

Základy teorie grafů

(poznámky z přednášek)

Pavel Strachota, FJFI ČVUT

20. září 2021

Obsah

Úvod	7
1 Standardní kurs teorie grafů	9
1.1 Základní pojmy	9
1.1.1 Graf, izomorfismus grafů, samokomplementární grafy	9
1.1.2 Stupeň vrcholu, skóre	11
1.1.3 Zobecněná definice grafu, adjacenční matice grafu	14
1.2 Souvislost	15
1.2.1 Počet souvislých grafů na n vrcholech	15
1.2.2 Adjacenční matice souvislého grafu	17
1.3 Bipartitní grafy	18
1.4 Stromy	19
1.5 Hledání minimální kostry grafu	21
1.6 Jednotážky	22
1.7 Hamiltonovské kružnice a grafy	23
1.8 Párování v grafech	26
1.8.1 Párování v bipartitních grafech	29
1.9 Toky v sítích	30
1.9.1 Hledání maximálního toku pomocí f -nenasycených cest	31
1.10 Hranové obarvení grafu	34
1.10.1 Problém rozvrhu hodin	34
1.10.2 Vizingova věta	36
1.11 Vrcholové obarvení grafu	40
1.11.1 k -kritické grafy	43
1.11.2 Brooksova věta	45
1.12 Planární grafy	48
1.12.1 Barevnost planárních grafů	52
1.12.2 Minimální počet křížení v grafu	54
1.13 Vlastní čísla adjacenční matice grafu	56
2 Rozšířený kurs teorie grafů	61
2.1 Brouwerova věta o pevném bodě	61
2.2 Pravděpodobnostní důkazy v teorii grafů	65
2.3 Extremální teorie grafů	66
2.3.1 Turánova věta	66
2.3.2 Erdősova věta	70
2.3.3 Graf s $\#E$ blízkým Erdősovu odhadu	73
2.3.4 Počet K_3 a $\bar{K}_3$ v grafu	76
2.3.5 Odhady $\alpha(G)$ a $\omega(G)$	77
2.4 Ramseyovská čísla	80
2.4.1 Odhady ramseyovských čísel	82
2.4.2 Erdősova věta - dolní odhad $r(k, k)$	85

3	Generující funkce	87
3.1	Obyčejné mocninné řady	87
3.1.1	Pravidla pro počítání s OPS	87
3.1.2	Jednoduché příklady	89
3.1.3	Rozměňovací problém	92
3.1.4	Tvrzení z teorie čísel dokazatelná pomocí OPS	97
3.2	Exponenciální generující funkce	101
3.2.1	Pravidla pro počítání s EGF	102
3.2.2	Jednoduchý příklad	103
3.2.3	Bernoulliova čísla	103
3.2.4	Invertovací formule	108
3.2.5	Stirlingova čísla	110
3.2.6	Bellova čísla	112
3.2.7	Skládání generujících funkcí	115

Seznam obrázků

1.1.1 Schéma grafu $V = \{a, b, c, d\}, E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$	9
1.1.2 Samokomplementární grafy	11
1.1.3 Zobecněný graf definovaný takto:	14
$V = \{1, 2, 3, 4\} \quad E = \{a, b, c, d, e, f\}$ $\varphi(a) = \{1, 2\} \quad \varphi(d) = \{1\}$ $\varphi(b) = \{1, 2\} \quad \varphi(e) = \{1, 4\}$ $\varphi(c) = \{1, 2\} \quad \varphi(f) = \{1, 3\}$	
1.2.1 Souvislé grafy na 4 vrcholech	16
1.3.1 Cesty P_x a P_y	18
1.6.1 Tvorba cyklu v eulerovském grafu	23
1.6.2 Jednotážka se startovním a cílovým vrcholem	24
1.8.1 Benzenové jádro a teoretické sloučeniny	28
1.8.2 M -střídací cesta	28
1.8.3 Komponenty se sudým (S) a lichým (L) počtem vrcholů	30
1.9.1 Tok v síti a minimální řez	32
1.9.2 f -nenasycená cesta v síti	33
1.9.3 Algoritmus hledání maximálního toku pomocí f -nenasycených cest	34
1.11.4-kritický graf	44
1.11.2Jednoprvkový řez grafem	44
1.11.3K důkazu věty 1.11.16	45
1.12.1 K_4 nakreslený do roviny	49
1.12.2 K_5 není planární	49
1.12.3 K_5 na toru a $K_{3,3}$ na Möbiově listu	50
1.12.4Zbytečné křížení hran a jeho odstranění	54
1.12.5Minimální počet křížení v grafu K_6	55
2.1.1 Bijekce kruhu na trojúhelník	62
2.1.2 „Správná“ a „nesprávná“ triangulizace	62
2.3.1 Páry vzdálených bodů v rovině	69
2.3.2 Konstrukce G pro $p = 2$	73

