12. přednáška (Řešitelné modely matematické fyziky)

Minule: Bäcklundova transformace

$$u_{xy} = F(u) \longrightarrow \bar{u}_{xy} = \bar{F}(\bar{u})$$

$$\bar{u}_x = P(\bar{u}, u, u_x, u_y)$$
$$\bar{u}_y = Q(\bar{u}, u, u_x, u_y)$$

$\bar{u}_{xy} = \exp(\bar{u})$ (Liouvillova rovnice) *

$u_{xy} = 0$ (vlnová rovnice) #

△ $\bar{u}(x,y) = \ln\left(2\frac{u_x u_y}{\sin u^2}\right)$, u - řešení vlnové rovnice

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_x &= u_x + b\exp\left(\frac{\bar{u}+u}{2}\right) \\ \bar{u}_y &= -u_y + \frac{2}{b}\exp\left(\frac{\bar{u}-u}{2}\right) \end{aligned}\right\} \# \mapsto *$$

Pomocí těchto Bäcklundových transformací lze ukázat, že △ je obecné řešení *

KdV rovnice:

$u_{xxx} = F(u, u_x, u_t)$: $u_{xxx} + u_t + 6u_x u = 0$ (KdV)

$u_{xxx} + u_t \pm 6u^2 u_x = 0$ (MKdV)

$u_{xxx} + u_t + 3(u_x)^2 = 0$ (PKdV)

$u_{xxx} + u_t \pm 2(u_x)^3 = 0$ (PMKdV)

Bäcklundovy transformace (BT):

$$\bar{u}_x = P(\bar{u}, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt})$$
$$\bar{u}_t = Q(\bar{u}, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt})$$

BT po KdV:

$$\bar{u}_x = -u_x \pm (\bar{u}-u)\sqrt{a+2(\bar{u}+u)}$$
$$\bar{u}_t = \dots$$

BT po PKdV:

$$\bar{u}_x = -u_x + m - \frac{1}{2}(\bar{u}-u)^2 \leftarrow \text{Riccatiho rovnice pro } \bar{u}$$
$$\bar{u}_t = \dots$$

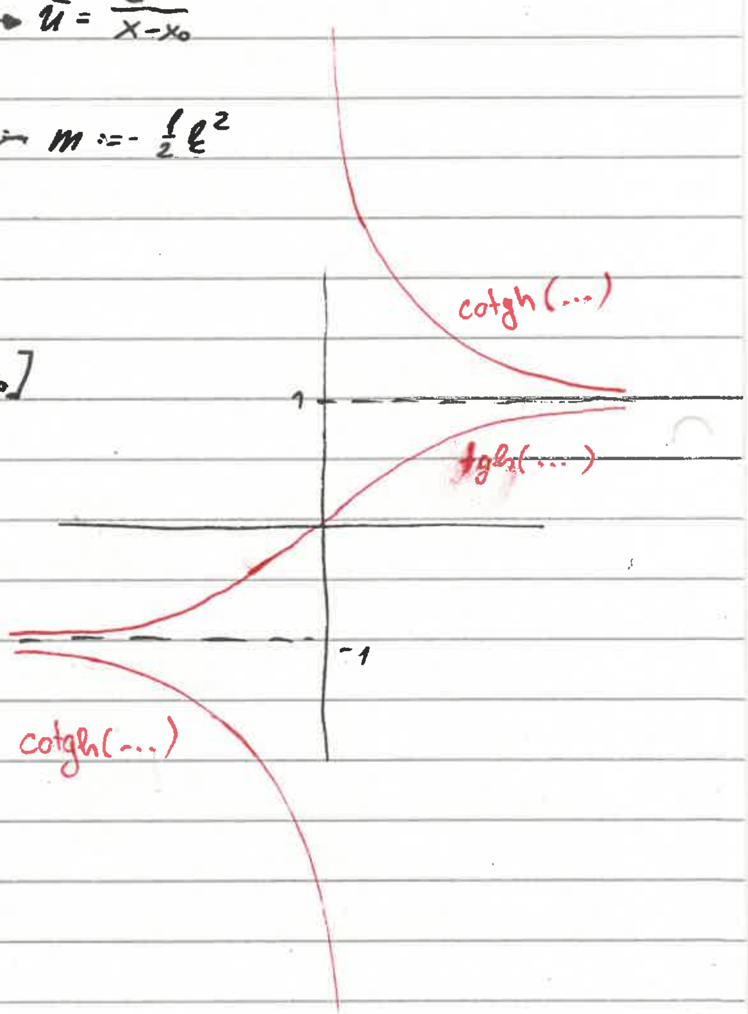
zvolme $u := 0$: $\quad \bar{u}_x = m - \frac{1}{2}\bar{u}^2 \rightarrow x - C(t) = \int^{\bar{u}} \frac{du}{m-\frac{1}{2}u^2}$ (1)

$m=0$: $\bar{u} = \frac{2}{x-C(t)} \xrightarrow[\text{do PKdV}]{\text{dosazení (*)}} C' = 0 \rightarrow \bar{u} = \frac{2}{x-x_0}$

$m<0$: $\bar{u} = -k\, tg\left(\frac{k}{2}(x-C(t))\right)$, kde $m := -\frac{1}{2}k^2$

$\overset{(*)}{\rightarrow} \bar{u} = -k\, tg\left[\frac{k}{2}x - \frac{k^3}{2}t + x_0\right]$

$m>0$: $\bar{u} = k\,(co)tgh\left[\frac{k}{2}x - \frac{k^3}{2}t + x_0\right]$



PKdV $\sim$ KdV $\Leftrightarrow \bar{u} \rightarrow \bar{u}_x$

$$\bar{u}_x = \frac{k^2}{2}\frac{1}{\cosh\left(\frac{k}{2}(x-\frac{k^2}{2}t+x_0)\right)}$$

Superpoziční princip pro rovnice typu KdV:

