02LIAG - Lieovy algebry a grupy

podle přednášky doc. Ing. Libora Šnobla, Ph.D.

September 16, 2021

Úvod

První verze tohoto skripta vznikla především na základě ručně psaných poznámek k přednáškám a cvičením od doc. Ing Libora Šnobla, Ph.D. a dále podle přednášek z roku 2014/2015. Text byl původně zamýšlen pouze pro vlastní potřebu a usnadnění orientace na přednáškách, proto není striktně dbáno na důslednost značení.

První verzi zápisků vytvořil Jan Vábek.

Aktualizace v roce 2015/2016 byla provedena na základě aktuálních poznámek z tohoto roku a ručně psaných poznámek doc. Šnobla. Byl doplněn kompletní obsah přednášky a některé části cvičení. Pořád chybý většina obsahu cvičení.

Obsah

1 Definice Lieovy grupy a Lieovy algebry **4**

2 Vztah mezi Lieovou grupou a její algebrou **7**
2.1 Exponenciální zobrazení . . . 7
2.2 Vyšetřování souvislosti variet . . . 8
2.3 Tok levoinvariantního vektorového pole . . . 10
2.4 Vlastnosti homomrfismů (cvičení) . . . 11

3 Nástin teorie integrabilních distribucí **13**

4 Akce grupy na varietě **14**

5 Reprezentace Lieových grup a algeber **15**

6 Souvislost Lieových grup a algeber **16**
6.1 Konstrukce univerzálního nakrytí . . . 16

7 Lieovy algebry **18**
7.1 Charakteristické série ideálů . . . 18
7.2 Vlastnosti ideálů (cvičení) . . . 19
7.3 Derivace . . . 20
7.4 Vztah reálných a komplexních algeber . . . 21
7.5 Zobrazení Lieových algeber nad stejným tělesem . . . 21
7.6 Killingova forma . . . 21
7.7 Nilpotentní a řešitelné algebry . . . 22
7.8 Vlastnosti konečněrozměrných operátorů . . . 23
7.9 Věty Lieova a Engelova . . . 23

8 Cartanova kritéria **28**
8.1 Cartanova podlagebra . . . 30
8.2 Shrnutí pro poloprosté Lieovy algebry . . . 33

9 Klasifikace pomocí kořenů **34**

10 Kořenové diagramy, Cartanova matice **37**

11 Dynkinovy diagramy **39**

12 Reálné formy komplexních poloprostých algeber **44**

13 Význam kompaktních Lieových grup **46**

14 Reprezentace poloprostých Lieových algeber **48**
14.1 Konstrukce reprezentací . . . 50

15 Spinorové reprezentace **53**

16 Symetrie v QM **55**
16.1 Izospin . . . 55
16.2 $\mathfrak{su}(3)$ . . . 55

17 Cvičení **59**

1 Definice Lieovy grupy a Lieovy algebry

Definice 1. Lieova grupa je diferencovatelná varieta G vybavená navíc zobrazením $\cdot : G \times G \to G$ takovým, že $(G, \cdot)$ je grupa a zobrazení $\cdot$ a $(\cdot)^{(-1)}$ jsou hladká.

Poznámka 1. Podle V. Hilbertova problému postačuje $\cdot$ a $(.)^{-1}$ spojité, G topologický prostor lokálně homomorfní $\mathbb{R}^n$, z toho už plyne hladkost. Bez důkazu.

Příklad 1. $G = GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} | \det A \neq 0\}$ je Lieova grupa ($\cdot$ je násobení matic), $\dim GL(n, \mathbb{R}) = n^2$.

Zobrazení $\det : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n,n}, \mathbb{R})$, G je tedy podmnožina $\mathbb{R}^{n,n}$ a varieta protože platí $G = \det^{(-1)}(\mathbb{R} \backslash \{0\}) = GL(n, \mathbb{R})^\circ$. Podmínka hladkosti na $\cdot$ a $()^{-1}$ plyne z $(AB)^i{}_j = A^i{}_k B^k{}_j$ a $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\mathrm{adj}}$.

Poznámka 2. $GL(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n,n} = \mathbb{C}^{n \cdot n} = \mathbb{R}^{2n \cdot n}, \dim GL(n, \mathbb{C}) = 2n^2$

Definice 2. Maticové Lieovy grupy jsou podgrupy $GL(n, \mathbb{R})$ nebo $GL(n, \mathbb{C})$.[1]

Příklad 2. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | \det A = 1\}$ je maticová Lieova grupa.

Splnění podmínky pro varietu je přímo vidět z rovnice $\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n A_{i,\pi(i)} = 1$ (A_{ij} značí prvky matice A). Pro $n = 2$ lze změnou báze převést podmínku dokonce na kvadriku $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - 1 = 0$ v $\mathbb{R}^4$. Že se jedná o podgrupu je zřejmé z $\det(AB^{-1}) = \frac{\det A}{\det B} = 1$, tj. $AB^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$.

Poznámka 3. Význačné difeomorfismy na G jsou pro $g \in G$ $L_g, R_g : G \to G$ definované $L_g h = gh$, $R_g h = hg$, $\forall h \in G$. Nazývají se **levé** a **pravé translace**.

Definice 3. Levoinvariantní a **pravoinvariatní vektorová pole** $X \in \mathcal{X}(G)$ jsou vektorová pole splňující $X = L_{g*}X$, $X = R_{g*}X$.

Poznámka 4. Bodově předchozí definice znamená $X|_{gh} = L_{g*}(X|_h)$, resp. $X|_{hg} = R_{g*}(X|_h)$, $\forall g, h \in G$.

Poznámka 5. Levoinvariantní vektorové pole je jednoznačne určeno tečnými vektory v libovolném pevně zvoleném bodě $g \in G$ (obvykle se volí e), tj. $X|_g = L_{g*}(X|_e)$ protože $L_g \cdot L_h = L_{gh}$, $L_{g*} \cdot L_{h*} = L_{gh*}$.

Věta 1. Vektorový prostor levoinvariantních vektorových polí $\mathfrak{g} \subset\subset \mathcal{X}(G)$ je izomorfní T_eG, tj. $\mathfrak{g} \simeq T_eG$.

Důkaz. Mějme $\tilde{X} \in T_eG$, pak $X : G \to TG$, $X(g) = L_{g*}(\tilde{X})$, tj. $X_g \in T_gG$. Použitím

$$\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \to G, a < 0 < b, \dot{\gamma}(0) = \tilde{X} \quad \Rightarrow \quad \varphi(g, t) = g \cdot \gamma(t) = L_g(\gamma(t)) \in \mathcal{C}^\infty$$

je díky hladkosti φ vidět, že $X(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \varphi(g, t) \in T_gG$ závisí na g hladce:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \varphi(g, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} L_g(\gamma(t)) = L_{g*} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \gamma(t) = L_{g*}(\tilde{X})$$

□

Při výpočtech tak mohou vzniknout nejasnosti ve značení, kdy symbolem $X \in \mathfrak{g}$ můžeme značit vektorové pole na G nebo pouze vektor z T_eG. V příkladech, kde budeme tyto pojmy ilustrovat v praxi, budeme tyto pojmy rozlišovat. (Obvykle X vektorové pole, $X|_g$ vektor v bodě g, $X(g)$ jeho složky). Jinak budeme za prvky $\mathfrak{g}$ považovat vektory z T_eG, protože je s nimi jednodušší práce než s vektorovými poli (v případě maticových grup se výpočty zjednoduší na počítání s maticemi).

[1] S grupami, které nejsou maticové se v LIAG přímo nesetkáme, ale že tento pojem není prázdný ukazuje existence Lieovy grupy, která není maticová (viz `http://en.wikipedia.org/wiki/Metaplectic_group`).

Poznámka 6. Připomenutí, kotečné zobrazení působí na funkce $(\phi^* f)(p) = (f \circ \phi)(p)$. Lze tak ekvivalentně definovat tečné zobrazení $(\phi_* X)(f) = X(\phi^* f)$.

Věta 2. Levoinvariantní pole splňuje $L_g^* \circ X = X \circ L_g^*$.

Důkaz. Pro $\psi : M \to N$, $p \in M$, $X \in T_pM$, $f \in C^\infty(N)$ platí:

$$\psi_*(X)f = X(f \circ \psi) = X(\psi^*(f)) = (X \circ \psi^*)f.$$

Tudíž pro L_{g*}, $X \in \mathfrak{g}$ platí:

$$\begin{aligned} L_{g*}(\left.X\right|_h)f &= (\left.X\right|_h \circ L_g^*)f = \Big((X \circ L_g^*)f\Big)(h) \\ &= \left.X\right|_{gh} f = (Xf)(gh) = (Xf)(L_g h) = \Big(L_g^*(X(f))\Big)(h) = \Big((L_g^* \circ X)f\Big)(h) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad X \circ L_g^* = L_g^* \circ X.$$ □

Důsledek 1. $L_g^* \circ [X, Y] = [X, Y] \circ L_g^*$.

Důkaz.

$$L_g^* \circ [X, Y] = L_g^* \circ X \circ Y - L_g^* \circ Y \circ X = X \circ L_g^* \circ Y - Y \circ L_g^* \circ X = X \circ Y \circ L_g^* - Y \circ X \circ L_g^* = [X, Y] \circ L_g^*$$

□

Definice 4. $\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{X}(G) | X = L_{g*}X\}$ nazýváme **Lieova algebra Lieovy grupy** G.

Definice 5. **Lieova algebra** $(A, \oplus, \odot, [\cdot, \cdot])$ je vektorový prostor $(A, \oplus, \odot)$ vybavený bilineárním zobrazením $[\cdot, \cdot] : A \times A \to A$ splňujícím:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$, $\forall X, Y \in A$,
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, $\forall X, Y, Z \in A$ (Jacobiho identita).

$[\cdot, \cdot]$ se nazývá **Lieova závorka**.

Definice 6. Uvažujme bázi (X_i) prostoru A, $[\cdot, \cdot]$ je určena působením na bazické vektory, $[X_i, X_j] = c_{ij}{}^k X_k$. $c_{ij}{}^k$ se nazývají **strukturní konstanty**, splňují

$$c_{ij}{}^k = -c_{ji}{}^k\,, \qquad\qquad c_{il}{}^m c_{jk}{}^l + c_{jl}{}^m c_{ki}{}^l + c_{kl}{}^m c_{ij}{}^l = 0\,. \tag{1}$$

Poznámka 7. Pro maticové Lieovy grupy jsou Lieovy algebry vektorové prostory matic odpovídající dimenze a Lieova závorka je komutátor matic.

Tečné vektory z $\mathfrak{gl}$ jsou v souřadnicovém zápisu $X_i^j \partial_j^i|_e$ (standardní báze v GL). U maticových grup tak máme navíc operaci skládání prvků z $\mathfrak{gl}$ a dokonce můžeme i násobit prvky z $\mathfrak{gl}$ a GL. Ukáže se, že v praktických výpočtech si tím usnadníme dost práce oproti obecným Lieovým grupám a algebrám, kde takové operaco vůbec k dispozici nemáme.

Příklad 3. Afinní transformace $Af(1)$ na $\mathbb{R}$. $Af(1) = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, (x, y)(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x\tilde{x}, x\tilde{y} + y))$. Tato struktura lze zapsat maticově (operace násobení matic) $Af(1) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R} \right\}$.

Lieova algebra se určí z požadavku na levoinvariantnost obecného vektorového pole v $e = (1, 0)$, tj. uvažujeme pole ve tvaru $X|_e = \alpha \partial_x|_e + \beta \partial_y|_e$. Aplikováním tohoto požadavku

$$\left.X\right|_{(a,b)} f = L_{(a,b)*} \left.X\right|_{(1,0)} f = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right) f(ax, ay + b)|_{(x,y)=(1,0)} = a \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)|_{(a,b)} + \beta \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)|_{(a,b)}\right)$$

, zjistíme, že $X = \alpha x \partial_x + \beta x \partial_y$. Tedy Lieova algebra je $\mathfrak{af}(1) = \operatorname{span}\{X_1, X_2\}$, $X_1 = x\partial_x$, $X_2 = x\partial_y$, protože $[X_1, X_2] = X_2$ je $\mathfrak{af}(1)$ uzavřená a tedy je to skutečně algebra.

V případě matic máme $\mathfrak{af}(1) = T_e Af(1) \ni \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, takže $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $X_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Příklad 4. Maticové grupy.

Uvažme maticovou grupu $G \ni g$ (za souřadnice považujeme složky matice g^i_j). Podobně jako v minulém příkladě najdeme jak vypadá obecné levoinvariantní vektorové pole X, které je určeno hodnotou v e, tj. $X|_e = \alpha^i_j \partial^j_i|_e$, v obecném bodě $X|_g = X^i_j(g)\partial^j_i|_g$. Buď $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, $f = f(x^i_j)$. Podmínka levoinvariance:

$$X^i_j(g)\partial^j_i|_g f = X|_g f = (L_{g*}X|_e)f = X|_e(f \circ L_g) = \alpha^m_l \partial^l_m f(g^i_k x^k_j) =$$
$$= \alpha^m_l \left.\frac{\partial f}{\partial x^o_p}\right|_g \frac{\partial(g^o_k x^k_p)}{\partial x^m_l} = \alpha^m_l g^o_k \left.\frac{\partial f}{\partial x^o_p}\right|_g \delta^k_m \delta^l_p = \alpha^k_j g^i_k \left.\frac{\partial f}{\partial x^i_j}\right|_g = g^i_k \alpha^k_j \partial^j_i|_g f.$$

Takže $X^i_j(g) = g^i_k \alpha^k_j$.

2 Vztah mezi Lieovou grupou a její algebrou

Definice 7. (Homomorfismus Lieových grup G a H)

- **Homomorfismus** G **a** H je libovolné hladké $\phi : G \to H$, $\phi(g \cdot_G h) = \phi(g) \cdot_H \phi(h)$, $\forall g, h \in G$.
- **Izomorfismus** G **a** H je bijektivní homomorfismus s hladkou inverzí.

Definice 8. **Jednoparametrická podgrupa v** G je homomorfismus $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to G$.

Důsledek 2. Platí $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t) = \varphi(t)\varphi(s)$, tedy nutně $\varphi(0) = e$.

Příklad 5. G Maticová grupa:

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= g(t) \cdot \underbrace{\dot{g}(0)}_{konst.} = L_{g(t)*}(\dot{g}(0)) \\ &= \dot{g}(0) \cdot g(t) = R_{g(t)*}(\dot{g}(0)) \end{aligned}$$

Poznámka 8. Obecně:

$$g(s+t) = g(t)g(s) \equiv L_{g(t)}g(s) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\dot{g}(t)}_{T_{g(t)}G} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_0 \left(L_{g(t)}g(s)\right) = L_{g(t)*} \underbrace{\in \dot{g}(0)}_{T_e G}$$

Označíme-li pro $X \in \mathfrak{g}$, $X|_e = \dot{g}(0)$, pak $\dot{g}(t) = L_{g(t)*}(X|_e) = X|_{g(t)}$.

Důsledek 3. Jednoparametrické podgrupy jsou integrální křivky levoinvariantních vektorových polí, tj. elementů Lieovy algebry, vycházející z e.

2.1 Exponenciální zobrazení

Na základě integrálních křivek můžeme definovat zobrazení $\mathfrak{g} \to G$, které danému vektoru $X|_e \in \mathfrak{g}$ přiřadí nějaký bod na příslušné integrální křivce levoinvariantního vektorového pole X, ke kterému je $X|_e$ tečným vektorem.

Definice 9. $\exp : \mathfrak{g} \to G$ definujeme $\exp(tX) = \varphi(t)$, $\exp(X) = \varphi(1)$, kde φ je jednoparametrická podgrupa generovaná $X \in \mathfrak{g}$ (integrální křivka $X \in \mathfrak{g}$).

Poznámka 9. $\exp =: \mathrm{e}$ tedy splňuje $\varphi(t+s) = \mathrm{e}^{(t+s)X} = \varphi(t)\varphi(s) = \mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sX}$.

Příklad 6. Exponenciela $\mathfrak{af}(1) \to Af(1)$.

Hledáme integrální křivky vektorového pole z příkladu 3. Pro libovolné levoinvariantní pole jsou rovnice integrálních křivek $\dot{x}(t) = \alpha x(t)$ a $\dot{y}(t) = \beta x(t)$ s počátečními podmínkami $(x(0), y(0)) = (1, 0)$, řešením je $(x(t), y(t)) = \left(\mathrm{e}^{\alpha t}, \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t} - 1)\right)$. Exponencielu získáme dosazením $t = 1$, tj. $\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{\alpha x \partial_x + \beta x \partial_y} = (\mathrm{e}^\alpha, \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^\alpha - 1))$ (pro $\alpha = 0$ vyjde výsledek stejně jako provedením $\lim_{\alpha \to 0}$).

V maticovém vyjádření je pole $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, platí $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & \alpha^{k-1}\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, takže získáme $\exp\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!}, & \frac{\beta}{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^\alpha, & \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^\alpha - 1) \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 7. Exponenciela maticových grup G.

Hledáme integrální křivku $\gamma(t)$ levoinvariantního vektorového pole, určenou $X \in \mathfrak{g}$. Jak toto pole vypadá víme z příkladu 4 (značení převezmeme z tohoto příkladu, tj. $X^i_j(e) = \alpha^i_j$). Máme tak pro složky pole $X^i_j(\gamma(t)) = \gamma^i_k(t) X^k_j(e)$. Rovnice pro integrální křivky tohoto pole je

$$\dot{\gamma}^i_j(t) = \gamma^i_k(t) X^k_j(e), \quad \gamma^i_j(0) = \delta^i_j, \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\gamma}(t) = \gamma(t) X(e), \quad \gamma(0) = \mathbb{1}. \tag{2}$$

Z maticového zápisu vidíme, že řešením je maticová exponenciela $\gamma(t) = \mathrm{e}^{tX(e)}$, výsledkem je $\mathrm{e}^X = \gamma(1) = \mathrm{e}^{X(e)}$.

Věta 3. Pro libovolnou čtvercovou matici A platí: $\in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, potom $\det e^A = e^{\mathrm{Tr} A}$.

Důkaz. Předpokládame, že $\exists B$, tak, že $D = BAB^{-1}$ diagonální (diagonalizovatelné matice jsou husté v množine všech matic a obě strany rovnice jsou spojité $\Rightarrow$ platí obecně).

$$\mathrm{Tr} D = \mathrm{Tr} BAB^{-1} = \mathrm{Tr} AB^{-1}B = \mathrm{Tr} A$$

Platí $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$ z definice pomocí řady, proto $\det e^D = \det B \det B^{-1} \det e^A = \det e^A$, a protože $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \Rightarrow \quad e^D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$, tedy

$$\det e^D = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k} = e^{\sum_k \lambda_k} = \exp(\mathrm{Tr} D).$$

□

Věta 4. Buď G Lieova grupa, pak $\exp : \mathfrak{g} \to G : X \to e^X$ je lokální difeomorfismus okolí $0 \in \mathfrak{g}$ na okolí $e \in G$. (Toto zobrazení není obecně surjektivní ani injektivní na celé G).

Důkaz. $\mathfrak{g}$ jako vektorový prostor lze chápat jako varietu, $T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \exp$ je hladké zobrazení variet. $\exp_*|_0 : T_0\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \equiv T_e G, \exp(tX)$ je integrálí křivka procházející e, s tečným vektorem $X \quad \Rightarrow \quad \exp_*|_0 = \text{identita} \quad \Rightarrow$ podle věty o inverzní funkci je exp lokální difeomorfismus. Detailně: $\exp : X \to e^X$

$$\exp_*(X|_0) f = \lim_{t \to 0} \frac{f(e^{tX+0}) - f(e^0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(e^{tX}) - f(e)}{t} \overset{\text{def.}}{=} Xf|_e$$

$\Rightarrow \quad \exp_*(X|_0) = \exp_*(X)\big|_e = X|_e.$ □

Poznámka 10. Pro matice platí: $\exp_*(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tX})\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 + tX + O(t^2)\right)\Big|_{t=0} = X.$

Poznámka 11. Je zřejmé, že exp nemůže být surjektivní pro grupy s více komponentami souvislosti (nelze spojit křivkou body z různých komponent). exp není obecně surjektivní ani pro souvislé G, pouze v případě, že je G kompaktní.

2.2 Vyšetřování souvislosti variet

Definice 10. Buďte $V \subset M$ dif. variety (V podvarieta M). V je **deformační retrakt** M právě tehdy, když $\exists\, r : \langle 0, 1 \rangle \times M \to M$ spojité, takové že

- $\forall m \in M, r(0, m) = m,$
- $\forall v \in V, \forall t \in \langle 0, 1 \rangle$: $r(t, v) = v,$
- $\forall m \in M, r(1, m) \in V.$

Definice 11. Souvislá varieta M je jednoduše souvislá právě tehdy, když platí:

- $\forall \gamma : \langle 0, 1 \rangle \to M$, spojité, $\gamma(0) = \gamma(1)$
- $\exists \phi : \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \to M$, spojité takové, že $\forall t \in \langle 0, 1 \rangle$, $\phi(0, t) = \gamma(t)$, $\phi(1, t) = \gamma(0)$

Věta 5. V je deformační retrakt M, pak

- M souvislá $\Leftrightarrow$ V souvislá,
- M jednoduše souvislá $\Leftrightarrow$ V jednoduše souvislá.

Důkaz. Souvislost zřejmá. Jednoduchá souvislost plyne z toho, že pro křivky platí $\gamma_V(t) = r(1, \gamma_M(t))$. □

Poznámka 12. Souhrnné pojednání o souvislosti námi používaných grup je v *The American Mathematical Monthly* Vol. 74, No. 8 (Oct., 1967), pp. 964-966.[2]

Příklad 8. $SL(2,\mathbb{R}) = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)$, $xw - zy = 1$ není jednoduše souvislá.

Lze ji zdeformovat na $SO(2)$: Nejprve definujeme V_1 tak, aby

$$\forall \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \tilde{z} & \tilde{w} \end{pmatrix} \in V_1,\ \tilde{x}^2 + \tilde{z}^2 = 1,\ \tilde{x}\tilde{w} - \tilde{z}\tilde{y} = 1.$$

Položíme $r_1\left(t, \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \alpha(t)x & \frac{1}{\alpha(t)}y \\ \alpha(t)z & \frac{1}{\alpha(t)}w \end{pmatrix}$, kde $\alpha(0) = 1$ a pro $\alpha(1)$ platí $\alpha^2(1)\left(x^2+z^2\right) = 1$. Zvolime proto $\alpha(t) = \frac{1}{(x^2+z^2)^{t/2}}$ a $V_1 = \operatorname{Im} r_1(1,.) \subset SL(2,\mathbb{R})$ už splňuje požadavky. Dále zdeformujeme V_1 tak, aby sloupce byly ortonormální vektory:

$$r_2\left(t, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - t\,(xy+zw)\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \operatorname{Im} r_2(1,.) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Sl(2,\mathbb{R}) \middle| x^2+z^2 = 1,\ xy+zw = 0 \right\}$$

$$xy + zw = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{zw}{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} xw - zy &= -\tfrac{zw^2}{y} - zy = 1 &&\Rightarrow w^2+y^2 = -\tfrac{y}{z} \\ x^2+z^2 &= \tfrac{z^2w^2}{y^2} + z^2 = 1 &&\Rightarrow w^2+y^2 = \tfrac{y^2}{z^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad w^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad V_2 = SO(2) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right) \middle| \theta \in \langle 0, 2\pi\rangle\right\}$ souvislá a topologicky eqvivalentní S^1. $SL(2,\mathbb{R})$ je tedy souvislá, ale není jednoduše souvislá.

Podíváme se ještě na $\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R})$.

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x^2+yz & 0 \\ 0 & zy+x^2 \end{pmatrix} = -\det A \cdot \mathbb{1}$$

$$e^A = \begin{cases} \cos\det A \cdot \mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{\det A}} \sin\sqrt{\det A} \cdot A & \det A > 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr} e^A = 2\cos\sqrt{\det A} \in \langle -2, 2\rangle \\ \cosh\sqrt{|\det A|} \cdot \mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{|\det A|}} \sinh\sqrt{|\det A|} \cdot A & \det A < 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr} e^A = 2\cosh\sqrt{|\det A|} \geqslant 2 \\ \mathbb{1} + A & \det A = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr} e^A = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{Tr} e^A \geqslant -2,\ \forall A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad$ např. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \setminus \exp\left(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\right)$.

Důsledek 4. G nemusí být celé pokryté exponenciélou, pokud je jen souvislé. Pro G jednoduše souvislé to už platí. Bez důkazu.

Poznámka 13. Lze ukázat, že $SL(n,\mathbb{R})$ není jednoduše souvislá $\forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 6. Buď G souvislá Lieova grupa, $g \in G$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ takové, že $g = e^{X_1} e^{X_2} \ldots e^{X_n}$.

Důkaz. Mějme $e \in U_0 = U_0^\circ \subset G$. Předpokládame $(.)^{-1} : U_0 \to U_0$ (jinak bereme $\tilde{U}_0 = U_0 \cap U_0^{-1}$, kde $U_0^{-1} = \{g^{-1} | g \in U_0\}$). Konstruujeme $U_i = \bigcup_{g \in U_{i-1}} gU_0$, zřejmě $U_i \subset U_i + 1$ a protože $L_g(U_0) = \left(L_g(U_0)\right)^\circ$, je taky $U_i = U_i^\circ$. Označme $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} U_i$, pak $U = U^\circ$ a pro $V = G \setminus U$ platí $V = \overline{V}$. Chceme ukázat, že $\forall g \in V$, $gU_0 = L_g(U_0) = \left(L_g(U_0)\right)^\circ \subset V$. Sporem: $L_g(U_0) \cap U \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists u_0 \in U_0,\ gu_0 \in U \quad \Rightarrow \quad g \in Uu_0^{-1} \subset U$, protože $U_i u_0^{-1} \subset U_i u_0 \subset U_{i+1} \subset U$, spor. $\Rightarrow \quad V = V^\circ \quad \Rightarrow \quad U = \overline{U},\ e \in U \quad \Rightarrow \quad U \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad U = G$ □

[2] `http://www.jstor.org/stable/2315278`

2.3 Tok levoinvariantního vektorového pole

Věta 7. Tok generovaný levoinvariatním X (tj. $X \in \mathfrak{g} \cong T_eG$) je jednoparametrická grupa pravých translací, tj.

$$\Phi^t_X(g) = g\mathrm{e}^{tX} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi^t_X = R_{\mathrm{e}^{tX}}\,.$$

Důkaz. Pro $X \in \mathfrak{g}$ je $X|_e \in T_eG$ a e^{tX} je integrální křivka procházející e. Ukážeme, že integrální křivka tohoto pole procházející g je $g\mathrm{e}^{tX}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g\mathrm{e}^{tX} = L_{g*} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{tX} = L_{g*}\, X|_e = \left. X\right|_g,$$

tj. $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$.

$$\begin{aligned} \gamma(0) = e \quad &\Rightarrow \quad \gamma(t) = \mathrm{e}^{tX} \\ \gamma(0) = g \quad &\Rightarrow \quad \gamma(t) = g\mathrm{e}^{tX} = L_g\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = R_{\mathrm{e}^{tX}}(g) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \Phi^t_X = R_{\mathrm{e}^{tX}}$ □

Důsledek 5. $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathcal{X}(G)$, $Y \circ R^*_g = R^*_g \circ Y$, potom $[X, Y] = 0$. (To znamená, že levoinvariantní a pravoinvariantní pole komutují.)

Důkaz.

$$\begin{aligned} [X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\big((Yf)\circ R_{\mathrm{e}^{tX}} - Yf - Y(f\circ R_{\mathrm{e}^{tX}}) + Yf\big) = \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\big((R^*_{\mathrm{e}^{tX}}\circ Y)f - (Y\circ R^*_{\mathrm{e}^{tX}})f\big) = 0 \end{aligned}$$

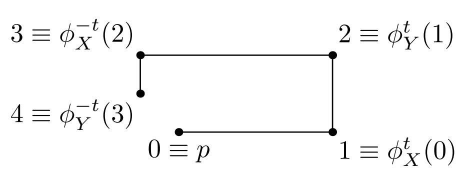
□

Věta 8. M dif. varieta, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, Φ^X_t, Φ^Y_t jejich toky, $p \in M$. Potom

$$([X,Y]f)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\sigma(t)) - f(p)}{t^2},$$

kde $\sigma(t) = (\Phi^Y_{-t}\circ\Phi^X_{-t}\circ\Phi^Y_t\circ\Phi^X_t)(p)$, tedy $\sigma(0) = p$.

Důkaz. Pro jednoduchost zavedeme následující značení:



$$f(4) - f(0) = \big(f(4) - f(3)\big) + \big(f(3) - f(2)\big) + \big(f(2) - f(1)\big) + \big(f(1) - f(0)\big)$$

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= tXf(0) + \frac{t^2}{2}X(Xf)(0) + O(t^3) \\ f(2) - f(1) &= tYf(1) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(1) + O(t^3) \\ f(3) - f(2) &= -tXf(2) + \frac{t^2}{2}X(Xf)(2) + O(t^3) \\ f(4) - f(3) &= -tYf(3) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(3) + O(t^3) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Xf(0) - Xf(2) &= Xf(0) - Xf(1) + Xf(1) - Xf(2) = -tX(Xf)(0) - tY(Xf)(1) + O(t^2) = \\
&= -tX(Xf)(0) - tY(Xf)(0) + O(t^2) \\
Yf(1) - Yf(3) &= Yf(1) - Yf(2) + Yf(2) - Yf(3) = -tY(Yf)(1) + tX(Yf)(2) + O(t^2) = \\
&= -tY(Yf)(0) + tX(Yf)(0) + O(t^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(4) - f(0) = -t^2X(Xf)(0) - t^2Y(Xf)(0) - t^2Y(Yf)(0) + t^2X(Yf)(0) + \\
+ \frac{t^2}{2}X(Xf)(0) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(0) + \frac{t^2}{2}X(Xf)(0) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(0) + O(t^3) = \\
= t^2\big(X(Yf) - Y(Xf)\big)(0) + O(t^3)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\big(f(\sigma(t)) - f(p)\big) = \left[X(Yf) - Y(Xf)\right](p)
$$

□

Důsledek 6. $X, Y \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad [X,Y]f(p) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\Big(f\big(R_{e^{-tY}}R_{e^{-tX}}R_{e^{tY}}R_{e^{tX}}(p)\big) - f(p)\Big)$

Důsledek 7. Pro maticové grupy tak platí $[X,Y]|_e = XY - YX$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

Důkaz. $e = \mathbb{1}$, $R_{e^{-tY}}R_{e^{-tX}}R_{e^{tY}}R_{e^{tX}}(\mathbb{1}) = e^{tX}e^{tY}e^{-tX}e^{-tY}$

$$
[X,Y]f(e) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\Big(f\left(e^{tX}e^{tY}e^{-tX}e^{-tY}\right) - f(\mathbb{1})\Big) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big(f\left(e^{\sqrt{t}X}e^{\sqrt{t}Y}e^{-\sqrt{t}X}e^{-\sqrt{t}Y}\right) - f(\mathbb{1})\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\left(e^{\sqrt{t}X}e^{\sqrt{t}Y}e^{-\sqrt{t}X}e^{-\sqrt{t}Y}\right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\left(\left(\mathbb{1} + \sqrt{t}X\right) + \frac{t}{2}X^2\right)\left(\left(\mathbb{1} + \sqrt{t}Y\right) + \frac{t}{2}Y^2\right) \times \\
\times \left(\left(\mathbb{1} - \sqrt{t}X\right) + \frac{t}{2}X^2\right)\left(\left(\mathbb{1} - \sqrt{t}Y\right) + \frac{t}{2}Y^2\right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\left(\mathbb{1} + t\left(XY - YX\right) + O(\sqrt{t}^3)\right) = XY - YX
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad [X,Y]f(\mathbb{1}) = \underbrace{(XY - YX)}_{\text{maticové násobení}} f(\mathbb{1}) \quad \Rightarrow \quad [X,Y]|_{\mathbb{1}} = X|_{\mathbb{1}}\, Y|_{\mathbb{1}} - Y|_{\mathbb{1}}\, X|_{\mathbb{1}}
$$

□

Poznámka 14. G Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ Lieova algebra, $\mathfrak{h}$ podalgebra $\mathfrak{g}$. Potom existuje vnořená podvarieta $H \subset G$, taková, že H je podgrupa G a její Lieova algebra je přirozeně izomorfní $\mathfrak{h}$.

