ÚVOD DO TEORIE NÁHODNÝCH PROCESŮ

Obsah

Předmluva

Tato skripta vznikla na základě obsahu přednášky "Náhodné procesy", která je určena pro posluchače 4. ročníku zaměření Matematické modelování v oboru Matematické inženýrství na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT. Napsání skript bylo hlavně motivováno snahou poskytnout studentům česky psaný text týkající se základů teorie náhodných procesů. Vzhledem k náplni studia na FJFI jsem se ve skriptech zaměřil především na problematiku slabě stacionárních posloupností a procesů. Skripta jsou doplněna formou dodatků o pasáže z obecné teorie míry a integrálu, Stieltjesova a Lebesgue–Stieltjesova integrálu a pasáže týkající se pojmu podmíněné střední hodnoty, které obvykle nejsou zahrnuty to základních přednášek z matematiky a teorie pravděpodobnosti.

Chtěl bych poděkovat RNDr. Petru Lachoutovi, CSc. z KPMS MFF, který velice pečlivě skripta zrecenzoval a jeho rady a připomínky tak pomohly k odstranění chyb a nedostatků v textu. Dále bych velice rád poděkoval paní Ivě Marešové, která ochotně a precizně přepsala rukopis skript.

V Praze, říjen 1999

RNDr. Jiří Michálek, CSc.

1 Náhodné jevy a pravděpodobnost

1.1 Systém náhodných jevů

Jedním ze základních pojmů teorie pravděpodobnosti, a tedy i teorie náhodných procesů, je pojem náhodného jevu, který je založen na jednodušším pojmu elementárního výsledku. Teorie pravděpodobnosti se zabývá studiem hromadných pozorování ať již přirozeně či uměle probíhajících jevů v přírodě. Oba tyto případy bývá zvykem zahrnout pod jeden název, a sice náhodný pokus. Výsledky našich pozorování, tj. výsledky náhodných pokusů se nazývají elementárními (prvotními) výsledky. Elementární výsledky mají tři důležité vlastnosti.

a) jsou navzájem neslučitelné, tj. nemohou nastat dva současně, neboť výsledek pokusu musí být jednoznačný;

b) jsou vyčerpávající, tj. není možné, aby nenastal žádný výsledek pokusu;

c) jsou dále nerozložitelné, tj. nelze je dále dělit na jemnější výsledky, a proto je nazýváme prvotními.

Výběr elementárních výsledků v konkrétní situaci nezávisí pouze na tom, co pozorujeme, ale též na podmínkách, za nichž pozorování provádíme a jak jemně výsledky pokusu jsme schopni rozlišit.

Několik elementárních výsledků dohromady tvoří jev, přičemž jevům obsahujícím jediný prvotní výsledek říkáme elementární (prvotní) jevy. Některé jevy, které kromě toho, že splňují určité rozumné požadavky, jsou významné pro námi řešené problémy, nazýváme náhodné jevy. Nyní uvedeme požadavky, které chceme, aby náhodné jevy splňovaly. Abychom mohli požadavky kladené na náhodné jevy vhodně popsat, použijeme aparát teorie množin, neboť náhodné jevy lze chápat jako množiny s vhodnými vlastnostmi obsahujícími elementární výsledky pokusu.

Elementární výsledky pokusu budeme standardně označovat písmenem ω, přičemž Ω značí množinu všech možných elementárních výsledků našeho sledovaného pokusu. Je zcela přirozené požadovat, aby platily následující axiomy.

Axiom 1. $\Omega \neq \emptyset$.

Pro další označme $\mathcal{O}$ jako systém náhodných jevů, tj. podmnožin v Ω, které musí splňovat následující požadavky.

Axiom 2. $\Omega \in \mathcal{O}$.

Axiom 3. Když A, $B \in \mathcal{O}$, pak i $A - B \in \mathcal{O}$.

Axiom 4. Když $A_i \in \mathcal{O}$ pro každé $i = 1, 2, 3, \ldots$,
pak i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{O}$ (spočetné sjednocení).

Při tom používáme následující terminologie:

ω	elementární výsledek
$\{\omega\}$	elementární jev
$\emptyset$	nemožný jev
Ω	jistý jev
$A \in \mathcal{O}$	náhodný jev
$A\ (\subset \Omega)$	jev
$\mathcal{O}$	systém náhodných jevů

Definice 1. Systém $\mathcal{O}$ splňující Axiomy 1 – 4 se nazývá σ-algebra.

Formálně lze ze základních vlastností σ-algebry odvodit další vlastnosti pro náhodné jevy: nemožný jev $\emptyset$ je náhodný jev, opačný jev k náhodnému jevu je opět náhodný, spočetný průnik náhodných jevů je náhodný jev apod.

S pojmem náhodný jev je přímo spojen i pojem pravděpodobnosti náhodného jevu, která "vyjadřuje váhu jeho výskytu". My se zde budeme důsledně držet axiomatického přístupu k definování pravděpodobnosti náhodného jevu, jak byl prezentován Kolmogorovem na začátku 30. let dvacátého století. Axiomatický přístup předpokládá, že pravděpodobnost náhodného jevu je nějaké číslo mezi 0 a 1, přičemž není nikterak řečeno, jak je toto číslo určeno. Díváme se tedy na pravděpodobnost jakožto na reálnou funkci definovanou nějakým způsobem na σ-algebře náhodných jevů, která splňuje následující 3 vlastnosti.

A. Pro každý náhodný jev $A \in \mathcal{O}$ je $P(A) \geq 0$.

B. $P(\Omega) = 1$.

C. Pro každou posloupnost neslučitelných jevů $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé i, j, platí

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(vlastnost tzv. σ-aditivity).

Z pohledu teorie míry lze chápat pravděpodobnost jakožto σ-aditivní normovanou, tj. $P(\Omega) = 1$, množinovou nezápornou funkci, které se krátce říká míra.

Definice 2. Množinová funkce s vlastnostmi A, B, C se nazývá pravděpodobnostní míra, krátce pravděpodobnost na systému $\mathcal{O}$ náhodných jevů.

Definice 3. Dvojice $(\Omega, \mathcal{O})$ se nazývá měřitelný prostor. Trojice $(\Omega, \mathcal{O}, P)$ se pak nazývá pravděpodobnostní prostor.

Z vlastností pravděpodobnosti budeme především potřebovat následující vlastnost o spojitosti v prázdné množině.

Věta 1. Nechť $A_{n+1} \subset A_n$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$, nechť $A_n \in \mathcal{O}$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ a dále nechť $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Důkaz. Pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ lze psát

$$A_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} (B_j - B_{j+1}) \cup \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=n}^{\infty} (B_j - B_{j+1}).$$

Ale jevy $B_j = A_j - A_{j+1}$ jsou neslučitelné, tedy dle požadavku C lze psát $P(A_1) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j - A_{j+1})$.

Odtud ale plyne díky konvergenci řady, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j - A_{j+1}) = 0.$$

Snadno lze vidět, že $P(A_n) = \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j - A_{j+1})$, z čehož plyne bezprostředně tvrzení věty. □

Další užitečnou vlastností pravděpodobnosti je následující nerovnost.

Věta 2. Pro libovolnou posloupnost náhodných jevů $A_1, A_2, A_3, \ldots$ platí nerovnost

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Důkaz. Jelikož
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap \overline{B}_i),$$
kde $B_1 = \emptyset$, $B_{i+1} = \bigcup_{j=1}^{i} A_j$, a protože $\{A_i \cap \overline{B}_i\}$ jsou navzájem neslučitelné, pak dle vlastnosti C pravděpodobnosti máme, že
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i \cap \overline{B}_i\right).$$
Současně pro každé $i = 1, 2, \ldots$ platí evidentně, že
$$A_i \supset A_i \cap \overline{B}_i,$$
a tudíž díky nezápornosti pravděpodobnosti je
$$P(A_i) \geq P(A_i \cap \overline{B}_i),$$
z čehož ihned plyne dokazovaná nerovnost. □

Z obecné teorie míry (viz např. [5]) budeme potřebovat následující věty.

Věta 3. Nechť $\mathcal{E}$ je libovolný systém podmnožin množiny Ω. Pak existuje nejmenší σ-algebra obsahující systém $\mathcal{E}$, označená jako $\sigma(\mathcal{E})$.

Důkaz. $\operatorname{Exp}\Omega$ obsahující všechny podmnožiny v Ω je největší σ-algebra obsažená v Ω, tudíž $\operatorname{Exp}\Omega \supset \mathcal{E}$, průnik všech σ-algeber nad $\mathcal{E}$ je právě ona nejmenší σ-algebra a je jediná. □

Poznámka. Nejdůležitější případ je ten, když $\mathcal{E}$ je sama množinová algebra, což je množinový systém obsahující Ω a uzavřený vůči rozdílu dvou množin a konečnému sjednocení množin.

Definice 4. Množinová funkce μ definovaná na nějakém množinovém systému $\mathcal{D}$ se nazývá σ-konečná, když každá podmnožina $E \in \mathcal{D}$ se dá pokrýt nejvýše spočetně mnoha podmnožinami $\{E_i\}$, $E_i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$ takovými, že $\mu(E_i) < \infty$ pro každé $i = 1, 2, \ldots$

Poznámka. Je-li $\mathcal{D}$ σ-algebra, pak μ je σ-konečná právě tehdy, když tato vlastnost "býti spočetně pokryt" platí pro $E = \Omega$.

1.2 Pojem zúžení a rozšíření množinové funkce

Mějme dva množinové systémy $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ v Ω a na nich množinové funkce φ, φ_1. Je-li $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$ a když pro každou podmnožinu $E \in \mathcal{D}$ platí
$$\varphi(E) = \varphi_1(E),$$

pak φ je zúžení φ_1 na $\mathcal{D}$, resp. φ_1 je rozšíření φ na $\mathcal{D}_1$. Zúžení obvykle potíže nečiní, neboť to existuje vždy a jednoznačné, pokud neklademe na ně další požadavky, naproti tomu otázka rozšíření je velice složitá a ne řešitelná obecně jednoznačně.

Z hlediska využití v teorii náhodných procesů je nejdůležitější otázka rozšíření pravděpodobnostní míry z algebry na nejmenší σ-algebru nad touto algebrou. Nechť tedy v Ω je dán množinový systém $\mathcal{C}$, který je algebrou, a nechť μ je obecně mírou (ne nutně pravděpodobnostní) definovanou na $\mathcal{C}$. To znamená, že μ je nezáporná množinová funkce definovaná pro každou podmnožinu $C \in \mathcal{C}$, $\mu(C) \geq 0$, přičemž μ je na $\mathcal{C}$ σ-aditivní v tom smyslu, že když $C_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2, \ldots$ jsou navzájem neslučitelné (disjunktní) a jejich spočetné sjednocení patří do $\mathcal{C}$ rovněž, pak musí platit

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i).$$

Nyní se ptáme, za jakých podmínek lze míru μ rozšířit z algebry $\mathcal{C}$ na nejmenší σ-algebru $\sigma(\mathcal{C})$.

Věta 4 (rozšíření míry). Míra μ definovaná na algebře $\mathcal{C}$ může být rozšířena na $\sigma(\mathcal{C})$. Je-li μ σ-konečná na $\mathcal{C}$, pak rozšíření je rovněž σ-konečné na $\sigma(\mathcal{C})$ a je *jediné*.

Důkaz. Pouze základní myšlenky zde uvedeme (detailně viz např. [5], [10]) bez detailů Caratheodoryovy konstrukce vnější míry μ_0 v Ω, což je množinová funkce splňující následující

$$\begin{aligned} \mu_0(A) &\leq \mu_0(B) \quad \text{pro } A \subset B, \quad \mu_0(\emptyset) = 0, \\ \mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \end{aligned}$$

(μ_0 je definována pro každé $E \subset \Omega$).

Podmnožina $A \subset \Omega$ je μ_0-měřitelná, když pro každé $D \subset \Omega$ platí

$$\mu_0(D) \geq \mu_0(A \cap D) + \mu_0(A^c \cap D)$$

(díky polo-σ-aditivitě μ_0) platí automaticky obrácená nerovnost, čili A je μ_0-měřitelná, když

$$\mu_0(D) = \mu_0(A \cap D) + \mu_0(A^c \cap D),$$

pro každé $D \subset \Omega$.

Vyjděme z μ na algebře $\mathcal{C}$ a definujme

$$\mu_0(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\right\}$$

kde inf se bere přes všechna spočetná pokrytí množiny A množinami z $\mathcal{C}$, tj. $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Lze dokázat, že $\mu_0(\cdot)$ je vnější míra a je to rozšíření μ na všechny podmnožiny v Ω (tj.

$\mu_0(A) = \mu(A)$ na $\mathcal{C}$). Lze dokázat, že všechny μ_0-měřitelné podmnožiny tvoří σ-algebru a μ_0 je míra na této σ-algebře. Dále lze snadno dokázat, že každá množina z původní algebry $\mathcal{C}$ je μ_0-měřitelná, tedy jedná se skutečně o rozšíření, neboť musí toto rozšíření obsahovat nejmenší σ-algebru nad $\mathcal{C}$. Při σ-konečnosti vyplývá i jednoznačnost rozšíření, obecně toto nemusí platit. $\square$

Věta 5 (zúplnění míry). Každá míra μ definovaná na σ-algebře $\mathcal{A}$ se dá jednoznačně rozšířit na větší σ-algebru A_μ, která má tu vlastnost, že každá podmnožina množiny $A \in \mathcal{A}$ míry $\mu(A) = 0$ patří do A_μ a má míru nula.

Důkaz. Konstrukce σ-algebry $\mathcal{A}_\mu$: pro každé $A \in \mathcal{A}$ a každé $N \subset N_0$, kde $N_0 \in \mathcal{A}$ s $\mu(N_0) = 0$ definujme

$$\mu_u(A \cup N) = \mu(A).$$

Množiny $\{A \cup N,\ N \subset N_0,\ A,\ N_0 \in \mathcal{A},\ \mu(N_0) = 0\}$ tvoří σ-algebru $\mathcal{A}_\mu \supset \mathcal{A}$. Tomuto rozšíření μ_u se říká zúplnění míry μ (Lebesgueovo rozšíření). σ-algebra $\mathcal{A}_\mu$ je též nazývána zúplněním σ-algebry $\mathcal{A}$ vzhledem k μ. $\square$

Příklad. $\mathcal{A}$ nechť jsou borelovské podmnožiny v $I\!R$, pak $\mathcal{A}_\mu$ jsou lebesgueovské podmnožiny v $I\!R$ při Lebesgueově míře na borelovských množinách.

Definice 5 (borelovské množiny v obecném metrickém prostoru). Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Pak minimální σ-algebra nad systémem všech otevřených množin se nazývá borelovská σ-algebra. Borelovské podmnožiny v $I\!R$ budeme značit $\mathcal{B}_1$.

Poznámka. V $I\!R$ existují i neborelovské (resp. nelebesgueovské) podmnožiny, jejich konstrukce je ale založena na *axiomu výběru*. (Viz [5], [7].)

Definice 6 (kolmogorovská σ-algebra). Nechť $T \neq \emptyset$ je libovolná množina, nechť $\mathcal{X}$ je nějaká podmnožina všech funkcí nad T, tj. $\mathcal{X} \subset I\!R^T$, (tj. $\mathcal{X}$ nemusí obecně obsahovat všechny funkce). Minimální σ-algebra nad systémem množin

$$\{A_{tc} = \{x(\cdot) \in \mathcal{X} : x(t) < c\},\ t \in T,\ c \in I\!R\}$$

se nazývá kolmogorovská σ-algebra v $\mathcal{X}$.

Lemma 1. Je-li T konečná, pak kolmogorovská a borelovská σ-algebra v $I\!R^T$ splývají.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze klást $T = \{1, 2, \ldots, N\}$, tedy položme $\mathcal{X} = I\!R^N$. Zvolme pevně $t \in \{1, 2, \ldots, N\}$ a $c \in I\!R$. Dokážeme, že každá množina $A_{tc} = \{x(\cdot) \in \mathcal{X} : x(t) < c\}$ je otevřená. Snadno vidět, že

$$A_{tc} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) : x(t) < c\},$$

neboť $x(\cdot) \in \mathcal{X}$ je jednoznačně určena svými hodnotami $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.

Nechť $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_N^0) \in A_{tc}$ čili pak $a = c - x_t^0 > 0$. Uvažujme kouli $S(x^0, a) = \{(x_1, \ldots, x_N) : \|x - x^0\| < a\}$

$$\begin{aligned} \|x - x^0\| &= \left(\sum_{i=1}^N (x_i - x_i^0)^2\right)^{1/2} < a \Longrightarrow |x_t - x_t^0| < a \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow x_t^0 - a < x_t < a + x_t^0 = c \Longrightarrow x_t < c, \end{aligned}$$

tudíž otevřenost pak plyne již přímo z otevřenosti podmnožiny v $I\!R^N$. Minimální σ-algebra nad otevřenými množinami musí pak být obsažena v minimální σ-algebře nad $\{A_{tc}\}$, tedy $B_N \supset \mathcal{K}_N$.

Naopak je známo, že každá otevřená množina v $I\!R^N$ je vyjádřitelná jako spočetné sjednocení N-rozměrných otevřených kvádrů typu $\{(x_1, \ldots, x_N) : a_t < x_t < b_t\}$, které evidentně patří do $\mathcal{K}_N$. Tím je dokázána opačná inkluze. $\square$

Poznámka. V prostorech nekonečných dimenzí se obecně kolmogorovská σ-algebra a σ-algebra borelovských množin nemusí shodovat.

2 Pojem náhodné veličiny a náhodného procesu

2.1 Náhodný proces

Nechť na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je dána reálná funkce $X(\cdot) : \Omega \to I\!R$ taková, že pro každé $c \in I\!R$ je

$$X^{-1}(-\infty, c) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < c\} \in \mathcal{A}.$$

Pak $X(\cdot)$ se nazývá $\mathcal{A}$-měřitelná. Měřitelné funkce se v teorii pravděpodobnosti nazývají náhodné veličiny.

Definice 7. Nechť T je libovolná neprázdná množina. Pak systém náhodných veličin $\{X_t(\cdot),\, t \in T\}$ nazýváme náhodným procesem na T.

Náhodný proces je vlastně funkce dvou proměnných (ω, t), $\omega \in \Omega$, $t \in T$ taková, že pro každé $t \in T$ je $X(\omega, t)$ $\mathcal{A}$-měřitelná náhodná veličina. Při pevném ω jakožto funkce v t hovoříme o trajektorii náhodného procesu. Proces lze též chápat jakožto zobrazení $\Omega \to I\!R^T$, které každému $\omega \in \Omega$ přiřazuje trajektorii $X(\omega, \cdot)$.

Lemma 2. Nechť $\mathcal{K}$ je kolmogorovská σ-algebra v $I\!R^T$. Je-li $X = \{X_t(\cdot),\, t \in T\}$ libovolný náhodný proces na T definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, pak pro každé $K \in \mathcal{K}$ je

$$\{\omega : X(\omega) \in K\} \in \mathcal{A};$$

(čili umíme určit

$$P\{\omega : X(\omega) \in K\}).$$

Důkaz. Uvažujme všechny podmnožiny v $I\!R^T$, pro které má smysl pravděpodobnost $P\{\omega : X \in C\}$, $C \subset I\!R^T$, tj. vzor $X^{-1}C$ patří do σ-algebry $\mathcal{A}$. Tento systém podmnožin je σ-algebra a obsahuje též všechny podmnožiny tvaru $A \times I\!R^{T-\{t\}}$, neboť $\{\omega : X \in A \times I\!R^{T-\{t\}}\} = \{\omega : X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}$, kde $A \in \mathcal{B}_1$. To ale znamená, že tato σ-algebra obsahuje i nejmenší σ-algebru nad takovýmito podmnožinami, a to je právě σ-algebra $\mathcal{K}$. Tím jsme dokázali, že též všechny podmnožiny tvaru $\{\omega : X \in C\} \in \mathcal{A}$, pro $C \in \mathcal{K}$. $\square$

Pravděpodobnostní míra P na základním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ určuje jednoznačně sdružené rozdělení náhodného procesu $X = \{X(t),\, t \in T\}$ v tom smyslu, že pro každé $K \in \mathcal{K}$ určuje

$$P\{X \in K\}.$$

Je-li $K = K_{t_1 t_2 \cdots t_n}^{c_1 c_2 \cdots c_n}$, pak $P\{X \in K\}$ není nic jiného nežli sdružená distribuční funkce náhodných veličin $X(t_1)$, $X(t_2), \ldots, X(t_n)$.

Příklad netriviálních množin, které patří do kolmogorovské σ-algebry:

1. je-li T spočetná, pak $\{x(\cdot) : \sup_{t \in T} x(t) \leq 1\} \in \mathcal{K}$
2. je-li $T = \mathbb{N}$, pak $\{x(\cdot) : \lim_{t \to \infty} x(t) = 0\} \in \mathcal{K}$,
   neboť $\{x(\cdot) : \lim_{t \to \infty} x(t) = 0\} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \left\{x(\cdot) : x(n) < \frac{1}{N}\right\}$.

Důležitý příklad konstrukce náhodného procesu

Nechť $T \neq 0$ nějaká množina, nechť $\Omega = \{\omega(\cdot) : \omega(\cdot) \in \mathbb{R}^T\}$ (obecně to nemusí být všechny funkce). Nechť v Ω je definována nějaká σ-algebra (např. kolmogorovská) a na ní pravděpodobnostní míra P. Pak lze definovat stochastický proces

$$X = \{X(t, \omega) : t \in T\}$$

jako $X(t, \omega) = \omega(t)$ (přímo jako elementární jevy jsou vybrány funkce z Ω). Zde je tedy výsledek pokusu totožný s trajektorií procesu.

2.2 Statistiky a indukované pravděpodobnosti

Nechť $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, $(\mathcal{T}, \mathcal{D})$ jsou dva měřitelné prostory, $T : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ nechť je zobrazení definované na $\mathcal{X}$ s hodnotami v $\mathcal{T}$.

Definice 8. Říkáme, že zobrazení T je $\mathcal{D}$-$\mathcal{A}$-měřitelné, když pro každou podmnožinu $D \in \mathcal{D}$ je

$$T^{-1}(D) \in \mathcal{A}.$$

V teorii pravděpodobnosti či matematické statistice se měřitelným zobrazením říká obecně statistiky (např. reálná, vektorová). Je-li T statistika a P pravděpodobnost na $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, pak tato statistika indukuje pravděpodobnostní míru na $\mathcal{D}$ přenosem pomocí vztahu (označme ji $Q(\cdot)$)

$$Q(D) = P\{T^{-1}(D)\}; \quad \text{krátce} \quad Q = PT^{-1}.$$

Každá statistika indukuje pod-σ-algebru σ-algebry $\mathcal{A}$, a to

$$\mathcal{A}_T = \{T^{-1}(D) : D \in \mathcal{D}\} \quad (\text{obecně } \mathcal{A}_T \subset \mathcal{A}).$$

Nechť $g(\cdot)$ je $\mathcal{D}$-měřitelná reálná funkce na $\mathcal{T}$. Pak pro každé reálné číslo λ platí

$$\{x : g(T(x)) < \lambda\} = T^{-1}\{t : g(t) < \lambda\}.$$

Protože $g(\cdot)$ je $\mathcal{D}$-měřitelná, pak $\{t : g(t) < \lambda\} \in \mathcal{D} \Longrightarrow \{x : g(T(x)) < \lambda\} \in \mathcal{A}_T$.

Platí následující důležitá vlastnost, kterou uvedeme bez důkazu.

Lemma 3. Je-li $f(x)$ $\mathcal{A}_T$-měřitelná reálná funkce, pak existuje taková $\mathcal{D}$-měřitelná reálná funkce $g(\cdot)$ na $\mathcal{T}$, že

$$f(x) = g(T(x))$$

pro každé $x \in \mathcal{X}$.

Věta 6 (o přenosu integrace). Nechť T je statistika na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s hodnotami v $(\mathcal{T}, \mathcal{D})$ a nechť $g(\cdot)$ je $\mathcal{D}$-měřitelná funkce na $\mathcal{T}$. Nechť

$$Q = PT^{-1}.$$

Pak

$$\int_{\mathcal{X}} g(T(x))\,\mathrm{d}P(x) = \int_{\mathcal{T}} g(t)\,\mathrm{d}Q(t),$$

pokud jeden z integrálů existuje.

Důkaz. Nechť nejdříve $g(t) = \psi_D(t)$ (indikátor množiny $D \subset \mathcal{T},\ D \in \mathcal{D}$). Pak

$$\int_{\mathcal{X}} g(T(x))\,\mathrm{d}P(x) = \int_{\mathcal{T}} g(t)\,\mathrm{d}Q(t) = \int_D \mathrm{d}Q(t) = Q(D) = P\{T^{-1}(D)\}.$$

V dalším kroku se platnost vztahu dokáže pro každou jednoduchou funkci $g(t)$ na $\mathcal{T}$ a dále se využije možnosti aproximovat každou nezápornou měřitelnou funkci na $\mathcal{T}$ posloupností jednoduchých funkcí. V posledním kroku důkazu se využije rozklad

$$g = g^+ - g^-.$$

□

Z tohoto pohledu lze chápat pravděpodobnostní proces $X = \{X(t),\, t \in T\}$ jako statistiku definovanou na základním pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s hodnotami v prostoru $(\mathbb{R}^T, \mathcal{K})$, kde $\mathbb{R}^T$ je prostor všech funkcí na T, $\mathcal{K}$ je příslušná kolmogorovská σ-algebra a pomocí X se indukuje míra Q na $\mathcal{K}$ následovně

$$Q\{x(\cdot) : x(t_1) < \lambda_1, \ldots, x(t_n) < \lambda_n\} = P\{\omega : X(t_1, \omega) < \lambda_1, \ldots, X(t_n, \omega) < \lambda_n\},$$

neboli $Q = P\,X^{-1}$. Z tohoto vyplývají podmínky, které indukované vícerozměrné distribuční funkce $F_{X_{t_1} \cdots X_{t_n}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = P\{\omega : \bigcap_{i=1}^n X(t_i, \omega) < \lambda_i\}$ musí splňovat:

1. podmínka symetrie:

$$F_{X_{t_1},\dots,X_{t_n}}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = F_{X_{t_{i_1}},\dots,X_{t_{i_n}}}(\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_n})$$

pro jakoukoliv permutaci $(i_1 \cdots i_n)$ z čísel $(1,2,\dots,n)$.

2. podmínka konzistence
Pro libovolná $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ a $t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n+1} \in T$ platí

$$F_{X_{t_1}\cdots X_{t_n}}(\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n,\infty) = F_{X_{t_1}\cdots X_{t_n}}(\lambda_1\cdots\lambda_n).$$

Otázka: Je-li dán systém distribučních funkcí nad $T \neq \emptyset$, který splňuje podmínky 1. a 2., zda-li existuje náhodný proces, který indukuje právě tento systém konečněrozměrných distribučních funkcí. Odpověď je kladná. Systém distribučních funkcí splňující podmínky 1. a 2. se nazývá konzistentní systém distribučních funkcí.

Věta 7 (Kolmogorov). Nechť T je neprázdná množina. Nechť $\mathcal{X} = \mathbb{R}^T$, nechť $\mathcal{K}$ je kolmogorovská σ-algebra na $\mathcal{X}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou n-tici $t_1,t_2,\dots,t_n$ prvků z T nechť je dán systém distribučních funkcí $F_{t_1,t_2\cdots t_n}(\cdot,\cdot,\dots,\cdot)$, který je konzistentní.

Pro libovolné $x \in \mathcal{X}$ položme $X_t(x) = x(t)$. Pak existuje na $\mathcal{K}$ pravděpodobnostní míra P taková, že platí

$$P\{x(\cdot) \in \mathbb{R}^T : X_{t_i}(x(\cdot)) < \lambda_i,\ i = 1,2,\dots,n\} = F_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1,\dots,\lambda_n).$$

Důkaz. Systém distribučních funkcí, který je konzistentní, definuje jednoznačně nezápornou množinou funkci na systému všech borelovských cylindrů v $\mathcal{K}$, což jsou množiny typu

$$B_{t_1\cdots t_n} = \{x(\cdot) \in \mathcal{X} : (x(t_1),\dots,x(t_n)) \in B_n,\quad B_n \text{ je borelovská podmnožina v } \mathbb{R}^n\}.$$

Speciálně pravoúhlý obdélník je takový, když $B_n = \prod_{i=1}^n B_i,\ B_i \in \mathcal{B}_1$ (borelovské podmnožiny v $\mathbb{R}$).

Není problém dokázat, že všechny borelovské cylindry v $\mathcal{K}$ tvoří algebru, na níž díky konzistenci je jednoznačně určená množinová funkce $P(\cdot)$, a to pomocí vztahu

$$P(B_{t_1,\dots,t_n}) = \int\int_{B_n} \mathrm{d}F_{t_1\cdots t_n}(\lambda_1\cdots\lambda_n).$$

Snadno se dokáže, že $P(\cdot)$ na algebře $\mathcal{B}$ (borelovských cylindrů) je konečně aditivní. Aby bylo možno ji rozšířit na $\mathcal{K} = \sigma(\mathcal{B})$, musí být na $\mathcal{B}$ σ-aditivní. Toto se dokazuje sporem následovně.

Nechť $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ je klesající posloupnost cylindrických podmnožin z $\mathcal{B}$. Nechť $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = L > 0$. Je nutno pak dokázat, že

$$\bigcap_{n=1}^\infty A_n \neq \emptyset.$$

Nechť $A_n = B_n \times I\!R^{T-\{t_1,t_2,\dots,t_n\}}$ ($B_n \dots$ základna cylindru A_n). Díky vlastnostem borelovských podmnožin v euklidovském prostoru pro každé B_n existuje uzavřená a ohraničená podmnožina U_n taková, že

$$P_n(B_n - U_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$$

kde P_n je zúžení P na $I\!R^n$, tedy rovněž

$$P(A_n - V_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n},$$

kde $V_n = U_n \times I\!R^{T-\{t_1,t_2,\dots,t_n\}}$. Nechť $W_n = \bigcap_{i=1}^n V_i$. Pak máme, že $P(A_n - W_n) \leq \varepsilon$, a protože

$$W_n \subseteq V_n \subseteq A_n,$$

pak

$$P(W_n) \geq P(A_n) - \varepsilon \geq L - \varepsilon.$$

Z toho plyne, že $P(W_n) > 0$ a $W_n \neq \emptyset$.

Z každé podmnožiny W_n vybereme bod $x^{(n)}$; je zřejmé, že pro každé $p = 0, 1, \dots$ je $x^{(n+p)} \in V_n$. Protože $V_n = U_n \times I\!R^{T-\{t_1,t_2,\dots,t_n\}}$ a U_n jsou uzavřené a ohraničené, lze diagonální metodou vybrat podposloupnost $\{x^{(n_i)}\}_{i=1}^{\infty}$ tak, že odpovídající souřadnice $\{x_{t_k}^{n_i}\}$ tvoří konvergentní posloupnost konvergující k x_k při $i \to \infty$ pro každé k. Nechť $x \in \mathcal{X}$ je takový bod, že má souřadnice

$$x_{t_k} = x_k, \qquad x_t = 0 \quad \text{pro } t \neq t_k,\ k = 1, 2, \dots.$$

Díky uzavřenosti V_n každý hromadný bod patří do U_n, a tudíž $x \in A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. □

Poznámka. Kolmogorovova věta říká, že pro libovolný systém konzistentních konečněrozměrných rozdělení existuje pravděpodobnostní prostor a na něm náhodný proces, který má tatáž konečněrozměrná rozdělení. Tento výsledek ale neříká nic dalšího o možných vlastnostech procesu, např. jako jsou vlastnosti jeho trajektorií. Podívejme se, do jaké míry je konzistentnost postačující podmínkou pro zadefinování náhodného procesu s předem danými vlastnostmi. Máme tedy konzistentní systém $\mathcal{P}$ konečněrozměrných rozdělení aplikovaný na třídu funkcí $\{X_t(\omega), \omega \in \Omega, t \in T\}$. Označme $\mathcal{A}$ všechny množiny v Ω, které jsou tvaru

$$A = \{\omega : (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)) \in B_n\}$$

kde $t_i \in T,\ i = 1, 2, \dots, n$ a B_n je n-rozměrná borelovská podmnožina v $I\!R^n$. Je možné snadno ukázat, že $\mathcal{A}$ je algebra a uvažujme $\sigma(\mathcal{A})$. Na $\mathcal{A}$ lze pomocí systému $\mathcal{P}$ definovat množinovou funkci P pomocí vztahu

$$P(A) = \int \underset{B_n}{\cdots} \int \mathrm{d}P_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Tato množinová funkce $P(\cdot)$ na $\mathcal{A}$ je aditivní, ale nemusí být σ-aditivní, a tím pádem nemusí být rozšiřitelná na $\sigma(\mathcal{A})$. Problém je v tom, že neuvažujeme všechny možné funkce na Ω, ale pouze některé. Ukažme si to na následujícím příkladě.

Nechť $T = \langle 0, 1\rangle$, $\Omega = C\langle 0, 1\rangle$ a $X_t(\omega)$ nechť jsou souřadnicové funkce, tj. $X_t(\omega) = \omega(t)$, kde $\omega = \{\omega(t), t \in \langle 0, 1\rangle, \omega(\cdot) \in C\langle 0, 1\rangle\}$. Nechť systém $\mathcal{P}$ konečněrozměrných rozdělení je dán předpisem

$$P_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_j} g(u)\,\mathrm{d}u,$$

$g(\cdot)$ je vzhledem k nule libovolná symetrická hustota pravděpodobnosti, např. z rozdělení $N(0, 1)$. Je snadno vidět, že systém $\mathcal{P}$ je konzistentní. Dále je vidět, že

$$P\{\omega : X_s(\omega) < -\varepsilon,\, X_t(\omega) > \varepsilon\} = \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} g(u)\,\mathrm{d}u\right)^2$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Uvažujme množiny tvaru

$$A_n = \left\{\omega : X_s(\omega) > \varepsilon,\, X_{s+\frac{1}{n}}(\omega) < -\varepsilon\right\}.$$

Protože Ω obsahuje pouze spojité funkce, které nemohou mít žádný skok, pak $A_n \searrow \emptyset$, přičemž ale

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} g(u)\,\mathrm{d}u\right)^2 > 0.$$

Z toho ihned plyne, že $P(\cdot)$ není míra na odpovídající algebře $\mathcal{A}$, a tedy nelze ji rozšířit na $\sigma(\mathcal{A})$. Tento fakt je již i intuitivně zřejmý, protože systém $\mathcal{P}$ vyjadřuje nezávislost jakýchkoliv dvou náhodných veličin $X_t(\cdot)$, $X_s(\cdot)$, což se při blízkosti bodů s, t neslučuje se spojitostí trajektorií.

Poznámka. Jak vidno z důkazu Kolmogorovovy věty, tento je silně založen na topologických vlastnostech eukleidovských prostorů, a to kompaktnosti. Jinými slovy, že z každé ohraničené posloupnosti bodů lze vybrat konvergující podposloupnost. Z toho je tedy vidět ihned, kdybychom uvažovali hodnoty náhodného procesu v obecnějších prostorech než jsou reálná (či komplexní) čísla, pak analogie Kolmogorovovy věty nemusí vůbec platit, i když bychom vhodně modifikovali pojem konečněrozměrných rozdělení náhodného procesu.

2.3 Ekvivalence náhodných procesů

Definice 9. Nechť na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ jsou dány dvě náhodné veličiny ξ, η. Říkáme, že jsou ekvivalentní (s pravděpodobností 1), když

$$P\{\omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\} = 1, \quad \text{krátce} \quad P\{\xi = \eta\} = 1,$$

(liší se pouze na množině pravděpodobnosti 0).

Definice 10. Dva náhodné procesy na témže $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nazýváme ekvivalentní, když pro každé $t \in T$

$$\text{je} \quad P\{\xi_t = \eta_t\} = 1, \quad \text{označení} \quad \{\xi_t\} \sim \{\eta_t\}.$$

To znamená, že pro každé $t \in T$ existuje náhodný jev N_t s $P(N_t) = 0$ takový, že

$$\xi_t(\omega) = \eta_t(\omega) \quad \text{na } \Omega - N_t.$$

Lemma 4. Když $\{\xi_t\} \sim \{\eta_t\}$, $t \in T$, pak konečněrozměrná rozdělení obou procesů jsou tatáž.

Důkaz. Ihned vidět. □

Poznámka. Když dva náhodné procesy mají tatáž konečněrozměrná rozdělení, pak ještě nemusí být navzájem ekvivalentní, neboť mohou být určeny na různých pravděpodobnostních prostorech (ale i když by byly, opak obecně neplatí).

Poznámka. Dva ekvivalentní náhodné procesy mohou mít různé trajektorie (tato libovůle je vlastně výhodou pro konstrukci ekvivalentního procesu s požadovanými vlastnostmi trajektorií).

Příklad. $T = \langle 0, 1\rangle$, τ náhodná veličina s $0 < \tau < 1$ s pravděpodobností 1 a se spojitým rozdělením. Definujme

$$\xi_t \equiv 0; \quad \eta_t = 1 \quad \text{pro } t = \tau, \quad \eta_t \equiv 0 \quad \text{když } t \neq \tau.$$

Pak pro $t \in \langle 0, 1\rangle$

$$P\{\xi_t \neq \eta_t\} = P\{t = \tau\} = 0,$$

neboť rozdělení veličiny τ nemá skoky, ale η_t má skoky v bodech τ, kdežto ξ_t je identická nula. Oba procesy jsou ekvivalentní, ale mají zcela různé trajektorie.

2.4 Příklady náhodných procesů

1. **Náhodné kmity:** nechť A, η, φ jsou náhodné veličiny, $A \geq 0$, $\eta \geq 0$ s.j. a φ je od nich nezávislá rovnoměrně rozdělená na $\langle 0, 2\pi\rangle$. Uvažujme

   $$\xi_t = A\cos(\eta t + \varphi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Lze snadno dokázat, že konečněrozměrná rozdělení tohoto procesu jsou nezávislá na posunutí, tj.

   $$F_{t_1+k,\ldots,t_n+k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

   pro každé $k \in \mathbb{R}$.

2. **Poissonův proces** ($\lambda > 0$ parametr intenzity)

   (a) $T = \langle 0, +\infty),\ \xi_0 = 0$

   (b) pro každou n-tici $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ jsou

   $$\xi_{t_1} - \xi_{t_0},\, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$$

   navzájem nezávislé.

   (c) $\xi_t - \xi_s,\ 0 \le s \le t$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda(t-s)$, tj.

   $$P\{\xi_t - \xi_s = j\} = [\lambda(t-s)]^j\,\frac{e^{-\lambda(t-s)}}{j!}, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Poznámka. Nechť $\tau_n = \min\{t \ge 0 : \xi_t = n\}$, může být i $\tau_n = +\infty$, když takové t neexistuje. Platí, že $\{\tau_1,\, \tau_2 - \tau_1,\, \tau_3 - \tau_2, \ldots, \tau_n - \tau_{n-1}\}$ jsou vzájemné nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem λ.

3. **Brownův pohyb** $\{b(t),\, t \ge 0\}$

   (a) $b(0) = 0$

   (b) pro každou n-tici bodů $0 \le t_0 < t_1 \cdots < t_n$ jsou veličiny $\{b(t_1) - b(t_0),\, b(t_2) - b(t_1), \ldots, b(t_n) - b(t_{n-1})\}$ vzájemně nezávislé

   (c) $b(t) - b(s),\ t \ge s$ má normální rozdělení $N(0, \sigma^2(t-s))$, v případě $\sigma^2 = 1$ hovoříme o standardním Brownovu pohybu.

Poznámka. Existuje s ním ekvivalentní proces, který má s. j. trajektorie spojité. Ten je pak nazýván wienerovským procesem.

