

OTAZKY

1 NAHODNE' PROCESY

- definice: nahodny' proces, trajektorie
- konecni' rozměrná rozdělení / distribuce funkce / hustota v $(t_1, \dots, t_n)$

2 KONZISTENTNÍ SYSTÉM

- konzistentní systém distribučních funkcí
- věta: Daniell-Kolmogorov
- γ jako verze / rozměrná $X \rightarrow$ existence spojitě verze
- věta: Kolmogorov-Čentsov

3 PRAVĚPODOBŮSTNÍ CHARAKTERISTIKY

- stráně hodnota, autokovarianční a autokorelační funkce + vlastnosti
- gaussovske' procesy a existence

4 STACIONÁRNÍ PROCESY

- silné a slabě stacionární proces
- věta: implikace slabě $\Rightarrow$ silné

5 MARKOVSKÉ PROCESY

- definice
- matice pravděpodobnosti přechodu + její vlastnosti

6 WIENERŮV PROCES

- definice (i s ariftem)
- Wienerův proces vs. Brownův pohyb
- věta: standardní Wienerův proces
- Markovská vlastnost
- vlastnosti trajektorií

7 ČAS PRVNÍHO DOTYKU PRO W_s

- definice τ_a a jeho distribuce

8 POISSONŮV PROCES

- definice
- homogenní Poissonův proces
- Markovská vlastnost

9 LIMITA, SPOJITOST A DERIVACE NP

- limita X + věta o existenci + věta o konvergenci přes distribuční fce
- spojitost v to a kvadratickém středě + věta
- derivace podle středě + věta
- konkrétní aplikace pro Poissonův proces

10 STOCHASTICKÝ INTEGRÁL

- ortogonální přirůtky
- věta o existenci F : na L_2 $\rightarrow$ přirůtková funkce
- f, F a definice $L_2(F)$
- 1. krok konstrukce $I_X(f)$ + vlastnosti
- 2. krok konstrukce $I_X(f)$
- definice $\int f(s) dX_s$
- vlastnosti

11 RIEMANNŮV INTEGRÁL

- označení a definice
- věta o existenci

12 ERGODICKÁ VĚTA

- míra a důkaz pro slabě stacionární procesy

13 KARHUNEN-LOÈVE

- Karhunen-Loève expansion $\rightarrow$ konstrukce
- věta: Karhunen-Loève (míra)

14 CHAPMAN-KOLMOGOROV PRO ŘETĚZCE

- rovnice pro diskrétní a spojitý čas + diskrétní (odvození)

15 CHAPMAN-KOLMOGOROV PRO PROCESY

- odvození a definice podmíněných hustot
- rovnice pro Markovské procesy

16 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

- operátor G a derivace $P'(t)$ a $P'(t_0)$
- diferenciální rovnice pro Markovské procesy $\rightarrow$ míra $\Gamma \rightarrow P_{t,s}(\Gamma|x)$

①

Def: Necht' je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pravdepodobnostný priestor a $I \neq \emptyset$ lib. množina.
Systém NV $\{X_t : t \in I\}$ nazveme náhodný proces na I .

→ pro $\forall t \in I$ je X_t NV, $X_t(\omega) \in \mathbb{R}$

→ potom $E \neq \emptyset$ a ϵ je σ -alg. nad E , pak $X_t : \Omega \rightarrow E$ je $(X_t)_{t \in I}$
nazývá náhodný proces s hodnotami v E

→ X_t jsou měřitelné

Def: Necht' je $(X_t)_{t \in I}$ náhodný proces s hodnotami v (E, ϵ) . Zobrazení $t \mapsto X_t(\omega)$
pro pevné $\omega \in \Omega$ nazýváme trajektorii $(X_t)_{t \in I}$.

KLASIFIKACE

- a) dle času:
- 1, $I = \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$ - náhodný proces se spojitým časem $(X_t)_{t \geq 0}$
 - 2, $I = \mathbb{N}_0$ - časová řada $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$
 - 3, $I = \mathbb{R}^2$ - náhodné pole $(X_{t_1, t_2})_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}}$
- b) dle stavů:
- 1, $E = \mathbb{R}$ - náhodný proces
 - 2, $E = \mathbb{R}^d$ - náhodný vektorový proces
 - 3, $E = \mathbb{C}$ - komplexní náhodný proces

ROZDĚLENÍ NÁHODNÉHO PROCESU

- budeme brát konečné rozměrné rozdělení:

$$I_n = \{t_1, \dots, t_n\}, \quad t_i \in I \quad \text{a} \quad (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

- obor hodnot: $E^n = \{X = (X_1, \dots, X_n) : X_i \in E\} = \prod_{i=1}^n E_i$
 - σ -algebra: $\sigma\left(\bigcup_{i=1}^n B_i : B_i \in \epsilon\right) \stackrel{?}{=} \epsilon^n$
- } prostor (E^n, ϵ^n)
se σ -algebrou

→ za těchto předpokladů platí: $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ je náhodný vektor
z $(\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto (E^n, \epsilon^n)$

⇒ můžeme pro $B \in \epsilon^n$ definovat $P^{I_n}(B) := P\{\omega : (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})(\omega) \in B\}$

a tedy $(E^n, \epsilon^n, P^{I_n})$ je měřitelný prostor

- P^n je konečné rozměrné rozdělení $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ vzhledem k $I_n = \{t_1, \dots, t_n\}$
- def. konečné rozměrnou distribuční funkci pro $B = \prod_{i=1}^n B_i$, $B_i = (-\infty, c_i]$

$$F_{t_1, \dots, t_n}(c_1, \dots, c_n) = P^n(B) = P[\{\omega: X_{t_1}(\omega) \leq c_1, \dots, X_{t_n}(\omega) \leq c_n\}]$$

- zde pokud $\exists$ příslušné parciální derivace:

$$f_{t_1, \dots, t_n}(c_1, \dots, c_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_{t_1} \dots \partial x_{t_n}} F_{t_1, \dots, t_n}(c_1, \dots, c_n)$$

je konečné rozměrná hustota

σ -ALGEBRA NA $\mathbb{R}^I$

• Zavedeme množinu všech funkcí $f: I \rightarrow \mathbb{R}$: $\mathbb{R}^I = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}\} = \prod_{i \in I} \mathbb{R}$

Def: Řekneme, že C je cylinarická, $C \subset \mathbb{R}^I$, pokud $C = \prod_{i \in I} B_i$, kde $B_i = \mathbb{R}$ ať na konečné množině $i \in I$, tj. $\#\{i \in I: B_i \neq \mathbb{R}\} < +\infty$

• borelovská σ -algebra

1) $\Gamma = \{C \subset \mathbb{R}^I: C \text{ je cylinarická a } B_i \text{ otevřené}\} \rightarrow$ rozšíříme na topologii $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^I}$ tj. proveden konečné průniky a lib. i nepočítaný sjednocení
 $\rightarrow$ generují σ -algebru: $\mathcal{U}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^I}) = \mathcal{B}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^I})$

2) kolmogorovská σ -algebra: $\Gamma' = \{C \subset \mathbb{R}^I: C \text{ cylinarická a } B_i \text{ měřitelné}\}$
 $\rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^I) = \mathcal{U}(\Gamma')$ (nejmenší σ -algebra nad Γ')
 $\Rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^I) \subset \mathcal{U}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^I})$

$\rightarrow$ pokud je I spočetná $\Rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^I) = \mathcal{U}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^I})$

$\rightarrow$ pokud bychom místo $\mathbb{R}^I$ měli rovnou $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{K} = \mathcal{U}$
 co je to za množina? spojitě funkce?

KONZISTENTNÍ SYSTÉM FUNKCÍ

Nechť $F_{t_1, \dots, t_n}(c_1, \dots, c_n) = P[X_{t_1} \leq c_1, \dots, X_{t_n} \leq c_n]$ splňuje:

1) symetrie: $F_{t_1, \dots, t_n}(c_1, \dots, c_n) = F_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}}(c_{\pi(1)}, \dots, c_{\pi(n)})$

2) $\lim_{c_i \rightarrow +\infty} F_{t_1, \dots, t_n}(c_1, \dots, c_n) = F_{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n}(c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)$.

Systém takových funkcí $\{F_{t_1, \dots, t_n}(c_1, \dots, c_n); t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$, který splňuje 1) a 2) je konzistentní.