Poznámka 15. Obecně se nejedná o vložení. Uvažujme například $T^2 = S^1[\varphi] \times S^1[\vartheta]$, $(\varphi_1, \theta_1)(\varphi_2, \theta_2) = (\varphi_1 + \varphi_2, \theta_1 + \theta_2)$, $e = (0,0)$. Vektorové pole $X = a\partial_\varphi + b\partial_\vartheta \in \mathfrak{t}^2$, $\mathfrak{h} = \operatorname{span}\{X\}$, $\dot\varphi = a$, $\dot\theta = b \quad \Rightarrow$ $H = \{at, bt | t \in \mathbb{R}\}$. Protože $[X,X] = 0$ je $\mathfrak{h}$ jednorozměrná podalgebra. Pro $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ je křivka na toru uzavřená a jedná se o vložení, pro $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ ale v topologii T^2 je $\overline{H} = T^2$, tj. nejedná se o vložení.

2.4 Vlastnosti homomrfismů (cvičení)

Lemma 1. Nechť $G, \widetilde{G}$ jsou Lieovy grupy, $\phi : G \to \widetilde{G}$ hladký homomorfismus, tj. $\forall g, h \in G$, $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$, pak platí:

$$
\phi_* \circ L_{g*} = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*, \qquad \phi_* X \in \widetilde{\mathfrak{g}}|_{\phi(g)}, \ \forall X \in \mathfrak{g}.
$$

Důkaz. Z definice platí $\forall g, h \in G,\ \forall X \in \mathfrak{g}$:

$$\left.\begin{array}{l} L_{g*}\ X|_h = X|_{gh} \\ \phi(L_g h) = L_{\phi(g)} h \quad \Leftrightarrow \quad \phi \circ L_g = L_{\phi(g)} \circ \phi \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \phi_* \circ L_{g*} = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*$$

$\Rightarrow \quad \phi_*\ X|_{gh} = \phi_* L_{g*}\left(X|_h\right) = L_{\phi(g)*}\phi_*\ X|_h$. Dále nechť $\phi(g) = \widetilde{g}, \phi(h) = \widetilde{h}$, pak:

$$\begin{aligned} L_{\widetilde{g}*}\ (\phi_* X)|_{\widetilde{h}} &= L_{\phi(g)*}\ (\phi_* X)|_{\phi(h)} = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*\left(X|_h\right) = \phi_* \circ L_{g*}\left(X|_h\right) = \\ &= \phi_*\left(X|_{gh}\right) = (\phi_* X)|_{\phi(gh)} = (\phi_* X)|_{\widetilde{g}\widetilde{h}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad L_{\widetilde{g}*}\ (\phi_* X)|_{\widetilde{h}} = (\phi_* X)|_{\widetilde{g}\widetilde{h}} \quad \Rightarrow \quad \phi_* X \in \widetilde{\mathfrak{g}}|_{\phi(g)},\ \forall X \in \mathfrak{g}.$ □

Lemma 2. $\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \mathrm{e}^{t\phi_* X}$

Důkaz. Obě strany rovnice jsou díky $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ 1-parametrické podgrupy $\Rightarrow$ stačí ukázat, že tečné vektory v e jsou stejné.

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \phi_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{tX} = (\phi_* X)|_{\widetilde{e}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{t\phi_* X}$$

Díky grupovosti tedy platí:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \phi\left(\mathrm{e}^{(t+s)X}\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\phi\left(\mathrm{e}^{sX}\right) = L_{\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)*}\ (\phi_* X)|_{\widetilde{e}} = (\phi_* X)|_{\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{t\phi_* X} &= (\phi_* X)|_{\mathrm{e}^{t\phi_* X}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ obě strany lemmatu jsou řešení stejné ODR se stejnou počáteční podmínkou $\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\big|_{t=0} = \widetilde{e} = \mathrm{e}^{t\phi_* X}\big|_{t=0}$. □

Lemma 3. $[\phi_* X, \phi_* Y] = \phi_*\big([X, Y]\big)$

Důkaz. Mějme $f \in C^\infty(\widetilde{G})$:

$$(\phi_* Y)\ f|_{\phi(g)} = Y\ (f \circ \phi)|_g = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\phi\left(g\mathrm{e}^{tY}\right)\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\phi(g)\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(f \circ R_{\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)}\right)\Big|_{\phi(g)}$$

$$\begin{aligned} [\phi_* X, \phi_* Y]\ f|_{\phi(p)} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left[f\left(\phi(p)\phi\left(\mathrm{e}^{sX}\right)\phi\left(\mathrm{e}^{tY}\right)\right) - f\left(\phi(p)\phi\left(\mathrm{e}^{tY}\right)\phi\left(\mathrm{e}^{sX}\right)\right)\right] = \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{s,t=0} \left[f\left(\phi\left(p\mathrm{e}^{sX}\mathrm{e}^{tY}\right)\right) - f\left(\phi\left(p\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{sX}\right)\right)\right] = \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{s,t=0} \left[(f \circ \phi)\left(p\mathrm{e}^{sX}\mathrm{e}^{tY}\right) - (f \circ \phi)\left(p\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{sX}\right)\right] = \\ &= [X, Y]\ (f \circ \phi)|_p = [X, Y]\ (f \circ \phi)|_p = \left(\phi_*[X, Y]\right)\ f|_{\phi(p)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad [\phi_* X, \phi_* Y] = \phi_*\big([X, Y]\big).$ □

3 Nástin teorie integrabilních distribucí

Definice 12. k-rozměrná distribuce na varietě M, $\dim M = n \geqslant k$, je hladké zobrazení, které každému $p \in M$ přiřazuje k-rozměrný podprostor v T_pM. Značíme $\Delta_k(p) \subset T_pM$, $\dim \Delta_k(p) = k$.

Poznámka 16. Hladkost z předcházející definice chápeme ve smyslu: $\forall p \in M,\ \exists U = U^\circ,\ p \in U,\ X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(U)$ tak, že $\Delta_k(q) = \operatorname{span}\left\{ X_1|_q, \ldots, X_k|_q \right\}$, $\forall q \in U$.

Definice 13. Integrální podvarieta dimenze l distribuce Δ_k je vložená podvarieta N dimenze l taková, že $\forall p \in N$ je $T_pN \subset \Delta_k(p)$.

Definice 14. Distribuce Δ_k je (úplně) integrabilní právě tehdy, když $\forall p \in M$ existují na okolí U bodu p souřadnice $\left(x^1, \ldots x^k, y^1, \ldots, y^{n-k}\right)$ takové, že rovnice $y^j = konst_j, \forall j \in \widehat{n-k}$ definují k-rozměrné integrální podvariety distribuce Δ_k. Takové (x, y) se nazývá Frobeniova mapa.

Věta 9. (Frobeniova) Δ_k je úplně integrabilní $\Leftrightarrow [\Delta_k, \Delta_k] \subset \Delta_k$, to znamená
$\forall U = U^\circ \subset M,\ \forall X, Y \in \mathcal{X}(U),\ \forall p \in U : X(p), Y(p) \in \Delta_k(p) \quad \Rightarrow \quad \forall q \in U,\ [X, Y](q) \in \Delta_k(q)$.
Bez důkazu.

Poznámka 17. Používá se zápisu $[X, Y] \in \Delta_k \quad \Leftrightarrow \quad \forall q \in U,\ [X, Y](q) \in \Delta_k(q)$.

Poznámka 18. $[\Delta_k, \Delta_k](p) = \operatorname{span}\left\{ [X_1, X_2]|_p \middle| X_1, X_2 \in \mathcal{X}(U), p \in U = U^\circ, \forall q \in U : X_1|_q, X_2|_q \in \Delta(q) \right\}$

Poznámka 19. Integrabilní podvariety M, N, pro které $M \cap N \neq \varnothing$ lze navazovat, tj. vytvářet podvariety postupem $O = M \cup N$.

Definice 15. Sjednocením ntegrrálních podvariet získáme listy distribuce Δ_k. **Maximální list** je takový, ke kterému už nelze přidat žádnou integrální podvarietu. Maximální listy tvoří tzv. foliaci variety danou integrabilní distribucí.

Poznámka 20. Nejedná se obecně o vložení, protože se vloženost může narušit nekonečným sjednocením (viz příklad s T^2).

Věta 10. (Chevalley) Maximální listy integrabilní distribuce jsou prostě vnořené podvariety. Bez důkazu.

Důsledek 8. Pro Lieovu grupu G a algebru $\mathfrak{g}$ a podalgebru $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, splňující $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ je podvarieta H z poznámky 14 maximální list integrabilní distribuce určené $\mathfrak{h}$ procházející e. H je podgrupa, protože díky levoinvariantnosti $\mathfrak{h}$ je gH opět maximální list. Ten je z definice buď totožný s původním nebo s ním má prázdný průnik. Ale pokud $g \in H \quad \Rightarrow \quad ge = g \in H \quad \Rightarrow \quad gH = H$. Obdobně $g \in H \quad \Rightarrow \quad g^{-1}H = H$, protože $g^{-1}g = e \in H \quad \Rightarrow \quad g^{-1} \in H$.

4 Akce grupy na varietě

Definice 16. **(Levá) akce Lieovy grupy** G na varietě M je hladké zobrazení $\phi : G \times M \to M$ vyhovující

- $\phi(g_1 g_2, m) = \phi(g_1, \phi(g_2, m)), \forall g_1, g_2 \in G, \forall m \in M,$
- $\phi(e, m) = m, \forall m \in M.$

Poznámka 21. Obdobně **pravá akce**:

- $\phi(m, g_1 g_2) = \phi(\phi(m, g_1), g_2),\ \forall g_1, g_2 \in G,\ \forall m \in M,$
- $\phi(m, e) = m, \forall m \in M.$

Pravá akce lze vyjádřit pomocí levé akce záměnou $g \to g^{-1}$.

Definice 17. Pro uzavřenou (v topolgii G) podgrupu H Lieovy grupy G. Definujeme **levé cosety** $gH = \{gh | h \in H\}$. ($gH = \mathcal{O}_g$ jsou tedy orbity pravé akce H na G.) Množinu levých cosetů označíme G/H, tj. $G/H = \{gH | g \in G\}$.

Poznámka 22. Pokud H je uzavřená podgrupa G, lze na G/H zavést právě jednu hladkou strukturu takovou, že $(G, G/H, \pi; H)$, $\pi : G \to G/H$, $\pi(g) = gH$, je fibrovaný prostor.

Definice 18. Akce $\phi : G \times M \to M$ je **tranzitivní** $\Leftrightarrow (\forall m_1, m_2 \in M)(\exists g \in G)(m_2 = \phi(g, m_1))$.

Definice 19. Nechť ϕ tranzitivní $x_0 \in M$. Grupa izotropie (nebo také grupa stability nebo malá grupa) bodu x_0 je

$$H_{x_0} = \{g \in G | \phi(g, x_0) = x_0\}\,. \tag{3}$$

Poznámka 23. Protože pro libovolné $x \in M$, $\exists g_x \in G$ takové, že $x = \phi(g_x, x_0)$, tedy $\forall g_0 \in H_{x_0}$, $\phi(g_x g_o g_x^{-1}, x) = \phi(g_x, \phi(g_0, \phi(g_x^{-1}, x))) = x$, platí $H_x = g_x H_{x_0} g_x^{-1}$, tj. všechny grupy izotropie jsou konjugované, totožné v případě normálních H_x.

Důsledek 9. Pro tranzitivní ϕ je $M \simeq G/H_{x_0}$ a volba nezávisí na x_0, protože $\forall g_x \in G$, $\phi(g_x H_{x_0}, x_0) = \phi(g_x, x_0) = x$, máme tedy korespondenci $G/H_{x_0} \ni g_x H_{x_0} \leftrightarrow x \in M$.

Definice 20. Varietu, kterou lze zapsat ve tvaru $M \simeq G/H_{x_0}$ pro nějakou Lieovu grupu G s tranzitivní akcí nazveme **homogenní prostor**.

5 Reprezentace Lieových grup a algeber

Definice 21. Reprezentace Lieovy grupy G na vekt. prostoru V je hladký homomorfismus $\phi : G \to GL(V)$.

Poznámka 24. V případě $\dim G = +\infty$ je vhodné uvažovat $\mathscr{H}$ a $\phi : G \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Definice 22. Reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na vekt. prostoru V je (hladký) homomorfismus $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. (Tedy ϕ je lineární a platí $[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y])$.

Příklad 9. Reprezentace $\mathfrak{so}(3)$ na $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$: $\phi(X_i) = \varepsilon_{ijk} x_k \partial_j$ (sumace podle dolních indexů).

Definice 23. Reprezentace G (resp. $\mathfrak{g}$) je **věrná**, právě když ϕ je prosté zobrazení (monomorfismus).

Poznámka 25. Na základě věrné reprezentace jsme schopni zrekonstruovat G (resp. $\mathfrak{g}$), proto nazýváme věrné reprezentace **realizací** dané G (resp. $\mathfrak{g}$), např. $\mathfrak{so}(3)$ jako matice nebo vektorová pole z př. 9.

Definice 24. Buď $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$. Σ je

- **reducibilní** $\Leftrightarrow (\exists W \subset\subset V, W \notin \{V, \{0\}\})(\Sigma W \subset W)$,
- **ireducibilní** $\Leftrightarrow (\forall W \subset\subset V, W \neq V)((\Sigma W \subset W) \Rightarrow W = \{0\})$,
- **úplně reducibilní** $\Leftrightarrow (\forall W \subset\subset V, \Sigma W \subset W)(\exists \tilde{W} \subset\subset V, \Sigma\tilde{W} \subset \tilde{W})(V = W \oplus \tilde{W})$.

Reprezentace G (resp. $\mathfrak{g}$) je ireducibilní (reducibilní, úplně reducibilní) právě tehdy když $\phi(G)$ (resp. $\phi(\mathfrak{g})$) je ireducibilní (reducibilní, úplně reducibilní).

Příklad 10. Reprezentace $\phi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$ (**unitární reprezentace**) jsou úplně reducibilní, protože z unitarity platí $\phi(G)W \subset W \Rightarrow \phi(G)W^\perp \subset W^\perp$. Navíc na úrovni algeber platí $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{u}(\mathscr{H})$ a pomocí exponenciely dostaneme pro $X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\phi_*(X)} \quad \Rightarrow \quad \left(\phi(\mathrm{e}^X)\right)^+ &= \phi(\mathrm{e}^X)^{-1} = \mathrm{e}^{-\phi_*(X)} \\ &= \left(\mathrm{e}^{\phi_*(X)}\right)^+ = \mathrm{e}^{(\phi_*(X))^+}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \left(\phi_*(X)\right)^+ = -\phi_*(X)$, tj. $\phi_*(X)$ jsou antihermitovské matice, $\mathfrak{u}(\mathscr{H}) = \left\{B \in \mathfrak{gl}(\mathscr{H}) \middle| B + B^+ = 0\right\}$.

Ve fyzice se obvykle používají hermitovské matice, proto se definují **fyzikální veličiny**

$$A \mapsto A_{\mathrm{F}} = -\mathbf{i}A\,. \tag{4}$$

A_{F} již splňují $A_{\mathrm{F}}^+ = A_{\mathrm{F}}$.

Shurovo lemma

Věta 11. V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, $\dim V < +\infty$, $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$ ireducibilní. Potom $\forall A \in \mathfrak{gl}(V)$: $([A, \Sigma] = 0 \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{C})(A = \lambda\mathbb{1}))$.

Důkaz. $A \in \mathfrak{gl}(V) \quad \Rightarrow \quad \sigma(A) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} : W = \ker(A - \lambda\mathbb{1}) \neq \{\vec{0}\} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda\mathbb{1})\Sigma W = \Sigma(A - \lambda\mathbb{1})W = 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma W \subset \ker(A - \lambda\mathbb{1}) \quad \Rightarrow \quad W$ je invariantní podprostor $\Rightarrow$ $W = V$ □

Věta 12. V nad $\mathbb{C}$, $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$ úplně reducibilní. Pokud platí $(\forall A \in \mathfrak{gl}(V))([A, \Sigma] = 0 \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{C},\ A = \lambda\mathbb{1}))$, potom Σ je ireducibilní.

Důkaz. $W \neq \{\vec{0}\}$ invariantní podprostor $\quad \Rightarrow \quad \exists\widetilde{W}$ invariantní podprostor takový, že $V = W \oplus \widetilde{W}$, $\forall S \in \Sigma$, $S : W \to W$, $S : \widetilde{W} \to \widetilde{W} \quad \Rightarrow \quad$ definujeme $A : A|_W = \lambda\mathbb{1}$, $A|_{\widetilde{W}} = \widetilde{lambda}\mathbb{1}$, tj. $AW \subset W$, $A\widetilde{W} \subset \widetilde{W} \quad \Rightarrow \quad [A, S] = 0$, $\forall S \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}$, $A = \lambda\mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{W} = \{\vec{0}\} \quad \Rightarrow$ $V = W$. □

6 Souvislost Lieových grup a algeber

Poznámka 26. Souvislá varieta M je jednoduše souvislá $\Leftrightarrow$ všechny uzavřené křivky lze hladce zdeformovat do bodu, tj. na konstantní zobrazení $S^1 \to x_0 \in M$.

Definice 25. Buďte M, $\overline{M}$ souvislé variety. $\overline{M}$ je **nakrytí** M právě, když $\exists\ \pi : \overline{M} \to M$ splňující

- $\forall x \in M,\ \exists U = U^\circ,\ \pi^{(-1)}(U) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} U_\alpha,\ U_\alpha = U_\alpha^\circ \subset \overline{M},\ U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset,\ \forall \alpha \neq \beta,$
- $\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ je difeomorfismus.

Poznámka 27. Pojem nakrytí je podrobněji rozebrán ve Feckovi, kapitola 13.3.

Příklad 11. $M = S^1,\ \overline{M} = S^1,\ \Pi(\mathrm{e}^{i\varphi}) = \mathrm{e}^{2i\varphi}$

Příklad 12. $M = S^1,\ \overline{M} = \mathbb{R},\ \Pi(\varphi) = \mathrm{e}^{i\varphi}$

Definice 26. Nakrytí $\overline{M}$ variety M je **univerzální** právě, když $\overline{M}$ je jednoduše souvislá.

Poznámka 28. Všechna univerzální nakrytí souvislé variety jsou izomorfní.

6.1 Konstrukce univerzálního nakrytí

Poznámka 29. Pro křivky $\gamma_1 : \langle 0,1\rangle \to M,\ \widetilde{\gamma} : \langle 0,1\rangle \to M,\ \gamma_1(1) = \widetilde{\gamma}(0)$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \circ \widetilde{\gamma} : \langle 0,1\rangle \to M : \gamma_1 \circ \widetilde{\gamma}(t) &= \gamma_1(2t) && 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\\
&= \widetilde{\gamma}(2t) && \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\\
\gamma^{-1}(t) : \langle 0,1\rangle \to M : \gamma^{-1}(t) &= \gamma(1-t) && 0 \leqslant t \leqslant 1
\end{aligned}$$

$x_0 \in M$ fixní, pak $\overline{M} = \{[\gamma] | \gamma : \langle 0,1\rangle \to M,\ \gamma(0) = x_0\}$, $\gamma \sim \widetilde{\gamma} \Leftrightarrow \big(\gamma(1) = \widetilde{\gamma}(1) \wedge \gamma \circ \widetilde{\gamma}^{-1}$ je možno deformovat do $\gamma(t) = x_0$ $\big)$. Vezmeme jednoduše souvislé okolí $x \in M$, $U_x = U_x^\circ \Rightarrow \forall y \in U,\ \exists \gamma_{xy} : \langle 0,1\rangle \to M :\ \gamma_{xy}(0) = x,\ \gamma_{xy}(1) = y,\ \gamma_{xy}(t) \in U_x,\ \forall t \in \langle 0,1\rangle$. Všechny takové $\gamma_{x,y}$ spojující x a y uvnitř jednoduše souvislého okolí jsou ekvivalentní. Definujeme $\overline{U} \in \overline{M}$ okolí $[\gamma]$ jako $\overline{U} = \left\{[\gamma \circ \gamma_{xy}] | y \in U_x\right\}$. Platí tedy $\gamma \circ \gamma_{xy}(0) = x_0,\ \gamma \circ \gamma_{xy}(1) = y.$ $\Rightarrow$ Definujeme-li $\Pi([\gamma]) = \gamma(1) \in M$, pak takto definované $\overline{U}$ je homeomorfní U_x.

Π definujeme jako hladké zobrazení, pomocí $\left(\Pi|_{\overline{U}}\right)^{-1}$ přeneseme hladkou strukturu a ukážeme že tímto lze definovat hladkou strukturu na $\overline{M}$. O M lze pak dokázat, že je jednoduše souvislé.

Je-li G souvislá Lieova grupa, pak na $\overline{G}$ můžeme definovat strukturu Lieovy grupy následovně: $x_0 \equiv e,\ \forall g \in G,\ \gamma_g : \langle 0,1\rangle \to G,\ \gamma_g(1) = g,$

- $\left[\gamma_g\right] \cdot [\gamma_h] \equiv \left[\gamma_g \cdot L_g(\gamma_h)\right]$, $\forall g, h \in G$, kde $L_g(\gamma_h)(t) = g \cdot \gamma_h(t),\ \forall t$
- $\bar{e} = [\gamma_e]$, $\gamma_e(t) = e,\ \forall t$
- $\left[\gamma_g\right]^{-1} = \left[L_{g^{-1}}\left(\gamma_g^{-1}\right)\right]$
- $\Pi\left(\left[\gamma_g\right] \cdot [\gamma_h]\right) = g \cdot h$, tj. Π je homomorfizmus grup

$\Rightarrow\quad \mathfrak{g} \simeq \overline{\mathfrak{g}}$, protože okolí počátků jsou difeomorfní.

Věta 13. (Ado) Pro libovolnou konečněrozměrnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ existuje její věrná konečněrozměrná reprezentace $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V),\ \dim V < +\infty,\ \mathfrak{g} \simeq \rho(\mathfrak{g}) \subset\subset \mathfrak{gl}(V)$. Bez důkazu.

Důsledek 10. Ke každé Lieově algebře existuje příslušná souvislá Lieova grupa $G \subset\subset GL(V)$. Dále ke G můžeme najít jednoduše souvislou $\overline{G}$ (nikoliv již uvnitř $GL(V)$).

Věta 14. Ke každé konečněrozměrné Lieově algebře $\mathfrak{g}$ existuje právě jedna souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa G taková, že $\mathfrak{g}$ je její Lieova algebra. Všechny ostatní souvislé Lieovy grupy s touto algebrou g jsou nakrývány G a mohou být proto zapsány jako G/D, kde D je diskrétní normální podgrupa. Bez důkazu.

Poznámka 30. D normální $\Leftrightarrow gDg^{-1} = D,\ \forall g \in G \quad \Rightarrow \quad$ pro pevně zvolené $d_0 \in D$ a $\phi : G \to D \subset G : \phi(g) = gd_0g^{-1} \in D$, je $\phi(G)$ souvislá díky tomu, že G je souvislá a ϕ hladké. A protože D je diskrétní podmnožina $G \quad \Rightarrow \quad \phi(g) = d_0,\ \forall g \in G \quad \Rightarrow \quad gd_0 = d_0g,\ \forall g \in G \quad \Rightarrow \quad D \subset \mathcal{Z}(G) = \{h \in G | hg = gh,\ \forall g \in G\} \quad \Rightarrow \quad D$ je Abelovská.

Poznámka 31. ρ reprezentace $\mathfrak{g}$ na $V,\ \dim V < +\infty \quad \Rightarrow \quad \rho$ je reprezentace jednoduše souvislé grupy G. Zároveň ale pokud $\rho(D) \neq \{\mathbb{1}\}$, pak nelze skonstruovat $\rho : G/D \to GL(V)$, tj.:

- $\rho(D) = \{\mathbb{1}\}$ a máme tedy reprezentaci G/D,
- nebo $\rho(D) \neq \{\mathbb{1}\}$ a reprezentaci nemáme (víceznačná reprezentace).

Poznámka 32. Pomocí předchozích vět máme vyřešen problém všech souvislých G se stejnou $\mathfrak{g}$. Teoreticky můžeme vždy nalézt univerzální nakrytí $\overline{G}$ a následně ho faktorizovat podle možných D a tím získám všechny G.

Příklad 13. Pro $su(2)$ existují právě 2 souvislé Lieovy grupy $SU(2)$ a $SO(3) = SU(2)/_{\{-\mathbb{1},\mathbb{1}\}}$.

7 Lieovy algebry

Předpokládáme konečnou dimenzi.

Definice 27. **Podalgebra** $\mathfrak{h}$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je vektorový podprostor v $\mathfrak{g}$ splňující $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Poznámka 33. Pro $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset\subset \mathfrak{g}$, značíme $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \text{span}\{[X, Y] | X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{b}\}$.

Příklad 14. V Lorentzově algebře generátory boostů komutují na rotace, tedy netvoří podalgebru. Rotace podalgebru tvoří.

Definice 28. $\mathfrak{h}$ podprostor $\mathfrak{g}$ je **ideál** $\Leftrightarrow [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Příklad 15. V Lorentzově algebře $[M^{\mu\nu}, P^\alpha] \sim P^\xi$, tedy translace tvoří ideál.

Definice 29. **Faktoralgebra** podle ideálu $\mathfrak{h}$ je $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{g + \mathfrak{h} | g \in \mathfrak{g}\}$, $[g_1 + \mathfrak{h}, g_2 + \mathfrak{h}] := [g_1, g_2] + \mathfrak{h}$.

Definice 30. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je

- **Abelovská** $\Leftrightarrow$ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$,
- **prostá** $\Leftrightarrow$ $\dim \mathfrak{g} > 1$ a jediné ideály v $\mathfrak{g}$ jsou 0 a $\mathfrak{g}$,
- **poloprostá** $\Leftrightarrow$ jediný Abelovský ideál v $\mathfrak{g}$ je 0.

Definice 31. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je direktním součtem ideálů $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ jako vektorové prostory, tj. $0 \neq \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \subset\subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1$, $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] \subset \mathfrak{g}_2$, $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$,.

Poznámka 34. Dále budeme direktní součet vektorových prostorů značit $V = V_1 \dotplus V_2$.

Definice 32. Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ nazveme **rozložitelná** $\Leftrightarrow \exists \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \neq 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Jinak $\mathfrak{g}$ **nerozložitelná**.

Příklad 16.

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(n) &= \mathfrak{a}(1) \oplus \mathfrak{sl}(n), & \mathfrak{a}(1) &= \text{span}\{\mathbb{1}\} \\ \mathfrak{u}(n) &= \mathfrak{a}(1) \oplus \mathfrak{su}(n), & \mathfrak{a}(1) &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{i\mathbb{1}\} \\ \mathfrak{so}(4) &= \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) \end{aligned}$$

7.1 Charakteristické série ideálů

Definice 33. **Centrum** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je maximální ideál ζ^1 s vlastností $[\mathfrak{g}, \zeta^1] = 0$, tj. $\zeta^1 = \{x \in \mathfrak{g} | [x, \mathfrak{g}] = 0\}$, značíme $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \zeta(\mathfrak{g}) = \zeta^1(\mathfrak{g}) = \zeta^1$.

Definice 34. Charakteristické série ideálů v $\mathfrak{g}$:

- **derivovaná série**: $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Pokud $\exists n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$, algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá **řešitelná**.
- **dolní centrální série**: $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}]$, $\forall k > 1$. Pokud $\exists n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}^n = 0$, algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá **nilpotentní**.
- **horní centrální série**: $\zeta^1 = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $\zeta^k = \{x \in \mathfrak{g} | [x, \mathfrak{g}] \subset \zeta^{k-1}\}$, $\forall k > 1$, $(\zeta^{k-1} \subset \zeta^k)$.

Poznámka 35. $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^{(1)}$, $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$, tj. každá nilpotentní $\mathfrak{g}$ je řešitelná.

Věta 15. $\mathfrak{g}$ je nilpotentní $\Leftrightarrow$ $\lim_{k \to +\infty} \zeta^k = \mathfrak{g}$.

Důkaz. $\Rightarrow$) $\mathfrak{g}$ nilpotentní $\Rightarrow$ $\exists k \leqslant \dim \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^k = 0$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}^{k-1} \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \zeta^1$. Indukcí ukážeme, že platí $\mathfrak{g}^{k-j} \subset \zeta^j$. Pro $j = 1$ zřejmé, $j \to j+1$:

$$\left[\mathfrak{g}^{k-j-1}, \mathfrak{g}\right] = \mathfrak{g}^{k-j} \subset \zeta^j \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}^{k-j-1} \subset \zeta^{j+1}.$$

$\Leftarrow$) $\exists k,\ \zeta^k = \mathfrak{g}$. Indukcí ukážeme, že platí $\zeta^{k-j+1} \supset \mathfrak{g}^j$. Pro $j = 1$ zřejmé, $j \to j+1$:

$$\mathfrak{g}^j \subset \zeta^{k-j+1} \quad \Rightarrow \quad \left[\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}\right] = \mathfrak{g}^{j+1} \subset \zeta^{k-j+1-1} = \zeta^{k-j}$$

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{g}^k \subset \zeta^1 = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}^{k+1} = 0.$$

□

Příklad 17. Heisenbergova algebra $\mathfrak{h}(n) = \{X_i, P_i, \mathbb{1} | [X_i, P_j] = \delta_{ij}\mathbb{1},\ i, j \in \hat{n}\}$ je nilpotentní:

$$(\mathfrak{h}(n))^2 = \operatorname{span}\{\mathbb{1}\} \quad \Rightarrow \quad (\mathfrak{h}(n))^3 = 0$$

Příklad 18. Striktně horní trojúhelníkové matice $\operatorname{str}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & ? \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n} \right\}$ jsou nilpotentní.

Příklad 19. Horní trojúhelníkové matice $\operatorname{tr}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} ? & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & ? \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n} \right\}$:

$$[\operatorname{tr}(n), \operatorname{tr}(n)] = \operatorname{str}(n), \quad [\operatorname{tr}(n), \operatorname{str}(n)] = \operatorname{str}(n)$$

$\Rightarrow$ je řešitelná, ale není nilpotentí.

Definice 35. Maximální řešitelný ideál v $\mathfrak{g}$ se nazývá **radikál** a maximální nilpotentní ideál se nazývá **nilradikál**.

Poznámka 36. Nechť $\mathfrak{r}$ je radikál algebry $\mathfrak{g}$. Uvažujme $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ a v ní abelovksý ideál $\mathfrak{h}/\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, tj. $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{h} \subset g$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{r} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{h}^{(1)} \subset \mathfrak{r}$ a současně $\exists k$, $\mathfrak{r}^{(k)} = 0$, tj. $\mathfrak{r}$ je řešitelná $\quad \Rightarrow \quad \mathfrak{h}^{(k+1)} \subset \mathfrak{r}^{(k)} = 0 \quad \Rightarrow$ podle předpokladu maximality $\mathfrak{r}$ je $\mathfrak{h} = \mathfrak{r} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ nemá netriviální abelovský ideál $\quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ je poloprostá.