Lemma 5 (o chování kvadratické variace brownovského procesu).

$$\lim_{\|\delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\Delta\, b(t_i))^2 = T \cdot \sigma^2$$

ve smyslu konvergence dle kvadratického středu, kde $\delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ je dělení $\langle 0, T\rangle$, $\Delta\, b(t_i) = b(t_{i+1}) - b(t_i)$, $\|\delta\| = \max_{0 \le i \le n-1}(t_{i+1} - t_i)$.

Důkaz. $\mathsf{E}\,\{\sum_{i=1}^{n}(\Delta\, b(t_i))^2\} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,\{(\Delta\, b(t_i))^2\} = T\,\sigma^2$

$$\mathsf{D}\left\{\sum_1^n (\Delta\, b(t_i))^2\right\} = \sum_1^n \mathsf{D}\left\{(\Delta\, b(t_i))^2\right\} = 2\sum_1^n (t_{i+1} - t_i)^2 \underset{\|\delta\| \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Zřejmě $\mathsf{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}(\Delta b(t_i))^2 - T\sigma^2\right)^2\right\} = \mathsf{D}\,\{\sum_{i=1}^{n}(\Delta b(t_i))^2\}$, a tudíž konvergence dle kvadratického středu platí a limita je právě $T\sigma^2$. $\square$

Lemma 6. Pro každé $A > 0$

$$P\left\{\sum_{i=1}^n |\Delta\, b(t_i)| > A\right\} \underset{\|\delta\|\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Z toho plyne, že trajektorie brownovského procesu mají na každém konečném intervalu nekonečnou variaci, tedy nemají derivaci v žádném bodě (a to dokonce ani jednostrannou).

Důkaz. Vypočte se střední hodnota a rozptyl součtu v závorce a aplikuje se Čebyševova nerovnost. Výpočtem zjistíme, že $\mathsf{E}\left\{\sum_{i=1}^n |\Delta b(t_i)|\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{i=1}^n (t_{i+1}-t_i)^{1/2}$, což při $\|\delta\| \to 0$ jde nade všechny meze. Dále opět z vlastností normálního rozdělení a nezávislosti sčítanců plyne, že $\mathsf{D}\left\{(\sum_{i=1}^n |\Delta b(t_i)|)\right\} = \left(1-\frac{2}{\pi}\right)(b-a)$. Když bude $A < \mathsf{E}\left\{\sum_{i=1}^n |\Delta b(t_i)|\right\}$, pak

$$\begin{aligned}
& P\left\{\omega : \sum_{i=1}^n |\Delta b(t_i,\omega)| \le A\right\} \le \\
\le\ & P\left\{\omega : \left|\sum_{i=1}^n |\Delta b(t_i,\omega)| - \sum_{i=1}^n E\{|\Delta b(t_i,\omega)|\}\right| \ge \mathsf{E}\left\{\sum_{i=1}^n |\Delta b(t_i,\omega)|\right\} - A\right\} \le \\
\le\ & \frac{\mathsf{D}\left\{\sum_{i=1}^n |\Delta b(t_i)|\right\}}{\left(\mathsf{E}\left\{\sum_{i=1}^n |\Delta b(t_i,\omega)|\right\} - A\right)^2} \to 0 \quad \text{při } \|\delta\| \to 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Poznámka (k ekvivalenci náhodných procesů). Budeme-li uvažovat dva ekvivalentní procesy $\{\xi_t\}$, $\{\eta_t\}$, pak se může stát, že existuje náhodný jev, který má různou pravděpodobnost podle toho, kterého procesu se týká. Uvažujme známý již případ, kde $\xi_t = 0$ pro každé $t \in [0,1]$, $\eta_t = 0$ pro $t \neq \tau$, kde τ je spojitá náhodná veličina, $0 < \tau < 1$ a $\eta_t = 1$ pro $t = \tau$. Oba procesy jsou ekvivalentní, ale zřejmě

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1} \xi_t \le \frac{1}{2}\right\} = 1, \quad P\left\{\sup_{0\le t\le 1} \eta_t \le \frac{1}{2}\right\} = 0,$$

což znamená, že množina všech funkcí s horní hranicí maximálně rovnou $1/2$ nemůže patřit do kolmogorovské σ-algebry, protože jinak by u dvou ekvivalentních procesů musel mít tento jev stejnou pravděpodobnost (dle věty o rozšíření míry). Může se navíc i stát, že jev typu $\{\sup \xi_t \le c\}$ vůbec nemusí být náhodným jevem, a tudíž mu nelze ani obecně přisoudit určitou pravděpodobnost.

4. Gaussovské náhodné procesy

Náhodný proces $\{\xi_t, t \in T\}$ se nazývá gaussovský, když jeho všechna konečněrozměrná rozdělení, tj.

$$P\{\omega : \xi_{t_i}(\omega) < \lambda_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}$$

jsou gaussovská.

Následující věta ukazuje, jak se definuje libovolný gaussovský proces.

Věta 8. Nechť T je libovolná neprázdná množina, nechť $\mu(\cdot)$ je libovolná funkce definovaná na T a $r(\cdot,\cdot)$ je funkce obecně komplexní definovaná na $T \times T$, která splňuje

a) $r(s,t) = \overline{r(t,s)}$

b) když $t_1, t_2, \ldots, t_n$ je libovolná konečná podmnožina v T, pak matice $\{r(t_i,t_j)\}_{i,j=1}^n$ je pozitivně semidefinitní.

Pak vždy existuje obecně komplexní gaussovský náhodný proces $\{X(t),\, t \in T\}$ takový, že

$$\mathsf{E}\{X(t)\} = \mu(t)$$
$$\mathsf{E}\{X(s)\,\overline{X(t)}\} - \mu(s)\,\overline{\mu(t)} = r(s,t).$$

Když $\mu(\cdot)$ a $r(\cdot,\cdot)$ jsou reálné, lze proces $\{X(t),\, t \in T\}$ zkonstruovat též reálný.

Důkaz. Důkaz provedeme nejdříve pro reálný případ. Když $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ je libovolná konečná podmnožina v T, pak existuje sdružené gaussovské rozdělení n-rozměrné se středními hodnotami $\mu(t_1), \mu(t_2), \ldots, \mu(t_n)$ a s kovarianční maticí $\{r(t_i,t_j)\}_{i,j=1}^n$. Takové rozdělení se jednoznačně definuje svojí charakteristickou funkcí

$$e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r(t_i,t_j)\,\lambda_i\lambda_j + i\sum_{j=1}^n \lambda_j\mu(t_j)}.$$

Je-li matice $\{r(t_i,t_j)\}_{i,j=1}^n$ regulární, lze přímo napsat hustotu sdruženého n-rozměrného gaussovského rozdělení ve tvaru

$$\frac{|\mathrm{Det}\,\boldsymbol{A}_n|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i-\mu(t_i))\,(x_j-\mu(t_j))},$$

kde $\boldsymbol{A}_n = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je inverzní matice ke kovarianční matici $\{r(t_i,t_j)\}_{i,j=1}^n$.

Snadno lze ukázat, že tento systém konečněrozměrných sdružených rozdělení je konzistentní, a tudíž lze aplikovat Kolmogorovovu větu. V případě, že funkce $\mu(\cdot)$ a $r(\cdot,\cdot)$ jsou obecně komplexní, se zkonstruují dva reálné procesy $\{\xi(t),\, t \in T\}$ a $\{\eta(t),\, t \in T\}$ takové, že

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\{\xi(t)\} &= \mathrm{Re}\,\mu(t)\\
\mathsf{E}\{\eta(t)\} &= \mathrm{Im}\,\mu(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\{\xi(s)\,\xi(t)\} - \mathsf{E}\{\xi(s)\}\,\mathsf{E}\{\xi(t)\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,r(s,t) =\\
= \;&\mathsf{E}\{\eta(s)\,\eta(t)\} - \mathsf{E}\{\eta(s)\}\,\mathsf{E}\{\eta(t)\},\\
&\mathsf{E}\{\xi(s)\,\eta(t)\} - \mathsf{E}\{\xi(s)\}\,\mathsf{E}\{\eta(t)\} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,r(s,t).
\end{aligned}$$

Pak lze snadno dokázat, že proces $x(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ je komplexní gaussovský proces s požadovanými vlastnostmi. Konstrukce procesů $\{\xi(t)\}$ a $\{\eta(t)\}$ je založena na tom faktu, že kovarianční matice tvaru $2n \times 2n$ od veličin $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n), \eta(t_1), \eta(t_2), \ldots, \eta(t_n)$ vytvořená pomocí vztahů výše uvedených je pozitivně semidefinitní a symetrická a opět lze aplikovat Kolmogorovovu větu. $\square$

Lze dokázat, že reálný náhodný proces $\{\xi_t,\ t \in T\}$ je gaussovský právě tehdy, když každá lineární kombinace

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \xi_{t_i}(\omega), \quad t_i \in T,\ \alpha_i \in \mathbb{R},$$

je jednorozměrná gaussovská náhodná veličina.

5. **Procesy a nezávislými (nekorelovanými) přírůstky**

   Náhodný proces $\{\xi_t,\ t \in T\}$ se nazývá procesem s nezávislými přírůstky, když pro každou konečnou podmnožinu bodů $t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n \in T$ jsou náhodné veličiny

   $$\left\{\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i},\ i = 0, \ldots, n-1\right\}$$

   vzájemně nezávislé.

   Bude-li existovat $\mathsf{E}\{|\xi_t|^2\} < +\infty$ pro každé $t \in T$ a budou-li náhodné veličiny $\{\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i},\ i = 0, \ldots, n\}$ nekorelované, tj.

   $$\mathsf{E}\left\{\left(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i} - \mathsf{E}\left\{\left(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i}\right)\right)\right\}\left(\overline{\xi}_{t_{j+1}} - \overline{\xi}_{t_j} - \mathsf{E}\left\{\left(\overline{\xi}_{t_{j+1}} - \overline{\xi}_{t_j}\right)\right\}\right)\right\} = 0$$

   pro $i \ne j$, hovoříme pak o procesu s nekorelovanými přírůstky.

   Když $\mathsf{E}\{\xi_t\} = 0$, pak hovoříme o ortogonálnosti přírůstků. Pro gaussovské náhodné procesy pojmy nezávislosti a nekorelovanosti přírůstků splývají.

6. **Silně stacionární procesy**

   Náhodný proces $\{\xi_t,\ t \in T\}$ se nazývá silně stacionární, když pro každou n-tici $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ a každé takové $h \in \mathbb{R}$, že

   $$t_i + h \in T, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

   platí

   $$P\left\{\omega : \bigcap_i \{\xi_{t_i}(\omega) < \lambda_i\}\right\} = P\left\{\omega : \bigcap_i \{\xi_{t_i+h}(\omega) < \lambda_i\}\right\}$$

   (invariance vůči posunutí). Nejčastěji se uvažují případy

   $$T = \langle 0, \infty), \quad T = (-\infty, +\infty), \quad T = \mathbb{Z}, \quad T = \mathbb{Z}^+.$$

7. **Slabě stacionární náhodné procesy**

   Náhodný proces $\{\xi_t,\ t \in T\}$ nazýváme slabě stacionárním, když jeho 1. a 2. momenty jsou invariantní vůči posunutí, tj.

   a) $\mathsf{E}\{\xi_{t+h}\} = \mathsf{E}\{\xi_t\}$, pro každé $t,\ t + h \in T$

b) $K(t,s) = K(t+h,\, s+h)$ pro každá $t,\, s,\, t+h,\, s+h \in T$ (kovarianční funkce), kde

$$K(t,s) = \mathsf{E}\{\xi_t\,\overline{\xi}_s\} - \mathsf{E}\{\xi_t\}\cdot\mathsf{E}\{\overline{\xi}_s\}.$$

Pro slabě stacionární proces je tedy $\mathsf{E}\{\xi_t\} = \text{konst},\ K(t,s) = K_1(t-s)$. Když je proces silně stacionární a má konečné druhé momenty, pak je i slabě stacionární. Pro gaussovské procesy oba pojmy splývají.

8. **Markovské procesy**

Náhodný proces $\{\xi_t,\, t \in T\}$ nazýváme markovským náhodným procesem, když platí

$$P(A \cap B|\xi_t) = P(A|\xi_t)\, P(B|\xi_t) \quad \text{s. j.}$$

pro každé $A \in \mathcal{F}_{\leq t}$ a $B \in \mathcal{F}_{\geq t}$, kde

$$\mathcal{F}_{\leq t} = \sigma\{\xi_s; s \leq t\}, \qquad \mathcal{F}_{\geq t} = \sigma\{\xi_s; s \geq t\}$$

(budoucnost je podmíněně nezávislá za přítomnosti na minulosti). Jinými slovy lze podmínku markovosti vyjádřit v řeči konečněrozměrných distribucí

$$P\{\xi_t < \lambda|\xi_{s_1}, \xi_{s_2}, \ldots, \xi_{s_n}\} = P\{\xi_t < \lambda|\xi_{s_1}\} \quad \text{s. j.}$$

kde $s_n < s_{n-1} < \cdots < s_1 < t \in T$. O podmíněné pravděpodobnosti viz Dodatek 2.

Evoluce markovského procesu je dána počátečním rozdělením (např. při $T = \langle 0, +\infty)$ se jedná o rozdělení náhodné veličiny ξ_0) a pravděpodobnostmi přechodu

$$\{P(s,x,t,\Gamma) = P\{\xi_t \in \Gamma|\xi_s = x\},\ s \in T,\ t \in T,\ t \geq s,\ x \in I\!\!R,\ \Gamma \in \mathcal{B}_1\}\,.$$

2.5 Základní vlastnosti kovariančních funkcí

Nechť $\{\xi_t(\omega),\, t \in T\}$ je obecně komplexní náhodný proces s konečnými druhými momenty, tj., existuje

$$\mathsf{E}\left\{|\xi_t(\omega)|^2\right\},$$

kde $\xi_t(\omega) = x_t(\omega) + iy_t(\omega)$. Kovarianční funkce je obecně definována jako

$$\mathcal{K}(s,t) = \mathsf{E}\left\{\xi_s(\omega)\,\overline{\xi}_t(\omega)\right\} - \mathsf{E}\left\{\xi_s(\omega)\right\}\ \mathsf{E}\{\overline{\xi}_t(\omega)\},$$

což při nulovosti střední hodnoty dává

$$\mathcal{K}(s,t) = \mathsf{E}\left\{\xi_s(\omega)\,\overline{\xi}_t(\omega)\right\},.$$

$\mathcal{K}(s,t)$ existuje pro každou dvojici $s,\, t$ díky nerovnosti

$$|\mathcal{K}(s,t)| \leq K^{\frac{1}{2}}(s,s)\cdot K^{\frac{1}{2}}(t,t).$$

Každá kovarianční funkce je pozitivně semidefinitní v tom smyslu, že pro libovolná komplexní čísla α_j a $t_j \in T$ je součet

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \, \overline{\alpha}_k \, \mathcal{K}(t_j, t_k) \geq 0.$$

Odtud též plyne, že každá kovarianční funkce je hermitovsky sdružená, tj.

$$\mathcal{K}(s,t) = \overline{\mathcal{K}(t,s)}.$$

Když rozložíme kovarianční funkci $\mathcal{K}(\cdot,\cdot)$ na její reálnou a imaginární část, lze dokázat, že její reálná část je opět kovarianční funkcí, kdežto imaginární část je kovarianční funkcí jedině tehdy, když je identicky nulová.

Naopak lze dokázat, že každá obecně komplexní funkce $\mathcal{K}(\cdot,\cdot)$ definovaná na $T \times T$, která je pozitivně semidefinitní, je již kovarianční funkcí nějakého náhodného procesu (viz věta o konstrukci gaussovského procesu).

3 Vlastnosti trajektorií náhodných procesů

Velice častá otázka se týká určení pravděpodobnosti určitého náhodného jevu ohledně procesu $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$, a to zcela obecně

$$P\{\omega : \xi(\omega) \in C\},$$

kde $C \subset I\!R^T$, pokud ovšem lze vůbec tuto pravděpodobnost určit. Např. pod C si lze představit podmnožinu všech spojitých funkcí, nebo všech analytických funkcí, resp. monotónních apod. Nejdůležitější případ je ten, kdy taková pravděpodobnost je dokonce rovna 1. Pokud $C \in \mathcal{K}$, pak tato pravděpodobnost je jednoznačně určena konečněrozměrnými rozděleními a nezávisí na ekvivalenci mezi náhodnými procesy. Pokud $C \notin \mathcal{K}$, pak není obecně možno předem říci, zdali vzor $\{\omega : \xi(\omega) \in C\}$ takové podmnožiny C patří do σ-algebry náhodných jevů. Vzniká tedy otázka, zdali

1. při zadaných konečněrozměrných rozděleních existuje náhodný proces mající tato konečněrozměrná rozdělení, pro který by bylo možno říci, že

$$P\{\xi(\cdot) \in C\} = 1,$$

2. k danému náhodnému procesu ξ existuje náhodný proces ξ_1 ekvivalentní s náhodným procesem ξ, který ale již splňuje požadavek, že

$$P\{\xi_1(\cdot) \in C\} = 1.$$

ad 1) Odpověď na tuto otázku je vždy kladná, pokud daná podmnožina C má vnější pravděpodobnostní míru 1. Platí totiž následující věta.

Věta 9. Nechť $C \subset I\!R^T$, nechť Φ je pravděpodobnostní míra generovaná konečněrozměrnými rozděleními procesu $\xi = \{\xi(t),\ t \in T\}$ na $(I\!R^T, \mathcal{K})$. Definujeme

$$\Phi^*(C) = \inf\{\Phi(A) : A \supset C,\ A \in \mathcal{K}\}.$$

Je-li $\Phi^*(C) = 1$, pak existuje náhodný proces se stejnými konečněrozměrnými rozděleními jako proces ξ a všechny jeho trajektorie patří do podmnožiny C.

Důkaz. Definujme nový měřitelný prostor; za elementární jevy vezmeme všechny prvky z C a σ-algebra $\mathcal{F}$ bude definována jako

$$\mathcal{F} = C \cap \mathcal{K} = \{C \cap B : B \in \mathcal{K}\}.$$

Nový náhodný proces $\eta = \{\eta_t, t \in T\}$ definujeme pomocí vztahu $\eta_t(x(\cdot)) = x(t)$, pro $x(\cdot) \in C$. Pravděpodobnost P definujeme na $\mathcal{F}$ následovně:

$$P(C \cap B) = \Phi(B).$$

Je nutno dokázat jednoznačnost: nechť $C \cap B_1 = C \cap B_2,\ B_i \in \mathcal{K}$. Pak

$$\begin{gathered} C \cap (B_1 \triangle B_2) = \emptyset \\ (B_1 \triangle B_2 = (B_1 - B_2) \cup (B_2 - B_1)) \Longrightarrow C \subset I\!\!R^T - (B_1 \triangle B_2), \\ \text{protože} \quad I\!\!R^T - (B_1 \triangle B_2) \in \mathcal{K}, \quad \text{pak} \\ \Phi(I\!\!R^T - (B_1 \triangle B_2)) = 1 \Longrightarrow \Phi(B_1 \triangle B_2) = 0 \Longrightarrow \Phi(B_1) = \Phi(B_2). \end{gathered}$$

Tím je míra P určena jednoznačně. Protože

$$C \cap I\!\!R^T = C \Longrightarrow P(C) = P(C \cap I\!\!R^T) = \Phi(I\!\!R^T) = 1,$$

jedná se o pravděpodobnostní míru, σ-aditivita se dokáže snadno pomocí σ-aditivity pravděpodobnostní míry Φ. Shodnost konečněrozměrných rozdělení plyne ze vztahu

$$\begin{aligned} & P\{x(\cdot) \in C : (\xi_{t_1}(x(\cdot)), \ldots, \xi_{t_n}(x(\cdot))) \in A\} = \\ = \ & P\left\{C \cap \{x(\cdot) \in I\!\!R^T : [x(t_1), \ldots, x(t_n)]\} \in A\right\} = \\ = \ & \Phi\left\{x(\cdot) \in I\!\!R^T : [x(t_1), \ldots, x(t_n)]\} \in A\right\}. \end{aligned}$$

$\square$

Tím je sice otázka existence náhodného procesu s požadovanými vlastnostmi trajektorií popsaných podmnožinou C vyřešena, když $\Phi^*(C) = 1$, ale tato vlastnost se velice špatně ověřuje. Proto je vhodnější řešit otázku 2) o existenci ekvivalentního náhodného procesu, který bude mít trajektorie s požadovanou vlastností ve smyslu skoro jistě a navíc bude díky ekvivalenci mít i stejná konečněrozměrná rozdělení. Následující příklad dokumentuje možný postup při konstrukci ekvivalentního procesu s požadovanými trajektoriemi.

Nechť $\{\xi(t), t \in T\}$ je náhodný proces kde $T \subset I\!\!R$ a pro který platí

$$P\{\omega : \xi_s(\omega) \leq \xi_t(\omega)\} = 1$$

pro každou dvojici $s \leq t,\ s, t \in T$. Pak existuje ekvivalentní proces $\{\xi_1(t), t \in T\}$, který má skoro všechny trajektorie monotónní (neklesající funkce). Postup je následující:

Když totiž $t_1 > t_2 > \cdots > t_n, \ldots,\ t_n \in T,\ t_n \downarrow t \in T$, pak posloupnost $\{\xi_{t_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je skoro všude nerostoucí posloupnost zdola ohraničená veličinou ξ_t a tudíž existuje $\lim_{n\to\infty} \xi_{t_n}(\omega) = \xi_{t+}(\omega) \geq \xi_t(\omega)$. Pro s dostatečně blízká k t zprava pak platí

$$\begin{aligned} & P\{\xi_{t+}(\omega) \leq \xi_s(\omega) < \xi_{t+}(\omega) + \varepsilon\} \geq \\ \geq\ & P\{\xi_{t+}(\omega) \leq \xi_{t_n}(\omega) < \xi_{t+}(\omega) + \varepsilon\}, \end{aligned}$$

což při $n \to \infty$ konverguje k 1 pro každé $\varepsilon > 0$. Dále dokážeme, že až na nejvýše spočetnou podmnožinu v T platí $P\{\omega : \xi_{t-}(\omega) = \xi_t(\omega) = \xi_{t+}(\omega)\} = 1$. To znamená, že možných skoků je pouze spočetně mnoho. Z předpokladů plyne, že funkce $\mathsf{E}\{\operatorname{arctg} \xi_t(\omega)\}$ je neklesající funkce na T a tudíž má nejvýše spočetně mnoho skoků. V bodech její spojitosti ze vztahů $\xi_{t-}(\omega) \leq \xi_t(\omega) \leq \xi_{t+}(\omega)$ a $\mathsf{E}\{\operatorname{arctg} \xi_{t+}(\omega) - \operatorname{arctg} \xi_{t-}(\omega)\} = F(t+0) - F(t-0) = 0$ díky spojitosti plyne, že $\xi_{t+}(\omega) = \xi_t(\omega) = \xi_{t-}(\omega)$ skoro jistě. Dále uvažujme všude hustou podmnožinu T_0 v množině T, která obsahuje i body, v nichž proces $\{\xi_t,\ t \in T\}$ není spojitý dle pravděpodobnosti. Protože T_0 je spočetná, pak zřejmě

$$P\{\omega : \xi_s(\omega) \leq \xi_t(\omega) \text{ pro všechny } s \leq t,\ s \in T_0,\ t \in T_0\} = 1.$$

Nyní lze zkonstruovat ekvivalentní proces $\{\tilde{\xi}_t,\ t \in T\}$ následovně. Prodloužíme skoro všechny trajektorie procesu $\{\xi_t,\ t \in T\}$ z podmnožiny T_0 na $T - T_0$. Pro ty body $t \in T - T_0$, které jsou spojité zprava definujme $\tilde{\xi}_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_{t_n}(\omega),\ t_n \in T_0,\ t_n \searrow t$. Pokud by konečná limita neexistovala, položíme $\tilde{\xi}_t(\omega) = 0$. Když t není bodem spojitosti zprava, tak je bodem spojitosti zleva a postupujeme obdobně pomocí posloupnosti $t_n \nearrow t$. V bodech množiny T_0 položíme $\tilde{\xi}_t(\omega) = \xi_t(\omega)$. Je zřejmé, že proces $\{\tilde{\xi}_t,\ t \in T\}$ má skoro všude trajektorie neklesající. Zbývá dokázat, že $P\{\omega : \tilde{\xi}_t(\omega) = \xi_t(\omega)\} = 1$ pro každé $t \in T$. Když $T \in T_0$, platí toto triviálně, když $t \in T - T_0$, pak uvažujme tutéž posloupnost $\{t_n\} \subset T_0$, kde $t_n \longrightarrow t$ pro $n \to \infty$. Pak $\lim_{n\to\infty} \xi_{t_n} = \tilde{\xi}_t$ a $\tilde{\xi}_t = \xi_{t+}$ či ξ_{t-} a tyto veličiny jsou s pravděpodobností 1 rovny původním veličinám ξ_t.

Poznámka. Předchozí konstrukce má jednu slabinu, a to v tom, že jsme automaticky předpokládali, že když $P(A) = 1,\ A \subset B \Longrightarrow P(B) = 1$, i když B nemusí být náhodný jev. Např.

$$\begin{aligned} A &= \{\omega : \{\xi_{t_n}\} \text{ je nerostoucí pro } n \to \infty,\ \xi_{t_n} \geq \xi_t\}, \\ B &= \{\omega : \text{existuje konečná limita } \lim_{n\to\infty} \xi_{t_n}\}. \end{aligned}$$

Pak je $A \subset B$, ale B nemusí patřit do σ-algebra $\mathcal{A}$ náhodných jevů. To se dá zachránit zúplněním σ-algebry vůči pravděpodobnosti P, což znamená, že je-li $P(A) = 0$, pak pro každou podmnožinu

$$B \subset A \Longrightarrow P(B) = 0,$$

(viz Věta 5).

Věta 10. (vlastnosti trajektorií Poissonova procesu). Nechť $\{\xi_t : T = \langle 0, +\infty)\}$ je Poissonův proces. Pak skoro všechny jeho trajektorie jsou neklesající funkce nabývající celočíselných hodnot, které rostou pouze skoky o velikosti 1.

Důkaz. Označme

$$A = \left\{ \omega : \xi_t(\omega) \text{ je celé číslo pro všechna } t = \frac{k}{2^n},\ k = 0, 1, 2, \dots,\ n = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Zřejmě A je náhodný jev a $A = \bigcap_{t=\frac{k}{2^n}} A_t$, kde $A_t = \{\xi_t(\omega) \text{ je celé číslo}\}$.
Protože $P(A_t) = 1$ pro každé t, pak i $P(A) = 1$.

Dále označme $B = \{\omega : \xi_{t_1}(\omega) \leq \xi_{t_2}(\omega),\ \text{kde } t_1 \leq t_2,\ \text{obě typu } \frac{k}{2^n}\}$. Opět označme

$$\begin{aligned} B_n &= \left\{ \xi_0(\omega) \leq \xi_{\frac{1}{2^n}}(\omega) \leq \xi_{\frac{2}{2^n}}(\omega) \leq \cdots \leq \xi_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) \leq \dots \right\} \\ &= \bigcap_{k=0}^{\infty} \left\{ \omega : \xi_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) \geq \xi_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \right\}. \end{aligned}$$

Protože

$$P\left\{ \omega : \xi_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) \geq \xi_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \right\} = 1,$$

pak i

$$1 = P(B_n) = P(B).$$

Dále nechť

$$\begin{aligned} C_N = \{\omega :\ & \text{pro všechna celá } i \text{ od } 0 \text{ do hodnoty } \xi_N \\ & \text{existuje } t = \tfrac{k}{2^n} \in \langle 0, N\rangle \text{ takové, že } \xi_t = i\}. \end{aligned}$$

Opět je snadno vidět, že

$$C_N \supset \bigcap_{k=0}^{2^n N - 1} \left\{ \omega : \xi_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - \xi_{\frac{k}{2^n}}(\omega) = 0 \text{ či } 1 \right\}.$$

Odtud ihned

$$\begin{aligned} P(C_N) &\geq \prod_{k=0}^{2^n N - 1} P\left\{ \omega : \xi_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - \xi_{\frac{k}{2^n}}(\omega) = 0 \text{ či } 1 \right\} \\ &= \left(e^{-a\,2^{-n}} + a\,2^{-n}\, e^{-a\,2^{-n}} \right)^{2^n N}. \end{aligned}$$

Protože $e^{-\alpha} + \alpha\, e^{-\alpha} = 1 - o(\alpha)$ při $\alpha \to 0$, pak $P(C_N) \geq [1 - o(a\,2^{-n})]^{N\,2^n}$, což při $n \to \infty$ konverguje k 1, tedy $P(C_N) = 1$ pro každé N.

Když nyní budeme uvažovat náhodný jev

$$A \cap B \cap \bigcap_{N=1}^{\infty} C_N,$$

pak pravděpodobnost tohoto jevu je rovněž 1 a navíc přesně vystihuje chování trajektorií, které jsou po částech konstantní funkce na $\langle 0, +\infty)$ s možnými skoky o velikosti pouze 1.
□

Poznámka. Na základě předchozí Věty 10 a příkladu ze strany 24 lze již snadno ukázat, že k Poissonovu procesu existuje ekvivalentní proces, který má skoro jistě trajektorie zprava spojité.

Věta 11. Nechť $\{\xi_t,\ t \in \langle a,b\rangle\}$ je náhodný proces na pravděpodobnostním prostoru s *úplnou* σ-algebrou náhodných jevů. Nechť existují konstanty $C,\ \varepsilon,\ \beta > 0$ takové, že pro každé $s,\ t \in \langle a,b\rangle$ platí

$$\mathsf{E}\left\{|\xi_t - \xi_s|^\beta\right\} \le C|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Pak existuje ekvivalentní proces k danému procesu $\{\xi_t,\ t\in\langle a,b\rangle\}$, který má s. j. trajektorie *spojité.*

Důkaz. Nechť T_0 je množina všech racionálních bodů tvaru $k/2^n$, k, n celá čísla v intervalu $\langle a,b\rangle$, $n \ge 0$. Pak pomocí Čebyševovy nerovnosti lze psát

$$P\left\{\omega : \left|\xi_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - \xi_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\right| \ge q^n\right\} \le C\cdot 2^{-n-n\varepsilon}\, q^{-n\beta}.$$

Zvolme $q = 2^{-\varepsilon/2\beta} < 1$, pak

$$P\left\{\omega : \left|\xi_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - \xi_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\right| \ge q^n\right\} \le C\cdot 2^{-n}\cdot r^n,$$

kde $r = 2^{-\varepsilon/2} < 1$. Odtud plyne následující nerovnost platící pro libovolné $n \in I\!N$

$$\begin{aligned} & P\left\{\omega : \max_{a\le\frac{k}{2^n}<\frac{k+1}{2^n}\le b}\left|\xi_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - \xi_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\right| \ge q^n\right\} \\ \le\ & \sum_{a\le\frac{k}{2^n}<\frac{k+1}{2^n}\le b} P\left\{\omega : \left|\xi_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - \xi_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\right| \ge q^n\right\} \\ \le\ & (b-a)\,2^n\, C\, 2^{-n}\cdot r^n = C(b-a)\cdot r^n. \end{aligned}$$

Protože $\sum_{n=0}^\infty r^n$ konverguje, pak díky Borel–Cantelliovu lemmatu s pravděpodobností 1 od nějakého $n_0(\omega)$ jsou pro všechna $n \ge n_0(\omega)$, $a \le \frac{k}{2^n} < \frac{k+1}{2^n} \le b$, splněny nerovnosti

$$\left|\xi_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - \xi_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\right| < q^n.$$

Dokážeme, že pro tato $\omega \in \Omega$ jsou funkce $\xi_t(\omega)$ stejnoměrně spojité na množině T_0. Jestliže s, t jsou libovolná čísla tvaru $\frac{k}{2^n}$ taková, že $|s-t| < \frac{1}{2^n}$, $s \le t$, se jmenovateli nepřevyšujícími 2^m, pak

$$(1) \qquad |\xi_t(\omega) - \xi_s(\omega)| \le 2\sum_{i=n+1}^m q^i,$$

kde $m \ge n \ge n_0(\omega)$. Toto lze dokázat úplnou indukcí. Když $n = m$ a $|s-t| < \frac{1}{2^n}$, pak jedině $s = t$ a nerovnost automaticky platí. Nechť nyní vztah platí pro každé $m < m_0$, a dokážeme platnost pro m_0. Označme s' nejbližší racionální číslo typu $\frac{k}{2^n}$, se jmenovatelem menším nežli 2^{m_0}, resp. $s' = s + \frac{1}{2^{m_0}}$, když je jmenovatel roven 2^{m_0}. Analogicky pro t zleva. Tím máme dvojici s', t' takovou, že $|s'-t'| \leq |s-t| \leq \frac{1}{2^n}$ a podobně předpokládáme platnost nerovnosti (1) pro $m_0 - 1$, pak díky nerovnostem $|\xi_{t'}(\omega) - \xi_t(\omega)| < q^{m_0}$, $|\xi_{s'}(\omega) - \xi_s(\omega)| < q^{m_0}$, získáme nerovnost (1) pro m_0.

Když nyní bude $|s-t| < \frac{1}{2^{n_0(\omega)}}$, vybereme taková $n \geq n_0(\omega)$, že

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq |s-t| \leq \frac{1}{2^n},$$

a odtud pak již

$$|\xi_t(\omega) - \xi_s(\omega)| \leq 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} q^i < \frac{2}{1-q} |t-s|^{\alpha},$$

kde $\alpha = -\log_2 q > 0$. Tím je dokázána stejnoměrná spojitost funkce $\xi_t(\omega)$ na T_0, a lze ji spojitě prodloužit na celý interval $\langle a, b\rangle$. Položíme $\xi_t^1(\omega) = \xi_t(\omega)$ pro $t \in T_0$ a jinak jako limity ve zbylých bodech intervalu $\langle a, b\rangle$. Zbývá dokázat, že

$$P\left\{\xi_t^1(\omega) = \xi_t(\omega)\right\} = 1$$

pro každé $t \in \langle a, b\rangle$. Toto ale snadno plyne z konstrukce procesu $\{\xi_t^1(\omega),\, t \in \langle a, b\rangle\}$, neboť

$$\xi_t^1(\omega) = \lim_{\substack{s \to t \\ s \in T_0}} \xi_s(\omega).$$

$\square$

Předchozí věta se dá použít ke konstrukci wienerovského procesu $\{w(t),\, t \geq 0\}$, což je gaussovský proces s nezávislými přírůstky $w(t) - w(s)$ s rozdělením $N(0, \sigma^2(t-s))$ mající s.j. spojité trajektorie. Když aplikujeme předchozí větu s parametry $\beta = 4$, $\varepsilon = 1$ na Brownův pohyb, tak tím prokážeme existenci ekvivalentního stochastického procesu, jehož trajektorie budou již skoro jistě spojité. A to je právě wienerovský proces $\{w(t),\, t \geq 0\}$. Na druhou stranu příklad procesu $\{\xi(t),\, t \geq 0\}$, kde $\xi(t) = \exp\{w^3(t)\}$ dokazuje, že předchozí věta vyjadřuje pouze postačující podmínku, protože evidentně proces $\{\xi(t),\, t \geq 0\}$ má s.j. spojité trajektorie, ale jeho kovarianční funkce nesplňuje podmínky věty pro žádnou dvojici parametrů β, ε, protože $\mathsf{E}\{|\xi(t) - \xi(s)|^{\beta}\}$ není konečná pro žádné $\beta > 0$.

4 Základy náhodné analýzy

Jedná se o studium různých typů spojitostí, diferencovatelnosti a integrovatelnosti reálných či komplexních náhodných procesů. Budeme pojednávat o konvergenci dle pravděpodobnosti, dle kvadratického středu a ve smyslu skoro jistě. Výhradně budeme uvažovat $T \subset I\!R$.

V následujícím krátce se zmíníme o hlavních typech konvergence posloupností náhodných veličin. Základním typem konvergence je konvergence dle pravděpodobnosti. Říkáme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje podle pravděpodobnosti k náhodné veličině X, když pro každé $\eta > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \eta\} = 0.$$

Limitní veličina $X(\cdot)$ je určena s pravděpodobností 1. Budeme užívat označení $P\text{-}\lim_{n\to\infty} X_n = X$. O konvergenci dle středu, resp. kvadratického středu, hovoříme tehdy, když platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\{|X_n(\omega) - X(\omega)|\} = 0,$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\{|X_n(\omega) - X(\omega)|^2\} = 0.$$

Zde tedy požadujeme, aby existovala $\mathsf{E}\{|X_n(\omega)\}$, resp. $\mathsf{E}\{|X_n(\omega)|^2\}$, pro každé $n \in I\!N$. Pak i existuje $\mathsf{E}\{|X(\omega)|\}$, resp. $\mathsf{E}\{|X(\omega)|^2\}$. Konvergence dle kvadratického středu implikuje konvergenci dle středu a ta implikuje konvergenci dle pravděpodobnosti. Posledním typem konvergence je konvergence posloupnosti odpovídajících distribučních funkcí $F_{X_n}(\cdot)$ k limitní distribuční funkci $F_X(\cdot)$, a to platnost vztahu

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(\lambda) = F_X(\lambda)$$

ve všech bodech spojitosti limitní funkce $F_X(\cdot)$. Tato konvergence je nazývána konvergencí v podstatě či slabou konvergencí distribučních funkcí. Tato konvergence platí právě tehdy, když pro každou spojitou ohraničenou funkci $f(\cdot)$ na $I\!R$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}F_{X_n}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}F_X(\lambda).$$

Konvergence dle pravděpodobnosti implikuje konvergenci v podstatě, ale neplatí opak.

4.1 Limita a spojitost

Věta 12. Nechť existuje $\mathsf{E}\{|\xi_t|^2\} < +\infty$ pro každé $t \in T$. Nutná a postačující podmínka pro existenci limity dle kvadratického středu při $t \to t_0$, kde t_0 je hromadný bod množiny T, zní, aby existovala konečná limita

$$\lim_{s,t\to t_0} \mathsf{E}\{\xi_s\overline{\xi}_t\}.$$

Důkaz. Nutnost plyne ze spojitosti skalárního součinu, pak totiž

$$\lim_{s,t\to t_0} \mathsf{E}\{\xi_s\xi_t\} = \mathsf{E}\left\{|\eta_{t_0}|^2\right\},$$

z čehož plyne existence konečné limity, kde η_{t_0} je limita dle kvadratického středu od ξ_t při $t \to t_0$. Postačitelnost je založena na Cauchyově kritériu

$$\lim_{s,t\to t_0} \mathsf{E}\{|\xi_t - \xi_s|^2\} = \lim_{s,t\to t_0} \left\{\mathsf{E}|\xi_t|^2 - \mathsf{E}\xi_t\overline{\xi}_s - \mathsf{E}\xi_s\overline{\xi}_t + \mathsf{E}|\xi_s|^2\right\} = 0.$$

□

Věta 13. Pro to, aby existovala limita dle pravděpodobnosti

$$P\text{-}\lim_{t\to t_0} \xi_t,$$

(kde t_0 je hromadný bod množiny T), je nutné a stačí, aby existovala limita dvourozměrného rozdělení $F_{\xi_s\xi_t}$, $\lim_{t,s\to(t_0,t_0)} F_{\xi_s\xi_t}$ ve smyslu slabé konvergence (konvergence v podstatě) odpovídajících distribučních funkcí.

Důkaz. (Nutná podmínka.) Když $\xi_t \to \eta$ pro $t \to t_0$ dle pravděpodobnosti, pak pro dvourozměrný vektor (ξ_t, ξ_s) platí, že

$$P\text{-}\lim_{(t,s)\to(t_0,t_0)} (\xi_t, \xi_s) = (\eta, \eta)$$

a konvergence dle pravděpodobnosti implikuje konvergenci distribučních funkcí v podstatě, tj. v bodech spojitosti limitní distribuční funkce.