Věta: DANIELL - KOLMOGOROV

Nechť $I \neq \emptyset$ a $\{F_{t_1 \dots t_n} : I_n = \{t_1 \dots t_n\} \in I_n\}$ je konzistentní. Pak
 $\exists$ pravděpodobnostní míra μ na $(\mathbb{R}^I, \mathcal{K}(\mathbb{R}^I))$ t.j. $\mu(X_t(\omega) = \omega(t), t \in I)$
 platí: $\mu(\omega : X_{t_1}(\omega) \leq c_1, \dots, X_{t_n}(\omega) \leq c_n) = F_{t_1 \dots t_n}(c_1 \dots c_n)$.

Def: Necht' jsou X, Y náhodné procesy. Řekneme, že

- 1) Y je verze/modifikace X , pokud $\forall t \in I : P[X_t = Y_t] = 1 \Leftrightarrow X_t = Y_t$ s.j. P
- 2) X, Y mají stejná konečná rozměrná rozdělení, pokud
 $\forall \{t_1 \dots t_n\} \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : P[(X_{t_1} \dots X_{t_n}) \in B] = P[(Y_{t_1} \dots Y_{t_n}) \in B]$
- 3) X, Y jsou nerozlišitelné, pokud $P[\forall t \in I : X_t = Y_t] = 1$.

$\rightarrow 3 \Rightarrow 1$, ale $1 \Rightarrow 3$ jen pro I spočetnou nebo I nepočtetnou separabilní při spojitých trajektoriích.

$1 \Rightarrow 2$ a 2 má smysl i pro X, Y na různých prostorech

EXISTENCE SPOJITÉ VERZE

Věta: KOLMOGOROV - ČENTSOV

Nechť je $(X_t)_{t \in I}$ náhodný proces takový, že $\exists \alpha > 0, \beta > 0, c > 0$ t.j.

$$E|X_t - X_s|^\alpha \leq c|t - s|^{1+\beta}.$$

Potom existuje spojitá verze Y k procesu X .

$\rightarrow$ jedná se o postacující podmínku

$\rightarrow$ pokud má proces spojitou verzi, budeme uvažovat právě tuto

(3)

Def: Některý $X = (X_t)_{t \in I}$ komplexní náhodný proces s konečnou stacionární kovariancí, tj. $\forall t: \mathbb{E}|X_t| < +\infty$.

1) (komplexní) funkci $t \rightarrow \mu_t = \mathbb{E}X_t$ nazýváme stacionární kovarianční X ,
je-li $\mu_t = 0$, X nazýváme centrovaný

2) pokud má X konečné i druhé momenty, tj. $\forall t: \mathbb{E}|X_t|^2 < +\infty$,
pak funkci $C_X: I \times I \rightarrow \mathbb{C}$, $C_X(s, t) := \mathbb{E}[(X_s - \mathbb{E}X_s)(\overline{X_t - \mathbb{E}X_t})]$
nazýváme autokovarianční funkcií X

3) definujeme $R_X(s, t) = \mathbb{E}[X_s \cdot \overline{X_t}]$ autokorelační funkcií X

$$\rightarrow C_X(t, t) = \mathbb{E}[X_t - \mu_t]^2 \text{ je vždy } \geq 0$$

VLASTNOSTI FUNKCÍ

$$I, |R_X(s, t)| = \sqrt{R_X(s, s)} \sqrt{R_X(t, t)} \quad (\text{Cauchy-Schwarz})$$

II, R_X a C_X jsou pozitivně semidefiniční funkce:

$$\forall I_n = \{t_1, \dots, t_n\} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}^n: \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} C_X(t_i, t_j) \geq 0$$

$$\text{autokor: } \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \mathbb{E}[(X_{t_i} - \mu_{t_i})(\overline{X_{t_j} - \mu_{t_j}})] =$$

$$= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (X_{t_i} - \mu_{t_i}) \cdot \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} (\overline{X_{t_j} - \mu_{t_j}}) \right] =$$

$$= \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i (X_{t_i} - \mu_{t_i}) \right|^2 \geq 0 \Rightarrow (C_X(t_i, t_j))_{i,j=1}^n \geq 0$$

$$III, R_X(s, t) = \overline{R_X(t, s)} \quad \text{a} \quad C_X(s, t) = \overline{C_X(t, s)}$$

IV, lze ukázat, že každá pozitivně semidefiniční funkce vzniká jako autokovarianční funkce náhodného procesu

GAUSSOVSKÉ NÁHODNÉ PROCESY

Def: Náhodný proces je gaussovský, pokud všechna jeho konečná rozměrná rozdělení jsou gaussovská.

Opakování:

• hustota $n=1$:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

• hustota $n>1$:
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right]$$

• $I_n = \{t_1, \dots, t_n\}$, $C^{I_n} = (C(t_i, t_j))_{i,j=1}^n = \text{Cov}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$

a $E[(X^{I_n} - \mu^{I_n})^T (X^{I_n} - \mu^{I_n})]$, kde

$$\mu^{I_n} = (EX_{t_1}, \dots, EX_{t_n}) = E(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = EX^{I_n}$$

Věta: O EXISTENCI GAUSSOVSKÉHO NP

Nechť $I \neq \emptyset$ a $\mu: I \rightarrow \mathbb{C}$ a $C: I \times I \rightarrow \mathbb{C}$ pozitivně semidefinitní. Potom existují gaussovský náhodný proces X_t . $\mu = \mu_x$ a $C = C_x$. Pokud μ a C jsou reálné funkce, pak X lze konstruovat jako reálný proces.

následně diktum

• pro reálný případ

• příp. $C \geq 0$

• $I_n = \{t_1, \dots, t_n\}$ a položíme $\mu^{I_n} = (\mu(t_1), \dots, \mu(t_n))$
$$C^{I_n} = (C(t_i, t_j))_{i,j=1}^n \geq 0$$

• položíme $f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{|C|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \mu^{I_n})^T (C^{I_n})^{-1}(x - \mu^{I_n})\right]$

a $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{t_1, \dots, t_n}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$

→ zde je potřeba ověřit, že F je konzistentní & kolmogorov



Def: Řekneme, že náhodný proces je silně stacionární, pokud

$$F_{t_1 \dots t_n} = F_{t_1+h \dots t_n+h} \quad \forall I_n = \{t_1 \dots t_n\} \text{ a } h \geq 0.$$

$$\Rightarrow \Pi_{I_n} X \stackrel{d}{=} \Pi_{I_n+h} X \text{ ve smyslu rovnosti distribucí}$$

Def: Řekneme, že X je slabě stacionární, pokud

1) X má konečné druhé momenty

2) $\mu_X = \text{const.}$, $C_X(s, t) = C_X(s+h, t+h) \quad \forall s, t \in I, h \geq 0$

→ 1) zaručuje konečné 1. momenty: $E|X_t| \leq (E|X_t|^2)^{1/2} \cdot (E1)^{1/2} = (E|X_t|^2)^{1/2}$

→ 2) $\Rightarrow \mu_X$ ustálil na čarce, C_X ustálil na čarce

Věta:

I, Když má X konečné druhé momenty a je silně stacionární, pak je i slabě stacionární.

II, Když je X slabě stacionární a gaussovský, pak je i silně stacionární.

důkaz:

I, • vime: $\forall I_n = \{t_1 \dots t_n\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$P[(X_{t_1} \dots X_{t_n}) \in B] = P[(X_{t_1+h} \dots X_{t_n+h}) \in B]$$

$$\bullet \mu_X(t_1) = EX_{t_1} = \int_{\mathbb{R}} x dF_{t_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} x dF_{t_2}(x) = EX_{t_2} = \mu_X(t_2)$$

$$\bullet C_X(s, t) = E[(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)] = E[(X_s - \mu)(X_t - \mu)] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} (x - \mu)(y - \mu) dF_{s, t}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} (x - \mu)(y - \mu) dF_{s+h, t+h}(x, y) =$$

$$= E[(X_{s+h} - \mu)(X_{t+h} - \mu)] = C_X(s+h, t+h)$$

II, • dlema: $F_{t_1, \dots, t_n} = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}$

• $F_{t_1, \dots, t_n}$ je gaussovské rozdělení s μ, Σ
 $F_{t_1+h, \dots, t_n+h}$ $\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}$

• $\mu \stackrel{?}{=} \tilde{\mu} \rightarrow \mu = (\mathbb{E} X_{t_1}, \dots, \mathbb{E} X_{t_n}) = (\mu_{t_1}, \dots, \mu_{t_n}) =$
 $= (\mathbb{E} X_{t_1+h}, \dots, \mathbb{E} X_{t_n+h}) = \tilde{\mu}$

• $\Sigma \stackrel{?}{=} \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma_{jk} = C(X_{t_j}, X_{t_k}) = C(X_{t_j+h}, X_{t_k+h}) = \tilde{\Sigma}_{jk} \quad \forall j, k$

$\Rightarrow$ vlastnosti jsou stejné $\Rightarrow$ rozdělení jsou stejná

5

Def: X nazveme Markovským procesem, $X = (X_t)_{t \in T}$ a $T \subset \mathbb{R}$, pokud

$$P[X_t \leq x \mid X_s, s \leq t_0] = P[X_t \leq x \mid X_{t_0}], \quad s \leq t_0 < t,$$

tj. rozdíl v čas t závisí pouze na ^{posledním} ~~počátečním~~ stavu.

