X(f \circ \phi^{-1}), \text{ kde } f \in C^\infty(M), \text{ tj. } \phi^* X = (\phi^{-1})_* X, \text{ neboli } \phi^* \circ \phi_* = \text{id}|_{\mathcal{X}(M)}.$$

Všimněme se, že změna souřadnic na $U = U^\circ$ je speciálním případem difeomorfizmu $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ na $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ a dříve zavedené změny složek vektoru, resp. formy, při změně souřadnic je možné odvodit z obecných vztahů pro tečné, resp. kotečné, zobrazení.

Při skládání zobrazení $\phi : M \rightarrow N$, $\psi : N \rightarrow O$ dostáváme pro tečné a kotečné zobrazení identity

$$(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*, \quad (\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*. \quad (7.7)$$

Dosazením do definice vnějšího součinu a z definice ϕ^* dále obdržíme vztah

$$\phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \phi^*\omega_1 \wedge \phi^*\omega_2. \quad (7.8)$$

Připomeňme se, že odvození použité při důkazu nezávislosti $d\omega$ na výběru souřadnic, viz důkaz věty 6.5, není přímo závislé na tom, že se jednalo o difeomorfismus. Tudiž platí pro libovolnou diferenciální formu $\omega \in \Omega^\bullet(N)$ a zobrazení ϕ vztah $d\phi^*\omega = \phi^*d\omega$, tj.

$$d_M \circ \phi^* = \phi^* \circ d_N, \quad (7.9)$$

kde d_M , resp. d_N , je vnější derivace na varietě M , resp. N .

Věta 7.5. Buď $\phi : M \rightarrow N$, $p \in M$, $X \in T_pM$, $\omega \in \Lambda_{\phi(p)}^k N$. Pak platí

$$\phi^*(i_{\phi_*(X)}\omega) = i_X(\phi^*\omega). \quad (7.10)$$

Důkaz. Dosazením. ■

Na $X \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \Omega^\bullet(N)$ lze tvrzení věty 7.5 aplikovat, pokud ϕ je difeomorfismus.

Věta 7.6. Pro difeomorfismus $\phi : M \rightarrow N$ platí pro libovolnou dvojici $X, Y \in \mathcal{X}(M)$

$$\phi_*[X, Y] = [\phi_*(X), \phi_*(Y)]. \quad (7.11)$$

Důkaz. Nechtě $p \in M$, $f \in C^\infty(N)$ a ϕ je difeomorfismus, tj. $\phi(M) = N$. Pak máme

$$\begin{aligned} (\phi_*[X, Y])(\phi(p))f &= [X, Y](f \circ \phi)(p) = X(Y(f \circ \phi))(p) - Y(X(f \circ \phi))(p) \\ &= X(\phi_*Y(f) \circ \phi)(p) - Y(\phi_*X(f) \circ \phi)(p) \\ &= (\phi_*X(\phi_*Y(f)) \circ \phi)(p) - (\phi_*Y(\phi_*X(f)) \circ \phi)(p) \\ &= ([\phi_*X, \phi_*Y]f)(\phi(p)) \end{aligned}$$

pro libovolný bod variety N , který jsme mohli vyjádřit ve tvaru $\phi(p)$ díky tomu, že ϕ je bijekce. ■

7.3 Podvariety

Pomocí vlastností hladkého zobrazení $\phi : M \rightarrow N$ definujeme dva odlišné pojmy podvariety.

Definice 7.7. Mějme $\phi : M \rightarrow N$ hladké zobrazení. ϕ nazýváme **vnoření** (angl. immersion) M do N , pokud ϕ_* je prosté v každém bodě $p \in M$. M pak nazýváme **vnořená podvarieta** variety N .

Definice 7.8. Pokud ϕ je prosté vnoření takové, že pro každý bod $p \in M$ existuje okolí $U = U^\circ \subset N$ bodu $\phi(p)$ a souřadnice $(y^a)_{a=1}^{\dim N}$ na U takové, že $\phi(M) \cap U = \{q \in U \mid y^a(q) = 0, a = 1, \dots, k\}$, kde $k = \dim N - \dim M$, nazýváme zobrazení ϕ **vložení** (angl. embedding) a M nazýváme **(vložená) podvarieta** variety N kodimenze k .

Obecně platí

Věta 7.9. Whitneyho věta o vnoření: Každá diferencovatelná varieta dimenze n je difeomorfní nějaké vložené C^ω -podvarietě Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^{2n}$. (*Bez důkazu.*)

Bohužel uvedená vložená podvarieta není původní varietou určena zdaleka jednoznačně a proto není vhodné obecné variety studovat jako podvariety v $\mathbb{R}^n$.

7.4 Cvičení

Cvičení 7.1. Uvažujte sféru $S^2[\theta, \varphi]$ zobrazenou do $\mathbb{R}^3[x, y, z]$ zobrazením ϕ zadaným rovnicemi

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = b \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c \cos \theta,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Určete, zda se jedná o vnoření a případně též o vložení. Spočítejte

$$\begin{aligned} & \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} \right), \quad \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} \right), \quad \phi^*(dx), \quad \phi^*(dy), \quad \phi^*(dz), \\ & \phi^*(dx \wedge dy \wedge dz), \quad \phi^* \left(\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} + \frac{z dz}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Výsledek.

$$\begin{aligned} \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} \right) &= a \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + b \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p - c \sin \theta_0 \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p, \\ \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} \right) &= -a \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + b \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p, \\ \phi^*(dx) &= a \cos \theta \cos \varphi d\theta - a \sin \theta \sin \varphi d\varphi, \\ \phi^*(dy) &= b \cos \theta \sin \varphi d\theta + b \sin \theta \cos \varphi d\varphi, \\ \phi^*(dz) &= -c \sin \theta d\theta, \quad \phi^*(dx \wedge dy \wedge dz) = 0, \quad \phi^* \left(\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} + \frac{z dz}{c^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

kde $p = \phi(\theta_0, \varphi_0)$. Z maximální hodnoty ϕ_* je vidět, že se jedná o vnoření (pro korektnost by mělo být prověřeno chování zobrazení ϕ v okolí singulárních bodů sférických souřadnic $\theta = 0, \pi$ v jiném souřadném systému, např. ve stereografických souřadnicích). Jedná se i o vložení, vhodné souřadnice z definice 7.8 jsou například sférické úhlové souřadnice θ, φ doplněné funkcí $R = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} - 1$, v nichž máme $\phi(S^2) = \{(\theta, \varphi, R) | R = 0\}$.

Cvičení 7.2. Nalezněte integrální křivku γ vektorového pole

$$X = z \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3[x, y, z])$$

z bodu $(x, y, z) = (1, 0, 0)$. Výsledné zobrazení $\gamma : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}^3[x, y, z]$ promítněte do roviny xy , $\phi : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}^2[x, y]$, $\phi(t) = (\gamma^x(t), \gamma^y(t))$. Určete $\phi_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right)$, $\phi^*(adx + bdy)$, $\phi^*(dx \wedge dy)$. Jaké podmínky musí vyhovovat $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}[t])$, aby existovalo $\phi_*(Y)$ definované na obrazu $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$?

Výsledek.

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \left(\cos \frac{t^2}{2}, -\sin \frac{t^2}{2}, t \right), \quad \phi(t) = \left(\cos \frac{t^2}{2}, -\sin \frac{t^2}{2} \right), \\ \phi_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) &= -t_0 \sin \frac{t_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\phi(t_0)} - t_0 \cos \frac{t_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\phi(t_0)}, \\ \phi^*(adx + bdy) &= -t \left(a \sin \frac{t^2}{2} + b \cos \frac{t^2}{2} \right) dt, \quad \phi^*(dx \wedge dy) = 0, \end{aligned}$$

přenesené vektorové pole $\phi_*(X)$ existuje, pokud pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $Y = Y^t(t) \frac{d}{dt}$, kde $Y^t(\sqrt{t^2 + 4\pi}) = \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + 4\pi}} Y^t(t)$.

Cvičení 7.3. Uvažujte zobrazení

$$\psi : \mathbb{R}[t] \rightarrow S^1[\varphi] : \psi(t) = t,$$

tj. při vyjádření kružnice jako množiny bodů v $\mathbb{R}^2[x, y]$ máme

$$\psi(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Jedná se o vnoření, resp. vložení?

Výsledek. Vnoření ano, neboť $\psi_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) = \frac{d}{d\varphi} \Big|_{\psi(t_0)}$, tj. ψ_* má hodnotu 1, o vložení nikoliv, neboť ψ není prosté.

Cvičení 7.4. Uvažujte varietu M a její kotečný fibrovaný prostor $T^*M \xrightarrow{\pi} M$. Definujme diferenciální 1-formu $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ na kotečném fibrovaném prostoru následovně

$$\lambda(\alpha) = \pi^*(\alpha), \quad \alpha \in T^*M.$$

Na M zvolme souřadnice $(x^i)_{i=1}^n$ a na T^*M souřadnice $(x^i, p_i)_{i=1}^n$, kde

$$x^i(\alpha) = x^i(\pi(\alpha)), \quad p_i \left(\alpha = \alpha_j dx^j \Big|_q \right) = \alpha_i.$$

Nalezněte souřadnicové vyjádření diferenciální 1-formy λ , spočítejte $\omega = d\lambda$ a ukažte, že pro každý nenulový $X \in T_\alpha(T^*M)$ je $i_X\omega \in T_\alpha^*(T^*M)$ nenulové.

Výsledek.

$$\begin{aligned} \lambda &= p_i dx^i, \quad \omega = dp_i \wedge dx^i, \\ X &= X_x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X_j^p \frac{\partial}{\partial p_j} \neq 0 \iff i_X\omega = X_i^p dx^i - X_x^j dp_i \neq 0. \end{aligned}$$

Kapitola 8

Lieova derivace

Dosud zavedené pojmy umožňují na varietě derivovat funkce ve směru tečného vektoru a určovat vnější derivaci diferenciálních forem, která je zobecněním totálního diferenciálu funkcí. Neumíme však derivovat obecnější objekty, tj. diferenciální formy či vektorová pole, ve směru tečného vektoru či vektorového pole. V této kapitole si jeden možný způsob derivování, tzv. Lieovu derivaci, zavedeme, později, v kapitole 12, uvidíme i jinou možnost, tzv. kovariantní derivaci.

Uvažujme tok Ψ_X daného vektorového pole $X \in \mathcal{X}(M)$. Z definice Ψ_X vyplývá, že pro libovolný bod $p \in M$ a konstanty $s, t \in \mathbb{R}$ takové, že levá strana následujícího výrazu má smysl, platí (viz důsledek 3.15):

$$\Psi_X(\Psi_X(p, s), t) = \Psi_X(p, t + s). \quad (8.1)$$

Pro dostatečně malé okolí U každého $p \in M$ existuje ε takové, že zobrazení Ψ_X^t je pro $|t| < \varepsilon$ difeomorfismus U na $\Psi_X^t(U)$ a tedy na tomto okolí $\exists(\Psi_X^t)^{-1} : (\Psi_X^t)^{-1} = \Psi_X^{-t}$. Pro následující úvahy, kde nás bude zajímat limita $\lim_{t \rightarrow 0}$ v nějakém $p \in M$, tedy lze chápat Ψ_X^t jako difeomorfismus za implicitního předpokladu, že t má hodnoty dostatečně blízké 0.

Definice 8.1. Buď $X \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \Omega^\bullet(M)$. Definujeme **Lieovu derivaci** diferenciální formy ω ve směru vektorového pole X předpisem

$$\mathcal{L}_X \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Psi_X^{t*} \omega - \omega). \quad (8.2)$$

Pro libovolný bod $p \in M$ tedy platí:

$$\mathcal{L}_X \omega(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\Psi_X^{t*} \omega)(p) - \omega(p)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Psi_X^{t*} (\omega(\Psi_X^t(p))) - \omega(p)).$$

Vidíme, že $\mathcal{L}_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$.

Pro libovolnou funkci $f \in C^\infty(M)$ platí

$$\mathcal{L}_X f = Xf, \quad (8.3)$$

neboť pro každý bod $p \in M$ je $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\Psi_X^t(p)) - f(p)) = Xf(p)$.

Definice 8.2. Buď $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ vektorová pole. Definujeme **Lieovu derivaci** vektorového pole Y ve směru vektorového pole X předpisem

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Psi_X^{t*}(Y) - Y). \quad (8.4)$$

Protože platí $\lim_{t \rightarrow 0} \Psi_{X*}^t(Z) = Z$, můžeme postupnými úpravami získat

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Psi_X^{t*}(Y) - Y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Psi_{X*}^{-t}(Y) - Y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Psi_{X*}^{-t}(Y - \Psi_{X*}^t(Y)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y - \Psi_{X*}^t(Y)).$$

Takže ekvivalentní definici Lieovy derivace vektorového pole je možné psát ve tvaru

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y - \Psi_{X*}^t(Y)). \quad (8.5)$$

V dalším výkladu se setkáme též s obecnějšími objekty než s vektorovými poli a diferenciálními formami, tzv. tenzory, které také bude třeba derivovat.

Definice 8.3. Kovariantní tenzor T k -tého řádu na varietě M je k -lineární (hladké) zobrazení $T : (\mathcal{X}(M))^k \rightarrow C^\infty(M)$ takové, že $T(X_1, \dots, X_k)(p)$ závisí pouze na hodnotách $X_1(p), \dots, X_k(p)$ vektorových polí $X_1, \dots, X_k$ v bodě p .

Definice 8.4. Kontravariantní tenzor S k -tého řádu na varietě M je k -lineární zobrazení takové, že $S : (\Omega^1(M))^k \rightarrow C^\infty(M)$ a $S(\omega^1, \dots, \omega^k)(p)$ závisí pouze na hodnotách $\omega^1(p), \dots, \omega^k(p)$ diferenciálních 1-forem $\omega^1, \dots, \omega^k$ v bodě p .