(Podmínka postačující.) Když $t \to t_0$, $s \to t_0$, pak sem zapadá i speciální případ, kdy $s = t$ a konvergence se děje podél hlavní diagonály. Protože rozdělení náhodného vektoru (ξ_t, ξ_t) je soustředěno na hlavní diagonále, pak i jeho limitní rozdělení, pokud existuje, si zachovává tuto vlastnost. Nechť $f_\varepsilon(\cdot)$ je reálná nezáporná funkce, která se rovná nule v nule a mimo ε-okolí je rovna 1. Pak dle Čebyševovy nerovnosti

$$P\{|\xi_t - \xi_s| \geq \varepsilon\} \leq \mathsf{E}\{f_\varepsilon(\xi_t - \xi_s)\} = \int\!\!\int_{R_2} f_\varepsilon(x-y)\, F_{\xi_t\xi_s}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

Lze zvolit $f_\varepsilon(\cdot)$ jako spojitou, je ohraničená, a díky slabé konvergenci distribučních funkcí platí, že integrál na pravé straně při $t,\ s \to t_0$ konverguje k integrálu

$$\iint_{R_2} f_\varepsilon(x-y)\, F_{\eta,\eta}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y),$$

kde $F_{\eta,\eta}(\cdot,\cdot)$ je limitní distribuční funkce, která je soustředěna na hlavní diagonále, a tudíž integrál je roven nule. Tím jsme dokázali, že posloupnost je cauchyovská v pravděpodobnosti. □

V případě spojitosti založené na konvergenci dle pravděpodobnosti, hovoříme o stochastické spojitosti, je to nejslabší rozumná spojitost náhodných procesů.

Definice 11. Náhodný proces $\{\xi_t,\ t \in T\}$ se nazývá stochasticky spojitý v bodě $t_0 \in T$, kde t_0 je hromadný bod v T, když platí

$$P\text{-}\lim_{t\to t_0} \xi_t = \xi_{t_0}.$$

Poznámka. Pojem stochastické spojitosti je jednoznačně odvozen od chování dvourozměrných rozdělení náhodného procesu a nikterak nesouvisí s chováním jeho trajektorií. Takže např. poissonovský proces je spojitý dle pravděpodobnosti v každém bodě, i když jeho trajektorie jsou skokovité, neboť skok může nastat v každém bodě, ale pouze s nulovou pravděpodobností.

Definice 12. Náhodný proces $\{\xi_t,\ t \in T\}$ je spojitý dle kvadratického středu v bodě $t_0 \in T$, kde t_0 je hromadný bod v T, když

$$\lim_{t\to t_0} \mathsf{E}\{|\xi_t - \xi_{t_0}|^2\} = 0.$$

Věta 14. Aby náhodný proces $\{\xi_t,\ t \in T\}$ byl stochasticky spojitý na T, je nutné a stačí, aby rozdělení $F_{\xi_s\xi_t}(\cdot,\cdot)$ bylo slabě spojité na $T \times T$ ve dvojici (s,t).

Důkaz. Přímo plyne z Věty 13. □

Věta 15. Aby náhodný proces $\{\xi_t,\ t \in T\}$ byl spojitý dle kvadratického středu na T, je nutné a stačí, aby byla spojitá funkce $\mathsf{E}\{\xi_s\overline{\xi}_t\}$ na $T \times T$.

Důkaz. Přímo plyne z Věty 12. □

4.2 Derivace

Je zřejmé, že pojem derivace stochastického procesu se bude odvozovat od chování podílu

$$\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h}$$

při $h \to 0$ vůči různým typům konvergence.

Brownův pohyb nemá derivaci ani vůči konvergenci dle pravděpodobnosti, neboť kdyby tento podíl měl při $h \to 0$ limitu dle pravděpodobnosti, pak musí existovat i limita dle distribuce, což ale neexistuje, neboť podíl

$$\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h}$$

má rozdělení $N(0, 1/h)$, což nemá limitu při $h \to 0$. Naopak poissonovský proces je diferencovatelný podle pravděpodobnosti, ale není diferencovatelný podle kvadratického středu. Platí totiž

$$P\left\{\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} \leq \varepsilon\right\} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$$

pro každé $\varepsilon > 0$, neboť s pravděpodobností 1 je $\xi_{t+h} - \xi_t = 0$, ale dle kvadratického středu limita nemá smysl. Protože kdyby existovala takováto limita, musela by být díky předchozímu nulová, takže stačí studovat chování

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left\{\left(\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - 0\right)^2\right\} &= \mathsf{E}\left\{\left(\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h}\right)^2\right\} = \\ &= \frac{1}{h^2}\mathsf{E}\left\{(\xi_{t+h} - \xi_t)^2\right\} = \frac{1}{h^2}\mathsf{E}\left\{\Delta^2\,\xi_t\right\}, \end{aligned}$$

což nemůže konvergovat k nule při $h \to 0$, neboť $\mathsf{E}\{\Delta^2\,\xi_t\} = ah + (ah)^2$ pro poissonovský proces.

Odtud plyne, že pojem derivace založený na konvergenci dle pravděpodobnosti nemá žádoucí vlastnosti, a proto se zaměříme na konvergenci dle kvadratického středu. $\square$

Věta 16. Nutnou a postačující podminkou pro existenci derivace ve středně kvadratickém smyslu v bodě $t_0 \in T$ pro náhodný proces $\{\xi_t,\, t \in T\}$ s nulovou střední hodnotou je existence zobecněné derivace druhého řádu v bodě (t_0, t_0) jeho kovarianční funkce.

Poznámka. Zobecněná druhá derivace je definována jako dvojná limita

$$\lim_{h,\,h'\to 0} \frac{R(t_0 + h,\, t_0 + h') - R(t_0 + h,\, t_0) - R(t_0,\, t_0 + h') + R(t_0, t_0)}{h\,h'},$$

pokud tato existuje.

Důkaz. Rozepíšeme-li

$$\mathsf{E}\left\{\left|\frac{\xi_{t+h}-\xi_t}{h}-\frac{\xi_{t+h'}-\xi_t}{h'}\right|^2\right\}$$

pak získáváme

$$\frac{R(t+h,t+h)-2R(t+h,t)+R(t,t)}{h^2}+\frac{R(t+h',t+h')-2R(t,t+h')+R(t,t)}{(h')^2}$$
$$-2\frac{R(t+h,t+h')-R(t+h,t)-R(t,t+h')+R(t,t)}{hh'}.$$

Odtud ihned plyne, že existence limity

$$\lim_{h,h'\to 0}\frac{R(t+h,t+h')-R(t,t+h)-R(t,t+h')+R(t,t)}{hh'}$$

je nutnou a postačující podmínkou pro existenci derivace dle kvadratického středu. □

Věta 17. Pro to, aby náhodný proces $\{\xi_t,\ t\in(a,b)\}$ měl spojitou derivaci dle kvadratického středu, je nutné a stačí, aby $\mathsf{E}\{\xi_t\overline{\xi}_s\}$ na $(a,b)\times(a,b)$ měla spojitou parciální derivaci druhého řádu vůči t a s, nebo aby $\mathsf{E}\{\xi_t\}$ byla spojitě diferencovatelná funkce na (a,b) a existovala spojitá parciální derivace

$$\frac{\partial^2 R(s,t)}{\partial s\,\partial t}$$

od příslušné kovarianční funkce. Odtud též ihned plyne, že kovarianční funkce příslušné derivace ξ_t' je právě ona parciální derivace kovarianční funkce procesu $\{\xi_t,\ t\in(a,b)\}$.

Důkaz. Aby proces $\{x_t,\ t\in(a,b)\}$ byl spojitý dle kvadratického středu, je nutné a stačí, aby

$$\lim_{s,t\to(t_0,t_0)}\mathsf{E}\{\xi_s\overline{\xi}_t\}=\mathsf{E}\{\xi_{t_0}\}^2$$

pro každé $t_0\in(a,b)$. Když derivace $\{\xi_s',\ s\in(a,b)\}$ bude spojitá dle kvadratického středu, pak musí být dle předchozího $\mathsf{E}\{\xi_s'\overline{\xi}_t'\}=\frac{\partial^2R(s,t)}{\partial s\partial t}$ spojitá na $(a,b)\times(a,b)$. Naopak když bude existovat $\frac{\partial^2R(s,t)}{\partial s\partial t}$ a bude spojitá, pak existuje i zobecněná derivace a tedy existuje derivace dle kvadratického středu a díky spojitosti této derivace je i derivace dle kvadratického středu spojitá na (a,b). □

Poznámka. Když existuje ξ_t' v bodě t, pak

$$\mathsf{E}\{\xi_t'\}=\frac{\partial}{\partial t}\mathsf{E}\{\xi_t\}.$$

4.3 Integrál

Jak definovat integrál od náhodného procesu? Když je náhodný proces $\{\xi_t,\ t \in \langle a,b\rangle\}$ spojitý dle kvadratického středu, pak je přirozené definovat integrál přes dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ pomocí integrálních sum

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{s_i}(t_{i+1}-t_i),$$

kde $\{t_i \le s_i \le t_{i+1}\}$. Jde o to ukázat, kdy existuje limita dle kvadratického středu

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_{s_i}(t_{i+1}-t_i),$$

což lze provést jako u klasického Riemannova integrálu.

Věta 18. Je-li náhodný proces $\{\xi_t,\ t \in \langle a,b\rangle\}$ takový, že $\mathsf{E}\{x(t)\} = 0$ na $\langle a,b\rangle$, $\mathsf{E}\{|x(t)|^2\} < \infty$ pro každé $t \in \langle a,b\rangle$, pak integrál dle kvadratického středu existuje, když existuje ve smyslu Riemannově integrál

$$\int_a^b \int_a^b R(s,t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

kde $R(s,t) = \mathsf{E}\{x(s)\overline{x(t)}\}$.

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_n &= \sum_{i=1}^{n} \xi_{s_i}(t_{i+1}-t_i)\\
\mathcal{Y}_m &= \sum_{i=1}^{m} \xi_{u_i}(v_{i+1}-v_i),
\end{aligned}$$

$\Delta_n = \{t_i\}_1^n,\ \Delta_m = \{v_j\}_{j=1}^m$. Dále

$$\mathsf{E}\{|\mathcal{Y}_n - \mathcal{Y}_m|^2\} = \mathsf{E}\{|\mathcal{Y}_m|^2\} - \mathsf{E}\{\mathcal{Y}_n\overline{\mathcal{Y}}_m\} + \mathsf{E}\{|\mathcal{Y}_m|^2\} - \mathsf{E}\{\overline{\mathcal{Y}}_n\mathcal{Y}_m\} =$$

$$\begin{aligned}
= \ & \mathsf{E}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \xi_{s_i}\,\overline{\xi}_{s_j}(t_{i+1}-t_i)\,(t_{j+1}-t_j)\right\} - \\
& -\mathsf{E}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} \xi_{s_i}\,\overline{\xi}_{u_j}(t_{i+1}-t_i)\,(v_{j+1}-v_j)\right\} - \\
& -\mathsf{E}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} \xi_{u_j}\,\overline{\xi}_{s_i}(t_{i+1}-t_i)\,(v_{j+1}-v_j)\right\} + \\
& +\mathsf{E}\left\{\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1} \xi_{u_i}\,\overline{\xi}_{u_j}(v_{i+1}-v_i)\,(v_{j+1}-v_j)\right\} = \\
= \ & \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} R(s_i,s_j)\,(t_{i+1}-t_i)\,(t_{j+1}-t_j) -
\end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} R(s_i,u_j)\,(t_{i+1}-t_i)\,(v_{j+1}-v_j)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} R(u_j,s_i)\,(t_{i+1}-t_i)\,(v_{j+1}-v_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1} R(u_i,u_j)\,(v_{i+1}-v_i)\,(v_{j+1}-v_j) \underset{\|\Delta\|\to 0}{\longrightarrow} 0$$

tehdy, když existuje

$$\int_a^b \int_a^b R(s,t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

ve smyslu Riemannově. □

Poznámka. V mnohých monografiích a učebnicích je předchozí věta vyslovena jako též nutná podmínka pro existenci integrálu ve smyslu konvergence dle kvadratického středu. Lze ale ukázat, že tomu tak není. Problém je totiž v tom, jak jsou definovány příslušné integrální sumy vystupující v definici dvourozměrného Riemannova integrálu. V případě, který je uvažován ve výše uvedeném důkazu, jde o sumy typu (A), totiž sumy tvaru

$$\sum_i \sum_j R(z_i,z_j)\,\Delta y_i\,\Delta y_j,$$

kde $z_i \in (y_i, y_{i+1})$, $z_j \in (y_j, y_{j+1})$, kdežto při definici Riemannova dvourozměrného integrálu jde o sumy typu (B)

$$\sum_i \sum_j R(z_{ij},z'_{ij})\,\Delta y_i\,\Delta y_j,$$

kde $(z_{ij}, z'_{ij}) \in (y_i, y_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$. Je ihned vidět, že sumy typu (A) jsou speciálním případem sum typu (B), jejichž konvergence zaručuje existenci Riemannova integrálu a nikoliv konvergence sum typu (A). Blíže viz [9], kde je ukázána konstrukce náhodného procesu, který je integrovatelný dle kvadratického středu, ale jeho kovarianční funkce není riemannovsky integrovatelná.

Nyní se obrátíme k Lebesgueově integrálu od kovarianční funkce a zjistíme, jak se situace změní. Uvažujme náhodný proces $X = \{X_t,\, t \in \langle 0,1\rangle\}$, kde

$$X_t = 0 \qquad \text{pro iracionální } t$$
$$X_t = \eta \qquad \text{pro racionální } t,$$

přičemž η je náhodná veličina s rozdělením $N(0,1)$. Snadno lze zjistit, že

$$R(s,t) = 1 \quad \text{pro } s,\ t \text{ racionální}$$

a jinak, $R(s,t) = 0$. Rovněž je ihned vidět, že Lebesgueův integrál

$$\int_0^1 \int_0^1 R(s,t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t = 0,$$

ale funkce $R(s,t)$ nesplňuje podmínku konvergence pro integrální sumy typu (A), což je nutná a postačující podmínka pro existenci integrálu $\int_0^1 X_t\,\mathrm{d}t$ ve smyslu středně kvadratickém. Tedy $\int_0^1 X_t\,\mathrm{d}t$ v tomto smyslu neexistuje.

Příklad. Nechť $T = \langle 0,1\rangle$, τ náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na $\langle 0,1\rangle$. Definujme $\xi_t = 0$ pro $t \leq \tau(\omega)$, pro $t > \tau(\omega)$ položme

$$\xi_t(\omega) = \frac{1}{t-\tau(\omega)}.$$

Dokažme, že proces $\{\xi_t(\omega),\ t \in \langle 0,1\rangle\}$ je spojitý dle pravděpodobnosti, ale integrál $\int_0^1 \xi_t(\omega)\,\mathrm{d}t$ ve smyslu konvergence dle pravděpodobnosti neexistuje.

Protože $\tau(\cdot)$ je rovnoměrně rozdělena na $\langle 0,1\rangle$, pak

$$\begin{aligned} P\left\{\omega : \xi_t(\omega) = 0\right\} &= P\left\{t \leq \tau(\omega)\right\} = 1-t \\ P\left\{\omega : \xi_t(\omega) = \frac{1}{t-\tau(\omega)}\right\} &= P\left\{\tau(\omega) < t\right\} = t. \end{aligned}$$

Při studiu stochastické spojitosti procesu na $\langle 0,1\rangle$ je nutné studovat chování rozdílu

$$|\xi_{t_0}(\omega) - \xi_s(\omega)|$$

při $s \to t_0$. Pokud budeme uvažovat $s \nearrow t_0$, pak označme $A_s = \{\omega : s \leq \tau(\omega)\}$ a lze tedy psát pro libovolné $\eta > 0$

$$\begin{aligned} & P\left\{\omega : |\xi_s(\omega) - \xi_{t_0}(\omega)| > \eta\right\} = \\ = \; & P\left\{\omega : \{|\xi_s(\omega) - \xi_{t_0}(\omega)| > \eta\} \cap A_{t_0}\right\} + \\ & \quad + P\left\{\omega : \{|\xi_s(\omega) - \xi_{t_0}(\omega)| > \eta\} \cap A_{t_0}^c\right\} = \\ = \; & P\left\{\omega : \{|\xi_s(\omega) - \xi_{t_0}(\omega)| > \eta\} \cap A_{t_0}^c \cap A_s\right\} + \\ & \quad + P\left\{\omega : \{|\xi_s(\omega) - \xi_{t_0}(\omega)| > \eta\} \cap A_{t_0}^c \cap A_s^c\right\} \leq P\left\{\omega : s \leq \tau(\omega) < t\right\} + \\ & \quad + P\left\{\omega : \left\{\frac{t_0 - s}{(s-\tau(\omega))\,(t_0-\tau(\omega))} > \eta\right\} \cap A_{t_0}^c \cap A_s^c\right\} \underset{s\nearrow t_0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Obdobně pro $s \searrow t_0$.

Tím je dokázána stochastická spojitost procesu. Nyní k existenci integrálu vzhledem ke konvergenci dle pravděpodobnosti. Kdyby integrál ve smyslu konvergence dle pravděpodobnosti existoval, pak by pro každou posloupnost dělení $\{\Delta_n\}$ intervalu $\langle 0,1\rangle$ s $\|\Delta_n\| \searrow 0$ platilo, že

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum(\cdot) = \int_0^1 \xi_t\,\mathrm{d}t.$$

Nechť $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ je dělení intervalu $\langle 0,1\rangle$. Nechť $S(\omega,\xi)$ je odpovídající integrální suma, tj.

$$S(\omega,\xi) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_{z_i}(t_{i+1} - t_i), \quad z_i \in \langle t_i, t_{i+1}\rangle.$$

Zřejmě

$$S(\omega,\xi)=\sum_{i\geq j}^{n-1}\frac{1}{z_i-\tau(\omega)}(t_{i+1}-t_i),$$

když $\tau(\omega)\in\langle t_j,t_{j+1}\rangle$. Jestliže zvolíme z_j jednou větší nežli $\tau(\omega)$ a podruhé z'_j menší nežli $\tau(\omega)$, ale stále bude $z'_j\in\langle t_j,t_{j+1}\rangle$, pak rozdíl odpovídajících integrálních sum bude právě

$$\frac{1}{z_j-\tau(\omega)}\,(t_{j+1}-t_j),$$

což lze učinit libovolně velkým vhodnou volbou bodu z_j, i když $(t_{j+1}-t_j)\to 0$ pro $\|\Delta\|\searrow 0$. Pak tedy integrální sumy nemohou být cauchysovské podle pravděpodobnosti.

Z toho tedy vyplývá, že nemá příliš cenu se zabývat integrálem ve smyslu konvergence dle pravděpodobnosti, protože jsme ukázali, že náhodný proces spojitý dle pravděpodobnosti na kompaktním intervalu zde není integrovatelný ve smyslu konvergence dle pravděpodobnosti, což je nepříjemná skutečnost. Soustředíme se tedy na konvergenci dle kvadratického středu. Je ale důležité si uvědomit, že definice integrálu dle kvadratického středu je odvozena od chování kovarianční funkce procesu (tedy od jeho konečněrozměrných rozdělení) a nikoliv od vlastností jeho trajektorií, které de facto ani nemusí být integrovatelné. Přesto se lze ptát, jak souvisí integrál dle kvadratického středu s integrálem podél jednotlivých trajektorií, pokud tyto budou vhodně měřitelné funkce a lze tak uvažovat buď Riemannův či Lebesgueův integrál. Pokud lze integrovat trajektorie riemanovsky, pak oba integrály splývají s. j., tj. integrál dle kvadratického středu a Riemannův integrál podél jednotlivých trajektorií. Toto vyplývá z toho, že obě konvergence mají společnou konvergenci dle pravděpodobnosti a ta má limitu jednoznačně určenou ve smyslu s. j. Pokud chceme uvažovat integrovatelnost dle Lebesguea, pak je nutno zavést pojem měřitelného procesu, tj. náhodná funkce $\xi(t,\omega)$ je měřitelná vůči kartézské σ-algebře, generované σ-algebrou $\mathcal{A}$ náhodných jevů a σ-algebrou borelovských množin v T. Pak na základě Fubiniho věty platí za předpokladu existence integrálu

$$\int_a^b \mathsf{E}\{\xi_t^2(\omega)\}\,\mathrm{d}t<+\infty,$$

že

$$\text{existuje }\int_a^b|\xi_t(\omega)|^2\,\mathrm{d}t\text{ s. j., tedy i }\int_a^b|\xi_t(\omega)|\,\mathrm{d}t\text{ s. j.}$$

Věta 19. Nechť existuje pro centrovaný proces $\{\xi_t,\,t\in\langle a,b\rangle\}$ integrál ve smyslu Riemannově od jeho kovarianční funkce $R(\cdot,\cdot)$

$$\int_a^b\int_a^b R(s,t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Pak

$$\mathsf{E}\left\{\int_a^b\xi_t\,dt\right\}\ =\ \int_a^b\mathsf{E}\left\{\xi_t\,\mathrm{d}t\right\}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left\{\int_a^b \xi_t \,\mathrm{d}t \cdot \overline{\xi_s}\right\} &= \int_a^b R(t,s)\,\mathrm{d}t \\
\mathsf{E}\left\{\int_a^b \xi_t \,\mathrm{d}t \cdot \int_a^b \overline{\xi_s}\,\mathrm{d}s\right\} &= \int_a^b \int_a^b R(s,t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Důkaz. Plyne přímo z definice integrálu dle kvadratického středu. □

4.4 Stochastický integrál od nenáhodné funkce

Jedná se o konstrukci integrálu typu $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\xi_t$, kde $f(\cdot)$ je nenáhodná funkce patřící do nějaké třídy funkcí a $\{\xi_t\}$ je náhodný proces na $\langle a,b\rangle$. Pokud by trajektorie od procesu $\{\xi_t\}$ byly s. j. diferencovatelné dle kvadratického středu, pak by nemělo smysl uvažovat tyto integrály, protože v rozumné teorii stochastického integrálu by muselo být

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\xi_t = \int_a^b f(t)\,\xi_t'\,\mathrm{d}t \quad \text{s. j.}$$

Tudíž diferencovatelnost není nutným požadavkem, dokonce ani konečná totální variace ξ_t na $\langle a,b\rangle$ není žádána, protože by nebylo možné uvažovat stochastický integrál od wienerovského procesu, který na libovolném intervalu nemá konečnou variaci. Je tedy nutné zvolit jiný přístup k definování vhodného integrálu a ukáže se, že přístup založený na konvergenci dle kvadratického středu je opět schůdný.

Nechť tedy $\{\xi(t),\, t\in T\}$ je náhodný proces s ortogonálními přírůstky. Pak ke každému takovému procesu existuje neklesající funkce $F(\cdot)$ definovaná rovněž na T taková, že

$$\mathsf{E}\left\{|\xi(t)-\xi(s)|^2\right\} = F(t)-F(s)$$

pro každou dvojici $s\le t,\ s\in T,\ t\in T$. Tento vztah budeme též symbolicky zapisovat jako

$$\mathsf{E}\{|\mathrm{d}\xi(t)|^2\} = \mathrm{d}F(t).$$

Funkce $F(\cdot)$ je jednoznačně určena až na aditivní konstantu. Protože funkce $F(\cdot)$ je monotónní, může mít nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti, kde $F(s+0)-F(s-0)>0$. V ostatních bodech množiny T je funkce $F(\cdot)$ spojitá, a tudíž i proces $\{\xi(t),\, t\in T\}$ v těchto bodech musí být spojitý dle kvadratického středu. V bodech, kde funkce $F(\cdot)$ má skok, lze definovat limity zprava a zleva pro proces $\{\xi(t),\, t\in T\}$ dle kvadratického středu, jak plyne z vlastností monotonie funkce $F(\cdot)$. Pak platí

$$\begin{aligned}
F(t)-F(t-0) &= \mathsf{E}\left\{|\xi(t)-\xi(t-0)|^2\right\} \\
F(t+0)-F(t) &= \mathsf{E}\left\{|\xi(t+0)-\xi(t)|^2\right\} \\
F(t+0)-F(t-0) &= \mathsf{E}\left\{|\xi(t+0)-\xi(t-0)|^2\right\},
\end{aligned}$$

kde $\xi(t-0)$ značí limitu dle kvadratického středu zleva. Analogicky pro $\xi(t+0)$. Není žádnou ztrátou na obecnosti uvažovat množinu T za interval, buď otevřený či uzavřený. Tím ani nevylučujeme případ $T=\mathbb{R}$.

Nyní krátce nastíníme, jak vypadá konstrukce stochastického integrálu od nenáhodné funkce definované na T vzhledem k procesu s ortogonálními přírůstky.

Nejdříve zadefinujeme stochastický integrál pro jednoduchou funkci $f(\cdot)$, kde

$$
\begin{aligned}
& = 0 \quad \text{pro} \quad t < a_1 \\
f(t) & = c_j \quad \text{pro} \quad a_{j-1} \leq t < a_j, \ j = 2, 3, \ldots, n \\
& = 0 \quad \text{pro} \quad t > a_n,
\end{aligned}
$$

přičemž $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ jsou libovolná reálná čísla.

Pak položíme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\xi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left[\xi(a_j - 0) - \xi(a_{j-1} - 0)\right].$$

Aby se dal integrál definovat i pro složitější funkce, je vhodné funkci $F(\cdot)$ uvažovat jako zleva spojitou, aby generovala míru na borelovských podmnožinách v $\mathbb{R}$. Pak bude i proces $\xi(t)$ zleva spojitý dle kvadratického středu a stochastický integrál pak má jednodušší vyjádření

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\xi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left[\xi(a_j) - \xi(a_{j-1})\right].$$

Díky ortogonalitě přírůstků procesu $\{\xi(t),\ t \in (-\infty, +\infty)\}$ je ihned vidět, že jednak je integrál definován pro jednoduché funkce jednoznačně jako náhodná veličina, tj. ve smyslu skoro jistě a jednak platí pro dvojici jednoduchých funkcí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t) - f_2(t)|^2\,\mathrm{d}F(t) = \mathsf{E}\left\{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}\xi(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}\xi(t)\right|^2\right\}.$$

Tento důležitý vztah udává návod, jak rozšířit stochastický integrál pro každou funkci $f \in L_2(\mathbb{R}, F)$, kde funkce $F(\cdot)$ definuje jednoznačně míru na borelovských podmnožinách v $\mathbb{R}$.

Pojem ortogonálnosti přírůstků náhodného procesu na $\mathbb{R}$ lze zobecnit na pojem náhodné ortogonální míry, která může být definována v libovolném prostoru, a ne pouze v $\mathbb{R}$.

Pojem ortogonální náhodné míry

Nechť E je neprázdná množina, nechť $\mathcal{M}$ je systém podmnožin v E zatím blíže neurčený. Dále nechť každému $\Delta \in \mathcal{M}$ je přiřazena náhodná veličina $z(\Delta)$ (obecně s komplexními hodnotami) a $\mu(\Delta)$ takové, že

1. $\mathsf{E}\{z(\Delta)\} = 0,\ \mathsf{E}\{|z(\Delta)|^2\} < +\infty$
2. $z(\Delta_1 \cup \Delta_2) = z(\Delta_1) + z(\Delta_2)$ s.j. při $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset,\ \Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathcal{M}$

3. $\mathsf{E}\{z(\Delta_1)\,\overline{z(\Delta_2)}\} = \mu(\Delta_1 \cap \Delta_2)$, když $\Delta_1 \cap \Delta_2 \in \mathcal{M}$ spolu s $\Delta_1,\, \Delta_2 \in \mathcal{M}$,

kde μ je nějaká množinová funkce na $\mathcal{M}$ splňující $\mu(\emptyset) = 0$. Systém náhodných veličin $\{z(\Delta),\, \Delta \in \mathcal{M}\}$ se nazývá elementární náhodná ortogonální množinová funkce na $\mathcal{M}$. Ortogonální proto, že při $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ je $\mathsf{E}\{z(\Delta_1)\,\overline{z(\Delta_2)}\} = \mu(\emptyset) = 0$.

Vlastnosti:

1. $\mu(\Delta) = \mathsf{E}\{|z(\Delta)|^2\}, \quad \mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \mathsf{E}\{|z(\Delta_1 \cup \Delta_2)|^2\} = \mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2) + 2\mu(\Delta_1 \cap \Delta_2) = \mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2)$ při $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, μ je tedy konečně aditivní na $\mathcal{M}$.

Nejdůležitější případ bude, když $\mathcal{M}$ bude okruh či alespoň polookruh a $\mu(\cdot)$ definovaná na $\mathcal{M}$ takovým způsobem, aby se dala případně rozšířit na $\sigma(\mathcal{M})$ do míry.

Nechť $L(\mathcal{M})$ je třída všech jednoduchých $\mathcal{M}$-měřitelných funkcí definovaných na E, tj.

$$L(\mathcal{M}) = \left\{ f(\cdot) : f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \chi_{\Delta_k}(x) \right\}, \quad \Delta_k \in \mathcal{M}.$$

Definujme stochastický integrál pro $f \in L(\mathcal{M})$ následovně:

$$\int_E f(x)\ \mathrm{d}z(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, z(\Delta_k).$$

Je nutné dále předpokládat něco o systému $\mathcal{M}$, aby stochastický integrál jako náhodná veličina byl určen jednoznačně, např. stačí, aby $\mathcal{M}$ byl polookruh. Nechť $f,\, g \in L(\mathcal{M})$, pak $f(\cdot)\,\overline{g(\cdot)} \in L(\mathcal{M})$ opět a má smysl uvažovat

$$\int_E f(x)\,\overline{g(x)}\ \mathrm{d}z(x).$$

Platí

$$\mathsf{E}\left\{ \int_E f(x)\ \mathrm{d}z(x) \overline{\int_E g(x)\ \mathrm{d}z(x)} \right\} = \sum_{k=1}^{n} c_k\, d_k\, \mu(\Delta_k) \quad \left(= \int_E f(x)\,\overline{g(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \right),$$

což bychom chtěli, aby platilo i v případě, kdyby bylo možno množinovou funkci μ prodloužit do míry a uvažovat $L_2(E,\, \sigma(\mathcal{M}),\, \mu) = L_2(\mu)$ místo $L(\mathcal{M})$.

Předpokládejme tedy, že $\mathcal{M}$ je alespoň polookruh, což je systém uzavřený vůči průniku dvou prvků (podmnožin) takový, že rozdíl dvou prvků $\Delta_1,\, \Delta_2$, tedy $\Delta_1 - \Delta_2$, se dá vyjádřit jako konečné sjednocení disjunktních prvků z $\mathcal{M}$, čili

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \bigcup_{k=1}^{N} \Delta_k^*, \quad \Delta_k^* \in \mathcal{M},\ \Delta_k^* \cap \Delta_j^* = \emptyset \text{ pro } k \neq j.$$

Nejdůležitějším případem polookruhu jsou polootevřené intervaly typu $\langle a, b)$ na reálné přímce spolu s prázdnou množinou.

Nechť tedy $\mathcal{M}$ je polookruh a na něm μ množinová funkce generovaná elementární ortogonální náhodnou množinovou funkcí $z(\cdot)$. Budeme předpokládat, že μ je na $\mathcal{M}$ *polo-σ-aditivní*, neboli pro každé $\Delta \in \mathcal{M}$ takové, že když je Δ pokryto spočetně mnoha prvky z $\mathcal{M}$, tj.

$$\Delta \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \quad \Delta_k \in \mathcal{M},$$

pak

$$\mu(\Delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k).$$

Lze totiž dokázat, že tato polo-σ-aditivita je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby se aditivní nezáporná funkce μ na $\mathcal{M}$, která není identicky $+\infty$, dala rozšířit jakožto míra na nejmenší σ-algebru nad polookruhem $\mathcal{M}$.

Pro další budeme definovat isometrické zobrazení

$$I : L(\mathcal{M}) \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

a to pomocí $I(f) = \int_E f(x)\ \mathrm{d}z(x)$, přičemž platí

$$\mathsf{E}\left\{\left|\int_E f\ \mathrm{d}z\right|^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2\, \mu(\Delta_i) = \int_E |f(x)|^2\ \mathrm{d}\mu(x),$$

jak plyne z výše uvedené vlastnosti. Protože $L(\mathcal{M})$ je všude hustá podmnožina v $L_2(\mu)$, lze toto isometrické zobrazení rozšířit z $L(\mathcal{M})$ na celý prostor $L_2(\mu)$ a pomocí něj definovat stochastický integrál pro každou funkci $f \in L_2(\mu)$

$$I(f) = \int_E f(x)\ \mathrm{d}z(x)$$

jakožto náhodnou veličinu patřící do $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, přesněji do uzávěru nad náhodnými veličinami tvaru $I(f)$ pro $f(\cdot)$ jednoduchou funkci z $L(\mathcal{M})$.

Tato konstrukce bude fungovat, když bude možno rozšířit μ ze systému $\mathcal{M}$ na $\sigma(\mathcal{M})$, aby zde byla mírou, tzn. nezápornou σ-aditivní množinovou funkci. Pak lze též i elementární ortogonální množinovou funkci $z(\cdot)$ rozšířit na ty podmnožiny $\Delta \in \sigma(\mathcal{M})$, pro něž je $\mu(\Delta) < \infty$, a to vztahem

$$z(\Delta) = \int_E \psi_\Delta(x)\, \mathrm{d}z(x).$$

Hovoříme pak o ortogonální náhodné míře.

Věta 20. Pro $f, g \in L_2(\mu)$ je

1. $\int_E (\alpha f + \beta g)(x)\ \mathrm{d}z(x) = \alpha \int_E f(x)\ \mathrm{d}z(x) + \beta \int_E g(x)\ \mathrm{d}z(x)$ s.j.

2. Když $f_n \to f$ v $L_2(\mu)$ (dle kvadratického středu), pak $\int_E f_n\, \mathrm{d}z \longrightarrow \int_E f\, \mathrm{d}z$ dle kvadratického středu v $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Důkaz. Uvedené vlastnosti přímo plynou z konstrukce stochastického integrálu a z vlastností Hilbertových L_2-prostorů. $\square$

Nejdůležitější případ: $T = \langle a, b\rangle$

Proces $\{\xi_t\}$ je definován na $\langle a, b\rangle$ s ortogonálními přírůstky, $\mathsf{E}\{\xi_t\} = 0$ pro jednoduchost, definujme $F(t) = \mathsf{E}\{|\xi_t - \xi_a|^2\}$. Ihned vidět, že $F(t)$ je neklesající, $F(t) \geq 0$, $F(a) = 0$. Když $\{\xi_t\}$ bude spojitý zleva dle kvadratického středu, pak i $F(\cdot)$ je spojitá zleva a definuje míru na borelovských podmnožinách v $\langle a, b\rangle$. Díky ortogonalitě je

$$z(\langle c, d)) = \xi_d - \xi_c$$

elementární ortogonální náhodná množinová funkce, která se dá rozšířit na ortogonální náhodnou míru na všechny borelovské podmnožiny a lze definovat $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\xi_t$ s tím, že

$$\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}F(t) = \mathsf{E}\left\{\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\xi_t\right|^2\right\}.$$

Když budeme uvažovat Wienerův proces $\{w(t),\ t \in \langle 0, T\rangle\}$, jde o proces s nezávislými přírůstky, a lze tedy definovat stochastický integrál typu

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}w(t)$$

pro každou funkci $f \in L_2\langle 0, T\rangle$, neboť zde $F(t) = \sigma^2 t$.

Poznámka. Wiener původně uvažoval stochatický integrál pro funkce mající derivace integrovatelné s kvadrátem, tj. $f'(\cdot) \in L_2(\langle a, b\rangle)$, a pro takové funkce definoval integrál vůči $\mathrm{d}w(t)$ následovně pomocí vztahu per partes

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}w(t) = f(b)\,w(b) - f(a)\,w(a) - \int_a^b f'(t)\,w(t)\ dt$$

a užil opět izometrii a vložení do $L_2(\langle a, b\rangle)$, protože funkce s kvadraticky integrovatelnou derivací tvoří všude hustou podmnožinu v $L_2(\langle a, b\rangle)$.

Nechť funkce $g(t, \cdot)$ patří pro každé $t \in T$ do $L_2(\mu)$, pak má smysl stochastický integrál

$$\int_E g(t, x)\ \mathrm{d}z(x) = \eta_t.$$

$\{\eta_t\}$ je tedy nový proces na T, přičemž $\mathsf{E}\{\eta_t\} = 0$

$$\mathsf{E}\{\eta_t \overline{\eta}_s\} = \int_E g(t, x)\,\overline{g(s, x)}\ \mathrm{d}\mu(x),$$

kde μ je míra odvozená od ortogonální náhodné míry $\mathrm{d}z(\cdot)$.

5 Korelační teorie náhodných procesů

Nechť na množině T je dán stochastický proces $\{\xi_t(\cdot)\}$ s konečnými druhými momenty a nechť pro jednoduchost je centrovaný, tj.

$$\mathsf{E}\{\xi_t\} = 0, \quad \text{pro každé } t \in T.$$

Když lze proces $\{\xi_t,\ t \in T\}$ vyjádřit ve tvaru stochastického integrálu

$$\xi_t = \int_\Lambda f(t,\lambda)\,\mathrm{d}z(\lambda),$$

kde $(\Lambda, \mathcal{O}, \mu)$ je nějaký měřitelný prostor s mírou μ takový, že

$$\mathsf{E}\{|\mathrm{d}z(\lambda)|^2\} = \mathrm{d}\mu(\lambda), \quad f(s,\cdot) \in L_2(\mu) \quad \text{pro každé } s \in T,$$

pak kovarianční funkce má tvar

$$R(s,t) = \mathsf{E}\{\xi_s\,\overline{\xi}_t\} = \int_\Lambda f(s,\lambda)\,\overline{f(t,\lambda)}\,\mathrm{d}\mu(\lambda)$$

Co lze říci v opačném směru?

Věta 21 (Karhunen). Kovarianční funkce centrovaného stochastického procesu $\{\xi_t,\ t \in T\}$ je vyjádřitelná ve tvaru

$$R(s,t) = \int f(s,\lambda)\,\overline{f(t,\lambda)}\,\mathrm{d}\mu(\lambda)$$

kde $f(s,\cdot) \in L_2(\Lambda, \mathcal{O}, \mu)$ pro každé $s \in T$ právě tehdy, když existuje ortogonální náhodná míra $z(\cdot)$ na $(\Lambda, \mathcal{O})$ taková, že

$$\xi_t = \int_\Lambda f(t,\lambda)\,\mathrm{d}z(\lambda) \quad \text{s. j.}$$

Důkaz. Když $\{\xi_t,\ t \in T\}$ je vyjádřitelný jako stochastický integrál vůči $z(\cdot)$, pak z vlastností stochastického integrálu plyne rozklad kovarianční funkce.

Naopak, nejdříve předpokládejme, že funkce $\{f(s,\cdot)\}$ tvoří bázi v prostoru $L_2(\Lambda, \mathcal{O}, \mu) = L_2(\mu)$, tj., když $\varphi(\cdot) \in L_2(\mu)$, pak existuje posloupnost funkcí tvaru

$$\varphi_n(\cdot) = \sum_{j=1}^{k_n} a_j^{(n)}\, f(t_j^n, \lambda),$$

kde $\varphi_n \to \varphi$ dle kvadratického středu vůči μ.