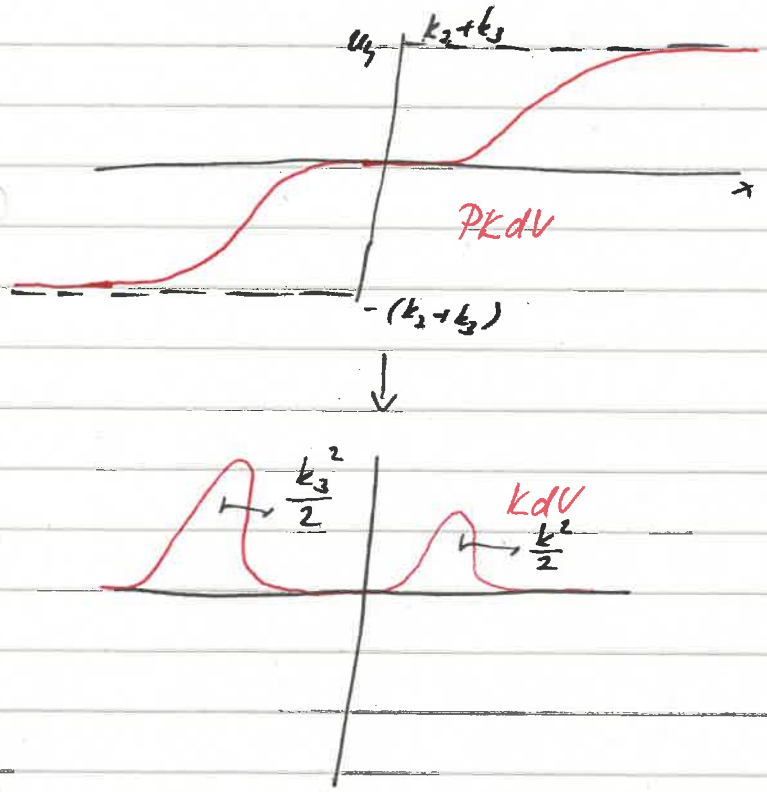
$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "m_3"] & \\ 1 \arrow[ur, "m_2"] \arrow[dr, "m_3"'] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur, "m_2"'] & \end{tikzcd} \xrightarrow{BT} \begin{aligned} u_{2,x} + u_{1,x} &= m_2 - \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)^2 \\ u_{3,x} + u_{1,x} &= m_3 - \tfrac{1}{2}(u_3 - u_1)^2 \\ u_{4,x} + u_{2,x} &= m_3 - \tfrac{1}{2}(u_4 - u_2)^2 \\ u_{4,x} + u_{3,x} &= m_2 - \tfrac{1}{2}(u_4 - u_3)^2 \end{aligned}$$

$$\to 0 = 2(m_2 - m_3) + u_2 u_1 - u_3 u_1 - u_4 u_2 + u_4 u_3 = 2(m_2 - m_3) + (u_1 - u_4)(u_2 - u_3)$$

$$\to u_4 - u_1 = \frac{2(m_2 - m_3)}{u_2 - u_3}$$

dvousolitonové řešení:

$$u_4 = \frac{k_2^2 - k_3^2}{k_2 \operatorname{tgh} \theta_2 - k_3 \operatorname{cotgh} \theta_3}, \quad \theta_j := \frac{k_j}{2} x - \frac{k_j^3}{2} t + x_{0j}$$



Miura (1968)

Je-li v řešením $v_{xxx} + v_t - 6v^2 v_x = 0$, pak

$u := v_x + v^2 \xrightarrow{\text{GGKM}}$ Metoda obrácené úlohy rozptylu

splňuje $u_{xxx} + u_t - 6uu_x = 0$.

Inverzní transformace:

$$\bar{u}_x = u - \bar{u}^2$$

$$\bar{u}_t = 6\bar{u}^2 u_x - \bar{u}_{xxx} = Q(\bar{u}, u, u_t, \dots)$$

Řešitelné modely matematické fyziky: 11. přednáška

Dvou-solitonové řešení Sine-Gordonovy rovnice:

$$u_{xy} = \sin(u)$$

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

$$u_4 = u_1 + 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\,\mathrm{tg}\left(\frac{u_2-u_3}{4}\right)\right) \; (*), \quad f_j := \mathrm{tg}\,\frac{u_j}{4}$$

solitonová řešení:

$$u_j = 4\,\mathrm{arctg}\left(\exp(a_j x + a_j^{-1} y + c_j)\right) = 4\,\mathrm{arctg}\left(\exp\left(\pm\frac{x - v_j t}{\sqrt{1-\frac{v_j^2}{c^2}}}\right)\right)$$

$$v = \frac{1-a^2}{1+a^2}\,c \to a = \pm\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}, \quad j = 2,3$$

$$u_{2,3} = 4\,\mathrm{arctg}\left(e^{\theta_{2,3}}\right), \quad \theta_j = a_j x + a_j^{-1} y + c_j$$

$u_1 = 0 \; (*)$

$$\to u_4 = 4\,\mathrm{arctg}\left(k_{23}\frac{\mathrm{tg}\,u_2 - \mathrm{tg}\,u_3}{1+\mathrm{tg}\,u_2\,\mathrm{tg}\,u_3}\right) = 4\,\mathrm{arctg}\left(k_{23}\frac{e^{\theta_2}-e^{\theta_3}}{1+e^{\theta_2}e^{\theta_3}}\right) =$$

$$= 4\,\mathrm{arctg}\left(k_{23}\frac{\exp\left(\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)-\exp\left(-\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)}{\exp\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)+\exp\left(-\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)}\right) = 4\,\mathrm{arctg}\left(k_{23}\frac{\sinh\left(\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)}\right)$$

AKNS (SG)
GGKM (KdV)

BT pro Sine-Gordonovu rovnici

$$\bar u_x = u_x + \sin\left(\frac{u+\bar u}{2}\right)2a^{-1}$$
$$\bar u_y = -u_y + \sin\left(\frac{u-\bar u}{2}\right)2a$$