→ speciální případ: Markovský řetězec

• $t \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$ obor hodnot je diskrétní

$$P[X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}] = P[X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}]$$

• označme S obor hodnot $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, S je konečná

- $p_{ij}^{(n)} = P[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$ - pravděpodobnost přechodu

→ příp. že p_{ij} jsou nezávislé na $n \Rightarrow$ homogenní řetězec

- $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ - matice pravděpodobností přechodu

VLASTNOSTI P

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$$

• $p_i^{(0)} = P[X_0 = i]$... počáteční stav $p^{(0)}$ vektor pro $i \in S$

$$p_i^{(n)} = P[X_n = i]$$

$$p_j^{(1)} = P[X_1 = j] = \sum_{i \in S} P[X_1 = j \wedge X_0 = i] = \sum_{i \in S} \frac{P[X_1 = j \wedge X_0 = i]}{P[X_0 = i]} \cdot P[X_0 = i] =$$

$$= \sum_{i \in S} P[X_1 = j \mid X_0 = i] \cdot P[X_0 = i] = \sum_{i \in S} p_{ij} \cdot p_i^{(0)} = (P^T p^{(0)})_j$$

$$\Rightarrow p^{(1)} = P^T \cdot p^{(0)}$$

• stacionární rozdíl: $\pi^T = \pi^T \cdot P$

6

Def: Náhodný proces $(W_t)_{t \geq 0}$ je Wienerův proces, pokud

- 1) $W_0 = 0$ z.j.
- 2) W má nezávislé přírůstky, tj. $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n$ jsou $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezávislé NV
- 3) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)) \quad \forall t > s$
- 4) W má skoro jistě spojitou trajektorii: $P\{\exists \omega: t \rightarrow W_t(\omega) \text{ je spoj. v } t\} = 1$

X poznámka:

- z 1 a 3) $\Rightarrow W$ má silně stacionární přírůstky: $W_t - W_s \stackrel{D}{=} W_{t+h} - W_{s+h}$
 - udeň $s < t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$
 - $W_t - W_s = W_{t_n} - W_{t_0} = \underbrace{(W_{t_n} - W_{t_{n-1}})}_{\sim \mathcal{N}(t_n - t_{n-1}) \cdot \mathcal{N}(0,1)} + \underbrace{(W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}})}_{\sim \mathcal{N}(t_{n-1} - t_{n-2}) \cdot \mathcal{N}(0,1)} + \dots + \underbrace{(W_{t_1} - W_{t_0})}_{\sim \mathcal{N}(t_1 - t_0) \cdot \mathcal{N}(0,1)}$
 - $\lambda \cdot \mathcal{N}(0,1)$, kde $\lambda = \|\lambda_1, \dots, \lambda_n\|_2 = \sigma^2 \sqrt{(t_n - t_{n-1}) + t_{n-1} - t_{n-2} + \dots + t_1 - t_0}$
- $\rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$

- lze dostat spojitou verzi pro $\alpha = 4$, $\epsilon = 3\sigma^4$ a $\beta = 1$

- ✓ pokud $\sigma = 1 \rightarrow$ standardní Wienerův proces

Věta:

Udeň W standardní Wienerův proces. Pak platí:

- 1) W je gaussovský proces s $f(t) = \mathbb{E}W_t = 0$ (centrován)
a $C_W(s, t) = \min\{s, t\}$, $s, t \geq 0$

- 2) W má konečné rozměrné hustoty

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{t_1}(x_1) \cdot \prod_{j=2}^n f_{t_j - t_{j-1}}(x_j - x_{j-1}), \text{ kde}$$

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{x^2}{t}\right]$$

důkaz:

$$1) \quad W_{t_j} = (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) + \dots + (W_{t_1} - W_{t_0}) \quad \left. \vphantom{W_{t_j}} \right\} \text{ sestavím maticovou rovnici}$$

$$I_n = \{t_1 < t_2 < \dots < t_n\}, \quad t_0 = 0$$

$$Z_n = \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{t_1} - W_{t_0} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{pmatrix} = A_n \cdot Y_n$$

je gaussovský
vektor (na-
normalise-
a normalis-
komponen-
ty)

→ Z_n je lineární transformace $Y_n \Rightarrow Z_n$ je gaussovský

$$\bullet \quad \mu_t = E W_t = E (W_t - W_0) = 0 \quad W_t - W_0 \sim N(0, \sigma^2 t)$$

$$\bullet \quad C_W(s, t) = E[W_s W_t] = E[W_s (W_t - W_s) + W_s^2] = E[(W_s - W_0)(W_t - W_s)] + E W_s^2 = 0 + s = s = \min\{s, t\}$$

2) provádíme transformaci ústředí

$$\bullet \quad P[Z_n \in B] = P[A_n \cdot Y_n \in B] = P[Y_n \in \tilde{A}_n^{-1}(B)] = \int f_{Y_n}(y) dy =$$

$$= \left[\begin{array}{l} z = A_n y \\ dz = A_n dy = dy \end{array} \right] = \int_B \underbrace{f_{Y_n}(\tilde{A}_n^{-1}(z))}_{=} dz = \int_B \underbrace{f_{Z_n}(z)}_{=} dz$$

$$\bullet \quad A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_n^{-1} \cdot Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 - z_1 \\ \vdots \\ z_n - z_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad f_{Y_n}(y) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{y_j^2}{t_j - t_{j-1}}\right] \quad \text{a } t_0 = 0$$

$$f_{Z_n}(z) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(z_j - z_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right], \quad t_0 = 0$$

Věta: MARKOVSKÁ VLASTNOST

Buď W standardní Wienerův proces. Pak platí:

$$1) \quad \forall t \geq 0: \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n: (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-2}} - W_{t_{n-3}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0}) \text{ nezávislé na } (W_s)_{s \leq t}$$

$$2) \quad \text{pro } t_0 \geq 0 \text{ libovolné je } \tilde{W}_t = W_{t+t_0} - W_{t_0}, \quad (\tilde{W}_t)_{t \geq 0} = (W_{t+t_0} - W_{t_0})_{t \geq 0}$$

opět standardní Wienerův proces (tj. restartovaný Wienerův proces)

důkaz:

2) stačí ověřit definice

- $\tilde{w}_0 = w_{t_0} - w_{t_0} = 0$ ✓
- $(\tilde{w}_{t_1}, \tilde{w}_{t_2} - \tilde{w}_{t_1}, \dots, \tilde{w}_{t_n} - \tilde{w}_{t_{n-1}}) = (\overbrace{w_{t_1} - w_{t_0}}, \overbrace{w_{t_2} - w_{t_0} - w_{t_1} + w_{t_0}}, \dots, \overbrace{w_{t_n} - w_{t_0} - w_{t_{n-1}} + w_{t_0}})$ nezávislé přírůstky ✓
- $\tilde{w}_t - \tilde{w}_s = w_{t+t_0} - w_{s+t_0} - w_{s+t_0} + w_{t_0} \sim \mathcal{N}(0, (t-s))$
- spojité trajektorie : $t \rightarrow \tilde{w}_t = w_{t+t_0} - w_{t_0}$ je spojitá ✓

1) def. $Y_n = (w_{t+h_1} - w_t, w_{t+h_2} - w_{t+h_1}, \dots, w_{t+h_n} - w_{t+h_{n-1}})$

$$Z_n = (w_{t+h_1} - w_t, w_{t+h_2} - w_t, \dots, w_{t+h_n} - w_t)$$

$$\Rightarrow Z_n = A_n \cdot Y_n, \text{ kde } A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- $(w_s - w_0, w_t - w_s, w_{t+h_1} - w_t, \dots, w_{t+h_n} - w_{t+h_{n-1}})$

nezávislé přírůstky $0 \leq s < t < t+h_1 < \dots < t+h_n$

$\Rightarrow Y_n$ nezávislé na $w_s \Rightarrow Z_n$ je také nezávislé na $w_s, s \leq t$

WIENEROVSKÉ TRAJEKTORIE

- 1) skoro jistě ne diferencovatelné v každém bodě : $\frac{w_{t+h} - w_t}{h} \sim \mathcal{N}(0, 1/h)$
- 2) nejsou monotónní na žádném $[t, t+h]$
- 3) na každém $[t, t+h]$ je nekonečně mnoho vlních a menších hodnot
- 4) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w_t}{t} = 0$ s.j.