Nechť $S \in \sigma$, $\mu(S) < +\infty$, pak indikátor množiny S $\psi_S(\cdot) \in L_2(\mu)$, a tudíž existuje $\psi_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{k_n} a_j^n\, f(t_j^n, \lambda) \longrightarrow \psi_S(\lambda)$ při $n \to \infty$; položme

$$z_n(S, \omega) = \sum_{j=1}^{k_n} a_j^n\, \xi_{t_j^n}(\omega).$$

Dokažme, že $\{z_n(S, \cdot)\}$ je cauchyovská dle kvadratického středu. Snadno je vidět, že

$$\mathsf{E}\left\{|z_n(S,\omega) - z_m(S,\omega)|^2\right\} = \int_\Lambda |\psi_n(\lambda) - \psi_m(\lambda)|^2\, \mathrm{d}\mu(\lambda) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a dle úplnosti L_2-prostorů musí existovat limita, označme ji $z(S)$. Vlastnosti $z(S)$ jsou následující:

a) $\mathsf{E}\{z(S)\} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\{z_n(S)\} = 0$ díky centrovanosti $\{\xi_t\}$.

b) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1, S_2 \in \sigma$, pro každé S_i, $i = 1, 2$ existuje posloupnost $\psi_{S_1}^{(n)}(\lambda) = \sum_{j=1}^{k_n} a_j^{(n)}\, f(t_j^{(n)}, \lambda)$, $\psi_{S_2}^{(n)}(\lambda) = \sum_{m=1}^{q_n} b_m^{(n)}\, f(t_n^{(n)}, \lambda)$, utvoříme $\{z_n(S_i)\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left\{z(S_1)\,\overline{z(S_2)}\right\} &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left\{z_n(S_1)\,\overline{z_n(S_2)}\right\} = \\ = \lim_{n\to\infty} \int_\Lambda \psi_{S_1}^{(n)}(\lambda)\overline{\psi_{S_2}(\lambda)}\,\mathrm{d}\mu(\lambda) &= \int_\Lambda \psi_{S_1}(\lambda)\,\psi_{S_2}(\lambda)\,\mathrm{d}\mu(\lambda) = \\ &\text{dle Lebesgueovy věty o dominantní konverenci} \\ = \mathsf{E}\left\{z(S_1)\,\overline{z(S_2)}\right\} &= \mu(S_1 \cap S_2) \end{aligned}$$

c) $z(S_1 \cup S_2) = z(S_1) + z(S_2)$ s.j. při $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

$$\mathsf{E}\left\{|z(S_1 \cup S_2) - z(S_1) - z(S_2)|^2\right\} = \int (\psi_{S_1\cup S_2}(\lambda) - \psi_{S_1}(\lambda) - \psi_{S_2}(\lambda))\,\mathrm{d}\mu(\cdot),$$

z čehož plyne, když při $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ je pravá strana rovna nule, pak i levá strana je nulová a z nezápornosti integrálu plyne, že musí být

$$z(S_1 \cup S_2) = z(S_1) + z(S_2) \quad \text{s. j.}$$

Nyní položme $\eta_t = \int_\Lambda f(t,\lambda)\,\mathrm{d}z(\lambda)$ a chceme dokázat, že $\xi_t = \eta_t$ s. j.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\{|\xi_t - \eta_t|^2\} &= R(t,t) - \mathsf{E}\{\xi_t\overline{\eta_t}\} - \mathsf{E}\{\overline{\xi_t}\,\eta_t\} + \\ &+\mathsf{E}\{|\eta_t|^2\} = R(t,t) - \mathsf{E}\{\xi_t\overline{\eta_t}\} - \mathsf{E}\{\overline{\xi_t}\eta_t\} + \int_\Lambda |f(t,\lambda)|^2\mathrm{d}\mu(\lambda) \end{aligned}$$

Nyní stačí dokázat, že $\mathsf{E}\{\xi_t\overline{\eta_t}\} = \mathsf{E}\{\overline{\xi_t}\eta_t\} = \int_\Lambda |f(t,\lambda)|^2\,\mathrm{d}\mu(\lambda)$, což plyne ze spojitosti skalárního součinu a z faktu, že

$$\mathsf{E}\left\{\xi_t\,\overline{\mathrm{d}z(t)}\right\} = f(t,\lambda)\,\mathrm{d}\mu(\lambda).$$

Důkaz byl proveden za předpokladu, že $\{f(t,\cdot)\}$ tvoří bázi v $L_2(\Lambda,\mathcal{O},\mu)$. Když netvoří, doplní se o takové funkce $g(t,\cdot)$, $t\in T'$ patřící do $L_2(\Lambda,\mathcal{O},\mu)$, že platí

$$\int_\Lambda f(s,\lambda)\,\overline{g(t,\lambda)}\,\mathrm{d}\mu(\lambda)=0$$

pro každé $s\in T,\ t\in T', T\cap T'=\emptyset$; položme

$$\begin{aligned} k(t,\lambda) &= f(t,\lambda) \quad \text{pro } t\in T \\ &= g(t,\lambda) \quad \text{pro } t\in T'. \end{aligned}$$

Systém $\{k(t,\cdot)\}$, $t\in T\cup T'$ tvoří již bázi v $L_2(\Lambda,\mathcal{O},\mu)$. Nechť nyní $\{y_t,\ t\in T\cup T'\}$ je takový proces, že $y_t=\eta_t$ pro $t\in T$ a $\{y_t,\ t\in T'\}$ je gaussovský centrovaný s kovarianční funkcí tvaru

$$R(s,t)=\int_\Lambda g(s,\lambda)\,\overline{g(t,\lambda)}\,\mathrm{d}\mu(\lambda)$$

a nezávislý na $\{\eta_t,\ t\in T\}$. Takový proces lze vždy zkonstruovat. Tím je zkonstruována báze z funkcí $\{k(t,\cdot)\}$ v $L_2(\mu)$ a lze postupovat, jak již bylo provedeno dříve za předpokladu, že systém funkcí $\{f(s,\cdot)\}$ tvoří bázi v $L_2(\Lambda,\mathcal{O},\mu)$. □

5.1 Spektrální reprezentace slabě stacionárních náhodných posloupností a procesů

Budeme předpokládat, že $\{\xi_t,\ t\in T\}$ je slabě stacionární centrovaný náhodný proces s kovarianční funkcí $R(t)$. Budeme se zabývat dvěma případy, a to $T=\mathbb{Z}$ a $T=\mathbb{R}$. V případě $T=\mathbb{Z}$ hovoříme o slabě stacionárních posloupnostech, v případě $T=\mathbb{R}$ o procesech.

Věta 22 (Herglotz). Nechť $\{\xi_n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární centrovaná náhodná posloupnost. Pak hodnoty její kovarianční funkce $R(\cdot)$ se dají vyjádřit ve tvaru

$$R(n)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\,\mathrm{d}F(\lambda),\quad n\in\mathbb{Z},$$

kde $F(\cdot)$ je neklesající, zleva spojitá funkce na $\langle-\pi,\pi\rangle$ taková, že $F(-\pi)=0$. $F(\cdot)$ je v tomto smyslu jediná.

Důkaz. $R(\cdot)$ je jakožto kovarianční funkce pozitivně semidefinitní, tudíž

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_j\,\overline{c}_k\,R(t_j-t_k)\geq 0.$$

Položme $t_j=j,\ t_k=k,\ c_j=e^{-i\lambda j}$ pro $-\pi\leq\lambda\leq\pi$ a označme

$$\varphi_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} R(j-k)\,e^{-i\lambda(j-k)}.$$

Jistě $\varphi_N(\lambda) \geq 0$ pro každé $\lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$ a substitutce $\kappa = j - k$ dává vyjádření

$$\varphi_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{\kappa=-N+1}^{N-1} (N - |\kappa|)\, R(\kappa)\, e^{-i\kappa\lambda}.$$

Dále označme

$$F_N(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi_N(u)\,\mathrm{d}u.$$

Protože $\varphi_N(\cdot) \geq 0$, pak $F_N(\lambda)$ je neklesající na $\langle -\pi, \pi \rangle$, $F_N(-\pi) = 0$. Jelikož platí

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\mathrm{d}x &= 2\pi \quad \text{pro } k = 0 \\ &= 0 \quad\ \ \text{pro } k \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

položme $F_n(\lambda) = 0$ pro $\lambda < -\pi$, $F_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = R(0)$ pro $\lambda > \pi$. Tím je $F_n(\cdot)$ definována jako neklesající funkce na celém $\mathbb{R}$ a dle první Hellyovy věty (viz například [6]) lze vybrat z posloupnosti $\{F_n\}$ podposloupnost, která konverguje k neklesající funkci (jedná se o konvergenci v podstatě, tedy v bodech spojitosti limitní funkce, kterou lze dodefinovat na zleva spojitou v každém bodě). Dle 2. Hellyovy věty platí o konvergenci integrálů, že

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\mathrm{d}F_{N_k}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\mathrm{d}F(\lambda),$$

ale

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\mathrm{d}F_{N_k}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\varphi_{N_k}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = R(t)\left[1 - \frac{|t|}{N_k}\right] \quad \text{pro } |t| < N_k,$$

pro $|t| \geq N_k$ je integrál roven 0.

Zřejmě $\lim_{k\to 0} R(t)\left(1 - \frac{|t|}{N_k}\right) = R(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Protože $R(0) = F(\pi + 0)$, tedy limita zprava, lze beze změny integrálu tento případný skok umístit do začátku do bodu $-\pi$, tím se dosáhne toho, že

$$R(0) = F(\pi).$$

□

Věta 23. Každá slabě stacionární centrovaná náhodná posloupnost se dá vyjádřit ve spektrálním rozkladu

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\mathrm{d}z(\lambda), \text{ s.j.}$$

kde $z(\cdot)$ je ortogonální náhodná míra definovaná na intervalech v $\langle -\pi, \pi \rangle$ a splňující vztah

$$\mathsf{E}\left\{|\mathrm{d}z(\lambda)|^2\right\} = \mathrm{d}F(\lambda),$$

kde $F(\cdot)$ definuje spektrální míru příslušnou kovarianční funkci posloupnosti $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$.

Důkaz. Znění věty ihned plyne z Karhunenovy věty, neboť díky předchozí větě platí, že

$$\mathsf{E}\{\xi_n\,\overline{\xi}_m\} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\lambda}\mathrm{d}F(\lambda).$$

□

Poznámka. Náhodná míra $z(\cdot)$, $z(A) = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_A(\lambda)\,\mathrm{d}z(\lambda)$ se dá rozšířit z intervalů na libovolnou borelovskou podmnožinu v $\langle -\pi, \pi)$ a ortogonalita znamená, že

$$\int_{B_1 \cap B_2} \mathrm{d}F(\lambda) = \mathsf{E}\{z(B_1)\,\overline{z(B_2)}\}.$$

Každá neklesající zleva spojitá funkce definovaná na $\langle -\pi, \pi)$ představuje spektrální funkci nějaké slabě stacionární centrované náhodné posloupnosti. Použitím Lebesgueova rozkladu (viz Dodatek 1) lze psát

$$F(\lambda) = F_a(\lambda) + F_d(\lambda) + F_s(\lambda),$$

kde $F_a(\cdot)$ je absolutně spojitá složka, $F_d(\cdot)$ je čistě skokovitá složka a $F_s(\cdot)$ je spojitá singulární složka, která roste pouze na podmnožinách Lebesgueovy míry nula. Pokud $F_d = F_s = 0$, pak hovoříme o tom, že existuje spektrální hustota a je možno vyjádřit rozklad příslušné kovarianční funkce ve tvaru

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,$$

kde $F_a(\lambda) = f(\lambda)$. V tomto případě hodnoty kovarianční funkce jsou vlastně fourierovskými koeficienty od hustoty $f(\cdot)$.

Následující věty uvedeme bez důkazů, jelikož se jedná o známé výsledky z Fourierovy analýzy.

Věta 24. Když kovarianční funkce $\{R(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ je absolutně sumabilní, tj. když

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |R(n)| < +\infty,$$

pak existuje spektrální hustota.

Věta 25 (Inverzní vzorec). Existuje-li spektrální hustota $f(\cdot)$ kovarianční funkce $\{R(n),\, n \in \mathbb{Z}\}$ a má-li konečnou variaci na $\langle -\pi, \pi\rangle$, pak

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda} R(n)$$

ve všech bodech spojitosti funkce $f(\cdot)$, což je skoro všude vůči Lebesgueově míře na $\langle -\pi, \pi\rangle$.

Důkaz Věty 24 lze najít ve [4], důkaz Věty 24 v [1].

Nyní se budeme věnovat spektrálnímu rozkladu náhodných procesů.

Věta 26 (Bochner). Každá spojitá kovarianční funkce slabě stacionárního náhodného procesu se dá vyjádřit ve tvaru

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \mathrm{d}F(\lambda),$$

kde $F(\cdot)$ je neklesající zleva spojitá funkce, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = R(0)$. Funkce $F(\cdot)$ je v tomto smyslu určena jednoznačně.

Důkaz. Kovarianční funkce $R(t)$ je pozitivně semidefinitní a tudíž pro každé $T > 0$ a $x \in I\!R$ je funkce

$$f_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T R(u-v)\, e^{-i(u-v)\,x} \mathrm{d}u \mathrm{d}v \geq 0,$$

neboť tento Riemanův integrál se dá aproximovat integrálními součty tvaru

$$\sum_{j,k} R(u_j - u_k)\, e^{-i(u_j-u_k)\,x} (u_{j+1} - u_j)\,(u_{k+1} - u_k).$$

Zaveďme substituci $u = v + t,\ v = w$ s jakobiánem transformace

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Pak při substituci

$$(u,v) \to (t,w) \qquad f_T(x) = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} \int_{-t}^{T-t} R(t)\, e^{-itx} \mathrm{d}w \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-T}^{T} R(t)\, e^{-itx} \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} R_T(x)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t,$$

kde

$$R_T(t) = R(t)\, \left(1 - \tfrac{|t|}{T}\right) \quad \text{pro } \ -T \leq t \leq T$$

$$R_T(t) = 0 \qquad\qquad \text{jinde.}$$

Máme tedy

$$f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} R_T(t)\, \mathrm{d}t \geq 0.$$

Obě strany vynásobíme současně faktorem $\frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{|x|}{X}\right)\, e^{iux}$ a integrujeme podle x v $\langle -X, X\rangle$. Levá strana je pak rovna

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-X}^{X} \left(1 - \frac{|x|}{X}\right)\, f_T(x)\, e^{iux}\, \mathrm{d}x,$$

pravá strana je rovna

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 1/2\, X(t-u)}{1/4\, X^2 (t-u)^2}\, R_T(t)\, \mathrm{d}t,$$

protože
$$\int_{-X}^{+X} e^{-i(t-u)x} \left(1 - \frac{|x|}{X}\right) \mathrm{d}x = \frac{\sin^2 1/2\, X(t-u)}{1/4\, X^2(t-u)^2}.$$
Levá strana je charakteristickou funkcí, protože v integrandu je součin nezáporné funkce s e^{iux}, pravá strana při $X \to \infty$ konverguje k $R_T(u)$. Nyní využijeme vlastností charakteristických funkcí: pokud posloupnost charakteristických funkcí konverguje bodově k funkci, která je spojitá v nule, pak je sama již tato limita charakteristickou funkcí. V dalším kroku využijeme téže vlastnosti při $T \to \infty$, kdy $R_T(u) \to R(u)$. □

Poznámka. Do jaké míry je nutná spojitost kovarianční funkce? Lze dokázat, že každá lebesgueovsky měřitelná kovarianční funkce splývá až na množinu Lebesgueovy míry nula s nějakou charakteristickou funkcí a je tudíž spojitá skoro všude, blíže viz [6].

Věta 27. Nechť $\{\xi_t,\, t \in (-\infty, +\infty)\}$ je slabě stacionární centrovaný náhodný proces spojitý dle kvadratického středu. Pak platí
$$\xi_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \mathrm{d}z(\lambda), \quad \text{s.j.}$$
kde $z(\cdot)$ je ortogonální náhodná míra splňující pro každou dvojici borelovských podmnožin v $I\!R$ vztah
$$\mathsf{E}\{z(B_1)\,\overline{z(B_2)}\} = \int_{B_1 \cap B_2} \mathrm{d}F(\lambda),$$
kde $F(\cdot)$ je příslušná spektrální míra tohoto náhodného procesu, tj.
$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \mathrm{d}F(\lambda).$$

Důkaz. Plyne přímo z Bochnerovy a Karhunenovy věty, protože proces spojitý dle kvadratického středu má spojitou kovarianční funkci a naopak. □

Poznámka. Jestliže spojitá kovarianční funkce $R(\cdot)$ slabě stacionárního procesu je absolutně integrovatelná na $I\!R$, tedy existuje
$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(t)|\, \mathrm{d}t,$$
pak existuje spektrální hustota $f(\cdot)$, která je spojitá a ohraničená na $I\!R$, přičemž
$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} R(t)\, \mathrm{d}t.$$

5.2 Reálné stacionární procesy a posloupnosti

Reálné slabě stacionární posloupnosti či procesy mají některé další zajímavé vlastnosti. Lze dokázat, že v případě reálné posloupnosti či procesu jsou samozřejmě hodnoty příslušné kovarianční funkce reálné a lze je vyjádřit ve tvaru

$$R(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos n\lambda \, \mathrm{d}W(\lambda), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

v případě náhodné posloupnosti, kde $W(\cdot)$ je neklesající funkce na $\langle -\pi, \pi\rangle$, která je vyjádřitelná pomocí hodnot kovarianční funkce $R(\cdot)$ jako suma

$$W(\lambda) = R(0)\,\lambda + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R(k)}{k} \sin k\,\lambda$$

ve svých bodech spojitosti. Zcela analogická situace je i v případě spojitého času. Zde kovarianční funkce je vyjádřitelná jako

$$R(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos t\,\lambda \, \mathrm{d}W(\lambda),$$

přičemž v bodech spojitosti funkce $W(\cdot)$ lze psát

$$W(\lambda) = R(0) + 2\int_0^{\infty} \frac{R(u)}{u} \sin\, u\,\lambda \, \mathrm{d}u,$$

a $W(\cdot)$ je neklesající funkce definovaná na $\langle 0, +\infty)$. Blíže viz např. [2]. □

Věta 28. Spektrální hustota náhodného slabě stacionárního reálného procesu je sudá funkce, neboli

$$f(\lambda) = f(-\lambda)$$

pro skoro každé reálné λ ve smyslu Lebesgueovy míry na reálné přímce.

Důkaz. Nechť $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ je reálný slabě stacionární proces mající spektrální hustotu. Pak platí, že $R(t) = R(-t)$ pro každé t pro jeho kovarianční funkci, tedy díky spektrálnímu rozkladu platí i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \mathrm{d}F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} \mathrm{d}F(\lambda).$$

Díky existenci derivace $F'(\lambda) = f(\lambda)$ a použitím substituce máme, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} f(\lambda) \mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} f(-\lambda) \mathrm{d}\lambda$$

neboli funkce $f(\lambda) - f(-\lambda)$ je ortogonální k úplnému systému funkcí $\{e^{it\lambda}\}$, a pomocí jednoznačnosti charakteristické funkce musí být $f(\lambda) = f(-\lambda)$ skoro všude vůči Lebesgueově míře v $\mathbb{R}$. □

Poznámka. Zcela analogické tvrzení platí i pro reálné slabě stacionární posloupnosti mající spektrální hustotu.

5.3 Derivace slabě stacionárního procesu

Nechť $\{\xi_t,\, t \in I\!\!R\}$ je slabě stacionární náhodný proces spojitý dle kvadratického středu a mající rovněž derivaci v každém bodě dle kvadratického středu. Chceme vědět, zdali i tato derivace je slabě stacionární proces a jak vypadá jeho spektrální míra.

Věta 29. Nechť slabě stacionární náhodný proces má střední hodnotu nula a nechť je spojitý dle kvadratického středu a jeho spektrální míra splňuje požadavek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \mathrm{d}F(\lambda) < \infty.$$

Když

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \mathrm{d}z(\lambda),$$

pak existuje derivace dle kvadratického středu mající spektrální rozklad

$$\xi_t' = \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda e^{it\lambda} \mathrm{d}z(\lambda).$$

Existuje-li navíc hustota $f(\lambda)$, pak derivace $\{\xi_t',\, t \in I\!\!R\}$ má rovněž spektrální hustotu $f_1(\lambda)$ vyjádřitelnou ve tvaru

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 f(\lambda).$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že ve smyslu konvergence dle kvadratického středu

$$\lim_{k\to 0} \frac{\xi_{t+k} - \xi_t}{k} = \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda\, e^{it\lambda} \mathrm{d}z(\lambda),$$

čili jde o to dokázat, že

$$\lim_{k\to 0} \mathsf{E} \left\{ \left| \frac{\xi_{t+k} - \xi_t}{k} - \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda\, e^{it\lambda} \mathrm{d}z\ (\lambda) \right|^2 \right\} = 0.$$

$$\mathsf{E} \left\{ \left| \frac{\xi_{t+k} - \xi_t}{k} - \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda\, e^{it\lambda} \mathrm{d}z(\lambda) \right|^2 \right\} = \mathsf{E} \left\{ \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{i(t+k)\lambda} - e^{it\lambda}}{k} - i\lambda e^{it\lambda} \right) \mathrm{d}z(\lambda) \right|^2 \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{ik\lambda} - 1}{k} - i\lambda \right|^2 \mathrm{d}F(\lambda).$$

Nyní najdeme integrabilní majorantu. Pro každé reálné $a > 0$ platí

$$|e^{ia} - 1| = \left| \int_0^a e^{iu}\, \mathrm{d}u \right| \le \int_0^a 1\, \mathrm{d}u \ = a,$$

pak

$$\left| \frac{e^{ik\lambda} - 1}{k} - i\lambda \right| \le \left| \frac{e^{ik\lambda} - 1}{k} \right| + |\lambda| \le \frac{|k\lambda|}{|k|} + |\lambda| \le 2|\lambda|.$$

Tedy $4\lambda^2$ je ona integrabilní majoranta, když tedy předpokládáme existenci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \mathrm{d}F(\lambda).$$

Kovarianční funkce derivace $\{\xi'_t,\, t \in I\!R\}$ se vypočte následovně:

$$R(t) = \mathsf{E}\{\xi'_{s+t}\,\overline{\xi}'_s\} = \mathsf{E}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda\, e^{i(t+s)\,\lambda}\mathrm{d}z(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} -i\lambda\, e^{-is\lambda}\,\mathrm{d}\overline{z(\lambda)}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2\, e^{it\lambda}\,\mathrm{d}F(\lambda)$$

tedy $R(t)$ skutečně nezávisí na posunutí s, ξ'_t musí být centrovaná jako původní proces $\{\xi_t,\, t \in I\!R\}$, a tedy $\{\xi'_t,\, t \in I\!R\}$ je opět slabě stacionární. Pokud existuje spektrální hustota $F'(\lambda) = f(\lambda)$, pak vztah

$$f_1(\lambda) = \lambda^2\, f(\lambda)$$

vyplývá z jednoznačnosti Fourierovy transformace. $\square$

Poznámka. Lze ukázat, že podmínka existence $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2\,\mathrm{d}F(\lambda)$ je též nutnou podmínkou pro existenci derivace dle kvadratického středu (blíže viz [2]).

Poznámka. Obdobně jako v případě integrálu od náhodného procesu se lze ptát, jak souvisí derivace dle kvadratického středu s derivací podle trajektorie, tj. ve smyslu obyčejné derivace jakožto limity uvažované pro každé $\omega \in \Omega$ zvlášť

$$\lim_{h \to 0} \frac{\xi(t+h,\omega) - \xi(t,\omega)}{h} = \xi'_t(\omega).$$

Snadno se lze přesvědčit, že pokud existuje derivace dle kvadratického středu v bodě t_0 a pokud též existuje derivace $\xi'_{t_0}(\omega)$ podél trajektorie ve smyslu konvergence skoro všude, pak obě derivace ve smyslu skoro všude splývají, protože konvergence dle pravděpodobnosti je implikována jak konvergencí dle kvadratického středu, tak i konvergencí ve smyslu skoro všude a limita konvergence dle pravděpodobnosti je jednoznačně určena ve smyslu skoro všude.

5.4 Příklady slabě stacionárních posloupností

a) Diskrétní bílý šum

Uvažujme posloupnost vzájemně nekorelovaných náhodných veličin $\{Y_n,\, n \in Z\!\!\!Z\}$, $\mathsf{E}\{Y_n\} = 0$,

$$\mathsf{E}\{Y_n\,\overline{Y_m}\} = 0 \quad \text{pro } n \neq m, \quad \mathsf{E}\{|Y_n|^2\} = \sigma^2.$$

Tedy $R(n) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\lambda}\mathrm{d}\lambda$, neboli $R(0) = \sigma^2$, jinak $R(n) = 0$. Z toho plyne, že posloupnost má hustotu

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad \text{na } \langle -\pi, +\pi \rangle.$$

Tomuto typu náhodné posloupnosti se říká diskrétní bílý šum.

b) Klouzavé součty MA(q) Nechť $\{Y_n\}$ je posloupnost nekorelovaných náhodných veličin, $\mathsf{E}\{Y_n\} = 0$, $\mathsf{E}\{|Y_n|^2\} = \sigma^2$, nechť $a_0, a_1, \ldots, a_q$ jsou reálná či komplexní čísla a uvažujme

$$X_n = \sum_{j=0}^{q} a_j\, Y_{n-j}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Zřejmě $\mathsf{E}\{X_n\} = 0$ a

$$R(n) = \mathsf{E}\{X_n\, \overline{X}_0\} = \sigma^2 \sum_{k=0}^{q} \sum_{j=0}^{q} a_k\, \overline{a}_j\, \delta_{n-k+j},$$

kde $\delta_p = 1$ pro $p = 0$, $\delta_p = 0$ jinak. Z toho plyne, že $R(n) = 0$ pro $|n| > q$, a tedy pro $0 \le n \le q$ je $R(n) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-n} a_{n+j} \overline{a}_j$.

Volba $a_k = \frac{1}{q+1}$, $k = 0, 1, \ldots, q$ vede k posloupnosti tzv. klouzavých průměrů, od nichž se odvozuje i označení MA (moving averages). Nyní odvodíme hustotu této již na první pohled slabě stacionární posloupnosti. Hledáme vyjádření pro $\{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ ve tvaru

$$X_n = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\lambda} g(\lambda)\, \mathrm{d}Z_Y(\lambda),$$

spektrální hustota existuje, neboť $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |R(n)| < +\infty$. Protože $Y_t = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it\lambda} \mathrm{d}Z_Y(\lambda)$, kde $\mathsf{E}\{|\mathrm{d}Z_Y(\lambda)|^2\} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \mathrm{d}\lambda$, pak díky vyjádření $X_n = \sum_{j=0}^{q} a_j\, Y_{n-j}$,

$$\begin{aligned} X_n &= \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{j=0}^{q} a_j\, e^{i(n-j)\lambda} \mathrm{d}Z_Y(\lambda) = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\lambda} \sum_{j=0}^{q} a_j\, e^{-ij\lambda} \mathrm{d}Z_Y(\lambda) \\ &\Rightarrow\ g(\lambda) = \sum_{j=0}^{q} a_j\, e^{-ij\lambda}, \end{aligned}$$

a tedy

$$R(n) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\lambda} |g(\lambda)|^2\, \frac{\sigma^2}{2\pi}\, \mathrm{d}\lambda \Rightarrow f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\, |g(\lambda)|^2.$$

c) Lineární posloupnost (jednostranná)

Nechť $\{Y_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ je diskrétní bílý šum, $\mathsf{E}\{|Y_t|\}^2 = \sigma^2$, nechť $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty$. Uvažujme

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, Y_{t-k},$$

kde řada je míněna dle kvadratického středu (má smysl díky požadavku na koeficienty $\{c_k\}$). Kovarianční funkce od $\{X_t\}$ má tvar

$$\begin{aligned} R(t) &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} c_{t+j}\, \overline{c}_j, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \\ R(-t) &= \overline{R(t)} \quad \text{pro } t = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

a tedy lineární posloupnost je slabě stacionární.

d) Zobecnění lineární posloupnosti (oboustranná)

Nechť $\{Y_t,\, t\in \mathbb{Z}\}$ je diskrétní bílý šum, $\mathsf{E}\{|Y_t|^2\}=\sigma^2$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2<+\infty$. Položme

$$X_n=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\,Y_{n-k},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

$\{X_n,\, n\in\mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární, $\mathsf{E}\{X_n\}=0$

$$\begin{aligned} R(n) &= \sigma^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{c}_k\,c_{n+k},\quad \text{pro } n\ge 0,\\ R(-n) &= \overline{R(n)} \text{ pro } n>0. \end{aligned}$$

e) Autoregresní posloupnosti AR(p)

Nechť $a_0,a_1,\ldots,a_p$ jsou taková reálná čísla, že $a_0>0$ a polynom

$$P(z)=\sum_{k=0}^{p}a_k\,z^{p-k}=a_0\,z^p+a_1\,z^{p-1}+\cdots+a_p$$

má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Studujme možnost existence takové stacionární posloupnosti $\{X_n\}$, že

$$a_0\,X_n+a_1\,X_{n-1}+\cdots+a_p\,X_{n-p}=Y_n,$$

kde $\{Y_n,\, n\in\mathbb{Z}\}$ je opět diskrétní bílý šum.

Nechť pro jednoduchost $a_p\neq 0$. Hledáme $\{X_n,\, n\in\mathbb{Z}\}$ ve tvaru

$$X_n=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,Y_{n-k},\quad \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<+\infty$$

(čili ve tvaru jednostranné lineární posloupnosti). Dosazením do autoregresní rovnice získáme srovnáváním koeficientů následující vztahy

$$\begin{aligned} a_0\,c_0&=1\\ a_0\,c_1+a_1\,c_0&=0\\ \cdots\cdots&\cdots\cdots\\ a_0\,c_p+a_1\,c_{p-1}+\cdots+a_p\,c_0&=0\\ a_0\,c_n+a_1\,c_{n-1}+\cdots+a_p\,c_{n-p}&=0 \end{aligned}$$

pro $n>p$. Položme $A(z)=\sum_{k=0}^{p}a_k\,z^k$, $C(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,z^k$. Vynásobíme předchozí řádky postupně $1,\ z,\ z^2,\ldots$, sečteme a dostaneme, že

$$A(z)\,C(z)=1\Rightarrow C(z)=\frac{1}{A(z)}.$$

Dle předpokladu o kořenech polynomu $P(z)$ vyplývá, že $A(z)$ má kořeny vně jednotkového kruhu. Nechť jsou všechny jednoduché $z_1,\ z_2,\dots,z_p$. Pak

$$\frac{1}{A(z)}=\sum_{k=1}^{p}\frac{A_k}{z_k-z};$$

pro $|z|<1$ platí

$$\frac{1}{z_j-z}=\frac{1}{z_j}\,\frac{1}{1-\frac{z}{z_j}}=\frac{1}{z_j}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_j}\right)^k.$$

Tedy

$$\begin{aligned}C(z) &= \sum_{j=1}^{p}=\frac{A_j}{z_j-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{j=1}^{p}A_j\,z_k^{-k-1}\\ &\Rightarrow\ C_k=\sum_{j=1}^{p}A_j\,z_j^{-k-1},\quad k=0,1,\dots\quad\text{a}\quad c_0=\frac{1}{a_0}.\end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že existuje řešení stochastické diferenční rovnice

$$\sum_{j=0}^{p}a_j\,X_{n-j}=Y_n.$$

Protože $\{X_n\}$ je lineární posloupnost, pak je i slabě stacionární a požadavky na vlastnost kořenů polynomu $P(z)$ jsou vlastně podmínkou stacionarity. Hledáme vyjádření pro $\{X_n\}$ ve tvaru

$$X_n=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}g(\lambda)\,\mathrm{d}Z_Y(\lambda),$$

kde musí být

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\lambda<+\infty.$$

Dosazením do diferenční rovnice máme

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}\left(a_0+a_1\,e^{-i\lambda}+\dots+a_n\,e^{-ip\lambda}\right)g(\lambda)\,\mathrm{d}Z_Y = \int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}\mathrm{d}Z_Y\\ \Rightarrow\ g(\lambda) &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{p}a_k\,e^{-ik\lambda}}\ \Rightarrow\\ \Rightarrow\ f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{|\sum_{k=0}^{p}e^{ik\lambda}|^2}\quad \lambda\in\langle-\pi,+\pi\rangle.\end{aligned}$$

f) ARMA–modely ARMA(p,q) Nechť $\{Y_n\}$ je diskrétní bílý šum, $\mathsf{E}\{Y_n\}=0,\ \mathsf{E}\{|Y_n|^2\}=\sigma^2>0$. Nechť jsou dána reálná čísla $a_0,a_1,\dots,a_p,\ b_0,b_1,\dots,b_q$ taková, že $a_0,\ b_0$ jsou nenulová, $a_0>0,\ a_p\neq 0,\ b_q\neq 0$. Hledáme lineární posloupnost $\{X_n,\ n\in\mathbb{Z}\}$, která splňuje diferenční rovnici

$$\sum_{k=0}^{p}a_k\,X_{n-k}=\sum_{j=0}^{q}b_j\,Y_{n-j}.$$

Uvažuje se případ $p\geq q$. Za předpokladů o chování kořenů polynomů $P(z)=\sum_{k=0}^{p}a_kz^{p-k}$, aby všechny byly uvnitř jednotkového kruhu a $Q(z)=\sum_{k=0}^{q}b_k\,z^{q-k}$, který musí mít kořeny v absolutní hodnotě ≤ 1, lze ukázat, že existuje stacionární řešení této diferenční rovnice se spektrální hustotou

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\,\frac{|b_0+b_1\,e^{-i\lambda}+\cdots+b_q\,e^{-iq\lambda}|^2}{|a_0+a_1\,e^{-i\lambda}+\cdots+a_p\,e^{-ip\lambda}|^2}.$$

Při studiu slabě stacionárních posloupností a procesů je velice výhodné použít vlastností Hilbertova prostoru. Jestliže $X=\{X_n,\,n\in\mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární centrovaná náhodná posloupnost tvořená náhodnými veličinami definovanými na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\mathcal{A},P)$, pak lze na X_n pohlížet jako na prvek Hilbertova prostoru $L_2(\Omega,\mathcal{A},P)$. Označme $H(X)$ podprostor v tomto Hilbertově prostoru, který je generován všemi hodnotami posloupnosti $\{X_n\}$, neboli

$$H(X)=\overline{\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\,X_{n_i}\right\}},$$

kde α_i jsou obecně komplexní čísla a uzávěr je míněn v normě prostoru $L_2(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Velice užitečným nástrojem pro studium slabě stacionárních posloupností se jeví izomorfismus $I:H(X)\to L_2(F)$, kde $L_2(F)$ značí Hilbertův prostor všech integrovatelných s kvadrátem funkcí na $\langle-\pi,\pi\rangle$ vůči spektrální funkci F.

Věta 30. Nechť $X=\{X_n,\,n\in\mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární náhodná posloupnost se spektrální funkcí F. Pak existuje izomorifmus $I:H(X)\to L_2(F)$ daný vztahem

$$I(X_n)=e^{in\lambda},\quad n\in\mathbb{Z},\ \lambda\in\langle-\pi,\pi\rangle.$$

Důkaz. Jestliže $X_n=X_k$ s.j. vůči míře P v $(\Omega,\mathcal{A})$, pak $e^{in\lambda}=e^{ik\lambda}$ skoro všude vůči míře generované spektrální funkcí F v $\langle-\pi,\pi\rangle$, protože

$$E\{X_n\,\overline{X}_n\}=E\{X_n\,\overline{X_k}\}=\int_{-\pi}^{\pi}1\,\mathrm{d}F(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-k)\lambda}\,\mathrm{d}F(\lambda).$$

Proto je zobrazení $I:X_n\to e^{in\lambda}$ pro všechny hodnoty posloupnosti X dobře definováno. Nyní je zcela přirozené zobrazení I lineárně rozšířit následujícím způsobem

$$I\left(\sum_{k=-N}^{N}\alpha_k\,X_k\right)=\sum_{k=-N}^{N}\alpha_k\,e^{ik\lambda},\quad N\in\mathbb{N}$$

kde α_k jsou obecně komplexní. Snadno lze vidět, že skalární součin je invariantní vůči zobrazení I, neboť

$$\begin{aligned}E\left\{\sum_{k=-N}^{N}\alpha_k\,X_k\cdot\sum_{j=-N}^{N}\overline{\beta}_j\,\overline{X}_j\right\}&=\sum_{k=-N}^{N}\sum_{j=-N}^{N}\alpha_k\,\overline{\beta}_j\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-j)\lambda}\,\mathrm{d}F(\lambda)=\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=-N}^{N}\alpha_k e^{ik\lambda}\sum_{j=-N}^{N}\overline{\beta}_j\,e^{-ij\lambda}\,\mathrm{d}F(\lambda),\end{aligned}$$

což je hodnota skalárního součinu v $L_2(F)$. Tím jsme tedy stanovili izomorfismus, dokonce izometrii, mezi všude hustými podmnožinami v $H(X)$ a $L_2(F)$. Díky spojitosti skalárního součinu lze tuto izometrii rozšířit na celé prostory $H(X)$ a $L_2(F)$. $\square$

Nejdůležitějším důsledkem existence izometrie I mezi prostory $H(X)$ a $L_2(F)$ je následující skutečnost. Nechť $\eta_i,\ i = 1, 2$ jsou libovolné náhodné veličiny z $H(X)$, pak existují jednoznačně určené funkce $\varphi_i(\cdot) \in L_2(F)$ takové, že $I(\eta_i) = \varphi_i(\cdot),\ i = 1, 2$ a navíc platí, že

$$E\{\eta_1 \overline{\eta}_2\} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\lambda)\, \overline{\varphi_2(\lambda)}\, \mathrm{d}F(\lambda).$$

Poznámka. Zcela analogická situace nastává v případě spojitého času $t \in \mathbb{R}$, kdy existuje izometrie mezi Hilbertovými prostory $H(X)$ a $L_2(F)$ definovaná vztahem $I(X_t) = e^{it\lambda},\ t \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

5.5 Absolutně spojitá spektrální funkce a lineární posloupnosti

Jestliže $F(\cdot)$ je absolutně spojitá spektrální funkce slabě stacionární centrované náhodné posloupnosti $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ se spektrálním rozkladem

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, \mathrm{d}z(\lambda),$$

kde $E\{|\mathrm{d}z(\lambda)|^2\} = \mathrm{d}F(\lambda)$, $E\{\mathrm{d}z(\lambda)\} = 0$, pak lze pro derivaci $f(\lambda) = F'(\lambda)$ psát

$$|\varphi(\lambda)|^2 = f(\lambda), \tag{2}$$

kde $\varphi(\cdot)$ je libovolná borelovsky měřitelná funkce na $\langle -\pi, \pi\rangle$, která splňuje vztah (2). Lze ukázat, že pro každou takovou funkci $\varphi(\cdot)$ existuje náhodný proces $y(\cdot)$ s ortogonálními přírůstky na $\langle -\pi, \pi\rangle$ takový, že

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}y(\lambda),$$

přičemž $E\{|\mathrm{d}y(\lambda)|^2\} = \mathrm{d}\lambda$, $E\{\mathrm{d}y(\lambda)\} = 0$.