$u_{xy} = F(u)$

hledám BT: $\bar u_x = P(u,\bar u, u_x, u_y)$
$\bar u_y = Q(u,\bar u, u_x, u_y)$

takže: $\bar u_{xy} = \bar F(u)$

$\bar F = F \Rightarrow$ auto-BT

$$\bar{F}(\bar{u}) = \bar{u}_{xy} = \frac{\partial P}{\partial y} = \dots + \frac{\partial P}{\partial u_y} \overset{=0}{u_{yy}}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} = \dots + \frac{\partial Q}{\partial u_x} \overset{=0}{u_{xx}}$$

$$\bar{u}_x = P(\bar{u}, u, u_x, \cancel{u_y})$$

$$\bar{u}_y = Q(\bar{u}, u, \cancel{u_x}, u_y)$$

→ (nelineární F):

- $F(u) = \sin(u) = \bar{F}(\bar{u})$
- $F(u) = Ke^{u}$, $\bar{F}(\bar{u}) = e^{\bar{u}}$
- $F(u) = \sinh(u) = \bar{F}$
- $F(u) = \cosh(u) = \bar{F}$

Řešitelné modely matematické fyziky: 10. přednáška

$\Box\varphi + \sin\varphi = 0$ (Sine-Gordon)

Solitonové řešení: $4\,\mathrm{arctg}\left(\exp\left(\pm\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right) = \varphi(x,t)$

KdV rovnice:

$(*)$ $u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0, \quad u = u(x,t)$

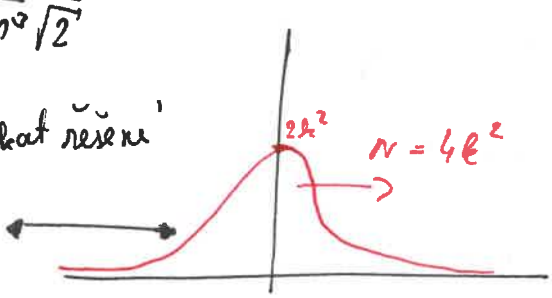
$$u(x,t) := f(x-vt) \to (*) \to -vf' + f''' + 6ff' = \frac{d}{dx}\underbrace{\left(-vf + f'' + 3f^2 + c\right)}_{(\#)} = 0$$

$$(\#) f' \to -v\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}(f')^2 + f^3 + C_1 f + C_2 = 0$$

$$\to x - x_0 = \int \frac{dt}{\sqrt{C_2 + C_1 f - \frac{v}{2}f^2 + f^3}} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Speciální volbou C_1, C_2 lze získat řešení

$$u(x,t) = 2k^2 \frac{1}{\cosh^2(kx - 4k^3t)} \longleftrightarrow$$



Böcklundova transformace pro Sine-Gordona

$u_{xy} = \sin(u)$ (SG)

lemma: Böcklundova transformace

Nechť u splňuje (SG) a $\bar{u}$ splňuje $\bar{u}_x = u_x + 2\sin\left(\frac{1}{2}(\bar{u}+u)\right)$ (1).

$\bar{u}_y = u_y + 2\sin\left(\frac{1}{2}(\bar{u}-u)\right)$ (2)

Pak $\bar{u}$ splňuje (SG).

důkaz:

$$\bar{u}_{xy} \overset{(1)}{=} u_{xy} + 2\cos\left[\frac{1}{2}(\bar{u}+u)\right](\bar{u}_y + u_y)\frac{1}{2} \overset{(2)}{=} u_{xy} + 2\cos\left[\frac{1}{2}(\bar{u}+u)\right]\sin\left[\frac{1}{2}(\bar{u}-u)\right] =$$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$= \sin\bar{u}$

Použití lemmatu na (SG):

$u := 0 \to \begin{rcases} \bar{u}_x = 2\sin\frac{\bar{u}}{2} \\ \bar{u}_y = 2\sin\frac{\bar{u}}{2} \end{rcases} \to x - x_0 = \int \frac{du}{2\sin\frac{u}{2}} = \int \frac{du}{4\sin\frac{u}{4}\cos\frac{u}{4}} = \int \frac{du}{4\,\mathrm{tg}\frac{u}{4}\cos^2\frac{u}{4}} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\frac{u}{4} = y \\ \frac{1}{4}\frac{1}{\cos^2\frac{u}{4}}du = dy \end{array} \right| =$

$= \ln\left(\mathrm{tg}\frac{u}{4}\right) \to u = 4\,\mathrm{arctg}(\exp(x + C(y)))$

Ze symetrie rovnic: $u(x,y) = 4\,\mathrm{arctg}(\exp(x+y+C))$

(SG) je invariantní vůči transformaci $\begin{array}{l} x \rightsquigarrow a\tilde{x} \\ y \rightsquigarrow a^{-1}\tilde{y} \end{array}$, tj.: $\begin{array}{l} u_x = u_{\tilde{x}}\frac{1}{a} \\ u_y = u_{\tilde{y}}\, a \end{array}$

$$\to \boxed{\begin{array}{l} \bar{u}_x = u_x + 2a\sin\left[\frac{1}{2}(\bar{u}+u)\right] \\ \bar{u}_y = -u_y + 2a^{-1}\sin\left[\frac{1}{2}(\bar{u}-u)\right] \end{array}}$$

$\to u(x,y) = 4\,\mathrm{arctg}(\exp(ax + a^{-1}y + c))$

Vztah mezi v a a:

$x = \frac{1}{2}(q + ct)$, $y = \frac{1}{2}(q - ct)$

$\to \partial_x\partial_y = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} = -\Box_2$

$ax + a^{-1}y = \frac{1}{2}q(a + a^{-1}) + \frac{1}{2}ct(a - a^{-1}) = \frac{1}{2}(a + a^{-1})\left[q - ct\frac{a^{-1} - a}{a + a^{-1}}\right] = \pm\frac{q - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$\to -v = c\frac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}} \to a = \pm\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$

lemma 2:

Nechť $\alpha \neq \beta$, u_1, u_2, u_3, u_4 splňují (1).