Pro $\phi : M \rightarrow N$ a kovariantní tenzor T na N definujeme jeho pullback předpisem

$$(\phi^*T)(X_1, \dots, X_k)(p) = T(\phi(p)) \left(\phi_* \left(X_1|_p \right), \dots, \phi_* \left(X_k|_p \right) \right), \quad (8.6)$$

obdobně pro difeomorfismus $\phi : M \rightarrow N$ a kontravariantní tenzor S na M definujeme

$$(\phi_*S)(\omega^1, \dots, \omega^k)(\phi(p)) = S(\phi^*\omega^1, \dots, \phi^*\omega^k)(p). \quad (8.7)$$

S pomocí těchto označení definujeme Lieovu derivaci libovolného kovariantního tenzoru na varietě M analogicky k definici Lieovy derivace pro formy. Pro kontravariantní tenzory uijeme definice Lieovy derivace pro vektorová pole.

8.1 Vlastnosti Lieovy derivace

Věta 8.5. Lieova derivace má následující vlastnosti:

1. $d \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X \circ d$, tj. pro libovolnou diferenciální formu $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ platí $d\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_Xd\omega$,
2. $\mathcal{L}_X \circ i_Y = i_Y \circ \mathcal{L}_X + i_{\mathcal{L}_X(Y)}$,
3. pro libovolnou dvojici diferenciálních forem $\omega, \tau \in \Omega^\bullet(M)$ platí $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \tau) = \mathcal{L}_X\omega \wedge \tau + \omega \wedge \mathcal{L}_X\tau$,
4. pro každou trojici vektorových polí platí $\mathcal{L}_X[Y, Z] = [\mathcal{L}_XY, Z] + [Y, \mathcal{L}_XZ]$.

Důkaz. Vlastnost 1 plyne z rovnice (7.9), vlastnost 3 z rovnice (7.8). Vlastnost 2 ukážeme následovně:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X i_Y \omega &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Psi_X^{t*} i_Y \omega - i_Y \omega) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (i_{\Psi_X^{t*} Y} (\Psi_X^{t*} \omega) - i_Y \omega) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (i_{\Psi_X^{t*} Y} (\Psi_X^{t*} \omega) - i_{\Psi_X^{t*} Y} (\omega) + i_{\Psi_X^{t*} Y} (\omega) - i_Y \omega) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (i_{\Psi_X^{t*} Y} (\Psi_X^{t*} \omega - \omega)) + i_{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Psi_X^{t*}(Y) - Y)} \omega = i_Y (\mathcal{L}_X \omega) + i_{\mathcal{L}_X(Y)} \omega. \end{aligned}$$

Z vlastnosti 2 dostáváme využitím $\mathcal{L}_X df = d(Xf)$ pro funkci $f \in C^\infty(M)$ důsledek:

$$\mathcal{L}_X(Yf) = \mathcal{L}_X(i_Y df) = i_Y \mathcal{L}_X df + i_{\mathcal{L}_X(Y)} df = i_Y d(Xf) + \mathcal{L}_X(Y)f,$$

z čehož plyne $X(Yf) = Y(Xf) + (\mathcal{L}_X(Y))f$ neboli

$$\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]. \quad (8.8)$$

Z tohoto vztahu a vlastnosti komutátorů pak plyne vlastnost 4. ■

Je užitečné si uvědomit

Důsledek 8.6. Jakékoliv zobrazení $A : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ vyhovující pro jisté vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$ podmínkám

$$A(\omega \wedge \tau) = (A\omega) \wedge \tau + \omega \wedge (A\tau), \quad d \circ A = A \circ d, \quad Af = Xf,$$

pro všechny diferenciální formy $\omega, \tau \in \Omega^\bullet(M)$ a hladké funkce $f \in C^\infty(M)$ už nutně musí být totožné s $\mathcal{L}_X$.

Důkaz. Viz $A(dx^k) = d(Ax^k) = d(Xx^k) = \mathcal{L}_X(dx^k)$ a vlastnosti Lieovy derivace z věty 8.5. ■

Lemma 8.7. Platí $i_X(\omega \wedge \tau) = i_X\omega \wedge \tau + (-1)^k\omega \wedge i_X\tau$, kde $\omega \in \Lambda_p^k M$, $\tau \in \Lambda_p^l M$, $X \in T_p M$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} i_{X_0}(\omega \wedge \tau)(X_1, \dots, X_{k+l-1}) &= \sum_{\substack{\vec{I} \vec{J} \\ |I|=k, |J|=l}} \delta_{(0,1,\dots,k+l-1)}^{\vec{I} \vec{J}} \omega(X_{\vec{I}}) \tau(X_{\vec{J}}) = \sum_{0 \in \vec{I}} (\dots) + \sum_{0 \in \vec{J}} (\dots) = \\ &= \sum_{\substack{\vec{H} \vec{J} \\ |H|=k-1, |J|=l}} \delta_{(1,\dots,k+l-1)}^{\vec{H} \vec{J}} \omega(X_0, X_{\vec{H}}) \tau(X_{\vec{J}}) + \sum_{\substack{\vec{I} \vec{G} \\ |I|=k, |G|=l-1}} (-1)^k \delta_{(1,\dots,k+l-1)}^{\vec{I} \vec{G}} \omega(X_{\vec{I}}) \tau(X_0, X_{\vec{G}}) = \\ &= (i_{X_0}\omega \wedge \tau)(X_1, \dots, X_{k+l-1}) + (-1)^k(\omega \wedge i_{X_0}\tau)(X_1, \dots, X_{k+l-1}). \end{aligned}$$

■

Věta 8.8. Na $\Omega^\bullet(M)$ platí

$$\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d. \quad (8.9)$$

Důkaz. Využitím důsledku 8.6 a lemmatu 8.7. Na funkcích $i_X f = 0$, $i_X df = Xf = \mathcal{L}_X f$. Dále

$$d(d \circ i_X + i_X \circ d) = d^2 \circ i_X + d \circ i_X \circ d = d \circ i_X \circ d = (d \circ i_X + i_X \circ d) \circ d.$$

Pro ověření všech vlastností ještě zbývá dokázat distributivitu vzhledem k vnějšímu součinu,

$$\begin{aligned} (d \circ i_X + i_X \circ d)\omega \wedge \tau &= di_X\omega \wedge \tau + (-1)^k d\omega \wedge i_X\tau + (-1)^{k-1} i_X\omega \wedge d\tau + \omega \wedge di_X\tau \\ &\quad + i_X d\omega \wedge \tau + (-1)^k i_X\omega \wedge d\tau + (-1)^{k+1} d\omega \wedge i_X\tau + \omega \wedge i_X d\tau \\ &= ((di_X + i_X d)\omega) \wedge \tau + \omega \wedge ((di_X + i_X d)\tau). \end{aligned}$$

■

Důsledek 8.9. Necht' $\omega \in \Omega^1(M)$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Pak platí tzv. **Cartanův vzorec** pro vnější derivaci 1-formy

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \quad (8.10)$$

Důkaz. Připomeňme, že $i_X\omega = \omega(X) \in C^\infty(M)$. Využitím rovnice (8.9) dostáváme

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= i_Y i_X d\omega = i_Y(\mathcal{L}_X\omega - di_X\omega) = (i_Y \circ \mathcal{L}_X)\omega - Y(\omega(X)) \\ &= (\mathcal{L}_X \circ i_Y)\omega - i_{\mathcal{L}_X(Y)}\omega - Y(\omega(X)) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \end{aligned}$$

■

Zobecněním předchozího vzorce získáváme vztah platný pro libovolnou diferenciální k -formu.

Věta 8.10 (Cartanův vzorec). Vnější derivaci diferenciální formy $\omega \in \Omega^k(M)$ vyhodnocenou na $k+1$ vektorových polích $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathcal{X}(M)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} X_j(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1})) + \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}), \end{aligned} \quad (8.11)$$

kde stříšky znamenají, že se daný prvek jako argument vynechá.

Důkaz. Indukcí s využitím

$$i_{X_{k+1}} \dots i_{X_1} d\omega = -i_{X_{k+1}} \dots i_{X_2} di_{X_1}\omega + i_{X_{k+1}} \dots i_{X_3} (i_{X_2} \mathcal{L}_{X_1}\omega) = \dots,$$

kde $i_{X_2} \mathcal{L}_{X_1}\omega = \mathcal{L}_{X_1} i_{X_2}\omega - i_{[X_1, X_2]}\omega$, atd. ■

Všimněme si, že levá strana Cartanova vzorce (8.11) závisí jen na $X_i|_p$, výrazy na pravé straně závisejí i na X_i v okolí $p \in M$. Z odvození ovšem vyplývá, že pravá strana jako celek závisí jen na $X_i|_p$.

Věta 8.11. Pro libovolná vektorová pole $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ platí

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]}. \quad (8.12)$$

Důkaz. Pro funkce a vektorová pole zřejmé, pro formy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X &= di_X di_Y + di_X i_Y d + i_X d^2 i_Y + i_X di_Y d - \\ &\quad - di_Y di_X - di_Y i_X d - i_Y d^2 i_X - i_Y di_X d \\ &= d \circ \mathcal{L}_X \circ i_Y - d \circ i_Y \circ \mathcal{L}_X + \mathcal{L}_X \circ i_Y \circ d - i_Y \circ \mathcal{L}_X \circ d \\ &= di_{[X, Y]} + i_{[X, Y]} d = \mathcal{L}_{[X, Y]}. \end{aligned}$$

■

Důkaz věty 8.11 lze provést též jinak, využitím již známých vlastností z věty 8.5:

$$[i_X d + di_X, \mathcal{L}_Y] = \dots = -i_{\mathcal{L}_Y(X)} d - di_{\mathcal{L}_Y(X)}.$$

8.2 Cvičení

Cvičení 8.1. Vyjádřete Lieovu derivaci vektorového pole $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, diferenciální 1-formy $\omega = \omega_i dx^i$ a diferenciální 2-formy $\tau = \tau_{ij} dx^i \wedge dx^j$ podle vektorového pole $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Výsledek.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y &= \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, \\ \mathcal{L}_X \omega &= \left(X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} + \omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) dx^j, \\ \mathcal{L}_X \tau &= \left(X^i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x^i} + \tau_{ik} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \tau_{ji} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \right) dx^j \wedge dx^k.\end{aligned}$$

Cvičení 8.2. Ukažte, že Lieova derivace libovolné uzavřené diferenciální formy je exaktní.

Návod. Využitím věty 8.8.

Cvičení 8.3. Na $\mathbb{R}^3[x, y, z]$ uvažujte vektorová pole $X_1 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ a $X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$. Spočítejte

$$\mathcal{L}_{X_a} dx, \quad \mathcal{L}_{X_a} dy, \quad \mathcal{L}_{X_a} dz, \quad \mathcal{L}_{X_a} (dx \wedge dy \wedge dz), \quad a = 1, 2.$$

Výsledek.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_1} dx &= -dy, & \mathcal{L}_{X_1} dy &= dx, & \mathcal{L}_{X_1} dz &= 0, & \mathcal{L}_{X_a} (dx \wedge dy \wedge dz) &= 0, \\ \mathcal{L}_{X_a} dx &= dx, & \mathcal{L}_{X_a} dy &= dy, & \mathcal{L}_{X_a} dz &= dz, & \mathcal{L}_{X_a} (dx \wedge dy \wedge dz) &= 3dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Cvičení 8.4. Je zřejmé, že pokud pro vektorová pole $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ platí $\Psi_X^t \circ \Psi_Y^s(p) = \Psi_Y^s \circ \Psi_X^t(p)$ pro všechna $s, t \in \mathbb{R}$, $p \in M$, pro něž mají výrazy smysl, tak též platí $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = 0$. Ukažte, že naopak $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = 0$ implikuje $\Psi_X^t \circ \Psi_Y^s(p) = \Psi_Y^s \circ \Psi_X^t(p)$, kdykoliv mají výrazy na obou stranách rovnice smysl.

Návod. Zderivujte dokazovanou identitu podle jednoho z parametrů, např. t , a využijte větu o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Viz též důkaz věty 9.11 dále.

Cvičení 8.5. Nechť ω je 2-forma na T^*M z cvičení 7.4 a $f, g \in C^\infty(T^*M)$. Definujme vektorové pole $X_f \in \mathcal{X}(T^*M)$ požadavkem

$$i_{X_f} \omega = -df.$$

Ukažte, že $X_f \in \mathcal{X}(T^*M)$ je tím určeno jednoznačně. Dále ukažte, že $\mathcal{L}_{X_f} \omega = 0$ a že $X_f(g) = \mathcal{L}_{X_f} g = 0$ právě tehdy, když $X_g(f) = \mathcal{L}_{X_g} f = 0$. Jednotlivá odvození provádějte abstraktně bez využití souřadnic i v souřadnicích (x^i, p_j) na T^*M zavedených ve cvičení 7.4.

Kapitola 9

Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky

V této kapitole využijeme vybudovaný geometrický aparát k matematicky korektnímu popisu Hamiltonovy formulace klasické mechaniky. Uvidíme, že základním pojmem je tzv. symplektická 2-forma, která v sobě kóduje Poissonovy závorky na fázovém prostoru a též umožňuje přirozené zavedení pojmu kanonické transformace. Hamiltonovy pohybové rovnice jsou pak popsány jako rovnice pro integrální křivky jistého, tzv. hamiltonovského, vektorového pole.

Uvažujme varietu N a její kotečný bundle T^*N . Ze cvičení 4.3 již víme, že je vhodným objektem pro matematický popis fázového prostoru mechanického systému s konfiguračním prostorem N . Na T^*N existuje význačná, tzv. **kanonická 1-forma** definovaná následujícím předpisem: buď $\pi : T^*N \rightarrow N$ projekce ve fibrovaném prostoru T^*N . Definujeme $\lambda \in \Gamma(T^*(T^*N))$ předpisem

$$\lambda(\omega) = \pi^*(\omega), \quad \omega \in T^*N, \quad (9.1)$$

viz cvičení 7.4.