Def: Necht' je $(w_t)_{t \geq 0}$ standardní Wienerův proces. Necht' $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.
 Položíme $Y_t = \mu t + \sigma W_t, t \geq 0$. Pak $(Y_t)_{t \geq 0}$ je Wienerův proces s driftem.

$$\rightarrow \mathbb{E} Y_t = \mu t$$

$$\text{Var } Y_t = \sigma^2 \cdot t$$

$$Y_0 = 0 \text{ s.j.}$$

Y_t je gaussianský proces

Def: čas prvého dojazdu je def. jako

$$\tau_a = \inf \{ t \geq 0 : W_t \geq a \} \in [0, +\infty]$$

→ τ_a je NV

← Lévy distribuce

Věta:

NV τ_a má hustotu $f_{\tau_a}(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi} x^{3/2}} \exp\left[-\frac{a^2}{2x}\right], x > 0$

důkaz:

• položíme $M_t^W := \max_{0 \leq s \leq t} W_s \rightarrow \begin{aligned} \{ \omega : \tau_a(\omega) > t \} &= \{ \omega : M_t^W < a \} \\ \{ \omega : \tau_a(\omega) \leq t \} &= \{ \omega : M_t^W \geq a \} \end{aligned}$

• $F_{\tau_a}(t) = P[\tau_a \leq t] = P[M_t^W \geq a] = \overset{(1)}{P[M_t^W \geq a, W_t \leq a]} + \overset{(2)}{P[M_t^W \geq a, W_t > a]}$

I, $W_t > a \Rightarrow M_t^W \geq a \Rightarrow \overset{(2)}{=} P[W_t > a]$

II, $P[M_t^W \geq a, W_t \leq a] = \{W_{\tau_a} = a\} = P[M_t^W \geq a, W_t \leq W_{\tau_a}] =$

$= P[M_t^W \geq a, W_t - W_{\tau_a} \leq 0] = \text{BLACK BOX, KTERÝ NEDAŤA SPRÁVIL} =$

$= P[M_t^W \geq a, W_t - W_{\tau_a} > 0] = P[M_t^W \geq a, W_t > a] = \overset{(2)}{=}$

$\Rightarrow P[\tau_a \leq t] = P[M_t^W \geq a] = 2P[W_t > a] = 2 \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{2t}\right] dx =$

$= \left[y = \frac{x}{\sqrt{2t}} \right] = 2 \int_{a/\sqrt{2t}}^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-y^2) dy \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{\tau_a}(t) = \frac{d}{dt} F_{\tau_a}(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{a/\sqrt{2t}}^\infty e^{-y^2} dy \right] = \left[\text{dosadím argumentem derivaci podle } t \right]$

$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot (-1) \cdot \exp\left[-\frac{a^2}{2t}\right] \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(-1/2)}{t^{3/2}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} \cdot \exp\left[-\frac{a^2}{2t}\right]$

BLACK BOX:

$B_S = W_S + \tau_a - W_{\tau_a}$ relativ na trajektorii

je opět Wienerův proces

→ použijeme Markovskou vlastnost

ponieważ:

$$\bullet P[M_t^W > a] = 2P[W_t > a], \quad a > 0$$

$$\bullet \sigma_a < +\infty \text{ skoro jst: } P[\sigma_a \leq t] = 2P[W_t > a] = 2P[\sqrt{t}Z > a] = \\ = 2P\left[Z > \frac{a}{\sqrt{t}}\right], \text{ kde } W_t = Z \cdot \sqrt{t} \text{ a } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

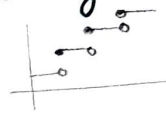
$$\text{a gdy } t \rightarrow \infty \Rightarrow P[\sigma_a \leq t] \rightarrow 1$$

$$\bullet E\sigma_a = +\infty : E\sigma_a = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{a}{\sqrt{2\pi} x^{3/2}} \exp\left[-\frac{a^2}{2x}\right] dx = +\infty$$

8)

Def: Řekneme, že náhodný proces je (homogenní) Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$, zm. $\{N(t) : t \geq 0\}$, pokud

- 1) $N_0 = 0$ s.j.
- 2) $\{N(t) : t \geq 0\}$ má nezávislé přírůstky, tj. $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ jsou $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \dots, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_1} - N_{t_0}$ nezávislé NV
- 3) $\forall t \geq s : N_t - N_s \sim P_0(\lambda(t-s))$
- 4) skoro všechny trajektorie jsou zprava spojitě, existuje limita zleva, obor hodnot je N_0 a jsou neklesající



poznámky:

- $N_t = N_t - N_0 \sim P_0(\lambda t) \rightarrow P[N=n] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, n \in N_0$
- pro $\lambda = 1$ hovoříme o standardním Poissonově procesu
- homogenní $\Rightarrow \lambda$ nezávisí na t
- N_t je NV # událostí v intervalu $[0, t]$, λ odpovídá intenzitě událostí
- existence $\approx$ Daniell-Kolmogorov
- přírůstky jsou stacionární: $N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$
- pokud jsou $X_i \sim P_0(\lambda_i)$ nezávislé $\Rightarrow (\sum_{i=1}^n X_i) \sim P_0(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$

Věta:

Někdy je $\{N(t) : t \geq 0\}$ homogenní Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$. Potom platí:

- 1) $E N_t = \lambda t = \text{Var } N_t$
- 2) $C_N(s, t) = \lambda \min\{s, t\}$

důkaz:

$$1) E N_t = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \lambda t = \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = \lambda t$$

$$\text{Var } N_t = E N_t^2 - (E N_t)^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

2) $s < t$:

$$\begin{aligned} C_N(s, t) &= E[N_s \cdot N_t] = E[N_s N_t] = E[(N_t - N_s) N_s] + E[N_s^2] - E[N_s] E[N_t] = \\ &= E[(N_t - N_s)(N_s - N_0)] + E[N_s^2] - E[N_s] E[N_t] = E(N_t - N_s) E(N_s - N_0) + E[N_s^2] - E[N_s] E[N_t] = \\ &= \lambda(t-s)\lambda s + (\lambda s)^2 + \lambda s - \lambda s \lambda t = \lambda s = \lambda \cdot \min\{s, t\} \end{aligned}$$

Věta: MARKOVOVA VLASTNOST

Nechť je $N = (N_t)_{t \geq 0}$ poissonův proces. Pak je markovský, tj.

$\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t \quad \forall 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n \leq l \quad k_i \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0$:

$$P[N_t = l \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n] = P[N_t = l \mid N_{t_n} = k_n].$$

důkaz: $P[N_t = l \mid N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n] =$

$$= \frac{P[N_t = l, N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n]}{P[N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2, \dots, N_{t_n} = k_n]} =$$

$$= \frac{P[N_{t_1} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1, \dots, N_t - N_{t_n} = l - k_n]}{P[N_{t_1} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}]} =$$

$$= \frac{P[N_{t_1} = k_1] \cdot P[N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1] \cdot \dots \cdot P[N_t - N_{t_n} = l - k_n]}{P[N_{t_1} = k_1] \cdot \dots \cdot P[N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}]} =$$

$$= P[N_t - N_{t_n} = l - k_n]$$

a PS: $P[N_t = l \mid N_{t_n} = k_n] = \frac{P[N_t = l, N_{t_n} = k_n]}{P[N_{t_n} = k_n]} =$

$$= \frac{P[N_{t_n} = k_n, N_t - N_{t_n} = l - k_n]}{P[N_{t_n} = k_n]} = \frac{P[N_{t_n} = k_n] \cdot P[N_t - N_{t_n} = l - k_n]}{P[N_{t_n} = k_n]} =$$

$$= P[N_t - N_{t_n} = l - k_n] = \text{LS} \quad \checkmark$$

LIMITA

- předpokládáme, že $t_0 \in I$ je hraniční bod $\rightarrow$ o.m. $t_0 \in I'$

Def: Řekneme, že X má limitu v $t_0 \in I'$

- 1) v L_2 , pokud existují náhodná proměnná Y t.j. $\mathbb{E} |X_t - Y|^2 \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$
- 2) v P , pokud existují náhodná proměnná Y t.j. $P\text{-}\lim_{t \rightarrow t_0} X_t = Y$.