$u_{2x} - u_{1x} = 2\alpha\sin\left[\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right]$ (L1)

$u_{3x} - u_{1x} = 2\beta\sin\left[\frac{1}{2}(u_3 + u_1)\right]$ (L2)

$u_{4x} - u_{2x} = 2\beta\sin\left[\frac{1}{2}(u_4 + u_2)\right]$ (L3)

$u_{4x} - u_{3x} = 2\alpha\sin\left[\frac{1}{2}(u_4 + u_3)\right]$ (L4)

Pak platí:

$$\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{u_4 - u_1}{4}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{u_2 - u_3}{4}\right)} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

lemma 3:

Nechť $\alpha \neq \beta$ a u_1, u_2, u_3 splňují (L1), (L2).

Označme $u_4 := u_1 + 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\,\mathrm{tg}\left(\frac{u_2 - u_3}{4}\right)\right)$.

Pak u_4 splňuje (L3), (L4).

Řešitelné modely matematické fyziky : 8. přednáška

Parciální diferenciální rovnice 1. řádu

- lineární: $\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$ ⊛
- kvazilineární: $\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = b(u,x)$ #

Examples:

- $u_x + u_y = 0 \rightarrow u(x,y) = f(x-y)$
- $x u_y - y u_x = 0 \rightarrow u(x,y) = f(x^2+y^2)$

Věta: Metoda charakteristik pro lineární PDR
Buď $G_n \subset \mathbb{R}^n$ oblast, $u: G_n \to \mathbb{R}$.
Nechť x_0 není singulárním bodem autonomního systému $\dot{x}_i = a_i(x)$ příslušející ⊛.
Pak existuje okolí U_{x_0} tak, že každé řešení rovnice ⊛ má na U_{x_0} tvar:

$$u(x_1, \dots, x_n) = f(J_1(x), \dots, J_{n-1}(x)),$$

kde J_k jsou nezávislé první integrály rovnice $\dot{x}_i = a_i(x)$.

Example:

$$x u_x + y u_y = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \dot{x} = x \quad / \cdot (-y) \\ \dot{y} = y \quad / \cdot x \end{array} \Big\} \oplus \; x\dot{y} - y\dot{x} = 0 \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \vee \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$\rightarrow u(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ nebo } u(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Věta: Metoda charakteristik pro kvazi-lineární PDR

Nechť $w : W \to \mathbb{R}$, $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ takové:

i) má spojité derivace na W, $\frac{\partial w}{\partial x_{n+1}} \neq 0$

ii) nechť $u(x_1, \dots, x_n)$ je dáno implicitně vztahem

$$w(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

Pak, u je řešením (#) $\Leftrightarrow$ w je řešením (*)

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n+1} a_j(x_1, \dots, x_{n+1}) \frac{\partial w}{\partial x_j} = 0, \quad x_{n+1} = u, \quad a_{n+1} = b}_{\triangle}$$

Důkaz:

Věta o implicitní funkci pro $w(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial x_i}(x, u(x))}{\frac{\partial w}{\partial u}(x, u(x))} \to \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} + b(x,u) \frac{\partial w}{\partial u} = - \frac{\partial w}{\partial u} \left[\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} - b \right]$$

Cauchyho pro kvazi-lineární PDR 1. řádu:

Nechť γ je $(n-1)$ rozměrná nadplocha v $\mathbb{R}^n$, $h : \gamma \to \mathbb{R}$.

Pak na „u" řešení ⊕ klademe podmínku $u|_{\gamma} = h$

Buď $\tilde{\gamma} : \Omega_{n-1} \to \mathbb{R}^n$ parametrizace γ, pak můžeme psát jako $u \circ \tilde{\gamma} = h \circ \tilde{\gamma}$.

$h : \Omega_{n-1} \to \mathbb{R}$

Věta: O řešení Cauchyho úlohy pro PDR ⊕ 3

Nechť $u : G_n \to \mathbb{R} \in C^1(G_n)$, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

i) u je řešením kvazi-lineární PDR ⊕

ii) • Existuje-li $(n+1)$ funkcí $(x_1, \dots, x_n, z) : I \to \mathbb{R}^{n+1}$, které jsou řešením charakteristické soustavy △ ; $\dot{x}_i = a_i(x_1, \dots, x_n, z)$

$\dot{z} = b(x_1, \dots, x_n, z)$

• Existuje-li $t_0 \in I$, tak že $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), z(t_0)) \in \Sigma$, kde Σ je grafem $u(x_1, \dots, x_n)$

Potom ~~E~~ existuje U_{t_0} tak, že pro všechna $t \in U_{t_0}$: $(x_1(t), \dots, x_n(t), z(t)) \in \Sigma$

Example:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u + 1, \quad u(x=0, y) = y^2$$

$\gamma =: \text{osa } y \to \tilde{\gamma}(s) = (0, s)$

$h(s) = s^2$

Věta 2

$\dot{x} = 1 \to x(t) = t + x_0$

$\dot{y} = y \to y(t) = y_0 e^t$

$\dot{u} = u + 1 \to u(t) = (u_0 + 1)e^t - 1 \to I_1 = y_0 e^{-x_0}$

$I_2 = (z+1)e^{-x}$

$w(x, y, z) = f(I_1, I_2) = f(ye^{-x}, (z+1)e^{-x})$

$y_s(t) = se^t$

$z(t) + 1 = (z_0 + 1)e^t, \quad z_s(0) = s^2 \to z_s(t) = (s^2 + 1)e^t - 1$

$(s, t) = g(x, y) \to s = ye^{-x}$

$\to z(x, y) = y^2 e^{-x} + e^x - 1$

Řešitelné modely matematické fyziky: 7. přednáška

Věta:

Nechť y je nepodloužitelné řešení soustavy $y_i' = F(y_1,\dots,y_n),\ i\in\hat{n}$ (*)

Pak nastane právě jedna ze tří možností:

i) $y(x)$ je rovnovážný bod

ii) $y(x)$ je „otevřená" = nezavřená křivka

iii) $y(x)$ je „uzavřená" křivka $\wedge$ $y(x)$ je periodická

Důkaz:

Označme $I :=$ interval, kde existuje řešení y. Pak musí nastat:

1) $\forall x_1,x_2\in I:\ y(x_1)=y(x_2)$

2) $\forall x_1,x_2\in I;\ x_1\neq x_2 \Rightarrow y(x_1)\neq y(x_2)$

3) $\exists x_1,x_2,x_3\in I;\ x_1\neq x_2\neq x_3 \Rightarrow y(x_1)=y(x_2)\neq y(x_3)$

Položme $\psi(x) := y(x+x_1) \rightarrow \psi(0)=y(x_1) \rightarrow \psi(x)=\Psi(x,y(x_1))$

$$M := \{x\in I \mid \psi(x)=y(x_1)\};\quad 0\in M$$
$$0\neq x_2-x_1\in M$$
$$x_3-x_1\notin M$$

Lemma:

$$\text{Nechť } \exists S\subset\mathbb{R};\ \left.\begin{array}{l} \text{i) } S\neq\mathbb{R} \\ \text{ii) } S\neq\{0\} \\ \text{iii) } s,t\in S \Rightarrow -s\in S \wedge s+t\in S \\ \text{iv) } S \text{ je uzavřená v } \mathcal{T}(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \rightarrow \exists T>0 \text{ tak, že: } S=\{nT,\ n\in\mathbb{Z}\}$$

Důkaz:

$T := \inf\{s\in S \mid s>0\}$ ...

- M splňuje i) ✓
- M splňuje iv): $M=\psi^{-1}(y(x_1))$, ψ spojitá
- M splňuje iii): Nechť $s,t\in M \rightarrow \Psi(s+t,y(x_1)) = \Psi(s,\Psi(t,y(x_1))) = \Psi(s,y(x_1)) = y(x_1) \Rightarrow s+t\in M$

$\rightarrow M=\{nT \mid n\in\mathbb{Z}\} \rightarrow y(x+nT) = \Psi(x+nT-x_1,y(x_1)) = \Psi(x-x_1,\Psi(nT,y(x_1))) = \Psi(x-x_1,y(x_1)) = y(x)$

Věta:

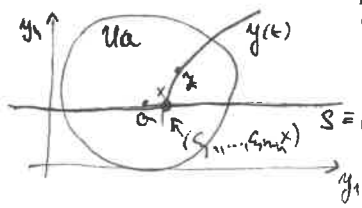
Nechť $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ není rovnovážným bodem.

Pak existuje okolí U_a a $\pi : U_a \to \mathbb{R}^n$: $\frac{d}{dx}\pi_i(y_1(x),\dots,y_n(x)) = 0$, $i \in \widehat{n-1}$

$$\frac{d}{dx}\pi_n(y_1(x),\dots,y_n(x)) = 1 .$$

Důkaz.

Buď $a \in \Omega$; $F(a) \neq 0$,



$z = (z_1,\dots,z_n) \doteq (\xi_1,\dots,\xi_{n-1},x) \in U_a$ ← zatím neurčeno

$S = (y_1,\dots,y_{n-1},a_n)$ → $\forall (z_1,\dots,z_n) : \exists! (\xi_1,\dots,\xi_{n-1},x)$ → $\exists \pi : U_a \to \mathbb{R}^n : \pi(y_1,\dots,y_n) = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1},x)$

$\varphi(\xi,x) = (y_1,\dots,y_n) = \pi^{-1}(\xi_1,\dots,\xi_{n-1},x)$

$g(t) := \frac{d}{dt}\pi(y_1,\dots,y_n)$ → $g_i = 0$, $i \in \widehat{n-1}$

$g_n = 1$

První integrály systému (*)

$$J : \Omega \to \mathbb{R} : \frac{d}{dt}(J \circ y)\Big|_* = 0 \to \frac{\partial J}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial J}{\partial y_i}(y(x))F_i(y(x)) = \frac{\partial J}{\partial y_i}(y)F(y) = 0$$

Věta:

Nechť y_0 není rovnovážný bod (*).

Pak existuje okolí U_{y_0}, na kterém existuje $n-1$ prvních integrálů (*) a každý další je na nich závislý, tj.: lze zapsat jako $f(J_1,\dots,J_{n-1})$

Důkaz:

$J_i := \xi_i$ z předchozí věty, $i \in \widehat{n-1}$

Buď J libovolný další první integrál (*):

$$J(y) = J(\varphi(\xi,x)) =: \tilde{J}(\xi,x) \to J(y(t)) = \tilde{J}(\xi(t),x(t)) \to 0 = \frac{d}{dt}\tilde{J}(\xi(t),x(t)) = \frac{\partial J}{\partial \xi_i}\overset{0}{\dot{\xi}} + \frac{\partial J}{\partial x}\overset{1}{\dot{x}} = \frac{\partial J}{\partial x}$$

Definice: Rovnovážný bod soustavy

Bod $y_0 := (y_1^0, \dots, y_n^0) \in \Omega$ se nazývá rovnovážným bodem soustavy ⊛, je-li $F(y_0) = 0$.

Věta:

Každá trajektorie různá od rovnovážného bodu je regulární křivka $\iff \varphi' \neq 0$ na J.

Důkaz:

Tečný vektor $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ má souřadnice $F(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \neq 0$, neboť φ je různá od rovnovážného bodu.

Věta:

Nechť $\psi_i(x; y_1^0, \dots, y_n^0)$, jež je řešením ⊛ $(\star x)$ & $\psi_i(0, y_1^0, \dots, y_n^0) = y_0$.