V lokálních souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ \subset N$ zavádíme souřadnice (p_i) na T^*U : $p_i(\omega_k(q) dx^k) = \omega_i(q)$ pro $q \in U$. Společně (x^i, p_i) tvoří souřadnice na T^*U . V nich máme $\lambda \in \Gamma(T^*(T^*U))$ vyjádřeno ve tvaru

$$\lambda = p_i dx^i. \quad (9.2)$$

Dále můžeme uvažovat **kanonickou (Cartanovu-Poincarého) 2-formu** $\omega = d\lambda$. V lokálních souřadnicích (x^i, p_i) má evidentně tvar

$$\omega = dp_i \wedge dx^i. \quad (9.3)$$

Z konstrukce je ω exaktní a tudíž uzavřená. Dále je **nedegenerovaná** ve smyslu

$$\forall \alpha \in T^*N, X \in T_\alpha(T^*N), X \neq 0 : (\exists Y \in T_\alpha(T^*N) : \omega(\alpha)(X, Y) \neq 0). \quad (9.4)$$

Poznamenejme, že libovolná nedegenerovaná 2-forma umožňuje bijektivně zobrazit tečný a kotečný prostor předpisem $X \in T_\alpha(T^*N) \rightarrow i_X \omega \in T_\alpha^*(T^*N)$.

Uvedené vlastnosti kanonické 2-formy (9.3) jsou základem pro následující zobecnění.

Definice 9.1. Diferencovatelná varieta M vybavená nedegenerovanou uzavřenou diferenciální 2-formou ω se nazývá **symplektická**. Formu ω pak nazýváme **symplektická 2-forma**.

Příklad 9.2. $M = T^*N$ s formou $\omega = d\lambda$.

Lemma 9.3. Necht V je vektorový prostor, ω je nedegenerovaná 2-forma na V . Pak $\dim V$ je nutně sudá.

Důkaz. Necht (e_i) je báze V , (e^i) je duální báze V^* . Pak $\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} e^i \wedge e^j$, $e^i(e_j) = \delta_j^i$, tj. $\omega(X^i e_i, Y^j e_j) = X^i Y^j \omega(e_i, e_j) = \sum_{i < j} X^i Y^j (\omega_{ij} - \omega_{ji})$. Formu ω budeme nadále charakterizovat antisymetrickou maticí $(\omega)_{ij} = \frac{1}{2}(\omega_{ij} - \omega_{ji})$. Pak máme $\omega(X^i e_i, Y^j e_j) = \sum_{i,j} (\omega)_{ij} X^i Y^j$. Forma ω je nedegenerovaná právě tehdy, když pro všechna $X \neq 0$ je $(\omega)_{ij} X^i \neq 0$, což implikuje $\text{rank}(\omega)_{ij} = \dim V$ a tedy $\det(\omega) \neq 0$. Pro libovolnou antisymetrickou matici A , $A^T = -A$, platí $\det A^T = \det A$ a současně $\det A^T = (-1)^{\dim V} \det A$. Když je $\dim V$ lichá, tak $\det A^T = -\det A = \det A$, tj. $\det A = 0$. Takže nenulovost determinantu $\det(\omega)$ implikuje nutně, že $\dim V$ je sudá. ■

Věta 9.4 (Darboux). Buď (M, ω) symplektická varieta a q bod v M . Pak existuje okolí $U = U^\circ \subset M$, $q \in U$, a souřadnice $(p_i, x^i)_{i=1}^{\frac{\dim M}{2}}$ na U takové, že $\omega|_U = dp_i \wedge dx^i$. (Bez důkazu.)

Definice 9.5. Souřadnice z věty 9.4 na symplektické varietě (M, ω) nazýváme **Darbouxovy**.

Nyní se budeme snažit zformulovat hamiltonovskou mechaniku na obecné symplektické varietě (M, ω) . Základní poznatek je, že nedegenerovaná forma $\omega \in \Omega^2(M)$ nám umožňuje ztotožnit $T_q M$ a $T_q^* M$, resp. $\mathcal{X}(M)$ a $\Omega^1(M)$.

Věta 9.6. Zobrazení $\varphi : T_q M \rightarrow T_q^* M$, kde $\varphi(X) = i_X \omega(q)$ a ω je symplektická 2-forma, je izomorfismus vektorových prostorů.

Důkaz. Linearita $\varphi : X \rightarrow i_X \omega$ je zřejmá. Dále pro jádro φ z nedegenerovanosti platí: $X \in \ker \varphi \Leftrightarrow i_X \omega(q) = 0 \Leftrightarrow (\forall Y \in T_q M) (i_X \omega(Y) = \omega(X, Y) = 0) \Leftrightarrow X = 0$. ■

Důsledek 9.7. Zobrazení $\varphi : \mathcal{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$, kde $\varphi(X) = i_X \omega$ a ω je symplektická 2-forma, je izomorfismus vektorových prostorů.

Důkaz. V každém bodě $q \in M$ máme vzájemně jednoznačné zobrazení φ_q . Hladkost vyplývá z hladké závislosti $i_X \omega$ na X . ■

Definice 9.8. Vektorové pole X na symplektické varietě (M, ω) se nazývá

- **lokálně hamiltonovské** právě tehdy, když $i_X \omega$ je uzavřená, tj. $di_X \omega = 0$.
- **hamiltonovské** právě tehdy, když $i_X \omega$ je exaktní ve smyslu: existuje funkce $f \in C^\infty(M)$ taková, že $i_X \omega = -df$. Pak značíme $X \equiv X_f$.

Důvod pro předchozí definici vychází z Hamiltonovy mechaniky formulované na ko-tečném fibrovaném prostoru. Buď $M = T^*N$, $\omega = dp_i \wedge dx^i$ a $H(p_i, x^i) \in C^\infty(M)$. Pak máme

$$X_H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right). \quad (9.5)$$

Tudíž integrální křivky hamiltonovského vektorového pole X_H odpovídajícího funkci $H(p_i, x^i)$ jsou řešením Hamiltonových pohybových rovnic

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \quad (9.6)$$

Věta 9.9. Vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$ je lokálně hamiltonovské právě tehdy, když $\mathcal{L}_X \omega = 0$.

Důkaz. ω je uzavřená a tudíž $\mathcal{L}_X \omega = \text{di}_X \omega + i_X d\omega = \text{di}_X \omega$. ■

Věta 9.10. Necht' N je diferencovatelná varieta, $\tau \in \Omega^\bullet(N)$, $X, Y \in \mathcal{X}(N)$. Pak $\mathcal{L}_X \tau = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, q \in N : \Psi_X^{t*}(\tau(\Psi_X^t(q))) = \tau(q)$, kdykoliv má $\Psi_X^t(q)$ smysl. Podobně $\mathcal{L}_X Y = 0 \Leftrightarrow \Psi_{X*}^t(Y) = Y$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Psi_X^{t*}\tau) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s}(\Psi_X^{s+t*}\tau - \Psi_X^{t*}\tau) = \lim_{s \rightarrow 0} \Psi_X^{t*}\left(\frac{1}{s}(\Psi_X^{s*}\tau - \tau)\right) = \Psi_X^{t*}\mathcal{L}_X\tau = 0, \\ \Psi_X^{0*}(\tau) &= \text{id}^*\tau = \tau. \end{aligned}$$

■

Věta 9.11. Toky komutujících vektorových polí X, Y komutují. Neboli mějme diferencovatelnou varietu N a $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ takové, že $[X, Y] = 0$. Pak pro všechna $q \in N$, $s, t \in \mathbb{R}$ taková, že výrazy mají smysl, platí

$$\Psi_Y^s \circ \Psi_X^t(q) = \Psi_X^t \circ \Psi_Y^s(q). \quad (9.7)$$

Důkaz. Necht' $q \in N$, γ_1 integrální křivka X z q , tj. $\gamma_1(t) = \Psi_X^t(q)$, vybereme pevně $s \in \mathbb{R}$, γ_2 integrální křivka X z $\tilde{q} = \Psi_Y^s(q)$, tj. $\gamma_2(t) = \Psi_X^t(\tilde{q}) = \Psi_X^t(\Psi_Y^s(q))$. Definujeme $\gamma_3(t) = \Psi_Y^s(\gamma_1(t))$. Platí $\dot{\gamma}_2(t) = X(\gamma_2(t))$, $\dot{\gamma}_3(t) = \Psi_{Y*}^s(\dot{\gamma}_1(t)) = \Psi_{Y*}^s(X(\gamma_1(t))) = X(\gamma_3(t))$, neboť $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$, a tedy $\Psi_{Y*}^s(X) = X$. Máme tedy $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$, které vyhovují stejné diferenciální rovnici se stejnou počáteční podmínkou a z jednoznačnosti řešení plyne $\gamma_2(t) = \gamma_3(t)$. ■

Definice 9.12. Necht' (M, ω) je symplektická varieta. Pak zobrazení (transformaci) $\phi : M \rightarrow M$ nazveme **kanonické** právě tehdy, když $\phi^*\omega = \omega$.

Definice 9.13. 1-parametrická lokální grupa transformací variety N je takové zobrazení $\phi : U = U^\circ \subset \mathbb{R} \times N \rightarrow N$, $\{0\} \times N \subset U$, pro které platí

$$\phi(s, \phi(t, q)) = \phi(s + t, q) \quad (9.8)$$

pro všechna $s, t \in \mathbb{R}$, $q \in N$ taková, že $(t, q) \in U$ a $(s, \phi(t, q)) \in U$, a současně

$$\phi(0, q) = q, \quad q \in N. \quad (9.9)$$

Příkladem 1-parametrické lokální grupy transformací je tok libovolného vektorového pole. Naopak, každá 1-parametrická lokální grupa transformací má díky hladkosti a grupové vlastnosti (9.8) tvar toku vektorového pole pro jednoznačně určené vektorové pole, zvané **generátor** 1-parametrické lokální grupy transformací. Generátor lze najít zderivováním $X(q) = \left. \frac{d}{dt} \phi(t, q) \right|_{t=0}$.

Věta 9.14. Necht' (M, ω) je symplektická varieta, $X \in \mathcal{X}(M)$. X je lokálně hamiltonovské právě tehdy, když jeho tok Ψ_X^t definuje 1-parametrickou lokální grupu kanonických transformací variety M .

Důkaz. $\mathcal{L}_X \omega = 0 \Leftrightarrow \Psi_X^{t*}\omega = \omega$. ■

Definice 9.15. Necht (M, ω) je symplektická varieta, $f, g \in C^\infty(M)$. **Poissonova závorka** na M je bilineární zobrazení $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ dané předpisem

$$\{f, g\} = i_{X_f} i_{X_g} \omega. \quad (9.10)$$

Všimněme si, že Poissonovu závorku lze vyjádřit mnoha ekvivalentními způsoby

$$\{f, g\} = i_{X_f} i_{X_g} \omega = -i_{X_f} dg = -X_f(g) = -i_{X_g} i_{X_f} \omega = i_{X_g} df = X_g(f). \quad (9.11)$$

Konkrétně v Darbouxových souřadnicích máme $\omega = dp_i \wedge dx^i$, a tedy

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial p_i}. \quad (9.12)$$

Věta 9.16. Necht $f, g \in C^\infty(M)$. Pak

$$X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]. \quad (9.13)$$

Důkaz. $h = \{f, g\} = i_{X_f} i_{X_g} \omega$, $\mathcal{L}_{X_g} \omega = 0$, $\mathcal{L}_{X_f} \omega = 0$. Proto $i_{X_h} \omega = -d(i_{X_f} i_{X_g} \omega) = -\mathcal{L}_{X_f}(i_{X_g} \omega) + i_{X_f} d(i_{X_g} \omega) = -\mathcal{L}_{X_f} i_{X_g} \omega + i_{X_f} \mathcal{L}_{X_g} \omega = -i_{[X_f, X_g]} \omega - i_{X_g} \mathcal{L}_{X_f} \omega = -i_{[X_f, X_g]} \omega$ a tedy $X_h = -[X_f, X_g]$. ■

Věta 9.17. Poissonova závorka vyhovuje Jacobiho identitě, tj. $(f, g, h \in C^\infty(M))$:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Důkaz. $\{f, \{g, h\}\} = i_{X_f} i_{X_{\{g, h\}}} \omega = -i_{X_f} d\{g, h\} = -\mathcal{L}_{X_f} \{g, h\} = -\mathcal{L}_{X_f} i_{X_g} i_{X_h} \omega = -i_{\mathcal{L}_{X_f}(X_g)} i_{X_h} \omega - i_{X_g} i_{\mathcal{L}_{X_f}(X_h)} \omega$. Navíc $\mathcal{L}_{X_f}(X_{g/h}) = [X_f, X_{g/h}] = -X_{\{f, g/h\}}$, takže $\{f, \{g, h\}\} = i_{X_{\{f, g\}}} i_{X_h} \omega + i_{X_g} i_{X_{\{f, h\}}} \omega = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$. ■

Věta 9.18. Necht $f, g \in C^\infty(M)$, $\{f, g\} = 0$. Pak $f \circ \Psi_{X_g}^t = f$, $g \circ \Psi_{X_f}^t = g$.

Důkaz. Zřejmý. ■

Naopak, máme-li lokální 1-parametrickou grupu kanonických transformací, pak je její generátor X lokálně hamiltonovské vektorové pole, a tedy existuje na okolí libovolného bodu lokálně definovaná funkce $f \in C^\infty(U)$ taková, že $X = X_f$. Pokud daná grupa kanonických transformací navíc zachovává hamiltonián H , pak lokálně definovaná funkce f je integrál pohybu.