Platí dokonce ještě silnější tvrzení:

Věta 16. (Levi) Každou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ lze rozložit na (polopřímý) součet poloprosté algebry $\mathfrak{s}$ a radikálu $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \dotplus \mathfrak{r},\ [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s},\ [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r},\ [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r},$$

přičemž $\mathfrak{s}$ je určena až na izomorfii. $\mathfrak{s}$ nebo $\mathfrak{r}$ může být rovna 0. Bez důkazu.

7.2 Vlastnosti ideálů (cvičení)

Věta 17. $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ ideály v $\mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2],\ \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2,\ \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ ideály v $\mathfrak{g}$

Důkaz.

$$[[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2], \mathfrak{g}] = [\mathfrak{h}_1, [\mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}]] + [[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}], \mathfrak{h}_2] \subset [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$$
$$[\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}] + [\mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}] \subset h_1 + h_2$$
$$[\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_1 \quad \wedge \quad [\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_2 \quad \Rightarrow \quad [\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$$

□

Důsledek 11. $\mathfrak{h}$ ideál v $\mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{h}^k, \mathfrak{h}^{(k)}$ ideály v $\mathfrak{g}$

Věta 18. $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ řešitelné ideály v $\mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ řešitelný ideál.

Důkaz.

$$(\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2)^{(1)} = [\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2] = [\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_1]+[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2]+[\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_1]+[\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_2] = \mathfrak{h}_1^{(1)} + \underbrace{[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2]}_{\subset \mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2} + \mathfrak{h}_2^{(1)}$$

$$\dim(\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2)+\dim(\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2) = \dim\mathfrak{h}_1+\dim\mathfrak{h}_2 \quad\Rightarrow\quad (\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2)$$

$\mathfrak{h}_2$ řešitelný $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2)$ řešitelný $\quad\Rightarrow\quad$ $(\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2)/h_1$ řešitelný $\quad\Rightarrow\quad$ $(\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2)$ řešitelný

□

Věta 19. $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ nilpotentní ideály v $\mathfrak{g}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2$ nilpotentní ideál.

Důkaz. Chceme ukázat, že $\exists n\in\mathbb{N}$, $\forall X_1,\dots,X_n\in\mathfrak{h}_1\cup\mathfrak{h}_2$, $[X_1,[X_2,\dots,[X_{n-1},X_n]]]=0$.
$\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ nilpotentní $\Leftrightarrow$ $\exists k\in\mathbb{N}$, $\mathfrak{h}_1^k=0$, $\mathfrak{h}_2^k=0$, vezmeme tedy $n=2k$ $\quad\Rightarrow\quad$ BÚNO aspoň k z $X_1,\dots,X_n$ je z $\mathfrak{h}_1$:

$$X\in\mathfrak{h}_1^j,\ Y\in\mathfrak{h}_1 \quad\Rightarrow\quad [X,Y]\in\mathfrak{h}_1^{j+1}, \qquad\qquad X\in\mathfrak{h}_1^j,\ Y\in\mathfrak{h}_2 \quad\Rightarrow\quad [X,Y]\in\mathfrak{h}_1^j$$

$\Rightarrow\quad [X_1,[X_2,\dots,[X_{n-1},X_n]]]\in\mathfrak{h}_1^k=\{0\}$. □

7.3 Derivace

Definice 36. Derivace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je lineární zobrazení $D:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ splňující $D([x,y]) = [Dx,y]+[x,Dy]$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$.

Definice 37. G Lieova grupa a $\mathfrak{g}$ její algebra.

- **Adjugovaná akce** Lieovy drupy G na G je ϕ, $\phi(g,h)=\phi_g(h)=ghg^{-1}$, ($\phi_g = L_g\circ R_{g^{-1}}$, $\phi_{g_1}\circ\phi_{g_2}=\phi_{g_1g_2}$),
- **adjugovaná reprezentace Lieovy grupy** G na $\mathfrak{g}$ je $\mathrm{Ad}: G\to GL(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Ad}(g)=\phi_{g*}|_e = L_{g*}\circ R_{g^{-1}*}$,
- **adjugovaná reprezentace Lieovy algebry** $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$ je $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $\forall X\in\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_X=\mathrm{Ad}_*(X)$, tj. $\mathrm{ad}_XY=\mathrm{Ad}_*(X)Y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})Y$.

Poznámka 37. Adjugovanou reprezentaci lze ekvivalentně zavést požadavkem $g\mathrm{e}^Xg^{-1}=\mathrm{e}^{\mathrm{Ad}(g)X}$. Pro maticové grupy lze $\mathrm{Ad}(g)X$ vypočítat jednoduše vztahem

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}, \qquad \forall g\in G, \forall X\in\mathfrak{g}\,. \tag{5}$$

Podobně se zjednoduší výpočet ad.

Věta 20. $\mathrm{ad}_XY=[X,Y]$.

Důkaz. Pro $\forall X\in g$ máme $X(f)(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\left(f\circ\phi_s^X\right)(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}f(p\mathrm{e}^{sX})$, $\forall f\in\mathcal{C}^\infty(G)$ a zároveň $\mathrm{e}^{\phi_*(X)}=\phi\left(\mathrm{e}^X\right)$, $\forall\phi$ homomorfismus.

$$\mathrm{ad}_X(Y)f|_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{tX}}(Y)f|_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\phi_{\mathrm{e}^{tX}*}(Y)f|_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f\circ R_{\mathrm{e}^{s\phi_{\mathrm{e}^{tX}*}(Y)}}\Big|_p =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f\left(p\mathrm{e}^{s\phi_{\mathrm{e}^{tX}*}(Y)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f\left(p\phi_{\mathrm{e}^{tX}}\left(\mathrm{e}^{sY}\right)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\underbrace{f\left(p\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sY}\mathrm{e}^{-tX}\right)}_{:=F(t,s,-t)} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}F(t,s,0) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}F(0,s,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\left(f\left(p\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sY}\right)-f\left(p\mathrm{e}^{sY}\mathrm{e}^{tX}\right)\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}Yf(p\mathrm{e}^{tX}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}Xf(p\mathrm{e}^{sY}) = X(Yf)(p)-Y(Xf)(p) = [X,Y]f(p)$$

$\Rightarrow\quad \mathrm{ad}_X(Y)=[X,Y]$. □

Poznámka 38. Pro matice je to ihned: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tX}Y\mathrm{e}^{-tX} = XY - YX = [X,Y]$.

Důsledek 12. Díky Jacobiho identitě je ad_X derivace.

Definice 38. Derivace D je **vnitřní**, právě když $(\exists X \in \mathfrak{g})(D = \mathrm{ad}_X)$. Všechny ostatní se nazývají **vnější**.

7.4 Vztah reálných a komplexních algeber

Definice 39. Pro $\mathfrak{g}$ reálnou Lieovu algebru existuje jediná komplexní Lieova algebra $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, nazývaná **komplexifikace** $\mathfrak{g}$, kterou definujeme jako $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} + \mathbf{i}\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$, tj.:

$$\begin{aligned}
[x + \mathbf{i}y, u + \mathbf{i}v] &= [x,u] - [y,v] + \mathbf{i}([y,u] + [x,v]) \\
(x + \mathbf{i}y)(u + \mathbf{i}v) &= (xu - yv) + \mathbf{i}(yu + xv)
\end{aligned}$$

Poznámka 39. Pro každou komplexní Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ můžeme jednoznačně zkonstruovat $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ pomocí libovolné báze $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \mathfrak{g}$ a doplněním na $\mathrm{span}_\mathbb{R}\{x_j,\ \mathbf{i}x_j\}_{j=1}^n$. (Strukturní konstanty jsou pak reálné a komplexní části původních.)

Poznámka 40. Pro $\mathfrak{g}$ z předchozích definic platí $\dim_\mathbb{C} \mathfrak{g}_\mathbb{C} = \dim_\mathbb{R} \mathfrak{g}$ a $\dim \mathfrak{g}_\mathbb{R} = 2\dim \mathfrak{g}$.

Definice 40. **Reálná forma** komplexní $\mathfrak{g}$ je libovolná reálná $\tilde{\mathfrak{g}}$ splňující $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}_\mathbb{C}$.

Příklad 20. $\mathfrak{su}(2)_\mathbb{C} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_\mathbb{C}, \qquad \mathfrak{so}(1,3)_\mathbb{C} = \mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(4,\mathbb{R})_\mathbb{C}$

7.5 Zobrazení Lieových algeber nad stejným tělesem

Definice 41. Lineární zobrazení $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$:

- ϕ je **homomorfismus** $\quad\Leftrightarrow\quad [\phi(X),\phi(Y)] = \phi([X,Y]), \forall x,y \in \mathfrak{g}$,
- homomorfismus ϕ je **endomorfismus** $\quad\Leftrightarrow\quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$,
- homomorfismus ϕ je **izomorfismus** $\quad\Leftrightarrow\quad \ker\phi = \{0\},\ \phi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$,
- izomorfismus ϕ je **automorfismus** $\quad\Leftrightarrow\quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.

Příklad 21. $\forall g \in G$ je $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ automorfismus. $\forall X \in \mathfrak{g},\ \mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ není homomorfismus, protože $\mathrm{ad}_X[Y,Z] = [\mathrm{ad}_X Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}_X Z]$, ale $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je homomorfismus.

7.6 Killingova forma

Definice 42. Symetrická bilineární forma ω na $\mathfrak{g}$ je:

- **invariantní vůči automorfismům** $\mathfrak{g}$ $\quad\Leftrightarrow\quad \omega(\phi(X),\phi(Y)) = \omega(X,Y), \forall\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$,
- ad-**invariantní (invariantní)** $\quad\Leftrightarrow\quad \omega([X,Y],Z) + \omega(Y,[X,Z]) = 0,\ \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.

Poznámka 41. ω invariantní vůči automorfismům, pak $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$ platí

$$\begin{aligned}
&\omega\left(\mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{tX}}Y, \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{tX}}Z\right) = \omega(Y,Z) \quad \Big/ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\
&\omega\left(\mathrm{ad}_X Y, Z\right) + \omega\left(Y, \mathrm{ad}_X Z\right) = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \omega$ je ad-invariantní (naopak neplatí).

Příklad 22. $[X,Y] = 0,\ \forall X,Y \in \mathfrak{g} \quad\Rightarrow\quad$ libovolná ω je ad-invariantní.

Definice 43. **Killingova forma** je $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to T : K(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y)$, kde T je těleso.

Poznámka 42. $\mathrm{ad}_{\phi(X)} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. ϕ automorfismus:

$$\mathrm{ad}_{\phi(X)} Y = [\phi(X), Y] = \left[\phi(X), \phi\left(\phi^{-1}(Y)\right)\right] = \phi\left(\left[X, \phi^{-1}(Y)\right]\right) = \left(\phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1}\right)(Y)$$

$\Rightarrow \quad \mathrm{ad}_{\phi(X)} = \phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1}$. Pro Killingovu formu tedy platí :

$$K(\phi(X), \phi(Y)) = \mathrm{Tr}\left(\phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \mathrm{ad}_Y \circ \phi^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y\right) = K(X, Y),$$

tj. je invariantní vůči všem automorfismům.

Poznámka 43. Explicitně K ad-invariantní:

$$\begin{aligned} K([X,Y],Z) + K(Y,[X,Z]) &= K(\mathrm{ad}_X Y, Z) + K(Y, \mathrm{ad}_X Z) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_X Y} \circ \mathrm{ad}_Z + \mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_X Z}\right) = \\ &= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_Z - \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Z + \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Z - \mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_Z\right) = 0 \end{aligned}$$

Věta 21. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ideál $\quad \Rightarrow \quad K_{\mathfrak{h}} = K_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$.

Důkaz. Bázi $\mathfrak{h}$, $\{e_i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{h}}$, doplníme na bázi $\mathfrak{g}$, $\varepsilon = \{e_i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}}$. Pak $\forall X, Y \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}_Y : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, tj.:

$$(\mathrm{ad}_X)_\varepsilon = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} \end{array}\right) \Big\} \dim \mathfrak{h} \quad , \qquad (\mathrm{ad}_Y)_\varepsilon = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} \end{array}\right) \Big\} \dim \mathfrak{h} \quad ,$$

$$K(X,Y) = \mathrm{Tr}\left(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} \end{array}\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(A \cdot \widetilde{A}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{h}}, \mathrm{ad}_Y|_{\mathfrak{h}}\right) = K_{\mathfrak{h}}(X,Y).$$

□

Definice 44. Ortogonální doplněk ideálu $\mathfrak{h}$ vzhledem ke Killingově formě K na $\mathfrak{g}$ je $\mathfrak{h}^\perp = \{X \in \mathfrak{g} | K(X,Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$.

Poznámka 44. $\mathfrak{h}$ ideál $\quad \Rightarrow \quad \mathfrak{h}^\perp$ ideál.

Důkaz. Pro libovolné $X \in \mathfrak{h}^\perp$, $Y \in \mathfrak{g}$, $Z \in \mathfrak{h}$ platí:

$$K([X,Y],Z) = -K([Y,X],Z) = K(X,[Y,Z]) = -K(X, \underbrace{[Z,Y]}_{\in \mathfrak{h}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad [X,Y] \in \mathfrak{h}^\perp.$$

□

7.7 Nilpotentní a řešitelné algebry

Věta 22. $\phi : \mathfrak{g} \to \widetilde{g}$ homomorfismus, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ podalgebra $\quad \Rightarrow \quad (\phi(\mathfrak{h}))^{(k)} = \phi(\mathfrak{h}^{(k)})$, $(\phi(\mathfrak{h}))^k = \phi\left(\mathfrak{h}^k\right)$.

Důkaz. Indukcí:

$$(\phi(\mathfrak{h}))^{(0)} = \phi(\mathfrak{h}) = \phi\left(\mathfrak{h}^{(0)}\right)$$

$$(\phi(\mathfrak{h}))^{(k)} = \left[\phi(\mathfrak{h})^{(k-1)}, \phi(\mathfrak{h})^{(k-1)}\right] = \left[\phi\left(\mathfrak{h}^{(k-1)}\right), \phi\left(\mathfrak{h}^{(k-1)}\right)\right] = \phi\left(\left[\mathfrak{h}^{(k-1)}, \mathfrak{h}^{(k-1)}\right]\right) = \phi\left(\mathfrak{h}^{(k)}\right)$$

$$(\phi(\mathfrak{h}))^1 = \phi(\mathfrak{h}) = \phi\left(\mathfrak{h}^1\right)$$

$$(\phi(\mathfrak{h}))^k = \left[\phi(\mathfrak{h})^{k-1}, \phi(\mathfrak{h})^{k-1}\right] = \left[\phi\left(\mathfrak{h}^{k-1}\right), \phi\left(\mathfrak{h}^{k-1}\right)\right] = \phi\left(\left[\mathfrak{h}^{k-1}, \mathfrak{h}^{k-1}\right]\right) = \phi\left(\mathfrak{h}^k\right)$$

□

Důsledek 13. Je-li původní algebra řešitelná (resp. nilpotenti), pak $\operatorname{Ran}\phi$ je řešitelná (resp. nilpotentní).

Poznámka 45. ϕ homomorfismus $\quad\Rightarrow\quad \ker\phi$ je ideál.

Důkaz. $X \in \mathfrak{g},\ Y \in \ker\phi \quad\Rightarrow\quad \phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] = 0 \quad\Rightarrow\quad [X,Y] \in \ker\phi$ □

Věta 23. Je-li $\mathfrak{h}$ ideál v $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ řešitelné. Pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná.

Důkaz. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ řešitelná $\quad\Leftrightarrow\quad \exists n \in \mathbb{N},\ (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(n)} = 0 \bmod \mathfrak{h} \quad\Leftrightarrow\quad \mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{h}$ a protože $\mathfrak{h}$ je řešitelný, $\exists k \in \mathbb{N},\ \mathfrak{h}^{(k)} = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{g}^{(n+k)} \subset \mathfrak{h}^{(k)} = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{g}$ je řešitelná. □

Důsledek 14. Máme-li $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfismus, $\operatorname{Ran}\phi$ a $\ker\phi$ řešitelné $\quad\Rightarrow\quad \mathfrak{g}$ je řešitelná, protože $\operatorname{Ran}\phi \cong \mathfrak{g}/\ker\phi$.

Věta 24. Je-li $\mathfrak{h} \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ nilpotentní. Pak $\mathfrak{g}$ je nilpotentní.

Důkaz. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ nilpotentní $\quad\Leftrightarrow\quad \exists n \in \mathbb{N},\ (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^n = 0 \bmod \mathfrak{h} \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{g}^n \subset \mathfrak{h} \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{g}^{n+1} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = 0.$ □

Důsledek 15. $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} = \{\operatorname{ad}_X | X \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$

- $\mathfrak{g}$ řešitelná $\quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ řešitelná.
- $\mathfrak{g}$ nilpotentní $\quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ nilpotentní.

Důkaz. $\ker\operatorname{ad} = \{X \in \mathfrak{g} | [X,Y] = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}\} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \quad\Rightarrow\quad \ker\operatorname{ad}$ je Abelovská algebra. □

7.8 Vlastnosti konečněrozměrných operátorů

Definice 45. $A \in \mathfrak{gl}(V)$ je **diagonalizovatelný (poloprostý)** $\quad\Leftrightarrow\quad \exists$ báze V tvořená vl. vektory operátoru $Ae_i = \lambda_i e_i$.
Soubor operátorů $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ je **současně diagonalizovatelný** $\quad\Leftrightarrow\quad \exists\, \{e_i\}_{i=1}^{\dim V}$ báze tvořená společnými vlastními vektory, $A_\alpha e_i = \lambda_i^{(\alpha)} e_i$.

Definice 46. $A \in \mathfrak{gl}(V)$ je **nilpotentní** $\quad\Leftrightarrow\quad \exists\, n \in \mathbb{N},\ A^n = 0.$

Věta 25. (Jordanův rozklad) $A \in \mathfrak{gl}(V),\ V$ nad $\mathbb{C} \quad\Rightarrow\quad \exists_1 S, N \in \mathfrak{gl}(V)$ splňující

- $A = S + N,$
- S je diagonalizovatelný, N nilpotentní,
- $[S, N] = 0.$

Bez důkazu.

Důsledek 16. S a N jsou polynomy v A.

7.9 Věty Lieova a Engelova

Definice 47. $X \in \mathfrak{g}$ je ad-**nilpotentní** $\quad\Leftrightarrow\quad \exists n \in \mathbb{N},\ (\operatorname{ad}_X)^n = 0.$

Poznámka 46. $\mathfrak{g}$ je nilpotentní $\quad\Leftrightarrow\quad \exists n \in \mathbb{N},\ \forall X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g},\ \operatorname{ad}_{X_1} \circ \cdots \circ \operatorname{ad}_{X_n} = 0 \quad\Rightarrow\quad \forall X \in \mathfrak{g},\ (\operatorname{ad}_X)^n = 0$

Lemma 4. $X \in \mathfrak{gl}(V)$ je nilpotentní $\quad\Rightarrow\quad X$ je ad-nilpotentní v $\mathfrak{gl}(V)$.

Důkaz. Indukcí ukážeme že platí:

$$(\mathrm{ad}_X)^k Y = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} X^j Y X^{k-j}$$

$k = 1$ zřejmé, $k-1 \to k$:

$$(\mathrm{ad}_X)^k Y = \mathrm{ad}_X \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} X^j Y X^{k-1-j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} X^{j+1} Y X^{k-1-j} - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} X^j Y X^{k-j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \left(\binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j} \right) X^j Y X^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} X^j Y X^{k-j}$$

Je-li $X^n = 0$ pro nějaké $n \in N$, pak v každém sčítanci $(\mathrm{ad}_X)^{2n}$ je nula. □

Lemma 5. $\mathfrak{h}$ ideál v $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, $W = \bigcap_{X \in \mathfrak{h}} \ker X = \{v \in V | Xv = 0, \forall X \in \mathfrak{h}\}$. Pak $\mathfrak{g}W \subset W$, tj. W je invariantní podprostor.

Důkaz. $\forall X \in \mathfrak{h},\ \forall Y \in \mathfrak{g},\ X(YW) = [X,Y]W + Y(XW) = 0 \quad \Rightarrow \quad YW \subset \ker X,\ \forall X \in \mathfrak{h},\ \forall Y \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad YW \subset W,\ \forall Y \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}W \subset W$ □

Lemma 6. Buď $\mathfrak{g} \subset\subset \mathfrak{gl}(V)$ takové, že všechny elementy $\mathfrak{g}$ jsou nilpotentní. Pak existuje $v \in V,\ v \neq 0,\ \forall X \in \mathfrak{g},\ Xv = 0$.

Důkaz. Indukcí na $\dim \mathfrak{g}$:

$$\dim \mathfrak{g} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g} = \mathrm{span}\{X\},\ X^n = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \in \sigma(X) \quad \Rightarrow \quad \exists v \in V,\ Xv = 0$$

$\dim \mathfrak{g} = n-1 \to n$: Vezmeme vlastní podalgebru maximální dimenze $\mathfrak{h}$ a definujeme reprezentaci $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$:

$$\phi(X)(Y + \mathfrak{h}) = \mathrm{ad}_X Y + \mathfrak{h}, \qquad \forall X \in \mathfrak{h},\ Y \in \mathfrak{g}$$

$\forall X \in \mathfrak{h}$, X nilpotentní $\xRightarrow{\text{Lemma 4}}$ X ad-nilpotentní $\Rightarrow$ $\phi(X)$ nilpotentní $\Rightarrow$ $\phi(\mathfrak{h})$ splňuje předpoklady a má dimenzi ostře menší než n $\Rightarrow$ dle indukčního předpokladu proto

$$\exists Z \in \mathfrak{g} : Z + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h},\ Z + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h},\ \phi(X)(Z + \mathfrak{h}) = \mathfrak{h},\ \forall X \in \mathfrak{h} \quad \Rightarrow \quad Z \notin \mathfrak{h},\ [X, Z] \in \mathfrak{h},\ \forall X \in \mathfrak{h}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{span}\{Z\} + \mathfrak{h}$ je podalgebra $\mathfrak{g}$, její $\dim = \dim \mathfrak{h} + 1$ a z maximality $\mathfrak{h}$ plyne, že je to celé $\mathfrak{g}$.

Z indukcního předpokladu rovněž $\exists v \in V,\ \mathfrak{h}v = 0$, tzn. $W := \bigcap_{X \in \mathfrak{h}} \ker X \neq \{0\}$ a $\mathfrak{h}$ je ideál, neboť $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = [\mathrm{span}\{Z\} + \mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ $\xRightarrow{\text{Lemma 5}}$ W je invariantní podprostor $\mathfrak{g}$. A protože Z je nilpotentní, je taky $Z|_W : W \to W$ nilpotentní, tedy

$$\exists w \in W,\ Zw = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}w = (\mathrm{span}\, Z + \mathfrak{h})\, w = 0.$$

□

Lemma 7. Buď $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, $\forall X \in \mathfrak{g}$ nilpotenti, tj Lieova algebra nilpotentních operátorů. Pak $\exists \varepsilon = \{e_i\}$ báze taková že $Xe_i \in \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, tj. $\forall X \in \mathfrak{g},\ X_\varepsilon$ ostře horní trojúhelníková matice, tj. $\mathfrak{g}$ je nilpotentní algebra.

Důkaz. Dle *Lemma* 6, $\exists e_1 \in \bigcap_{X\in\mathfrak{g}} \ker X$, položíme $V_1 = \mathrm{span}\{e_1\}$ a definujeme akci $\mathfrak{g}$ na V/V_1:

$$\phi(X)\,(v+V_1) = Xv + V_1, \qquad \forall X \in \mathfrak{g},\ \forall v \in V. \tag{6}$$

$\phi(\mathfrak{g})$ je tvořena nilpotentními operátory $\Rightarrow$ $\exists e_2 \in V,\ e_2 \notin V_1,\ \phi(X)\,(e_2+V_1) = V_1,\ \forall X \in \mathfrak{g}$, tj. $Xe_2 \in V_1,\ \forall X \in \mathfrak{g}$. Položíme $V_2 = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ a postup opakujeme. Indukcí tedy získáváme kompoziční řadu $\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$ splňující $\dim V_i/V_{i-1} = 1,\ \mathfrak{g}V_i \subset V_{i-1}$ $\Rightarrow$ v bázi tvořené elementy $e_i \in V_i$ jsou matice operátorů $X \in \mathfrak{g}$ horní trojúhelníkové s nulovou diagonálou. □

Věta 26. (Engelova) Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní $\Leftrightarrow$ $\forall X \in \mathfrak{g}$, X je ad-nilpotentní. Dále každá komplexní maticová nilpotentní Lieova algebra $\mathfrak{g}$ má ve vhodné bázi tvar:

$$X = \begin{pmatrix} A_1(X) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n(X) \end{pmatrix}, \text{ kde } A_i(X) = \begin{pmatrix} \lambda_i(X) & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i(X) \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathfrak{g}^*,\ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Důkaz. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} = \{\mathrm{ad}_X | X \in \mathfrak{g}\}$ je tvořena nilpotentními operátory $\xRightarrow{\text{Lemma 7}}$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ je nilpotentní maticová algebra $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ je nilpotentní. Opačná implikace plyne z poznámky (46).

Dále libovolné V nad $\mathbb{C}$ lze rozložit jako

$$V = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(X)} \lim_{n\to+\infty} \ker(X-\lambda\mathbb{1})^n, \qquad \forall X \in \mathfrak{gl}(V).$$

Indukcí ukážeme:

$$(X-\lambda\mathbb{1})^k\, Y = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\mathrm{ad}_X)^j\, Y\, (X-\lambda\mathbb{1})^{k-j}, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(V).$$

$k = 1$ zřejmé, $k-1 \to k$:

$$\begin{aligned}
(X-\lambda\mathbb{1})^k\, Y &= (X-\lambda\mathbb{1}) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (\mathrm{ad}_X)^j\, Y\, (X-\lambda\mathbb{1})^{k-1-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Big(X\,(\mathrm{ad}_X)^j\, Y - \lambda\,(\mathrm{ad}_X)^j\, Y\Big)\,(X-\lambda\mathbb{1})^{k-1-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Big((\mathrm{ad}_X)^{j+1}\, Y + (\mathrm{ad}_X)^j\, YX - \lambda\,(\mathrm{ad}_X)^j\, Y\Big)\,(X-\lambda\mathbb{1})^{k-1-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Big((\mathrm{ad}_X)^{j+1}\, Y + (\mathrm{ad}_X)^j\, Y(X-\lambda\mathbb{1})\Big)\,(X-\lambda\mathbb{1})^{k-1-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j}\right) (\mathrm{ad}_X)^j\, Y\,(X-\lambda\mathbb{1})^{k-1-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\mathrm{ad}_X)^j\, Y\,(X-\lambda\mathbb{1})^{k-j}
\end{aligned}$$

Nechť $\mathfrak{g}$ nilpotentní podalgebra $\mathfrak{gl}(V)$, V nad $\mathbb{C}$, $X \in \mathfrak{g}$, označíme $W_\lambda^X := \lim_{n\to+\infty} \ker(X-\lambda\mathbb{1})^n$, kde $\lambda \in \sigma(X)$, tedy platí:

$$(X-\lambda\mathbb{1})^k\, YW_\lambda^X = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\mathrm{ad}_X)^j\, Y\,(X-\lambda\mathbb{1})^{k-j}\, W_\lambda^X \xrightarrow{k\to+\infty} 0, \qquad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Protože pro dostatečně velké k je buď $(\mathrm{ad}_X)^j Y = 0$ nebo $(X-\lambda\mathbb{1})^{k-j} W_\lambda^X = 0$ $\Rightarrow$ $YW_\lambda^X \subset W_\lambda^X$, tj. W_λ^X je invariantní podprostor. □

Lemma 8. Buď V nad $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ řešitelná. Pak $\exists v \in V,\ v \neq 0,\ \lambda \in g^*,\ \forall X \in \mathfrak{g},\ Xv = \lambda(X)v$.

Důkaz. Indukcí na $\dim \mathfrak{g}$: $\dim \mathfrak{g} = 1$ zřejmé.
$\dim \mathfrak{g} = k-1 \to k$: $\mathfrak{g}$ řešitelná, $\dim \mathfrak{g} = k \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subsetneq \mathfrak{g}$, vezmeme $\mathfrak{h}$ podprostor $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{h}$, $\dim \mathfrak{h} = k-1 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{h}$ je ideál, protože $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{h}$ a protože $\mathfrak{h}$ je řešitelný splňuje indukční předpoklad $\quad \Rightarrow \quad \exists v_0 \in V,\ v \neq 0,\ Xv_0 = \lambda_0(X)v_0,\ \forall X \in \mathfrak{h}$. Vezmeme libovolné $Z \in \mathfrak{g} \backslash \mathfrak{h}$, tedy $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \operatorname{span}\{Z\}$, a definujeme $v_{j+1} = Zv_j,\ j \in \mathbb{N}_0,\ W = \operatorname{span}\{v_j\}_{j=0}^{+\infty}$. Platí ale $\dim W \leqslant \dim V < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists p \in \mathbb{N},\ W = \operatorname{span}\{v_j\}_{j=0}^{p},\ ZW \subset W$. Pro libovolné $X \in \mathfrak{h}$ platí:

$$
\begin{aligned}
Xv_0 &= \lambda(X)v_0 \\
Xv_1 &= XZv_0 = ZXv_0 + \overbrace{[X,Z]}^{\in \mathfrak{h}}\, v_0 = \lambda(X)Zv_0 + \lambda([X,Z])v_0 \\
&= \lambda(X)v_1 + \lambda([X,Z])v_0 \\
Xv_2 &= ZXv_1 + [X,Z]v_1 = \lambda(X)v_2 + 2\lambda([X,Z])v_1 + \lambda([[X,Z],Z])v_0 \\
&\vdots \\
Xv_j &= \lambda(X)v_j + \underbrace{\quad \dots \quad}_{\in \operatorname{span}\{v_0,\dots,v_{j-1}\}}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad \mathsf{Tr}\ X|_W = \dim W \cdot \lambda(X)$, když teda $\dim W \neq 0$:

$$
\lambda([X,Z]) = \frac{1}{\dim W} \mathsf{Tr}\ [X,Z]|_W = \frac{1}{\dim W} \left(\mathsf{Tr}\ XZ|_W - \mathsf{Tr}\ ZX|_W \right) = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{h}
$$

$\Rightarrow \quad Xv_1 = \lambda(X)v_1,\ \forall X \in \mathfrak{h} \quad \Rightarrow \quad$ indukcí dostáváme $Xv_j = \lambda(X)v_j,\ \forall X \in \mathfrak{h} \quad \Rightarrow \quad \forall X \in \mathfrak{h}$ jsou současně diagonální na W. A protože $ZW \subset W \quad \Rightarrow \quad \exists v \in W,\ v \neq 0 : Zv = \lambda v$, je už lemma dokázáno. ☐

Věta 27. (Lieova) Buď $\mathfrak{g}$ podalgebra $\mathfrak{gl}(V)$, V nad $\mathbb{C}$. Potom je $\mathfrak{g}$ řešitelná právě tehdy, když je možno $\forall X \in \mathfrak{g}$ převést současně na horní trojúhelníkový tvar.

Důkaz. $\mathfrak{g}$ tvoří horní trojúhelníkové matice $\quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}$ řešitelná.