Potom existuje okolí $U_0 \subset \mathbb{R}$ tak, že pro $x, s \in U_0$: $\psi_i(x; \psi_1(s, y_0), \dots \psi_n(s, y_0)) = \psi_i(x+s, y_0)$

Důkaz:

Položme $g_1(x) := \psi(x, \psi(s, y_0))$, $g_2 := \psi(x+s, y_0)$,

pak máme $g_1' = g_2'$ $\wedge$ $g_1(0) = g_2(0)$ $\to$ z věty o jednoznačnosti máme $g_1 = g_2$ na U_0

autonomní rovnice

Řešitelné modely matematické fyziky: 6. přednáška

Autonomní rovnice:

$$y'' = F(y, y') \rightarrow p(y) = y' \rightarrow y'' = p'(y)p(y) = F(y,p) \rightarrow p'(y) = F(y,p) \text{ (snížení řádu)}$$

Ex|

$$y'' = \frac{y'^2}{y} \rightarrow p'p = \frac{p^2}{y} \xrightarrow{p \neq 0} \frac{p'}{p} = \frac{1}{y} \rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \rightarrow p = C_1 y = y'$$

$$\rightarrow y(x) = C_2 \exp(C_1 x)$$

Autonomní systémy ODR 1. řádu:

$$\circledast \quad y_i' = F_i(y_1, \dots, y_n),\ i \in \hat{n},\ \underset{x \in J}{F \in C^1(\Omega)},\ y_i(x_0) = y_i^0$$

→ Prostor řešení je invariantní vůči transformaci $x \mapsto x + a$

Definice: fázová trajektorie

Fázovou trajektorií systému ⊛ rozumíme $\Gamma := \{(y_1(x), \dots, y_n(x)) \mid x \in J\}$, $\varphi(x) := (y_1, \dots, y_n)$

Věta:

Mají-li dvě fázové trajektorie Γ_1, Γ_2 společný bod $(y_1^0, \dots, y_n^0)$, pak existuje okolí H_{y_0}, na kterém jsou shodné.

Důkaz:

Nechť existují $x_1, x_2 \in J : \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

Jednoznačnost Cauchyho úlohy

Položme $\chi(x) := \varphi_2(x + (x_2 - x_1)) \rightarrow \chi$ řeší ⊛ $\wedge$ $\chi(x_1) = \varphi_1(x_1) = \varphi(x_2) \rightarrow \chi(x) = \varphi_1(x)$ na nějakém okolí

$$\rightarrow \varphi_2(x + (x_2 - x_1)) = \varphi_1(x) \text{ na } H_{y_0}$$

Důsledek:

Různá řešení autonomní rovnice ⊛ se neprotínají.

$$t = \pm\sqrt{\frac{l\,mgl}{2g(E+mgl)}}\int_0^{\varphi}\frac{d\alpha}{\left(1-\frac{2mgl}{E+mgl}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \overset{E=mgl}{=} \pm\sqrt{\frac{l\,mgl}{2g\cdot 2mgl}}\int_0^{\varphi}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{y(\varphi)}\frac{4\,dy}{1-y^2} = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\Big[\operatorname{arctg} y\Big]_0^{y(\varphi)} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\operatorname{arctg} y(\varphi)$$

$$\to \operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t \to \sin\frac{\varphi}{2} = \pm tg\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \to \frac{\varphi}{2} = \pm\arcsin\left(tg\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

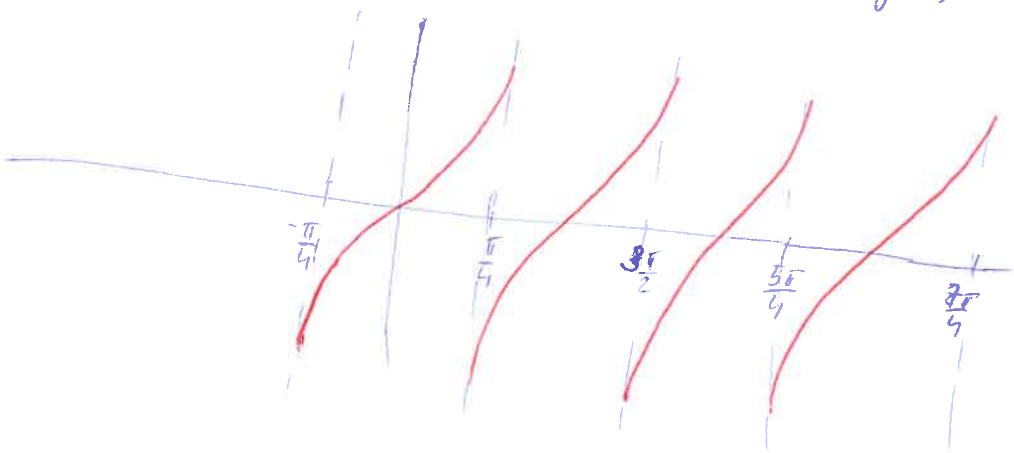
$$\varphi = \pm 2\arcsin\left(tg\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) =$$

$$tg: \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\mapsto(-\infty,+\infty)$$

$$\arcsin\ (-1,1)\mapsto\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

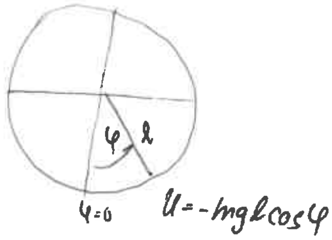
$$\varphi: \left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\mapsto(-\pi,\pi)$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \pm\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\pi}{4} : \quad \varphi: \left(-\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\pi}{4};\ \sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\pi}{4}\right)\mapsto(-\pi,\pi)$$