9.1 Cvičení

Cvičení 9.1. Na sféře $S^2[u, v]$ uvažujte 2-formu $\omega = \frac{du \wedge dv}{(1+u^2+v^2)^2}$. Ukažte, že ji lze hladce dodefinovat na celé sféře a že ω je symplektická. Nalezněte tvar obecného hamiltonovského vektorového pole na S^2 . Zkonstruujte Darbouxovy souřadnice na vhodném souřadnicovém okolí.

Výsledek.

$$\omega = \frac{du \wedge dv}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{dU \wedge dV}{(1+U^2+V^2)^2} = \frac{1}{4} \sin \theta d\theta \wedge d\varphi = -\frac{1}{4} d(\cos \theta d\varphi),$$

možné Darbouxovy souřadnice definované tam, kde lze použít sférické souřadnice, jsou tudíž například $p = -\frac{1}{4} \cos \theta$, $x = \varphi$. Obecné hamiltonovské vektorové pole má tvar

$$X_f = (1+u^2+v^2)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \right).$$

Cvičení 9.2. Ve značení příkladu 9.1 explicitně ověřte $\mathcal{L}_{X_f}\omega = 0$.

Cvičení 9.3. Uvažujme symplektickou varietu (M, ω) a dvoje Darbouxovy souřadnice (p_i, x^i) a (P_i, X^i) na okolí $U = U^\circ$ bodu $q \in M$, $\omega = dp_i \wedge dx^i = dP_i \wedge dX^i$. Vhodnou reinterpretací vztahu mezi (p_i, x^i) a (P_i, X^i) dokažte lokální existenci vytvářející funkce kanonické transformace ϕ definované předpisem

$$(p_i(\phi(m)), x^i(\phi(m))) = (P_i(m), X^i(m)), \quad m \in U.$$

Návod. Protože oboje souřadnice jsou Darbouxovy, máme

$$d(p_i dx^i - P_i dX^i) = \omega - \omega = 0,$$

tj. z lokální exaktnosti uzavřených forem plyne existence $F \in C^\infty(U)$ takové, že

$$dF = p_i dx^i - P_i dX^i. \quad (9.14)$$

(Abychom se vyhnuli komplikovanému značení, tak jsme předpokládali, že F je definována na stejném okolí jako souřadnice (p_i, x^i) a (P_i, X^i) , obecně může být potřeba U zúžit na menší otevřené okolí $\tilde{U} = \tilde{U}^\circ \subset U$.) Pokud i soubor funkcí (x^i, X^j) definuje souřadnice na U , můžeme psát

$$p_i dx^i - P_i dX^i = dF = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial F}{\partial X^i} dX^i,$$

tj. zjišťujeme, že $p_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}$ a $P_i = -\frac{\partial F}{\partial X^i}$ za předpokladu, že parciální derivace provádíme v souřadnicích (x^i, X^j) . Pokud nyní definujeme transformaci ϕ předpisem

$$(p_i(\phi(m)), x^i(\phi(m))) = (P_i(m), X^i(m))$$

kdykoliv mají výrazy smysl, tj. $P_i(m) \in \text{Ran}(p_i)$, $X^i(m) \in \text{Ran}(x^i)$, máme transformaci ϕ zadánu pomocí vytvářející funkce F prvního druhu známé z teoretické fyziky. Protože $\phi^*\omega = d(p_i \circ \phi) \wedge d(x^i \circ \phi) = dP_i \wedge dX^i = \omega$, je ϕ kanonická transformace.

Pokud soubor (x^i, P_j) též definuje souřadnice na U , můžeme místo $F \in C^\infty(U)$ uvažovat $\tilde{F} \in C^\infty(U)$ definovanou předpisem $\tilde{F}(m) = F(m) + P_i(m)X^i(m)$, kde $\tilde{F}$ budeme nyní chápat jako funkci na U vyjádřenou v souřadnicích (x^i, P_j) . Výpočtem její vnější derivace a využitím (9.14) získáváme

$$p_i(m) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^i}(m), \quad X^i(m) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_i}(m),$$

tj. při definici $X^i(m) = x^i(\phi(m))$, $P_i(m) = p_i(\phi(m))$ máme vytvářející funkci $\tilde{F}$ druhého druhu pro kanonickou transformaci ϕ .

Cvičení 9.4. Najděte vytvářející funkci pro identickou transformaci na symplektické varietě s Darbouxovými souřadnicemi (x^i, p_j) .

Výsledek.

$$\tilde{F} = x^i P_i.$$

Cvičení 9.5. Uvažujte symplektickou varietu $M = \mathbb{R}^2[x, p]$, kde (x, p) jsou Darbouxovy souřadnice a $H = x \cdot p$. Najděte příslušné hamiltonovské vektorové pole, jeho tok a vytvářející funkci kanonických transformací daných $\Psi_{X_H}^t$.

Výsledek.

$$X_H = x \frac{\partial}{\partial x} - p \frac{\partial}{\partial p}, \quad \Psi_{X_H}^t(x, p) = (\exp(t)x, \exp(-t)p), \quad \tilde{F}(x, P) = \exp(t)x \cdot P.$$

Cvičení 9.6. Nalezněte všechny funkce $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2[x, p])$ takové, že $\{f, x \cdot p\} = 0$ (kde opět (x, p) jsou Darbouxovy souřadnice).

Výsledek.

$$f(x, p) = g(x \cdot p), \quad g \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Kapitola 10

Integrace forem

Jedním z důvodů pro zavedení diferenciálních forem na varietách je to, že na rozdíl od funkcí jsou přirozenými objekty, které se na obecné varietě dají integrovat (za předpokladu, že varietu vybavíme tzv. orientací, viz níže).

Uvažujme na n -rozměrné varietě M n -formu v lokálních souřadnicích (x^i) , resp. $(\tilde{x}^j)$. Máme

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{12\dots n} \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \omega_{1\dots n}(x(\tilde{x})) \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \dots \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{i_n}} d\tilde{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{i_n} \\ &= \sum_I \omega_{1\dots n} \, \delta_{(1\dots n)}^I \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \dots \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{i_n}} d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n = \det \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \cdot \omega_{1\dots n}(x(\tilde{x})) d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n \\ &\equiv \tilde{\omega}_{1\dots n}(\tilde{x}) d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n,\end{aligned}$$

tedy

$$\tilde{\omega}_{1\dots n}(\tilde{x}) = \det \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \cdot \omega_{1\dots n}(x(\tilde{x})), \quad (10.1)$$

viz cvičení 5.3. Tento vztah připomíná větu o substituci v Lebesgueově integrálu ($x^i = \varphi^i(\tilde{x})$):

$$\int_{\varphi(\Omega)} f \, dx^1 \dots dx^n = \int_{\Omega} f \circ \varphi \left| \det \frac{\partial \varphi^i}{\partial \tilde{x}^j} \right| d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^n. \quad (10.2)$$

V definici integrálu n -formy ovšem narazíme hned na dvě odlišnosti či potenciální problémy:

1. rozdíl v absolutní hodnotě jakobiánu – řešíme zavedením orientace,
2. možná neexistence globálních souřadnic na M – řešíme pomocí tzv. rozkladu jednotky.

Definice 10.1. Orientace reálného vektorového prostoru V , $\dim V = n$, je zobrazení σ přiřazující každé n -tici lineárně nezávislých vektorů číslo ± 1 a vyhovující

$$\sigma(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \frac{\det T}{|\det T|} \sigma(e_1, \dots, e_n) \quad (10.3)$$

pro všechny lineárně nezávislé n -tice $(e_1, \dots, e_n)$ vektorů $e_1, \dots, e_n \in V$ a regulární lineární zobrazení $T \in GL(V)$.

Definice 10.2. Mějme vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ s orientací σ , $U = U^\circ \subset \mathbb{R}^n$, diferencovatelnou varietu M , $\dim M \geq n$, hladké zobrazení $F : U \rightarrow M$ a formu $\omega \in \Omega^n(M)$. Označme $\tilde{U} = F(U)$. Definujeme **integrál z formy ω na množině $\tilde{U}$ při parametrizaci F** předpisem

$$\int_{(\tilde{U}, F)} \omega = \sigma(e_1, \dots, e_n) \int_U (F^* \omega)_{1\dots n} dx^1 \dots dx^n, \quad (10.4)$$

kde $(x^1, \dots, x^n)$ jsou souřadnice na $\mathbb{R}^n$ ve standardní bázi $(e_1, \dots, e_n)$,

$$x^j(a^i e_i) = a^j,$$

tj. $e_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Takto definovaný integrál $\int_{(\tilde{U}, F)} \omega$ má následující vlastnost: při výběru jiného U' , σ' a F' takového, že $F'(U') = \tilde{U}$ a že existuje difeomorfismus $\phi : U \rightarrow U'$ **zachovávající orientaci** ve smyslu $\sigma' \left(\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p \right), \dots, \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right) \right) = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right)$ pro všechny body $p \in U$, $T_p \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$, pro který současně platí

$$F = F' \circ \phi,$$

plyne z věty o substituci v Lebesgueově integrálu:

$$\int_{(\tilde{U}, F)} \omega = \int_{(\tilde{U}, F')} \omega. \quad (10.5)$$

Pokud je F prosté, tak až na orientaci hodnota integrálu na výběru F nezávisí.

Definice 10.3. Orientace σ variety M , kde $\dim M = n$, je zobrazení přiřazující každému bodu $p \in M$ orientaci tečného prostoru $T_p M$ tak, že pro každé otevřené okolí $U = U^\circ \subset M$ a vektorová pole $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}(U)$ taková, že n -tice tečných vektorů $(X_1|_q, \dots, X_n|_q)$ je v každém bodě $q \in U$ lineárně nezávislá, platí:

$$f(p) = \sigma(p)(X_1|_p, \dots, X_n|_p) \text{ je konstantní (či ekvivalentně hladká) funkce na } U.$$

Varietu, na níž existuje orientace, nazýváme **orientovatelná**.

$$\text{Zavádíme označení: } \sigma(p)(X_1|_p, \dots, X_n|_p) = \sigma(X_1|_p, \dots, X_n|_p).$$

Lemma 10.4. Pokud na varietě M dimenze $\dim M = n$ existuje diferenciální n -forma $\omega \in \Omega^n(M)$ taková, že $\omega(p) \neq 0$ v každém bodě $p \in M$, pak je M orientovatelná, s orientací danou předpisem

$$\sigma(X_1|_p, \dots, X_n|_p) = \frac{\omega(X_1, \dots, X_n)(p)}{|\omega(X_1, \dots, X_n)(p)|}.$$

Příklad 10.5. Na symplektické varietě (M, ω) lze vždy zavést orientaci využitím poznámky 10.4 pomocí $\tilde{\omega} = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega \in \Omega^{\dim M}(M)$. V Darbouxových souřadnicích totiž máme

$$\tilde{\omega} = n! \cdot dp_1 \wedge dx^1 \wedge dp_2 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dp_m \wedge dx^m, \quad \text{kde } m = \frac{\dim M}{2}.$$

Důsledek 10.6. T^*M je vždy orientovatelná, M orientovatelná být nemusí.

Pokud v M existuje uzavřená křivka $\gamma : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow M$, $U = U^\circ \subset M$ a $X \in \mathcal{X}(U)$ takové, že

- $\gamma(\langle 0, 1 \rangle) \subset U$,
- $\forall t \in \langle 0, 1 \rangle$ křivka γ splňuje $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$,
- a existují lineárně nezávislé vektory $E_1, \dots, E_n \in T_{\gamma(0)}M = T_{\gamma(1)}M$, tj. báze $T_{\gamma(0)}M$, takové, že $(\Psi_{X^\star}^1(E_1), \dots, \Psi_{X^\star}^1(E_n))$ je báze opačně orientovaná než $(E_1, \dots, E_n)$, tj. matice přechodu z jedné báze do druhé má záporný determinant,

pak M není orientovatelná.

Příklad 10.7. Möbiův list není orientovatelný.

Definice 10.8. Jsou-li na varietě zadány souřadnice, pak, není-li výslovně řečeno jinak, předpokládáme, že jsou odpovídající bazická vektorová pole v uvedeném pořadí kladně orientovaná.

Definice 10.9. Buď M diferencovatelná varieta s orientací σ , $\dim M = n$, $U = U^\circ$ souřadnicové okolí se souřadnicemi (x^i) , $\varphi : x(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$ zobrazení inverzní k souřadnicím. Buď dále forma $\omega \in \Omega^n(M)$ a nosič této formy $\text{supp } \omega = \overline{\{p \in M \mid \omega(p) \neq 0\}} \subset U$. Definujeme **integrál z formy ω na varietě M** předpisem

$$\int_M \omega = \int_{(U, \varphi)} \omega = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \int_{x(U)} (\varphi^\star \omega)_{1\dots n} dx^1 \dots dx^n.$$

Dle výše uvedeného nezávisí $\int_M \omega$ na výběru souřadnic na U .

Nyní zbývá zjistit, jak integrovat formy, jejichž nosič nelze pokrýt jedinou mapou.

Definice 10.10. Buď M diferencovatelná varieta, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ její otevřené pokrytí. Indexová množina J a soubor funkcí $f_\beta \in C^\infty(M)$, $\beta \in J$, tvoří **rozklad jednotky** podřízený pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ pokud jsou splněny následující podmínky:

1. $(\forall \beta \in J)(\exists \alpha \in I)(\text{supp } f_\beta \subset U_\alpha \text{ a současně je } \text{supp } f_\beta \text{ kompaktní}),$
2. $(\forall p \in M)(\exists U = U^\circ \ni p \ \& \ \exists K_p \subset J, \#\{K_p\} < +\infty)(\forall \beta \in J \setminus K_p)(\text{supp } f_\beta \cap U = \emptyset),$
3. $(\forall \beta \in J)(\forall p \in M)(f_\beta(p) \geq 0),$
4. $(\forall p \in M)(\sum_{\beta \in J} f_\beta(p) = \sum_{\beta \in K_p} f_\beta(p) = 1).$

Věta 10.11. Ke každému otevřenému pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ variety M existuje jemu podřízený rozklad jednotky. (Přičemž není určen jednoznačně.)