Naopak, mějme řešitelnou algebru $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, V nad $\mathbb{C} \quad \xRightarrow{\text{Lemma 8}} \quad \exists v_1 \in V,\ v_1 \neq 0,\ \lambda_1 \in \mathfrak{g}^*,\ \forall X \in \mathfrak{g},\ Xv_1 = \lambda_1(X)v_1$. Definujeme $V_1 := \operatorname{span}\{v_1\}$ a reprezentaci $\mathfrak{g}$ na V/V_1:

$$
\phi(X)\,(v + V_1) = Xv + V_1, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}, v \in V.
$$

$\phi(\mathfrak{g})$ je opět řešitelná maticová algebra $\quad \xRightarrow{\text{Lemma 8}} \quad \exists v_2 \in V,\ v_2 \notin V_1,\ \widetilde{\lambda}_2 \in \phi(\mathfrak{g})^*$:

$$
\begin{aligned}
\phi(X)\,(v_2 + V_1) &= Xv_2 + V_1 \\
&= \widetilde{\lambda}_2(\phi(X))\,(v_2 + V_1) = \widetilde{\lambda}_2(\phi(X))v_2 + V_1, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.
\end{aligned}
$$

Položíme tedy $\lambda_2 := \widetilde{\lambda} \circ \phi \quad \Rightarrow \quad Xv_2 = \lambda_2(X)v_2$. Definujeme $V_2 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ a pokračujeme indukcí. Získáme bázi V ve tvaru $\{v_1, v_2, \dots\}$ s vlastností

$$
Xv_j = \lambda_j(X)v_j \bmod [v_1, \dots, v_{j-1}]_\lambda, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.
$$

$\Rightarrow \quad$ v této bázi jsou všechny $X \in \mathfrak{g}$ horní trojúhelníkové matice. ☐

Důsledek 17. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná $\quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^{(1)}$ je nilpotentní.

Důkaz. Pro reálnou algebru máme:

$$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^k = \left(\mathfrak{g}^k\right)_{\mathbb{C}}, \qquad (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{(k)} = \left(\mathfrak{g}^{(k)}\right)_{\mathbb{C}}$$

$\Rightarrow$ platí proto: $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ je řešitelná (resp. nilpotentí) $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ je řešitelná (resp. nilpotentní).

Stačí tedy ukázat platnost pro V nad $\mathbb{C}$:

$\Leftarrow$) $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^2$ je Abelovská, tj. řešitelná, $\mathfrak{g}^2$ je řešitelná $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ je řešitelná.

$\Rightarrow$) $\mathfrak{g}$ řešitelná $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je řešitelná $\Leftrightarrow$ ve vhodné bázi $\mathfrak{g}$ je $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ vyjádřeno pomocí horních trojúhelíkových matic $\Rightarrow$ $\forall X, Y \in \mathfrak{g},\ Z = [X, Y] : \mathrm{ad}_Z = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]$ je horní trojúhelníková matice s nulovou diagonálou, tj. všechna $\mathrm{ad}_Z \in \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^2}$ jsou striktně horní trojúhelníkové matice $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^2}$ je nilpotentní algebra $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}^2$ je nilpotentní algebra. $\square$

8 Cartanova kritéria

Věta 28. $\mathfrak{g}$ podalgebra $\mathfrak{gl}(V)$ a $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ je $\mathrm{Tr}(XY) = 0$. Pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná.

Důkaz. Pro V nad $\mathbb{C}$ (jinak komplexifikací), ukážeme že $\forall X \in \mathfrak{g}^{(1)}$, X je nilpotentní, pak je totiž $\mathfrak{g}^{(1)}$ nilpotentní $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}^{(1)}$ řešitelná, $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ řešitelná $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ řešitelná.

Pro $X \in \mathfrak{g}^{(1)}$ použijeme Jordanův rozklad ve vhodné bázi V:

$$X = S + N, \quad [S, N] = 0, \quad \exists k \in \mathbb{N},\ N^k = 0, \quad S = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Pro $\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_S, \mathrm{ad}_N : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ a $\{E_{ij}\}$ bázi $\mathfrak{gl}(V)$, tedy máme:

$$\mathrm{ad}_X = \mathrm{ad}_S + \mathrm{ad}_N, \quad [\mathrm{ad}_S, \mathrm{ad}_N] = 0, \quad (\mathrm{ad}_N)^{2k} = 0, \quad \mathrm{ad}_S\left(E_{ij}\right) = \left(\lambda_i - \lambda_j\right) E_{ij},$$

tj. ad_S je diagonální a $\mathrm{ad}_X = \mathrm{ad}_S + \mathrm{ad}_N$ je Jordanův rozklad $\Rightarrow$ $\exists p \in \mathcal{P}[x]$, $\mathrm{ad}_S = p(\mathrm{ad}_X)$. Dále platí: $\overline{S} = \mathrm{diag}\left(\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n\right)$ $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}_{\overline{S}}\left(E_{ij}\right) = \left(\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j\right) E_{ij}$ $\Rightarrow$ $\exists$ polynom $q : \overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j = q\left(\lambda_i - \lambda_j\right)$ $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}_{\overline{S}} = q\left(\mathrm{ad}_S\right)$ $\Rightarrow$ $\exists \widetilde{p} \in \mathcal{P}[x]$, $\mathrm{ad}_{\overline{S}} = q\left(\mathrm{ad}_S\right) = \widetilde{p}\left(\mathrm{ad}_X\right)$ $\Rightarrow$ Pro $\mathrm{ad}_S, \mathrm{ad}_N, \mathrm{ad}_{\overline{S}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, protože jsou to polynomy v ad_X, platí:

$$\begin{aligned}
[\overline{S}, N] &= \mathrm{ad}_{\overline{S}} N = \widetilde{p}(\mathrm{ad}_X) N = \widetilde{p}(0) N \\
\left(\overline{S} N\right)^2 &= \overline{S} N \overline{S} N = \overline{S}^2 N^2 - \overline{S}\widetilde{p}(0) N N = \left(\overline{S}^2 - \widetilde{p}(0)\overline{S}\right) N^2 \\
&\vdots \\
\left(\overline{S} N\right)^k &= (\dots) N^k
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\overline{S}N$ je nilpotentní.

$$\mathrm{Tr}\left(\overline{S} X\right) = \mathrm{Tr}\left(\overline{S}(S + N)\right) = \mathrm{Tr}\left(\overline{S} S\right) + \underbrace{\mathrm{Tr}\left(\overline{S} N\right)}_{=0} = \sum_{j=1}^{n} \left|\lambda_j\right|^2$$

$\forall X \in \mathfrak{g}^{(1)}, X = \sum_k [A_k, B_k]$, kde $A_k, B_k \in \mathfrak{g}$ platí:

$$\mathrm{Tr}\left(\overline{S} X\right) = \mathrm{Tr}\left(\overline{S} \sum_k [A_k, B_k]\right) = \sum_k \mathrm{Tr}\left(\overline{S} A_k B_k - \overline{S} B_k A_k\right) = \sum_k \mathrm{Tr}\big(\underbrace{[\overline{S}, A_k]}_{\in \mathfrak{g}} B_k\big) = 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda_j = 0$, $\forall j \in \hat{n}$ $\Rightarrow$ $X = N$. ☐

Následující věty umožňují rozhodnout, zda je $\mathfrak{g}$ řešitelná nebo poloprostá pouze na základě znalosti K a $\mathfrak{g}^2$. Nazývají se **Cartanova kritéria**.

Věta 29. (1. Cartanovo kritérium) Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná $\Leftrightarrow$ $K(X, Y) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall Y \in \mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}^2$.

Důkaz. $\Rightarrow$) nad $\mathbb{C}$ (jinak komlplexifikací): $\mathfrak{g}$ řešitelná $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ řešitelná $\overset{Lie}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ ve vhodné bázi tvoří horní trojúhelníkové matice, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{(1)}} = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}})^{(1)}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{(1)}}$ obsahuje horní trojúhelníkové matice s nulovou diagonálou $\Rightarrow$ $K(X, Y) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_Y\right) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{g}^{(1)}$.

$\Leftarrow$) $K(X, Y) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall Y \in \mathfrak{g}^{(1)}$ $\Rightarrow$ $K(X, Y) = 0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}^{(1)}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y\right) = 0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}^{(1)}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{(1)}}$ řešitelná $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}^{(1)}$ řešitelná. Zároveň $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ je Abelovská $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ řešitelná. ☐

Poznámka 47. Připomeňme $\mathfrak{h}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} | K(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$.

Věta 30. (2. Cartanovo kritérium) Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je poloprostá $\Leftrightarrow$ její Killingova forma K je nedegenerovaná, tj. $\mathfrak{g}^{\perp} = 0$.

Důkaz. $\Rightarrow$) degenerovaná K $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ není poloprostá: Definujeme radikál Killingovy formy:

$$\operatorname{rad} K = \mathfrak{g}^{\perp} = \{X \in g | K(X,Y) = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$$

$K|_{\operatorname{rad} K \times \operatorname{rad} K} = 0 \xRightarrow{1.\ Cartan.\ k.}$ $\operatorname{rad} K$ je řešitelný ideál, tj $\exists k \in \mathbb{N}_0,\ (\operatorname{rad} K)^{(k)} \neq 0,\ (\operatorname{rad} K)^{(k+1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\operatorname{rad} K)^{(k)} \neq 0,\ \left[(\operatorname{rad} K)^{(k)}, (\operatorname{rad} K)^{(k)}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}$ není poloprostá.

$\Leftarrow$) $\mathfrak{g}$ není poloprostá $\Rightarrow$ K je degenerovaná: $\mathfrak{g}$ není poloprostá $\Rightarrow$ $\exists \mathfrak{h} \neq 0$, $\mathfrak{h}$ ideál, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$. Pro libovolné $X \in \mathfrak{h},\ Y, Z \in g$ platí:

$$(\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y)^2 Z = \underbrace{\operatorname{ad}_X \underbrace{\operatorname{ad}_Y \underbrace{\operatorname{ad}_X \underbrace{\operatorname{ad}_Y Z}_{\in \mathfrak{g}}}_{\in \mathfrak{h}}}_{\in \mathfrak{h}}}_{\in [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = 0} = 0.$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y$ je nilpotentní $\Rightarrow$ $K(X,Y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y) = 0$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\perp}$, $\mathfrak{h} \neq 0$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}^{\perp} \neq 0$, tj. algebra má degenerovanou formu. □

Poznámka 48. Pro konečněrozměrné vektorové prostory je bilineární forma ω degenerovaná $\Leftrightarrow$ $\det \omega = 0$. (ω značí v tomto případě zároveň i matici formy.)

Věta 31. Poloprostá Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je direktním součtem prostých ideálů.

Důkaz. $\mathfrak{g}$ poloprostá, tj. $\exists \mathfrak{h}$ ideál, $0 \neq \mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ ($\mathfrak{h}^{\perp}$ taky ideál). Pro libovolné $X, Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}, Z \in \mathfrak{g}$ platí:

$$K([X,Y], Z) = -K(Y, \underbrace{[X,Z]}_{\in \mathfrak{h}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad [X,Y] \in \mathfrak{g}^{\perp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}\right)^{(1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp} = 0.$$

A když zvolíme (X_j) bázi $\mathfrak{h}$ máme:

$$\forall Y \in \mathfrak{g},\ A(Y) = X_j K(X_j, Y) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ran} A = \mathfrak{h},\ \ker A = \mathfrak{h}^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \dim \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{h}^{\perp} = \dim \mathfrak{g}$$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{h}^{\perp} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp} = \mathfrak{g}$. Dál rekurzí (pokud $\mathfrak{h}$ není prostý, postup zopakujeme). □

Věta 32. Všechny derivace poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ jsou vnitřní.

Důkaz. Označme $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ Lieovu algebru všech derivací algebry $\mathfrak{g}$, potom $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$. Pro libovolné $D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g}),\ X, Y \in \mathfrak{g}$ platí:

$$[D, \operatorname{ad}_X] Y = D([X,Y]) - [X, D(Y)] = [D(X).Y] + [X, D(Y)] - [X, D(Y)] = \operatorname{ad}_{D(X)} Y$$

$\Rightarrow$ $[D, \operatorname{ad}_X] = \operatorname{ad}_{D(X)},\ \forall D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g}),\ \forall X \in \mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ tvoří ideál $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ $\Rightarrow$ $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}})^{\perp}$ ideál $\Rightarrow$ $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \cap \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}^{\perp}$ ideál. Dále platí:

$$\mathfrak{g} \text{ poloprostá} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \ker \operatorname{ad} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g} \cong \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \text{ poloprostá.}$$

$\Rightarrow$ K Killingova forma na $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ zúžená na $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ je nedegenerovaná, tj. i zúžená na $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \cap \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}^{\perp}$ je nedegenerovaná a protože $K|_{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \cap \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}^{\perp} \times \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \cap \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}^{\perp}} = 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \cap \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}^{\perp}$ řešitelný ideál v poloprosté algebře $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \cap \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}^{\perp} = 0$. Pro libovolné $D \in \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}^{\perp},\ X \in \mathfrak{g}$ proto máme:

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \ni \operatorname{ad}_{D(X)} = [D, \operatorname{ad}_X] \in \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ad}_{D(X)} = 0, \qquad \forall D \in \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}^{\perp},\ \forall X \in \mathfrak{g}$$

$\Rightarrow \quad D(X) \in \ker \mathrm{ad} = \{0\},\ \forall D \in \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}^{\perp},\ \forall X \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}^{\perp} = 0$. Zároveň platí:

$$\dim \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} + \dim \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}^{\perp} = \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$$

$\Rightarrow \quad \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$. □

8.1 Cartanova podlagebra

Definice 48. **Normalizátor** podalgebry $\mathfrak{h}$ v $\mathfrak{g}$ je $\mathrm{Norm}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} | [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$.

Poznámka 49. Zřejmě $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Norm}(\mathfrak{h})$ a pro $\mathfrak{h}$ ideál $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Norm}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$.

Definice 49. **Cartanova podalgebra** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je libovolná nilpotentní podalgebra, která je rovna svému normalizátoru.

Poznámka 50. Cartanova podalgebra je pro algebry nad $\mathbb{C}$ určena jednoznačně až na automorfismus. Nad $\mathbb{R}$ to obecně neplatí.

Definice 50. $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{C}$, $X \in \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_\lambda(X) := \lim_{k\to+\infty} \ker(\mathrm{ad}_X - \lambda \mathbb{1})^k$ (zobecněné vlastní podprostory odpovídající Jordanovým blokům).

- Pro libovolný $X \in \mathfrak{g}$ je $\mathfrak{g} = \dot{+}_{\lambda \in \sigma(\mathrm{ad}_X)} \mathfrak{g}_\lambda(X)$.
- $\dim \mathfrak{g}_0(X) \geqslant 1$, protože $\mathrm{ad}_X X = [X, X] = 0$ a tedy $X \in \mathfrak{g}_0(X)$.
- $\dim \mathfrak{g}_0(X)$ se nazývá **nulita prvku** X.

Poznámka 51. Pokud $\lambda \notin \sigma(X) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}_\lambda(X) \equiv \{\vec{0}\}$.

Definice 51. $X \in \mathfrak{g}$ je **regulární** $\Leftrightarrow \dim \mathfrak{g}_0(X) = \min_{Y \in \mathfrak{g}} \dim \mathfrak{g}_0(Y)$, tj. nulita je nejmenší možná.

Poznámka 52. Skoro všechny prvky $X \in \mathfrak{g}$ jsou regulární, ve smyslu: Nechť $\{e_j\}_{j=1}^n$ báze $\mathfrak{g}$ a $X = \alpha^j e_j$, potom $\mu(\{\{\alpha^j\}_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n | X \text{ není regulární}\}) = 0$, kde μ je Lebesgueova míra na $\mathbb{C}^n$.

Lemma 9.

$$(\mathrm{ad}_X - (\lambda+\mu)\mathbb{1})^k [Y, Z] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{1})^j Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{1})^{k-j} Z \right], \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Důkaz. Indukcí: $k = 1$:

$$(\mathrm{ad}_X - (\lambda+\mu)\mathbb{1}) [Y, Z] = [(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{1}) Y, Z] + [Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{1}) Z]$$

$k - 1 \to k$:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}_X - (\lambda+\mu)\mathbb{1})^k [Y, Z] &= (\mathrm{ad}_X - (\lambda+\mu)\mathbb{1}) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{1})^j Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{1})^{k-1-j} Z \right] = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{1})^{j+1} Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{1})^{k-1-j} Z \right] + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{1})^j Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{1})^{k-j} Z \right] = \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j} \right) \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{1})^j Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{1})^{k-j} Z \right] = \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{1})^j Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{1})^{k-j} Z \right]
\end{aligned}$$

□

Důsledek 18. $\left[\mathfrak{g}_\lambda(X), \mathfrak{g}_\mu(X)\right] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}(X)$

Lemma 10. Buď X regulární prvek $\mathfrak{g}$. Pak $\mathfrak{g}_0(X)$ je nilpotentní podalgebra $\mathfrak{g}$.

Důkaz. $[\mathfrak{g}_0(X), \mathfrak{g}_0(X)] \subset \mathfrak{g}_0(X) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}_0(X)$ je podalgebra. Zřejmě $\mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ je nilpotentní a $\forall\lambda \in \sigma(\mathrm{ad}_X)$, $\lambda \neq 0$, $\mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{g}_\lambda(X)}$ je regulární zobrazení. Vezmeme $\forall Y \in \mathfrak{g}_0(X)$, $Y(t) = tY + (1-t)X \in \mathfrak{g}_0(X)$. Protože $[\mathfrak{g}_0(X), \mathfrak{g}_\lambda(X)] \subset \mathfrak{g}_\lambda(X)$, platí $\mathrm{ad}_{Y(t)}\mathfrak{g}_\lambda(X) \subset \mathfrak{g}_\lambda(X)$, dosadíme $t = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ad}_{Y(0)}\Big|_{\mathfrak{g}_\lambda(X)}$ je regulární zobrazení pokud $\lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ protože vlastní čísal závisí na parametrech spojitě a $Y(0) = X$, tak platí:

$$\exists\varepsilon > 0,\ \forall\lambda \in \sigma(\mathrm{ad}_X),\ \lambda \neq 0,\ \forall|t| < \varepsilon,\ \mathrm{ad}_{Y(t)}\Big|_{\mathfrak{g}_\lambda(x)} \text{ je regulární.}$$

$\Rightarrow \quad \mathfrak{g}_0(Y(t)) \subset \mathfrak{g}_0(X)$, $\forall|t| < \varepsilon$ (na ostatních prostorech je zobrazení regulární) $\Rightarrow$ díky minimalitě nulity musí být $\mathfrak{g}_0(Y(t)) = \mathfrak{g}_0(X)$, $\forall|t| < \varepsilon$, tj.:

$$\ker\left(t\mathrm{ad}_Y + (1-t)\mathrm{ad}_X\right)^k = \mathfrak{g}_0(X), \qquad \forall|t| < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ Operátor $\left(\mathrm{ad}_{Y(t)}\Big|_{g_0(X)}\right)^k$ je polynom v t s hodnotami v maticích, nulový $\forall|t| < \varepsilon \quad \Rightarrow$ je to nulový polynom $\Rightarrow \quad \left(\mathrm{ad}_Y|_{\mathfrak{g}_0(X)}\right)^k = \left(\mathrm{ad}_{Y(1)}\Big|_{\mathfrak{g}_0(X)}\right)^k = 0 \quad \Rightarrow \quad$ všechny elementy $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$ jsou $\mathrm{ad}|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ nilpotentní $\Rightarrow \quad \mathfrak{g}_0(X)$ nilpotentní. $\square$

Důsledek 19. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0(H)}\Big|_{\mathfrak{g}}$ je maticová reprezentace $\mathfrak{g}_0(H)$, tj. maticová nilpotentní algebra nad $\mathbb{C}$. Z Engelovy věty víme, že existuje báze $\mathfrak{g}$ taková, že $\forall H \in \mathfrak{g}_0(H)$, $\{\lambda_j\} \subset (\mathfrak{g}_0(H))^*$ máme:

$$\mathrm{ad}_H = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
0 & & ? & & & & & & & \\
\vdots & \ddots & & & \mathbb{O} & & & \mathbb{O} & & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & & & & & & & \\
\hline
 & & & \lambda_1(H) & & ? & & & & \\
 & \mathbb{O} & & & \ddots & & & \mathbb{O} & & \cdots \\
 & & & 0 & & \lambda_1(H) & & & & \\
\hline
 & & & & & & \lambda_2(H) & & ? & \\
 & \mathbb{O} & & & \mathbb{O} & & & \ddots & & \\
 & & & & & & 0 & & \lambda_2(H) & \\
\hline
 & \vdots & & & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}\right)$$

Definice 52. Nenulové $\lambda_j \in \mathfrak{g}_0^*$ z rozkladu ad_H, $\forall H \in \mathfrak{g}_0$ se nazývají **kořeny**. Množinu všech kořenů značíme Δ.

Definice 53. Podprostor $\mathfrak{g}_\lambda$ příslušející kořenu λ se nazývá **kořenový podprostor**. Vektor $Y_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$ se nazývá **kořenový vektor**.

Věta 33. Buď $X \in \mathfrak{g}$ regulární, $\mathfrak{g}$ poloprostá. Potom $\mathfrak{g}_0(X)$ je Cartanova podalgebra $\mathfrak{g}$.

Důkaz. $\mathfrak{g}$ poloprostá, X regulární $\quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \dotplus \dot{+}_{\lambda\in\Delta}\mathfrak{g}_\lambda$, kde $\mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{g}_0(X)$ nilpotentní. Normalizátor $\mathfrak{g}_0$ je $\mathfrak{g}_0$: $\forall H \in \mathfrak{g}_0$, $\mathrm{ad}_H : \mathfrak{g}_\lambda \to \mathfrak{g}_\lambda$ a $\forall Y \in \mathfrak{g}_\lambda$, $\lambda \neq 0$ platí:

$$[H, Y_\lambda] = \lambda(H)Y_\lambda + \underbrace{\ldots}_{\text{LN na } Y_\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_\lambda = 0,$$

protože $\forall\lambda \in \Delta,\ \exists H \in \mathfrak{g}_0,\ \lambda(H) \neq 0$. Takže $\forall H \in \mathfrak{g}_0,\ \forall Y \in \mathfrak{g},\ Y = \sum_{\lambda\in\Delta} Y_\lambda$ platí:

$$[H, Y] = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = 0.$$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_0$ se rovná svému normalizátoru, tedy $\mathfrak{g}_0$ je Cartanova podalgebra $\mathfrak{g}$. □

Poznámka 53. Tento rozklad je výhodný pouze pro **poloprosté** algebry, protože tam vždy $\mathfrak{g}_\lambda$ odpovídá celému zobecněnému podprostoru ($\lambda = 0$ Cartanově podalgebře $\mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{g}_0(X)$) a tak lze rozložit celou algebru

$$\mathfrak{g} = \dot{\sum_{\lambda\in\Delta\cup\{0\}}} \mathfrak{g}_\lambda\,.$$

Pro nepoloprosté algebry to zaručeno není, protože pro zobecněné podprostory není zaručena existence vlastních vektorů a tedy ani příslušných funkcionálů λ.

Příklad 23. Různé volby $\mathfrak{g}_0$ pro algebru $\mathfrak{sl}(2) = \mathrm{span}\{H, X_+, X_-\}$.

Regulární prvky jsou např. H a $X_+ + X_-$.[3] Definujeme souřadnicové funkcionály:

$$X = \phi(X)H + \phi_+(X)X_+ + \phi_-(X)X_-\,.$$

Můžeme tak nalézt dva rozklady

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(H) = \mathrm{span}\{H\}, & \mathfrak{g}_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{X_+\}, & \mathfrak{g}_{-\lambda_1} = \mathrm{span}\{X_-\}\,; \\ \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(X_+ + X_-) = \mathrm{span}\{X_+ + X_-\}, & \mathfrak{g}_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{H - X_+ + X_-\}, & \mathfrak{g}_{-\lambda_2} = \mathrm{span}\{-H - X_+ + X_-\}\,, \end{array}$$

$\lambda_1 = 2\phi$, $\lambda_2 = 2(\phi_+ + \phi_-)$.

Lemma 11. $K(H, Y) = 0,\ \forall H \in \mathfrak{g}_0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}_\lambda,\ \lambda \in \Delta$.

Důkaz. $\mathrm{ad}_H : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_\mu,\ \mathrm{ad}_Y : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$, kde $\mu \in \Delta \cup \{0\} \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_Y)^k : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_{\mu+k\lambda} \quad \Rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N} : \mu + k\lambda$ není ani kořen ani 0 $\quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}_{\mu+k\lambda} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_Y$ je nilpotentní $\Rightarrow$ $K(H, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_Y) = 0$, tj. $\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\lambda,\ \forall\lambda \in \Delta$. □

Lemma 12. $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá, $H \in \mathfrak{g}_0$, potom platí:

$$\lambda(H) = 0, \forall\lambda \in \Delta \quad \Rightarrow \quad H = 0,$$

tj. $\mathrm{span}\,\Delta = \mathfrak{g}_0^*$.

Důkaz. $\lambda(H) = 0,\ \forall\lambda \in \Delta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{g}}$ je horní torjúhelníková matice s nulovou diagonálou $\Rightarrow$ $\forall\widetilde{H} \in \mathfrak{g}_0 : K(H, \widetilde{H}) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_{\widetilde{H}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad H \in \mathfrak{g}_0^\perp \wedge H \in \mathfrak{g}_\lambda^\perp \quad \Rightarrow \quad H \in \mathfrak{g}^\perp \quad \Rightarrow \quad H = 0$, protože $\mathfrak{g}$ je poloprostá, tj. K nedegenerovaná. □

Věta 34. (Alternativní definice) Cartanova podalgebra $\mathfrak{g}_0$ komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je maximální Abelovská podalgebra, splňující $\forall H \in \mathfrak{g}_0,\ \mathrm{ad}_H$ je poloprostý prvek.

Důkaz. Máme rozklad $\mathfrak{g} = \dot{+}_{\lambda\in\Delta\cup\{0\}} \mathfrak{g}_\lambda$ a platí:

$$\begin{aligned} &K([H_1, H_2], X) = 0, && \forall H_1, H_2 \in \mathfrak{g}_0,\ \forall X \in \mathfrak{g}_\lambda,\ \lambda \in \Delta, \\ &K([H_1, H_2], H_3) = \mathrm{Tr}\Big(\underbrace{[\mathrm{ad}_{H_1}, \mathrm{ad}_{H_2}]}_{\text{ostře hor. trojúh.}} \mathrm{ad}_{H_3}\Big) = 0, && \forall H_1, H_2, H_3 \in \mathfrak{g}_0. \end{aligned}$$

[3] Tady je vidět, že vlastnost regularity není lineární, protože X_+ ani X_- regulární nejsou.

$\Rightarrow \quad [H_1, H_2] \in \mathfrak{g}^{\perp} = \{0\},\ \forall H_1, H_2 \in \mathfrak{g}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}_0$ Abelovská a maximální, protože $\mathrm{Norm}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$. Dále platí:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{g}_\lambda} &= \lambda(H)\mathbb{1} + \underbrace{\dots}_{\text{nad diag.}} && \forall H \in \mathfrak{g}_0,\ \forall \lambda \in \Delta, \\ \mathrm{ad}_H &= S + N && S \text{ poloprostý},\ \exists k \in \mathbb{N},\ N^k = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad S|_{\mathfrak{g}_\lambda} = \lambda(H)\mathbb{1},\ \forall \lambda \in \Delta \cup \{0\}$. Takže $\forall X \in \mathfrak{g}_\lambda,\ \forall Y \in \mathfrak{g}_\mu$, kde $\lambda, \mu \in \Delta \cup \{0\}$, máme:

$$S[X,Y] = (\lambda(H) + \mu(H))\,[X,Y] = [\lambda(H)X, Y] + [X, \mu(H)Y] = [SX, Y] + [X, SY]$$

$\Rightarrow \quad S \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g}),\ \mathfrak{g}$ poloprostá $\quad \Rightarrow \quad \exists W \in \mathfrak{g},\ S = \mathrm{ad}_W \quad \wedge \quad \exists p \in \mathcal{P}[x],\ S = p(\mathrm{ad}_H) = \mathrm{ad}_W$.

$$\left[\mathrm{ad}_W, \mathrm{ad}_{H_1}\right] = \left[p(\mathrm{ad}_H), \mathrm{ad}_{H_1}\right] = 0, \qquad \forall H_1 \in \mathfrak{g}_0,$$

protože $\mathfrak{g}_0$ Abelovská $([H, H_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathrm{ad}_H, \mathrm{ad}_{H_1}] = 0)$. Zároveň $\mathfrak{g}$ poloprostá, tj. $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 0 = \ker \mathrm{ad} \quad \Rightarrow \quad [W, H_1] = 0,\ \forall H_1 \in \mathfrak{g}_0 \quad \Rightarrow \quad W \in \mathfrak{g}_0$ díky maximalitě. Máme tedy

$$N = \mathrm{ad}_H - S = \mathrm{ad}_H - \mathrm{ad}_W = \mathrm{ad}_{\underbrace{H-W}_{\in \mathfrak{g}_0}}$$

$\Rightarrow \quad \sigma(\mathrm{ad}_{H-W}) = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \lambda(H - W) = 0,\ \forall \lambda \in \Delta \quad \Rightarrow \quad H - W = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ad}_H = S. \qquad \square$

8.2 Shrnutí pro poloprosté Lieovy algebry

komplexní poloprostá algebra $\mathfrak{g}$:

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \dotplus \dot{\sum}_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}_\lambda$

$\mathfrak{g}_0 \dots$ Cartanova podalgebra

$\Delta = \{\lambda\} \subset \mathfrak{g}_0^* \dots$ množina kořenů (lin. funkcionály)

$\lambda \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \neq 0 \quad \wedge \quad \exists \mathfrak{g}_\lambda \subset\subset \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_\lambda \neq 0,\ \mathfrak{g}_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker(\mathrm{ad}_H - \lambda(H)\mathbb{1}) \dots$ kořenový podprostor

$\forall H_1, H_2 \in \mathfrak{g}_0,\ [H_1, H_2] = 0,$

$\forall H \in \mathfrak{g}_0,\ \mathrm{ad}_H : \mathfrak{g}_\lambda \to \mathfrak{g}_\lambda$ je poloprostý $\forall \lambda \in \Delta$

$\forall \lambda \in \Delta,\ \forall X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda,\ \mathrm{ad}_{X_\lambda} : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$, tj. ad_{X_λ} je nilpotentní

$\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\lambda, \forall \lambda \in \Delta$

9 Klasifikace pomocí kořenů

Nadále se budeme zabývat pouze **komplexními poloprostými** algebrami.

Lemma 13. $\mathfrak{g}_\alpha \perp_K \mathfrak{g}_\beta,\ \forall \alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\},\ \alpha + \beta \neq 0.$

Důkaz. Díky ad-invarianci Killingovy formy, pro libovolné $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta,\ H \in \mathfrak{g}_0$ platí:

$$(\alpha+\beta)(H)K\left(X_\alpha, X_\beta\right) = (\alpha(H)+\beta(H))\,K\left(X_\alpha, X_\beta\right) = K\left([H, X_\alpha], X_\beta\right) + K\left(X_\alpha, [H, X_\beta]\right) = 0$$

Protože $\alpha + \beta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists H \in \mathfrak{g}_0,\ (\alpha+\beta)(H) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad K(X_\alpha, X_\beta) = 0$ □

Lemma 14. $K|_{\mathfrak{g}_0} = K|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0}$ je nedegenerovaná a $\forall \alpha \in \Delta,\ \exists_1 H_\alpha \in \mathfrak{g}_0,\ \forall H \in \mathfrak{g}_0 : \alpha(H) = K(H, H_\alpha)$, tj. máme vyjádření $\alpha(\cdot) = K(\cdot, H_\alpha)$.