Úvod

V průběhu přípravy na zkoušku ze Základů teorie grafů jsem si uvědomil, že mé zápisky z přednášky jsou natolik kvalitní, že by bylo možné je použít jako základ pro docela slušná skripta z tohoto předmětu. Ještě před samotnou zkouškou jsem tedy zkusil napsat pár stránek a s výsledkem jsem byl natolik spokojen, že jsem s chutí pokračoval dál, pouze s motivací vytvořit něco smysluplného a užitečného. Přesto mám poněkud rozporuplné pocity z následků, které uveřejnění tohoto materiálu může mít.

Je jasné, že dobré zápisky nelze sestavit na základě nedobrych přednášek. Skvělé a zajímavé přednášky paní docentky Edity Pelantové je však skoro škoda publikovat tak, aby byly každému snadno a volně dostupné. Student získá určitou jistotu, o kterou se v případě potřeby bude moci opřít, ale po krátkém čase usoudí, že sám si o mnoho lepší poznámky z přednášky neodnese. Je-li student trochu línější, na přednášce se už neukáže. Je pravda, že ve čtvrtém ročníku již velká většina studentů brzy rozpozná kvalitu přednášek a dokáže si jí vážit. Ale vy, kteří jste v pokušení, vezte, že byste přišli opravdu o hodně. I kdybyste na žádné jiné přednášky nechodili, na grafy chod'te, protože skutečně stojí za to. A dělejte si zápisky, protože tak se toho nejvíc naučíte :-)

ZTG se od akademického roku 2005/2006 dělí na dva předměty s odlišnou náplní. ZTG-B se skládá z 1 přednášky a 1 cvičení týdně. Na přednášce jsou představeny základní kapitoly z teorie grafů, které pokrývá první část těchto zápisků. Na cvičení jsou pak předmětem studia mimo jiné algoritmy řešící některé známé grafové úlohy. ZTG-A se skládá ze 2 přednášek týdně, přičemž jedna je vždy vedena v době, kdy posluchači varianty B tohoto předmětu mají zrovna cvičení. Předmětem této přednášky jsou některé pokročilejší partie teorie grafů, jako jsou věty z extrémní teorie grafů a ramseyovská čísla, dále pak generující funkce a jejich využití demonstrované na velmi pěkných příkladech z oboru kombinatoriky nebo teorie čísel. Tato část přednášky je pokryta ve druhé a třetí kapitole.

Celý text velmi těsně kopíruje látku vyloženou na přednáškách, některé pasáže jsou však mírně modifikovány, aby jejich pochopení nebo návaznost byly (z mého pohledu) přirozenější. Vzhledem k tomu, že existuje kvalitní a přitom na internetu volně dostupná anglická literatura (dva příklady jsou uvedeny v seznamu použité literatury), opatřil jsem mnoho definic jednotlivých pojmů též jejich anglickým zněním. Důkazy jsou někdy komentovány až příliš, mou snahou však bylo nenechat žádného čtenáře na holičkách. Na druhou stranu však platí, že nejlépe si pamatujeme to, na co přijdeme sami.

Přeji vám všem, aby vám tyto poznámky byly užitečnou pomůckou při studiu a abyste úspěšně složili zkoušky nejen z teorie grafů.

Pavel Strachota

Kapitola 1

Standardní kurs teorie grafů

1.1 Základní pojmy

Úmluva. Necht' $r \in \mathbb{N}$, necht' V je konečná množina. Potom počet prvků množiny V značíme symbolem $\#V$. Dále značíme

$$\binom{V}{r} = \{A \subset V \mid \#A = r\}.$$

To znamená, že $\binom{V}{r}$ označuje množinu všech r -prvkových podmnožin množiny V . Dále budeme používat označení

$$\hat{n} = \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Pozorování. Platí $\#\binom{V}{r} = \binom{\#V}{r}$.