Skutečně, když $f(\lambda) > 0$ skoro všude v $\langle -\pi, \pi\rangle$ vůči Lebesgueově míře, pak lze tento proces vyjádřit pomocí stochastického integrálu

$$y(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} \frac{1}{\varphi(u)}\, \mathrm{d}z(u).$$

Toto ale též znamená, že hodnoty náhodného procesu $\{y(\lambda),\, \lambda \in \langle -\pi, \pi\rangle\}$ patří do prostoru generovaného hodnotami náhodné ortogonální míry $z(\cdot)$, a tedy i do prostoru $H(X)$ generovaného hodnotami posloupnosti X. Jestliže ale derivace $f(\lambda)$ je někde nulová na množině kladné míry v $\langle -\pi, \pi\rangle$, je nutno si pomoci při konstrukci procesu $y(\cdot)$ rozšířením množiny elementárních jevů Ω, na nichž je posloupnost $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ definována. Nechť $\{y_1(\lambda), \lambda \in \langle -\pi, \pi\rangle\}$ je nějaký, celkem libovolný náhodný proces, splňující

$$\mathsf{E}\{|\mathrm{d}y_1(\lambda)|^2\} = \mathrm{d}\lambda$$

$$\mathsf{E}\left\{(y_1(\mu_1)-y_1(\lambda_1))\overline{(y_1(\mu_2)-y_1(\lambda_2))}\right\}=0$$

pro libovolnou čtveřici $\lambda_1<\mu_1\leq\lambda_2<\mu_2$ v $\langle-\pi,\pi\rangle$. Tento proces může být definován na zcela jiném pravděpodobnostním prostoru nežli původní náhodná posloupnost $X=\{X_n,\,n\in\mathbb{Z}\}$. Lze dokonce požadovat, aby posloupnost $X=\{X_n,\,n\in\mathbb{Z}\}$ a proces $\{y_1(\lambda),\,\lambda\in\langle-\pi,\pi\rangle\}$ byly stochasticky nezávislé. Nechť nyní $\Phi(\lambda)$ je taková funkce na $\langle-\pi,\pi\rangle$, že $\Phi(\lambda)=1$, kde $f(\lambda)=0$ a $\Phi(\lambda)=0$ jinde. V případě, že $f(\lambda)=0$, položme $1/f(\lambda)=0$ rovněž. Uvažujme náhodný proces $\{y(\lambda),\,\lambda\in\langle-\pi,\pi\rangle\}$, který je definován následovně

$$y(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}\frac{1}{\varphi(u)}\,\mathrm{d}z(u)+\int_{-\pi}^{\lambda}\Phi(u)\,\mathrm{d}y_1(u).$$

Takto lze tedy zkonstruovat proces $\{y(\lambda),\,\lambda\in\langle-\pi,\pi\rangle\}$, který dává spektrální rozklad původní posloupnosti $X=\{X_n,\,n\in\mathbb{Z}\}$ ve tvaru

$$X_n=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}y(\lambda).$$

Zde je nutno ale zdůraznit, že v případě, že $f(\lambda)=0$ na nějaké množině kladné Lebesgueovy míry, pak hodnoty procesu $\{y(\lambda),\,\lambda\in\langle-\pi,\pi\rangle\}$ již obecně nemusí patřit do prostoru $H(X)$, neboť jsme si museli pomoci rozšířením původního pravděpodobnostního prostoru. Po této konstrukci lze dokázat následující větu.

Věta 31. Slabě stacionární centrovaná náhodná posloupnost $\{X_n,\,n\in\mathbb{Z}\}$ se dá vyjádřit jako oboustranná lineární posloupnost právě tehdy, když má spektrální hustotu, tj. její spektrální funkce je absolutně spojitá.

Důkaz. Jestliže $X=\{X_n,\,n\in\mathbb{Z}\}$ je posloupnost, která se dá vyjádřit jako

$$X_n=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}c_j\,\xi_{n+j},$$

kde $\{\xi_n,\,n\in\mathbb{Z}\}$ je diskrétní bílý šum, přičemž požadujeme, aby

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|c_j|^2<+\infty,$$

pak řada

$$c(\lambda)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}c_j\,e^{ij\lambda}$$

konverguje na $\langle-\pi,\pi\rangle$ dle kvadratického středu vůči spektrální míře. Díky Parsevalově rovnosti máme, že

$$E\left\{X_{n+k}\,\overline{X_k}\right\}=R(n)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}c_{j-n}\,\overline{c}_j=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|c(\lambda)|^2\,e^{in\lambda}\mathrm{d}\lambda,$$

a tudíž spektrální míra je absolutně spojitá s tím, že její derivace je přímo rovna $\frac{1}{2\pi}|c(\lambda)|^2$.

Naopak, když spektrální funkce posloupnosti X je absolutně spojitá, pak lze díky předchozí konstrukci procesu $\{y(\lambda),\ \lambda \in \langle -\pi, \pi\rangle\}$ s ortogonálními přírůstky psát, že

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda)\, e^{in\lambda}\, \mathrm{d}y(\lambda), \tag{3}$$

přičemž $|\varphi(\lambda)|^2 = F'(\lambda)$ a funkci $\varphi(\cdot)$ lze rozložit do fourierovské řady

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j\, e^{i\lambda j}, \quad \lambda \in \langle -\pi, \pi\rangle,$$

pak lze snadno ukázat dosazením do vztahu (3), že

$$X_n = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j\, \xi_{n+j},$$

kde

$$\xi_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\, \mathrm{d}y(\lambda),$$

což je diskrétní bílý šum, jak snadno plyne z vlastností stochastického integrálu. Je nutno ale upozornit, že hodnoty bílého šumu $\{\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ nemusí obecně patřit do prostoru $H(X)$, jak již bylo zdůrazněno výše. □

Věta 32. Spektrální funkce $F(\cdot)$ centrované slabě stacionární náhodné posloupnosti $X = \{X_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ je absolutně spojitá a kladná skoro všude vůči Lebesgueově míře na $\langle -\pi, \pi\rangle$ právě tehdy, když posloupnost lze vyjádřit jako oboustranně lineární posloupnost generovanou posloupností vzájemně nekorelovaných náhodných veličin, které patří do $H(X)$.

Důkaz. Nechť $\mathrm{d}\lambda$ značí Lebesgueovu míru na $\langle -\pi, \pi\rangle$, nechť $F(\lambda)$ je spektrální funkce posloupnosti $\{X_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Nejdříve předpokládejme, že $F(\lambda)$ je absolutně spojitá, má hustotu $f(\lambda)$, která je kladná s. j. v $\langle -\pi, \pi\rangle$ dle Lebesgueovy míry, tj.

$$f(\lambda) > 0 \quad \text{[Leb.]}.$$

Pak lze psát

$$f(\lambda) = |\rho(\lambda)|^2, \quad \rho(\lambda) \neq 0 \quad \text{[Leb.]}$$

a položme

$$\varphi_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{e^{in\lambda}}{\rho(\lambda)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Tato posloupnost je ortonormální, neboť platí

$$\langle \varphi_n(\lambda),\, \varphi_m(\lambda)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\lambda)\, \overline{\varphi}_m(\lambda)\, f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\,\lambda}\, \mathrm{d}\lambda = \delta_{nm},$$

dále $\{\varphi_n(\lambda)\}$ je dokonce báze v $L_2(F)$, neboť ortogonalita

$$\langle \varphi_n(\cdot),\, \varphi(\lambda)\rangle = 0 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{Z}$$

vede na $\varphi(\lambda) = 0\,[F]$, neboť

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda)\,\overline{\varphi_n(\lambda)}\,f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda)\,e^{-in\lambda}\rho(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \text{ tedy}$$

Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(\lambda)\,\rho(\lambda)$ jsou nulové a součin $\varphi(\lambda)\,\rho(\lambda) \in L_2(\mathrm{d}\lambda)$, tudíž při předpokladu $\rho(\lambda) \neq 0$ [Leb.] máme, že $\varphi(\lambda) = 0$ [Leb.], a tedy i $\varphi(\lambda) = 0$ [F].

Je jasné, že funkce identická 1 na $\langle -\pi, \pi\rangle$ patří do $L_2(F)$ a uvažujme její rozklad vůči ortonormální bázi $\{\varphi_n(\cdot)\}$

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\,\varphi_k(\lambda).$$

Protože

$$e^{in\lambda}\varphi_k(\lambda) = \varphi_{n+k}(\lambda),$$

pak

$$e^{in\lambda} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\,\varphi_{n+k}(\lambda). \tag{4}$$

Nyní pro každou funkci $\varphi_n(\lambda) \in L_2(F)$ existuje náhodná veličina V_n, kde

$$V_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\lambda)\,\mathrm{d}z(\lambda),$$

tedy $V_n \in H(X)$ a kde $z(\cdot)$ je ortogonální náhodná míra generovaná výchozí posloupností $\{X_n\}$; protože

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\{V_n\,\overline{V_m}\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\lambda}\frac{1}{\rho(\lambda)}\cdot\frac{1}{\overline{\rho(\lambda)}}\,f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \delta_{nm}, \end{aligned}$$

pak $\{V_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ je diskrétní bílý šum. Vztah (4) lze pak přímo přepsat do řeči náhodných veličin jako

$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\,V_{n+k}.$$

Naopak předpokládejme, že rozklad na zobecněnou lineární posloupnost je možný, tj.

$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\,V_{n+k},$$

přičemž $V_n \in H(X)$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Musíme dokázat, že $F(\lambda)$ je absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře na $\langle -\pi, \pi\rangle$ a $F'(\lambda) > 0$ [Leb.]. Pomocí bílého šumu $\{V_n\}$ definujeme funkce v $L_2(F)$ opět využitím izomorfismu

$$\varphi_n(\lambda) \leftrightarrow V_n,$$

který vychází ze zobrazení $e^{in\lambda} \leftrightarrow X_n$, kde

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\mathrm{d}z(\lambda),$$

tedy

$$V_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\lambda)\, \mathrm{d}z(\lambda),$$

protože $\{V_n\}$ jsou navzájem ortogonální, pak odpovídající $\{\varphi_n(\lambda)\}$ jsou též ortogonální v $L_2(F)$, a to dokonce ortonormální. Jelikož $\{V_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ tvoří bázi v $H(X)$, pak $\{\varphi_n(\cdot),\, n \in \mathbb{Z}\}$ musí tvoři bázi v $L_2(F)$.

Definujme novou míru $\mathrm{d}F_0(\cdot)$ na $\langle -\pi, \pi\rangle$ vztahem

$$\mathrm{d}F_0(\lambda) = |\varphi_0(\lambda)|^2\, \mathrm{d}F(\lambda),$$

přičemž

$$\delta_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\lambda)\, \overline{\varphi_m(\lambda)}\, \mathrm{d}F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\,\lambda} \varphi_0(\lambda)|^2\, \mathrm{d}\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\,\lambda} \mathrm{d}F_0(\lambda),$$

neboť lze ukázat, že $V_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \varphi_0(\lambda)\, \mathrm{d}z(\lambda)$ díky operátoru posunutí U ve smyslu $X_{n+1} = U\, X_n$.

Pak ale díky Herglotzově lemmatu musí být míra $\mathrm{d}F_0(\lambda)$ totožná s $\mathrm{d}\lambda$. Abychom dokázali absolutní spojitost $\mathrm{d}F(\lambda) \ll \mathrm{d}\lambda$, předpokládejme, že $\lambda(M) = 0$ pro nějakou borelovskou podmnožinu $M \subset \langle -\pi, \pi\rangle$. Pak máme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M e^{i(n-m)\,\lambda} \mathrm{d}\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_M(\lambda)\, e^{i(n-m)\,\lambda}\, \mathrm{d}\lambda = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi_M(\lambda)\, e^{i(n-m)\,\lambda}\, |\, \varphi_0(\lambda)|^2\, \mathrm{d}F(\lambda) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi_M(\lambda)\, \varphi_n(\lambda)\, \overline{\varphi_m(\lambda)}\, \mathrm{d}F(\lambda) \Rightarrow \end{aligned}$$

díky ortogonalitě bázových funkcí $\{\varphi_m(\cdot)\}$ v $L_2(F)$, že $\psi_M(\lambda)\, \varphi_n(\lambda) = 0\ [F]$. Pak

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi_M(\lambda)\, \varphi_n(\lambda)\, \mathrm{d}F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\psi_M(\lambda)}\, \varphi_n(\lambda)\, \mathrm{d}F(\lambda) \\ &\Rightarrow \psi_M(\lambda) = 0\ [F] \end{aligned}$$

z téhož důvodu, a tudíž $\int_M \mathrm{d}F(\lambda) = 0$. Tím je dokázána absolutní spojitost. Zbývá ukázat, že $F'(\lambda) > 0$ [Leb.]. Protože $\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi}|\varphi_0(\lambda)|^2\, \mathrm{d}F(\lambda)$, pak Lebesgueova míra je absolutně spojitá vůči $F(\lambda)$, tedy jsou navzájem obě míry absolutně spojité, což dává $F'(\lambda) > 0$ [Leb.]. □

Věta 33. Uvažujme reprezentaci slabě stacionární náhodné posloupnosti $\{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ ve tvaru oboustranné lineární posloupnosti

$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, V_{k+n},$$

kde $V_j \in H(X),\ j \in \mathbb{Z}$ tvoří diskrétní bílý šum. Platí: $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \cdots = 0$ pro všechna přirozená n právě tehdy, když odpovídající spektrální hustota $f(\lambda)$ se dá vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |h(\lambda)|^2, \quad \text{kde} \\ h(\lambda) &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, e^{ij\lambda}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Důkaz. Předpokládejme, že $f(\lambda) = |h(\lambda)|^2$, kde $h(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, e^{ij\lambda}$. Pak položme $\rho(\lambda) = \overline{h(\lambda)}$ z důkazu předchozí věty a musíme ukázat, že $a_n = 0$ pro každé $n \geq 1$. Ale pro $n \geq 1$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_n(\lambda)}\, f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-in\lambda}}{h(\lambda)}\, f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda}\overline{h(\lambda)}\, \mathrm{d}\lambda = 0, \end{aligned}$$

protože koeficienty $\overline{c}_n$ od funkce $\overline{h(\lambda)}$ pro $n \geq 0$ jsou nulové.

Nechť naopak $a_n = 0$ pro $n \geq 1$ v lineární reprezentaci náhodné posloupnosti, tedy

$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{0} a_k\, V_{k+n},$$

kde $V_j \in H(X),\ j \in \mathbb{Z}$. Z předchozí věty víme, že pak existuje spektrální hustota $f(\lambda)$, která je kladná skoro všude na $\langle -\pi, \pi \rangle$ vůči Lebesgueově míře, tj. $f(\lambda) > 0$ skoro všude v $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Definujme ortonormální bázi v $L_2(f)$ pomocí vztahu

$$V_n = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(\lambda)\, \mathrm{d}z(\lambda),$$

neboť $V_n \in H(X)$, kde $\mathrm{d}z(\lambda)$ je ortogonální náhodná míra vystupující ve spektrálním rozkladu posloupnosti $\{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$. Je snadné dokázat díky izomorfismu, že

$$\psi_n(\lambda) = e^{in\lambda}\psi_0(\lambda).$$

Definujme novou míru m_0 na borelovských podmnožinách v $\langle -\pi, \pi \rangle$ pomocí vyjádření

$$m_0(E) = 2\pi \int_E |\psi_0(\lambda)|^2\, f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda.$$

Protože

$$\begin{aligned} \delta_{nk} &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi_k(\lambda)\, \overline{\psi_n(\lambda)}\, f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\,\lambda} |\psi_0(\lambda)|^2\, f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda, \end{aligned}$$

a na druhou stranu

$$\delta_{nk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\,\lambda} \mathrm{d}\lambda,$$

z čehož na základě Herglotzovy věty plyne, že $m_0(\cdot)$ je vlastně Lebesgueova míra v $\langle -\pi, \pi \rangle$. Protože $m_0(E) = \lambda(E)$, pak

$$\lambda(E) = 2\pi \int_E |\psi_0(\lambda)|^2 f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$$

a $f(\lambda) > 0$ skoro všude vůči Lebesgueově míře, pak Lebesgueova míra $\lambda(\cdot)$ a míra generovaná hustotou $f(\lambda)$ jsou navzájem absolutně spojité, a tudíž

$$|\psi_0(\lambda)|^2 > 0 \quad \text{skoro všude v } \langle -\pi, \pi \rangle \quad [\text{Leb.}].$$

Lze tedy uvažovat

$$h(\lambda) = \frac{1}{\overline{\psi_0(\lambda)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

a tudíž

$$|h(\lambda)|^2 = \frac{1}{2\pi|\psi_0(\lambda)|^2} = f(\lambda).$$

Funkce $h(\lambda)$ má fourierovský rozvoj ve tvaru

$$h(\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ik\lambda},$$

neboť

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\lambda)|^2\, \mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda < \infty.$$

Protože $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = 0$, pak

$$E\{X_0 \overline{V}_k\} = 0 \quad \text{pro každé } k \geq 1$$

a tedy musí být i

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\psi_k(\lambda)}\, f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = 0.$$

Ale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\psi_k(\lambda)}\, f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda}\overline{\psi_0(\lambda)}\, f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda}\overline{h(\lambda)}\, \mathrm{d}\lambda$$

a tedy i

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} h(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = c_{-k}.$$

Tím je dokázáno, že

$$h(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, e^{ik\lambda}.$$

□

Je tedy důležité zdůraznit, že pouhá existence spektrální hustoty nezaručuje obecně možnost reprezentace pomocí jednostranné lineární posloupnosti.

Věta 34. Slabě stacionární centrovaná posloupnost $\{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ se dá vyjádřit ve tvaru lineární jednostranné posloupnosti $X_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j V_{n-j}$ s $V_k \in H(X),\ k \in \mathbb{Z}$ tvořící bílý šum právě tehdy, když její spektrální hustota existuje a má tvar $f(\lambda) = |g(e^{i\lambda})|^2$, kde $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, z^j$ pro $|z| < 1$ s $\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2 < +\infty$.

Důkaz. Nechť posloupnost $\{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ se dá vyjádřit ve formě jednostranné lineární posloupnosti, tj.

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, V_{n-k}, \quad V_{n-k} \in H(X), \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty,$$

kde $\{V_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ je diskrétní bílý šum s jednotkovým rozptylem. Definujme

$$g(e^{i\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j}\, e^{ij\lambda},$$

pak díky vlastnostem bílého šumu lze vyjádřit kovarianční funkci od $\{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$

$$R(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+t}\overline{a_j} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} |g(e^{i\lambda})|^2 \mathrm{d}\lambda,$$

a tedy existuje spektrální hustota $f(\lambda) = |g(e^{i\lambda})|^2$, kde

$$g(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, e^{ij\lambda}, \quad b_j = \frac{\overline{a_j}}{\sqrt{2\pi}},$$

a tudíž i

$$\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2 < +\infty.$$

Naopak, nechť $R(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$, přičemž $f(\lambda) = |g(e^{i\lambda})|^2$ s výše uvedeným rozvojem. Definujme v $\langle -\pi, \pi \rangle$ na borelovských podmnožinách ortogonální náhodnou míru

$$v(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, g(e^{i\lambda})}\, \mathrm{d}z(\lambda),$$

kde $z(\cdot)$ je spektrální náhodná míra pro posloupnost $\{X_n\}$. Snadno vidíme, že

$$\mathsf{E}\{v(A)\,\overline{v(B)}\} = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_A(\lambda)\, \psi_B(\lambda)\, \frac{1}{2\pi |g(e^{i\lambda})|^2}\, f(\lambda) \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{A\cap B} \mathrm{d}\lambda,$$

Ihned máme

$$\begin{aligned} X_t &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\, \mathrm{d}z(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \sqrt{2\pi}\, \overline{g(e^{i\lambda})}\, \mathrm{d}v(\lambda) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2\pi}\, \overline{b_n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-n)\lambda}\, \mathrm{d}v(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, V_{t-n}, \end{aligned}$$

kde $a_n = \sqrt{2\pi}\, \overline{b_n}$, $V_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, \mathrm{d}v(\lambda)$, $\mathsf{E}\{V_n\, \overline{V_m}\} = \delta_{nm}$.

Tím jsme dokázali, že posloupnost $\{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ se dá vyjádřit jako jednostranná lineární posloupnost generovaná bílým šumem s jednotkovým rozptylem a hodnotami v $H(X)$. $\square$

Věta 35. Slabě stacionární centrovanou posloupnost $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ lze vyjádřit ve tvaru jednostranné lineární posloupnosti $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, Y_{n-k}$, kde $Y_j \in H(X)$, $\{Y_j,\, j \in \mathbb{Z}\}$ (diskrétní bílý šum) právě tehdy, když má spektrální hustotu $f(\lambda)$ splňující nerovnost

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda > -\infty.$$

Důkaz. Čtenář může najít důkaz této důležité věty např. v monografii [3]. Obsah důkazu je nad rámec skript, protože je založen na vlastnostech funkcí komplexní proměnné z Hardyho třídy H_2. □

Poznámka. Ze dvou posledních vět bezprostředně plyne, že spektrální hustota $f(\lambda)$ splňuje podmínku $\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda > -\infty$ (což je vlastně podmínka, že $\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$ je konečný, neboť díky nerovnosti $x - 1 \geq \ln x$ na $(0, +\infty)$ nemůže být $\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = +\infty$) právě tehdy, když $f(\lambda) = |g(e^{i\lambda})|^2$, kde $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$ s $\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2 < +\infty$. Tento důležitý vztah může být dokázán samozřejmě i bez použití aparátu slabě stacionárních posloupností. Spektrální hustoty, které lze vyjádřit jako $f(\lambda) = |g(e^{i\lambda})|^2$ se nazývají faktorizovatelné.

5.6 Příklady slabě stacionárních procesů

a) Elementární náhodný proces:

Nechť $g(t)$ je obecně komplexní funkce reálné proměnné t, $g(t) \neq 0$, nechť ξ je libovolná náhodná veličina se $\mathsf{E}\{\xi\} = 0$, $D\{\xi\} = \sigma^2$. Uvažujme náhodný proces $\xi_t = g(t)\, \xi$, $t \in I\!R$. Ihned je vidět, že daný proces bude slabě stacionární, když

$$g(t) = r\, e^{i\varphi(t)},$$

kde $\varphi(\cdot)$ je nějaká konečná reálná funkce, což při předpokladu, že $\varphi(\cdot)$ má derivaci, vede na případ $\varphi(t) = \alpha t + \omega$, kde α, ω jsou reálné konstanty.

b) Proces s kovarianční funkcí tvaru $C\, e^{-\alpha|t|}$:

Zde tedy $C > 0$, $\alpha > 0$; díky spektrálnímu rozkladu kovarianční funkce lze získat tvar spektrální hustoty, totiž

$$f(\lambda) = \frac{C\alpha}{2\pi}\, \frac{1}{\alpha^2 + \lambda^2}.$$

<u>Pozor</u>! Tento proces nemá derivaci dle kvadratického středu.

c) Proces s kovarianční funkcí tvaru $C\, e^{-\alpha|t|} \cos \beta\, t$, $(\alpha, \beta, C > 0)$

Tento proces má spektrální hustotu typu

$$f(\lambda) = \frac{C\alpha}{2\pi}\, \frac{\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\lambda^2\beta^2}.$$

Je zřejmé, že $f(\lambda) > 0$ pro každé $\lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

d) Procesy se spektrální hustotou racionálního typu

Uvažujme lineární diferenciální operátor

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}$$

a aplikujme ho na slabě stacionární náhodný proces ξ_t, který má derivace dle kvadratického středu až do n-tého stupně včetně. Pak výsledný proces η_t,

$$\eta_t = P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\xi_t$$

je opět slabě stacionární proces, protože diferenciální operátor má konstantní koeficienty. Evidentně platí, že

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\{\eta_t\} &= P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\mathsf{E}\{\xi_t\} = a_0\,\mathsf{E}\{\xi_t\},\\ R_{\eta\eta}(t-s) &= P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\overline{P}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)R_{\xi\xi}(t-s),\end{aligned}$$

kde $\overline{P}(\cdot)$ je polynom komplexně sdružený k $P(\cdot)$, tj.

$$\overline{P}(z) = \overline{a_0}\,z^0 + \overline{a_1}\,z^1 + \cdots + \overline{a_n}\,z^n.$$

V rámci této transformace mezi procesy $\{\xi_t\}$ a $\{\eta_t\}$ vzniká ihned následující problém: nechť $\{\xi_t,\, t\in T\}$ je daný náhodný proces a ptáme se, za jakých podmínek existuje slabě stacionární proces $\{\eta_t,\, t\in T\}$ tak, aby platilo

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\eta_t = \xi_t \quad \text{s. j.}$$

pro každé $t\in T$ (tedy opačná úloha). Samozřejmě máme na mysli $T=(a,b)$.

Jestliže náhodný proces $\{\xi(t),\, t\in T\}$ je slabě stacionární se střední hodnotou nula a se spektrální mírou $F(\cdot)$, pak řešení předchozí diferenciální rovnice je ve tvaru

$$\eta_t = \int_{-\infty}^{+\infty}[P(i\lambda)]^{-1}\,e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}Z(\lambda),$$

kde

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}Z(\lambda) \quad \text{a pokud} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}|P(i\lambda)|^{-2}\,\mathrm{d}F(\lambda)$$

existuje.

Výše uvedený příklad vede k důležité třídě tzv. slabě stacionárních procesů se spektrální hustotou racionálního typu, kde příslušnou spektrální hustotu lze vyjádřit ve tvaru

$$f(\lambda) = C\,\frac{\prod_1^{\alpha}(\lambda-w_j)}{\prod_1^{\beta}(\lambda-z_j)}, \quad \lambda\in I\!R$$

kde C, w_j, z_j jsou obecně komplexní čísla. Tato třída slabě stacionárních náhodných procesů je nejdůležitějším případem procesů s absolutně spojitou spektrální mírou, tj. které mají spektrální hustotu, neboli takový proces má spektrální rozklad

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\,\mathrm{d}z(\lambda),$$

kde $\mathsf{E}\{|\mathrm{d}z(\lambda)|^2\} = f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ s $f(\lambda)$ výše uvedeného typu.

Věnujme se tedy spektrální hustotě racionálního typu. Lze předpokládat, že čitatel $\prod_j(\lambda - w_j)$ a jmenovatel $\prod_j(\lambda - z_j)$ nemají společné kořeny, neboť jinak by bylo možno je vzájemně pokrátit. Protože spektrální hustota je reálná, pak musí být

$$C\,\frac{\prod_1^\alpha(\lambda - w_j)}{\prod_1^\beta(\lambda - z_j)} = \overline{C}\,\frac{\prod_1^\alpha(\lambda - \overline{w_j})}{\prod_1^\beta(\lambda - \overline{z_j})},$$

a tedy z_j a w_j se rozdělí na dvojice vzájemně komplexně sdružených čísel. Dále, funkce $f(\lambda)$ je integrovatelná, a tedy žádný z kořenů z_j nemůže být čistě reálný. Protože $f(\lambda) \geq 0$, pak každý reálný kořen čitatele musí mít sudou násobnost, dále stupeň čitatele musí být menší nežli stupeň jmenovatele a $C = \overline{C} > 0$. Díky rovnosti $|\lambda - \xi| = |\lambda - \overline{\xi}|$ lze hustotu $f(\lambda)$ vyjádřit ve tvaru

$$f(\lambda) = C\,\frac{\left|\prod_{j=1}^\alpha(\lambda - w_j)\right|^2}{\left|\prod_{j=1}^\beta(\lambda - z_j)\right|^2} = \left|\frac{\sum_{j=0}^\alpha A_j\,\lambda^j}{\sum_{j=0}^\beta B_j\,\lambda^j}\right|^2, \quad \text{kde } \alpha < \beta$$

a kde $A_0\,A_\alpha\,B_0\,B_\beta \neq 0$. Protože kořeny w_j, z_j lze vybrat libovolně vždy ze dvojice komplexních sdružených čísel, je vhodné volit vždy kladné imaginární části těchto kořenů. Pak totiž koeficienty A_j, B_j jsou určeny jednoznačně. Je-li navíc sledovaný proces reálný, a tedy jeho odpovídající spektrální hustota sudá funkce, pak ji lze vyjádřit ve tvaru

$$f(\lambda) = \left|\frac{\sum_{j=0}^\alpha A'_j(i\lambda)^j}{\sum_{j=0}^\beta B'_j(i\lambda)^j}\right|^2,$$

kde $A_j = A'_j\,i^j$, $B_j = B'_j\,i^j$ a koeficienty A'_j, B'_j jsou reálné. Pak takový proces má spektrální rozklad

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\,\frac{\sum_{j=0}^\alpha A_j\lambda^j}{\sum_{j=0}^\beta B_j\lambda^j}\,\mathrm{d}Z(\lambda),$$

kde $\mathsf{E}\{|\mathrm{d}Z(\lambda)|^2\} = \mathrm{d}\lambda$.

Nejdůležitější případ je, když $\alpha = 0$ a $A_0 = 1$, neboli

$$f(\lambda) = \frac{1}{\left|\sum_{j=0}^\beta B_j\lambda^j\right|^2}$$

s $\beta > 0$, $B_0\,B_\beta \neq 0$. Ihned plyne, že $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2(\beta-1)} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda < +\infty$, a tudíž až do řádu $(\beta - 1)$ včetně existuje derivace dle kvadratického středu vyjádřitelná jako

$$X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\lambda)^k\,e^{i\lambda t}}{\sum_{j=1}^\beta B_j\,\lambda^j}\,\mathrm{d}Z(\lambda),$$

kde $\mathsf{E}\{|\mathrm{d}Z(\lambda)|^2\} = \mathrm{d}\lambda$. Pak lze formálně psát

$$B_0\,X(t) + \frac{B_1}{i}\,X^{(1)}(t) + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{i^{\beta-1}}\,X^{(\beta-1)}(t) + \frac{B_\beta}{i^\beta}\,X^{(\beta)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\,\mathrm{d}Z(\lambda),$$

kde v pravé straně se vyskytuje formálně vyjádřený náhodný proces, který nazýváme bílým šumem se spektrální hustotou rovnou 1 a s nekonečným rozptylem. Z tohoto formálního vyjádření vyplývá, proč se procesům s tímto typem racionálních spektrálních hustot říká též autoregresní procesy. Korektní konstrukce bílého šumu je ovšem možná až v rámci tzv. zobecněných náhodných procesů, při použití teorie Schwartzových distribucí. Nicméně volba kořenů ve tvaru spektrální hustoty s kladnými imaginárními částmi zde má své zdůvodnění, že totiž pak řešení oné formální diferenciální rovnice splňuje rozumnou podmínku ortogonálnosti

$$\mathsf{E}\left\{\xi(t)\,\overline{x(s)}\right\} = 0$$

pro $s \leq t$, kde $\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\,\mathrm{d}Z(\lambda)$. Blíže viz např. [2].

K pojmu bílého šumu lze též dojít následovným přístupem. Nechť $z(\lambda)$ je ortogonální náhodná míra na $(-\infty,+\infty)$ splňující $\mathsf{E}\{\mathrm{d}z(\lambda)\} = 0$, $\mathsf{E}\{|\mathrm{d}z(\lambda)|^2\} = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\lambda$ a uvažujme její Fourierův obraz, což je opět ortogonální náhodná míra definovaná vztahem

$$z^*(\Delta,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t_2} - e^{i\lambda t_1}}{i\lambda}\,\mathrm{d}z(\lambda,\omega),$$

když $\Delta = \langle t_1, t_2\rangle$. Obdobně lze dokázat, že platí i opačný vztah

$$z(\Delta,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-e^{i\lambda t_2} - e^{-i\lambda t_1}}{-i\lambda}\,\mathrm{d}z^*(\lambda,\omega),$$

neboť

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\langle t_1,t_2\rangle}(s)\,e^{i\lambda s}\,\mathrm{d}s \;=\; \frac{e^{i\lambda t_2} - e^{i\lambda t_1}}{i\lambda},$$

kde $\psi_{\langle t_1,t_2\rangle}(s) = 1$ pro $t_1 \leq s \leq t_2$ a nula jinak. Obecně lze ukázat, že pro každou dvojici f, f^* funkcí integrovatelných s kvadrátem na $(-\infty,\infty)$ svázaných Fourierovou transformací

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\,f^*(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}z(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\lambda)\,\mathrm{d}z^*(\lambda).$$

Náhodnou ortogonální míru $\mathrm{d}z^*(\lambda)$ vyjádříme pomocí procesu s ortogonálními přírůstky, tj.

$$z^*(t_2) - z^*(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it_2\lambda} - e^{it_1\lambda}}{i\lambda}\,\mathrm{d}z(\lambda);$$

snadno je vidět, že formální derivace $\frac{\mathrm{d}z^*(t)}{\mathrm{d}t}$ má pak formální spektrální rozklad

$$\frac{\mathrm{d}z^*(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\,\mathrm{d}z(\lambda),$$

což je právě bílý šum. Bílý šum tedy nemůže být slabě stacionární náhodný proces, neboť jeho kovarianční funkce je Diracova funkce, což dává nekonečný rozptyl.

5.7 Absolutně spojitá spektrální funkce a klouzavé součty

Nechť $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ je centrovaný slabě stacionární náhodný proces a nechť jeho spektrální funkce $F(\cdot)$ je absolutně spojitá. Pak proces X lze spektrálně rozložit do tvaru

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, \mathrm{d}z(\lambda),$$

kde $\mathsf{E}\{|\mathrm{d}z(\lambda)|^2\} = F'(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ [Leb.], $\mathsf{E}\{\mathrm{d}z(\lambda)\} = 0$. Nechť $\varphi(\cdot)$ je libovolná borelovská funkce na $\mathbb{R}$ taková, že

$$|\varphi(\lambda)|^2 = F'(\lambda) \quad \text{[Leb.]}.$$

Zcela analogicky jako v případě diskrétního času lze ukázat, že existuje proces $\{y(\lambda),\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ centrovaný s ortogonálními přírůstky takový, že

$$\mathsf{E}\{|\mathrm{d}y(\lambda)|^2\} = \mathrm{d}\lambda$$

přičemž

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}y(\lambda).$$

Nyní vymezíme velice důležitou třídu slabě stacionárních procesů.

Slabě stacionární proces $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ je vytvořen pomocí klouzavých součtů, když

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(s-t)\, \mathrm{d}z(s),$$

kde $\int_{-\infty}^{+\infty} |a(s)|^2\, \mathrm{d}s \; < +\infty$, $\mathsf{E}\{|\mathrm{d}z(s)|^2\} = \mathrm{d}s$, $\mathsf{E}\{\mathrm{d}z(s)\} = 0$.

Ihned je vidět, že

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathsf{E}\{X(s+t)\,\overline{X(s)}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\mu - t)\,\overline{a(\mu)}\, \mathrm{d}\mu = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |a^*(\mu)|^2\, e^{i\mu t}\, \mathrm{d}\mu, \end{aligned}$$

kde $a^*(\lambda)$ je Fourierův vzor funkce $a(\cdot)$. Tím pádem lze psát

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\mu} |a^*(\mu)|^2\, \mathrm{d}\mu,$$

čili spektrální míra takovéhoto slabě stacionárního procesu je absolutně spojitá, a má hustotu vyjádřitelnou jako $|a^*(\cdot)|^2$. Lze dokázat i opak, že slabě stacionární proces mající spektrální hustotu se dá vyjádřit ve tvaru klouzavých součtů. Je nutné ale zdůraznit, že Hilbertův prostor $H(X)$ může být obecně menší nežli Hilbertův prostor generovaný ortogonální náhodnou mírou $z(\cdot)$. Situace je zcela analogická se situací u slabě stacionárních posloupností.

Věta 36. Slabě stacionární náhodný proces lze vyjádřit ve tvaru klouzavých součtů, tj. ve tvaru následujícího stochastického integrálu

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda - t)\, \mathrm{d}z(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\mu)\, \mathrm{d}z(t+\mu),$$

kde $\mathsf{E}\{|\mathrm{d}z(\lambda)|^2\} = \mathrm{d}\lambda$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |a(\lambda)|^2\, \mathrm{d}\lambda < +\infty$, právě tehdy, když má spektrální hustotu.

Důkaz. Výše jsme již ukázali, že proces vyjádřitelný ve formě klouzavých součtů musí mít spektrální hustotu. Nyní naopak, nechť proces $\{X(t),\, t \in I\!R\}$ má spektrální hustotu $f(\cdot)$. Pak zcela analogicky, jako v případě diskrétního času, lze zkonstruovat proces s ortogonálními přírůstky $\{y(t),\, t \in I\!R\}$, že

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}y(\lambda), \tag{5}$$

kde $|\varphi(\lambda)|^2 = f(\lambda)$ a $\mathsf{E}\{|\mathrm{d}y(\lambda)|^2\} = \mathrm{d}\lambda$.

Obecně hodnoty procesu $\{y(t),\, t \in I\!R\}$ nemusí patřit do prostoru $H(X)$ generovaného hodnotami procesu $\{X(t),\, t \in I\!R\}$. Pokud by ovšem spektrální hustota $f(\lambda)$ byla kladná skoro všude vůči Lebesgueqově míře na $I\!R$, pak lze proces $\{y(t),\, t \in I\!R\}$ definovat explicitně analogicky jako u diskrétního času

$$y(\lambda) - y(\mu) = \int_{\mu}^{\lambda} \frac{1}{\varphi(\lambda)}\, \mathrm{d}z(\lambda),$$

kde $z(\cdot)$ je ortogonální náhodná míra ze spektrální reprezentace procesu $\{X(t),\, t \in I\!R\}$. Vyjděme ze vztahu (5), a protože $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\lambda)|^2\, \mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda < \infty$, lze $\varphi(\cdot)$ vyjádřit pomocí Fourierovy transformace

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\lambda} \varphi^*(s)\, \mathrm{d}s.$$

Dále zadefinujme Fourierovu transformaci náhodného procesu $\{y(t),\, t \in I\!R\}$ pomocí vztahů

$$\begin{aligned} y(\lambda) - y(\mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda s} - e^{i\mu s}}{is}\, \mathrm{d}y^*(s) \\ y^*(t) - y^*(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it\lambda} - e^{-is\lambda}}{-i\lambda}\, \mathrm{d}y(\lambda), \end{aligned}$$

což je opět proces s ortogonálními přírůstky, a proto oba výše uvedené integrály mají smysl. Použitím Parsevalovy rovnosti dojdeme k vyjádření

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}y(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(\mu)\, \mathrm{d}y^*(t+\mu) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(\mu - t)\, \mathrm{d}y^*(\mu). \end{aligned}$$

tím jsme ukázali, že proces s absolutně spojitou spektrální funkcí je vyjádřitelný pomocí klouzavých součtů. □

Věta 37. Aby centrovaný slabě stacionární proces $\{\xi(t),\, t \in I\!R\}$ se dal vyjádřit ve tvaru jednostranných klouzavých součtů, tj.

$$\xi(t) = \int_0^{\infty} a(\lambda)\, \mathrm{d}z(t - \lambda),$$

kde
$$\int_0^\infty |a(t)|^2\,\mathrm{d}t < +\infty, \quad \mathsf{E}\{\mathrm{d}z(\lambda)\} = 0, \quad \mathsf{E}\{|\mathrm{d}z(\lambda)|^2\} = \mathrm{d}\lambda,$$
s tím, že $H(\xi) = H(z)$, je nutné a stačí, aby jeho spektrální hustota $f(\cdot)$ byla faktorizovatelná, čili vyjádřitelná ve tvaru
$$f(\lambda) = |h(i\lambda)|^2,$$
kde
$$h(i\lambda) = \int_0^\infty b(s)\,e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s, \quad \int_0^\infty |b(s)|^2\,\mathrm{d}s \ < +\infty.$$

Důkaz. (Nutnost) Když proces $\{\xi(t),\, t \in I\!R\}$ se dá vyjádřit pomocí jednostranných klouzavých součtů od ortogonální náhodné míry $\mathrm{d}z(\cdot)$, pak položme
$$h(i\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a(s)\,e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s.$$
Díky Parsevalově rovnosti platí, že
$$\begin{aligned} R(t) &= \mathsf{E}\{\xi(s+t)\,\overline{\xi(s)}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a(s+t-u)\,\overline{a(s-u)}\,\mathrm{d}u \ = \\ &= \int_0^\infty a(t+u)\,\overline{a(u)}\,\mathrm{d}u \ = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}|h(i\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega, \end{aligned}$$
neboť lze položit $a(t) = 0$ pro $t < 0$, a tudíž existuje spektrální hustota $f(\lambda) = |h(i\lambda)|^2$ a je faktorizovatelná.

(Postačitelnost) Nechť proces $\{\xi(t),\, t \in I\!R\}$ má spektrální rozklad s faktorizovatelnou spektrální hustotou
$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\mathrm{d}z(\lambda),$$
a uvažujme náhodnou množinovou funkci
$$\Phi(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_A(\omega)}{h(i\omega)}\,\mathrm{d}z(\omega),$$
kde $\psi_A(\omega)$ je indikátor borelovské podmnožiny $A \subset I\!R$. Jestliže F je spektrální míra procesu $\{\xi(t),\, t \in I\!R\}$, tj.
$$\mathsf{E}\{|\mathrm{d}z(\lambda)|^2\} = \mathrm{d}F(\lambda),$$
pak samozřejmě
$$F(A) = \int_A |h(i\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$
Snadno lze dokázat, že Φ je ortogonální náhodná míra na borelovských podmnožinách v $I\!R$, protože
$$\mathsf{E}\{\Phi(A)\,\overline{\Phi(B)}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{A\cap B}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \lambda(A \cap B),$$

kde λ značí Lebesgueovu míru v $I\!R$. Nyní definujme další náhodnou míru určenou procesem s ortogonálními přírůstky

$$v(t_2) - v(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it_2\omega} - e^{it_1\omega}}{i\omega} \, \mathrm{d}\Phi(\omega),$$

přičemž současně lze psát

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} h(i\lambda) \, \mathrm{d}\Phi(\lambda), \quad \mathrm{d}\Phi(\lambda) = \frac{1}{h(i\lambda)} \, \mathrm{d}z(\lambda),$$

jak plyne ihned z definice náhodné míry Φ.