Důkaz. Bez důkazu. K platnosti věty potřebujeme parakompaktnost v definici variety.

■

Definice 10.12. Buď M diferencovatelná varieta s orientací σ , $\dim M = n$ a $\omega \in \Omega^n(M)$. Definujeme **integrál z n -formy ω na varietě M** předpisem

$$\int_M \omega = \sum_{\beta \in J} \int_M f_\beta \omega, \quad (10.6)$$

kde $\{f_\beta\}_{\beta \in J}$ je rozklad jednotky podřízený nějakému atlasu $\{U_\alpha, (x_\alpha^i)\}_{\alpha \in I}$.

Věta 10.13. $\int_M \omega$ nezávisí na výběru atlasu $\{U_\alpha, (x_\alpha^i)\}_{\alpha \in I}$.

Důkaz. Pomocí společného zjemnění $\{U_\alpha \cap \tilde{U}_\beta\}_{\alpha \in I, \beta \in \tilde{I}}$ a jemu podřízeného rozkladu jednotky. ■

Věta 10.14. Buď ϕ difeomorfismus orientovaných variet M a N stejné dimenze n , zachovávající orientaci, $\omega \in \Omega^n(N)$, $U = U^\circ \subset M$. Pak platí:

$$\int_{\phi(U)} \omega = \int_U \phi^* \omega. \quad (10.7)$$

Důkaz. Pomocí rozkladu jednotky převedeme na součet integrálů v $\mathbb{R}^n$, dále viz substituce v Lebesgueově integrálu. ■

10.1 Cvičení

Cvičení 10.1. Zdůvodněte, že pro libovolný vektorový prostor V konečné dimenze s orientací σ , okolí $U = U^\circ \subset V$, variety M, N , zobrazení $F : U \rightarrow M$, difeomorfismus $\phi : M \rightarrow N$ a libovolnou $\omega \in \Omega^n(N)$ platí

$$\int_{(\phi(\tilde{U}), \phi \circ F)} \omega = \int_{(\tilde{U}, F)} \phi^* \omega,$$

kde $\tilde{U} = F(U)$ a $\dim V = n$.

Návod. Využijte větu o substituci v integrálu a výsledek cvičení 5.3.

Cvičení 10.2. Uvažujte varietu $M = S^2[u, v]$ se standardní orientací $\sigma \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = 1$ (viz definice 10.8) a 2-formu $\omega = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} du \wedge dv$. Spočítejte $\int_{S^2} \omega$.

Výsledek. $\int_{S^2} \omega = \pi$, výpočet je nejsnazší v polárních souřadnicích na rovině $[u, v]$.

Cvičení 10.3. Uvažujte symplektickou varietu (M, ω) a kanonické zobrazení ϕ . Uvažujte nějaké $U = U^\circ \subset \mathbb{R}^{2k}$, $2 \leq 2k \leq \dim M$ a prosté hladké zobrazení $\psi : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow M$, $\psi(U) = \tilde{U}$. Ukažte, že platí

$$\int_{\phi(\tilde{U})} \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega}_{k\text{-krát}} = \int_{\tilde{U}} \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega,$$

tj. získáváme známé Poincaréovy–Cartanovy integrální invarianty kanonických transformací.

Cvičení 10.4. Mějme orientovanou varietu (M, σ) dimenze n , formu $\omega \in \Omega^n(M)$ a vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$. Ukažte, že pro libovolné otevřené okolí $U = U^\circ \subset M$ platí

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{\Psi_X^t(U)} \omega = \int_U \mathcal{L}_X \omega.$$

Návod.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{\Psi_X^t(U)} \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_U (\Psi_X^t)^* \omega = \int_U \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Psi_X^t)^* \omega = \int_U \mathcal{L}_X \omega.$$

Cvičení 10.5. V $\mathbb{R}^3[x, y, z]$ uvažujte $\omega = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} (x dx + y dy + z dz)$ a zobrazení

$$F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2), t^2), \quad \tilde{U} = F(U).$$

Určete $\int_{(\tilde{U}, F)} \omega$.

Výsledek.

$$F^*\omega = -2 \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}^3} dt, \quad -2 \int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}^3} dt = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}, \quad \int_{(\tilde{U}, F)} \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

Cvičení 10.6. Stejnou úlohu jako výše řešte pro zobrazení

$$F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \quad \tilde{U} = F(U).$$

Výsledek.

$$F^*\omega = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}^3} dt, \quad -\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}^3} dt = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \int_{(\tilde{U}, F)} \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

Cvičení 10.7. Uvažujte $S^2[\theta, \phi]$ vnořenou do $\mathbb{R}^3[x, y, z]$ předpisem

$$F(\theta, \phi) = \frac{1}{1 + \frac{\theta^2}{\pi^2}} (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

a

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy).$$

Zdůvodněte, že vnoření F je možné jednoznačným hladkým způsobem definovat na celé sféře a určete $\int_{(S^2, F)} \omega$.

Výsledek.

$$F^*\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi, \quad \int_{(S^2, F)} \omega = \int_{S^2} F^*\omega = 4\pi.$$

Kapitola 11

Integrace na varietách s hranicí, Stokesova věta

V této kapitole si prostudujeme základní nástroj pro efektivní výpočty integrálů na varietách, tzv. Stokesovu větu. Lze ji vyjádřit v následujícím, zdánlivě jednoduchém, tvaru

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (11.1)$$

Uvidíme, že jejím využitím snadno dokážeme několik výsledků, které jsme dříve zmínili bez důkazu.

Ke smysluplné formulaci Stokesovy věty bude třeba vyjasnit, v jakém smyslu je varietě M přiřazena její hranice, o jakou geometrickou strukturu se vlastně jedná a jak je orientována.

Nejprve definujeme integrál z formy přes vnořenou podvarietu.

Definice 11.1. Buď M s orientací σ vnořená podvarieta N , $\phi : M \rightarrow N$ příslušné vnoření, $\dim M = m$, $\dim N = n \geq m$. Pak pro $\omega \in \Omega^m(N)$ definujeme:

$$\int_{(\phi(M), \phi)} \omega = \int_M \phi^* \omega. \quad (11.2)$$

Hodnota integrálu opět nezávisí na konkrétním způsobu parametrizace N , ale může se lišit pro ϕ a ϕ' , která nelze propojit difeomorfizmem $\psi : M \rightarrow M$ takovým, že $\phi = \phi' \circ \psi$.

Nyní budeme uvažovat dva speciální případy Stokesovy věty, jež nám umožní pochopit motivaci pro zavedení potřebných pojmů a následně větu odvodit v její obecné podobě.

Příklad 11.2. Uvažujme $\mathbb{R}^2[x, y]$ a oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vymezenou jako vnitřek konvexního lineárního obalu $\Omega = [(0, 0), (1, 0), (0, 1)]_\kappa^\circ$, tj. trojúhelníka s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Hranici tohoto trojúhelníka Ω popíšeme pomocí tří úseček parametrizovaných způsobem

$$\begin{aligned} \gamma_1(\tau) &= (\tau, 0), \\ \gamma_2(\tau) &= (1 - \tau, \tau), \quad \tau \in \langle 0, 1 \rangle. \\ \gamma_3(\tau) &= (0, 1 - \tau), \end{aligned}$$

Na $\mathbb{R}^2$ definujeme orientaci $\sigma((1, 0), (0, 1)) \equiv \sigma(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = 1$, úseky hranice oblasti Ω orientujeme tak, aby $\sigma_i(\frac{\partial}{\partial \tau}) = 1 \Leftrightarrow \sigma(\vec{n}, \gamma_{i*}(\frac{\partial}{\partial \tau})) = 1$, kde $\vec{n}$ je vnější normála k Ω v

$q \in \gamma_i((0, 1))$ a τ je souřadnice podél γ_i . Bud' $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ libovolná 1-forma, $d\omega = (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x) dx \wedge dy$. Pak platí:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\omega &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x) = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \partial_x \omega_y - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \partial_y \omega_x = \\ &= \int_0^1 dy (\omega_y(1-y, y) - \omega_y(0, y)) - \int_0^1 dx (\omega_x(x, 1-x) - \omega_x(x, 0)) = \\ &= - \int_0^1 dy \omega_y(0, y) + \int_0^1 dx \omega_x(x, 0) + \int_0^1 d\tau \underbrace{(\omega_y(1-\tau, \tau) - \omega_x(1-\tau, \tau))}_{\gamma_2^* \omega, \text{ kde } \gamma_2(\tau) = (1-\tau, \tau)} = \\ &= \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega. \end{aligned}$$

Příklad 11.3. Bud' $M = \mathbb{R}^n[x^1, \dots, x^n]$ se standardní bází $(e_i)_{i=1}^n$, orientací $\sigma(e_1, \dots, e_n) = 1$, a souřadnicemi x^i definovanými předpisem $x^i(a^j e_j) = a^i$. Označme nulový vektor $e_0 \equiv \vec{0}$. Pak definujeme simplex $\Omega = ([e_0, e_1, \dots, e_n]_{\kappa})^{\circ}$ a jeho hranici $\partial\Omega = \bigcup_{i=0}^n [e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]_{\kappa}$, kde stříška zde i dále značí vynechání prvku.

Na $\partial\Omega_i = [e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]_{\kappa}$ zavádíme orientaci opět tak, že $\sigma_i(f_1, \dots, f_{n-1})(z) \equiv \sigma(\vec{n}, f_1, \dots, f_{n-1})(z)$, kde $f_1, \dots, f_{n-1} \in T_z(\partial\Omega_i)$ a $\vec{n}$ je ven orientovaná normála k nadrovině obsahující $\partial\Omega_i$.

Dále nechť $\omega \in \Omega^{n-1}(V)$, kde okolí $V = V^{\circ} \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje simplex Ω vč. jeho hranice, $\overline{\Omega} \subset V$. Formu ω a její vnější derivaci $d\omega \in \Omega^n(V)$ vyjádříme ve tvaru

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n, \quad d\omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Pro integrál z n -formy $d\omega$ přes oblast Ω dostáváme (nutno pamatovat na orientaci):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\omega &= \int_{\sum_{j=1}^n \substack{0 < x^j < 1 \\ x^j < 1}} dx^1 \dots dx^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\sum_{j=1, j \neq i}^n \substack{0 < x^j < 1 \\ x^j < 1}} dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n \left(\omega_i(x^1, \dots, \underbrace{1 - \sum_{i \neq j} x^j}_{i\text{-tá pozice}}, \dots, x^n) - \right. \\ &\quad \left. - \omega_i(x^1, \dots, \underbrace{0}_{i\text{-tá pozice}}, \dots, x^n) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\sum_{j=1, j \neq i}^n \substack{0 < x^j < 1 \\ x^j < 1}} dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n \left(\omega_i(x^1, \dots, \underbrace{1 - \sum_{i \neq j} x^j}_{i\text{-tá pozice}}, \dots, x^n) \right) + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_i} \omega = \\ &= \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_i} \omega = \sum_{i=0}^n \int_{\partial\Omega_i} \omega \equiv \int_{\partial\Omega} \omega. \end{aligned}$$

V předposledním rovnítku se orientace souřadnic $(x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^n)$ na $\partial\Omega_0$ projevila alternujícím znaménkem $(-1)^{i+1}$.

Definice 11.4. Mějme $\mathbb{R}^p$ se standardní bází $(e_1, \dots, e_p)$ a orientací σ , $\sigma(e_1, \dots, e_p) = 1$. Definujeme **standardní p -simplex** Δ_p jako $(e_0 \equiv \vec{0})$:

$$\Delta_p = [e_0, e_1, \dots, e_p]_\kappa = \{a^i e_i \mid a^i \geq 0, \sum_{i=1}^p a^i \leq 1\}. \quad (11.3)$$

Definice 11.5. (Singulární) p -simplex v n -rozměrné varietě M je hladké zobrazení σ_p nějakého $U = U^\circ \subset \mathbb{R}^p$, kde $\Delta_p \subset U$, do M .

V definici 11.5 se za definiční obor zobrazení bere okolí Δ_p a ne samotné Δ_p mj. proto, že chceme, aby byla zajištěna existence derivací na hranicích. Dále pokládáme $\sigma_p \equiv \sigma_p(\Delta_p)$.

Dva singulární p -simplexy σ_p a σ'_p ($z U \subset \mathbb{R}^p$ do M) považujeme za **ekvivalentní**, pokud existuje $V = V^\circ \subset U$, $\Delta_p \subset V$ a difeomorfismus $\phi : V \rightarrow \phi(V)$, $\Delta_p \subset \phi(V)$ takový, že $\phi(\Delta_p) = \Delta_p$, zachovávající orientaci σ na $\mathbb{R}^p$ (tj. $\sigma = \sigma \circ \phi_*$) a splňující $\sigma_p|_V = \sigma'_p|_{\phi(V)} \circ \phi|_V$.

Definice 11.6. (Singulární) p -řetězec v n -rozměrné varietě M je libovolná formální lineární kombinace singulárních p -simplexů na M (modulo ekvivalence).

Definice 11.7. Operátor hranice ∂ přiřazuje p -řetězcům na M $(p-1)$ -řetězce následovně:

- Standardnímu p -simplexu přiřadí

$$\partial \Delta_p = \sum_{k=0}^p (-1)^k \Delta_{p-1}^{(k)}, \quad (11.4)$$

kde $\Delta_{p-1}^{(k)} = [e_0, \dots, \hat{e}_k, \dots, e_p]_\kappa$ je třeba chápat jako singulární $(p-1)$ -simplex ve varietě $\mathbb{R}^p$, $\Delta_{p-1}^{(k)} : U \subset \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}^p$, kde $\Delta_{p-1} \subset U$.