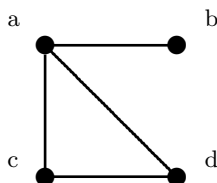
1.1.1 Graf, izomorfismus grafů, samokomplementární grafy

Definice 1.1.1. Necht' V je konečná množina, $E \subset \binom{V}{2}$. Uspořádaná dvojice $G = (V, E)$ se nazývá (neo-orientovaný) **graf**. V nazýváme množinou **vrcholů** (z anglického **vertex**), E množinou **hran** (z anglického **edge**).

Poznámka. Grafy si zpravidla představujeme tak jako na obrázku 1.1.1. Vrcholy se znázorňují jako body (mohou představovat například města). Hran, což jsou dvouprvkové množiny vrcholů, se zobrazují jako úsečky nebo křivky spojující dané vrcholy (mohou představovat například cesty mezi danými městy). Řada úloh z teorie grafů má velmi konkrétní využití v praxi, což si uvědomíme, hned jak si pod vrcholy a hranami představíme skutečné objekty, jako to ukazují uvedené příklady. Důkazy některých vět nás však přesvědčí, že strukturu grafu lze mnohdy vybudovat i nad objekty, které mají daleko do právě popsané geometrické představy grafu.

Úmluva. Později se ve výkladu vyskytne formálně nesprávné značení, které má však intuitivní význam. Buďte $G = (V, E)$, $H = (U, F)$ grafy, $v \in V$, $e \in E$. Potom definujeme:

- $G \cup H = (V \cup U, E \cup F)$ (tj. oba grafy spojíme do jednoho),



Obrázek 1.1.1: Schéma grafu $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$

- $G \setminus F = (V, E \setminus F)$, pokud $F \subset \binom{V}{2}$, resp. $F \subset E$ (tj. z grafu G ubereme hrany, které leží v F),
- $G \setminus U = \left(V \setminus U, E \cap \binom{V \setminus U}{2} \right)$ (tj. z grafu G ubereme všechny vrcholy, které leží v U , a všechny hrany, které z nich vedou),
- $v \equiv \{v\}, e \equiv \{e\}$ (prvek ztotožníme s jednoprvkovou množinou), pokud nemůže dojít k nedorozumění.

Dále se vyskytne případ, kdy budeme mluvit o grafu G , aniž specifikujeme množiny jeho vrcholů a hran. Proto nyní zavedme označení $E(G)$ pro množinu hran grafu G a označení $V(G)$ pro množinu vrcholů grafu G .

Poznámka. Obvykle budeme používat písmena m, n ve smyslu $n = \#V$ a $m = \#E$. Podle předchozího pozorování můžeme říci, že počet různých grafů na n vrcholech je

$$2^{\binom{n}{2}},$$

nebot' to je počet všech různých podmnožin $E \subset \binom{V}{2}$.

Definice 1.1.2. Necht' $G = (V, E)$, $H = (U, F)$ jsou grafy. Řekneme, že graf G je **izomorfní** s grafem H a značíme

$$G \sim H,$$

jestliže existuje bijekce $\Pi : V \mapsto U$ taková, že platí

$$(\forall u, v \in V) (\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\Pi(u), \Pi(v)\} \in F).$$

Poznámka. Grafy jsou spolu izomorfní, jestliže jsou stejné až na označení svých vrcholů. Bijekce Π provádí právě ono přeznačení vrcholů grafu G na vrcholy grafu H .