Důkaz. K je na $\mathfrak{g}$ nedegenerovaná $\Rightarrow$ $\forall H \in \mathfrak{g}_0,\ H \neq 0,\ \exists X \in \mathfrak{g},\ K(H,X) \neq 0$, zároveň $\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\alpha,\ \forall \alpha \in \Delta$ $\Rightarrow$ $\forall H \in \mathfrak{g}_0,\ \exists X \in \mathfrak{g}_0,\ K(H,X) \neq 0$ $\Rightarrow$ K je nedegenerovaná na $\mathfrak{g}_0$ $\Rightarrow$ $H \to K(\cdot, H)$ je izomorfismus $\mathfrak{g}_0$ a $\mathfrak{g}_0^*$ $\Rightarrow$ $\exists_1 H_\alpha$ a pro ztotožnení $\mathfrak{g}_0$ a $\mathfrak{g}_0^*$ lze použít $\alpha(\cdot) = K(\cdot, H_\alpha)$. □

Lemma 15. Buď $\alpha \in \Delta$. Potom $-\alpha \in \Delta$ a $\forall X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \forall X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha},\ [X_\alpha, X_{-\alpha}] = K(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha$.

Důkaz. $\alpha \in \Delta \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\} \quad \Rightarrow \quad \forall \mu \in \Delta \cup \{0\} \backslash \{-\alpha\},\ \mathfrak{g}_\mu \perp \mathfrak{g}_\alpha$. Kdyby $-\alpha \notin \Delta$, tj. $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$, spor. Takže $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq \{0\}$ a $\forall X \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \forall X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha},\ \forall H \in \mathfrak{g}_0$ platí:

$$K\big([X_\alpha, X_{-\alpha}] - K(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha, H\big) = K\big([X_\alpha, X_{-\alpha}], H\big) - K(X_\alpha, X_{-\alpha})\underbrace{K(H_\alpha, H)}_{\alpha(H)} =$$

$$= -K\big(X_\alpha, \underbrace{[H, X_{-\alpha}]}_{-\alpha(H)X_{-\alpha}}\big) - K(X_\alpha, X_{-\alpha})\alpha(H) = \big(\alpha(H) - \alpha(H)\big)K(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 0$$

$\Rightarrow \quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] - K(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha = 0.$ □

Lemma 16. $\forall \alpha \in \Delta,\ \alpha(H_\alpha) = K(H_\alpha, H_\alpha) \neq 0.$

Důkaz. $\mathfrak{g}_{-\alpha} \perp \mathfrak{g}_\beta,\ \forall \beta \in (\Delta \cup \{0\}) \backslash \{\alpha\}$ a $\mathfrak{g}_{-\alpha} \not\perp \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \exists X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha},\ X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ K(X_{-\alpha}, X_\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. Uvažujme $\mathfrak{g}_{\beta\alpha} = \dot{+}_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ad}_{X_\alpha},\ \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}},\ \mathrm{ad}_{H_\alpha}$ ponechávají $\mathfrak{g}_{\beta\alpha}$ invariantní.

$$\begin{aligned} \mathsf{Tr}|_{\mathfrak{g}_{\beta\alpha}} \mathrm{ad}_{H_\alpha} &= \mathsf{Tr}|_{\mathfrak{g}_{\beta\alpha}} \left[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right] = 0 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\beta + k\alpha)(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} = \beta(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{\beta\alpha} + \alpha(H_\alpha) \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Pokud $\alpha(H_\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(H_\alpha) = 0,\ \forall \beta \in \Delta \quad \Rightarrow \quad H_\alpha = 0$, spor s předpokladem $\alpha \in \Delta$ $(\alpha(H) = K(H, H_\alpha),\ \forall H \in \mathfrak{g}_0) \quad \Rightarrow \quad \alpha(H_\alpha) \neq 0.$ □

Definice 54. $\forall \alpha \in \Delta$ definujeme $T_\alpha := \frac{2}{K(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha,\ a_{\beta\alpha} := \beta(T_\alpha) = \frac{2K(H_\beta, H_\alpha)}{K(H_\alpha, H_\alpha)}$.

Nalezněme $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ splňující $K(X_\alpha, X_{-\alpha}) = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)}$. Pak platí:

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = K(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha = T_\alpha, \tag{7}$$

$$[T_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2X_{\pm\alpha}\,. \tag{8}$$

To jsou komutační relace $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, konkrétně pro $H = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right),\ X_+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ X_- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Lemma 17. *V nad $\mathbb{C}$, $\dim V < +\infty$, nechť $T, X_\pm \in \mathcal{L}(V)$ splňuje $[X_+, X_-] = T$, $[T, X_\pm] = \pm 2X_\pm$ a působí na V ireducibilně. Potom $\exists \{v_j\}_{j=0}^{\dim V - 1}$ báze splňující $Tv_j = (r-2j)v_j$, $X_- v_j = v_{j+1}$, $X_+ v_j = j(r-j+1)v_{j-1}$,* kde $r = \dim V - 1$.

Důkaz. $T \in \mathcal{L}(V) \quad \Rightarrow \quad \exists v \in V,\ v \neq 0,\ \widetilde{\lambda} \in \mathbb{C},\ Tv = \widetilde{\lambda} v$

$$T(X_+ v) = [T, X_+]v + X_+ Tv = 2X_+ v + \widetilde{\lambda} X_+ v = (\widetilde{\lambda} + 2) X_+ v$$

$\Rightarrow \quad X_+ v = 0 \quad \vee \quad \widetilde{\lambda} + 2 \in \sigma(T) \quad \Rightarrow$ po konečně mnoho krocích získame $v_0 \in V,\ v_0 \neq 0,\ Tv_0 = \lambda v_0,\ X_+ v_0 = 0$ a položíme $v_j = X_-^j v_0,\ \forall j \in \mathbb{N}$.

$$Tv_j = [T, X_-]X_-^{j-1} v_0 + X_- T X_-^{j-1} v_0 = -2X_- X_-^{j-1} v_0 + X_- T X_-^{j-1} v_0 = \cdots = (\lambda - 2j) X_-^j v_0 = (\lambda - 2j) v_j$$

$\Rightarrow$ pokud $v_j \neq 0$ pak jsou to vlastní vektory T příslušné různým vlastním číslům $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : v_k \neq 0,\ v_{k+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{span}\{v_0, \ldots, v_k\}$ je podprostor V uzavřený vůči T, X_-. Indukcí ukážeme že $X_+ v_j = j(\lambda - j + 1) v_{j-1}$:

$$\begin{aligned}
X_+ v_1 &= X_+ X_- v_0 = [X_+, X_-] v_0 + X_- X_+ v_0 = T v_0 = \lambda v_0 \\
X_+ v_2 &= X_+ X_- v_1 = T v_1 + X_- X_+ v_1 = (\lambda - 2) v_1 + \lambda v_1 = (2\lambda - 2) v_1 \\
&\ \vdots \\
X_+ v_j &= X_+ X_- v_{j-1} = T v_{j-1} + X_-(j-1)(\lambda - j + 2) v_{j-2} = \\
&= \big((\lambda - 2j + 2) + (j-1)(\lambda - j + 2)\big) v_{j-1} = \big(j(\lambda - j + 2) - j\big) = j(\lambda - j + 1) v_{j-1}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{span}\{v_0, \ldots, v_k\}$ je uzavřený i vůči $X_+ \quad \Rightarrow \quad$ je to invariantní podprostor ireducibilní reprezentace $\Rightarrow \quad V = \operatorname{span}\{v_0, \ldots, v_k\},\ k = r,\ X_+ v_{r+1} = (r+1)(\lambda - r) v_r = 0$, přičemž $v_r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = r$. ☐

Lemma 18. Nechť $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ množina kořenů, pak:

1. $\forall \alpha, \beta \in \Delta,\ \exists p, q \in \mathbb{Z}, p \leqslant 0 \leqslant q,\ \{\beta + k\alpha\}_{k=p}^{q}$ je nepřerušená posloupnost kořenů, případně 0. Navíc žádné jiné kořeny tvaru $\beta + k\alpha$ neexistují a platí
$$a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = 2\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = \frac{2K(H_\beta, H_\alpha)}{K(H_\alpha, H_\alpha)} = -(p+q)\,. \tag{9}$$
2. $\alpha \in \Delta$. Potom $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ a $\beta \in \Delta \cap \operatorname{span}\{\alpha\} \Leftrightarrow \beta = \pm\alpha$.
3. $\forall \alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \neq 0$. Potom $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. (Pokud $\alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}$, je $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \{0\}$.)
4. $\forall \alpha, \beta \in \Delta, \epsilon = \operatorname{sgn} a_{\beta\alpha}$. Potom $\beta - \epsilon\alpha,\ \beta - 2\epsilon\alpha, \ldots, \beta - a_{\beta\alpha}\alpha$ jsou kořeny.

Důkaz. $\alpha, \beta \in \Delta \quad \Rightarrow \quad \exists X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta,\ X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ nenulové a platí $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = T_\alpha,\ [T_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2X_{\pm\alpha}$. Označíme $V := \operatorname{span}\left\{(\operatorname{ad}_{X_\alpha})^j \left(\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta \,\middle|\, j, k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathfrak{g}_{\beta\alpha} = bigplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}$ a máme $\operatorname{ad}_{T_\alpha} X_\beta = \beta(T_\alpha) X_\beta$, takže

$$\operatorname{ad}_{T_\alpha} (\operatorname{ad}_{X_\alpha})^j \left(\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta = (\beta(T_\alpha) + 2j - 2k) (\operatorname{ad}_{X_\alpha})^j \left(\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta.$$

$\Rightarrow \quad V$ uzavřený vůči $\operatorname{ad}_{T_\alpha},\ \operatorname{ad}_{X_{\pm\alpha}} : \operatorname{ad}_{T_\alpha} = \left[\operatorname{ad}_{X_\alpha}, \operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}\right]$.

$$0 = \operatorname{Tr}|_V \operatorname{ad}_{T_\alpha} = \sum_{j,k} (\beta(T_\alpha) + 2j - 2k) \dim \operatorname{span}\left\{(\operatorname{ad}_{X_\alpha})^j \left(\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta\right\}$$

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ad}_{X_\alpha})^{j+1} \left(\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^{k+1} X_\beta &= (\operatorname{ad}_{X_\alpha})^j \left[\operatorname{ad}_{X_\alpha}, \operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}\right] \left(\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta + (\operatorname{ad}_{X_\alpha})^j \operatorname{ad}_{X_{-\alpha}} \operatorname{ad}_{X_\alpha} \left(\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta = \\
&= (\operatorname{ad}_{X_\alpha})^j \operatorname{ad}_{T_\alpha} \left(\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta + \ldots \quad \in \operatorname{span}\left\{(\operatorname{ad}_{X_\alpha})^j \left(\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta\right\}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ pro každé získané vlastní číslo ad_{T_α} na V máme 1 vlastní vektor $\Rightarrow$ protože je to ireducibilní reprezentace, dle předchozího lemmatu platí $r = \dim V - 1$, $\sigma\left(\mathrm{ad}_{T_\alpha}|_V\right) = \{r, r-2, \dots, -r\}$ $\Rightarrow$ $\{\beta(T_\alpha) + 2k\}_{k=p}^{q} \subset \{r, r-2, \dots, -r\}$, tedy

$$\left.\begin{array}{l}\beta(T_\alpha) + 2q = r \\ \beta(T_\alpha) + 2p = -r\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \beta(T_\alpha) = -(p+q).$$

Dále označíme $\widetilde{V} := \operatorname{span}\{X_{-\alpha}\} \dotplus \dot{\sum}_{k\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{g}_{k\alpha}$, takže $\widetilde{V}$ je invariantní vzhledem k ad_{X_α}, ad_{T_α}.

$$0 = \mathsf{Tr}|_{\widetilde{V}}\, \mathrm{ad}_{T_\alpha} = \mathsf{Tr}|_{\widetilde{V}}\left[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right] = -\underbrace{\alpha(T_\alpha)}_{=2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} k\, \underbrace{\alpha(T_\alpha)}_{=2} \dim \mathfrak{g}_{k\alpha}$$

$\Rightarrow$ $\sum_{k\in\mathbb{N}} k \dim \mathfrak{g}_{k\alpha} = 1$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_\alpha = 1$, $\mathfrak{g}_{k\alpha} = 0$, $\forall k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $k\alpha \notin \Delta$, $\forall k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$. Použitím $\frac{\alpha}{k}$ místo α dostaneme $\frac{\alpha}{k} \notin \Delta$, $\forall k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$. Nechť $\beta = c\alpha$, $c \notin \mathbb{Z}$, BÚNO $c > 0$ (jinak $\alpha \to -\alpha$), pak

$$\beta(T_\alpha) = c\alpha(T_\alpha) = 2c = b \in \mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad c = \frac{b}{2},\ b \in \mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad \{\beta + k\alpha\}_{k=p}^{q} = \left\{\left(\frac{b}{2} + k\right)\alpha\right\}_{k=p}^{q}.$$

Zároveň $b = -(p+q)$, $p \leqslant 0 \leqslant q$ $\Rightarrow$ $-p \geqslant b$, takže

$$\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{b}{2} + \underbrace{\left(-\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{\geqslant p}\right)\alpha \in \Delta$$

$\Rightarrow$ spor s tím, že $\frac{\alpha}{2} \notin \Delta$. Tím je dokázan bod 2., zbytek bodu 1. dokážeme sporem: Nechť $\exists \widetilde{\beta} = \beta + n\alpha$, $n < p \vee n > q$, zkonstruujeme posloupnost z $\widetilde{\beta} \in \Delta$ a přepíšeme ji zpátky pomocí $\{\beta + k\alpha\}_{k=\widetilde{p}}^{\widetilde{q}}$. Díky tomu, že $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, $\forall \alpha \in \Delta$, musí být $\{p, \dots, q\} \cap \{\widetilde{p}, \dots, \widetilde{q}\} = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\widetilde{p} > q \vee \widetilde{q} < p$. Analogicky máme taky $a_{\beta\alpha} = -(\widetilde{p} + \widetilde{q})$, takže

$$\widetilde{p} + \widetilde{q} < \widetilde{p} + p < 2p \leqslant p + q \qquad\qquad (\text{BÚNO } \widetilde{q} < p)$$

$\Rightarrow$ $\alpha_{\alpha\beta} < \alpha_{\alpha\beta}$, spor. Tím je bod 1 dokázan. Bod 3. plyne z ireducibility konstruované na V. Zbýva tedy už jen bod 4. BÚNO $a_{\beta\alpha} > 0$, $-a_{\beta\alpha} = (p+q)$ $\Rightarrow$ $p \leqslant -a_{\beta\alpha} \leqslant q$ $\Rightarrow$ $\beta - a_{\beta\alpha}\alpha \in \Delta$. □

Definice 55. $a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = \frac{2K(H_\beta, H_\alpha)}{K(H_\alpha, H_\alpha)} = -(p+q)$ nazýváme **Cartanova celá čísla**.

Věta 35. (**Weyl-Chevalleyho normální forma**) Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ systém kořenů. Pak $\mathfrak{g}$ je direktním součtem $\mathfrak{g}_0$ a jednorozměrných kořenových podprostorů $\mathfrak{g}_\alpha = \operatorname{span}\{E_\alpha\}$ a platí:

- $[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha$, $\forall H \in \mathfrak{g}_0$,
- $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathfrak{g}_0$, $\forall \alpha \in \Delta$,
- $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}$, $N_{\alpha\beta} \neq 0$ pro $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta$.

(Navíc lze volit E_α tak, aby $N_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$, $N_{\alpha\beta} = -N_{(-\alpha)(-\beta)} = \pm(-p+1)$, kde $p \leqslant 0$ je nejmenší číslo splňující $\beta + p\alpha \in \Delta$, volba $\pm$ je částečně daná strukturou $\mathfrak{g}$ a částečně záleží na nás...)

Důkaz. Plyne z předchozího lemmatu. □

Poznámka 54. Protože víme, že komutační relace určují $\mathfrak{g}$ jednoznačně (až na izomorfismus), můžeme tak klasifikovat všechny poloprosté komplexní algebry.

10 Kořenové diagramy, Cartanova matice

Tyto diagramy nám pomohou znázornit strukturu algebry a určit tak, které algebry jsou izomorfní.

Definice 56. $\mathfrak{h} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, $\mathfrak{h}^\# := \text{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$

Poznámka 55. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{h}^\# \times \mathfrak{h}^\# \to \mathbb{R} : \langle\alpha,\beta\rangle = K(H_\alpha, H_\beta)$ je skalární součin.

Důkaz. Protože $a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) \in \mathbb{Z}$, $a_{\alpha\alpha} = \alpha(T_\alpha) = 2$, platí

$$K(H_\alpha, H_\beta) = \text{Tr}\left(\text{ad}_{H_\alpha} \circ \text{ad}_{H_\beta}\right) = \sum_{\tilde\alpha\in\Delta} \tilde\alpha(H_\alpha)\tilde\alpha(H_\beta) = \left(\frac{1}{4}\sum_{\tilde\alpha\in\Delta} a_{\tilde\alpha\alpha} \underbrace{a_{\tilde\alpha\beta}}_{\in\mathbb{Z}}\right) K(H_\alpha,H_\alpha)K(H_\beta,H_\beta)$$

$$\alpha(H_\alpha) = K(H_\alpha,H_\alpha) = \frac{(\alpha(H_\alpha))^2}{4}\sum_{\tilde\alpha\in\Delta} a^2_{\tilde\alpha\alpha} \quad\Rightarrow\quad \alpha(H_\alpha) = \frac{4}{\sum_{\tilde\alpha\in\Delta} a^2_{\tilde\alpha\alpha}} > 0$$

$\Rightarrow \quad K(H_\alpha, H_\alpha) \in \mathbb{R}$, tj. $K|_{\mathfrak{h}}$ je reálná symetrická bilineární forma. Pro $H \in \mathfrak{h}$, $H = \sum_\alpha c_\alpha H_\alpha$, $c_\alpha \in \mathbb{R}$ máme:

$$K(H,H) = \sum_{\tilde\alpha\in\Delta}\tilde\alpha(H)\tilde\alpha(H) = \sum_{\tilde\alpha\in\Delta}\tilde\alpha(H)^2 > 0$$
$$\tilde\alpha(H) = c_\alpha \underbrace{\tilde\alpha(H_\alpha)}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$$

Takže pokud $K(H,H) = 0 \quad\Rightarrow\quad \forall\tilde\alpha \in \Delta,\ \tilde\alpha(H) = 0 \quad\Rightarrow\quad H = 0$. K tedy definuje skalární součin na $\mathfrak{h}$. $\square$

Poznámka 56. $H \in \mathfrak{h} \quad\Rightarrow\quad iH \notin \mathfrak{h}$ neboť $K(iH,iH) = -K(H,H) \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0 \quad\Rightarrow$ $\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_0$

Definice 57. Kořenový diagram je zakreslení Δ v Euklidově prostoru $\mathbb{R}^l$, kde $l = \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_0$.

Definice 58. Zrcadlení podle nadroviny kolmé k α je $S_\alpha : \mathfrak{h}^\# \to \mathfrak{h}^\# : S_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\frac{\langle\alpha,\lambda\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha = \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha$.

Poznámka 57. $S_\alpha(S_\alpha(\lambda)) = S_\alpha(\lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha) = \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha - \lambda(T_\alpha)(\alpha - 2\alpha) = \lambda \quad\Rightarrow\quad S^2_\alpha = \mathbb{1}$

Poznámka 58. Podle 4. bodu lemmatu 18 je pro $\forall\alpha,\beta\in\Delta$, $S_\alpha(\beta)\in\Delta$. Proto lze uvažovat $S_\alpha : \Delta \to \Delta$, $\forall\alpha\in\Delta$.

Definice 59. Weylova grupa $\mathcal{W}$ kořenového systému Δ je grupa lineárních zobrazení generovaná S_α, $\forall\alpha\in\Delta$.

Poznámka 59. Weylova grupa je konečná protože je obsažena v grupě permutací $S_{\#\Delta}$.

Volbou libovolného $H_0 \in \mathfrak{h}$ máme $\forall\alpha\in\Delta$, $\alpha(H_0) \neq 0 \in \mathbb{R}$. Můžeme tak rozdělit kořeny na kladné a záporné. H_0 považujeme dále za pevně zvolené.

Definice 60. $\Delta^\pm := \{\alpha\in\Delta | \alpha(H_0) \gtrless 0\}$, na Δ definujeme uspořádaní $\alpha \gtreqless \beta \Leftrightarrow \alpha(H_0) \gtreqless \beta(H_0)$.

Volba závisí na H_0, ale při zakreslení tato klasifikace znamená pouze pootočení nákresu a nemá tak na výsledek podstatný vliv.

Poznámka 60. $\forall\alpha\in\Delta^+ : -\alpha\in\Delta^-$, a $\forall\alpha,\beta\in\Delta^+ : \alpha+\beta\in\Delta \Rightarrow \alpha+\beta\in\Delta^+$.

Definice 61. Při zvoleném rozdělení $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ definujeme prosté kořeny $\Delta^p = \{\alpha\in\Delta^+ | \forall\beta,\gamma\in\Delta^+,\ \beta+\gamma\neq\alpha\}$.

Lemma 19. Vlastnosti kořenového diagramu.

1. $\forall \alpha \in \Delta^+,\ \alpha = \sum_{\beta \in \Delta^p} c_\beta \beta$, kde $c_\beta \in \mathbb{N}_0$.
2. $\forall \alpha, \beta \in \Delta^p, \alpha \neq \beta : \langle \alpha, \beta \rangle \leqslant 0$.
3. Δ^p tvoří bázi $\mathfrak{h}^\#$.

Důkaz. 1. $\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta^p \quad \Rightarrow \quad \exists \beta, \gamma \in \Delta^+,\ \beta + \gamma = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha > \beta, \gamma$. Postup lze opakovat pro β, γ atd., dokud nedostaneme prosté kořeny $\quad \Rightarrow \quad$ po konečně mnoha krocích máme součet prostých kořenů. Mohou se opakovat z různých větví výpočtu, dostáváme tedy celočíselné nezáporné koeficienty.

2. Nechť $\alpha, \beta \in \Delta^p$, $\langle \alpha, \beta \rangle > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(T_\beta), \beta(T_\alpha) > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha - \beta, \beta - \alpha \in \Delta$ přičemž jeden z nich je kladný, druhý záporný. BÚNO $\alpha - \beta \in \Delta^+ \quad \Rightarrow \quad \alpha = (\alpha - \beta) + \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \notin \Delta^p$, spor.

3. Vezmeme $X \in \mathfrak{h}^*$ splňující

$$x = \sum_{\alpha_i \in \Delta^p} x_i \alpha_i = \sum_{j \in J} p_j \alpha_j - \sum_{k \in K} n_k \alpha_k = 0,\ \text{kde } J \cap K = \emptyset,\ p_j \geqslant 0,\ n_k \geqslant 0.$$

$\Rightarrow \quad$ protože $\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle \leqslant 0$, $\forall j \in J$, $\forall k \in K$, platí:

$$\tilde{x} = \sum_{j \in J} \underbrace{p_j}_{\geqslant 0} \underbrace{\alpha_j}_{> 0} = \sum_{k \in K} n_k \alpha_k \geqslant 0 \qquad \wedge \qquad \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} p_j n_k \underbrace{\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}_{\leqslant 0} \leqslant 0$$

$\Rightarrow \quad p_j = n_k = 0,\ \forall j \in J,\ \forall k \in K \quad \Rightarrow \quad \{\alpha_i\} \in \Delta^p$ jsou LN.

□

Poznámka 61. To znamená, že Δ^p tvoří tedy i bázi $\mathfrak{g}_0^*$ a zakreslujeme do $\#\Delta^p$-dimenzionálního prostoru. Úhel mezi prostými kořeny je tupý. Δ^+ získáváme celočíselnými kombinacemi prostých kořenů.

Strategie při kreslení kořenového diagramu je tedy začít prostými kořeny a aplikací operací zrcadlení a celočíselných součtů kořenů získávat další kořeny, přičemž kladné získáme pouze nezápornou kombinací kladných. Navíc se může hodit tvrzení 1 lemmatu 18.

Definice 62. Cartanova matice je $a_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$, $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta^p$.

Poznámka 62. Vlastnosti Cartanovy matice a:

- $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \leqslant 0$ pro $i \neq j$,
- $a_{ij} a_{ji} = \frac{4 |\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle|^2}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = 4 \underbrace{\cos^2 \sphericalangle(\alpha_i, \alpha_j)}_{< 1 \text{ díky LN}} \quad \Rightarrow \quad a_{ij} a_{ji} \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \Rightarrow$

  $\Rightarrow \quad \cos \sphericalangle(\alpha_i, \alpha_j) \in \left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle(\alpha_i, \alpha_j) \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

11 Dynkinovy diagramy

Definice 63. Dinkinův diagram je graf sestrojen následovně:

- vrcholy…kořeny $\Delta^p = \{\alpha_j\}_{j=1}^l$, kde $l = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_0$,
- hrany…α_j, α_k jsou spojeny $a_{jk}a_{kj}$ hranami (maximálně 3 hrany). Pokud je hran více, zakreslíme šipku směrem k většímu kořenu (ve smyslu normy indukované $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

Poznámka 63. Pokud $a_{jk}a_{kj} > 1 \quad \Rightarrow \quad$ BÚNO $a_{jk} = -1,\ a_{kj} < -1$:

$$1 \geqslant \frac{a_{kj}}{a_{jk}} = \frac{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = \frac{\|\alpha_k\|^2}{\|\alpha_j\|^2} \quad \Rightarrow \quad \|\alpha_k\| = \sqrt{-a_{kj}}\,\|\alpha_j\| \quad \Rightarrow \quad \|\alpha_k\| = \sqrt{2}\,\|\alpha_j\| \vee \|\alpha_k\| = \sqrt{3}\,\|\alpha_j\|$$

Poznámka 64. Z Dinkinova diagramu je možné zrekonstruovat Cartanovu matici.

Věta 36. Mějme $\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_0,\ \Delta$. Pokud $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2,\ \Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing,\ \langle \alpha, \beta \rangle = 0,\ \forall \alpha \in \Delta_1,\ \forall \beta \in \Delta_2$, pak $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{1,0} \oplus \mathfrak{g}_{2,0},\ \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, kde $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_{1,0} \dotplus \dotplus_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha,\ \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_{2,0} \dotplus \dotplus_{\beta \in \Delta_2} \mathfrak{g}_\beta$.
$(\mathfrak{g}_{1,0} = \operatorname{span}\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_1},\ \mathfrak{g}_{2,0} = \operatorname{span}\{H_\beta\}_{\beta \in \Delta_2},\ [\mathfrak{g}_{1,0}, \mathfrak{g}_{2,0}] = 0,\ K(\mathfrak{g}_{1,0}, \mathfrak{g}_{2,0}) = 0)$
Tj. souvislé komponenty Dynkinova diagramu odpovídají prostým algebrám.

Důkaz.

$$K(H_\alpha, H_\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle = \alpha(T_\beta)\frac{K(H_\beta, H_\beta)}{2} = 0, \qquad \forall \alpha \in \Delta_1,\ \beta \in \Delta_2$$

$\Rightarrow \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{1,0} \oplus \mathfrak{g}_{2,0}$ a platí $\alpha(T_\beta) = a_{\alpha\beta} = 0,\ [H_\alpha, E_\beta] = \beta(H_\alpha)E_\beta = 0$. Zároveň $\forall \alpha \in \Delta_1,\ \forall \beta \in \Delta_2,\ [E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$ pokud $\alpha + \beta \in \Delta$. BÚNO, nechť $\alpha + \beta \in \Delta_1 \quad \Rightarrow \quad \langle \alpha + \beta, \beta \rangle = \langle \beta, \beta \rangle \neq 0$, spor. Tj. $\forall \alpha \in \Delta_1,\ \beta \in \Delta_2,\ \alpha + \beta \notin \Delta \quad \Rightarrow \quad [E_\alpha, E_\beta] = 0$.

$\mathfrak{g}_1$ je podalgebra: Nechť $\alpha, \beta \in \Delta_1,\ \alpha + \beta \in \Delta$. Kdyby $\alpha + \beta \in \Delta_2$, pak $\langle \alpha + \beta, \beta \rangle = \langle \beta, \beta \rangle \neq 0$, spor. $\quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta \in \Delta_1$. Analogicky, g_2 je podalgebra. □

Důsledek 20. Nesouvislé Dinkinovy diagrami odpovídají poloprostým neprostým algebrám.

Poznámka 65. Jednoduše řečeno máme kořeny rozděleny na nezávislé části, které spolu nijak neinteragují, takže i $\mathfrak{g}$ je rozdělena na nezávislé části, které se komutováním nepromíchávají.

Lemma 20. Nechť $\alpha_j, \alpha_k \in \Delta^p,\ j \neq k,\ \|\alpha_j\| \leqslant \|\alpha_k\|$. Potom počet hran spojujících α_j a α_k je $\#\{n \in \mathbb{Z} | \alpha_k + n\alpha_j \in \Delta\} - 1$.

Důkaz. Počet hran mezi α_j, α_k je $q = \frac{4|\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle|^2}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle \langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} \in \{0, 1, 2, 3\}$. Pokud $q = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k + n\alpha_j \notin \Delta, \forall n \neq 0$. Pokud $q \in \{1, 2, 3\} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = -1,\ \frac{2\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = -q = a_{kj} \quad \Rightarrow \quad \alpha_k + \alpha_j, \ldots, \alpha_k - \frac{2\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}\alpha_j = \alpha_k + q\alpha_j$ protože $\{\alpha_k + n\alpha_j\}_{n=p}^q \subset \Delta$, kde $p = 0$ díky $\alpha_j, \alpha_k \in \Delta^p$. Takže $q = \#\{n \in \mathbb{Z} | \alpha_k + n\alpha_j \in \Delta\} - 1$. □

Poznámka 66. Definujeme $e_j := \frac{\alpha_j}{\|\alpha_j\|},\ \forall \alpha_j \in \Delta^p$, tj. $\{e_j\} = \Delta^p_{(N)}$ normovaná báze $\mathfrak{h}^\#$. Označíme $n_{jk} = a_{jk}a_{kj}$ počet hran spojujících α_j a α_k. Pak platí $\langle e_j, e_k \rangle = -\frac{1}{2}\sqrt{n_{jk}}$. Pro libovolný $x = \sum_j x_j e_j$, tedy máme

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_j x_j^2 + 2\sum_{j<k} x_j x_k \langle e_j, e_k \rangle = \sum_j x_j^2 - \sum_{j<k} x_j x_k \sqrt{n_{jk}} > 0\,. \tag{10}$$

Definice 64. Graf nazýváme přípustný, pokud jim určené konstanty n_{jk} definují pozitivně definitní skalární součin

$$\langle x, x\rangle = \sum_j x_j^2 - \sum_{j<k} x_j x_k \sqrt{n_{jk}}$$

Lemma 21. Přípustné grafy splňují:

1. neobsahují uzavřené smyčky,
2. v každém vrcholu se setkávají nejvýše tři hrany,
3. nahradíme-li dvojici vrcholů spojených jednou hranou jediným vrcholem dostaneme opět přípustný graf.

Tj., nejsou přípustné:

$$\equiv\cdot-\,, \qquad >\cdot-\cdot<\,, \qquad =\cdot-\cdot=\,, \qquad =\cdot-\cdot<\,.$$

Důkaz. 1. Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ odpovídají zmyčce bez podsmyčky. Vezmeme $x = \sum_{j=1}^k e_j$, tj. $\langle e_j, e_{j+1}\rangle \neq 0$, $\langle e_k, e_1\rangle \neq 0$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, $\forall i < j-1$.

$$\langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^k 1 - \sum_{\substack{j=1\\ k+1\equiv 1}}^k \sqrt{n_{j,j+1}} \leqslant k - k = 0$$

$\Rightarrow$ nepřípustný graf, spor.