Řešitelné modely matematické fyziky: 5. přednáška

Matematické kyvadlo



$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\ell^2 + mg\ell\cos\varphi \Rightarrow \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 - mg\ell\cos\varphi = E \geq -mg\ell$$

$$\to t = \pm\int_0^{\varphi}\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2}+2\frac{g}{\ell}\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\varphi}\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{E}{mg\ell}+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{\ell mg\ell}{2g(E+mg\ell)}}\int_0^{\varphi}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\frac{2mg\ell}{E+mg\ell}\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = *$$

i) $k^2 := \frac{2mg\ell}{E+mg\ell} < 1 \Leftrightarrow E > mg\ell$

$$* = \left| \begin{matrix} \sin\frac{\alpha}{2} = y \Leftrightarrow \alpha = 2\arcsin y \\ d\alpha = \frac{2dy}{\sqrt{1-y^2}} \end{matrix} \right| = k\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\varphi}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}} \Rightarrow \sin\frac{\varphi}{2} = y = \mathrm{sn}\left(\pm\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{1}{k}t, k\right) =$$

$$= \pm\sin\left(\mathrm{am}\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{1}{k}t, k\right)\right)$$

$$\to \varphi = 2\,\mathrm{am}\left(\pm\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{1}{k}t, k\right)$$

ii) $E < mg\ell$: $k^2 := \frac{E+mg\ell}{2mg\ell}$ $\to$ substituce: $\sqrt{\frac{2mg\ell}{E+mg\ell}}\sin\frac{\alpha}{2} = y \to \alpha = 2\arcsin(ky)$

$$d\alpha = \frac{2k\,dy}{\sqrt{1-k^2y^2}}$$

$$\to \pm t = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\frac{1}{k}\int_0^{y(\varphi)}\frac{k\,dy}{\sqrt{1-k^2y^2}\sqrt{1-y^2}} \to y(\varphi) = \mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t, k\right) = \frac{1}{k}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\to \varphi = 2\arcsin\left(k\,\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t, k\right)\right)$$

$\boxed{\text{Domácí úkol: } E = mg\ell}$ $(\varphi(t) = ?)$

Autonomní rovnice : $y'' = F(y, y')$

- nechť $y'(x) \neq 0$ na $(\alpha, \beta) \rightarrow y^{-1} : (a,b) \sim (\alpha, \beta)$ existuje

$(y^{-1})'(z) = \dfrac{1}{y'(y^{-1}(z))} \rightarrow p := y' \circ y^{-1} \rightarrow$ substituce : $y' = p(y) \rightarrow y''(x) = p'(y)\, y' = p'(y)\, p(y)$

$\rightarrow p'(y)\, p(y) = F(y, p(y))$

Řešitelné modely matematické fyziky : 4. přednáška

Eulerovy setrvačníkové rovnice

$$I_1 \dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3)\Omega_2 \Omega_3 \quad + \text{ cyklické permutace } \{1,2,3\}$$

$$M_j := I_j \Omega_j \;:\quad \dot{M}_1 = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right) M_2 M_3 \quad + \text{cykl.}$$

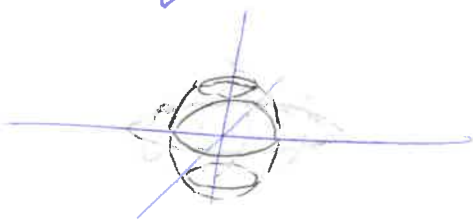
<u>Integrály pohybu</u>

- $\frac{1}{2}\sum I_i \Omega_i^2 = E = \frac{1}{2}\sum M_i \Omega_i = \frac{1}{2}\sum \frac{M_i^2}{I_i}$
- $\sum M_i^2 = M^2$

BÚNO : $I_1 \leq I_2 \leq I_3 \rightarrow \frac{M^2}{2 I_3} \leq E^2 \leq \frac{M^2}{2 I_1}$

$$\left.\begin{matrix} M^2(t) =: \mu^2 \\ E(t) =: \mathcal{H} \end{matrix}\right\} \text{ trajektorie } : \Gamma := \left\{ M \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, M^2 = \mu^2 \wedge \sum \frac{M_i^2}{I_i} = 2\mathcal{H} \right\}$$

$$\updownarrow$$



$$\rightarrow M_1^2 = \left(2E - \frac{M_2^2}{I_2} - \frac{M_3^2}{I_3}\right) I_1 \rightarrow \left(2E - \frac{M_2^2}{I_2} - \frac{M_3^2}{I_3}\right) I_1 + M_2^2 + M_3^2 = M^2$$

$$\rightarrow M_1^2 = \frac{I_1}{(I_3 - I_1)}\left[-M^2 + 2E I_3 - M_2^2 \left(\frac{I_3 - I_2}{I_2}\right)\right]$$

$$\rightarrow \dot{\Omega}_2 = \frac{\dot{M}_2}{I_1} (I_3 - I_1) \frac{M_1}{I_1} \frac{M_3}{I_3} = \dots = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_3}} \left[2E I_3 - M^2 - \frac{M_2^2}{I_2}(I_3 - I_2)\right]^{\frac{1}{2}} \left[M^2 - 2E I_1 - \frac{M_2^2}{I_2}(I_2 - I_1)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\text{tzn} \rightarrow \dot{M}_2 \stackrel{!}{=} c^2 \left[a^2 - M_2^2 b^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[d^2 - g^2 M_2^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$(y_1 = \mathrm{sn}(x))$ vyhovuje : $\dot{y}_1 = \sqrt{(1 - y_1^2)(1 - k^2 y_1^2)}$

$$\ldots \to \Omega_2 = \frac{M_2^2}{I_2} = \pm\sqrt{(\ldots)}\,\mathrm{sn}(\tau, k)$$

$$\Omega_1 = \frac{M_1^2}{I_1} = \pm\sqrt{(\ldots)}\,\mathrm{cn}(\tau, k)$$

$$\Omega_3 = \frac{M_3^2}{I_3} = \pm\sqrt{(\ldots)}\,\mathrm{dn}(\tau, k)$$

$\tau = \ldots$

$k = \ldots$

Řešitelné modely MF : 3. přednáška

Riccatiho rovnice : $y' = ay^2 + by + c \quad , a \neq 0 \; (R)$

$\Downarrow$

$y' = y^2 + \Gamma(x)$

- $y' = y^2 + cx^\alpha$, řešitelné $\iff \alpha = -2 \vee \alpha = \alpha_n = \frac{4n}{1-2n}$
- y_1 řešení $\Rightarrow y = y_1 + \frac{1}{u}$ & $u' = -(2ay_1 + b)u - a \to y$ řeší (R)

- $u' = au + b : \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u_2} = K \in \mathbb{R} \quad (LN)$

- superpoziční princip pro (R):

$y_1, \dots, y_4$ řeší (R) $\Rightarrow \frac{y_3 - y_1}{y_4 - y_2} \cdot \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = K \in \mathbb{R}$ (*)

~~Věta~~ Důkaz:

1) $u_1 := \frac{1}{y_1 - y_3} \; , \; u_2 := \frac{1}{y_2 - y_3} \; , \; u_4 := \frac{1}{y_4 - y_3}$

y_1 řeší (R), u řeší (LN) $\to y := y_1 + \frac{1}{u}$ řeší (R)

$\to K = \frac{u_4 - u_1}{u_4 - u_3}$

Věta:

Nechť $y_1, \dots, y_3$ řeší (R).