Věta:

Buď $X = (X_t)_{t \in I}$ náhodný proces s konstantními analyt. momenty. Pak

$\lim_{t \rightarrow t_0} X_t$ existuje v $L_2 \Leftrightarrow \exists$ konečná $\lim_{(t,s) \rightarrow (t_0, t_0)} R(t,s)$.

Důkaz:

$\Rightarrow$ • ukaž $Y = \lim_{t \rightarrow t_0} X_t$ v $L_2(P)$

$$\lim_{(t,s) \rightarrow (t_0, t_0)} \mathbb{E}[X_t X_s] = \lim_{(t,s) \rightarrow (t_0, t_0)} \langle X_t, X_s \rangle_{L_2(P)} \Rightarrow \langle Y, Y \rangle = \|Y\|_{L_2(P)}^2 < +\infty$$

nepojitost stochastického součinu

$\Leftarrow$ • použijeme B-C podmínku:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |X_s - X_t|^2 &= \langle X_s - X_t, X_s - X_t \rangle_{L_2(P)} = \mathbb{E} |X_s|^2 + \mathbb{E} |X_t|^2 - 2\mathbb{E}[X_s X_t] = \\ &= R(s,s) + R(t,t) - 2R(s,t) \xrightarrow{(t,s) \rightarrow (t_0, t_0)} 0 \Rightarrow (X_t)_{t \in I} \text{ splňuje BCP} \end{aligned}$$

• $L_2(P)$ je úplný $\Rightarrow \exists Y \in L_2(P) : Y = L_2\text{-}\lim_{t \rightarrow t_0} X_t$

Věta:

Buď $X = (X_t)_{t \in I}$ náhodný proces, Y náhodná proměnná. Pak

$$X_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{P} Y \Leftrightarrow \exists \lim_{(t,s) \rightarrow (t_0, t_0)} F_{X_t, X_s}(x,y) = F_{Y,Y}(x,y) \text{ po } \forall \text{ body spojitosti } F_{X_t, Y}$$

pomůcka:

$$* \Leftrightarrow \exists f \in C_b(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) : \mathbb{E} f(X_s, X_t) \xrightarrow{(t,s) \rightarrow (t_0, t_0)} \mathbb{E} f(Y, Y)$$

$$F_{Y,Y}(x,y) = P[Y \leq x, Y \leq y] = P[Y \leq \min\{x,y\}] = F_Y(\min\{x,y\})$$

PŘESKAKUJU DŮKAZ $\frac{xx}{j}$

Def: Řekneme, že náhodný proces $X = (X_t)_{t \in I}$ je

1) stochasticky spojitý v $t_0 \in I$, pokud

I, t_0 je izolovaný bod NEBO

II, $t_0 \in I'$ a $X_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{P} X_{t_0}$

2) spojitý v kvadratickém středu, pokud

I, $t_0 \in I$ je izolovaný bod NEBO

II, $t_0 \in I'$ a $X_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{L_2} X_{t_0}$.

Věta:

Bud' $X = (X_t)_{t \in I}$, $t_0 \in I'$. Pak

1) Pokud $E|X_t|^2 < +\infty \quad \forall t \in I$, pak X je spojitý v t_0 dle kvadr. středu

$$\Leftrightarrow \lim_{(s,t) \rightarrow (t_0, t_0)} R(s,t) = R(t_0, t_0)$$

2) X je stochasticky spojitý v $t_0 \Leftrightarrow \lim_{(s,t) \rightarrow (t_0, t_0)} F_{X_s, X_t}(x,y) = F_{X_{t_0}, X_{t_0}}(x,y)$
v bodech spojitosti PS

$\rightarrow$ dříve vplyva' a přechodické dvou vř, kde $Y = X_{t_0}$

DERIVACE

Def: Řekn' je $(X_t)_{t \in I}$ proces s konečnými druhými momenty. Pokud existuje
 L_2 - $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{X_{t+h} - X_t}{h}$, nazveme ji derivací $(X_t)_{t \in I}$ v t podle kvadr. středu.

Věta:

Řekn' má $(X_t)_{t \in I}$ konečné druhé momenty. Pak platí:

1) je-li X_t centrován, pak má L_2 -derivaci v $t_0 \in I' \Leftrightarrow$

$$\exists \lim_{(h,h') \rightarrow (0,0)} \frac{1}{hh'} \left[R(t_0+h, t_0+h') - R(t_0, t_0+h') - R(t_0+h, t_0) + R(t_0, t_0) \right]$$

2) pokud $\mu(t) = EX_t$, pak L_2 -derivaci $\exists$, pokud $\exists \mu'(t_0)$

a $\exists$ limita výše.

Def: Budeť $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$ proces s konečnými druhými momenty.

Překme, že X má ortogonální přírůstky, pokud

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)(X_v - X_u)] = 0 \quad \forall a \leq s < t \leq u < v \leq b \text{ kladně}$$

disjunktmi časovými intervaly $[s, t]$ a $[u, v]$.

X se pak nazývá ortogonální proces.

Věta: O PŘÍRŮSTKOVÉ FUNKCI

Nechť je $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$ OG proces, který je uťrovatý a L_2 -spojitý zprava na $[a, b]$. Pak ž právě jedna funkce $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ taková, že

1) F je spojité zprava

2) $F(t) = 0 \quad \forall t \leq a$
 $F(t) = F(b) \quad \forall t \geq b$

$$F(t) - F(s) = \mathbb{E}|X_t - X_s|^2 \quad \forall a \leq s < t \leq b$$

$\Rightarrow$ taková F se nazývá přírůstková funkce

3) F je neklesající

Důkaz:

- položíme: $F(t) = 0 \quad \forall t \leq a$
 $F(t) := \mathbb{E}|X_b - X_a|^2 = F(b) \quad \forall t \geq b$
 $F(t) := \mathbb{E}|X_t - X_a|^2 \quad \forall t \in [a, b]$

} konstrukce F

• pro $a \leq s < t \leq b$ platí:

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathbb{E}|X_t - X_a|^2 = \mathbb{E}|X_t - X_s + X_s - X_a|^2 = \\ &= \mathbb{E}|X_t - X_s|^2 + \mathbb{E}|X_s - X_a|^2 - 2\mathbb{E}(X_t - X_s)(X_s - X_a) \stackrel{=0 \text{ (ortogonalita)}}{=} \mathbb{E}|X_t - X_s|^2 + F(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(t) - F(s) = \mathbb{E}|X_t - X_s|^2 \quad \text{a } F \text{ je neklesající}$$

• Spojitost zprava: $F(t+h) - F(t) = \mathbb{E}|X_{t+h} - X_t|^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0 \Rightarrow X$ je spojité zprava v $L_2 \Rightarrow F$ je spojité zprava $\Rightarrow$ existence

• jednoznačnost: bod 2) určuje $G(t)$ pro $t \leq a, t \geq b$,

$$G(t) - G(a) = \mathbb{E}|X_t - X_a|^2$$

příklad: Wienerův proces

- W je 0b
- vezmeme interval $[0,1] \Rightarrow F(t) = 0 \quad t \leq 0 \wedge F(t) = t \quad t \in [0,1] \wedge F(t) = 1 \quad t > 1$
 $\rightarrow \mu_F(s,t) = s - t$?

uvidí se F přímá funkce na $[a,b]$. Definujeme míru

$$\mu_F((s,t]) = F(t) - F(s) \text{ pro } a \leq s < t \leq b.$$

Tuto míru rozšíříme na $\mathcal{B}([a,b])$ a umíme definovat

$$L_2([a,b], \mu_F) = \left\{ f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ je } \mu_F \text{ měřitelná a } \int_a^b |f(s)|^2 d\mu_F(s) < +\infty \right\} = L_2(F)$$

1. krok

- definujeme pro jednoduché funkce

$$f \in L_2(F) \text{ jednoduchá} \rightarrow f(t) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[t_{k-1}, t_k]}(t)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(s) dX_s = \sum_{k=1}^n c_k [X_{t_k} - X_{t_{k-1}}]$$

- nyní: $I_X(f) = \int_a^b f(s) dX_s$

$$I_X(f) \in L_2(P) : \mathbb{E} |I_X(f)|^2 < +\infty$$

$$(I_X f)(\omega) = \sum_{k=1}^n c_k (X_{t_k}(\omega) - X_{t_{k-1}}(\omega))$$

- vlastnosti: Někdy jsou f, g dvě jednoduché funkce z $L_2(F)$. Pak platí:

1) $I_X(f)$ je dobře definováno

2) $\mathbb{E} I_X(f) = 0 \rightarrow I_X(f)$ je centrován

3) linearita: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : I_X(\alpha f + \beta g) = \alpha I_X(f) + \beta I_X(g)$

4) izometrie: $\frac{\langle I_X(f) | I_X(g) \rangle}{\mathbb{E} [I_X(f) \cdot I_X(g)]} = \frac{\langle f | g \rangle_{L_2(F)}}{\int_a^b f(s)g(s) d\mu_F(s)}$

$$\begin{aligned} 5) \quad f = g &\Rightarrow \text{Var}(I_X(f)) = \mathbb{E} |I_X(f)|^2 = \langle f | f \rangle_{L_2(F)} = \\ &= \int_a^b |f(s)|^2 d\mu_F(s) \end{aligned}$$

2. krok

- $f \in L_2(F)$ libovolná : $\exists (f_n)_{n=1}^{\infty}$ jasně definovaných tj. $f_n \rightarrow f$ v $L_2(F)$
a tedy $\|f_n - f\|_{L_2(F)} \rightarrow 0$. $\Rightarrow (f_n)_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská

$$\Rightarrow \|I_X(f_n) - I_X(f_m)\|_{L_2(P)} = \|I_X(f_n - f_m)\|_{L_2(P)} \stackrel{\text{izon}}{=} \|f_n - f_m\|_{L_2(F)} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow I_X(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_X(f_n), \quad f \in L_2(F)$$

Def: Necht' je X centrováný O6 prouž, F přiměřená funkce a $f \in L_2(F)$.

Necht' $f_n \rightarrow f$ v $L_2(F)$ a $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jasně definovaných funkcí. Pak L_2 -lim $I_X(f_n)$ existuje a

$$I_X(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} I_X(f_n).$$

$$\text{Značíme } I_X(f) = \int_a^b f(s) dK_s.$$

VLASTNOSTI

Bud' $f, g \in L_2(F)$ Pak platí:

- $I_X(f)$ je dobře definováno, tj. nezávisí na volbě $f_n \rightarrow f$
- $I_X(f)$ je lineární zobrazení z $L_2(F)$ do $L_2(P)$
- $\mathbb{E} I_X(f) = 0$
- $\mathbb{E} [I_X(f) \cdot I_X(g)] = \langle I_X(f) | I_X(g) \rangle = \langle f | g \rangle = \int_a^b f g d\mu_F(s)$
- $f = g$: $\mathbb{E} |I_X(f)|^2 = \|f\|_{L_2(F)}^2$
- Bud' $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní posl. v $L_2(F)$ s $f_n \xrightarrow{L_2(F)} f$, pak
$$I_X(f_n) \xrightarrow{L_2} I_X(f).$$

ZNACENÍ

- $-\infty < a < b < +\infty$
- $D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ je dělení
- $\|D\| = \max \{t_j - t_{j-1}\}$ je norma dělení
- $S(D) = \sum_{j=0}^{n-1} X_{t_j} (t_{j+1} - t_j)$ jsou číselné součty

Def: Pokud pro každou posloupnost dělení $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ intervalu $[a, b]$ tj.

$\|D\| \rightarrow 0$ existuje $L_2\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} S(D_n)$, pak ji nazýváme Riemannovým integrálem a tato limita určuje na volbě posloupnosti dělení $(D_n)_{n=1}^{\infty}$.

$\rightarrow$ pokud X_t není centrován: $\mu_t = EX_t$ a $\int_a^b X_t dt = \int_a^b (X_t - \mu_t) dt + \int_a^b \mu_t dt$

$\rightarrow$ tedy: $S(D) = \sum_{j=0}^{n-1} X_{t_j} (t_{j+1} - t_j) \xrightarrow[\|D\| \rightarrow 0]{L_2} \int_a^b X_t dt$

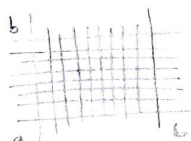
Věta:

Nechť je $(X_t)_{t \in [a, b]}$ centrován proces s konečnými druhého momenty a autokovarianční funkcí $R(s, t)$. Pokud $\exists$ (konečný) Riemannův integrál

$\underline{R} = \int_a^b \int_a^b R(s, t) ds dt$, pak existuje $\int_a^b X_t dt$.

důkaz:

- vztah dělení:



$\rightarrow [a, b]^2$ a om. $f(a, b):$

- pro 2D Riemannův integrál musí platit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| \underline{R} - \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} R(u_\ell, v_m) (u_{\ell+1} - u_\ell) (v_{m+1} - v_m) \right| < \varepsilon$$

pro $\max \{ \max \{u_{\ell+1} - u_\ell\}, \max \{v_{m+1} - v_m\} \} < \delta$

$\nwarrow$ bude používat jako předpoklad

• konvergenzi $\int_a^b X_t dL$ určíme z BCP

$$D = \{a = s_0 < s_1 < \dots < s_m = b\} \text{ a } D' = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\},$$

$$\text{ kde } \|D\| < \delta \text{ a } \|D'\| < \delta :$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |S(D) - S(D')|^2 &= \mathbb{E} S(D)^2 + \mathbb{E} S(D')^2 - 2\mathbb{E} [S(D) \cdot S(D')] = \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{m-1} X_{s_j} (s_{j+1} - s_j) \right]^2 + \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k} (t_{k+1} - t_k) \right]^2 - 2\mathbb{E} \left[\sum_j \dots \sum_k \dots \right] = \\ &= \sum_{j,j'=0}^{m-1} R(s_j, s_{j'}) (s_{j+1} - s_j) (s_{j'+1} - s_{j'}) + \sum_{k,k'=0}^{n-1} R(t_k, t_{k'}) (t_{k+1} - t_k) (t_{k'+1} - t_{k'}) \\ &\quad - 2 \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} R(s_j, t_k) (s_{j+1} - s_j) (t_{k+1} - t_k) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-R - R + 2R}_{\text{přičtu } 0 = -R - R + 2R} < \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon \quad \checkmark$$

přičtu $0 = -R - R + 2R \rightarrow$ tím dostanu

výraz v předpokladu, které

odhadem pomocí ε

Věta: ERGODICKÁ

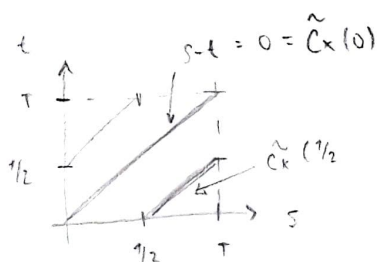
Nechť $X = (X_t)_{t \geq 0}$ je slabě stacionární a $\tilde{C}(t) \in L_1(0, \infty)$. Pak

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T X_s ds}_{\xrightarrow{L_2} \mu} - \mu \right|^2 = 0$$

Důkaz:

• $(X_t)_{t \geq 0}$ slabě stacionární $\Rightarrow$ $\begin{cases} \mu_X = \text{const.} = \mu \\ C_X(s, t) = \tilde{C}_X(t-s) = \tilde{C}_X(s-t) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \cdot \mathbb{E} \left| \frac{1}{T} \int_0^T X_s ds - \mu \right|^2 &= \mathbb{E} \left| \frac{1}{T} \int_0^T (X_s - \mu) ds \right|^2 = \frac{1}{T^2} \mathbb{E} \left| \int_0^T (X_s - \mu) ds \int_0^T (X_t - \mu) dt \right|^2 \\ &= \frac{1}{T^2} \mathbb{E} \int_0^T \int_0^T (X_s - \mu)(X_t - \mu) ds dt = \frac{1}{T^2} \int_{[0, T]^2} C_X(s, t) ds dt = \frac{1}{T^2} \int_{[0, T]^2} \tilde{C}_X(t-s) ds dt = \end{aligned}$$



substituce: $\begin{cases} u = t-s \\ v = t+s \end{cases} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |\det J| = |-2| = 2$ + více: $\begin{cases} u \in [-T, T] \\ v \in [|u|, 2T-|u|] \end{cases}$

$$= \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T \int_{|u|}^{2T-|u|} \tilde{C}(u) \cdot \frac{1}{2} dv du = \frac{1}{2T^2} \int_{-T}^T \tilde{C}(u) \cdot (T-|u|) du =$$

$$= \frac{2}{T} \left| \int_0^T \tilde{C}(u) \left(1 - \frac{u}{T}\right) du \right| \leq \frac{2}{T} \int_0^T |\tilde{C}(u)| \cdot \left|1 - \frac{u}{T}\right| du \leq \frac{2}{T} \int_0^T |\tilde{C}(u)| du \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

konstanta?