2. Nechť $e \in \Delta_{(N)}^p$ vrchol spojený hranami s $\{e_j\}_{j=1}^k$, tj. $x = e - \sum_{j=1}^k \langle e, e_j\rangle e_j \neq 0$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, $\forall i \neq j \in \{1, \ldots, k\}$.

$$\langle x, x\rangle = 1 + \sum_{j=1}^k \langle e, e_j\rangle^2 - 2\sum_{j=1}^k \langle e, e_j\rangle\langle e, e_j\rangle = 1 - \sum_{j=1}^k \langle e, e_j\rangle^2 > 0$$

$$1 > \sum_{j=1}^k \langle e, e_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^k \underbrace{\frac{\langle \alpha, \alpha_j\rangle^2}{\langle \alpha, \alpha\rangle\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle}}_{\frac{1}{4}\#\{\text{hrany spoj. } \alpha \text{ a } \alpha_j\}}$$

$\Rightarrow$ $4 >$ počet hran na vrcholu α, resp. e.

3. Nechť α_1, α_2 jsou spojené hranou. Pro libovolné $x = \sum_{j=1}^l x^j e_j$ platí:

$$\langle x, x\rangle = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - x^1 x^2 + p_1\left(x^3, \ldots, x^l\right) x^1 + p_2\left(x^3, \ldots, x^l\right) x^2 + p_3\left(x^3, \ldots, x^l\right).$$

Vrcholy e_1, e_2 nahradíme jediným vrcholem e_{12}, tj dostaneme $y := x^{12} e_{12} + \sum_{j=3}^l x^j e_j$ a do $\langle x, x\rangle$ dosadíme $x^1 = x^2 = x^{12}$:

$$\langle y, y\rangle = \left(x^{12}\right)^2 + \left(p_1\left(x^3, \ldots, x^l\right) + p_2\left(x^3, \ldots, x^l\right)\right) x^{12} + p_3\left(x^3, \ldots, x^l\right)$$

$\Rightarrow$ máme pozitivně definitní skalární součin odpovídající sloučenému grafu.

$\square$

Lemma 22. Graf $\underset{1}{\cdot}-\underset{2}{\cdot}=\underset{3}{\cdot}-\underset{4}{\cdot}-\underset{5}{\cdot}$ není přípustný.

Důkaz. $x = \sum_{j=1}^{5} x^j e_j$

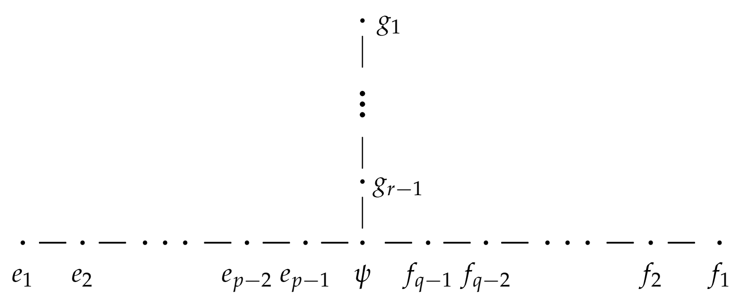
$$Q(x) = \langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{5} \left(x^j\right)^2 - x^1x^2 - \sqrt{2}x^2x^3 - x^3x^4 - x^4x^5$$

Extrém je určen rovnicemi $\frac{\partial Q}{\partial x^j} = 0$:

$$\begin{aligned} 1: &\quad 2x^1 - x^2 = 0 \\ 2: &\quad 2x^2 - x^1 - \sqrt{2}x^3 = 0 \\ 3: &\quad 2x^3 - \sqrt{2}x^2 - x^4 = 0 \\ 4: &\quad 2x^4 - x^3 - x^5 = 0 \\ 5: &\quad 2x^5 - x^4 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad x = \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3, 2, 1\right) \neq 0$ a zároveň $\langle x, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad$ diagram není přípustný. $\square$

Lemma 23. Uvažujme diagram tvaru:



kde $\|\psi\| = \|e_j\| = \|f_j\| = \|g_j\| = 1,\ p \geqslant q \geqslant r \geqslant 2$. Pak platí:

1. Definujeme-li $x = \sum_{j=1}^{p-1} je_j,\ y = \sum_{j=1}^{q-1} jf_j,\ z = \sum_{j=1}^{r-1} jg_j$, pak $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle = 0$, $\langle x, x\rangle = \frac{p(p-1)}{2}$, $\langle y, y\rangle = \frac{q(q-1)}{2}$, $\langle z, z\rangle = \frac{r(r-1)}{2}$.

   Důkaz.

$$\langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{p-1} j^2 - \sum_{j=1}^{p-2} j(j+1) = (p-1)^2 - \sum_{j=1}^{p-2} j = (p-1)^2 - \frac{(p-1)(p-2)}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

$\square$

2. $\theta_x.\theta_y, \theta_z$ úhly mezi x, y, z a $\psi \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z < 1$.

   Důkaz.

$$\psi - \sum_{u \in \{x,y,z\}} \frac{\langle \psi, u\rangle}{\|u\|} u \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 > \sum_{u \in \{x,y,z\}} \frac{|\langle \psi, u\rangle|^2}{\langle u, u\rangle} = \sum_{u \in \{x,y,z\}} cos^2 \sphericalangle(\psi, u)$$

$\square$

3. Platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$.

Důkaz.

$$\frac{|\langle\psi,x\rangle|^2}{\langle x,x\rangle}=\frac{|\langle\psi,(p-1)e_{p-1}\rangle|^2}{\langle x,x\rangle}=\frac{(p-1)^2}{\frac{p(p-1)}{2}}\underbrace{|\langle\psi,e_{p-1}\rangle|^2}_{=\frac{1}{4}}=\frac{(p-1)}{2p}$$

$$1>\sum_{u\in\{x,y,z\}}\frac{|\langle\psi,u\rangle|^2}{\langle u,u\rangle}=\frac{p-1}{2p}+\frac{q-1}{2q}+\frac{r-1}{2r}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)$$

$\Rightarrow\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$ □

4. Přípustné možnosti jsou:

$$r=2\quad\begin{cases} q=2\ \dots\ p\geqslant 2\\ q=3\ \dots\ p=3,4,5\end{cases}$$

Poznámka 67. Je dobré si uvědomit, že kořenové vektory pozitivních kořenů společně s $\mathfrak{g}_0$ tvoří řešitelnou podalgebru $\mathfrak{g}$.

Věta 37. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní prostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ systém kořenů, $\Delta^p\subset\Delta$. Pak její Dinkinův diagram má jednu z následujícíh podob:

$$\text{klasické série algeber}\begin{cases}
A_l: & \begin{array}{ccccccc}\cdot & - & \cdot & - \cdots - & \cdot & - & \cdot\\ 1 & & 2 & & l-1 & & l\end{array} & \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C}),\ l\geqslant 1\\[2ex]
B_l: & \begin{array}{ccccccccc}\cdot & - & \cdot & - \cdots - & \cdot & - & \cdot & \Leftarrow & \cdot\\ 1 & & 2 & & l-2 & & l-1 & & l\end{array} & \mathfrak{so}(2l+1,\mathbb{C}),\ l\geqslant 2\\[2ex]
C_l: & \begin{array}{ccccccccc}\cdot & - & \cdot & - \cdots - & \cdot & - & \cdot & \Rightarrow & \cdot\\ 1 & & 2 & & l-2 & & l-1 & & l\end{array} & \mathfrak{sp}(2l,\mathbb{C}),\ l\geqslant 3\\[2ex]
D_l: & \begin{array}{cccccccc}\cdot & - & \cdot & - \cdots - & \cdot & - & \cdot & <\begin{matrix}\cdot\ l-1\\ \cdot\ l\end{matrix}\\ 1 & & 2 & & l-3 & & l-2 & \end{array} & \mathfrak{so}(2l,\mathbb{C}),\ l\geqslant 4
\end{cases}$$

$$\text{výjimečné algebry}\begin{cases}
E_6: & \begin{array}{ccccccccc} & & & & \cdot & & & & \\ & & & & | & & & & \\ \cdot & - & \cdot & - & \cdot & - & \cdot & - & \cdot\end{array}\\[2ex]
E_7: & \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & & | & & & & \\ \cdot & - & \cdot & - & \cdot & - & \cdot & - & \cdot & - & \cdot\end{array}\\[2ex]
E_8: & \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & & & & | & & & & \\ \cdot & - & \cdot & - & \cdot & - & \cdot & - & \cdot & - & \cdot & - & \cdot\end{array}\\[2ex]
F_4: & \cdot - \cdot \Rightarrow \cdot - \cdot\\
G_2: & \cdot \Rrightarrow \cdot
\end{cases}$$

Důkaz. Výše jsme ukázali, že toto jsou všechny možné diagramy, existence příslušných algeber byla dokázána jejich zkonstruovaním, jednoznačnost plyne z Weyl-Chevalleyho normální formy. □

Poznámka 68. Přehled Cartanových matic klasických sérií (kořeny uspořádány standardně, 0 vynechány):

$$a^{A_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad a^{B_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -2 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$a^{C_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad a^{D_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & -1 & 2 & \\ & & & -1 & & 2 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 69. Pro rychlé určení směru šipky (od menšího k většímu) se hodí vztah

$$\frac{\|\alpha_i\|}{\|\alpha_j\|} = \sqrt{\frac{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}} = \sqrt{\frac{a_{ij}}{a_j i}} \qquad \Rightarrow \qquad \|\alpha_i\| = \sqrt{\frac{a_{ij}}{a_{ji}}} \, \|\alpha_j\| \,. \tag{11}$$

Poznámka 70. Přehled vztahů mezi souřadnicovými funkcionály v definující reprezentaci klasických sérií $\varphi \in \mathfrak{g}_0^*$ (zavedeny na cvikách) a fundamentálními kořeny (viz další kapitola).

A_l: $\lambda_1 = \varphi_1$, $\lambda_2 = \varphi_1 + \varphi_2, \ldots, \lambda_l = \sum_{i=1}^{l} \varphi_i$,
nejvyšší váha definující reprezentace na $V = \mathbb{C}^{l+1}$ je φ_1, $\varphi_1 + \varphi_2$ získáme z $V \wedge V$, atd.

B_l: $\lambda_1 = \varphi_1$, $\lambda_2 = \varphi_1 + \varphi_2, \ldots, \lambda_{l-1} = \sum_{i=1}^{l-1} \varphi_i$, $\lambda_l = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{l} \varphi_i\right)$,
reprezentace poslední nelze vytvořit tenzorovými součiny: *spinorová reprezentace*.

C_l: $\lambda_1 = \varphi_1$, $\lambda_2 = \varphi_1 + \varphi_2, \ldots, \lambda_l = \sum_{i=1}^{l} \varphi_i$,
nejvyšší váha definující reprezentace na $V = \mathbb{C}^{2l}$ je φ_1, $\varphi_1 + \varphi_2$ získáme z $V \wedge V = \mathbb{C}^{l(2l-1)}$, atd.

D_l: $\lambda_1 = \varphi_1$, $\lambda_2 = \varphi_1 + \varphi_2, \ldots, \lambda_{l-2} = \sum_{i=1}^{l-2} \varphi_i$, $\lambda_{l-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{l-1} \varphi_i - \varphi_l\right)$, $\lambda_l = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{l} \varphi_i\right)$,
takže máme 2 spinorové reprezentace.

12 Reálné formy komplexních poloprostých algeber

Mějme poloprostou reálnou algebru $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus_{\mathbb{R}} i\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$. Z $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ lze zpetně najít $\mathfrak{g}$:

$$\phi : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : \phi(u+iv) = u - iv,\ \forall u,v \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} | \phi(X) = X\}.$$

Poznámka 71. Vlastnosti ϕ:

1. $\phi \circ \phi = \mathrm{id} \quad \Rightarrow \quad$ je involutivní,
2. $\phi(\lambda X) = \overline{\lambda}\phi(X)$, $\phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y) \quad \Rightarrow \quad$ je antilineární,
3. $\phi\big([u_1 + iv_1, u_2 + iv_2]\big) = \phi\big(\,([u_1,u_2] - [v_1,v_2]) + i\,([v_1,u_2] + [u_1,v_2])\,\big) = ([u_1,u_2] - [v_1,v_2]) - i\,([v_1,u_2] + [u_1,v_2]) = [u_1 - iv_1, u_2 - iv_2] = \big[\phi(u_1+iv_1), \phi(u_2+iv_2)\big] \quad \Rightarrow \quad$ automorfismus.

Tj. reálná forma $\mathfrak{g}$ komplexní algebry $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ nám určuje involutivní antilineární automorfismus ϕ.

Naopak, mějme $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ a její involutivní antilineární automorfismus ϕ. Pak $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} | \phi(X) = X\}$ nám zadává reálnou podalgebru $\mathfrak{g}_\phi$ v $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : (\mathfrak{g}_\phi)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Důkaz. Máme $\phi : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$. Uvažujme $\phi|_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}} : (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \to (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$, $\phi^2 = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \sigma\left(\phi|_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}}\right) = \pm 1$, takže

$$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = \underbrace{\ker\left(\phi|_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}} - \mathbb{1}\right)}_{\mathfrak{g}} \dot{+} \ker\left(\phi|_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}} + \mathbb{1}\right)$$

$\Rightarrow \quad X \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \phi(X) = X \quad \Rightarrow \quad \phi(iX) = -iX \quad \Rightarrow \quad iX \in \ker\left(\phi|_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}} + \mathbb{1}\right) \quad \Rightarrow$ obě jádra mají stejnou dimenzi a násobení i zobrazuje jedno na druhé $\quad \Rightarrow \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ a platí: $\forall X,Y \in \mathfrak{g}$, $\phi\big([X,Y]\big) = [\phi(X), \phi(Y)] = [X,Y] \quad \Rightarrow \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}$, $[X,Y] \in \mathfrak{g}$. ☐

Příklad 24. $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$, $\phi : \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$:

- $\phi(A) = \overline{A}\ \ldots\ \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{R})$
- $\phi(A) = -A^+\ \ldots\ \mathfrak{g} = \big\{X \in \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C}) \big| -X^+ = X\big\} = \mathfrak{su}(l+1)$
- $\phi(A) = -JA^+J$, kde $J = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots 1}_{p}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{q})$:

$$\begin{aligned} \phi(\phi(A)) &= J\left(J\left(A^+\right)^+ J\right) J = A \\ \phi\big([A,B]\big) &= -J[A,B]^+J = J\left[A^+,B^+\right]J = \left[-JA^+J, -JB^+J\right] = [\phi(A),\phi(B)] \end{aligned}$$

$\ldots\ \mathfrak{g} = \big\{X \in \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C}) \big| -JX^+J = X\big\} = \mathfrak{su}(p,q),\ p+q = l+1.$

Uvažujme komplexní poloprostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ vyjádřenou ve Weyl-Chevalleyho bázi, tj.:

$$\begin{gathered} \mathfrak{g} = \mathrm{span}\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta^p} \dot{+} \dot{\sum_{\alpha\in\Delta}} \mathrm{span}\{E_\alpha\}, \\ [H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha,\ H \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta^p} = \mathfrak{h} \quad \Rightarrow \quad \forall \alpha \in \Delta,\ \alpha(H) \in \mathbb{R} \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \underbrace{K(E_\alpha, E_{-\alpha})}_{\in\mathbb{R}} H_\alpha, \\ [E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta},\ \mathbb{N}_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z},\ N_{(-\alpha)(-\beta)} = -N_{\alpha\beta}. \end{gathered}$$

Označíme

$$\mathfrak{g}_{\text{split}} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta^p} \dotplus \dot{\sum}_{\alpha\in\Delta} \text{span}_{\mathbb{R}}\{E_\alpha\}.$$

$\mathfrak{g}_{\text{split}}$ je reálná forma $\mathfrak{g}$, tj. $\phi(H_\alpha) = H_\alpha$, $\phi(E_\alpha) = E_\alpha$, $\forall H_\alpha, E_\alpha \in \mathfrak{g}_{\text{split}}$,. Zjistíme signaturu Killingovy formy K pro $\mathfrak{g}_{\text{split}}$ (Killingova forma je dobrá pro rozlišení reálnych algeber).

$$\begin{aligned}
&K(H, E_\alpha) = 0 \text{ protože } \mathfrak{h} \perp \text{span}\{E_\alpha\} \\
&K|_{\mathfrak{h}} \text{ je pozitivně definitní} \\
&K(E_\alpha, E_\beta) = 0,\ \alpha + \beta \neq 0 \\
&E_\alpha, E_{-\alpha} : \begin{pmatrix} K(E_\alpha, E_\alpha) & K(E_\alpha, E_{-\alpha}) \\ K(E_{-\alpha}, E_\alpha) & K(E_{-\alpha}, E_{-\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \text{kde } \lambda \neq 0 \ \ldots\ \text{sgn} = (1,1,0)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \text{sgn}\, K|_{\mathfrak{g}_{\text{split}}} = \left(l + \frac{n-l}{2}, \frac{n-l}{2}, 0\right)$. Dále prozkoumáme

$$\mathfrak{g}_{\text{komp}} := \underbrace{\text{span}_{\mathbb{R}}\{iH_\alpha\}_{\alpha\in\Delta^p}}_{i\mathfrak{h}} \dotplus \dot{\sum_{\alpha\in\Delta^+}} \text{span}\left\{\frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \frac{i(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}\right\}.$$

$\forall H_\alpha, E_\alpha \in \mathfrak{g}_{\text{komp}}$, $\phi(H_\alpha) = -H_\alpha$, $\phi(E_\alpha) = -E_{-\alpha}$. Zřejmě platí taky $\phi^2 = \mathbb{1}$. Dále máme:

$$\begin{aligned}
&\phi\big([H_\alpha, H_\beta]\big) = [\phi(H_\alpha), \phi(H_\beta)] \text{ protože } [H_\alpha, H_\beta] = 0 \\
&\phi\big([H_\alpha, E_\beta]\big) = \underbrace{\beta(H_\alpha)}_{\in\mathbb{R}} \phi(E_\beta) = -\beta(H_\alpha)E_{-\beta} = [H_\alpha, E_{-\beta}] = [\phi(H_\alpha), \phi(E_\beta)] \\
&\phi\big([E_\alpha, E_\beta]\big) = N_{\alpha\beta}\phi(E_{\alpha+\beta}) = -N_{\alpha\beta}E_{-\alpha-\beta} = N_{(-\alpha)(-\beta)}E_{-\alpha-\beta} = [-E_{-\alpha}, -E_{-\beta}] = \\
&\qquad = [\phi(E_\alpha), \phi(E_\beta)] \\
&\phi\big([E_\alpha, E_{-\alpha}]\big) = K(E_\alpha, E_{-\alpha})\phi(H_\alpha) = -K(E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha = -[E_\alpha, E_{-\alpha}] = [-E_{-\alpha}, -E_\alpha] \\
&\qquad = [\phi(E_\alpha), \phi(E_{-\alpha})] \\
&\phi\left(\frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-E_{-\alpha} + E_\alpha}{\sqrt{2}} \\
&\phi\left(\frac{i(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-i(-E_{-\alpha} - E_\alpha)}{\sqrt{2}} = \frac{i(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}} \\
&\phi(iH_\alpha) = -i(-H_\alpha) = iH_\alpha \\
&K|_{i\mathfrak{h}} \text{ je negativně definitní}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&K\left(\frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}\right) = -K(E_\alpha, E_{-\alpha}) \\
&K\left(\frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \frac{i(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\
&K\left(\frac{i(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}, \frac{i(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}\right) = -K(E_\alpha, E_{-\alpha})
\end{aligned}\right\} \text{sgn} = (0,2,0) \text{ pro volbu } K(E_\alpha, E_{-\alpha}) > 0$$

$\Rightarrow \quad \text{sgn}\, K|_{\mathfrak{g}_{\text{kompl}}} = (0, n, 0)$.

Věta 38. (Weyl) Buď $\mathfrak{g}$ reálná poloprostá Lieova algebra, G jí odpovídající souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa. Pak G je kompaktní $\Leftrightarrow$ Killingova forma $\mathfrak{g}$ je negativně definitní. Bez důkazu.

13 Význam kompaktních Lieových grup

Mějme X_j bázi $\mathfrak{g}$, $\sigma^k \in \Gamma(T^*G)$, tedy $\forall g, h \in G$ platí:

$$
\begin{aligned}
L_{g*}\left(X_j\big|_h\right) &= X_j\big|_{gh} \\
\sigma^j\left(X_k\big|_g\right) &= \delta^j{}_k \\
L_g^*\left(\sigma^j\Big|_{gh}\right) &= \sigma^j\Big|_h \\
L_g^*\left(\sigma^j\Big|_{gh}\right)\left(X_k\big|_h\right) &= \sigma^j\Big|_{gh}\big(\underbrace{L_{g*}\left(X_k\big|_h\right)}_{X_k|_{gh}}\big) = \delta^j{}_k
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad \omega = \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n$, $n = \dim \mathfrak{g}$, objemový element na G, je levoinvariantní, tj. $L_g^*\omega = \omega$.

Věta 39. Nechť G je kompaktní. Pak $R_g^*\omega = \omega$.

Důkaz. Sporem: Nechť $R^*_{g^{-1}}\omega \neq \omega$ (BÚNO $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{-1}$), $\omega(X_1, \ldots, X_n) = 1$, a nechť $R^*_{g^{-1}}\omega(X_1, \ldots, X_n)\Big|_h = c > 1$ pro zvolené g, h.

$$
\left[L_{g*}, R_{h*}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad L_h^*\left(R^*_{g^{-1}}\omega\right) = R^*_{g^{-1}}\big(\underbrace{L_h^*\omega}_{\omega}\big) = R^*_{g^{-1}}\omega
$$

$\Rightarrow \quad R^*_{g^{-1}}\omega$ je levoinvariantní $\quad\Rightarrow\quad$ na bodě h nezáleží, výsledek je stejný $\forall h$, vezmeme tedy $h = e$. Prodože $\mathrm{Ad}_g = L_{g*} \circ R_{g^{-1}*} : T_eG \to T_eG \equiv \mathfrak{g}$, máme:

$$
\begin{aligned}
c = L_g^* R^*_{g^{-1}}\omega(X_1, \ldots, X_n)\Big|_e &= \omega\left(L_{g*}R_{g^{-1}*}\left(X_1|_e\right), \ldots, L_{g*}R_{g^{-1}*}\left(X_n|_e\right)\right) = \\
&= \omega\left(\mathrm{Ad}_g\left(X_1|_e\right), \ldots, \mathrm{Ad}_g\left(X_n|_e\right)\right) = \det \mathrm{Ad}_g \cdot \underbrace{\omega\left(\left(X_1|_e\right), \ldots, \left(X_n|_e\right)\right)}_{=1} = \det \mathrm{Ad}_g
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad \forall g \in G,\ R^*_{g^{-1}}\omega\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \det \mathrm{Ad}_g =: F(g)$, přičemž pro zvolené g je $F(g) > 1$.

$$
F(g_1g_2) = \det \mathrm{Ad}_{g_1g_2} = \det \mathrm{Ad}_{g_1}\mathrm{Ad}_{g_2} = \det\left(\mathrm{Ad}_{g_1}\right)\det\left(\mathrm{Ad}_{g_2}\right) = F(g_1)F(g_2), \qquad \forall g_1, g_2 \in G
$$

$\Rightarrow \quad F(g^n) = c^n$ a pro $n \to +\infty$ máme $g^n \in G$, $F(g^n) \to +\infty$. Ale F je hladká funkce na G a G je kompaktní, tj. F nabývá maxima a minima, spor $\quad\Rightarrow\quad c = 1$. ☐

Poznámka 72.

algebra:	reálné formy:
A_l	$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$
	$\mathfrak{su}(l+1)$
	$\mathfrak{su}(p+q),\ p+q = l+1$
	$\mathfrak{su}^*(2k) = \left\{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} \Big\| A_1, A_2 \in C^{k,k}\right\}$, $\mathrm{Tr}A_1 + \mathrm{Tr}\overline{A}_1 = 2\mathrm{ReTr}A = 0,\ 2k = l+1$
B_l, D_l	podobně
$C_l\ \ldots\ \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(p,q) = \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C}) \cap \left\{X \in \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C}) \big\| X^+J_{pq} + J_{pq}X = 0\right\},\ p+q = 2l$
	$\mathfrak{sp}_u(2l) = \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2l)$

Poznámka 73. G kompaktní $\quad\Rightarrow\quad \int_G \omega \in \mathbb{R}$. Protože Lieova grupa je vždy orientovatelná, lze výběrem orientace volit $+\infty > \int_G \omega > 0$.

Důsledek 21. 1. $\forall f \in C^\infty(G)$, $\int_G f\omega = \int_G \left(f \circ L_g\right)\omega = \int_G \left(f \circ R_g\right)\omega$, protože

$$\int_G \left(f \circ L_g\right)\omega = \int_G \left(L_g^* f\right)\left(L_g^* \omega\right) = \int_{L_g(G)} f\omega = \int_G f\omega.$$

Analogicky pro R_g.

2. Pro $\rho : G \to GL(V)$, $\dim V < +\infty$ a jakýkoliv skalární součin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na V, zavedeme $\langle u, v\rangle_G := \int_G \langle\rho(g)u, \rho(g)v\rangle \underbrace{\omega(g)}_{\text{míra}}$. Pak

$$\langle\rho(\tilde{g})u, \rho(\tilde{g})v\rangle_G = \int_G \langle\rho(g)\rho(\tilde{g})u, \rho(g)\rho(\tilde{g})v\rangle\,\omega(g) = \int_G \langle\rho(g\tilde{g})u, \rho(g\tilde{g})v\rangle\,\omega(g) =$$

$$= \int_G R_{\tilde{g}}^* \langle\rho(g)u, \rho(g)v\rangle \underbrace{\omega(g)}_{=\left(R_{\tilde{g}}^*\omega\right)(g)} = \int_{R_{\tilde{g}}(G)} \langle\rho(g)u, \rho(g)v\rangle\,\omega(g) = \langle u, v\rangle_G\,.$$

Vzhledem k takto definovanému skalárnímu součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ je ρ unitární (ortogonální, dle tělesa V) reprezentace kompaktní grupy G na V.

Závěr: Konečněrozměrné reprezentace Lieovy grupy G jsou unitární (ortogonální) vůči vhodně zvolenému skalárnímu součinu, tj. jsou úplně reducibilní.

Věta 40. (Weyl) Konečněrozměrné reprezentace komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ jsou úplně reducibilní.

Důkaz. Pro $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ najdeme $\mathfrak{g}_{\text{komp}} : (\mathfrak{g}_{\text{komp}})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$, $\rho|_{\mathfrak{g}_{\text{komp}}} : \mathfrak{g}_{\text{komp}} \to \mathfrak{gl}(V)$, máme tedy i reprezentaci příslušné Lieovy grupy G, ta je úplně reducibilní, tj máme ireducibilní invariantní podprostory pro G_{komp}, $\mathfrak{g}_{\text{komp}}$, $\mathfrak{g}$. □

14 Reprezentace poloprostých Lieových algeber

Uvažujme $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_0$ Caratnova podalgebra, $\alpha \in \Delta$, $T_\alpha \in \mathfrak{g}_0$, $[T_\alpha, T_\beta] = 0$, ρ reprezentace $\mathfrak{g}$ na komplexním vektorovém prostoru V, $\dim V < +\infty$, takže $\rho(g_0) = \{\rho(H) | H \in \mathfrak{g}_0\}$ je podprostor v $\mathcal{L}(V)$ tvořený komutujícími operátory. Potřebujeme ukázat, že jsou diagonální, abychom mohli napsat V jako $\dot{+}$ vlastních podprostorů.

$\alpha \in \Delta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{span}\{X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]\}$ podalgebra izomorfní $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad \rho(X_\alpha), \rho(X_{-\alpha}), \rho(T_\alpha)$ reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ na V, ta je úplně reducibilní, tj. direktní součet ireducibilních reprezentací $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, v každé z nich působí $\rho(T_\alpha)$ diagonálně $\Rightarrow$ $\rho(T_\alpha)$ na V je diagonalizovatelný operátor $\Rightarrow$ $\rho(\mathfrak{g}_0)$ je množina komutujících diagonalizovatelných operátorů $\Rightarrow$ V lze rozložit na společné vlastní podprostory $\rho(\mathfrak{g}_0)$:

$$V = \dot{\sum_{\lambda \in \mathfrak{g}_0^*}} V_\lambda, \qquad V_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker\left(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{1}\right)$$

Definice 65.
- **Váhy** reprezentace ρ (na vekt. prostoru V) algebry $\mathfrak{h}$ nazýváme $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$, takové, že $V_\lambda \neq \{0\}$.
- Příslušné V_λ nazýváme **váhový podprostor** reprezentace ρ příslušný váze λ.
- **Váhový diagram** jsou váhy znázorněné v euklidovském $\mathbb{R}^n$ $\left(\lambda(T_\alpha) \in \mathbb{R}, \text{ tj. } \lambda \in \mathfrak{h}^\#\right)$.
- **Váhová mřížka** je $\mathcal{J} \subset \mathfrak{h}^\#$, $\mathcal{J} = \left\{\lambda \in \mathfrak{h}^\# \middle| \lambda(T_\alpha) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta\right\}$.

Poznámka 74. Pro adjugovanou reprezentaci ($\rho = \operatorname{ad}$) jsou nenulové váhy kořeny a V_0 je Cartanova podalgebra.

Poznámka 75. Mřížka je podgrupou $\mathfrak{h}^\#$: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{J}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \in \mathcal{J}$. Její bázi tvoří $\lambda_j \in \mathfrak{h}^\#$, pro které $\lambda_j(T_{\alpha_k}) = \delta_{jk}$, $\forall \alpha_k \in \Delta^p \quad \Rightarrow \quad \forall \lambda \in \mathcal{J}, \exists m_1, \ldots, m_l, \lambda = \sum m_j \lambda_j$.

Věta 41. Mějme ρ reprezentaci komplexní poloprosté algebry. Nechť Λ_ρ je množina všech vah, $\Lambda_\rho = \left\{\lambda \in \mathfrak{g}_0^* \middle| \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker\left(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{1}\right) \neq 0\right\}$. Pak $\Lambda_\rho \subset \mathcal{J}$, $V = \dot{+}_{\lambda \in \Lambda_\rho} V_\lambda$ a Λ_ρ je invariantní vzhledem k Weylově grupě $\mathcal{W}_\mathfrak{g}$, tj. pokud $S \in \mathcal{W}_\mathfrak{g}$, $\lambda \in \Lambda_\rho \Rightarrow S(\lambda) \in \Lambda_\rho$ ($\forall \alpha \in \Delta$, $S_\alpha : \mathfrak{h}^\# \to \mathfrak{h}^\#$: $S_\alpha(\nu) = \nu - \nu(T_\alpha)\alpha$).
Dále $\forall \lambda \in \Lambda_\rho$, $\varepsilon = \operatorname{sgn} \lambda(T_\alpha)$, platí $\{\lambda, \lambda - \varepsilon\alpha, \ldots, \underbrace{\lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha}_{S_\alpha(\lambda)}\} \subset \Lambda_\rho$ a $\dim V_\lambda = \dim V_{S_\alpha(\lambda)}$.

Důkaz. Už víme, že $V = \dot{+}_{\lambda \in \Lambda_\rho}$, $\sigma\left(\rho(T_\alpha)\right) \subset \mathbb{Z}$, protože je to $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad \Lambda_\rho \subset \mathcal{J}$.

Pro $\alpha \in \Delta$ označíme $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha := \operatorname{span}\{X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha\}$, vezmeme $0 \neq v \in V_\lambda$, $\forall H \in \mathfrak{h}$, $\rho(H)v = \lambda(H)v$, $\rho(X_{\pm\alpha})v \in V$:

$$\rho(H)\left(\rho(X_{\pm\alpha})v\right) = \rho\Big(\underbrace{[H, X_{\pm\alpha}]}_{\pm\alpha(H)X_{\pm\alpha}}\Big)v + \rho(X_{\pm\alpha})(\lambda(H)v) = \left(\lambda(H) \pm \alpha(H)\right)\left(\rho(X_{\pm\alpha})v\right)$$

$\Rightarrow$ pokud $\rho(X_{\pm\alpha})v \neq 0$, pak $\lambda \pm \alpha \in \Lambda_\rho$, $\rho(X_{\pm\alpha})v \in V_{\lambda+\alpha}$.