Pro každou funkci h, která je určena vztahem

$$h(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau) \, e^{-i\omega\tau} \, \mathrm{d}\tau,$$

kde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(\tau)|^2 \, \mathrm{d}\tau < \infty$$

platí vztah

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(i\omega) \, \mathrm{d}\Phi(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau) \, \mathrm{d}v(\tau).$$

Tento vztah je založen na izomorfismu prvků z prostorů $L_2(\Phi)$ a $L_2(v)$ s Hilbertovým prostorem $L_2(\lambda)$ na $I\!R$ a na tom faktu, že Fourierova transformace zachovává skalární součin v $L_2(\lambda)$. Stačí tedy tento vztah dokázat pro jednoduché funkce $a(t) = \sum_k c_k \, \psi_{\Delta_k}(t)$, kde Δ_k jsou disjunktní intervaly (a_k, b_k). Pak totiž

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau) \, \mathrm{d}v(\tau) &= \sum_k c_k \, v(\Delta_k) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k c_k \frac{e^{-i\omega b_k} - e^{-i\omega a_k}}{-\sqrt{2\pi} \, i\omega} \, \mathrm{d}\Phi(\omega) = \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} h(i\omega) \, \mathrm{d}\Phi(\omega).
\end{aligned}$$

Nyní chceme vyjádřit pomocí funkce $a(\cdot)$ integrál tvaru

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\omega} h(i\omega) \, \mathrm{d}\Phi(\omega),$$

což je též vyjádření původního procesu $\{\xi(t), \, t \in I\!R\}$ pomocí jiné ortogonální náhodné míry Φ.

Snadno je vidět, že

$$e^{it\omega} h(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i(t-b)\omega} - e^{i(t-a)\omega}}{-i\omega}$$

v nejjednodušším případě funkce $a(\cdot)$, když

$$a(\tau) = \psi_\Delta(\tau), \quad \Delta = (a, b) \quad \text{(indikátor množiny } \Delta\text{)}.$$

Odtud ihned plyne, že v tomto případě je

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\omega} h(i\omega)\,\mathrm{d}\Phi(\omega) &= v(t-a) - v(t-b) = \\ &= \int_{t-b}^{t-a} \mathrm{d}v(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\Delta(u)\,\mathrm{d}v(t-u) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau)\,\mathrm{d}v(t-\tau).\end{aligned}$$

Díky spojitosti skalárního součinu a izomorfismu prostorů $L_2(\Phi)$ a $L_2(v)$ s $L_2(\lambda)$ na reálné přímce pak získáváme, že

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau)\,\mathrm{d}v(t-\tau).$$

Protože předpokládáme, že

$$h(i\omega) = \int_0^\infty b(\tau)\, e^{-i\tau\omega}\,\mathrm{d}\tau,$$

pak nutně při volbě $a(\cdot) = b(\cdot)$ máme, že

$$\xi(t) = \int_0^\infty b(\tau)\,\mathrm{d}v(t-\tau),$$

kde

$$\int_0^\infty |b(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau < +\infty.$$

□

Poznámka. Předchozí věta plně charakterizuje třídu slabě stacionárních náhodných procesů, vyjádřitelných ve tvaru $\xi(t) = \int_0^\infty a(\lambda)\,\mathrm{d}z(t-\lambda)$, kde $\mathsf{E}\{\mathrm{d}z(\lambda)\} = 0,\ \mathsf{E}\{|\mathrm{d}z(\lambda)|^2\} = \mathrm{d}\lambda$. Odpovídající spektrální hustoty, které v těchto případech existují, jsou tzv. faktorizovatelné hustoty. Jinak se též o těchto procesech říká, že je lze fyzikálně realizovat filtrací bílého šumu, neboť hodnoty $\xi(t)$ a $\mathrm{d}z(t+s)$ pro $s > 0$ jsou ortogonální a tedy proces $\xi(t)$ je vytvořen pouze na základě přírůstků ortogonální náhodné míry $\mathrm{d}z(\lambda),\ \lambda \le t$.

Následující věta plně charakterizuje třídu faktorizovatelných spektrálních hustot.

Věta 38. Pro to, aby nezáporná integrovatelná funkce $f(\cdot)$ definovaná na $(-\infty, +\infty)$ byla faktorizovatelná, je nutné a stačí, aby

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda > -\infty.$$

Důkaz. Matematický aparát použitý v důkazu této věty zasahuje nad rámec těchto skript, protože silně využívá vlastností funkcí ze třídy H_2^π a známé Paley–Wienerovy věty. Čtenář může najít důkaz např. v monografii [3] nebo [8]. □

6 Ergodické věty a zákon velkých čísel

Nechť $\{\xi(t),\ t \in (-\infty, +\infty)$, resp. $t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární proces či posloupnost se spektrálním rozkladem symbolicky vyjádřeným jako

$$\xi(t) = \int e^{it\lambda}\,\mathrm{d}z(\lambda).$$

Budeme studovat asymptotické chování průměrů posloupnosti, tj.

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(i), \quad \text{resp.} \quad S_T = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{u procesů.}$$

Aby byla zaručena existence výše uvažovaného integrálu, předpokládejme spojitost příslušné kovarianční funkce. Pomocí spektrálního rozkladu ihned získáváme

$$S_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{in\lambda}}{n(1 - e^{i\lambda})}\,\mathrm{d}z(\lambda),$$

analogicky

$$S_T = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda T} - 1}{i\lambda T}\,\mathrm{d}z(\lambda).$$

Studujme chování při $T \to \infty$

$$\mathsf{E}\left\{\left|\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,\mathrm{d}t - z(\{0\})\right|^2\right\} = \int_{\lambda\neq 0}\left|\frac{e^{i\lambda T} - 1}{i\lambda T}\right|^2 \mathrm{d}F(\lambda) =$$
$$= \int_{\lambda\neq 0} \frac{4\sin^2\frac{\lambda T}{2}}{\lambda^2\,T^2}\,\mathrm{d}F(\lambda) = \int_{0<|\lambda|\leq\varepsilon} \frac{4\sin^2\frac{\lambda T}{2}}{\lambda^2\,T^2} + \int_{|\lambda|>\varepsilon} \frac{4\sin^2\frac{\lambda T}{2}}{\lambda^2\,T^2}.$$

Protože

$$\int_{|\lambda|>\varepsilon} \frac{4\sin^2\frac{\lambda T}{2}}{\lambda^2\,T^2}\,\mathrm{d}F(\lambda) \leq \frac{\text{konst.}}{\varepsilon^2 T^2} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

a rovněž

$$\int_{0<|\lambda|\leq\varepsilon} \frac{4\sin^2\frac{\lambda T}{2}}{\lambda^2 T^2}\,\mathrm{d}F(\lambda) \leq \int_{0<|\lambda|\leq\varepsilon} \text{konst.}\ \mathrm{d}F(\lambda) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

protože 0 je vyloučena z oboru integrace (skok funkce $F(\cdot)$ v nule, pokud existuje, odpovídá totiž rozptylu $\mathsf{E}\{|z(\{0\})|^2\}$). Zcela analogicky postupujeme v případě diskrétního času. Tím jsme dokázali následující větu.

Věta 39. Pro aritmetické průměry S_n, resp. S_T, jak v případě diskrétního tak spojitého času platí, že

$$S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z(\{0\}), \quad \text{resp.} \quad S_T \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} z(\{0\})$$

dle kvadratického středu při $n \to \infty$, resp. $T \to \infty$.

Definice 13. Slabě stacionární posloupnost či proces nazýváme ergodickou či ergodickým dle kvadratického středu, když

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi(t) \to \mathsf{E}\{\xi_0\}, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{T}\int_0^T \xi(u)\,\mathrm{d}u \to \mathsf{E}\{\xi_0\}$$

dle kvadratického středu při $n \to \infty$, resp. $T \to \infty$.

Protože každá slabě stacionární posloupnost či proces se dají vyjádřit jako součet

$$\xi(t) = \mathsf{E}\{\xi_t\} + \xi(t) - \mathsf{E}\{\xi_t\},$$

kde $\mathsf{E}\{\xi(t)\} = m$, pak $\{\xi(t)\}$ bude ergodický dle kvadratického středu právě tehdy, když bude platit

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\xi(j) - m) \to 0,$$

resp.

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\xi(u) - m)\,\mathrm{d}u \;\to 0.$$

Stačí se tedy zabývat pouze procesy či posloupnostmi, které jsou centrované. Protože jsme pro ně již ukázali, že

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi(j) \to z(\{0\})$$

resp.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(u)\,\mathrm{d}u \;\to z(\{0\})$$

dle kvadratického středu, tak tyto budou ergodické dle kvadratického středu právě tehdy, když $z(\{0\}) = 0$ skoro jistě, což lze vyjádřit pomocí chování spektrální funkce $F(\cdot)$ v nule, protože $\mathsf{E}\{|z(\{0\})|^2\} = F(0+) - F(0)$.

Dokázali jsme tedy následující větu.

Věta 40. Slabě stacionární posloupnost či proces jsou ergodické dle kvadratického středu právě tehdy, když jejich spektrální funkce je spojitá v 0.

O tom, zdali jsou slabě stacionární posloupnost či proces ergodické, se lze též přesvědčit z chování odpovídající kovarianční funkce.

Věta 41. Slabě stacionární centrovaná náhodná posloupnost či proces jsou ergodické dle kvadratického středu právě tehdy, když

$$\lim_{n-m\to\infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{j=m}^{n} R(j) = 0$$

resp.

$$\lim_{t-s\to\infty} \frac{1}{t-s} \int_s^t R(u)\,\mathrm{d}u \ = 0,$$

když kovarianční funkce $R(\cdot)$ je spojitá funkce.

Důkaz. Plyne přímo ze spektrálního vyjádření sumy $\frac{1}{n-m+1}\sum_{j=m}^{n} R(j)$, resp. $\frac{1}{t-s}\int_s^t R(u)\,\mathrm{d}u$ pomocí odpovídající spektrální funkce. □

Protože konvergence dle kvadratického středu implikuje konvergenci dle pravděpodobnosti, ihned je vidět platnost zákona velkých čísel, a to slabého, neboť platí pro slabě stacionární posloupnosti či procesy

$$\mathsf{P}\{|S_T - m| > \varepsilon\} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pokud splňují podmínku ergodičnosti.

Větu o asymptotickém chování aritmetických průměrů ze slabě stacionární posloupnosti či procesu lze zobecnit následujícím způsobem, který se dokazuje zcela analogicky jako Věta 39.

Když $\{\xi(t),\, t\in T\}$ je slabě stacionární posloupnost či proces, pak veličiny $\{\eta(t),\, t\in T\}$, kde

$$\eta(t) = e^{i\lambda_0 t}\xi(t), \quad t\in T$$

tvoří rovněž slabě stacionární posloupnost či proces a platí, že dle kvadratického středu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \eta(j) = z(\{\lambda_0\}),$$

resp.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u \ = z(\{\lambda_0\}),$$

když v případě spojitého času je odpovídající kovarianční funkce spojitá.

Nechť nyní $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ je takový interval, kde $z(\{\lambda_1\}) = z(\{\lambda_2\}) = 0$ s.j. a definujme

$$\begin{aligned} &= 1 && \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \\ \varphi_\Delta(\lambda) &= \frac{1}{2} && \lambda = \lambda_1,\ \lambda = \lambda_2, \\ &= 0 && \text{jinde.} \end{aligned}$$

V případě diskrétního času ($T = \mathbb{Z}$) samozřejmě máme na mysli, že $-\pi \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \pi$. Když funkci $\varphi_\Delta(\cdot)$ rozložíme do Fourierovy řady, pak lze psát

$$\varphi_\Delta(\lambda) = \frac{1}{2\pi}(\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{-i\lambda_2 k} - e^{-i\lambda_1 k}}{-ik} \, e^{i\lambda k},$$

která konverguje dle kvadratického středu vzhledem k míře generované příslušnou spektrální funkcí $F(\cdot)$ od $\{\xi(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ na $\langle -\pi, \pi \rangle$. Z tohoto snadno plyne, že

$$\begin{aligned} z(\Delta) &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_\Delta(\lambda) \, \mathrm{d}z(\lambda) = \\ &= \lim_{K \to \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi}(\lambda_2 - \lambda_1) \, \xi(0) + \frac{1}{2\pi} \sum_{0 < |k| \leq K} \frac{e^{-i\lambda_2 k} - e^{-i\lambda_1 k}}{-ik} \, \xi(j) \right\}, \end{aligned}$$

kde limita se opět míní dle kvadratického středu. Zcela obdobně je možno dokázat i v případě spojitého času, tj. pro $t \in \mathbb{R}$, že

$$z(\Delta) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-i\lambda_2 u} - e^{-i\lambda_1 u}}{-iu} \, \xi(u) \, \mathrm{d}u$$

pro každý interval $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ takový, že $z(\{\lambda_1\}) = z(\{\lambda_2\}) = 0$ s.j. Tím je dokázáno, že s pomocí hodnot procesu $\{\xi(t),\, t \in T\}$ lze získat hodnoty odpovídající ortogonální náhodné míry vystupující v jeho spektrálním rozkladu.

Nechť $\{\xi(t),\, t \in (-\infty, +\infty)\}$ je slabě stacionární centrovaný proces mající ohraničené spektrum, neboli

$$\xi(t) = \int_{-\varphi}^{\varphi} e^{it\lambda} \, \mathrm{d}z(\lambda),$$

kde $\varphi < +\infty$. Každý takový náhodný proces lze vyjádřit ve tvaru nekonečné řady

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varphi} \frac{\sin \varphi \left(t - \frac{\pi}{\varphi} k \right)}{t - \frac{\pi}{\varphi} k} \, \xi\left(\frac{\pi}{\varphi} k \right),$$

kde řada konverguje dle kvadratického středu. Tato formulace vyplývá z rozkladu funkce $e^{i\lambda t}$ na intervalu $(-\varphi, \varphi)$; platí totiž

$$e^{i\lambda t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varphi} \frac{\sin \varphi \left(t - \frac{\pi}{\varphi} k \right)}{t - \frac{\pi}{\varphi} k} \, e^{i \frac{\pi}{\varphi} k \lambda}.$$

7 Predikce slabě stacionárních posloupností a procesů

Předpokládejme, že slabě stacionární proces či posloupnost jsou pozorovány až do času t, tj. jsou známa pozorování $\xi(s),\ s \leq t$ a chceme na základě jejich znalosti co nejlépe odhadnout příští hodnotu $\xi(t+\tau)$, kde $\tau > 0$. Jedná se tedy o to, zkonstruovat takovou náhodnou veličinu $\hat{\xi}(t,\tau)$, která patří do podprostoru $H_\xi(t)$, který je generován náhodnými veličinami $\xi(s),\ s \leq t$ tak, aby co nejlépe odhadovala hodnotu $\xi(t+\tau)$. Míra chyby je měřena pomocí střední kvadratické odchylky, tedy

$$\sigma^2(\tau) = \mathsf{E}\left\{|\xi(t+\tau) - \hat{\xi}(t,\tau)|^2\right\};$$

chceme, aby tato chyba byla minimální, což lze dosáhnout ortogonální projekcí veličiny $\xi(t+\tau)$ do $H_\xi(t)$. Optimální chyba predikce je pak dána výrazem

$$\sigma^2(\tau) = \min_{k \in H_\xi(t)} \mathsf{E}\{|\xi(t+\tau) - k|^2\}.$$

Díky stacionaritě výchozího procesu či posloupnosti lze tvrdit, že sama optimální predikce $\{\hat{\xi}(t,\tau),\ t \in \mathbb{R}$ či $\mathbb{Z}\}$ je rovněž slabě stacionární proces či posloupnost v parametru t a jsou získány lineárními operacemi nad původním procesem $\xi(t)$, a tedy existuje spektrální charakteristika optimální predikce ve tvaru

$$\hat{\xi}(t,\tau) = \int e^{it\lambda}\, \hat{\varphi}(\lambda,\tau)\, \mathrm{d}z(\lambda).$$

Jedním z problémů predikce je najít tuto spektrální charakteristiku.

7.1 Regulární a singulární slabě stacionární posloupnosti

Zaveďme následující označení: H_ξ nechť je Hilbertův prostor generovaný všemi hodnotami posloupnosti či procesu, tj. uzávěr nad lineárními kombinacemi tvaru

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_{t_i},$$

kde λ_i jsou obecně komplexní, $t_i \in T,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Dále označme $H_\xi(t)$ podprostor generovaný veličinami $\xi_s,\ s \leq t$. Zřejmě H_ξ je pak uzávěr nad $\bigcup_{t \in T} H_\xi(t)$. Dále označme $H_\xi(-\infty) = \bigcap_{t \in T} H_\xi(t)$. Budeme uvažovat výhradně případy $T = \mathbb{Z},\ T = \mathbb{R}$.

Definice 14. Náhodná posloupnost se nazývá (lineárně) singulární, když

$$H_\xi(-\infty) = H_\xi.$$

Jestliže $H_\xi(-\infty) = \{0\}$ (nulový prostor), pak náhodná posloupnost se nazývá (lineárně) regulární.

Věta 42. Náhodná posloupnost je lineárně singulární právě tehdy, když její lineární predikce je bezchybná, tj. středně kvadratická chyba predikce je nulová.

Důkaz. Je-li $\{\xi_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ lineárně singulární, pak $H_\xi(t) = H_\xi(t+s)$ pro každá t, s a tedy $\sigma^2(\tau) = 0$. Opačně, když $\sigma^2(\tau) = 0$, musí $\xi(t+\tau)$ patřit do $H_\xi(t)$ a tedy

$$H_\xi(t) = H_\xi.$$

□

Definice 15. Jestliže $\sigma^2(1)$, tedy středně kvadratická chyba predikce na jeden krok vpřed v případě slabě stacionární posloupnosti je kladná, říkáme, že tato náhodná posloupnost není deterministická.

Věta 43. Každá slabě stacionární posloupnost se dá rozložit do součtu dvou vzájemně nekorelovaných náhodných posloupností

$$\xi(t) = \xi_s(t) + \eta(t),$$

kde $\xi_s(t)$ je singulární složka a $\eta(t)$ je regulární. Tento rozklad je jednoznačný.

Důkaz. Nechť U je operátor posunutí $U\,\xi(t) = \xi(t+1)$ v prostoru H_ξ. Díky stacionaritě, U je unitární operátor a evidentně

$$U\,\eta = \eta$$

pro každé $\eta \in H_\xi(-\infty)$, neboli $U\,H_\xi(-\infty) = H_\xi(-\infty)$. Označme $H_\xi^R = H_\xi \ominus H_\xi(-\infty)$. Rovněž platí, že $U\,H_\xi^R = H_\xi^R$. Nechť $\xi_s(0)$ je projekce $\xi(0)$ do $H_\xi(-\infty)$, obdobně $\eta(0)$ projekce $\xi(0)$ do H_ξ^R. Definujme $\xi_s(t) = U^t\,\xi_s(0)$, $\eta(t) = U^t\,\eta(0)$ pro $t \in \mathbb{Z}$. Díky ortogonalitě podprostorů H_ξ^R a $H_\xi(-\infty)$ jsou obě posloupnosti nekorelované mezi sebou a díky vlastnostem operátoru U jsou stacionární. Zřejmě rovněž

$$\xi(t) = \xi_s(t) + \eta(t),$$

kde $\xi_s(t) \in H_\xi(-\infty)$, $\eta(t) \in H_\xi^R$ pro každé t. Pak platí $H_\xi(t) \cap H_\xi(-\infty) \subset H_{\xi_s}(t) \Rightarrow H_\xi(-\infty) \subset H_{\xi_s}(-\infty)$. Naopak, protože $\xi_s(t) \in H_\xi(-\infty) \Rightarrow H_{\xi_s}(t) \subset H_\xi(-\infty)$. Tím máme, že pro každé t $H_{\xi_s}(t) = H_\xi(-\infty) = H_{\xi_s}(-\infty)$.

Tedy posloupnost $\{\xi_s(t)\}$ je singulární. Protože $\eta(t) = \xi(t) - \xi_s(t)$, pak $\eta(t) \in H_\xi(t)$ a tedy $H_\eta(-\infty) \bigcap_t H_\eta(t) \subset H_\xi(-\infty)$. Naopak dle konstrukce posloupnosti $\{\eta(t)\} \subset H_\xi(t)$, tedy tedy $\bigcap_t H_\eta(t) \subset \bigcap_t H_\xi(t) = H_\xi(-\infty)$. Z druhé strany je ale $H_\eta(t) \perp H_\xi(-\infty)$, a tudíž $H_\eta(-\infty) = \{0\}$. Tím jsme dokázali, že $\{\eta(t)\}$ je regulární. Jednoznačnost rozkladu plyne z toho, že projekce $\eta(t)$ do $H_\xi(-\infty)$ je 0 a $\xi_s(t)$ je projekce $\xi(t)$ do $H_\xi(-\infty)$. $\square$

Věta 44. Každá (lineárně) regulární slabě stacionární posloupnost s nulovou střední hodnotou může být vyjádřena ve formě jednostranné lineární posloupnosti

$$\xi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\, z(t-j), \quad t \in \mathbb{Z}$$

kde $\{z(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ je diskrétní bílý šum, $H_z(t) = H_\xi(t)$, pro každé $t \in \mathbb{Z}$, $\sum_{j=0}^{\infty} |a(j)|^2 < +\infty$.

Poznámka. Tomuto rozkladu regulární posloupnosti se říká Woldův rozklad. Posloupnost $\{z(n),\, n \in \mathbb{Z}\}$ se nazývá též inovační posloupnost.

Důkaz. Označme $H_\xi(t) = H_\xi(t-1) \oplus G(t)$, tento podprostor je jednorozměrný; kdyby $H_\xi(t) = H_\xi(t-1)$, pak by $\{\xi(t)\}$ nemohla být regulární. Vybereme v $G(0)$ jednotkový vektor $z(0)$ a definujme pro každé $t \in \mathbb{Z}$

$$z(t) = U^t\, z(0),$$

kde U je posunutí. Je jasné, že $H_\xi(t) = H_z(t)$ a tedy $\{z(t)\}$ je rovněž regulární posloupnost a je ortogonální, tedy diskrétní bílý šum. Posloupnost $\{z(t)\}$ tvoří bázi v H_ξ, a když rozložíme $\xi(0)$ v této bázi, máme

$$\xi(0) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\, z(-j),$$

přičemž

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a(j)|^2 = \mathsf{E}\{|\xi(0)|^2\} < \infty.$$

Aplikací operátoru U^t na $\xi(0)$ získáváme ihned rozklad

$$\xi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\, z(t-j).$$

$\square$

Věta 45. Pro to, aby náhodná slabě stacionární posloupnost nebyla singulární, je nutné a stačí, aby

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda > -\infty, \tag{6}$$

kde $f(\lambda)$ je absolutně spojitá část spektrální míry $F(\lambda)$.

Důkaz. Při dokazování toto věty se lze odkázat na větu 35, kde je vyslovena stejná podmínka pro faktorizaci spektrální hustoty, což je nutná a postačující podmínka pro vyjádření posloupnosti ve formě jednostranné lineární posloupnosti, která je samozřejmě posloupností regulární a naopak. □

Důsledek. Náhodná slabě stacionární posloupnost je regulární právě tehdy, když má skoro všude vůči Lebesgueově míře kladnou spektrální hustotu $f(\cdot)$, která splňuje (6).

Nyní se již obrátíme k problematice predikce slabě stacionární náhodné posloupnosti. Díky rozkladu na regulární a singulární část je zřejmé, že stačí určit predikci regulární části, protože singulární se predikuje bezchybně a je s regulární částí ortogonální. Mějme tedy slabě stacionární řadu $\{\xi(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ rozloženou na obě části

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \eta(t) + \xi_s(t), \quad \text{kde} \\ \eta(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\, z(t-j). \end{aligned}$$

Protože $H_\eta(t) = H_z(t)$ dle Věty 44, pak ortogonální projekce $\eta(t+\tau)$ na $H_\eta(t)$ je tatáž jako na $H_z(t)$ a díky Woldovu rozkladu máme, že

$$\hat{\eta}(t,\tau) = \sum_{j=\tau}^{\infty} a(j)\, z(t+\tau-j),$$

přičemž středně kvadratická chyba predikce

$$\sigma^2(\tau) = \mathsf{E}\left\{|\eta(t+\tau) - \hat{\eta}(t,\tau)|^2\right\} = \sum_{j=0}^{\tau-1} |a(j)|^2.$$

Nyní vyjádříme optimální predikci $\hat{\eta}(t,\tau)$ pomocí spektrálního rozkladu pro $\{\eta(t)\}$. Je zřejmé, že $z(0)$ je prvkem z prostoru H_η, a tedy $z(0)$ lze vyjádřit lineární operací nad $\{\eta(t)\}$, tj.

$$z(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}v(\lambda),$$

kde $v(\lambda)$ je ortogonální náhodná míra na $\langle -\pi, \pi\rangle$ taková, že

$$\mathsf{E}\{\mathrm{d}v(\lambda)\} = 0, \quad \mathsf{E}\{|\mathrm{d}v(\lambda)|^2\} = |g(e^{i\lambda})|^2\, \mathrm{d}\lambda,$$

kde $g(e^{i\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}(n)\, e^{in\lambda}$, neboť $\{\eta(t)\}$ je regulární posloupnost. Pak

$$z(t) = U^t\, z(0) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\, \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}v(\lambda).$$

Dále víme, že

$$\eta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\, z(t-j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \varphi(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\, e^{-ij\lambda}\, \mathrm{d}v(\lambda).$$

Protože

$$\eta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \, \mathrm{d}v(\lambda),$$

srovnáním obou stran máme, že

$$\varphi(\lambda) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a(j) \, e^{-ij\lambda} \right)^{-1} = \left(\sqrt{2\pi \, g(e^{i\lambda})} \right)^{-1}.$$

Pak tedy

$$\hat{\eta}(t,\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=\tau}^{\infty} a(j) \, e^{-ij\lambda} \, \varphi(\lambda) \, e^{it\lambda} \, \mathrm{d}v(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \left[1 - \frac{g_\tau(e^{i\lambda})}{g(e^{i\lambda})} \right] \mathrm{d}v(\lambda),$$

kde

$$g_\tau(e^{i\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\tau-1} \overline{a(j)} \, e^{ij\lambda}.$$

Lze dokázat, že pro $|z| < 1$ je $g(z) \neq 0$.

Věta 46. Nechť slabě stacionární posloupnost $\{\xi(t)\}$ je vyjádřena jako součet své regulární a singulární části, tj.

$$\xi(t) = \eta(t) + \xi_s(t).$$

Nechť $F(\lambda)$, $F_R(\lambda)$, $F_S(\lambda)$ jsou spektrální funkce od $\xi(t)$, $\eta(t)$ a $\xi_s(t)$. Pak platí, že

$$F(\lambda) = F_R(\lambda) + F_S(\lambda)$$

je rozložení spektrální funkce $F(\cdot)$ na absolutně spojitou část $F_R(\lambda)$ a singulární část $F_S(\lambda)$ vůči Lebesgueově míře na $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Důkaz. Nechť $\{z(t)\}$ je inovační posloupnost odvozená od regulární části $\{\eta(t)\}$. Zřejmě

$$z(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \, \mathrm{d}u(\lambda),$$

kde $\{u(\lambda)\}$ je ortogonální náhodná míra se spektrální hustotou $\frac{1}{2\pi}$ definovanou na $\langle -\pi, \pi \rangle$. Pak tedy

$$\eta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \sqrt{2\pi \, g(e^{i\lambda})} \, \mathrm{d}u(\lambda)$$

díly Woldově rozkladu.

Nechť singulární část má spektrální rozklad

$$\xi_s(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \, \mathrm{d}v_s(\lambda).$$

Pak

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \left(\sqrt{2\pi \, g(e^{i\lambda})} \, \mathrm{d}u(\lambda) + \mathrm{d}v_s(\lambda) \right).$$

Tudíž pro jakoukoliv funkci $f(\lambda) \in L_2(F)$, kde F je spektrální míra posloupnosti $\{\xi(t)\}$, platí, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\,\mathrm{d}w(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\left(\sqrt{2\pi\, g(e^{i\lambda})}\,\mathrm{d}u(\lambda) + \mathrm{d}v_s(\lambda)\right),$$

kde $w(\lambda)$ je ortogonální náhodná míra na $\langle -\pi, \pi\rangle$ určující posloupnost $\{\xi(t)\}$, tj.

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\,\mathrm{d}w(\lambda).$$

Na druhou stranu ale víme, že $\xi_s(0) \in H_\xi$, tudíž

$$\xi_s(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(\lambda)\,\mathrm{d}w(\lambda)$$

a tedy

$$\xi_s(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\,\varphi_s(\lambda)\,\mathrm{d}w(\lambda).$$

Pak tedy dohromady lze vyjádřit

$$\xi_s(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\,\varphi_s(\lambda)\left[\sqrt{2\pi\, g(e^{i\lambda})}\,\mathrm{d}u(\lambda) + \mathrm{d}v_s(\lambda)\right],$$

což se spektrálním vyjádřením singulární části $\{\xi_s(t)\}$ dává

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}(1 - \varphi_s(\lambda))\,\mathrm{d}v_s(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\sqrt{2\pi\, g(e^{i\lambda})}\,\mathrm{d}u(\lambda).$$

Protože $\{\xi_s(t)\}$ a $\{\eta(t)\}$ jsou navzájem ortogonální, pak mohou současně patřit do obou podprostorů jedině tehdy, když jsou obě strany nulovými prvky, tedy

$$\begin{aligned} \varphi_s(\lambda) &= 1 \qquad (\text{s. vš. } F_S(\cdot)) \\ \varphi_s(\lambda)\sqrt{2\pi\, g(e^{i\lambda})} &= 0 \qquad (\text{s. vš. [Leb.]}), \end{aligned}$$

kde $F_S(\cdot)$ je spektrální míra singulární části. Protože $g(e^{i\lambda}) \neq 0$ vůči Lebesgueově míře, pak musí být

$$\varphi_s(\lambda) = 0 \quad (\text{s. vš. [Leb.]})$$

Označme $S \subset \langle -\pi, \pi\rangle$ takovou podmnožinu, že na ní $\varphi_s(\lambda) = 1$. Pak máme, že Lebesgueova míra množiny S je 0 a spektrální míru $F_S(\cdot)$ lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} F_S(A) &= \int_A |\varphi_s(\lambda)|^2\,\mathrm{d}F(\lambda) = F(A \cap S) \\ F_R(A) &= \int_A 2\pi |g(e^{i\lambda})|^2\,\mathrm{d}F(\lambda). \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána. □

Věta 47. Nechť $\{\xi(t)\}$ je slabě stacionární náhodná posloupnost která není singulární, nechť $f(\lambda)$ je absolutně spojitá komponenta její spektrální míry. Pak středně kvadratická chyba predikce při počtu τ kroků vpřed je rovna výrazu

$$\sigma^2(\tau) = 2\pi\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ln f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda} \sum_{n=0}^{\tau-1} |c_n|^2,$$

kde koeficienty $\{c_n\}$ jsou definovány pomocí rozvoje

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \ln f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n,$$

speciálně pro $\tau = 1$

$$\sigma^2(1) = 2\pi\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}.$$

Důkaz. Důkaz věty opět vyžaduje matematický aparát, který je nad rámec těchto skript, a proto odkazujeme čtenáře např. na monografii [3]. □

7.2 Řešení otázky predikce pro slabě stacionární posloupnosti

Nechť $X = \{X(j),\, j \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární centrovaná náhodná posloupnost. Nechť t je nějaký časový okamžik, $t \in \mathbb{Z}$ a chceme co nejlépe odhadnout hodnotu posloupnosti $X(t+m)$, $m \geq 0$ na základě znalosti minulosti $X(t-1), X(t-2), \ldots, X(t-n)$, kde teoreticky n může být i $+\infty$.

Nejdříve probereme případ, že minulost je konečná, tj. známe hodnoty veličin $X(t-1)$, $X(t-2), \ldots, X(t-n)$ a nejlepší odhad hodnoty $X(t+m)$ hledáme mezi lineárními kombinacemi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, X(t-i),$$

za předpokladu, že známe kovarianční funkci $\{R(j),\, j \in \mathbb{Z}\}$ sledované slabě stacionární posloupnosti X. Jedná se tedy o to najít obecně komplexní čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (když posloupnost X je komplexní) tak, aby

$$\mathsf{E}\left\{\left|X(t+m) - \sum_{i=1}^{n} a_i\, X(t-i)\right|^2\right\} = \min.$$

Tato vzdálenost bude minimální, když lineární kombinace $\sum_{i=1}^{n} a_i\, X(t-i)$ bude ortogonální projekcí veličiny $X(t+m)$ do podprostoru generovaného veličinami $X(t-1)$, $X(t-2), \ldots, X(t-n)$. Toto vede k rovnicím

$$\mathsf{E}\left\{\left(X(t+m) - \sum_{i=1}^{n} a_i\, X(t-i)\right) \overline{X(t-k)}\right\} = 0$$

pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$. Tyto podmínky lze vyjádřit v řeči kovarianční funkce $R(\cdot)$, a to jako systém lineárních rovnic pro neznámé $a_1, a_2, \ldots, a_n$

(7) $$R(m+k) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, R(k-i), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Řešení této soustavy rovnic nemusí být jediné, protože veličiny $X(t-1)$, $X(t-2), \ldots, X(t-n)$ mohou být lineárně závislé, ale v každém případě je zaručena minimalizace chyby predikce

$$\mathsf{E}\{|X(t+m) - \tilde{X}(t+m)|^2\} = \sigma^2_{m,n}$$

kde $\tilde{X}(t+m) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i \, X(t-i)$ je jedna z optimálních predikcí získaných řešením soustavy (7). Pomocí rovnic (7) lze dokázat, že

$$\sigma^2_{m,n} = R(0) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{a}_k \overline{(\tilde{a}_e)} \, R(k-\ell),$$

kde $\tilde{a}_k, \; k = 1, 2, \ldots, n$ jsou koeficienty optimální lineární kombinace veličin $X(t-1)$, $X(t-2), \ldots, X(t-n)$.

Nyní předpokládejme, že posloupnost X má spektrální hustotu $f(\cdot)$. Předchozí vztahy lze pak převést do jiné řeči pomocí spektrální reprezentace posloupnosti X. Soustavu (7) lze přepsat do tvaru

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(m+k)\,\lambda} - \sum_{\ell=1}^{n} a_k \, e^{i(k-\ell)} \right) f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda = 0$$

pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Toto lze též napsat jako

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} \left(e^{im\lambda} - \Phi_{m,n}(\lambda) \right) f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

kde $\Phi_{m,n}(\lambda) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \, e^{-i\ell\lambda}$ je tzv. spektrální charakteristika lineární predikce.

Není problém dokázat, že

$$\begin{aligned} \sigma^2_{m,n} &= R(0) - \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_{m,n}(\lambda)|^2 \, f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |e^{im\lambda} - \Phi_{m,n}(\lambda)|^2 \, f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

Teoreticky lze uvažovat i ten případ, kdybychom znali celou minulost $\{X(t-n), n = 1, 2, 3, \ldots\}$ pozorované stacionární posloupnosti a nejlepší predikci hodnoty veličiny $X(t+m)$ hledali ve tvaru

$$\tilde{X}(t, m) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, X(t-j),$$

kde nekonečná řada je míněna dle kvadratického středu. Spektrální charakteristika nejlepší predikce $\Phi_{m,\infty}(\lambda) = \Phi_m(\lambda)$ je pak vyjádřitelná ve tvaru

$$\Phi_m(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, e^{-ij\lambda},$$

která konverguje dle kvadratického středu vůči spektrální hustotě $f(\cdot)$. Podmínky optimální predikce jsou pak dány nekonečným systémem rovnic typu

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} \left(e^{im\lambda} - \Phi_m(\lambda) \right) f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda = 0$$

pro $k = 1, 2, 3, \ldots$

Chyba optimální predikce

$$\sigma_m^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| e^{im\lambda} - \Phi_m(\lambda) \right|^2 f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

se dá analogicky jako při konečné minulosti vyjádřit jako

$$\sigma_m^2 = R(0) - \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_m(\lambda)|^2 f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Úloha tedy zní, že hledáme takovou funkci $\Phi_m(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, e^{-ij\lambda}$, aby pro funkci $\psi_m(\lambda) = [e^{im\lambda} - \Phi_m(\lambda)]\, f(\lambda)$ platilo, že je ortogonální k $\{e^{ik\lambda}\}_{k=1}^{\infty}$. Pokud by funkce $\psi_m(\cdot)$ připouštěla Fourierův rozklad do řady

$$\psi_m(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\lambda},$$

pak lze snadno díky výše zmíněné ortogonalitě dokázat, že $c_j = 0$ pro $j = -1, -2, \ldots$, tedy by bylo možno psát

$$\psi_m(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{in\lambda}.$$

Nejdůležitější případ z praxe je ten, když spektrální hustota $f(\cdot)$ je racionální funkcí v proměnné $e^{i\lambda}$, tj.

$$f(\lambda) = f^{(1)}(e^{i\lambda}),$$

kde $f^{(1)}(\cdot)$ je racionální funkce. Zaveďme funkce

$$\Phi_m^{(1)}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, z^{-j} \quad \text{a} \quad \psi^{(1)}(z) = [z^m - \Phi^{(1)}(z)]\, f^{(1)}(z).$$

Je jasné, že $\Phi_m(e^{i\lambda}) = \Phi_m^{(1)}(e^{i\lambda})$ a rovněž

$$\psi_m(e^{i\lambda}) = \psi_m^{(1)}(e^{i\lambda}),$$

tj. tyto dvojice funkcí se shodují na jednotkové kružnici v komplexní rovině. Díky požadavkům na konvergenci řady

$$\Phi_m(e^{i\lambda}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_k\, e^{-ij\lambda}$$

musí tedy mocninná řada $\Phi_m(z)$ konvergovat pro každé $|z| \geq 1$, tedy být analytická vně a na hranici jednotkového kruhu v komplexní rovině. Lze tedy očekávat, že úloha nalezení optimální lineární predikce bude vyřešena, když nalezneme takovou dvojici funkcí $\Phi_m^{(1)}(\cdot)$ a $\psi_m^{(1)}(\cdot)$, kde

a) $\Phi_m^{(1)}(\cdot)$ bude analytická vně a na hranici jednotkového kruhu v komplexní rovině

b) $\Phi_m^{(1)}(\infty) = 0$

c) $\psi_m^{(1)}(z) = (z^m - \Phi_m^{(1)}(z))\, f^{(1)}(z)$ bude analytická uvnitř a na hranici jednotkového kruhu v komplexní rovině.

Koeficienty optimální lineární kombinace v řadě $\tilde{X}(t,m) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, X(t-j)$ se pak získají Fourierovým rozvojem funkce $\Phi_m^{(1)}(\cdot)$. Lze dokázat (blíže viz např. [1]), že podmínky a), b), c) jsou postačujícími podmínkami pro nalezení optimální lineární predikce.

Na příkladech si ukážeme, jak lze pomocí dvojice funkcí $\Phi_m^{(1)}(\cdot)$, $\psi_m^{(1)}(\cdot)$ najít relativně snadno tvar optimální lineární predikce.