ANO - právě v případě, kdy $\tilde{C}$ na $L_1(0, \infty) \rightarrow \text{const}$

KARHUNEN-LOÉVE EXPANSION

- snahou je vytvořit analogii Fourierovy řady:

$$f = \sum_n c_n \varphi_n, \text{ kde } c_n \in \mathbb{R}/\mathbb{C} \text{ a } c_n(f) = c_n(f, \varphi)$$

φ_n je první ON-báze, která ustálí na f

$$\Rightarrow c_n(f) = \langle f | \varphi_n \rangle = \langle \sum_m c_m \varphi_m | \varphi_n \rangle = \sum_m c_m \langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = c_n$$

$$\rightarrow \text{chceme takto: } X_t = \sum_n \xi_n \varphi_n(t) \text{ a } t \in [0, 1]$$

- $(\varphi_n)_n$ bude ON báze na $L_2([0, 1])$, která závisí na X

- ξ_n jsou náhodné proměnné

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & n = k \end{cases}$$

$$\int_0^1 X_t \varphi_k(t) dt = \int_0^1 \sum_n \xi_n \varphi_n(t) \cdot \varphi_k(t) dt = \sum_n \xi_n \int_0^1 \varphi_n(t) \varphi_k(t) dt = \xi_k$$

- chceme bytelné ξ_n ustálí $\rightarrow$ to se sice upadá, ale mohou být nekorelované

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\xi_k \xi_l] = \delta_{kl} \cdot \lambda_k$$

$$\mathbb{E}[\xi_n \xi_m] = \mathbb{E} \left[\int_0^1 X_t \varphi_n(t) dt \int_0^1 X_s \varphi_m(s) ds \right] = \mathbb{E} \left[\int_{[0,1]^2} X_t X_s \varphi_n(t) \varphi_m(s) ds dt \right] =$$

$$= \int_{[0,1]^2} \mathbb{E}[X_t X_s] \varphi_n(t) \varphi_m(s) dt ds = \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{R(s, t)}_{(*)} \varphi_n(t) dt \cdot \varphi_m(s) ds = *$$

- výraz (*) by měl být kolineární na $\varphi_m(s)$ pro $n \neq m$

$$\rightarrow \text{definujeme } (Rf)(s) := \int_0^1 R(s, t) \cdot f(t) dt \text{ - operator}$$

$$\rightarrow \text{pokud } R\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \Rightarrow$$

$$* = \int_0^1 (R\varphi_n)(s) \varphi_m(s) ds = \lambda_n \int_0^1 \varphi_n(s) \varphi_m(s) ds = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \lambda_n & n = m \end{cases}$$

Věta: KARHUNEN-LOÉVE

Nechť je $\{X_t | t \geq 0\}$ centrováný proces s konstantními druhými momenty a autokorelační funkcí $R(s, t)$. Nechť je $\{\lambda_n, \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ systém vlastních čísel a vlastních vektorů funkce operátoru R . Pak

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varphi_n(t), \quad t \in [0, 1],$$

$$\text{kde } \xi_n = \int_0^1 X_t \varphi_n(t) dt, \quad \mathbb{E} \xi_n = 0 \text{ a } \mathbb{E} [\xi_n \xi_m] = \lambda_n \delta_{nm}.$$

Rada konvergence v kvadratickém středě k X_t , stejnoměrně v $t \in [0, 1]$.

(R8) důkaz:

$$\text{I, } \mathbb{E} \xi_n = \mathbb{E} \int_0^1 X_t \varphi_n(t) dt = \int_0^1 \mathbb{E} X_t \varphi_n(t) dt = 0 \text{ protože } \mathbb{E} X_t = 0 \text{ (centrováný)}$$

$$\text{II, } \mathbb{E} [\xi_n \xi_m] = \lambda_n \delta_{nm} \quad (? \text{ konstrukce})$$

III, konvergence?

$$\bullet \text{ zkusit součet: } S_N(t) = \sum_{n=1}^N \xi_n \varphi_n(t) \rightarrow \text{budeme zkoušet } L_2\text{-limitu}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |X_t - S_N(t)|^2 &= \mathbb{E} X_t^2 + \mathbb{E} S_N^2(t) - 2\mathbb{E} [X_t S_N(t)] = \\ &= R(t, t) + \mathbb{E} \left[\sum_{k,l=1}^N \underbrace{\xi_k \xi_l}_{\varphi_k^2(t)} \varphi_k(t) \varphi_l(t) \right] - 2\mathbb{E} \left[X_t \cdot \sum_{n=1}^N \xi_n \varphi_n(t) \right] = \\ &= R(t, t) + \sum_{k,l=1}^N \lambda_k \delta_{kl} \varphi_k(t) \varphi_l(t) - 2\mathbb{E} \left[X_t \cdot \sum_{n=1}^N \int_0^1 X_s \varphi_n(s) ds \cdot \varphi_n(t) \right] = \\ &= R(t, t) + \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k^2(t) - 2 \sum_{n=1}^N \int_0^1 R(s, t) \cdot \varphi_n(s) ds \varphi_n(t) = \\ &= R(t, t) + \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k^2(t) - 2 \sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n^2(t) \quad (\mathcal{R} \varphi_n)(t) = \lambda_n \varphi_n(t) \\ &= R(t, t) - \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k^2(t) \end{aligned}$$

• $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ON báze na $L_2([0,1])$

$$\rightarrow \{\varphi_m(x)\varphi_n(y)\}_{m,n=1}^{\infty} \quad ? \quad \int_{[0,1]^2} \varphi_m(x)\varphi_n(y) \cdot \varphi_{m'}(x)\varphi_{n'}(y) dx dy =$$

$$= \int_0^1 \varphi_m(x)\varphi_{m'}(x) dx \cdot \int_0^1 \varphi_n(y)\varphi_{n'}(y) dy = \delta_{mm'} \cdot \delta_{nn'} = \begin{cases} 1 & m=m' \wedge n=n' \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

• zavedeme $\phi_{mn}(x,y) = \varphi_m(x)\varphi_n(y)$ ON bázi $L_2([0,1]^2)$

$$\Rightarrow R(s,t) = \sum_{m,n} \langle R(s,t) | \phi_{mn} \rangle \cdot \phi_{mn} \rightarrow i R(s,t) \text{ rozložíme do ON báze}$$

$$\rightarrow \langle R(s,t) | \phi_{mn} \rangle = \int_{[0,1]^2} R(s,t) \cdot \phi_{mn}(s,t) ds dt = \iint_{[0,1]^2} R(s,t) \varphi_m(s) \varphi_n(t) ds dt =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 R(s,t) \varphi_m(s) ds \cdot \varphi_n(t) dt = \int_0^1 \lambda_m \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = \lambda_m \cdot \delta_{mn}$$

$(R\varphi_m)(t) = \lambda_m \varphi_m(t)$

$$\rightarrow R(s,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda_n \delta_{mn} \phi_{mn}(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_{nn}(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(s) \varphi_n(t) =$$

$$= \{s=t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n^2(t) = R(t,t)$$

$$\Rightarrow R(t,t) - \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k^2(t) \left(\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n^2(t) - \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k^2(t) \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

• Mercerova věta: Rada $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n^2(t)$ konverguje k $R(t,t)$ a to stejnoměrně na $[0,1]$.

• poznámka:

$\mathcal{A}: L_2([0,1]) \rightarrow L_2([0,1])$ je samoadjungovaný, tj.

$\langle \mathcal{A}f | h \rangle = \langle f | \mathcal{A}h \rangle$, a pozitivně definitní, tj. $\langle \mathcal{A}f | f \rangle \geq 0 \quad \forall f \in L_2([0,1])$,

a kompaktní. Tedy $\exists \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ báze $L_2([0,1])$ a to jsou vlastní

funkce operátoru $\mathcal{A}$.