$\lambda \in \Lambda_\rho \quad \Rightarrow \quad$ najdeme ireducibilní reprezentaci $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$ na V takovou, že $\lambda|_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha}$ je vahou této reprezentace $\quad \Rightarrow \quad \rho(T_\alpha)v = \lambda(T_\alpha)v$, $\lambda(T_\alpha) \in \{-r, -r+2, \ldots, r\}$, tj.:

$$\{\lambda(T_\alpha), \lambda(t_\alpha) - \underbrace{\varepsilon\alpha(T_\alpha)}_{2\varepsilon}, \ldots, \lambda(T_\alpha) - 2\lambda(T_\alpha) = -\lambda(T_\alpha)\} \subset \{-r, \ldots, r\}$$

$\Rightarrow \quad \rho(E_{-\varepsilon\alpha})v, \left(\rho(E_{-\varepsilon\alpha})\right)^2 v, \ldots, \left(\rho(E_{-\varepsilon\alpha})\right)^{|\lambda(T_\alpha)|} v$ jsou díky vlastnostem ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$ nenulové vektory, ale tím pádem $V_{\lambda-\varepsilon\alpha}, \ldots, V_{\lambda-\lambda(T_\alpha)\alpha}$ jsou nenulové, tj. z jednoznačnosti váhových podprostorů ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ vidíme, že pro LN vektory z V_λ máme různé ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$, každá zobrazuje jednoznačně $v \leftrightarrow \left(\rho(E_{-\varepsilon\alpha})\right)^{|\lambda(T_\alpha)|} v \in V_{S_\alpha(\lambda)} \quad \Rightarrow \quad \dim V_\lambda \leqslant \dim V_{S_\alpha(\lambda)}$. $S_\alpha^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ lze obrátit, máme tedy rovnost $\dim V_\lambda = \dim V_{S_\alpha(\lambda)}$. $\square$

Definice 66. Pro $\lambda \in \Lambda_\rho$, $n_\lambda := \dim V_\lambda$ nazýváme **násobnost váhy** λ.

Definice 67. $\lambda \in \Lambda_\rho$ je **dominantní** $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in \Delta^+,\ \lambda(T_\alpha) \geqslant 0$ (tj. $\langle \lambda, \alpha \rangle \geqslant 0$).

Definice 68. $\lambda \in \Lambda_\rho$ je **nejvyšší** $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in \Delta^+,\ \lambda + \alpha \notin \Lambda_\rho$.

Poznámka 76. Evidentně, každá reprezentace má nejvyšší váhu (alespoň jednu).

Definice 69. Pro $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ a její nejvyšší váhu λ zvolíme $v \in V_\lambda,\ v \neq 0$ a definujeme $R_\lambda := \operatorname{span}\{\rho(X_1)\dots\rho(X_k)v | k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ X_j \in \mathfrak{g}\}$, tj. $R_\lambda \subset\subset V,\ \rho(X)R_\lambda \subset R_\lambda,\ \forall X \in \mathfrak{g}$.

Věta 42. R_λ je invariantní podprostor reprezentace ρ, $\rho|_{R_\lambda} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(R_\lambda)$ je ireducibilní, $\dim R_\lambda \cap V_\lambda = 1$, tj. $R_\lambda \cap V_\lambda = \operatorname{span}\{v\}$.

Důkaz. V definici R_λ stačí uvažovat $X = E_\alpha,\ \alpha \in \Delta$ a $X = H,\ H \in \mathfrak{g}_0$. Uvažujme $\alpha, \dots, \omega \in \Delta$:

$$\rho(H)\big(\rho(E_\alpha)\dots\rho(E_\omega)v\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \rho([H,E_\alpha]) = \alpha(H)\rho(E_\alpha)}}{=} \big(\lambda(H) + \alpha(H) + \dots + \omega(H)\big)\big(\rho(E_\alpha)\dots\rho(E_\omega)v\big)$$

$\Rightarrow$ $\rho(E_\alpha)\dots\rho(E_\omega)v \in V_{\lambda+\alpha+\dots+\omega}$, tj. působení $\rho(H)$ je jen násobení číslem, stačí tedy uvažovat jen $X = E_\alpha,\ \alpha \in \Delta$. Vezmeme $w \in R_\lambda \cap V_\lambda, w = \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \Delta \\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}}} konst.\, \rho(E_{\alpha_1})\dots\rho(E_{\alpha_k})v$, v každém členu má být váhový vektor s vahou λ $\Rightarrow$ $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$ $\Rightarrow$ některé jsou kladné, některé záporné. Kladné překomutujeme doprava pomocí $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$, resp. $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = konst.\, H_\alpha$. Nakonec jsou všechny kladné kořeny napravo a protože $\alpha \in \Delta^+$ a z maximality λ, je $\rho(E_\alpha)v = 0$ $\Rightarrow$ v sumě jsou jen záporné kořeny, ale stále platí $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$ $\Rightarrow$ $k = 0$ $\Rightarrow$ $w = konst.\, v$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}_\lambda \cap V_\lambda = \operatorname{span}\{v\}$.

Ireducibilita sporem: Máme $W \subset\subset R_\lambda,\ W \cap (R_\lambda \cap V_\lambda) = \{0\}$, současně W musí být rozložitelný do váhových podprostorů $\Rightarrow$ má nenulový průnik s nějakým $V_k,\ k \neq \lambda,\ k \in \Lambda_{\rho|_{R_\lambda}}$, ozn. $W_k = W \cap V_k$, a $W = \dotplus W_k$. Z úplné reducibility vyplývá, že z $v \in V_\lambda$ se nelze dostat do W_k a z konstrukce $W_k \subset W \subset R_\lambda$ $\Rightarrow$ $W = \{0\}$. □

Důsledek 22. Ireducibilní reprezentace ρ poloprosté komplexní algebry na V s nejvyšší vahou λ, je nutně totožná s příslušným R_λ, tj. $V = R_\lambda$.

Věta 43. Buďte $\rho, \widetilde{\rho}$ ireducibilní reprezentace komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na $V, \widetilde{V}$ s nejvyšší vahou λ. Pak jsou reprezentace $\rho, \widetilde{\rho}$ ekvivalentní, tj. $\exists T : V \to \widetilde{V}$ lineární bijekce taková, že $\widetilde{\rho}(X) \circ T = T \circ \rho(X),\ \forall X \in \mathfrak{g}$.

Důkaz. Z ireducibility $V = R_\lambda, \widetilde{V} = \widetilde{R}_\lambda$. Definujeme ∞-rozměrný prostor V^λ a reprezentaci $\mathfrak{g}$ na něm, tzv. Verma modul: $\operatorname{span}\{E_\alpha, E_{-\alpha} | \alpha \in \Delta^p\}$ generuje pomocí komutátorů celou algebru $\mathfrak{g}$, navíc $\forall \alpha, \beta \in \Delta^p$, $[E_\alpha, E_{-\beta}] = \delta_{\alpha\beta}T_\alpha$, $[E_\alpha, E_\beta] = \underbrace{N_{\alpha\beta}}_{\neq 0} E_{\alpha+\beta}$. Reprezentace je tedy určená působením $E_{\pm\alpha},\ \alpha \in \Delta^p$. Označíme $\Delta^p = \{\alpha_j\}_{j=1}^l,\ E_{\pm j} := E_{\pm\alpha_j},\ v_0$ abstraktní vektor,

$$V^\lambda := \operatorname{span}\left\{E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0 \middle| j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, l\},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\},$$

$T_\alpha(v_0) \stackrel{!}{=} \lambda(T_\alpha)v_0,\ \forall \alpha \in \Delta;\ E_j(v_0) \stackrel{!}{=} 0,\ \forall j \in \{1, \dots, l\};\ E_{-j}\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) = E_{-j}E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0.$

$$\begin{aligned}
T_\beta\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) &= \left(\lambda(T_\beta) - \alpha_{j_1}(T_\beta) - \dots - \alpha_{-j_k}(T_\beta)\right)E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0, \\
E_j\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) &= \delta_{jj_1}\underbrace{T_{\alpha_j}\left(E_{-j_2}\dots E_{-j_k}v_0\right)}_{\left(\lambda\left(T_{\alpha_j}\right) - \alpha_{j_2}\left(T_{\alpha_j}\right) - \dots - \alpha_{-j_k}\left(T_{\alpha_j}\right)\right)E_{-j_2}\dots E_{-j_k}v_0} + \\
&\quad + \delta_{jj_2}E_{-j_1}\left(\lambda\left(T_{\alpha_j}\right) - \alpha_{j_3}\left(T_{\alpha_j}\right) - \dots - \alpha_{-j_k}\left(T_{\alpha_j}\right)\right)E_{-j_3}\dots E_{-j_k}v_0 + \\
&\quad + \dots + \delta_{jj_k}\lambda\left(T_{\alpha_j}\right)E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0.
\end{aligned}$$

Lze ukázat, že tímto způsobem máme definováno na V_λ působení $\text{span}\{E_\alpha, E_{-\alpha} | \alpha \in \Delta^p\}$ indukující konzistentním způsobem reprezentaci $\mathfrak{g}$ na V^λ .

Nyní definujeme $\pi : V^\lambda \to R_\lambda,\ \widetilde{\pi} : V^\lambda \to \widetilde{R}_\lambda$:

$$\pi\left(E_{-j_1} \dots E_{-j_k} v_0\right) = \rho\left(E_{-j_1}\right) \dots \rho\left(E_{-j_k}\right) v,$$
$$\widetilde{\pi}\left(E_{-j_1} \dots E_{-j_k} v_0\right) = \widetilde{\rho}\left(E_{-j_1}\right) \dots \widetilde{\rho}\left(E_{-j_k}\right) \widetilde{v}.$$

Z konstrukce V^λ je $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\rho(X) \circ \pi = \pi \circ X$, $\widetilde{\rho}(X) \circ \widetilde{\pi} = \widetilde{\pi} \circ X \quad \Rightarrow \quad X \ker \pi = \ker \pi$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, podobně $\widetilde{\pi}$, tj. $\ker \pi$, $\ker \widetilde{\pi}$ jsou invariantní podporostory V^λ a π, $\widetilde{\pi}$ zobrazují váhové podporstory na váhové podprostory.

$$\widetilde{\pi}(\ker \pi) = \text{span}\left\{\widetilde{\pi}(V) | V \in \ker \pi, \text{ tj. } \pi(V) = 0\right\}$$
$$\widetilde{\rho}(X)\left(\widetilde{\pi}(\ker \pi)\right) = \widetilde{\pi}(X \ker \pi) \subset \widetilde{\pi}(\ker \pi), \qquad \forall X \in \mathfrak{g}$$

$\Rightarrow \quad \widetilde{\pi}(\ker \pi)$ je invariantní podporstor reprezentace $\widetilde{\rho}$, analogicky $\pi(\ker \widetilde{\pi})$ je invariantni podprostor reprezentace ρ. $\pi\left(\text{span}\{v_0\}\right) = \text{span}\{v\}$, $\left(V^\lambda\right)_\lambda = \text{span}\{v_0\} \quad \Rightarrow \quad \pi|_{\left(V^\lambda\right)_\lambda} \to V_\lambda$ je bijekce $\quad \Rightarrow \quad \left(V^\lambda\right)_\lambda \not\subset \ker \pi$, $\widetilde{V}_\lambda \not\subset \widetilde{\pi}(\ker \pi) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\pi}(\ker \pi) \neq \widetilde{V} = \widetilde{R}_\lambda \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\pi}(\ker \pi) = \{0\}$, analogicky $\pi(\ker \widetilde{\pi}) = \{0\}$. Vidíme tedy, že $\pi\left(V^\lambda\right) = R_\lambda$, $\widetilde{\pi}\left(V^\lambda\right) = \widetilde{R}_\lambda$.

Definujeme $T : R_\lambda \to \widetilde{R}_\lambda$ následovně: $T(w) \stackrel{!}{=} \widetilde{\pi}(W)$, $\forall w = \pi(W) \in R_\lambda$, kde $W \in V^\lambda$ (tj. w je libovolný prvek R_λ). Ověříme konzistenci: $W_0 \in \ker \pi$, $W' = W + W_0 \quad \Rightarrow \quad w = \pi(W')$

$$T(w) = \widetilde{\pi}(W') = \widetilde{\pi}(W + W_0) = \widetilde{\pi}(W) + \underbrace{\widetilde{\pi}(W_0)}_{=0} = \widetilde{\pi}(W).$$

Evidentně k T existuje inverzní zobrazení záměnou π a $\widetilde{\pi}$ v definici $\quad \Rightarrow \quad T$ je bijekce.

$$T\big(\rho(X)w\big) = T\big(\rho(X)\pi(W)\big) = T\big(\pi(XW)\big) = \widetilde{\pi}(XW) = \widetilde{\rho}(X)\widetilde{\pi}(W) = \widetilde{\rho}(X)T(w), \qquad \forall X \in \mathfrak{g}$$

$\Rightarrow \quad T \circ \rho(X) = \widetilde{\rho}(X) \circ T$, $\forall X \in \mathfrak{g}$. □

Důsledek 23. Ireducibilní reprezentace ρ je určena svou nejvyšší vahou λ.

Definice 70. Mějme $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$, $\Delta \supset \Delta^+ \supset \Delta^p = \{\alpha_j\}_{j=1}^l$. Definujeme $\lambda_j \in \mathcal{J} \subset \mathfrak{h}^\# : \lambda_j\left(T_{\alpha_k}\right) = \delta_{jk}$. Takové λ_j nazýváme **fundamentální váhy** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, jim příslušející reprezentace nazýváme **fundamentální reprezentace**.

Poznámka 77. To, že $\lambda_j \in \mathcal{J}$ a že existují příslušné reprezentace je třeba ukázat.

Poznámka 78. Fundamentální váhy lze určit z Cartanovy matice vztahem $\lambda_j = \mathbb{M}_{jk}\alpha_k$, kde $\mathbb{M}_{jk} = (a_{jk})^{-1}$ inverze Cartanovy matice, neboť $\alpha_j = a_{jk}\lambda_k$:

$$a_{ik} = \alpha_i\left(T_{\alpha_k}\right) = a_{ij}\lambda_j\left(T_{\alpha_k}\right) = a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik}.$$

Věta 44. Ke každé l-tici nezáporných celých čísel $m_1, \dots, m_l$ existuje právě jedna ireducibilní reprezentace poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, jejíž nejvyšší váha je $\lambda = \sum_{j=1}^l m_j\lambda_j$.

Důkaz. To že je nejvýše jedna už víme, existenci ukážeme konstrukcí na příkladech. □

14.1 Konstrukce reprezentací

Mějme $\mathfrak{g}$, V, $\widetilde{V}$, $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, $\widetilde{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\left(\widetilde{V}\right)$. Na $V \otimes \widetilde{V}$ definujeme $\rho \otimes \widetilde{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\left(V \otimes \widetilde{V}\right)$ takto:

$$\left(\rho \otimes \widetilde{\rho}\right)(X) = \rho(X) \otimes \mathbb{1}|_{\widetilde{V}} + \mathbb{1}|_V \otimes \widetilde{\rho}(X), \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Ověříme homomorfismus:

$$
\begin{gathered}
\left[(\rho\otimes\widetilde{\rho})\,(X),(\rho\otimes\widetilde{\rho})\,(Y)\right](v\otimes\widetilde{v})=(\rho\otimes\widetilde{\rho})\,(X)\big(\rho(Y)v\otimes\widetilde{v}+v\otimes\widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v}\big)+\\
-(\rho\otimes\widetilde{\rho})\,(Y)\big(\rho(X)v\otimes\widetilde{v}+v\otimes\widetilde{\rho}(X)\widetilde{v}\big)=\rho(X)\rho(Y)v\otimes\widetilde{v}+\cancel{\rho(Y)v\otimes\widetilde{\rho}(X)\widetilde{v}}+\cancel{\rho(X)v\otimes\widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v}}+\\
+v\otimes\widetilde{\rho}(X)\widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v}-\rho(Y)\rho(X)v\otimes\widetilde{v}-\cancel{\rho(X)v\otimes\widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v}}-\cancel{\rho(Y)v\otimes\widetilde{\rho}(X)\widetilde{v}}-v\otimes\widetilde{\rho}(Y)\widetilde{\rho}(X)\widetilde{v}=\\
=\rho\big([X,Y]\big)v\otimes\widetilde{v}+v\otimes\widetilde{\rho}\big([X,Y]\big)\widetilde{v}=(\rho\otimes\widetilde{\rho})\big([X,Y]\big)v\otimes\widetilde{v}
\end{gathered}
$$

$\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá, $\Lambda_\rho,\ \Lambda_{\widetilde{\rho}},\ \lambda\in\Lambda_\rho,\ v\in V_\lambda,\ \mu\in\Lambda_{\widetilde{\rho}},\ \widetilde{v}\in\widetilde{V}_\mu$, pro $H\in\mathfrak{g}_0$ máme:

$$(\rho\otimes\widetilde{\rho})(H)v\otimes\widetilde{v}=\underbrace{\rho(H)v}_{\lambda(H)v}\otimes\widetilde{v}+v\otimes\underbrace{\widetilde{\rho}(H)\widetilde{v}}_{\mu(H)\widetilde{v}}=(\lambda+\mu)(H)v\otimes\widetilde{v}$$

$\Rightarrow\quad \lambda+\mu\in\Lambda_{\rho\otimes\widetilde{\rho}}$, speciálně pokud λ,μ jsou nejvyšší váhy, pak $\lambda+\mu$ je nejvyšší.

Příklad 25. D^j … $(2j+1)$-rozměrná reprezentace $\mathfrak{so}(3)$, tj. $j\in\frac{1}{2}\mathbb{N}_0$.

$$D^j\otimes D^k=D^{j+k}\oplus\cdots\oplus D^{|j-k|}\ \ldots \text{ Clebsh-Gordonův rozklad}$$

Symetrická, antysymetrická reprezentace: Mějme ρ na V algebru $\mathfrak{g}$, $\rho\otimes\rho$ na $V\otimes V=V^{\otimes 2}$, $S_{12}:V\otimes V\to V\otimes V: S_{12}(u\otimes v)=v\otimes u\quad\Rightarrow\quad S_{12}^2=\mathbb{1}\quad\Rightarrow\quad\sigma(S_{12})=\{\pm 1\}$.

$$
\begin{aligned}
[S_{12},(\rho\otimes\rho)(X)](u\otimes v)&=S_{12}\big(\rho(X)u\otimes v+u\otimes\rho(X)v\big)-(\rho\otimes\rho)(X)(v\otimes u)=\\
&=v\otimes\rho(X)u+\rho(X)v\otimes u-\rho(X)v\otimes u-v\otimes\rho(X)u=0,\qquad\forall X\in\mathfrak{g}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow\quad [S_{12},(\rho\otimes\rho)(X)]=[S_{12},\rho(X)\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\rho(X)]=0,\ \forall X\in\mathfrak{g}\quad\Rightarrow\quad(\rho\otimes\rho)$ lze zúžit na vlastní podprostory S_{12}:

$$
\begin{aligned}
V\otimes_S V&=\operatorname{span}\{u\otimes v+v\otimes u|u,v\in V\}\ \ldots\ S_{12}|_{V\otimes_S V}=\mathbb{1}\\
V\wedge V&=\operatorname{span}\{u\otimes v-v\otimes u|u,v\in V\}\ \ldots\ S_{12}|_{V\wedge V}=-\mathbb{1}
\end{aligned}
$$

Nečť λ je nejvyšší a μ 2. nejvyšší váha ireducibilní reprezentace ρ na V, pak máme:

reprezentace:	nejvyšší váha:
$\rho\otimes_S\rho$ na $V\otimes_S V$	2λ
$\rho\wedge\rho$ na $V\wedge V$	$\lambda+\mu$

Příklad 26. $\underset{\text{váhy:}}{D^1\otimes D^1}=\underset{5}{D^2}\oplus\underset{3}{D^1}\oplus\underset{1}{D^0}=\underbrace{\underset{6}{D^1\otimes_S D^1}}_{D^5\oplus D^1}\oplus\underbrace{\underset{3}{D^1\wedge D^1}}_{D^1}$

Zobecnění: $\rho\otimes\rho\otimes\cdots\otimes\rho$ na $V\otimes V\otimes\cdots\otimes V=V^{\otimes k}$

$$
\begin{gathered}
S_{ij}(u_1\otimes\cdots\otimes u_i\otimes\cdots\otimes u_j\otimes\cdots\otimes u_k)=u_1\otimes\cdots\otimes u_j\otimes\cdots\otimes u_i\otimes\cdots\otimes u_k\\
(\rho\otimes\cdots\otimes\rho)(X)=\rho(X)\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\rho(X)\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}+\cdots+\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}\otimes\rho(X)\\
[S_{ij},(\rho\otimes\cdots\otimes\rho)(X)]=0
\end{gathered}
$$

Neexistuje rozklad do $V^{\otimes k}$, $k>2$ do společných vlastních podprostorů S_{ij}, ale 2 spoločné vlastní podprostory vždy existují:

$$
\begin{aligned}
V\otimes_S\cdots\otimes_S V&=V^{\otimes_S k}\ \ldots\ S_{ij}|_{V^{\otimes_S k}}=\mathbb{1}\\
V\wedge\cdots\wedge V&=V^{\wedge k}\ \ldots\ S_{ij}|_{V^{\wedge k}}=-\mathbb{1}
\end{aligned}
$$

Příslušné reprezentace jsou $\rho^{\otimes_S k},\ \rho^{\wedge k}$. Pokud ρ je ireducibilní s vahami $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$, přičemž $\lambda_1(H_0)>\lambda_2(H_0)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k(H_0)$, pak:

reprezentace:	nejvyšší váha:
$\rho^{\otimes_S k}$	$k\lambda_1$
$\rho^{\wedge k}$	$\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ (po zohlednění násobností)

Poznámka 79. Mějme $\mathfrak{g}$, fundamentální váhy $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, příslušlné fundamentální reprezentace ρ_j na V_j, $\lambda = \sum_j m_j \lambda_j$, $m_j \in \mathbb{N}_0$. Příslušnou ireducibilní reprezentaci najdeme v $(\rho_1)^{\otimes_S m_1} \otimes (\rho_2)^{\otimes_S m_2} \otimes \cdots \otimes (\rho_l)^{\otimes_S m_l}$. Nalezený R_λ, příslušející nejvyšší váze λ, je jednoznačně (až na násobek) určen tenzorovým součinem R_{λ_j} příslušných nejvyšším vahám $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ v $V_1, \dots, V_l$.

15 Spinorové reprezentace

Definice 71. Uvažujme 2^n-rozměrnou asociativní algebru

$$\mathfrak{cl}(n) = \operatorname{span}\{\mathbb{1}, \gamma^{a_1}\dots\gamma^{a_k} | 1 \leqslant k \leqslant n,\ a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$$

s násobením vyhovujícím vztahu $\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} \equiv \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\delta^{ab}\mathbb{1}$. Tuto algebru nazýváme **Cliffordova algebra** s n generátory.

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{2}\gamma^a\gamma^b = \frac{1}{4}\left[\gamma^a, \gamma^b\right],\ a \neq b, \qquad \Sigma^{ab} = -\Sigma^{ba}$$

$$\begin{aligned}
\left[\Sigma^{ab}, \Sigma^{cd}\right] &= \frac{1}{4}\left(\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d - \gamma^c\gamma^d\gamma^a\gamma^b\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(2\delta^{bc}\gamma^a\gamma^d - 2\delta^{ac}\gamma^b\gamma^d + 2\delta^{bd}\gamma^c\gamma^a - 2\delta^{ad}\gamma^c\gamma^b\right) = \\
&= \delta^{bc}\Sigma^{ad} - \delta^{ac}\Sigma^{bd} - \delta^{bd}\Sigma^{ac} + \delta^{ad}\Sigma^{bc}
\end{aligned}$$

$\mathfrak{so}(n)$: $S^{ab} = E^{ab} - E^{ba}$, kde E^{ab} je matice s jednotkou na pozici (a, b) a nulami všude jinde. S^{ab} má stejné komutační relace:

$$\left[S^{ab}, S^{cd}\right] = \delta^{bc}S^{ad} - \delta^{ac}S^{bd} - \delta^{bd}S^{ac} + \delta^{ad}S^{bc}$$

- $n = 2l$:

$$\sigma_j = \frac{\gamma^{2j-1} + i\gamma^{2j}}{2} \qquad \sigma_j^* = \frac{\gamma^{2j-1} - i\gamma^{2j}}{2}$$

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 0 = \{\sigma_j^*, \sigma_k^*\} \qquad \{\sigma_j, \sigma_k^*\} = \begin{cases} 0 & \dots\ j \neq k \\ \frac{\left(\gamma^{2j-1}\right)^2}{2} + \frac{\left(\gamma^{2j}\right)^2}{2} = \mathbb{1} & \dots\ j = k \end{cases} = \delta_{jk}\mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ Pro $n = 2l$ máme algebru fermionových kreačních a anihilačních operátorů $\Rightarrow$ jejich reprezentace se dá přirozeně zkonstruovat na

$$V = \operatorname{span}\left\{\sigma_{a_1}^*\dots\sigma_{a_k}^*\left|0\right\rangle \middle| 0 \leqslant k \leqslant l,\ 0 < a_1 < \dots < a_k \leqslant l\right\},$$

$\sigma_a\left|0\right\rangle = 0$, $\dim V = 2^l$ $\Rightarrow$ reprezentace $\mathfrak{so}(2l)$ na V, prvky $\mathfrak{so}(2l)$ jsou kvadratické výrazy v σ_j, σ_k^* $\Rightarrow$ z hlediska $\mathfrak{so}(2l)$ se reprezentace rozpadá na dvě, se sudým, resp. lichým počtem σ^* působících na $\left|0\right\rangle$.

$$F_{ij} = \sigma_i^*\sigma_j^* \qquad F_{ij}^+ = \sigma_i\sigma_j \qquad G_{ij} = \sigma_i^*\sigma_j$$

$$H(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = \sum_{j=1}^{l}\lambda_j\left(\sigma_j^*\sigma_j - \frac{1}{2}\right)$$

$$H(\lambda_1, \dots, \lambda_l)\sigma_{a_1}^*\dots\sigma_{a_k}^*\left|0\right\rangle = \sum_{j=1}^{l}\lambda_j\left(n_j - \frac{1}{2}\right)\sigma_{a_1}^*\dots\sigma_{a_k}^*\left|0\right\rangle$$

$\Rightarrow$ na V je vektor $\sigma_1^*\dots\sigma_l^*\left|0\right\rangle$ vektor s nejvyšší vahou a ta je rovna $\frac{1}{2}(\phi_1, \dots, \phi_l)$. Pro podprostor s opačnou paritou kreačních operátorů máme váhy $\sum_{j=1}^{l}\left(n_j - \frac{1}{2}\right)\phi_j$, kde $\sum_{j=1}^{l} n_j = l-1, l-3, \dots$, Mezi nimi je při našem uspořádání nejvyšší $\frac{1}{2}(\phi_1 + \dots + \phi_{l-1} - \phi_l)$, příslušná váhovému vektoru $\sigma_1^*\dots\sigma_{l-1}^*\left|0\right\rangle$.

- $n = 2l + 1$: stejně až na γ^{2l+1}:

$$\left\{\gamma^{2l+1}, \sigma_j\right\} = 0 = \left\{\gamma^{2l+1}, \sigma_j^*\right\}$$
$$\gamma^{2l+1} |0\rangle = |0\rangle$$
$$\gamma^{2l+1} \left(\sigma_{a_1}^* \dots \sigma_{a_k}^* |0\rangle\right) = (-1)^k \left(\sigma_{a_1}^* \dots \sigma_{a_k}^* |0\rangle\right)$$

  Předpisy pro F_{ij}, F_{ij}^+, G_{ij}, $H(\dots)$ se nezmění.

  V nejde rozdělit na 2 invariantní podporstory, $\mathfrak{so}(2l+1)$ je na V ireducibilní s nejvyšší vahou $\frac{1}{2}(\phi_1 + \dots + \phi_l)$.

16 Symetrie v QM

V klasické mechanice vede symetrie (invariance teorie vůči transformacím) na integrály pohybu (Teorém Noethorové).

V QM symetriím odpovídají infinitezimální generátory jako integŕaly pohybu, ve smyslu operátorů na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ $\Rightarrow$ Lieova algebra integrálů pohybu, tj operátorů komutujících s Hamiltoniánem $\Rightarrow$ operátory reprezentující naši abstraktní Lieovu algebru jsou pozorovatelné reprezentované na $\mathscr{H}$. Pokud daná Lieova algebra je kompaktní, pak reprezentace na $\mathscr{H}$ je direktním součtem konečněrozměrných ireducibilních reprezentací $\Rightarrow$ v nich máme báze tvořené váhovými vektory. Cartanova podalgebra je tvořena operátory komutujícími s Hamiltonánem. Pokud je jich dostatečně mnoho, máme ÚMP, jejich hodnoty označíme vektory. Váhové vektory jsou pak vektory spřesně určenými hodnotami ÚMP tvořené Cartanovou podalgebrou a Hamiltoniánem.

16.1 Izospin

Proton a neutron se vzhledem k silné interakci chovají stejně. Hypotéza: p a n jsou 2 stavy nukleonu $\Rightarrow$ existuje nějaký vnitřní stupeň volnosti nukleonu, můžeme jej popsat $\mathbb{C}^2$ $\Rightarrow$ $|p\rangle = \binom{1}{0}$ a $|n\rangle = \binom{0}{1}$. Teorie jaderné interakce je invariantní vůči jejich míchání $\Rightarrow$ může to být reprezentace $SO(2) \sim U(1)$ nebo $SU(2)$. Zkusíme tedy $SU(2)$, 2-rozměrnou reprezentaci $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$ $\Rightarrow$ dvojznačná reprezentace $SO(3)$ $\Rightarrow$ spin jen ve vnitřním Hilbertově prostoru (nesouvisející s prostoročasem, momentem hybnosti), izotropický spin $\equiv$ izospin, I^2, I_3:

$$I^2\,|p\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|p\rangle \qquad I_3\,|p\rangle = \frac{1}{2}\,|p\rangle \qquad \text{náboj: } Q = I_3 + \frac{1}{2}$$

$$I^2\,|n\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|n\rangle \qquad I_3\,|n\rangle = -\frac{1}{2}\,|n\rangle$$

Postupně se objevily další částice: antinukleony, piony $\Rightarrow$ barionové číslo B (počet nukleonů). Pionům se přiřadila vektorová reprezentace izospinové grupy $SO(3)$, tj. $l = 1,\ m = -1, 0, 1$.

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B \begin{cases} \text{nukleony:} & B = 1,\ Q \in \{0,1\} \\ \text{piony:} & B = 0,\ \sigma(I_3) = \{-1,0,1\} \quad \Rightarrow \quad Q \in \{-1,0,1\} \\ \text{antinukleony:} & B = -1,\ \sigma(I_3) = \left\{\pm\frac{1}{2}\right\} \quad \Rightarrow \quad Q \in \{0,-1\} \end{cases}$$

I_3 je prvek Cartanovy podalgebry $\mathfrak{so}(3)_{\mathbb{C}}$

B je dán zvolenou reprezentací

Pak se objevily Kaony, rozpadající se na známe částice, ale né silně $\Rightarrow$ nová zachovávající se veličina, podivnost S $\Rightarrow$ Gellmann-Nishijimův vzorec:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y, \qquad Y = S + B \ \ldots \text{ hypernáboj}$$

$\Rightarrow$ motivace pokusu spojit I_3 a Y do jedné algebry infinitezimálních symetrií, tj hledáme algebru s 2-dim. Cartanovou podalgebrou (chceme komutující I_3, Y). To nefungovalo, dokud se nezkusil předpoklad nukleonů složených z komponent - kvarků, jako vhodná algebra se ukázala $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3)$, budeme se jí tedy zabývat.