- Singulárnímu p -simplexu σ_p přiřadí

$$\partial \sigma_p = \sum_{k=0}^p (-1)^k \sigma_p \circ \Delta_{p-1}^{(k)}. \quad (11.5)$$

- Lineárním rozšířením definujeme hranici libovolného singulárního p -řetězce.

Jinak řečeno, operátor hranice přiřazuje p -simplexu orientovaný součet jeho stěn, kde orientace je indukována vnější normálou a orientací $\mathbb{R}^p$, tj. $\sigma'(f_1, \dots, f_{p-1}) = \sigma(n, f_1, \dots, f_{p-1})$.

Z elementární geometrie dostáváme $\partial^2 \Delta_p = \partial \circ \partial(\Delta_p) = 0$, neboť každý $(p-2)$ -simplex $[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_n]_\kappa$ v $\partial^2 \Delta_p$ vyvstane dvakrát, s opačnými znaménky. Tudíž i obecně platí

$$\partial^2 = 0. \quad (11.6)$$

Definice 11.8. Buď c_p singulární p -řetězec ve varietě M , $c_p = \sum_{i=1}^k a_i \sigma_p^{(i)}$. **Integrál p -formy ω** přes řetězec c_p je definován předpisem

$$\int_{c_p} \omega = \sum_{i=1}^k a_i \int_{(\sigma_p^{(i)}(\Delta_p), \sigma_p^{(i)})} \omega = \sum_{i=1}^k a_i \int_{\Delta_p} \sigma_p^{(i)*} \omega. \quad (11.7)$$

Věta 11.9 (Stokesova pro p -řetězce). Buď c_p p -řetězec na varietě M , $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$. Pak platí

$$\int_{c_p} d\omega = \int_{\partial c_p} \omega. \quad (11.8)$$

Důkaz. Viz integrály po standardních simplexech a definice integrálu po p -řetězci. ■

Věta 11.10. Buď N orientovaná varieta, $\dim N = p$, ϕ její prosté vnoření do variety M . Buď dále $\overline{\phi(N)}$ kompaktní. Pak existuje **triangulace** vnořené podvariety $N \simeq \phi(N)$, tj. její pokrytí p -řetězcem $c_p = \sum_{k=1}^m \sigma_p^{(k)}$, který splňuje:

1. $\forall k \in \hat{m} : \sigma_p^{(k)} : U^{(k)} = U^{(k)\circ} \rightarrow M, \Delta_p \subset U^{(k)}, \sigma_p^{(k)}(\Delta_p^\circ) \subset \phi(N),$
2. $\forall k \in \hat{m} : \sigma_p^{(k)}$ je prosté,
3. $\forall k \in \hat{m} : \sigma_p^{(k)}$ zachovává orientaci variety $\phi(N)$,
4. $\forall q \in \phi(N) : \left(\exists_1 k \in \hat{m} : q = \sigma_p^{(k)}(q_0), q_0 \in \Delta_p^\circ \right)$ nebo $\left(\exists k \in \hat{m} : q = \sigma_p^{(k)}(q_0), q_0 \in \Delta_p \setminus \Delta_p^\circ \right).$

Takový řetězec nazýváme **simpliciální**.

$\partial c_p \equiv \partial N$ lze popsat jako konečné sjednocení vnořených variet překrývajících se na množině míry nula z hlediska $\int_{\partial c_p}$. Vnitřní stěny se při integraci (či rovnou v lineární kombinaci simplexů) navzájem vyruší, neboť jsou v ∂c_p vždy obsaženy dvakrát s navzájem opačnou orientací. Tudíž dostáváme následující větu.

Věta 11.11 (Stokesova). Nechť N je orientovaná prostě vnořená podvarieta M taková, že $\bar{N}$ je kompaktní podmnožina M , $\dim N = p$, $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$. Pak platí

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N d\omega. \quad (11.9)$$

11.1 Poincaréovo lemma

Zavedení integrace na varietách nám umožňuje dokázat Poincaréovo lemma o lokální exaktnosti uzavřených forem. Nejprve musíme zobecnit výsledek cvičení 10.4.

Lemma 11.12. Uvažujte varietu M a hladké zobrazení $\phi : \langle 0, 1 \rangle \times M \rightarrow M$ takové, že pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je $\phi_t : M \rightarrow M : \phi_t(p) = \phi(t, p)$ difeomorfismus. Buď V vnořená podvarieta dimenze k , $V(t) = \phi_t(V)$. Pak pro libovolnou k -formu $\omega \in \Omega^k(M)$ a $t \in (0, 1)$ platí

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \omega = \int_{V(t)} \mathcal{L}_{X_t} \omega, \text{ kde } X_t \in \mathcal{X}(M), X_t(p) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} \phi_s(\phi_t^{-1}(p)). \quad (11.10)$$

Důkaz. V tomto případě bohužel nemůžeme použít obdobnou argumentaci jako ve cvičení 10.4, protože zobrazení ϕ není tokem vektorového pole X_t . Řešením je přidání další dimenze k naší varietě, tj. budeme uvažovat $\tilde{M} = (0, 1) [t] \times M$, na kterou naše objekty přeneseme následovně:

- $\omega \in \Omega^k(M)$ můžeme přímo interpretovat jako $\omega \in \Omega^k(\tilde{M})$ s tím, že v souřadnicovém vyjádření nemá žádné členy tvaru $dt \wedge \dots$,
- $V(t)$ definuje vnořenou podvarietu dimenze k v $\tilde{M}$ předpisem $\tilde{V}(t) = \{t\} \times V(t)$,
- vektorová pole X_t nám definují jedno vektorové pole na $\tilde{M}$ předpisem

$$\tilde{X}\Big|_{t,p} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t,p} + X_t|_p = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t,p} + \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \phi_{t+\epsilon}(\phi_t^{-1}(p)).$$

Tok vektorového pole $\tilde{X} \in \mathcal{X}(\tilde{M})$ má tvar

$$\Psi_{\tilde{X}}^\tau(t, p) \equiv (t(\tau), p(\tau)) = (t + \tau, \phi_{t+\tau}(\phi_t^{-1}(p))),$$

jak ověříme výpočtem derivace

$$\begin{aligned} \dot{p}(\tau) &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \phi_{t+\tau+\epsilon}(\phi_t^{-1}(p)) = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \phi_{t+\tau+\epsilon}(\phi_{t+\tau}^{-1}(\phi_{t+\tau}(\phi_t^{-1}(p)))) = \\ &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \phi_{t+\tau+\epsilon}(\phi_{t+\tau}^{-1}(p(\tau))) = X_{t+\tau}(p(\tau)) = X_{t(\tau)}(p(\tau)). \end{aligned}$$

Na základě výsledku cvičení 10.4 můžeme tudíž psát

$$\frac{d}{dt} \int_{\tilde{V}(t)} \omega = \int_{\tilde{V}(t)} \mathcal{L}_{\tilde{X}} \omega.$$

Vzhledem k tomu, že ω nezávisí na t a neobsahuje žádné příspěvky tvaru $dt \wedge \dots$, můžeme následně psát $\mathcal{L}_{\tilde{X}} \omega = \mathcal{L}_{X_t} \omega$ (kde striktně vzato pro účely rovnosti interpretujeme X_t a ω jako objekty na varietě $\tilde{M}$ s nulovými t -složkami) a $\int_{\tilde{V}(t)} \omega = \int_{V(t)} \omega$. Tím získáváme dokazovanou identitu (11.10). ■

Důsledek 11.13.

$$\frac{d}{dt} (\phi_t^* \omega) = \phi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \omega$$

Důkaz. Integrál v (11.10) přeneseme z $V(t) = \phi_t(V)$ na V pomocí věty 10.14 (poznamenejme, že všechny difeomorfismy ϕ_t ze spojitosti v parametru t transformují orientaci V stejně) a využitím libovolnosti integrační oblasti získáváme hledaný důsledek. ■

Lemma 11.14. Buď M otevřená jednotková koule v $\mathbb{R}^n$, tj.

$$M = B(0, 1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x}| < 1\} \subset \mathbb{R}^n,$$

a $\omega \in \Omega^k(M)$ uzavřená diferenciální k -forma, $d\omega = 0$, $k \geq 1$. Pak existuje diferenciální $(k-1)$ -forma $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ taková, že $\omega = d\alpha$.

Důkaz. Budeme uvažovat zobrazení $\phi_t(\vec{x}) = (1-t)\vec{x}$ definovaná pro $0 \leq t \leq 1$. Odpovídající vektorové pole X_t z lemmatu 11.12 má tvar $X_t(\vec{y}) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=t} \frac{1-s}{1-t} \vec{y} = -\frac{\vec{y}}{1-t}$, kde $0 \leq t < 1$. Máme $\phi_0 = \text{id}$, $\phi_1 = 0$ a tudíž $\phi_0^* = \text{id}$, $\phi_1^* = 0$. Vyjádříme

$$\begin{aligned} \omega(\vec{x}) &= (\phi_0^* \omega)(\vec{x}) = \phi_0^* (\omega(\phi_0(\vec{x}))) - \phi_1^* (\omega(\phi_1(\vec{x}))) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 1^-} \int_0^\epsilon \frac{d}{ds} (\phi_s^* (\omega(\phi_s(\vec{x})))) ds = \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 1^-} \int_0^\epsilon \phi_s^* (\mathcal{L}_{X_s} \omega(\phi_s(\vec{x}))) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 1^-} \int_0^\epsilon \phi_s^* (di_{X_s} \omega(\phi_s(\vec{x}))) ds = \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 1^-} d \int_0^\epsilon \phi_s^* (i_{X_s} \omega(\phi_s(\vec{x}))) ds, \end{aligned}$$

což lze dále upravit jako $d\left(-\lim_{\epsilon \rightarrow 1^-} \int_0^\epsilon \phi_s^*(i_{X_s}\omega(\phi_s(\vec{x}))) ds\right)$, pokud limita existuje. Její existenci ukážeme v souřadnicích. Mějme

$$\omega = \omega_{\vec{I}} d\vec{x}^{\vec{I}}, \quad \text{kde } |\vec{I}| = k.$$

Pro následující úpravy definujme též $\omega_I = \delta_I^{\vec{J}} \omega_{\vec{J}}$. Zjišťujeme, že $i_X \omega = X^i \omega_{i\vec{J}} d\vec{x}^{\vec{J}}$, tj.

$$i_{X_s} \omega(\vec{y}) = -\frac{y^i}{1-s} \omega_{i\vec{J}}(\vec{y}) d\vec{y}^{\vec{J}}$$

a

$$\phi_s^*(i_{X_s} \omega(\phi_s(\vec{x}))) = -x^i \omega_{i\vec{J}}((1-s)\vec{x}) (1-s)^{k-1} d\vec{x}^{\vec{J}}.$$

Označíme-li $\tau = 1-s$, dostáváme hledanou $(k-1)$ -formu α na $B(0,1)$ vyjádřenou ve tvaru

$$\alpha = -\int_0^1 d\tau \tau^{k-1} \left(-x^i \omega_{i\vec{J}}(\tau \vec{x}) d\vec{x}^{\vec{J}} \right) = \left(\int_0^1 d\tau \tau^{k-1} \omega_{i\vec{J}}(\tau \vec{x}) \right) x^i d\vec{x}^{\vec{J}}.$$

Její hladkost vyplývá z hladké závislosti určitého integrálu hladké funkce na parametrech. Integrál konverguje díky kompaktnosti integrační oblasti. ■

Věta 11.15 (Poincaréovo lemma). Buď ω uzavřená k -forma na varietě M , $k \geq 1$ a $U = U^\circ \subset M$ otevřená podmnožina difeomorfní otevřené kouli v $\mathbb{R}^{\dim M}$. Pak existuje $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ taková, že $\omega|_U = d\alpha$.

Důkaz. Přenesení lemmatu 11.14 do M difeomorfismem. ■

11.2 Cvičení

Cvičení 11.1. Graficky nalezněte triangulaci S^2 , $T^2 = S^1 \times S^1$ a $B(0,1)$. Určete ∂S^2 , $\partial B(0,1)$.

Návod. Při zakreslení triangulací do rovinných map na S^2 , $T^2 = S^1 \times S^1$ je třeba kontrolovat, aby se žádný ze simplexů neprotnul v limitních bodech na “okrajích” mapy, to je častou chybou.

Cvičení 11.2. Uvažujte 2-rozměrnou reálnou varietu $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2[x, y]$ a na ní diferenciální 1-formu s hodnotami v komplexních číslech vyjádřenou následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \omega &= f(x, y) dz = (f_{\text{re}}(x, y) + i f_{\text{im}}(x, y)) (dx + i dy) \\ &= (f_{\text{re}}(x, y) dx - f_{\text{im}}(x, y) dy) + i (f_{\text{re}}(x, y) dy + f_{\text{im}}(x, y) dx), \end{aligned} \quad (11.11)$$

kde $f(x, y) = f_{\text{re}}(x, y) + i f_{\text{im}}(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, tj. $f_{\text{re}}(x, y), f_{\text{im}}(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a $z = x + iy$. Ukažte, že ω je uzavřená právě tehdy, když f je holomorfní, tj. splňuje Cauchy–Riemannovy podmínky (uzavřenost formy s hodnotami v komplexních číslech chápeme jako současnou uzavřenost její reálné a imaginární části zapsané v druhém řádku (11.11)). Interpretujte Cauchyho větu o integrálu z holomorfní funkce podél uzavřené křivky jako speciální případ Stokesovy věty.

Cvičení 11.3. Na varietě $M = \mathbb{R}^3[x, y, z] - \{\vec{0}\}$ uvažujte

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) \in \Omega^2(M)$$

a dvě podvariety

$$N_1 = \left\{ (x, y, z) \in M \mid \frac{(x - 99)^2}{100^2} + y^2 + 30z^2 = 1 \right\},$$

$$N_2 = \left\{ (x, y, z) \in M \mid \frac{(x - 101)^2}{100^2} + y^2 + 30z^2 = 1 \right\}.$$

Určete $\int_{N_1} \omega$ a $\int_{N_2} \omega$.