I, MARKOVY RĚTĚZCE S DISKRÉTNÍM ČASEM

• $X = (X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ + specifický (konkrétní) obor hodnot - $\mathbb{Z}$

• markovská vlastnost:

$$P[X_{n+1} = k \mid X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1] = P[X_{n+1} = k \mid X_n = i_n]$$

• matice pravděpodobnosti přechodu: $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$

→ pravděpodobnosti: $p_{ij}^{(n)} = P[X_n = j \mid X_0 = i] = P[X_{n+k} = j \mid X_0+k = i]$

+ navíc $p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

• rovnice: $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{ik}^{(m)} \cdot p_{kj}^{(n-m)}$ pro $0 \leq m \leq n$ a $\forall i, j \in \mathbb{Z}$

důkaz:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P[X_n = j \mid X_0 = i] = \frac{P[X_n = j, X_0 = i]}{P[X_0 = i]} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{P[X_n = j, X_0 = i, X_m = k]}{P[X_0 = i]} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{P[X_n = j, X_0 = i, X_m = k]}{P[X_m = k, X_0 = i]}}_{\text{homogenita}} \cdot \frac{P[X_m = k, X_0 = i]}{P[X_0 = i]} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{P[X_n = j \mid X_m = k, X_0 = i]}_{\text{markovská vlastnost}} \cdot P[X_m = k \mid X_0 = i] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} P[X_{n-m} = j \mid X_0 = k] \cdot p_{ik}^{(m)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{kj}^{(n-m)} p_{ik}^{(m)} \end{aligned}$$

II, MARKOVY RĚTĚZCE SE SPOJITÝM ČASEM

• $X = (X_t)_{t \geq 0}$ + obor hodnot $\mathbb{Z}$

• markovská vlastnost:

$$P[X_t = j \mid X_s = i, X_u = i_u, \dots, X_1 = i_1] = P[X_t = j \mid X_s = i] =: p_{ij}(t-s)$$

• rovnice: $p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$ pro $0 \leq s \leq t$ a $\forall i, j \in \mathbb{Z}$

ditur:

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+s) &= P[X_{t+s} = j \mid X_0 = i] = \frac{P[X_{t+s} = j, X_0 = i]}{P[X_0 = i]} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{P[X_{t+s} = j, X_0 = i, X_s = k]}{P[X_0 = i, X_s = k]} \cdot \frac{P[X_0 = i, X_s = k]}{P[X_0 = i]} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} P[X_{t+s} = j \mid X_0 = i, X_s = k] \cdot P[X_s = k \mid X_0 = i] = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} P[X_{t+s} = j \mid X_s = k] \cdot p_{ik}(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P[X_t = j \mid X_0 = k] \cdot p_{ik}(s) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{kj}(t) \cdot p_{ik}(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(t+s) = P(t) \cdot P(s)$$

III, MARKOVSKÉ PROCESY SE SPOJITÝM ČASEM

- $X = (X_t)_{t \geq 0}$ + obor hodnot $\mathbb{R}$
- markovská vlastnost:

$$P[X_t \in A \mid X_s \in A_s, X_{t_1} \in A_{t_1}, \dots, X_{t_n} \in A_{t_n}] = P[X_t \in A \mid X_s \in A_s]$$

- budeme chtít redefinovat poanné hustoty a podle nich sestavit Chapman-Kolmogorovy rovnice
- sdružená distribuční funkce: $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P[X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n]$

→ budeme předpokládat, že existují hustoty:

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{t_1, t_2}(u, v) du dv$$

$$f_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{t_1, t_2}(x_1, x_2)$$

→ chtěli bychom definovat " $P[X_t = y \mid X_s = x]$ "

$$P[Y \in B \mid X = x] = \lim_{h \rightarrow 0^+} P[Y \in B \mid |X - x| \leq \frac{h}{2}] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P[Y \in B, |X - x| \leq \frac{h}{2}]}{P[|X - x| \leq \frac{h}{2}]} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{h} \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} \int_B f_{x,y}(u, v) du dv}{\frac{1}{h} \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} f_X(u) du} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\int_B f_{x,y}(x, v) dv}{f_X(x)} = \int_B \frac{f_{x,y}(x, v)}{f_X(x)} dv$$

plyne z toho, že $P[Y \in B \mid X \in A] = \int_B \int_A f_{x,y}(u, v) du dv$

→ pak $Y = y$ při $X = x$ má hustotu $\frac{f_{x,y}(x, y)}{f_X(x)}$

• potom hustota pro $P[X_t = y \mid X_s = x] \rightarrow p_{t,s}(y|x) = \frac{p_{s,t}(x, y)}{p_s(x)}$

- 3 markovské vlastnosti plyne:

$$P[\underbrace{X_u \in A}_u \mid \underbrace{X_t \in B}_t, \underbrace{X_s \in C}_s] = P[X_u \in A \mid X_t \in B]$$

$$\Rightarrow \frac{p_{s,t,u}(x,y,z)}{p_{s,t}(x,y)} = \frac{p_{t,u}(y,z)}{p_t(y)} \Leftrightarrow p_{s,t,u}(x,y,z) = p_s(x) \cdot \underbrace{\frac{p_{s,t}(x,y)}{p_s(x)}}_{p_{t;s}(y|x)} \cdot \underbrace{\frac{p_{t,u}(y,z)}{p_t(y)}}_{p_{u;t}(z|y)}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} p_{s,t,u}(x,y,z) dy = p_{s,u}(x,z) \cdot \frac{1}{p_s(x)}$$

$$\frac{1}{p_s(x)} \int_{\mathbb{R}} p_{s,t,u}(x,y,z) dy = \frac{p_{s,u}(x,z)}{p_s(x)} = \int_{\mathbb{R}} p_{t;s}(y|x) p_{u;t}(z|y) dy$$

- rovnice:

$$p_{u;s}(z|x) = \int_{\mathbb{R}} p_{t;s}(y|x) \cdot p_{u;t}(z|y) dy \quad \text{pro } s < t < u \\ \forall x, z \in \mathbb{R}$$

I, MARKOVŮV RĚTĚZEC SE SPOJITÝM ČASEM

- $X = (X_t)_{t \geq 0}$ + obor hodnot $\mathbb{Z}$
- $p_j(t) = P[X_t = j] \rightarrow p_k(t) = P[X_t = k] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P[X_t = k, X_0 = j] =$
 $= \sum_{j \in \mathbb{Z}} P[X_t = k | X_0 = j] \cdot P[X_0 = j] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_{jk}(t) \cdot p_j(0)$

- matice přechodů : $P(t) = (p_{jk}(t))_{j,k \in \mathbb{Z}}$

$$\Rightarrow p(t) = P^T(t) \cdot p(0) \text{ NEBO } p^T(t) = p^T(0) \cdot P(t)$$

- Chapman-Kolmogorov : $P(s+t) = P(s) \cdot P(t)$ pro $s, t \geq 0$

$$\rightarrow s=0 \Rightarrow P(0) = I$$

$$\rightarrow \{P(s)\}_{s \geq 0} \text{ je tzv. operatorová semigrupa}$$

- stav π : $\pi = (\pi(j))_{j \in \mathbb{Z}}$, $\pi(j) \geq 0$ a $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \pi(j) = 1$

- chceme definovat $P'(0)$

$$\rightarrow \text{pokud } \ni G\pi = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{P(h) - P(0)}{h} \right) (\pi) \right] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(h)\pi - \pi}{h} = P(0) \cdot P(0)$$

$$\bullet \text{ pro } t_0 > 0 : \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{P(t_0+h) - P(t_0)}{h} \right] (\pi) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{P(t_0) \cdot P(h) - P(t_0)}{h} \right] (\pi) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{P(h) - I}{h} \right] (\pi) P(t_0) \cdot \pi = G P(t_0) \pi = G \pi \cdot P(t_0) = P'(t_0) (\pi)$$

$$\Rightarrow P'(t_0) = G P(t_0) = P(t_0) \cdot G$$

G je tzv. infinitesimální generátor :

$$G = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(h) - P(0)}{h} = P'(0)$$

II, MARKOVOVY PROCESY

- $X = (X_t)_{t \geq 0}$ + obor hodnôt $\mathbb{R}$
- hustota pro $X_t = y$ při $X_s = x$, neboli hustota odpovídající
 $P[X_t = y | X_s = x] \rightarrow p_{t;s}(y|x)$
- Chapman-Kolmogorovy rovnice:

$$p_{u;s}(z|x) = \int_{\mathbb{R}} p_{t;s}(y|\overset{x}{x}) p_{u;t}(z|y) dy$$

→ lze odvodit diferenciální rovnice

- volíme první $t > s$ a první x

$$\text{míra: } \Gamma \mapsto \int_{\Gamma} p_{t;s}(y|x) dy =: P_{t;s}(\Gamma|x) = P[X_t \in \Gamma | X_s = x]$$

$$\underline{P_{u;s}(\Gamma|x)} = \int_{\Gamma} p_{u;s}(z|x) dz = \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} p_{t;s}(y|x) p_{u;t}(z|y) dy dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} p_{t;s}(y|x) \int_{\Gamma} p_{u;t}(z|y) dz dy = \int_{\mathbb{R}} p_{t;s}(y|x) \cdot P_{u;t}(\Gamma|y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underline{P_{t;s}(dy|x) \cdot P_{u;t}(\Gamma|y)}$$