16.2 $\mathfrak{su}(3)$

$\mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}}$:

$$I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{g}_0 = \operatorname{span}\{I_3, Y\}$$

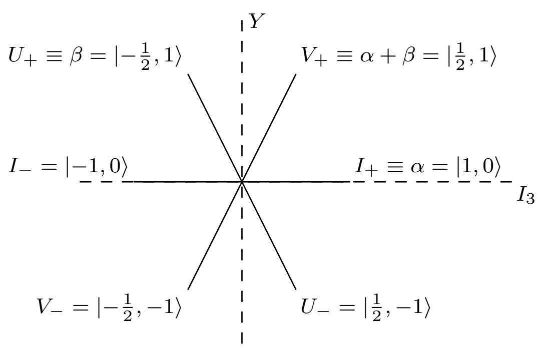
$$K(I_3, Y) = 0 \qquad K(I_3, I_3) = c\frac{1}{2} \qquad K(Y, Y) = c\frac{2}{3}$$

$$I_+ = E_{12} = E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad U_+ = E_{23} = E_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_+ = [I_+, U_+] = E_{13} = E_{\alpha+\beta} \qquad I_- = (I_+)^T \qquad U_- = (U_+)^T \qquad V_- = (V_+)^T$$

$$\begin{aligned}
&[I_+, V_+] = 0 && [U_+, V_+] = 0 && [I_3, Y] = 0 \\
&[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm && [I_3, U_\pm] = \mp\frac{1}{2}U_\pm && [I_3, V_\pm] = \pm\frac{1}{2}V_\pm \\
&[Y, I_\pm] = 0 && [Y, U_\pm] = \pm U_\pm && [Y, V_\pm] = \pm V_\pm \\
&[I_+, I_-] = 2I_3 && [U_+, U_-] = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = -I_3 + \frac{3}{2}Y && [V_+, V_-] = I_3 + \frac{3}{2}Y
\end{aligned}$$

Kořenový diagram:

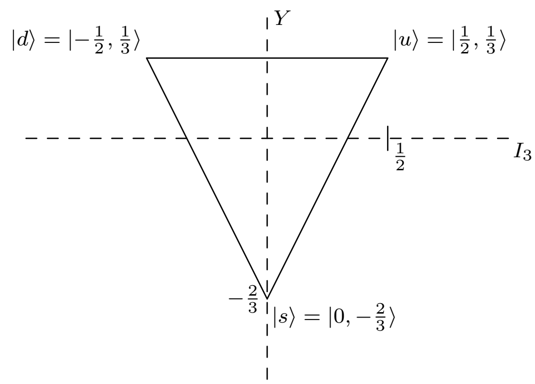


$$I_3 \,|\lambda, \mu\rangle = \lambda \,|\lambda, \mu\rangle \qquad Y \,|\lambda, \mu\rangle = \mu \,|\lambda, \mu\rangle$$

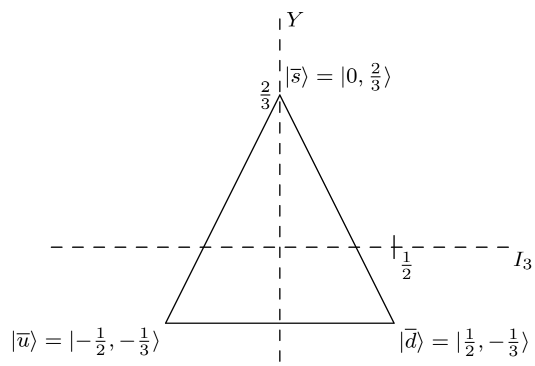
Definující vektorová reprezentace $\mathfrak{su}(3)$ (značí se 3), je to fundamentální reprezentace $\mathfrak{su}(3)_\mathbb{C} = \mathfrak{sl}(3)$:

$$|u\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \qquad |d\rangle = |-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \qquad |s\rangle = |0, -\frac{2}{3}\rangle$$

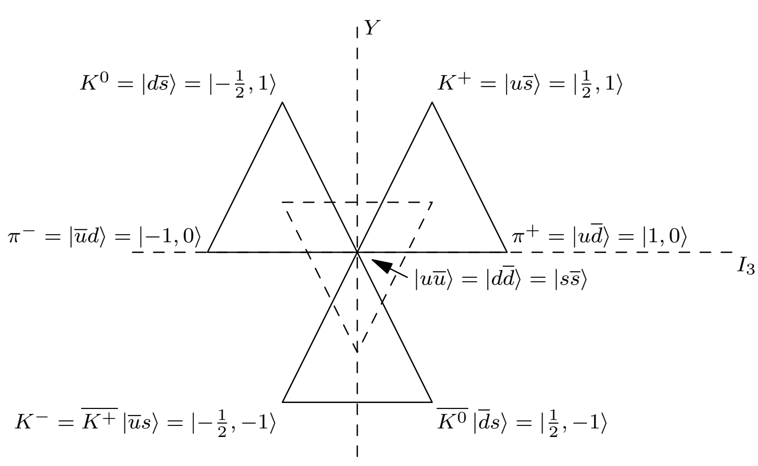
Částice se nazývají kvarky. Váhový diagram:



Druhá fundamentální (antifundamentální) reprezentace $\mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}}$ se získá mínus transpozicí: Značí se $\overline{3}$ a její částice se nazývájí *antikvarky*.

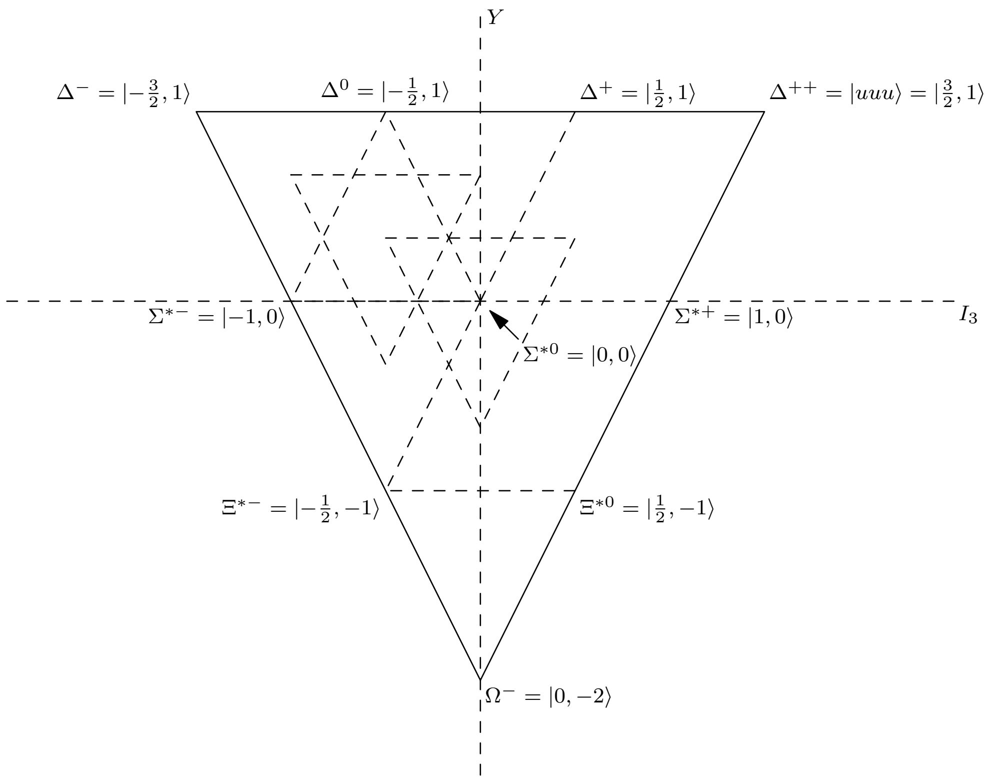


Vázané stavy kvark-antikvark, $3 \otimes \overline{3} = 8 \oplus 1$:

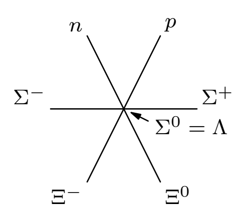


$$\pi^0 = \frac{|u\overline{u}\rangle - |d\overline{d}\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \eta = \frac{|u\overline{u}\rangle + |d\overline{d}\rangle - 2\,|s\overline{s}\rangle}{\sqrt{6}} \qquad 1 = \operatorname{span}\left\{ \underbrace{\frac{|u\overline{u}\rangle + |d\overline{d}\rangle + |s\overline{s}\rangle}{\sqrt{3}}}_{\eta'} \right\}$$

Reprezentace vedoucí na celočíselné náboje (trojice kvarků), $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$:



8:



V době kdy Gellmann vytvořil reorii Ω^- nebyla známa, později byla potvrzena.

Poznámka 80. Dnes už je tato teorie zastaralá, protože kvarků, tesp. částic je víc, takže současný standardní model je uspořádan jinak. Je to dobré přiblížení pro některé energie.

Poznámka 81. Pozorované Částice odpovídají rozkladům obsahujícím singlet, tj. pozorujeme pouze bezbarvé částice.

17 Cvičení

Příklad 27. $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \sim \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) : [L_3, L_\pm] = \pm L_\pm,\ [L_+, L_-] = 2L_3,$

$$\rho(L_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \rho(L_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho(L_-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho(L_3)\left|\uparrow\right\rangle = \frac{1}{2}\left|\uparrow\right\rangle, \qquad \rho(L_3)\left|\downarrow\right\rangle = -\frac{1}{2}\left|\downarrow\right\rangle, \qquad \text{váhy: } \lambda = \pm\frac{1}{2},$$

$\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}\left(D^{1/2}\right),\ D^{1/2} = \operatorname{span}\{\left|\uparrow\right\rangle, \left|\downarrow\right\rangle\}$. Tenzorový součin ρ se sebou samou:

$$(\rho \otimes \rho)(L_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\rho \otimes \rho)(L_3)\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = \left|\uparrow\uparrow\right\rangle \qquad (\rho \otimes \rho)(L_3)\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = \frac{1}{2}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \frac{1}{2}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = 0$$

$$(\rho \otimes \rho)(L_3)\left|\downarrow\downarrow\right\rangle = -\left|\downarrow\downarrow\right\rangle \qquad (\rho \otimes \rho)(L_3)\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = 0$$

$$(\rho \otimes \rho)(L_-)\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = \left|\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\right\rangle \qquad (\rho \otimes \rho)(L_-)\big(\left|\downarrow\uparrow\right\rangle - \left|\uparrow\downarrow\right\rangle\big) = \left|\downarrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\downarrow\right\rangle = 0$$

$$(\rho \otimes \rho)(L_-)\left|\downarrow\downarrow\right\rangle = 0$$

$$(\rho \otimes \rho)(L_+)\ldots$$

Váhy: $\pm 2\lambda, 0;\ n_{\pm 2\lambda} = 1,\ n_0 = 2.$

Příklad 28. $A_l = \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C}) = \left\{A \in \mathbb{C}^{l+1,l+1} \middle| \operatorname{Tr} A = 0\right\}$

- Kořeny: $\mathfrak{g}_0 = \operatorname{diag} \subset \mathfrak{sl}(l+1)$, $\dim \mathfrak{g}_0 = l, [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}_0$ Abelovská $\Rightarrow \quad \mathfrak{g}_0$ nilpotentní, tj. opravdu je to Cartanova podalgebra. Mějme

  $$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & j \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots \\ \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad i \neq j$$

  $\Rightarrow \quad \mathfrak{sl}(l+1) = \mathfrak{g}_0 + \operatorname{span}\{E_{ij}\}$ a pro $D \in \mathfrak{g}_0,\ D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_{l+1})$ máme $[D, E_{ij}] - (d_i - d_j)E_{ij}$. Nechť $\phi_j \in \mathfrak{sl}^*(l+1),\ \phi_j(D) = d_j \quad \Rightarrow \quad (\phi_i - \phi_j)(D)E_{ij} = [D, E_{ij}]$, tj:

  $$\Delta = \left\{(\phi_i - \phi_j) \middle| \, i \neq j,\ i,j \in \widehat{l+1}\right\}$$

  Zvolíme $H_0 = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_{l+1}),\ h_i > h_{i+1},\ (\phi_i - \phi_j)(H_0) \neq 0$, máme tedy uspořádání kořenů:

  $$\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_{l+1} > 0.$$

  $$\Delta^+ = \{\phi_i - \phi_j | i < j \leqslant l+1\}$$
  $$\Delta^p = \{\underbrace{\phi_i - \phi_{i+1}}_{=:\alpha_i} | i \in \hat{l}\}$$

  Ověříme, že pomocí Δ^p můžeme nakombinovat celé Δ:

  $$\phi_i - \phi_j = (\phi_i - \phi_{i+1}) + (\phi_{i+1} - \phi_{i+2}) + \cdots + (\phi_{j-1} - \phi_j).$$

- Cartanova matice, Dynkinův diagram:

$$a_{\beta\alpha} = -(p+q) \overset{\alpha,\beta\in\Delta^p}{=} -q, \qquad \{\beta + k\alpha\}_{k=p}^{q} \in \Delta^+$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_i := \phi_i - \phi_{i+1} \\ \alpha_j := \phi_j - \phi_{j+1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i + k\alpha_j = \phi_i - \phi_{i+1} + k(\phi_j - \phi_{j+1}) \overset{!}{=} \phi_a - \phi_b,\ a < b$$

$$\begin{array}{lllll} (i < j-1) \vee (i > j-1) & \Rightarrow & k = 0 & \Rightarrow & a_{ij} = 0 \\ (i = j-1) \vee (j = i-1) & \Rightarrow & k = 0 \vee k = 1 & \Rightarrow & a_{ij} = -1 \end{array}$$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \underset{1}{\bullet} - \underset{2}{\bullet} - \cdots - \underset{l-1}{\bullet} - \underset{l}{\bullet}$$

- Adjungovaná reprezentace: váhy (kořeny): $\alpha_i = \phi_i - \phi_{i+1}$, $\alpha_i(T_j) = a_{ij}$, kde

$$\phi_i \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{l+1} \end{pmatrix} = d_i, \qquad \phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_{l+1} > 0.$$

Z tvaru vah $\alpha_i = \phi_i - \phi_j$ a uspořádání ϕ_i plyne, že nejvyšší váha je $\phi_1 - \phi_{l+1} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_l$. K nalezení T_j využijeme $\alpha_i(T_j) = a_{ij} = t_{j,i} - t_{j,i+1} \neq 0$ pro $i = j-1, j, j+1$:

$$\left.\begin{array}{rl} \alpha_{j-1}(T_j) & = t_{j,j-1} - t_{j,j} = -1 \\ \alpha_j(T_j) & = t_{j,j} - t_{j,j+1} = 2 \\ \alpha_{j+1}(T_j) & = t_{j,j+1} - t_{j,j+2} = -1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad T_j = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 1 & \dots & \dots & \dots \\ & & & -1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

- Fundamentální váhy, $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad \lambda_1 \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \phi_1$$

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = 1, \qquad \lambda_2 \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_2 = \phi_2 + \phi_1 \quad \Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \phi_1 + \cdots + \phi_i$. Je vidět že pak platí $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$.

- Definující reprezentace: Mějme definující reprezentaci v standardní bázi (e_j), $D \in \mathfrak{g}_0$, $De_j = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{l+1} \end{pmatrix} e_j = d_j e_j$. Její váhy $\{\phi_1, \dots, \phi_{l+1}\}$, $\phi_{l+1} = -(\phi_1 + \dots + \phi_l)$, lze zapsat jako $\{\phi_1, \phi_1 - \alpha_1, \phi_1 - \alpha_1 - \alpha_2, \dots, \phi_1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_l\}$. Nejvyšší váha je $\phi_1 = \lambda_1$, násobnosti 1, $\dim \rho_1 = l + 1$. $\rho_1 \wedge \rho_1$:

$$\begin{aligned}(\rho_1 \wedge \rho_1)(e_i \wedge e_j) &= (D \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes D)(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) = \\ &= d_i e_i \otimes e_j - d_j e_j \otimes e_i + e_i \otimes d_j e_j - e_j \otimes d_i e_i = (d_i + d_j)(e_i \wedge e_j),\end{aligned}$$

  váhy: $\{\phi_i + \phi_j | i \neq j\}$, $\dim \rho \wedge \rho = \binom{l+1}{2}$, nejvyšší je $\phi_1 + \phi_2$.

  Pro $\rho^{\wedge j}$ jsou váhy $\left\{\phi_{i_1} + \dots + \phi_{i_j} \middle| i_1 < \dots < i_j\right\}$, $\dim \rho^{\wedge j} = \binom{l+1}{j}$, nejvyšší váha $\lambda_j = \phi_1 + \dots + \phi_j$.

  Pro $\rho^{\wedge l}$ jsou váhy $\{\sum_{i \neq 1} \phi_i, \dots, \sum_{i \neq l+1} \phi_i\} = \{-\phi_1, \dots, -\phi_{l+1}\} \overset{l \neq 1}{\neq} \{\phi_1, \dots, \phi_{l+1}\}$. Takže nejvyšší váha je $-\lambda_{l+1}$. Když $l = 1$, pak $\rho^{\wedge l=1} \simeq \rho$, tj. $\rho^{\wedge l=1}$ je izomorfní definující reprezentaci.

Poznámka 82. Nechť ρ reprezentace $\mathfrak{g}$ na V, definujeme $\rho^T : \rho^T(X) = (-\rho(X))^T \quad \Rightarrow \quad \rho^{\wedge l} = \rho^T$.

Příklad 29. $C_l = \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C}) = \left\{A \in \mathbb{C}^{2l,2l} \middle| JA + A^T J = 0\right\}$, kde $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$

- Cartanova podalgebra: Označme $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$:

$$JA + A^T J = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^T & -a^T \\ d^T & -b^T \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d = -a^T,\ b = b^T,\ c = c^T$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{smallmatrix}\right) \middle| \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{C}^{l,l}\right\}$$

$$[\Lambda, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \qquad \left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ij} \end{pmatrix}\right] = (\lambda_i - \lambda_j) \underbrace{\begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ij} \end{pmatrix}}_{=:I_{ij},\ i \neq j}$$

$$\left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} + E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda(E_{ij} + E_{ji}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (E_{ij} + E_{ji})\Lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\lambda_i + \lambda_j) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & E_{ij} + E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:F_{ij},\ i \leqslant j}$$

$$G_{ij} := F_{ij}^T \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}, G_{ij}\right] = -\left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}, F_{ij}\right]^T = -(\lambda_i + \lambda_j) G_{ij}$$

  $\Rightarrow \quad \mathfrak{g}_0$ je skutečně Cartanova podalgebra. $\phi_i \left(\begin{smallmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{smallmatrix}\right) := \lambda_i$, $i \in \hat{l}$ tvoří bázi $\mathfrak{g}_0^*$.

- Kořeny:

$$\Delta = \{\phi_i - \phi_j | i \neq j\} \cup \{\phi_i + \phi_j | i \leqslant j\} \cup \{-(\phi_i + \phi_j) | i \leqslant j\}$$

  $H_0 :\ \phi_i(H_0) > \phi_{i+1}(H_0) > 0, \forall i$.

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= \{\phi_i - \phi_j | i < j\} \cup \{\phi_i + \phi_j | i \leqslant j\} \\ \Delta^- &= \{\phi_i - \phi_j | i > j\} \cup \{-(\phi_i + \phi_j) | i \leqslant j\} \\ \Delta^p &= \{\underbrace{\phi_i - \phi_{i+1}}_{=:\alpha_i} | i \in \widehat{l-1}\} \cup \{\underbrace{2\phi_l}_{=:\alpha_l}\}\end{aligned}$$

$$\phi_i - \phi_j = (\phi_i - \phi_{i+1}) + \cdots + (\phi_{j-1} - \phi_j) = \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k$$

$$\phi_i + \phi_j = 2\phi_l + (\phi_i - \phi_l) + (\phi_j - \phi_l) = 2\phi_l + \sum_{k=i}^{l-1} \alpha_k + \sum_{k=j}^{l-1} \alpha_k$$

$a_{\beta\alpha} \overset{\alpha,\beta\in\Delta^p}{=} -q$:

$$\begin{array}{lllll}
\{\alpha_i + k\alpha_j\}_{i,j<l} & = (\phi_i - \phi_{i+1}) + k(\phi_j - \phi_{j+1}) & \Rightarrow\ |i-j| > 1 & \Rightarrow & k = 0 \\
 & & \ |i-j| = 1 & \Rightarrow & k = 0 \vee k = 1 \\
\{\alpha_i + k\alpha_l\}_{i<l} & = (\phi_i - \phi_{i+1}) + 2k\phi_l & \Rightarrow\ i < l-1 & \Rightarrow & k = 0 \\
 & & \ i = l-1 & \Rightarrow & k = 0 \vee k = 1 \\
\{\alpha_l + k\alpha_i\}_{i,j<l} & = 2\phi_l + k(\phi_i - \phi_{i+1}) & \Rightarrow\ i < l-1 & \Rightarrow & k = 0 \\
 & & \ i = l-1 & \Rightarrow & k = 0 \vee k = 1 \vee k = 2
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad a_{l-1,l} = -1 = \tfrac{\langle \alpha_{l-1},\alpha_l \rangle}{\langle \alpha_l,\alpha_l \rangle},\ a_{l,l-1} = -2 = \tfrac{\langle \alpha_l,\alpha_{l-1} \rangle}{\langle \alpha_{l-1},\alpha_{l-1} \rangle} \quad \Rightarrow \quad \|\alpha_l\| = \sqrt{2}\,\|\alpha_{l-1}\|.$$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \underset{1}{\bullet} - \underset{2}{\bullet} - \cdots - \underset{l-2}{\bullet} - \underset{l-1}{\bullet} \Longrightarrow \underset{l}{\bullet}$$

- Definující reprezentace: $D \in \mathfrak{g}_0$, $\phi_i(D) = d_i$:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_l & & & \\ & & & -d_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -d_l \end{pmatrix}$$

  Definující reprezentace má váhy $\{\phi_1, \ldots, \phi_l, \phi_{-1}, \ldots, \phi_{-l}\}$, $\dim = 2l$, nejvyšší váha je ϕ_1.

- Adjungovaná reprezentace: $\alpha_i = \phi_i - \phi_{i+1}$, $i \leqslant l-1$, $\alpha_l = 2\phi_l$, $\alpha_i(T_j) = a_{ij}$

$$T_j = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
\ddots & & & & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & -1 & & & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & & & -1 & & \\
 & & & & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & & & & \ddots
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \\ l+j \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array} \qquad j \leqslant l-1$$

$$\left.\begin{array}{rl} \alpha_i(T_l) & = 0,\ i < l-1 \\ \alpha_{l-1}(T_l) & = -1 \\ \alpha_l(T_l) & = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad T_l = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 1 & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ l \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\lambda_i(T_j) = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \phi_1 + \dots + \phi_i,\ i \in \hat{l}.$$

Příklad 30. $D_l = \mathfrak{so}(2l, \mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathbb{C}^{2l,2l} \middle| A^T J + JA = 0 \right\}$, kde $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $l > 1$

Označme $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$

$$A^T J + JA = \begin{pmatrix} c^T & a^T \\ d^T & b^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d = -a^T,\ b = -b^T,\ c = -c^T$$

- Cartanova podalgebra: Ukážeme že $\mathfrak{g}_0 = \{H = \mathrm{diag}(\lambda_1\sigma_2, \dots, \lambda_l\sigma_2)\}$, $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Nechť $X \in \mathbb{C}^{2,2},\ X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

$$\lambda_i \sigma_2 X - \lambda_j X \sigma_2 = i\lambda_i \begin{pmatrix} -x_{21} & -x_{22} \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} - i\lambda_j \begin{pmatrix} x_{12} & -x_{11} \\ x_{22} & -x_{21} \end{pmatrix} = c(\lambda_i, \lambda_j) \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

Zapíšeme ve tvaru:

$$i \begin{pmatrix} ic & -\lambda_j & -\lambda_i & 0 \\ \lambda_j & ic & 0 & -\lambda_i \\ \lambda_i & 0 & ic & -\lambda_j \\ 0 & \lambda_i & \lambda_j & ic \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = 0$$

Z požadavku řešitelnosti soustavy (det $= 0$) dostaneme $c_{1,2,3,4} = \pm(\lambda_i \pm \lambda_j)$. Pro $c_1 = \lambda_i + \lambda_j$ najdeme $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right) = \sigma_3 + i\sigma_1$.

$$\widetilde{F} := X_1, \qquad F_{ij} := \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots \\ \dots & & & \widetilde{F} \\ \dots & -\widetilde{F}^T & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}, \quad i < j, \qquad [H, F_{ij}] = (\lambda_i + \lambda_j) F_{ij} \overset{\exists i,j}{\neq} 0$$

$$\left[H, F_{ij}^+\right] = \left[H^+, F_{ij}^+\right] = -\left[H, F_{ij}\right]^+ = -(\lambda_i + \lambda_j) F_{ij}^+$$

Pro $c_2 = \lambda_i - \lambda_j$ dostaneme:

$$\widetilde{G} := \mathbb{1} + \sigma_2, \qquad G_{ij} := \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \vdots & \vdots \\ \dots & & & \widetilde{G} \\ \dots & -\widetilde{G}^T & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}, \quad i < j$$

$$[H, G_{ij}] = (\lambda_i + \lambda_j) G_{ij}, \qquad [H, G_{ij}] = (\lambda_i + \lambda_j) G_{ij}$$

- Kořeny: $\phi_j \in g_0^*$, $\phi_j(H) = \lambda_j$:

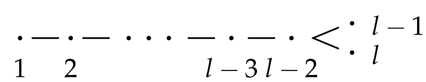
$$\Delta = \{\phi_i + \phi_j | i < j\} \cup \{\phi_i - \phi_j | i \neq j\} \cup \{-(\phi_i + \phi_j) | i < j\}$$

$H_0 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_l > 0$:

$$\begin{aligned} \Delta^+ &= \{\phi_i + \phi_j | i < j\} \cup \{\phi_i - \phi_j | i < j\} \\ \Delta^p &= \{ \underbrace{\phi_i - \phi_{i+}}_{=:\alpha_i} | i \in \widehat{l-i}\} \cup \{ \underbrace{\phi_{l-1} + \phi_l}_{=:\alpha_l} \} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \alpha_i + k\alpha_{i+1} & = (\phi_i - \phi_{i+1}) + k(\phi + 1 - \phi_{i+2}),\ i \in \widehat{l-1} & \Rightarrow \quad k = 0 \vee k = 1 \\ \alpha_{l-2} + k\alpha_l & = (\phi_{l-2} - \phi_{l-1}) + k(\phi_{l-1} + \phi_l) & \Rightarrow \quad k = 0 \vee k = 1 \\ \alpha_{l-1} + k\alpha_l & = (\phi_{l-1} - \phi_l) + k(\phi_{l-1} + \phi_l) & \Rightarrow \quad k = 0 \end{array}$$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & 2 & -1 & -1 \\ & & -1 & 2 & 0 \\ & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$



- Váhy:

$$H = \begin{pmatrix} d_1\sigma_2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_l\sigma_2 \end{pmatrix} = H(d_1, \dots, d_l), \qquad \begin{aligned} &\phi_i(H) = d_i \\ &\alpha_i = \phi_i - \phi_{i+1},\ i \leqslant l-1 \\ &\alpha_l = \phi_{l-1} + \phi_l \\ &T_i = H(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, \underset{i+1}{-1}, 0, \dots, 0),\ i \leqslant l-1x \end{aligned}$$

T_l:

$$\left.\begin{array}{rll} \alpha_{l-2}(T_l) & = -1 & = d_{l-2} - d_{l-1} \\ \alpha_{l-1}(T_l) & = 0 & = d_{l-1} - d_l \\ \alpha_l(T_l) & = 2 & = \phi_{l-1}(T_l) + \phi_l(t_l) = d_{l-1} + d_l \end{array}\right\} \Rightarrow \quad T_l = H(0, \dots, 0, 1, 1)$$

$\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \phi_1 \\ \lambda_i &= \phi_1 + \cdots + \phi_i,\ i \leqslant l-2 \\ \lambda_{l-1} &= \frac{1}{2}(\phi_1 + \cdots + \phi_{l-1} - \phi_l) \\ \lambda_l &= \frac{1}{2}(\phi_1 + \cdots + \phi_l) \end{aligned}$$

Definující reprezentace má váhy $\{\phi_1, \dots, \phi_l, -\phi_1, \dots, -\phi_l\}$.

Příklad 31. $B_l = \mathfrak{so}(2l+1, \mathbb{C})$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ H = \begin{pmatrix} d_1\sigma_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_l\sigma_2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \phi_i H = \begin{pmatrix} d_1\sigma_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_l\sigma_2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda_i, \quad X := \left(\begin{array}{c|c} & v \\ \hline v^T & 0 \end{array}\right)$$

$$[H,X] = \left(\begin{array}{c|c} & \lambda_i \sigma_1 v \\ \hline & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} & v \\ \hline -\lambda_i (\sigma_1 v)^T & 0 \end{array}\right) = \lambda_i \left(\begin{array}{c|c} & \sigma_1 v \\ \hline (\sigma_1 v)^T & 0 \end{array}\right)$$

Za v můžeme volit vlastní vektory σ_1. Dále zvolíme $H_0 : \; \lambda_1 > \cdots > \lambda_l, \; \lambda_i = \phi(H_0)$.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \{\phi_i + \phi_j \big| i < j\} \cup \{\phi_i - \phi_j \big| i \neq j\} \cup \{-(\phi_i + \phi_j) \big| i < j\} \cup \{\phi_i\} \cup \{-\phi_i\} \\
\Delta^+ &= \{\phi_i + \phi_j \big| i < j\} \cup \{\phi_i - \phi_j \big| i < j\} \cup \{\phi_i\} \\
\Delta^p &= \{ \underbrace{\phi_i - \phi_{i+1}}_{=:\alpha_i} \big| i \in \widehat{l-1}\} \cup \{ \underbrace{\phi_l}_{=:\alpha_l} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\alpha_{l-2} + k\alpha_l & = (\phi_{l-2} - \phi_{l-1}) + k\phi_l & \Rightarrow \quad k = 0 \\
\alpha_{l-1} + k\alpha_l & = (\phi_{l-1} - \phi_l) + k\phi_l & \Rightarrow \quad k = 0 \vee k = 1 \vee k = 2 \\
\alpha_l + k\alpha_{l-1} & = \phi_l + k(\phi_{l-1} - \phi_l) & \Rightarrow \quad k = 0 \vee k = 1
\end{array}$$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -2 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \underset{1}{\bullet} - \underset{2}{\bullet} - \cdots - \underset{l-2}{\bullet} - \underset{l-1}{\bullet} \Leftarrow \underset{l}{\bullet}$$

$$H = \begin{pmatrix} d_1\sigma_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_l\sigma_2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\phi_i(H) = d_i \\ &\alpha_i = \phi_i - \phi_{i+1}, \; i \leqslant l-1 \\ &\alpha_l = \phi_l \\ &T_i = H(0,\ldots,0,\underset{i}{1},\underset{i+1}{-1},0,\ldots,0) \end{aligned}$$

T_l:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{l-1}(T_l) &= -2 \\ \alpha_l(t_l) &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad T_l = H(0,\ldots,0,2)$$

$\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \phi_1 + \cdots + \phi_i, \; i \leqslant l-1 \\ \lambda_l &= \frac{1}{2}(\phi_1 + \cdots + \phi_l) \end{aligned}$$