Návod. Využijte skutečnosti, že $d\omega = 0$ na celé varietě M (ověřte). Tudíž pro integrační podvarietu N_2 , která ohraničuje otevřenou oblast v M , dostáváme ze Stokesovy věty přímo $\int_{N_2} \omega = 0$. Pro integrační podvarietu N_1 stejný argument nefunguje, neboť ve “vnitřku” N_1 leží bod $\vec{0}$, v němž ω není definována (proto byl vynechán z variety M). Ale Stokesova věta nám umožňuje integrál převést na integrál přes vhodnější podvarietu obepínající singulární bod $\vec{0}$, např. jednotkovou sféru. Následně převedením do sférických souřadnic (viz cvičení 6.3) a integrací dostáváme $\int_{N_1} \omega = 4\pi$.

Cvičení 11.4. Ukažte, že 2-forma $\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi$ definovaná na sféře S^2 ve sférických souřadnicích (θ, ϕ) a hladce dodefinovaná na celé S^2 (viz cvičení 5.2) není na S^2 exaktní.

Návod. Pokud by exaktní byla, $\omega = d\alpha$, tak $\int_{S^2} \omega = \int_{\partial S^2} \alpha = 0$, neboť hranice sféry S^2 je nulová. Přitom víme, že $\int_{S^2} \omega = 4\pi$, což je hledaný spor.

Kapitola 12

Variety s dodatečnou strukturou

Podobně jako v případě Hamiltonovské mechaniky, i pro popis elektromagnetismu či obecné relativity potřebujeme na varietě – časoprostoru jisté dodatečné struktury. Ukazuje se, že základním pojmem je metrika, která nám umožní na varietě měřit vzdálenosti a úhly.

Lemma 12.1. Mějme vektorové prostory V a W konečných dimenzí. Lineární zobrazení $A : V \rightarrow W$ je možné interpretovat též jako bilineární zobrazení $A : V \times W^* \rightarrow \mathbb{R}$ nebo jako lineární zobrazení $A : V \otimes W^* \rightarrow \mathbb{R}$. Prostory lineárních zobrazení $V \rightarrow W$ a lineárních funkcí $V \otimes W^* \rightarrow \mathbb{R}$ je tedy možné kanonicky ztotožnit.

Důkaz. Uvažujme bázi (e_i) prostoru V , bázi (f_a) prostoru W a k ní duální bázi (f^{*a}) prostoru W^* . Zobrazení A je pak zadáno svou maticí A_j^a : $A(e_j) = f_a A_j^a$. Odpovídající zobrazení $A_{V \times W^*} : V \times W^* \rightarrow \mathbb{R}$ a $A_{V \otimes W^*} : V \otimes W^* \rightarrow \mathbb{R}$ pak konstruujeme následovně:

$$A_{V \times W^*}(e_i, f^{*a}) = A_j^a, \quad A_{V \otimes W^*}(e_i \otimes f^{*a}) = A_j^a.$$

Z předpisu pro změnu matice zobrazení $A_j'^a = (S^{-1})_b^a A_j^b T_i^j$ při změně bazí

$$e'_i = T_i^j e_j, \quad f'_a = S_a^b f_b, \quad f'^{*a} = (S^{-1})_b^a f^{*b}$$

vyplývá

$$A'_{V \times W^*}(e'_i, f'^{*a}) \equiv A_j'^a = (S^{-1})_b^a A_j^b T_i^j = A_{V \times W^*}(T_i^j e_j, (S^{-1})_b^a f^{*b}) = A_{V \times W^*}(e'_i, f'^{*a}),$$

takže definice $A_{V \times W^*}$ na výběru bazí nezávisí a podobně též pro $A_{V \otimes W^*}$.

Rozdíl mezi $A_{V \times W^*}$ a $A_{V \otimes W^*}$ je víceméně jen terminologický, **tenzorový součin** $V \otimes W^*$ v sobě dle definice obsahuje lineární kombinace elementů tvaru $v \otimes w$, $v \in V, w \in W$ se ztotožněním $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$, $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$ a

$$\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bilinearita zobrazení $A_{V \times W^*}$ zajišťuje, že

$$A_{V \times W^*}(\lambda e, f^*) = A_{V \times W^*}(e, \lambda f^*) = \lambda A_{V \times W^*}(e, f^*).$$

Podobná úvaha platí i pro ekvivalenci z hlediska aditivity, tj. lze konzistentně definovat hodnotu $A_{V \otimes W^*}(v \otimes w)$ nezávisle na volbě vyjádření vektoru $v \otimes w$ jako uspořádané dvojice a takto definované zobrazení $A_{V \otimes W^*}$ je lineární. Nadále nebudeme indexy odlišující, na co zobrazení A působí, používat a bude to vyplývat z kontextu. ■

Definice 12.2. Tenzor q –krát kovariantní a r –krát kontravariantní na varietě M je hladké zobrazení, které každému $p \in M$ přiřadí $T(p) \in (T_p^*M)^{\otimes q} \otimes (T_pM)^{\otimes r}$. Prostor q –krát kovariantních a r –krát kontravariantních tenzorů značíme $T_q^r(M)$.

Dle Lemmatu 12.1 tenzor $T(p)$ v bodě p lze interpretovat jako multilineární zobrazení

$$T : (T_pM)^{\times q} \times (T_p^*M)^{\times r} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (12.1)$$

Lemma 12.3. Tenzor q –krát kovariantní a r –krát kontravariantní lze též chápat jako $C^\infty(M)$ –multilineární zobrazení

$$T : (\mathcal{X}(M))^{\times q} \times (\Omega^1(M))^{\times r} \rightarrow C^\infty(M), \quad (12.2)$$

tj.

$$\begin{aligned} fT(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^r) &= T(fX_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^r) = \dots = \\ T(X_1, \dots, fX_q, \omega^1, \dots, \omega^r) &= T(X_1, \dots, X_q, f\omega^1, \dots, \omega^r) = \dots \end{aligned}$$

pro libovolná $X_1, \dots, X_q \in \mathcal{X}(M)$, $\omega^1, \dots, \omega^r \in \Omega^1(M)$, $f \in C^\infty(M)$. Této skutečnosti často s výhodou využíváme při určování, zda zadané $\mathbb{R}$ –multilineární zobrazení je či není tenzor.

Důkaz. Zřejmý z definice a hladkosti všech uvažovaných objektů. ■

Takto definovaný tenzor T se často ve fyzice nazývá **tenzorové pole**, neboť je definován v každém bodě variety.

Definice 12.4. Metrika $g \in T_2^0(M)$ na varietě M je 2–krát kovariantní symetrický tenzor na M nede degenerovaný v každém bodě $p \in M$. Varietu M s metrikou g značíme (M, g) .

Metrika g na varietě M se nazývá

- **riemannovská** právě tehdy, když je $g(p)$ pozitivně definitní pro všechna $p \in M$,
- **lorentzovská (pseudoriemannovská)** právě tehdy, když má $g(p)$ konstantní signaturu $(\dim M - 1, 1)$ nebo $(1, \dim M - 1)$ pro všechna $p \in M$.

Na varietě může být zavedeno více metrik, je třeba vždy uvést, kterou právě uvažujeme. Zadaná metrika nám poskytuje následující vlastnosti a možnosti:

1. umožňuje měřit délky tečných vektorů a úhly mezi nimi;
2. metrika

$$g(p) = g_{ij}(p) dx^i \otimes dx^j \equiv g_{ij}(p) dx^i dx^j$$

se při změně souřadnic transformuje následujícím způsobem ($p \in M$, $g_{ij}(p) = g_{ji}(p)$):

$$g(p) = g'_{ij}(p) dx'^i \otimes dx'^j, \quad g'_{ij}(p) = \left. \frac{\partial x^a}{\partial x'^i} \right|_p \left. \frac{\partial x^b}{\partial x'^j} \right|_p g_{ab}(p). \quad (12.3)$$

3. Nechť je M vnořená podvarieta N , $\Phi : M \rightarrow N$ a g riemannovská metrika na N . Pak

$$\Phi^*g \in T_2^0(M) : (\Phi^*g)(V, W)(p) = g(\Phi_*(V|_p), \Phi_*(W|_p)) \quad (12.4)$$

definuje riemannovskou metriku na M . Tato metrika se nazývá **indukovaná metrika**. V případě, že g má jinou než definitní signaturu, tak Φ^*g nemusí být nede degenerovaná, tj. obecně není metrikou (viz světlu podobné směry v Minkowského prostoročase, na nichž je indukovaný tenzor nulový).

4. Metrika umožňuje vzájemně jednoznačně zobrazit $T_p M$ a $T_p^* M$ pomocí zobrazení $\flat(p) : T_p M \rightarrow T_p^* M$ a $\sharp(p) : T_p^* M \rightarrow T_p M$, pro která platí $\flat \circ \sharp = \text{id}$ a

$$(\flat(p)V)(W) = g(V, W), \quad g(\sharp(p)\alpha, V) = \alpha(V), \quad V, W \in T_p M, \quad \alpha \in T_p^* M. \quad (12.5)$$

Dále budeme zkoumat, jakým způsobem lze na varietě zadat derivaci vektorových polí ve směru tečného vektoru ve zvoleném bodě. Připomeňme, že Lieova derivace není definována ve směru tečného vektoru, protože potřebujeme znát hodnoty vektorového pole, podle kterého derivujeme, na okolí bodu, ve kterém derivaci vyhodnocujeme. Tato nesnáz odpadá při využití následujícího druhu derivace, která je definována námi požadovanými vlastnostmi, tj. lokální závislostí na směru, ve kterém derivujeme, a derivační vlastností v argumentu.

Definice 12.5. (Afinní) konexe (často též zvaná **kovariantní derivace**, angl. affine connection) na varietě M je zobrazení $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) : \nabla(X, Y) \equiv \nabla_X(Y)$ vyhovující vztahům

1. $\nabla_{fX+Y}(Z) = f\nabla_X(Z) + \nabla_Y(Z)$,
2. $\nabla_X(aY + Z) = a\nabla_X(Y) + \nabla_X(Z)$,
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + (Xf)Y$,

pro libovolnou funkci $f \in C^\infty(M)$, konstantu $a \in \mathbb{R}$ a vektorová pole $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Všimněme si, že kvůli třetí podmínce konexe není tenzor, ale rozdíl libovolných dvou konexí již evidentně tenzor je, což se často s výhodou využívá ve výpočtech výběrem vhodné referenční konexe.

Mějme na $U = U^\circ \subset M$ referenční souřadný systém (reper), tj. lokálně definovaná vektorová pole $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{X}(U)$ taková, že tečné vektory $e_1|_p, \dots, e_n|_p$ jsou lineárně nezávislé ve všech bodech $p \in U$. Definujeme složky konexe ∇ vzhledem k reperu $(e_1, \dots, e_n)$, které značíme Γ_{ij}^k , předpisem

$$\nabla e_i(e_j)(p) = \Gamma_{ij}^k(p)e_k(p). \quad (12.6)$$

Pro konexi aplikovanou na libovolná dvě vektorová pole vyjádřená v rozkladu do reperu $(e_1, \dots, e_n)$ ve tvaru $X = X^i e_i, Y = Y^j e_j$, kde $X^i, Y^j \in C^\infty(U)$ jsou složky vektorových polí X a Y vzhledem k reperu, pak získáváme vyjádření

$$\nabla_X(Y) = X^i \nabla_{e_i}(Y^j e_j) = X^i Y^j \Gamma_{ij}^k e_k + X^i e_i(Y^j) e_j = X^i Y^j \Gamma_{ij}^k e_k + X(Y^j) e_j. \quad (12.7)$$

Speciálně pro $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ máme

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(Y) = \left(Y^j \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial}{\partial x^i} Y^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (12.8)$$

Složky konexe Γ_{ij}^k obecně nejsou symetrické v indexech i, j .

Definice 12.6. Tenzor torze $T \in T_2^1(M)$ konexe ∇ je dán vztahem:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad \text{kde } X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (12.9)$$

K ověření, že se jedná o tenzor, stačí dle Lemmatu 12.3 zkontrolovat

$$T(fX, Y) = fT(X, Y), \quad (12.10)$$

v druhé kovariantní složce to následně plyne z antisymetrie v X, Y , v kontravariantní pak z vlastnosti párování vektorů a 1–forem $\langle T(X, Y), f\omega \rangle = f\langle T(X, Y), \omega \rangle$. Vlastnost (12.10) ověříme výpočtem z vlastností afinní konexe,

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y fX - [fX, Y] \\ &= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - (Yf)X - [fX, Y] + (Yf)X \\ &= fT(X, Y) - (Yf)X + (Yf)X = fT(X, Y). \end{aligned}$$

V souřadnicové bázi $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ je torze nulová právě tehdy, když složky konexe Γ_{ij}^k jsou symetrické v indexech i, j . V jiných reperech to ale neplatí.

Definice 12.7. Tenzor křivosti $R \in T_3^1(M)$ konexe ∇ je definován vztahem:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \quad (12.11)$$

Skutečnost, že křivost je tenzor, lze opět snadno ověřit využitím lemmatu 12.3 a vlastností konexe, podobně jako výše pro tenzor torze.

Máme-li varietu s metrikou (M, g) , pak na M existuje význačná konexe ∇^{LC} , která se nazývá **Levi-Civitova**. Splňuje vztahy

$$T(X, Y) = 0, \quad X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X^{LC} Y, Z) + g(Y, \nabla_X^{LC} Z), \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M) \quad (12.12)$$

a je jimi určena jednoznačně. V souřadnicích (x^i) mají složky Levi-Civitovy konexe ∇^{LC} tvar

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{lk} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{jk} \right),$$

kde g^{il} jsou složky matice inverzní k symetrické matici g , $g^{il}g_{lk} = \delta_k^i$.