Příklad 1. Nechť kovarianční funkce má tvar $R(k) = c\, a^{|k|}$, $k \in \mathbb{Z}$, kde $c > 0$, $|a| < 1$. Pak odpovídající spektrální hustota je

$$f(\lambda) = \frac{c}{2\pi}\, \frac{1-a^2}{(e^{i\lambda}-a)\,(e^{-i\lambda}-a)},$$

tedy

$$\begin{aligned} f^{(1)}(z) &= \frac{c}{2\pi}\, \frac{1-a^2}{(z-a)\,(z^{-1}-a)} = \\ &= \frac{c}{2\pi}\, \frac{z(1-a^2)}{(z-a),(1-az)} = \\ &= c_1\, \frac{z}{(z-a)\,(1-az)}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\psi_m^{(1)}(z) = \frac{z^m - \Phi_m^{(1)}(z)}{(z-a)\,(1-az)} \cdot z,$$

která má v bodě $z = a$ singularitu, která musí být odstraněna vhodnou volbou funkce $\Phi_m^{(1)}(\cdot)$, aby $\psi_m^{(1)}(\cdot)$ byla analytická uvnitř kruhu, tudíž musí rovněž být

$$a^m - \Phi_m^{(1)}(a) = 0.$$

Z toho usuzujeme, že funkce $\Phi_m^{(1)}(z)$ musí být tvaru

$$\Phi_m^{(1)}(z) = \frac{A_m(z)}{z},$$

kde $A_m(\cdot)$ je analytická v celé rovině. Aby $\Phi_m^{(1)}(\infty) = 0$, tak dojdeme ke tvaru $\Phi_m^{(1)}(z) = \frac{a^{m+1}}{z}$, a tedy

$$\tilde{X}(t,m) = a^{m+1}\, X(t-1),$$

protože $\Phi_m(\lambda) = a^{m+1}\, e^{-i\lambda}$.

Příklad 2. Nechť spektrální hustota má tvar

$$f(\lambda) = \frac{c_1}{|e^{i-\lambda}-a_1|^2\, |e^{i\lambda}-a_2|^2},$$

$a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ |a_1| < 1,\ |a_2| < 1,\ a_1 \neq a_2$. Pak zřejmě

$$f^{(1)}(z) = \frac{c_1}{|z - a_1|^2\,|z - a_2|^2},$$

a tedy

$$\psi_m^{(1)}(z) = \frac{(z^m - \Phi_m^{(1)}(z))\,z^2}{(z - a_1)\,(1 - a_1 z)\,(z - a_2)\,(1 - a_2 z)}.$$

Díky požadavku na analytičnost funkce $\psi_m^{(1)}(\cdot)$ uvnitř a na jednotkovém kruhu musí být

$$a_i^m - \Phi_m^{(1)}(a_i) = 0, \quad i = 1, 2$$

a je zcela přirozené zkusit funkci $\Phi_m^{(1)}(z)$ ve tvaru

$$\Phi_m^{(1)}(z) = \frac{A_m(z)}{z^2},$$

kde musí tedy být $A_m(a_i) = a_i^{m+2},\ i = 1, 2$.

Aby bylo splněno $\lim_{z\to\infty} \Phi_m^{(1)}(z) = 0$, pak je vhodné volit $A_m(z) = \alpha_m z + \beta_m$, kde koeficienty α, β se určí z požadavku

$$\begin{aligned} a_1^{m+2} &= \alpha a_1 + \beta \\ a_2^{m+2} &= \alpha a_2 + \beta. \end{aligned}$$

Odtud při $a_1 \neq a_2$ získáváme, že

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{a_1^{m+2} - a_2^{m+2}}{a_1 - a_2} \\ \beta_m &= a_2^{m+2} - a_2 \cdot \alpha_m = a_1^{m+2} - a_1 \alpha_m. \end{aligned}$$

Funkce $\Phi_m(z)$ má tedy tvar $\Phi_m(z) = \frac{\alpha_m}{z} + \frac{\beta_m}{z}$, a tudíž optimální lineární predikce se vyjádří jako

$$\tilde{X}(t, m) = \alpha_m\,X(t - 1) + \beta_m\,X(t - 2).$$

Pak pro $m = 0$, což je predikce na 1 krok vpřed, získáváme optimální lineární predikci ve formě

$$\tilde{X}(t, 0) = (a_1 + a_2)\,X(t - 1) - a_1 a_2\,X(t - 2).$$

Příklad 3. Nechť spektrální hustota má tvar

$$f(\lambda) = \frac{1}{\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\,e^{i(n-k)\lambda}\right|^2},$$

kde polynom $\sum_{k=0}^{n} a_k\,z^{n-k}$ s reálnými koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ má všechny své kořeny uvnitř jednotkového kruhu. Bez újmy na obecnosti lze požadovat, aby $a_0 > 0,\ a_n \neq 0$. Bude nás zajímat pouze případ predikce na jeden krok vpřed, tedy $m = 0$.

Z tvaru spektrální hustoty ihned plyne, že odpovídající funkce $f^{(1)}(z)$ je tvaru

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(z) &= \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^n a_k\, z^{n-k}\right)\left(\sum_{k=0}^n a_k\, z^{k-n}\right)} = \\
&= \frac{z^n}{(a_0 z^n + a_1^{n-1} + \cdots + a_n)\,(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n)}.
\end{aligned}$$

Odtud získáváme tvar funkce $\psi_0^{(1)}(z)$:

$$\psi_0^{(1)}(z) = \frac{[1 - \Phi_0^{(1)}(z)]\, z^n}{\left(\sum_{j=0}^n a_j\, z^{n-j}\right)\left(\sum_{j=0}^n a_j\, z^j\right)},$$

která musí být analytická uvnitř jednotkového kruhu. Opět zvolme

$$\Phi_0^{(1)}(z) = \frac{A_0(z)}{z^n}$$

a hledejme $A_0(z)$ ve tvaru polynomu $(n-1)$-ho stupně

$$A_0(z) = b_1\, z^{n-1} + b_2\, z^{n-2} + \cdots + b_n.$$

Koeficienty b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ je nutno volit tak, aby jejich volba eliminovala možné kořeny polynomu $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j\, z^{n-j}$, který se vyskytuje ve jmenovateli funkce $\psi_0^{(1)}(\cdot)$ a o jehož kořenech předpokládáme, že jsou všechny uvnitř jednotkového kruhu. Druhý polynom $Q(z) = \sum_{j=0}^n a_j\, z^j$ nám nevadí, protože ten pak musí mít všechny své kořeny vně jednotkového kruhu.

Zkusme zvolit $b_j = -\frac{a_j}{a_0}$, tedy

$$A_0(z) = -\frac{a_1}{a_0}\, z^{n-1} - \frac{a_2}{a_2}\, z^{n-2} - \cdots - \frac{a_n}{a_0}.$$

Pak

$$\begin{aligned}
[1 - \Phi_0^{(1)}(z)]\, z^n &= z^n \left[1 - \frac{A_0(z)}{z^n}\right] = \\
&= z^{2n} \left[z^n + \frac{a_1}{a_0}\, z^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}\, z^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0}\right] = \\
&= \frac{z^{2n}}{a_0}\, P(z),
\end{aligned}$$

což právě dává žádaný analytický tvar funkce $\psi_0^{(1)}(z)$, neboť pak

$$\psi_0^{(1)}(z) = \frac{z^{2n}}{a_0\, Q(z)}.$$

Z tohoto ihned plyne tvar pro funkci $\Phi_0(\lambda)$, totiž

$$\Phi_0(\lambda) = -\frac{1}{a_0}\left(a_1\, e^{-i\lambda} + a_2\, e^{-i2\lambda} + \cdots + a_n\, e^{-in\lambda}\right),$$

a tedy

$$\tilde{X}(t,0) = -\frac{1}{a_0}\left(a_1 X(t-1) + a_2 X(t-2) + \cdots + a_n X(t-n)\right),$$

což není žádné překvapení, neboť výchozí spektrální hustota $f(\cdot)$ je hustotou pro autoregresní stacionární posloupnost, která splňuje diferenční rovnici

$$a_0 X(k) + a_1 X(k-1) + \cdots + a_n X(k-n) = Y_k,$$

kde $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je diskrétní bílý šum s $\mathsf{D}\{Y_k\} = 1$, $\mathsf{E}\{Y_k\} = 0$, neboli při $a_0 > 0$

$$X(k) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a_0} X(k-j) + \frac{Y_k}{a_0}$$

a

$$\mathsf{E}\{X(k-j)\,\overline{Y}_k\} = 0 \quad \text{pro } j = 1, 2, 3, \ldots$$

a $\frac{\mathsf{E}\{Y_k^2\}}{a_0}$ je tak přímo chyba predikce.

7.3 Predikce slabě stacionárních procesů

Nechť $\{\xi(t),\ t \in (-\infty, +\infty)\}$ je slabě stacionární centrovaný náhodný proces se spektrálním rozkladem

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\,\mathrm{d}z(\lambda)$$

a kovarianční funkcí

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\,\mathrm{d}F(\lambda).$$

Nechť H_ξ je Hilbertův prostor nad všemi veličinami $\xi(t),\ t \in (-\infty, +\infty)$. Na H_ξ definujme grupu unitárních operátorů posunutí

$$U^t\,\xi(s) = \xi(t+s),$$

kde $U^0 = I$ je identita na H_ξ. Získání nejlepší predikce hodnoty $\xi(t+\tau),\ \tau > 0$ na základě znalostí $\xi(s),\ s \le t$ je dáno nalezením nejlepší projekce, tedy ortogonální projekce do podprostoru $H_\xi(t)$ generovaného právě všemi $\xi(s),\ s \le t$. Označme opět chybu predikce

$$\sigma^2(\tau) = \mathsf{E}\left\{|\xi(t+\tau) - \hat{\xi}(t,\tau)|^2\right\},$$

kde $\hat{\xi}(t,\tau)$ je projekce $\xi(t+\tau)$ na podprostor $H_\xi(t)$. Je jasné, že $0 \le \sigma^2(\tau) \le \sigma^2$, kde $\sigma^2 = \mathsf{E}\{|\xi(t+\tau)|^2\}$.

Definice 16. Když $\lim_{\tau\to\infty} \sigma^2(\tau) = \sigma^2$, pak proces nazveme (lineárně) regulárním; když $\sigma^2(\tau_0) = 0$ pro nějaké $\tau_0 > 0$, nazveme proces (lineárně) singulárním.

Lze snadno dokázat, že singularita vlastně znamená $\sigma^2(\tau) = 0$ pro každé $\tau > 0$.

Věta 48. Každý slabě stacionární proces lze jednoznačně rozložit do dvou komponent, a to na jeho regulární a singulární část

$$\xi(t) = \xi_s(t) + \eta(t),$$

které jsou mezi sebou nekorelované. Každá regulární část se dá vyjádřit pomocí klouzavých součtů ve tvaru stochastického integrálu typu

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\,\mathrm{d}u(s),$$

kde $\{u(\cdot)\}$ je ortogonální náhodná míra, $\mathsf{E}\{\mathrm{d}u(s)\} = 0$, $\mathsf{E}\{|\mathrm{d}u(s)|^2\} = \mathrm{d}s$, $H_\eta(t) = H_u(t)$ pro každé $t \in (-\infty, +\infty)$ a

$$\int_0^{+\infty} |a(t)|^2\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Důkaz. Důkaz je veden zcela analogicky jako v případě diskrétního času. □

Věta 49. Pro to, aby slabě stacionární náhodný proces $\{\xi(t),\, t \in (-\infty, +\infty)\}$ nebyl singulární, je nutné a stačí, aby absolutně spojitá část $f(\lambda)$ jeho spektrální funkce $F(\lambda)$ splňovala podmínku

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda > -\infty.$$

Důkaz. Při důkazu této věty se lze odvolat na větu 38, kde je stejná podmínka spojena s možnou faktorizací příslušné spektrální hustoty, což je nutná a postačující podmínka pro vyjádření procesu ve formě jednostranných klouzavých součtů, což je jistě regulární proces a naopak. □

Optimální predikce $\hat{\xi}(t,\tau)$ je pak vyjádřitelná jako součet optimální predikce jeho regulární části a singulární složky v čase $t+\tau$, tj.

$$\hat{\xi}(t,\tau) = \int_\tau^\infty a(s)\,\mathrm{d}u(\tau - s) + \xi_s(t+\tau),$$

přičemž

$$\sigma^2(\tau) = \int_0^\tau |a(s)|^2\,\mathrm{d}s.$$

Jiné vyjádření optimální predikce $\hat{\xi}(t,\tau)$ je dáno pomocí frekvenčních charakteristik, a to

$$\hat{\xi}(t,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\left[1 - \frac{h_\tau(i\lambda)}{h(i\lambda)}\right]\mathrm{d}z(\lambda),$$

kde $z(\lambda)$ je ortogonální náhodná míra procesu $\{\xi(t)\}$, přičemž

$$\begin{aligned} h(i\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty a(s)\,e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s \\ h_\tau(i\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\tau a(s)\,e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Funkce $h(i\lambda)$ je odvozena od spektrální hustoty, resp. od její absolutně spojité části $f(\lambda)$ vztahem

$$f(\lambda) = |h(i\lambda)|^2,$$

kde požadujeme, aby $h(1) > 0$ a $h(z) \neq 0$ pro $(\mathrm{Re}\, z > 0)$, aby funkce $h(\cdot)$ byla určena jednoznačně.

8 Silně stacionární posloupnosti a procesy

8.1 Operátory posunutí

Pokud v této části budeme hovořit o náhodné posloupnosti, pak $T = \mathbb{Z}$, v případě náhodného procesu $T = \mathbb{R}$. Jak již víme, náhodná posloupnost či proces jsou silně stacionární, když jejich konečněrozměrná rozdělení jsou invariantní vůči posunutí v $\mathbb{Z}$, resp. v $\mathbb{R}$. Nejjednodušším příkladem silně stacionární posloupnosti je posloupnost vzájemně nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin.

Nechť je tedy dán silně stacionární náhodný proces $\{\xi(t),\, t \in T\}$ a nechť $\mathcal{A}_\xi$ je nejmenší σ-algebra v množině elementárních jevů Ω, vůči níž jsou měřitelné všechny náhodné veličiny $\xi(t),\ t \in T$. Tato σ-algebra je generována podmnožinami tvaru

$$A = \{\omega \in \Omega : \xi(t_1, \omega) \in B_1, \dots, \xi(t_n, \omega) \in B_n\},$$

kde $t_1, t_2, \dots, t_n$ je libovolná konečná podmnožina v T a $B_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ jsou libovolné borelovské podmnožiny v $\mathbb{R}$. Říkáme, že σ-algebra $\mathcal{A}_\xi$ je generována náhodným procesem $\{\xi(t),\, t \in T\}$.

Nyní obrátíme pozornost k trajektoriím procesu $\{\xi(t),\, t \in T\}$. Jak již víme, pro každé $\omega \in \Omega$ je $\xi(\cdot, \omega)$ vlastně funkce na množině T, tedy prvek z $\mathbb{R}^T$. Označme $\Phi = \{x(\cdot) \in \mathbb{R}^T : x(\cdot) = \xi(\cdot, \omega),\, \omega \in \Omega\}$, neboli slovy Φ je podmnožina všech trajektorií procesu $\{\xi(t),\, t \in T\}$ v $\mathbb{R}^T$. V podmnožině Φ lze definovat následujícím způsobem σ-algebru $\mathcal{A}_\Phi$, která je nejmenší σ-algebrou nad podmnožinami tvaru

$$M = \{x(\cdot) \in \Phi : x(t_1) \in B_1,\, x(t_2) \in B_2, \dots, x(t_n) \in B_n\}$$

kde $t_1, t_2, \dots, t_n$ je libovolná konečná podmnožina v T a $B_1, B_2, \dots, B_n$ jsou libovolné borelovské podmnožiny v $\mathbb{R}$.

Označme $\Lambda : \Lambda \to \Phi$, tj. zobrazení $\omega \to \xi(\cdot, \omega)$, které každému elementárnímu výsledku $\omega \in \Omega$ přiřazuje právě trajektorii $\xi(\cdot, \omega)$ procesu $\{\xi(t),\, t \in T\}$.

Lze snadno dokázat, že podmnožiny v Ω tvaru

$$A = \{\omega \in \Omega : \Lambda\, \omega \in M\}, \quad M \in \mathcal{A}_\Phi,$$

tvoří právě σ-algebru $\mathcal{A}_\xi$ generovanou procesem $\{\xi(t),\, t \in T\}$.

Pomocí zobrazení Λ lze přenést pravděpodobnostní míru P ze σ-algebry $\mathcal{A}_\xi$ na σ-algebru $\mathcal{A}_\Phi$, a to pomocí vztahu

$$P_\Phi(M) = P(\Lambda^{-1}M), \quad M \in \mathcal{A}_\Phi.$$

Opět lze snadno dokázat, že množinová funkce P_Φ je skutečně pravděpodobností na $\mathcal{A}_\Phi$.

Všechny tyto pojmy byly zavedeny kvůli tomu, že na množině všech trajektorií Φ lze snadno definovat operaci posunutí, která hraje klíčovou roli při studiu silně stacionárních procesů. Definujme v množině trajektorií Φ operátor posunutí S_Φ^τ vztahem

$$S_\Phi^\tau\, x(\cdot) = x(\cdot + \tau), \quad x(\cdot) \in \Phi,$$

kde $\tau \in \mathbb{Z}$ v případě náhodné posloupnosti, $\tau \in \mathbb{R}$ pro náhodný proces. Ihned je vidět, že operace posunutí je vzájemně jednoznačná pro každé τ a rovněž platí

$$\begin{aligned} & S_\Phi^\tau \left\{x(\cdot) \in \Phi : x(t_i) \in B_i,\, i = 1, 2, \ldots, n\right\} = \\ = \quad & \left\{x(\cdot) \in \Phi : x(t_i + \tau) \in B_i,\, i = 1, 2, \ldots, n\right\}. \end{aligned}$$

Odtud tedy plyne, že $S_\Phi^\tau M \in \mathcal{A}_\Phi$, když $M \in \mathcal{A}_\Phi$.

Operace posunutí S_Φ^τ lze velice jednoduše skládat dohromady podle grupové relace

$$S_\Phi^{\tau_1}\, S_\Phi^{\tau_2} = S_\Phi^{\tau_2}\, S_\Phi^{\tau_1} = S_\Phi^{\tau_1 + \tau_2}.$$

Pomocí operace posunutí na množině Φ lze zpětně definovat operaci posunutí mezi elementárními výsledky v základním pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{O}, P)$, na němž je proces $\{\xi(t),\, t \in T\}$ definován. Přeneseme operaci posunutí do Ω vztahem

$$S_\tau(A) = \Lambda^{-1}(S_\Phi^\tau M),$$

když $M = \Lambda A,\ A \in \mathcal{A}_\xi,\ M \in \mathcal{A}_\Phi$.

Lemma 7. Operace posunutí S_τ zachovává pravděpodobnost P, tj.

$$P(S_\tau A) = P(A)$$

pro každé $A \in \mathcal{A}_\xi$.

Důkaz. Díky tomu, jak je zobrazení S_τ definováno pomocí S_Φ^τ, pak stačí dokázat, že platí

$$P_\Phi(S_\Phi^\tau M) = P_\Phi(M), \quad M \in \mathcal{A}_\Phi.$$

Díky silné stacionaritě procesu $\{\xi(t),\, t \in T\}$ předchozí vztah platí pro podmnožiny M tvaru (cylindrické podmnožiny)

$$M = \{x(\cdot) \in \Phi : x(t_i) \in B_i,\, i = 1, 2, \ldots, n\},$$

kde $t_i \in T,\ B_i \in \mathcal{B}_1,\ i = 1, 2, \ldots, n$. V obecném případě, pro $M \in \mathcal{A}_\Phi$ platí, že

$$P_\Phi(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} P_\Phi(M_i) \right\},$$

kde infimum je uvažováno přes všechna možná nejvýše spočetná pokrytí podmnožiny M cylindrickými podmnožinami ze σ-algebry $\mathcal{A}_\Phi$, neboli

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i.$$

Z vlastností míry ihned plyne, že musí platit nerovnost

$$P_\Phi(S_\Phi^\tau M) \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} P_\Phi(S_\Phi^\tau M_i) \right\} = P_\Phi(M),$$

protože jednak rovněž $S_\Phi^\tau M \subset S_\Phi^\tau \left(\bigcup_{i=1}^\infty M_i \right)$ a dále $P_\Phi(S_\Phi^\tau M_i) = P_\Phi(M_i)$, protože M_i jsou cylindrické a proces $\{\xi(t),\ t \in T\}$ je silně stacionární. Naopak, když budeme aplikovat zobrazení $S_\Phi^{-\tau}$ na množinu $S_\Phi^\tau M$, pak

$$P_\Phi \left(S_\Phi^{-\tau}(S_\Phi^\tau M) \right) = P_\Phi(M) \leq P_\Phi \left(S_\Phi^\tau M \right),$$

jak plyne přímo z předchozí nerovnosti. Tím jsme dokázali, že

$$P_\Phi \left(S_\Phi^\tau M \right) = P_\Phi(M),$$

a tedy i

$$P(S_\tau A) = P(A)$$

pro každé $A \in \mathcal{A}_\xi$. □

Lemma 8. Operace posunutí S_τ na $\mathcal{A}_\xi$ je definována jednoznačně až na množiny s pravděpodobností P nulovou, tj. když

$$A_1 = S_\tau A, \quad A_2 = S_\tau A, \quad \text{pro } A \in \mathcal{A}_\xi,$$

pak

$$P(A_1 \Delta A_2) = 0.$$

Důkaz. Když A_1, A_2 nejsou totožné, pak to znamená, že existují různé podmnožiny M_1, M_2 v $\mathcal{A}_\Phi$ takové, že jejich vzor je podmnožina A v $\mathcal{A}_\xi$, tj.

$$A = \Lambda^{-1} M_1, \quad A = \Lambda^{-1} M_2,$$

a tedy

$$A_1 = \Lambda^{-1}(S_\Phi^\tau M_1), \quad A_2 = \Lambda^{-1}(S_\Phi^\tau M_2).$$

Ale z předchozího ihned plyne, že jednak

$$A = \Lambda^{-1}(M_1 \cap M_2),$$

a tedy

$$\begin{aligned} S_\tau A &= \Lambda^{-1}\left(S_\Phi^\tau(M_1 \cap M_2)\right) = \Lambda^{-1}\left(S_\Phi^\tau M_1 \cap S_\Phi^\tau M_2\right) \\ &= \Lambda^{-1}(S_\Phi^\tau M_1) \cap \Lambda^{-1}(S_\Phi^\tau M_2) = A_1 \cap A_2. \end{aligned}$$

Protože zobrazení S_τ zachovává pravděpodobnost P, pak

$$P(S_\tau A) = P(A) = P(A_1) = P(A_2) = P(A_1 \cap A_2)$$

a tudíž musí být

$$P(A_1 \Delta A_2) = P(A_1 - A_2) + P(A_2 - A_1) = 0.$$

□

Snadno lze ukázat, že operace posunutí S_τ v $\mathcal{A}_\xi$ splňuje:

$$\begin{aligned} S_\tau\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \bigcap_{i=1}^{\infty} S_\tau(A_i) \\ S_\tau\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \bigcup_{i=1}^{\infty} S_\tau(A_i) \end{aligned}$$

$$\text{když } A_1 \subset A_2, \qquad \text{pak } S_\tau A_1 \subset S_\tau A_2.$$

Rovněž, jako operace posunutí $\{S_\Phi^\tau\}$, posunutí $\{S_\tau\}$ splňují grupovou relaci

$$S_{\tau_1} S_{\tau_2} = S_{\tau_2} S_{\tau_1} = S_{\tau_1+\tau_2}.$$

Pomocí operace posunutí S_τ lze zadefinovat i posunutí mezi náhodnými veličinami, které jsou $\mathcal{A}_\xi$-měřitelné. Jestliže $A \in \mathcal{A}_\xi$, nechť $\chi_A(\cdot)$ označuje indikátor množiny A, neboli

$$\begin{aligned} \chi_A(\omega) &= 1 \quad \text{pro } \omega \in A \\ \chi_A(\omega) &= 0 \quad \text{pro } \omega \in \Omega - A. \end{aligned}$$

Položme

$$U_\tau\, \chi_A(\omega) = \chi_{S_{-\tau}A}(\omega), \tag{8}$$

kde $\chi_{S_{-\tau}A}(\cdot)$ je indikátor množiny $S_{-\tau}A$. Jestliže $\eta(\omega) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k}(\omega)$, kde $A_k \in \mathcal{A}_\xi$ jsou navzájem disjunktní, pak

$$U_\tau \eta = \sum_{k=1}^{N} c_k\, U_\tau\, \chi_{A_k}(\omega).$$

Díky vztahu je ihned vidět, že pro jakoukoliv jednoduchou $\mathcal{A}_\xi$-měřitelnou funkci η platí

$$\{\omega : U_\tau\eta(\omega) \in B\} = S_\tau\{\omega : \eta \in B\},$$

kde $B \in \mathcal{B}_1$. Nechť nyní $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ je jakákoliv posloupnost jednoduchých funkcí $\mathcal{A}_\xi$-měřitelných, které konvergují dle pravděpodobnosti P. Pak díky invariantnosti pravděpodobnosti P vůči zobrazení S_τ platí, že

$$P\{\omega : |\eta_k(\omega) - \eta_\ell(\omega)| > \varepsilon\} = P\{\omega : |U_\tau\eta_k(\omega) - U_\tau\eta_\ell(\omega)| > \varepsilon\}$$

a tudíž i posloupnost $\{U_\tau\eta_k\}_{k=1}^\infty$ je konvergentní dle pravděpodobnosti P. Protože každá náhodná veličina η, která je $\mathcal{A}_\xi$-měřitelná, se dá aproximovat posloupností jednoduchých $\mathcal{A}_\xi$-měřitelných funkcí, pak lze definovat

$$U_\tau\eta = P\text{-}\lim_{k\to\infty} U_\tau\eta_k,$$

když

$$\eta = P\text{-}\lim_{k\to\infty} \eta_k.$$

$U_\tau\eta$ je dobře definovaná náhodná veličina, která nezávisí na výběru aproximující posloupnosti $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$.

Lze snadno dokázat, že zobrazení U_τ definované na všech $\mathcal{A}_\xi$-měřitelných náhodných veličinách, opět nabývá svých hodnot mezi $\mathcal{A}_\xi$-měřitelnými náhodnými veličinami a navíc platí:

$$\begin{aligned} U_\tau(c_1\eta_1 + c_2\eta_2) &= c_1U\,\eta_1 + c_2U\,\tau_2 \\ U_\tau(\eta_1\,\eta_2) &= U_\tau(\eta_1)\,U_\tau(\eta_2) \\ U_\tau\overline{\eta} &= \overline{U_\tau\eta}. \end{aligned}$$

Dále zobrazení $\{U_\tau\}$ splňují grupovou relaci

$$U_{\tau_1}U_{\tau_2} = U_{\tau_2}U_{\tau_1} = U_{\tau_1+\tau_2}.$$

Nechť η je libovolná A_ξ-měřitelná náhodná veličina. Pak náhodný proces $\{\eta(t),\, t \in T\}$, kde

$$\eta(t) = U_t\eta, \quad t \in T$$

je silně stacionární náhodný proces obsahující pouze $\mathcal{A}_\xi$-měřitelné náhodné veličiny.

8.2 Ergodické věty pro silně stacionární posloupnosti a procesy

Obdobně jako u slabě stacionárních procesů, ergodická teorie se týká asymptotického chování aritmetických průměrů

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{t}\int_0^t \xi_t\,\mathrm{d}t,$$

podle toho, zdali uvažujeme silně stacionární posloupnost či proces. Při vyšetřování chování těchto veličin při $n \to \infty$, resp. $t \to \infty$, se podstatně využívá právě vlastností zobrazení S_τ a U_τ.

Definice 17. Množina $A \in \mathcal{A}_\xi$ se nazývá invariantní vůči posunutím $\{S_\tau\}$, když pro každé τ platí

$$P(S_\tau A \Delta A) = 0.$$

Jinými slovy řečeno to znamená, že A a $S_\tau A$ se liší pro každé τ, $\tau \in \mathbb{Z}$, resp. $\tau \in \mathbb{R}$ až na podmnožinu, která má nulovou pravděpodobnost P.

Definice 18. Náhodná veličina η, která je $\mathcal{A}_\xi$-měřitelná, se nazývá invariantní vůči posunutím $\{U_\tau\}$, když pro každé τ, $\tau \in \mathbb{Z}$, resp. $\tau \in \mathbb{R}$ platí

$$P\{\omega : \eta(\omega) = U_\tau \eta(\omega)\} = 1.$$

Je zřejmé, že všechny invariantní podmnožiny tvoří pod-σ-algebru v $\mathcal{A}_\xi$ a náhodná veličina η je invariantní právě tehdy, když je měřitelná vůči této σ-algebře invariantních podmnožin, kterou označíme $\mathcal{J}_\xi$.

Věta 50. Nechť η je libovolná $\mathcal{A}_\xi$-měřitelná náhodná veličina, pro níž existuje střední hodnota vůči pravděpodobnosti P. Položme $\eta_t = U_t \eta$.

Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_j = \mathsf{E}(\eta | \mathcal{J}_\xi) \text{ s. j.},$$

resp.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \eta_t \, \mathrm{d}t = \mathsf{E}(\eta | \mathcal{J}_\xi) \text{ s. j.},$$

kde $E(\cdot | \mathcal{J}_\xi)$ je podmíněná střední hodnota vzhledem k σ-algebře $\mathcal{J}_\xi$ invariantních náhodných jevů.

Důkaz. Nejdříve dokážeme větu pro případ, že $T = \mathbb{Z}$. Dokážeme, že s pravděpodobností 1 existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_j(\omega).$$

Důkaz provedeme sporem. Nechť žádná taková limita s pravděpodobností 1 neexistuje. Pak ale najdeme dvě reálná čísla $\alpha < \beta$ taková, že pravděpodobnost současného výskytu náhodných jevů

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \left\{ \omega : \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_j(\omega) < \alpha \right\} \\ B_\beta &= \left\{ \omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_j(\omega) > \beta, \right\}, \end{aligned}$$

je kladná, neboli $P(A_\alpha \cap B_\beta) > 0$. Označme $A_{\alpha\beta} = A_\alpha \cap B_\beta$, kde α, β probíhají všechna racionální čísla na přímce. Pak náhodný jev A vyjadřující neexistenci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_j(\omega)$

se dá pokrýt spočetným sjednocením náhodných jevů $A_{\alpha\beta}$. Pak ale

$$0 < P(A) \leq \sum_{\alpha,\beta} P(A_{\alpha\beta}),$$

a tedy musí být $P(A_{\alpha\beta}) > 0$ alespoň pro jednu dvojici racionálních čísel α, β. Dokažme, že $P(A_{\alpha\beta}) > 0$ vede ke sporu.

Označme $A^s_{\alpha\beta}$ náhodný jev, který je průnikem jevu $A_{\alpha\beta}$ s existencí takového $t_0 \leq s$, že

$$\sum_1^{t_0} \eta_j(\omega) > t_0\beta.$$

Zřejmě

$$\lim_{s\to\infty} A^s_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta},$$

a tudíž i

$$\lim_{s\to\infty} P\left(A^s_{\alpha\beta}\right) = P\left(A_{\alpha\beta}\right).$$

Protože předpokládáme, že $P(A_{\alpha\beta}) > 0$, pak pro dostatečně velká $s \in I\!N$ musí být i $P(A^s_{\alpha\beta}) > 0$. Když nastane jev $A^s_{\alpha\beta}$ znamená to, že takový první okamžik $s \geq \tau^* \geq 1$ musí existovat, pro nějž je

$$\sum_1^{\tau^*} \eta_j(\omega) > \tau^*\beta,$$

ale současně pro každé t, $t \leq 1 \leq \tau^* - 1$ platí

$$\sum_1^{t} \eta_j(\omega) \leq t\beta.$$

Nechť τ je libovolný časový okamžik $0 \geq \tau \geq \tau^* - s$. Kdyby pro takovéto τ platily následující nerovnosti

$$\begin{aligned}\sum_{\tau+1}^{\tau^*} \eta_j(\omega) &\leq \beta(\tau^* - \tau)\\ \sum_{\tau+1}^{t} \eta_j(\omega) &> \beta(t - \tau^*)\end{aligned}$$

pro nějaké t, $\tau < t < \tau^*$, pak by díky vztahu (např. pro $t = 0$)

$$\sum_{\tau+1}^{\tau^*} \eta_j = \sum_{\tau+1}^{0} \eta_j + \sum_{1}^{\tau^*} \eta_j$$

platilo, že $\sum_1^{\tau^*} \eta_j \leq \beta\tau^*$, což by znamenalo, že jev $A^s_{\alpha\beta}$ nenastal. Pokud tedy takový časový okamžik τ mezi 0 a $\tau^* - s$ existuje, přičemž bude platit

$$\begin{aligned}\sum_{\tau+1}^{\tau^*} \eta_j(\omega) &> \beta(\tau^* - \tau)\\ \sum_{\tau+1}^{t} \eta_j(\omega) &\leq \beta(t - \tau^*)\end{aligned}$$

pro každé t, $\tau < t < \tau^*$, pak nastane jev $A^s_{\alpha\beta}$, neboť pak již

$$\sum_1^{\tau^*} \eta_j(\omega) > \beta\tau^*.$$

Tímto způsobem se náhodný jev $A^s_{\alpha\beta}$ stává sjednocením navzájem disjunktních jevů

$$\begin{gathered} B_{pq} = A_{\alpha\beta} \cap \{\tau = -p,\ \tau^* = -p+q\}, \\ q = 1, 2, \ldots, s,\ \ p = 0, 1, \ldots, q-1, \qquad \text{tedy} \\ A^s_{\alpha\beta} = \bigcup_{p,q} B_{pq}. \end{gathered}$$

Evidentně, díky silné stacionaritě

$$U_p \sum_{j=-p+1}^{-p+q} \eta_j(\omega) = \sum_{j=1}^{q} \eta_j(\omega)$$

a rovněž z téhož důvodu

$$S_p(B_{pq}) = B_{0q}.$$

Užitím těchto vztahů lze psát

$$\begin{aligned} \int_{A^s_{\alpha\beta}} \eta \, \mathrm{d}P &= \sum_{p,q} \int_{B_{pq}} \eta \, \mathrm{d}P = \sum_{p,q} \int_{B_{0q}} \eta(p) \, \mathrm{d}P = \\ &= \sum_{q} \int_{B_{0q}} \sum_1^q \eta_j \, \mathrm{d}P \geq \sum_q q\,\beta\, P(B_{0q}) = \\ &= \sum_{p,q} P(B_{pq})\,\beta = P(A^s_{\alpha\beta})\,\beta, \end{aligned}$$

protože v případě výskytu náhodného jevu B_{0q} platí

$$\sum_1^q \eta_j(\omega) > q\,\beta.$$

Když nyní provedeme limitní přechod pro $s \to \infty$, získáváme důležitou nerovnost

$$\int_{A_{\alpha\beta}} \eta \, \mathrm{d}P \geq P(A_{\alpha\beta})\,\beta.$$

Zcela obdobným způsobem lze dokázat i nerovnost opačnou

$$\int_{A_{\alpha\beta}} \eta \, \mathrm{d}P \leq P(A_{\alpha\beta})\,\alpha,$$

což ale za předpokladu, že $P(A_{\alpha\beta}) > 0$, nemůže být splněno, a tudíž musí jedině být, že

$$P(A_{\alpha\beta}) = 0.$$

Tím jsme dokázali, že existuje s pravděpodobností 1 limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_j(\omega).$$

Nechť nyní parametr t nabývá spojitých hodnot, tj. $t \in \mathbb{R}$. Je zřejmé, že

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u \;= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_j^{j+1} \eta(u)\,\mathrm{d}u$$

a obdobně

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u \;= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_j^{j+1} \eta(u)\,\mathrm{d}u.$$

Když si nyní uvědomíme, že veličiny

$$\eta_j = \int_j^{j+1} \eta(u)\,\mathrm{d}u, \quad j \in \mathbb{Z}$$

tvoří silně stacionární posloupnost, je jasné, že díky dříve dokázané existenci limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_j$$

musí též existovat

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u$$

s pravděpodobností 1.

Je zřejmé, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_j,$$

resp.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u$$

jsou invariantní náhodné veličiny, neboť pro každé s, $s \in \mathbb{Z}$, resp. $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} U_s \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u \quad &= \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_s^{t+s} \eta(u)\,\mathrm{d}u \;= \\ &= \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Nyní zbývá dokázat, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u \;= \mathsf{E}\{\eta|\mathcal{J}_\xi\},$$

kde $\mathcal{J}_\xi$ je σ-algebra invariantních náhodných jevů generovaná silně stacionárním procesem $\{\xi(t),\, t \in T\}$. Nejdříve předpokládejme, že $|\eta| \leq K < \infty$. Pak i

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_j\right| \leq K, \quad \text{resp.} \quad \left|\frac{1}{t}\int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u\;\right| \leq K$$

a tedy pro libovolnou podmnožinu $A \in \mathcal{J}_\xi$ platí, že

$$\lim_{t\to\infty} \int_A \left\{\frac{1}{t}\int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u\;\right\} \mathrm{d}P = \int_A \left\{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u\;\right\} \mathrm{d}P.$$

Z druhé strany

$$\begin{aligned}\int_A \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u \right\} \mathrm{d}P &= \frac{1}{t} \int_0^t \left\{ \int_A \eta(u)\,\mathrm{d}P \right\} \mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \left\{ \int_A \eta(0)\,\mathrm{d}P \right\} \mathrm{d}u = \int_A \eta\,\mathrm{d}P.\end{aligned}$$

Protože tento vztah platí pro každé $A \in \mathcal{J}_\xi$, pak (viz Dodatek 2), ona limita musí skoro jistě splývat s podmíněnou střední hodnotou $\mathsf{E}\{\eta|\mathcal{J}_\xi\}$. Když náhodná veličina η není ohraničená, pak za požadovaného předpokladu, že existuje $\mathsf{E}\{|\eta|\}$, lze k libovolnému $\varepsilon > 0$ najít takovou ohraničenou veličinu η_ε, rovněž $\mathcal{A}_\xi$-měřitelnou, že

$$\mathsf{E}\{|\eta - \eta^\varepsilon|\} \leq \varepsilon.$$

Pro silně stacionární proces $\{\eta^\varepsilon(t),\ t \in T\}$ již věta byla dokázána a využitím nerovnosti

$$\mathsf{E}\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \eta_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \eta_j^\varepsilon \right| \right\} \leq \mathsf{E}\{|\eta - \eta^\varepsilon|\} \leq \varepsilon,$$

resp.

$$\mathsf{E}\left\{ \left| \frac{1}{t} \int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{t} \int_0^t \eta^\varepsilon(u)\,\mathrm{d}u \right| \right\} \leq \mathsf{E}\{|\eta - \eta^\varepsilon|\} \leq \varepsilon,$$

lze snadno dokázat, že věta platí i pro neohraničené náhodné veličiny. □

Definice 19. Silně stacionární náhodná posloupnost či proces $\{\xi(t),\ t \in T\}$ se nazývá metricky tranzitivní (též ergodická či ergodický), když každá podmnožina $A \in \mathcal{J}_\xi$ splňuje

$$P(A) = 0 \quad \text{či} \quad P(A) = 1.$$

Jinými slovy řečeno, metrická tranzitivnost znamená, že každá invariantní náhodná veličina, tj. $\mathcal{J}_\xi$-měřitelná, je skoro jistě konstantní vůči pravděpodobnosti P.

Je-li proces $\{\xi(t),\ t \in T\}$ metricky tranzitivní, pak pro každou náhodnou veličinu η, která je $\mathcal{A}_\xi$-měřitelná s $\mathsf{E}\{|\eta|\} < \infty$ platí, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u = \mathsf{E}\{\eta\} \quad \text{s. j.},$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \eta_j = \mathsf{E}\{\eta\} \quad \text{s. j.},$$

Lze rovněž dokázat i opak, že pokud je $\mathsf{E}\{\eta|\mathcal{J}_\xi\} = \mathsf{E}\{\eta\}$ skoro jistě pro každou náhodnou veličinu η, která je $\mathcal{A}_\xi$-měřitelná mající konečnou střední hodnotu, pak proces $\{\xi(t),\ t \in T\}$ je metricky tranzitivní.