Pak y_4, které řeší (*) řeší také (R)

Soustavy ODR 1. řádu

Ř. $\underbrace{y_i' = F_i(x, y_1, \dots, y_n)}_{(\#)}, i \in \hat{n}$, $\underbrace{(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in \mathbb{R}^{n+1}, y_i(x_0) = y_i^0}_{(\Delta)}$

Věta:
Nechť G je souvislá otevřená v $\mathbb{R}^{n+1}$, funkce F_i jsou spojité na G spolu s derivacemi $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$
Pak existuje lokální řešení Cauchyho problému, tj.:
$\exists \delta > 0$; $y_i : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ řeší (#) a vyhovuje podmínkám (Δ),
navíc $\exists I \subset \mathbb{R}, u_i : I \to \mathbb{R}, x_0 \in I$ tak, že u_i řeší (#), (Δ) & u_i nelze prodloužit

Jacobiho eliptické funkce

$G := \mathbb{R}^4$, $0 \leq k \leq 1$:

$y_1' = y_2 y_3$, $y_2' = -y_1 y_3$, $y_3' = -k^2 y_1 y_2$ (JS)
$y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 1$

- $k = 0 \Rightarrow y_1 \sim \sin x$, $y_2 \sim \cos(x)$, $y_3 = 1$

$y_1 := sn(x,k)$, $y_2 := cn(x,k)$, $y_3 = dn(x,k)$

Lemma 1:
$sn^2(x,k) + cn^2(x,k) = 1$, $\forall x, k$
$k^2 sn^2(x,k) + dn^2(x,k) = 1$

Důkaz:

i) $(JS.1) \cdot 2y_1 + (JS.2) 2y_2 \Rightarrow \underbrace{2y_1 y_1' + 2y_2 y_2'}_{\frac{d}{dx}(y_1^2 + y_2^2)} = y_1 y_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 = 0$

$\frac{d}{dx}(y_1^2 + y_2^2) = 0 \Rightarrow y_1^2 + y_2^2 = 1$

ii) $(JS.1) 2k^2 y_1 + (JS.3) 2y_3 \Rightarrow \frac{d}{dx}(k^2 y_1^2 + y_3^2) = 0 \Rightarrow k^2 y_1^2 + y_3^2 = 1$

Důsledek:

$-1 \leq sn(x,k), cn(x,k) \leq 1$

pro $k < 1$: $\sqrt{1-k^2} \leq dn(x,k) \leq 1$

Lemma 2:

$sn(-x,k) = -sn(x,k)$

$cn(-x,k) = cn(x,k)$

$dn(-x,k) = dn(x,k)$

Důkaz:

$z_1(x) := -y_1(-x)$, $z_2(x) := y_2(-x)$, $z_3(x) := y_3(-x)$

$\Rightarrow z_1'(x) = +y_1'(-x) = +y_2(-x)y_3(-x) = z_2(x)z_3(x)$

$z_2'(x) = \dots$

$z_3'(x) = \dots$

$\to$ z_1, z_2, z_3 splňují stejnou soustavu jako y_1, y_2, y_3 se stejnými poč. podmínkami.

$\to$ $\boxed{z = y}$

Lemma 3:

$$K(k^2) := \int_0^1 \frac{du}{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$$ - úplný eliptický integrál

- $sn(K(k^2), k) = 1$

Důkaz:

$$(y_1')^2 = y_2^2 y_3^2 \overset{L1}{=} (1-y_1^2)(1-k^2y_1^2) \Rightarrow y_1' = \sqrt{(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)}$$

$$f(y_1) := \int_0^{y_1} \frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)}} = x \quad , y_1 < 1 < \frac{1}{k}$$

$\hookrightarrow$ rostoucí $\to$ $\underset{sn}{\overset{\shortparallel}{f^{-1}}} : [0,k] \to [0,1]$

$k=0: K=\frac{\pi}{2}$

$k=1: sn(x,1)=\tanh(x), \quad K=+\infty$

Lemma 4:

$$sn(x+K)=\frac{cn(x,k)}{dn(x,k)}$$

$$cn(x+K)=-\sqrt{1-k^2}\,\frac{sn(x,k)}{dn(x,k)}$$

$$dn(x+K,k)=\frac{\sqrt{1-k^2}}{dn(x,k)}$$

Důkaz:

$$z_1(x+K):=\frac{y_2(x)}{y_3(x)}, \quad z_2(x+K):=-\sqrt{1-k^2}\,\frac{y_1(x)}{y_2(x)}, \quad z_3(x+K)=\frac{\sqrt{1-k^2}}{y_3(x)}$$

Důsledek:

$$sn(x+2K,k)=-sn(x,k) \Rightarrow sn(x+4K,k)=sn(x,k)$$

$$cn(x+2K,k)=-cn(x,k) \Rightarrow cn(x+4K,k)=cn(x,k)$$

$$dn(x+2K,k)=dn(x,k)$$

$$sn(x,k):[0,K]\to[0,1]$$

$$am(x):=\arcsin(sn(x,k)) \iff \sin(am(x))=sn(x)$$

$$am:[0,K]\to[0,\tfrac{\pi}{2}]$$

Vlastnosti $am(x)$:

$$cn(x)=\cos(am(x))$$

$$dn(x)=\sqrt{1-k^2\sin^2(am(x))}$$

$$am'(x)=dn(x)$$

$$am(x)=\int_0^x dn\,x'\,dx'$$