Dále se ukazuje, že na varietě s metrikou (M, g) a s orientací σ existuje význačná forma ω_g maximálního stupně, nenulová v každém bodě $p \in M$. Je daná předpisem

$$\omega_g \equiv \text{vol}_g = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \sqrt{|\det g|} \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (12.13)$$

Skutečnost, že se jedná o dobře definovanou formu vyplývá z toho, že při transformaci souřadnic máme

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \det \left(\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \right) d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n, \quad |\det g| = \left(\det \left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \right) \right)^2 |\det \tilde{g}|$$

a o rozdíl mezi determinantem a jeho absolutní hodnotou se postará transformace orientace

$$\sigma \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = \text{sgn} \det \left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \right) \cdot \sigma \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n} \right).$$

Definice 12.8. Buď (M, g, σ) varieta s metrikou a orientací, $f \in C^\infty(M)$. Pak definujeme integrál z funkce f na varietě M předpisem

$$\int_M f = \int_M f \omega_g. \quad (12.14)$$

Dále nám metrika na n -rozměrné varietě M s orientací σ umožňuje zavést zobrazení mezi vektorovými prostory $\Lambda_p^k M$ a $\Lambda_p^{n-k} M$, resp. prostory diferenciálních forem $\Omega^k(M)$ a $\Omega^{n-k}(M)$. Uvažujme $\alpha = \alpha_{\vec{I}} dx^{\vec{I}} \in \Lambda_p^k M$ a označme $\alpha^{\vec{I}} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \alpha_{\vec{J}}$ (jak již bylo zavedeno výše, g^{il} jsou složky matice inverzní k matici metriky g). Definujeme

Definice 12.9. Hodgeův duál formy $\alpha = \alpha_{\vec{I}} dx^{\vec{I}} \in \Lambda_p^k M$ je $(n-k)$ -forma $*\alpha$ určená předpisem

$$*\alpha = (*\alpha)_{\vec{J}} dx^{\vec{J}}, \quad (*\alpha)_{\vec{J}} = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \sqrt{|\det g|} \alpha^{\vec{I}} \delta_{\vec{I}\vec{J}}^{(1\dots n)}. \quad (12.15)$$

Nezávislost konstrukce $*\alpha \in \Lambda_p^{n-k} M$ na konkrétní volbě báze se ukáže obdobně jako výše pro formu ω_g .

Příklad 12.10. $1 \in C^\infty(M) \Rightarrow *1 = \omega_g \in \Omega^n(M)$.

Opakovanou aplikací Hodgeova operátoru, tj. $* \circ *$, dostáváme identické zobrazení až na znaménko závislé na dimenzi variety, stupni formy a signatuře metriky (např. na riemannovských varietách máme $*(\alpha) = (-1)^{k(n-k)} \alpha$ pro $\alpha \in \Omega^k(M)$).

Definice 12.11. Uvažujme varietu M s metrikou g a orientací σ . Definujeme operátor **koderivace** $d^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ následovně

$$d^* \beta^{(k)} = (-1)^{s(n,k)} * d * \beta^{(k)}, \quad \beta^{(k)} \in \Omega^k(M), \quad (12.16)$$

kde $s(n, k)$ určující znaménko závisí na signatuře metriky následovně:

$$s(n, k) = n(k+1) + 1, \quad g \text{ riemannovská}, \quad s(n, k) = n(k+1), \quad g \text{ lorentzovská}.$$

Příklad 12.12. $M = \mathbb{R}^3$, $g = \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i$, $\alpha = \alpha_i dx^i \Rightarrow d^* \alpha = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} = -\operatorname{div} \vec{\alpha}$.

Ve cvičeních níže uvidíme, jak nám právě zavedené pojmy umožňují zapsat Maxwellovy rovnice v geometrické formulaci dovolující jejich snadné vyjádření v libovolném souřadném systému na prostoročase, a to i v případě, že je prostoročas zakřivený, tj. s nenulovou křivostí.

12.1 Cvičení

Cvičení 12.1. Na varietě $S^2[\theta, \varphi]$ uvažujme metriku $g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$. Ukažte, že $g = \phi^* g_{\text{cart}}$, kde $\phi(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ a $g_{\text{cart}} = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$. Nalezněte složky Levi-Civitovy konexe a tenzoru křivosti.

Výsledek. Nenulové složky konexe a křivosti jsou

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cotg \theta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \\ R_{\theta\varphi}^\theta &= -R_{\varphi\theta}^\theta = \sin^2 \theta, & R_{\theta\varphi}^\varphi &= R_{\varphi\theta}^\varphi = -1. \end{aligned}$$

Cvičení 12.2. Na varietě $\mathbb{R}^3[x, y, z]$ uvažujme kartézskou metriku

$$g_{\text{cart}} = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz.$$

Vyjádřete g_{cart} ve sférických souřadnicích $[r, \theta, \phi]$. Za předpokladu standardní volby orientace $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = 1$ naleznete explicitní vyjádření Hodgeova operátoru

$$* : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^3), \quad * : \Omega^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^1(\mathbb{R}^3)$$

v obou souřadných systémech a podobně vyjádřete $d^* = (-1) * \circ d \circ * : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Výsledek.

$$g_{\text{cart}} = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi,$$

$$\alpha = \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz \Rightarrow * \alpha = \alpha_x dy \wedge dz + \alpha_y dz \wedge dx + \alpha_z dx \wedge dy,$$

$$\beta = \beta_x dy \wedge dz + \beta_y dz \wedge dx + \beta_z dx \wedge dy \Rightarrow * \beta = \beta_x dx + \beta_y dy + \beta_z dz,$$

$$\alpha = \alpha_r dr + \alpha_\theta d\theta + \alpha_\varphi d\varphi \Rightarrow * \alpha = \frac{\alpha_\varphi}{\sin \theta} dr \wedge d\theta + \sin \theta \alpha_\theta d\varphi \wedge dr + r^2 \sin \theta \alpha_r d\theta \wedge d\varphi,$$

$$\beta = \beta_\varphi dr \wedge d\theta + \beta_\theta d\varphi \wedge dr + \beta_r d\theta \wedge d\varphi \Rightarrow * \beta = \frac{\beta_r}{r^2 \sin \theta} dr + \frac{\beta_\theta}{\sin \theta} d\theta + \sin \theta \beta_\varphi d\varphi,$$

$$d^* \alpha = -(\partial_x \alpha_x + \partial_y \alpha_y + \partial_z \alpha_z) =$$

$$= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(2r \sin^2 \theta \alpha_r + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \alpha_r}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \alpha_\theta + \sin^2 \theta \frac{\partial \alpha_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \alpha_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

Cvičení 12.3. Uvažujme Maxwellovy rovnice ve vakuu v integrálním tvaru

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \text{ (Faraday)}, \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (12.17)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \text{ (Gauss)}, \quad \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \text{ (Ampér)}. \quad (12.18)$$

Ve stacionárním, tj. na čase nezávislém, i v nestacionárním případě запиšte Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru v podobě nezávislé na výběru souřadného systému (a tedy připouštějící i zakřivený prostor(očas)).

Návod. Ve stacionárním případě je využitím Stokesovy věty první série Maxwellových rovnic plně geometrická, (12.17) implikuje, že vektorovému poli magnetické indukce $\vec{B}$ odpovídá uzavřená 2-forma $B \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ a vektorovému poli intenzity elektrického pole $\vec{E}$ uzavřená 1-forma $E \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, předpis

$$E = \flat(\vec{E}) = E^x dx + E^y dy + E^z dz, \quad B = *\flat(\vec{B}) = B^x dy \wedge dz + B^y dz \wedge dx + B^z dx \wedge dy.$$

viz též cvičení 6.1. Pro druhou sérii (12.18) pak potřebujeme využít Hodgeovy duály. Pokud vektoru elektrického proudu $\vec{j} \in \mathcal{X}(M)$ přiřadíme odpovídající 1-formu $j \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, nacházíme úplnou sadu stacionárních Maxwellových rovnic ve tvaru

$$dB = 0, \quad dE = 0, \quad d^* E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad d^* B = \mu_0 j.$$

(Proveďte explicitním výpočtem v kartézských souřadnicích.)

V nestacionárním případě naše pole nelze chápat jako vektorová pole na prostoru $\mathbb{R}^3$, neboť závisí i na čase. Proto pro popis využijeme jako varietu Minkowského prostoročas $M = \mathbb{R}^{1,3}[t, x, y, z]$ s odpovídající Minkowského metrikou

$$g_{\text{Mink}} = dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz,$$

kde pro jednoduchost předpokládáme, že vhodnou volbou jednotek máme $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 1$. První série Maxwellových rovnic se pak dá ekvivalentně přepsat v podobě $dF = 0$, kde 2-forma elektromagnetického pole je dána předpisem $F = B + E \wedge dt \in \Omega^2(M)$ a E, B jsou ze složek vektorů $\vec{E} = (E^x, E^y, E^z)$ a $\vec{B} = (B^x, B^y, B^z)$ definovány v kartézských prostorových souřadnicích stejně jako výše. Ověřte, že skutečně

$$dF = 0$$

v důsledku Maxwellových rovnic (12.17) a Stokesovy věty.

Druhá série Maxwellových rovnic se dá kompaktně zapsat ve tvaru

$$d^*F = \mu_0 j,$$

kde 1-forma čtyřproudu j je dána diskretním či spojitým rozložením nábojů a jejich rychlostmi. Máme-li náboje rozložené spojitě s klidovou hustotou $\rho_0(t, \vec{x})$ (tj. hustotou v lokálním souřadném systému pohybujícím se s náboji), rychlost nábojů v globálních souřadnicích je $\vec{v}(t, \vec{x})$ a definujeme $\gamma(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2(t, \vec{x})}}$, pak máme

$$J = \rho_0 \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \rho_0 \gamma \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \in \mathcal{X}(M), \quad j = \flat \left(\rho_0 \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \rho_0 \gamma \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) \in \Omega^1(M).$$

Rejstřík

- $C^\infty(M)$ -modul, 29
- C^k -kompatibilní, 4
- k -forma v bodě, 24
- řetězec
 - simpliciální, 58
 - singulární, 57
- řez fibrovaného prostoru, 13
- 1-forma
 - kanonická, 44
- 1-forma v bodě, 23
- 2-forma
 - kanonická (Cartanova-Poincaré), 44
 - symplektická, 44
- 2-forma
 - nedegenerovaná, 44
- algebra, 18
 - asociativní, 18
 - derivace, 19
 - komutativní, 18
 - Lieova, 18
 - nosič, 18
- atlas, 3
 - maximální, 4
- Cartanův vzorec, 42
- derivace, 19
- difeomorfismus, 5
 - zachovávající orientaci, 51
- Diferenciální 1-forma, 24
- diferenciální k -forma, 25
- diferenciální forma, 26
 - exaktní, 31
 - uzavřená, 31
- diferencovatelná struktura, 4
- diferencovatelná varieta, 4
- fibrovaný prostor, 13
 - řez, 13
 - báze, 13
 - Hopfova fibrace, 22
 - kotečný, 23
 - lokální řez, 13
 - lokální trivializace, 13
 - přechodová funkce na vlákne, 13
 - projekce, 13
 - tečný, 13
 - triviální, 14
 - typické vlákno, 13
 - vektorový, 13
 - vlákno nad bodem, 13
 - zobrazení, 14
- hladká varieta, 4
- Hodgeův duál, 65
- integrál z formy
 - na varietě, 52
 - při parametrizaci, 51
- integrální křivka, 14
- kanonické zobrazení, 46
- koderivace, 66
- komplexní projektivní prostor, 6
- konexe, 64
 - Levi-Civitova, 65
- kotečné zobrazení, 34
- kotečný prostor, 23
- kovariantní derivace, 64
- Lieova derivace
 - formy, 39
 - vektorového pole, 39
- Lieova závorka, 18
- lokální grupa transformací, 46
- lokální souřadnice, 3
- lokálně konečné, 3
- mapa, 3
- metrika, 63
 - indukovaná, 63
 - lorentzovská, 63
 - riemannovská, 63

- multiindex, 25
- operátor hranice, 57
- orientace
 - variety, 51
 - vektorového prostoru, 50
- přechodová funkce, 4
 - na vlákně, 13
- podvarieta
 - vložená, 36
 - vnořená, 36
- Poincaréovo lemma, 60
- Poissonova závorka, 47
- pullback, 35
- reálný projektivní prostor, 6
- rozklad jednotky, 52
- simplex
 - singulární, 57
 - standardní, 57
- souřadnice
 - Darbouxovy, 45
- stereografické projekce, 6
- sumační konvence, 8
- symplektická forma, 44
- tečné zobrazení, 34
- tečný bundle, 13
- tečný vektor, 7, 8
 - derivace ve směru, 7
- tenzor, 63
 - křivosti, 65
 - kontravariantní, 40
 - kovariantní, 40
 - torze, 64
- tenzorové pole, 63
- tenzorový součin, 62
- tok vektorového pole, 14
- topologický prostor
 - Hausdorffův, 3
 - parakompaktní, 3
- věta
 - Darbouxova, 45
 - Stokesova, 58
 - Stokesova pro řetězce, 58
- varieta
 - orientovatelná, 51
 - symplektická, 44
- vektorové pole, 14
 - úplné, 14
 - hamiltonovské, 45
 - lokálně hamiltonovské, 45
 - tok, 14
- vložení, 36
- vnější derivace, 29
- vnitřní součin, 31
- vnoření, 36
- zúžení, 31
- zjemnění, 3
- zobrazení
 - hladké, 4

Literatura

- [1] Marián Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, IRIS 2004, 2008
- [2] Theodore Frankel: *The Geometry of Physics*, Cambridge University Press 1999, 2003, 2011
- [3] Jürgen Jost: *Geometry and Physics*, Springer 2010
- [4] S. Helgason: *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces (Graduate Studies in Mathematics)*, American Mathematical Society 2001
- [5] Roger Penrose: *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Knopf 2005