Tuto kapitolu uzavřeme větami, které jednoznačně charakterizují metrickou tranzitivnost u stacionárních gaussovských procesů.

Věta 51. Stacionární gaussovská posloupnost či proces se spojitou kovarianční funkcí je metricky tranzitivní právě tehdy, když odpovídající spektrální funkce nemá skoky (tj. je spojitá).

Důkaz. Nechť $\{\xi(t),\, t \in T\}$ je stacionární gaussovský proces či posloupnost, které jsou metricky tranzitivní. To znamená, že každá invariantní náhodná veličina je skoro jistě konstantní. Protože gaussovský proces či posloupnost jsou též při silné stacionaritě slabě stacionární, pak existuje limita dle kvadratického středu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j = z(\{0\})$$

resp.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \xi(u)\,\mathrm{d}u = z(\{0\}).$$

Protože pro gaussovské veličiny konvergence dle kvadratického středu implikuje konvergenci s. j., pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j = z(\{0\}) \quad \text{s. j.},$$

resp.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \xi(u)\,\mathrm{d}u = z(\{0\}) \quad \text{s. j.}$$

Pak ale musí být veličina $z(\{0\})$ konstantní, neboť musí být $\mathcal{J}_\xi$-měřitelná, což implikuje, že odpovídající spektrální funkce $F(\cdot)$ od procesu $\{\xi(t),\, t \in T\}$ je spojitá v nule. Kdyby $\lambda_0 \neq 0$ byl bod nespojitosti spektrální funkce $F(\cdot)$, pak ze vztahu mezi ortogonální náhodnou mírou a funkcí $F(\cdot)$ by plynulo, že

$$\mathsf{E}\{|z(\lambda_0+0) - z(\lambda_0)|^2\} = F(\lambda_0+0) - F(\lambda_0).$$

Protože $\Phi(\lambda_0) = z(\lambda_0+0) - z(\lambda_0)$ je limita od aritmetických průměrů silně stacionárního procesu $\eta(t) = e^{i\lambda_0 t}\xi(t)$, tj.

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(\lambda_0) \quad \text{s. j.}$$

resp.

$$\frac{1}{t} \int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u \longrightarrow \Phi(\lambda_0) \quad \text{s. j.},$$

pak při metrické tranzitivitě procesu $\{\xi(t),\, t \in T\}$ musí být $\Phi(\lambda_0)$ konstanta, a tudíž $F(\lambda_0+0) = F(\lambda_0)$ a spektrální funkce $F(\cdot)$ musí být spojitá v bodě λ_0.

Naopak předpokládejme, že $\{\xi(t),\, t \in T\}$ má spektrální funkci $F(\cdot)$ ze svého spektrálního rozkladu spojitou v každém bodě. Abychom dokázali metrickou tranzitivnost procesu $\{\xi(t),\, t \in T\}$, musíme dokázat, že pro každou $\mathcal{A}_\xi$-měřitelnou náhodnou veličinu η se $\mathsf{E}\{|\eta|\} < \infty$ platí

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} U^j \eta \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{E}\{\eta\} \quad \text{s. j.},$$

resp.

$$\frac{1}{t}\int_0^t U_s\,\eta\,\mathrm{d}s \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{E}\{\eta\} \quad \text{s.j..}$$

Stačí to dokázat pro dostatečně širokou třídu náhodných veličin, které tvoří všude hustou podmnožinu mezi všemi $\mathcal{A}_\xi$-měřitelnými náhodnými veličinami s konečnou střední hodnotou. Takovými veličinami jsou např. veličiny tvaru

$$\eta = \sum_{u_1,u_2,\ldots,u_n} c(u_1,u_2,\ldots,u_n)\exp\left\{i\sum_{j=1}^n u_j\,\xi(t_j)\right\},$$

kde $c(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ jsou obecně komplexní čísla. Protože čísla $c(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ nehrají roli při sledování aritmetických průměrů

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \eta_j, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{t}\int_0^t \eta(u)\,\mathrm{d}u,$$

žádnou roli, postačuje studovat veličiny nejjednoduššího tvaru, a to

$$\eta = \exp\left\{i\sum_{j=1}^n u_j\,\xi(t_j)\right\}.$$

Budeme potřebovat vyčíslit $\mathsf{E}\{\eta\} = m$. Lze spočítat, že

$$m = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n R(t_j-t_k)\,u_j\,u_k\right\},$$

kde $R(\cdot)$ je kovarianční funkce procesu $\{\xi(t),\, t\in T\}$. Položme

$$\eta_0 = \eta - m, \quad \eta(t) = U_t\eta, \quad \eta_0(t) = U_t\,\eta_0$$

a nechť $R_0(t) = \mathsf{E}\{\eta_0(t)\,\overline{\eta}_0\} = \mathsf{E}\{\eta(t)\,\overline{\eta}\} - m^2$. Kovarianční funkce $R_0(\cdot)$ je zajisté spojitá v případě spojitého času, a tudíž dle Bochnerovy věty či Herglotzovy věty

$$R_0(t) = \int e^{it\lambda}\,\mathrm{d}F_0(\lambda).$$

Když dokážeme, že $F_0(\cdot)$ je spojitá v 0, pak bude

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \eta_j = \mathsf{E}\{\eta\} = m,$$

což je konstanta, a tím bude dokázána metrická tranzitivnost procesu $\{\xi(t),\, t\in T\}$. Kovarianční funkci procesu $\{\eta(t),\, t\in T\}$ lze vyjádřit pomocí $(\eta = \eta(0))$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\{\eta(t)\,\overline{\eta}\} &= \mathsf{E}\left\{\exp\left\{i\sum_{j=1}^n(\xi(t_j+t)-\xi(t_j))\,u_j\right\}\right\} = \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n u_j\,u_k(2R(t_j-t_k)-R(t+t_j-t_k)-R(t+t_k-t_j))\right\}.\end{aligned}$$

Zřejmě

$$R(t_j - t_k) = \int e^{i\lambda(t_j - t_k)}\,\mathrm{d}F(\lambda),$$

a obdobně lze vyjádřit

$$R(t + t_j - t_k) + R(t + t_k - t_j) = 2\int e^{i\lambda t}\cos\lambda(t_j - t_k)\,\mathrm{d}F(\lambda).$$

Tím dosáhneme toho, že

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\{\eta(t)\,\overline{\eta}\} &= \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_j\,u_k\,R(t_j - t_k)\right\} \\
&\quad \times \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(2\int e^{i\lambda t}\cos(\lambda(t_j - t_k))\,\mathrm{d}F(\lambda)\Big)\right\} \\
= & \ \Big\{(\mathsf{E}\{\eta\})^2\Big\}\exp\left\{\int\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e^{it\lambda}u_j u_k\cos(\lambda(t_j - t_k))\,\mathrm{d}F(\lambda)\right\} \\
= & \ m^2\exp\left\{\int e^{i\lambda t}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_j u_k\cos(\lambda(t_j - t_k))\,\mathrm{d}F(\lambda)\right)\right\},
\end{aligned}$$

kde $F(\cdot)$ je spektrální funkce procesu $\{\xi(t),\, t \in T\}$.

Označme $\mathrm{d}G(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_j u_k\cos(\lambda(t_j - t_k))\,\mathrm{d}F(\lambda)$. Protože funkce $\cos(\lambda t)$ je pozitivně definitní, pak $G(\cdot)$ je nová spektrální funkce, která je spojitá právě tehdy, když $F(\cdot)$ je spojitá. Tím jsme dospěli k vyjádření

$$\begin{aligned}
R_0(t) &= m^2\left(e^{\int e^{it\lambda}\,\mathrm{d}G(\lambda)} - 1\right) \\
&= m^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left(\int e^{it\lambda}\,\mathrm{d}G(\lambda)\right)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Funkce $\int e^{it\lambda}\,\mathrm{d}G(\lambda)$ je charakteristickou funkcí a její mocniny lze opět vyjádřit jako charakteristické funkce, tj.

$$\left(\int e^{it\lambda}\,\mathrm{d}G(\lambda)\right)^j = \int e^{it\lambda}\,\mathrm{d}G_j(\lambda),$$

kde funkce $G_j(\cdot)$ lze získat postupným výpočtem

$$G_j(\lambda) = G(\lambda) * G_{j-1}(\lambda),$$

přičemž $G_1(\lambda) = G(\lambda)$ a $*$ označuje konvoluci mezi dvěma funkcemi, neboli

$$G_j(\lambda) = \int G(\lambda - u)\,\mathrm{d}G_{j-1}(u).$$

Tím pádem dovedeme vyjádřit kovariační funkci $R_0(\cdot)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
R_0(t) &= m^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\int e^{it\lambda}\,\mathrm{d}G_j(\lambda)}{j!} \\
&= \int e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}F_0(\lambda),
\end{aligned}$$

kde

$$\mathrm{d}F_0(\lambda) = m^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}G_j(\lambda)}{j!}.$$

Když je spektrální míra $F(\cdot)$ procesu $\{\xi(t),\, t \in T\}$ spojitá, pak i všechny $G_j(\cdot)$ musí být spojité, a tím i $F_0(\cdot)$ je spojitá, tím spíše v 0. Toto zjištění stačí k tvrzení, že proces $\{\xi(t),\, t \in T\}$ pak musí být metricky tranzitivní. $\square$

O tom, zdali je odpovídající spektrální funkce $F(\cdot)$ spojitá, se lze snadno přesvědčit z chování kovarianční funkce. Platí následující věta.

Věta 52. Nechť $\{R(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ je kovarianční funkce libovolné slabě stacionární posloupnosti. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |R(j)|^2 = \sum_k [F(\lambda_k + 0) - F(\lambda_k)]^2,$$

kde $\{\lambda_k\}$ jsou všechny body nespojitosti spektrální funkce $F(\cdot)$.

Důkaz. Díky Herglotzově větě

$$R(j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda}\,\mathrm{d}F(\lambda),$$

a tudíž

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |R(j)|^2 &= \frac{1}{n+1} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=0}^{n} e^{i(\lambda-\mu)\,j}\,\mathrm{d}F(\lambda)\,\mathrm{d}F(\mu) = \\ &= \frac{1}{n+1} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{i(n+1)\,(\lambda-\mu)}}{[1 - e^{i(\lambda-\mu)}]}\,\mathrm{d}F(\lambda)\,\mathrm{d}F(\mu). \end{aligned}$$

Pro $n \to \infty$ je funkce pod dvojným integrálem stále ohraničená a konverguje k funkci $\varphi(\lambda,\mu)$, která je rovna nule mimo hlavní diagonálu a $\varphi(\lambda,\lambda) = 1$. Lze tedy přehodit operace lim a integrování a platí

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |R(j)|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda,\mu)\,\mathrm{d}F(\lambda)\,\mathrm{d}F(\mu) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [F(\lambda+0) - F(\lambda)]\,\mathrm{d}F(\lambda) = \sum_k [F(\lambda_k + 0) - F(\lambda_k)]^2. \end{aligned}$$

$\square$

Tím vlastně jsme též dokázali nutnou a postačující podmínku pro to, aby stacionární gaussovská posloupnost byla metricky tranzitivní, a to totiž, její kovarianční funkce musí splňovat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |R(j)|^2 = 0.$$

Zcela analogická tvrzení lze vyslovit v případě spojitého času, kdy platí, že

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |R(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_k [F(\lambda_k + 0) - F(\lambda_k)]^2.$$

Odtud snadno již je vidět, že pro gaussovský stacionární proces se spojitou kovarianční funkcí je nutná a postačující podmínka pro jeho metrickou tranzitivnost

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |R(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 0.$$

9 Dodatek 1

9.1 Absolutní spojitost měr

Nechť Ω je libovolná neprázdná množina tvořená prvky ω. Nechť $\mathcal{C}$ je nějaký systém podmnožin v Ω. Nechť na $\mathcal{C}$ je definována množinová funkce $\varphi(C)$, kde $\varphi(C)$ může nabývat libovolné reálné hodnoty, $+\infty$ i $-\infty$. Funkce $\varphi(\cdot)$ se nazývá aditivní na $\mathcal{C}$, když pro každý konečný systém $\{E_i,\ E_i \in \mathcal{C}\}$ takový, že $\bigcup E_i \in \mathcal{C}$, E_i jsou párově disjunktní, platí

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(E_i).$$

Zde je nutné připustit pouze jednu hodnotu $+\infty$ či $-\infty$, protože součet $-\infty + \infty$ nemá smysl. Pokud platí silnější požadavek, že pro každý spočetný systém $\{E_i,\ E_i \in \mathcal{C}\}$ takový, že $\bigcup E_i \in \mathcal{C}$, E_i navzájem párově disjunktní, platí

$$\varphi\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(E_i),$$

hovoříme o σ-aditivitě funkce φ na $\mathcal{C}$. Je-li φ σ-aditivní na $\mathcal{C}$ a $|\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)| < +\infty$, pak řada $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(E_i)$ konverguje absolutně. Dále platí, že je-li $\varphi(A)$ konečné číslo, pak pro každé $B \subset A$, $B \in \mathcal{C}$ je $\varphi(B)$ rovněž konečné číslo.

Je-li $\varphi \geq 0$ a σ-aditivní na $\mathcal{C}$, hovoříme o míře na $\mathcal{C}$, pokud φ nabývá i záporných hodnot a je σ-aditivní, hovoříme o znaménkové míře či náboji (někdy též zobecněná míra).

Jordan–Hahnův rozklad. Každá znaménková míra φ definovaná na σ-algebře $\mathcal{O}$ se dá rozložit na dvě míry φ^+, φ^-, tj.

$$\varphi(A) = \varphi^+(A) - \varphi^-(A),$$

kde

$$\varphi^+(A) = \sup_{\substack{B \in \mathcal{O} \\ B \subset A}} \varphi(B), \quad \varphi^-(A) = -\inf_{\substack{B \in \mathcal{O} \\ B \subset A}} \varphi(B).$$

φ^+, φ^- se nazývají horní, resp. dolní variací funkce φ, jejich součet se nazývá úplnou (totální) variací funkce φ.

Nechť dále $(\Omega, \mathcal{O})$ je měřitelný prostor a na něm nějaká míra μ. Pak každá lebesgueovsky integrovatelná funkce $f(\cdot)$ na Ω definuje znaménkovou míru $\varphi(\cdot)$ na $\mathcal{O}$ vztahem

$$\varphi(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu,$$

kde $A \in \mathcal{O}$. Z vlastností integrálu ihned plyne, že skutečně $\varphi(\cdot)$ je σ-aditivní na $\mathcal{O}$. Lze i připustit nekonečnou hodnotu, např. $+\infty$, tzn. integrál přes množinu $A \in \mathcal{O}$ existuje pouze tehdy, když

$$\int_A f^- \, \mathrm{d}\mu \text{ je konečný}, \qquad \int_A f^+ \, \mathrm{d}\mu \text{ existuje},$$

což znamená, že může být i $+\infty$.

Je-li f integrovatelná, pak je konečná skoro všude $[\mu]$, a tedy množinová funkce $\varphi(\cdot)$ je vždy konečná. Je-li μ σ-konečná, pak i $\varphi(\cdot)$ je σ-konečná znaménková míra. Základní vlastností, která charakterizuje funkci $\varphi(\cdot)$, je absolutní spojitost, která říká, že když $\mu(A) = 0$, pak i $\varphi(A) = 0$, neboť integrál přes množinu míry nula pro libovolnou integrovatelnou funkci je nulový.

Definice 20. Množinová funkce $\varphi_s(\cdot)$ definovaná na $\mathcal{O}$ se nazývá singulární vůči míře μ definované rovněž na $\mathcal{O}$, když existuje taková podmnožina $N \in \mathcal{O}$, pro niž platí

$$\mu(N) = 0, \quad \text{ale} \quad \varphi_s(A \cap N^c) = 0$$

pro každé $A \in \mathcal{O}$.

Definice 21. Znaménková míra φ definovaná na $(\Omega, \mathcal{O})$ se nazývá absolutně spojitou vůči míře μ ($\varphi \ll \mu$), když $\mu(A) = 0$ implikuje, že $\varphi(A) = 0$ rovněž.

Věta (o Lebesgueově rozkladu)

Nechť na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{O})$ jsou dány σ-konečná míra μ a znaménková míra φ. Pak existuje právě jediné rozložení znaménkové míry φ na dvě části

$$\varphi(A) = \varphi_a(A) + \varphi_s(A),$$

kde $\varphi_a(\cdot)$ je absolutně spojitá vůči μ, ale $\varphi_s(\cdot)$ je singulární část vůči μ. Přitom $\varphi_a(\cdot)$ je integrálem od konečné $\mathcal{O}$-měřitelné funkce definované na Ω, která je určena jednoznačně až na ekvivalenci vůči míře μ.

Věta (Radon–Nikodym)

Nechť na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{O})$ je dána znaménková míra φ a míra μ, obě σ-konečné. Nechť $\varphi \ll \mu$. Pak existuje co do ekvivalence vůči μ jednoznačně určená $\mathcal{O}$-měřitelná funkce f na Ω, že

$$\varphi(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu,$$

kterou značíme $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} = f$ a nazýváme Radon–Nikodymovou derivací.

Důsledek. Nechť μ, λ jsou dvě míry; když $\mu \ll \lambda$ a μ je σ-konečná, pak

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} \, \mathrm{d}\lambda,$$

pokud má integrál vlevo smysl.

Poznámka. Integrál od ne nutně konečné funkce je sice σ-aditivní a μ-spojitý, ale nemusí být σ-konečný. Přesto Radon–Nikodymova věta i bez předpokladu σ-konečnosti pro φ platí.

Poznámka. Když $f(\cdot)$ je integrovatelná funkce ve smyslu Lebesgueově na $(a, b) \subset \mathbb{R}$, pak její neurčitý integrál existuje a je absolutně spojitý vůči Lebesgueově míře a jeho derivace je vlastně přímo funkce $f(\cdot)$. Je-li funkce $F(\cdot)$ definovaná na (a, b) absolutně spojitá, pak je absolutně spojitá vlastně vůči Lebesgueově míře a má derivaci skoro všude, která je Radon–Nikodymovou derivací vůči Lebesgueově míře.

10 Dodatek 2

10.1 Podmíněná pravděpodobnost a podmíněná střední hodnota

Mějme dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{O}, P)$. Nechť A, B jsou dva náhodné jevy takové, že $P(B) > 0$. Pak číslo $P(A \cap B)/P(B)$ nazýváme podmíněnou pravděpodobností jevu A za podmínky B. Při $P(B) = 0$ nelze $P(A|B)$, což je značení podmíněné pravděpodobnosti, zadefinovat. Jestliže budeme pohlížet na $P(A|B)$ jako na množinovou funkci v A při fixním B pro $A \in \mathcal{O}$, získáme vlastně novou pravděpodobnost na $(\Omega, \mathcal{O})$, kterou nazveme podmíněnou pravděpodobností při podmínce B a lze tedy uvažovat nový pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{O}, P_B)$, kde

$$P_B(A) = P(A|B).$$

Lze tedy uvažovat i střední hodnotu vůči podmíněné pravděpodobnosti P_B a značíme tedy

$$\mathsf{E}_B\{X\} = \int_\Omega X \, \mathrm{d}P_B,$$

kde X je náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{O})$. Snadno je vidět, že platí

$$P(B)\, \mathsf{E}_B\{X\} = \int_B X \, \mathrm{d}P,$$

pro $X = \psi_A$ speciálně máme

$$P(A|B) = \mathsf{E}_B\{\psi_A\}.$$

Nyní se dívejme na $\mathsf{E}_B\{X\}$ jako na funkci v ω, která pro $\omega \in B$ má hodnotu $\mathsf{E}_B\{X\}$, tedy je na B rovna konstantě. Analogicky pro B^c definujme $\mathsf{E}_{B^c}\{X\}$ jako funkci konstantní pro $\omega \in B^c$. Tím tedy dostáváme dvouhodnotovou funkci na Ω, a to pro $\omega \in B$ je rovna $\mathsf{E}_B\{X\}$, pro $\omega \in B^c$ je rovna $\mathsf{E}_{B^c}\{X\}$. Nyní je důležité si uvědomit, že čtveřice $\{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$ tvoří σ-algebru nad B a na výše zadefinovanou funkci v ω se lze dívat globálně jako na podmíněnou střední hodnotu náhodné veličiny X vůči σ-algebře $\mathcal{D} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$, značené jako

$$\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\},$$

která je

1. $\mathcal{D}$-měřitelná
2. pro každé $U \in \mathcal{D}$ platí $\int_U \mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\} \, \mathrm{d}P_{\mathcal{D}} = \int_U X \, \mathrm{d}P$,

jak se lze snadno přesvědčit. Dále budeme značit $P_{\mathcal{D}}$ zúžení míry P ze σ-algebry na pod σ-algebru $\mathcal{D}$. Pro lepší ilustraci si nyní vezmeme případ, kdy σ-algebra $\mathcal{D}$ je generována spočetným rozkladem prostoru Ω, tj.

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad B_k \cap B_\ell = \emptyset, \quad k \neq \ell, \quad B_k \in \mathcal{O} \text{ pro každé } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Pak pro každou náhodnou veličinu X s $\mathsf{E}\{X\}$ konečnou lze uvažovat podmíněnou střední hodnotu vůči $\mathcal{D}$ jakožto jednoduchou funkci na rozkladu $\{B_k\}$

$$\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\} = \sum_k \left(\frac{1}{P(B_k)} \int_{B_k} X \,\mathrm{d}P \right) \chi_{B_k},$$

přičemž při $P(B_\ell) = 0$ není na B_ℓ $\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\}$ definována. Z toho plyne, že $\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\}$ je určena jednoznačně až co do ekvivalence vůči míře $P_{\mathcal{D}}$.

Definice 22. Podmíněná střední hodnota $\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\}$ při dané pod σ-algebře $\mathcal{D} \subset \mathcal{O}$ je taková $\mathcal{D}$-měřitelná náhodná veličina definovaná co do $P_{\mathcal{D}}$-ekvivalence jednoznačně splňující vztah

$$(**) \qquad \int_B \mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\} \,\mathrm{d}P_{\mathcal{D}} = \int_B X \,\mathrm{d}P$$

pro každé $B \in \mathcal{D}$.

Definice má smysl, protože $\varphi(B) = \int_B X \,\mathrm{d}P$ je σ-aditivní a P-absolutně spojitá množinová funkce a její zúžení na pod σ-algebru $\mathcal{D}$ je pak též absolutně spojité vůči zúžení $P_{\mathcal{D}}$ původní pravděpodobnosti P na $\mathcal{D}$. Pak dle Radon–Nikodymovy věty existuje derivace $\frac{\mathrm{d}\varphi_{\mathcal{D}}}{\mathrm{d}P_{\mathcal{D}}}$, která je zajisté $\mathcal{D}$-měřitelná, určená jednoznačně co do $P_{\mathcal{D}}$-ekvivalence a splňující vztah $(**)$.

V případě, že $X = I_A$, kde I_A je indikátor podmnožiny $A \in \mathcal{O}$, hovoříme jako o podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky σ-algebry $\mathcal{D}$ a píšeme

$$\mathsf{E}\{I_A|\mathcal{D}\} = P(A|\mathcal{D}).$$

Nechť Y je nějaká náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{O})$, nechť X je náhodná veličina mající konečnou střední hodnotu, pak definujeme

$$\mathsf{E}\{X|Y\} = \mathsf{E}\{X|\mathcal{D}_Y\},$$

kde $\mathcal{D}_Y$ je pod σ-algebra generovaná náhodnými jevy tvaru

$$B = \{\omega : a < Y(\omega) < b\} = Y^{-1}(a, b).$$

Platí, že $\mathsf{E}\{X|Y\}$ je funkcí od náhodné veličiny Y, neboť je $\mathcal{D}_Y$ měřitelná.

10.2 Vlastnosti podmíněné střední hodnoty

1. Je-li $X = c$ na $(\Omega, \mathcal{O})$, pak
$$\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\} = c \quad \text{s. j.}$$

2. X_1, X_2 náhodné veličiny na $(\Omega, \mathcal{O})$ s konečnými středními hodnotami, pak
$$\mathsf{E}\{aX_1 + bX_2|\mathcal{D}\} = a\,\mathsf{E}\{X_1|\mathcal{D}\} + b\,\mathsf{E}\{X_2|D\} \quad \text{s. j.}$$

3. Když $X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ dle středu či kvadratického středu, pak $\mathsf{E}\{X_n|\mathcal{D}\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\}$ dle středu, resp. dle kvadratického středu.

4. Když $X_n \nearrow X$ s. j., pak $\mathsf{E}\{X_n|\mathcal{D}\} \nearrow \mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\}$.
   Speciálně $P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|\mathcal{D}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{A_k|\mathcal{D}\}$ s. j. pro disjunktní jevy $A_k \in \mathcal{O}$.

5. $\mathsf{E}\{\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\}\} = E\{X\}$ s. j.

6. Jsou-li X a Y nezávislé, pak
$$\mathsf{E}\{X|Y\} = \mathsf{E}\{X\} \quad \text{s. j.;}$$
   je-li náhodná veličina Z $\mathcal{D}$-měřitelná, pak
$$\mathsf{E}\{XZ|\mathcal{D}\} = Z\,\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\} \quad \text{s. j.}$$

Pozor! Podmíněná pravděpodobnost $P(\cdot|\mathcal{D})$ splňuje sice vlastnosti nezápornosti a σ-aditivity na $\mathcal{O}$, ale je určena jednoznačně co do $P_{\mathcal{D}}$-ekvivalence, což znamená, že obecně nemusí existovat taková verze podmíněné pravděpodobnosti, aby byla skutečně mírou na $\mathcal{O}$. Tomu jest rozuměti takto, i když platí pro disjunktní jevy $\{A_k\}$, že
$$P\left\{\bigcup_k A_k|\mathcal{D}\right\} = \sum_k P\{A_k|\mathcal{D}\} \quad \text{s. j.,}$$
ale pro jinou skupinu náhodných jevů to sice platí taktéž, ale ono s. j. se může týkat jiné nulové podmnožiny, čili nemusí existovat taková verze mezi ekvivalentními $P\{\cdot|\mathcal{D}\}$, která by mohla zastoupit všechny takovéto případy. To znamená, že obecně nelze vůči $P\{\cdot|\mathcal{D}\}$ integrovat tak, aby platilo
$$\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\} = \int X\,\mathrm{d}P\{\cdot|\mathcal{D}\} \quad \text{s. j.}$$
Když taková verze podmíněné pravděpodobnosti existuje, hovoříme o regulární podmíněné pravděpodobnosti. Pak vůči ní lze již integrovat a platí výše uvedený vztah.

Nyní uvažujme speciální případ podmíněné pravděpodobnosti, a to $P\{A|Y\}$, kde Y je nějaká náhodná veličina.

Zvolme $A = \{\omega : X(\omega) < x\}$, pak podmíněnou pravděpodobnost lze chápat jako funkci dvou proměnných a to x a Y a hovoříme o podmíněné distribuční funkci

$$F(x|Y) = P\{X(\omega) < x|Y\}.$$

Podmíněná distribuční funkce má opět všechny vlastnosti jako nepodmíněná distribuční funkce a podmíněná střední hodnota $\mathsf{E}\{X|Y\}$ se dá vyjádřit jako integrál

$$\mathsf{E}\{X|Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \mathrm{d}F(x|Y).$$

10.3 Podmíněná střední hodnota jako operátor projekce

Nechť $(\Omega, \mathcal{O}, P)$ je základní pravděpodobnostní prostor, nechť $\mathcal{D}$ je pod σ-algebra v $\mathcal{O}$. Nechť $L_1(\mathcal{D})$, resp. $L_2(\mathcal{D})$ jsou příslušné prostory L_1, resp. L_2-integrovatelných funkcí měřitelných vůči σ-algebře $\mathcal{D}$. Nejdříve připomeneme, že $L_1(\mathcal{D})$ je podprostorem v $L_1(\mathcal{O})$, obdobně pro $L_2(\mathcal{D})$ a $L_2(\mathcal{O})$. Toto ihned plyne z toho, že každá $\mathcal{D}$-měřitelná funkce je automaticky i $\mathcal{O}$-měřitelná.

Definice 23. Nechť $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{D})$ značí operátor ortogonální projekce z $L_2(\Omega, \mathcal{O}, P)$ do podprostoru $L_2(\Omega, \mathcal{D}, P_{\mathcal{D}})$, kde $P_{\mathcal{D}}$ je zúžení P na $\mathcal{D}$. Pro $X \in L_2(\Omega, \mathcal{O}, P)$ nazveme pak projekci

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{D})$$

podmíněnou střední hodnotou veličiny X za podmínky $\mathcal{D}$.

Díky známým vlastnostem operátorů ortogonální projekce platí

1. $\mathbb{E}(X|\mathcal{D}) \in L_2(\Omega, \mathcal{D}, P_{\mathcal{D}})$.
2. $\|\mathbb{E}(X|\mathcal{D})\|_{L_2} \leq \|X\|_{L_2}$.
3. $\mathbb{E}_0(\mathbb{E}(X|\mathcal{D})) = \mathbb{E}_0 X = \mathsf{E}\{X\}$, kde $\mathbb{E}_0$ je ortogonální projekce na podprostor generovaný nejjednodušší σ-algebrou $\{\emptyset, \Omega\}$.
4. Pro Y ohraničenou a $\mathcal{D}$-měřitelnou platí

$$\mathbb{E}\{YX|\mathcal{D}\} = Y\,\mathbb{E}\{X|\mathcal{D}\}.$$

Protože v L_2-prostorech pracujeme vlastně se třídami ekvivalentních funkcí, pak i $\mathbb{E}(X|\mathcal{D})$ je určena jednoznačně co do $P_{\mathcal{D}}$-ekvivalence.

5. Pro $X \geq 0$ s. j. $[P]$ je $\mathbb{E}(X|\mathcal{D}) \geq 0$ s. j. $[P_{\mathcal{D}}]$.

Nyní lze ukázat, že operátor $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{D})$ má spojité rozšíření z $L_2(\Omega, \mathcal{O}, P)$ na $L_1(\Omega, \mathcal{O}, P)$ s hodnotami v $L_1(\Omega, \mathcal{D}, P_{\mathcal{D}})$. Toto rozšíření $\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\}$ má následující vlastnosti:

1. pro $X \in L_1(\Omega, \mathcal{D}, P_\mathcal{D})$ je $\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\} = X$ s. j. $[P_\mathcal{D}]$.

2. $\|\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\}\|_{L_1} \leq \|X\|_{L_1}$.

3. $\mathsf{E}\{\mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\}\} = \mathsf{E}\, X$ s. j.

4. pro Y ohraničené a $\mathcal{D}$-měřitelné platí

$$\mathsf{E}\{Y\, X|\mathcal{D}\} = Y\, \mathsf{E}\{X|\mathcal{D}\} \quad \text{s. j. } [P_\mathcal{D}].$$

Toto rozšíření se provede následovně. Operátor projekce $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{D})$ na $L_2(\Omega, \mathcal{D}, P_\mathcal{D})$ je ohraničený operátor, když v $L_2(\Omega, \mathcal{O}, P)$, který je vnořen hustě do $L_1(\Omega, \mathcal{O}, P)$ uvažujeme spojitost vůči L_1-normě. Protože $L_1(\Omega, \mathcal{D}, P_\mathcal{D})$ je úplný a díky výše uvedené hustotě, lze tedy $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{D})$ jednoznačně rozšířit na celý prostor $L_1(\Omega, \mathcal{O}, P)$ s hodnotami v $L_1(\Omega, \mathcal{D}, P_\mathcal{D})$. Protože $\mathbb{E}(X|\mathcal{D}) = X$ pro $X \in L_2(\Omega, \mathcal{D}, P_\mathcal{D})$, pak spojitost tuto vlastnost zachová.

11 Dodatek 3

11.1 Stieltjesův a Lebesgue–Stieltjesův integrál

Stieltjesův integrál je zobecněním Riemannova integrálu v tom smyslu, že funkce, vůči níž se integruje je obecně jakákoliv funkce $g(\cdot)$ definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $-\infty < a < b < +\infty$, namísto funkce $g(x) = x$, která vystupuje v definici Riemannova integrálu. Stieltjesův integrál je definován jako limita integrálních sum typu

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})],$$

kde $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, tj.

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, \quad 1 = 1, 2, \ldots, n$$

při

$$\|\Delta\| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \to 0,$$

pokud tato limita existuje a je stejná pro všechny možné volby bodů $\xi_i,\ i = 1, \ldots, n$. Na rozdíl od Riemannova integrálu je možné, že přírůstky funkce $g(\cdot)$ mohou být i záporné. Pokud funkce $f(\cdot)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $g(\cdot)$ má na $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci, pak existuje Stieltjesův integrál značený jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x).$$

Existence $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro všechna dělení $\{\Delta\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $\|\Delta\| < \delta$ a pro všechny možné volby bodů $\xi_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) - S(\Delta) \right| < \varepsilon.$$

Hodnota $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ je tak jednoznačně určena.

Vlastnosti Stieltjesova integrálu.

1. Je-li $g(x) = \text{konst}$ na $\langle a, b\rangle$, pak $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = 0$.

2. Je-li c libovolné reálné číslo, pak $\int_a^b c\,\mathrm{d}g(x) = c(g(b) - g(a))$.

3. Pro libovolná α, β reálná je

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}(\beta g(x)) = \alpha\beta \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x),$$

když jeden z integrálů existuje.

4.

$$\begin{aligned}\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,\mathrm{d}g(x) &= \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}g(x) + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}g(x)\\ \int_a^b f_(x)\,\mathrm{d}[g_1(x) + g_2(x)] &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_1(x) + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_2(x),\end{aligned}$$

když pravá strana má smysl.

5. Je-li $a < c < b$, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}g(x) + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}g(x),$$

když integrál na levé straně existuje.

6. Integrace per partes

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x) = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a),$$

když alespoň jeden z integrálů existuje.

7. Když funkce $g(\cdot)$ je na $\langle a, b\rangle$ absolutně spojitá a tedy má skoro všude vůči Lebesgueově míře na $\langle a, b\rangle$ derivaci $g'(\cdot)$, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde integrál napravo je míněn ve smyslu Lebesgueově.

8. Když funkce $g(\cdot)$ je na $\langle a, b\rangle$ pouze skokovitá, to znamená, že existuje nejvýše spočetně mnoho bodů $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ kde

$$g(c_n + 0) - g(c_n - 0) \neq 0$$

a jinde je funkce $g(\cdot)$ konstantní, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(c_n)\,[g(c_n + 0) - g(c_n - 0)],$$

pokud řada napravo konverguje.

Pojem Stiltjesova integrálu se dá zobecnit na případ $a = -\infty,\ b = +\infty$, tj.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}g(x),$$

kde tento integrál je chápán jako limita

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x).$$

Když $f(\cdot)$ bude spojitá a ohraničená na $(-\infty,+\infty)$ a funkce $g(\cdot)$ má na $I\!R$ ohraničenou totální varianci, pak existuje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}g(x).$$

Předpokládejme tedy existenci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ a podívejme se, jakým způsobem se liší hodnoty Stieltjesova integrálu, když integrujeme přes (a,b), $\langle a,b)$, $(a,b\rangle$ či $\langle a,b\rangle$, tj. záleží na tom, zdali krajní body intervalu (a,b) jsou zahrnuty do integrace či nikoliv. Označme tedy (ve smyslu výše uvedené definice)

$$\begin{array}{ll}
\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) & \text{integrál přes } \langle a,b\rangle \\
\displaystyle\int_{a+0}^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) & \text{integrál přes } (a,b\rangle \\
\displaystyle\int_{a+0}^{b-0} f(x)\,\mathrm{d}g(x) & \text{integrál přes } (a,b) \\
\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,\mathrm{d}g(x) & \text{integrál přes } \langle a,b).
\end{array}$$

Z definice integrálu přes $\langle a,b\rangle$ plyne, že

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,[g(x_i)-g(x_{i-1})] = \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^n f(\xi_i)\,[g(x_i)-g(x_{i-1})] + \lim_{x_1\to a} f(\xi_i)\,[g(x_1)-g(a)] = \\
&= \int_{a+0}^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) + f(a)\,[g(a+0)-g(a)],
\end{aligned}$$

když druhá limita má smysl. Pokud tedy $f(a)\neq 0$ a funkce $g(\cdot)$ má zprava v bodě a skok, pak integrace přes $\langle a,b\rangle$ a $(a,b\rangle$ se mohou výrazně lišit.

Obdobná situace nastává i v pravém krajním bodě b, kde je snadno vidět, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_a^{b-0} f(x)\,\mathrm{d}g(x) + f(b)\,[g(b)-g(b-0)]$$

když existuje $\lim_{x\to b-0} g(x) = g(b-0)$.

Protože každá funkce $g(\cdot)$ s konečnou variací se dá napsat jako rozdíl

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

dvou neklesajících funkcí, je vidět, že při studiu Stieltjesova integrálu by bylo možné se omezit pouze na neklesající funkce.

Každá neklesající funkce na $(-\infty, +\infty)$ má pouze nejvýše spočetně mnoho skoků, a v nich ji lze předefinovat tak, aby byla všude zleva spojitá. Tím ke každé funkci $g(\cdot)$, která je neklesající, přiřadíme jednoznačně určenou funkci $g^*(\cdot)$, která je na celém $\mathbb{R}$ zleva spojitá a rovněž neklesající. Takováto funkce $g^*(\cdot)$ je vlastně zobecněním distribuční funkce nějaké náhodné veličiny. Z teorie míry je známo (viz např. [5]), že každá taková funkce $g^*(\cdot)$ generuje na borelovských podmnožinách přímky míru μ_{g^*}, a má tedy smysl uvažovat integrál ve smyslu Lebesgueově

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu_{g^*}(x)$$

vůči této míře. Jak souvisí potom tento integrál se Stieltjesovým integrálem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)?$$

Integrál chápaný vůči míře μ_{g^*} je nazýván Lebesgue–Stieltjesovým integrálem a platí, že pro každou spojitou funkci $f(\cdot)$ definovanou na $\langle a, b\rangle$ je

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g^*(x) + f(b)\,[g(b) - g(b-0)] = \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu_{g^*}(x).\end{aligned}$$

Teorie Stieltjesova integrálu má široké uplatnění v teorii pravděpodobnosti, neboť distribuční funkce

$$F(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}$$

je neklesající zleva spojitá funkce s ohraničenou variací na $\mathbb{R}$ a má tedy smysl uvažovat vůči ní Lebesgue–Stieltjesův integrál, přičemž platí, že

$$\int_a^b \mathrm{d}F(x) = F(b) - F(a) = P\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\},$$

protože pro funkci zleva spojitou je

$$\int_a^{b-0} f(x)\,\mathrm{d}F(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}F(x).$$

12 Použitá a doporučená literatura

[1] Anděl J.: Statistická analýza časových řad. Praha, SNTL 1976.

[2] Doob J. L.: Pravděpodobnostní procesy (rusky). Moskva, IIL 1956.

[3] Gichman I. I. a Skorochod A. V.: Úvod do teorie náhodných procesů (rusky). Moskva, Nauka 1965.

[4] Gichman I. I. a Skorochod A. V.: Teorie náhodných procesů (rusky). Moskva, Nauka 1971.

[5] Halmos P. R.: Measure Theory. New York, Van Nostrand 1950.

[6] Loéve M.: Teorie pravděpodobnosti (rusky). Moskva, Izd. inost. literatury 1962.

[7] Natanson I. P.: Teorie funkcí reálné proměnné (rusky). 2. vydání. Moskva, Goz. izd. 1957.

[8] Rozanov J. A.: Stacionární náhodné procesy (rusky). Moskva, Fizmatgiz 1963.

[9] Stoyanov J.: Counterexamples in Probability. Second Edition. New York, John Wiley & Sons 1997.

[10] Štěpán J.: Teorie pravděpodobnosti. Academia, Praha 1987.

[11] Ventcel A. D.: Kurs teorie náhodných procesů (rusky). Nauka, Moskva 1975.