Poznámka 1.1.3. Na tříprvkové množině jsou 4 navzájem různé neizomorfní grafy. Izomorfismus grafů je ekvivalence na množině všech grafů o n vrcholech. V jedné třídě ekvivalence je maximálně $n!$ grafů, neboť tolik je různých bijekcí (permutací) na dvou n -prvkových množinách. Neizomorfních grafů na n vrcholech je tedy více nebo rovno než

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!},$$

přičemž pro $n \rightarrow \infty$ je s užitím Stirlingovy formule¹ pro vyjádření faktoriálu

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \approx \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^{n \log_2 n - n \log_2 e + \frac{1}{2} \log_2(2\pi n)}} \rightarrow +\infty.$$

Definice 1.1.4. Necht' $G = (V, E)$ je graf. Potom graf

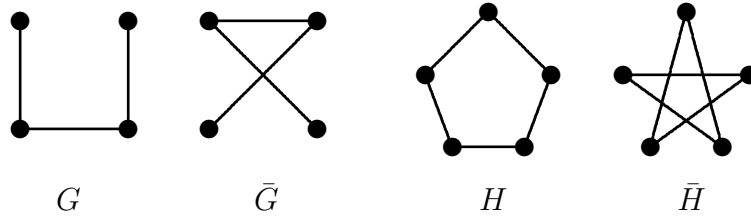
$$\bar{G} = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E \right)$$

nazveme **doplňkem** (angl. *complement*) grafu G . Platí-li $G \sim \bar{G}$, říkáme, že G je **samokomplementární** (angl. *self-complementary*).

Pozorování.

- Platí $\bar{\bar{G}} = G$
- Na třech vrcholech neexistuje žádný samokomplementární graf.

¹ $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$



Obrázek 1.1.2: Samokomplementární grafy

Poznámka. Necht' $G \sim \bar{G}$. Potom musí pro $m = \#E \in \mathbb{N}_0$ platit

$$m = \binom{n}{2} - m,$$

z čehož plyne

$$m = \frac{1}{2} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4} \in \mathbb{N}_0.$$

Proto pro $n = 2$ a $n = 3$ samokomplementární graf neexistuje, existuje však pro $n = 4$ a $n = 5$. Jednoduché samokomplementární grafy vidíme na obrázku 1.1.2.

Poznámka. Existuje-li samokomplementární graf na n vrcholech, potom platí $n \equiv 0 \pmod{4}$ nebo $n \equiv 1 \pmod{4}$. Platí i obrácená implikace?

1.1.2 Stupeň vrcholu, skóre

Definice 1.1.5. Bud' $G = (V, E)$ graf, $v \in V$. Číslo

$$d_G(v) = \# \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

nazýváme **stupněm** (angl. *degree*) vrcholu v . Je to počet hran, které vedou z vrcholu v . Dále definujeme **minimální stupeň** grafu G jako

$$\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v),$$

maximální stupeň grafu G jako

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$$

a **průměrný stupeň** grafu G jako

$$\rho(G) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_G(v_i).$$

Poznámka. Pro každý $v \in V$ platí $0 \leq \delta(G) \leq d_G(v) \leq \Delta(G) \leq n-1$.

Věta 1.1.6.

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2\#E.$$

Důkaz. Tvrzení je zřejmé. Každá hrana $e = \{u, v\}$ přispěje jedničkou ke stupni dvou vrcholů u, v . $\square$

Důsledek. Součet stupňů $\sum_{v \in V} d_G(v)$ je vždy sudý.

Definice 1.1.7. Posloupnost čísel $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ nazveme **skóre**, existuje-li graf $G = (V, E)$ na vrcholech $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ takový, že

$$(\forall i \in \hat{n}) (d_i = d_G(v_i)).$$

Příklad.

- $(1, 3, 3, 4, 6, 6, 6)$ není skóre, protože součet $\sum d_i$ je lichý.
- $(1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9)$ není skóre, protože poslední vrchol v_{10} by byl napojen hranou na všechny předchozí, vrchol v_9 by pak byl napojen na všechny kromě jednoho. Oba vrcholy v_1 a v_2 tedy nemohou mít stupeň roven 1.

Věta 1.1.8. *Necht' $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ je n -tice nezáporných celých čísel taková, že $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$. Potom $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ je skóre, právě když $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ je skóre.*

Poznámka. S pomocí uvedené věty lze o libovolné n -tici rozhodnout, zda je to skóre. Iteraci zastavíme s odpovědí „ne“, jestliže nám v průběhu výpočtu vznikne záporné číslo. Dojdeme-li v p -té iteraci až k jedinému číslu $(d_1^{(p)})$, tak původní n -tice je skóre, právě když $d_1^{(p)} = 0$.

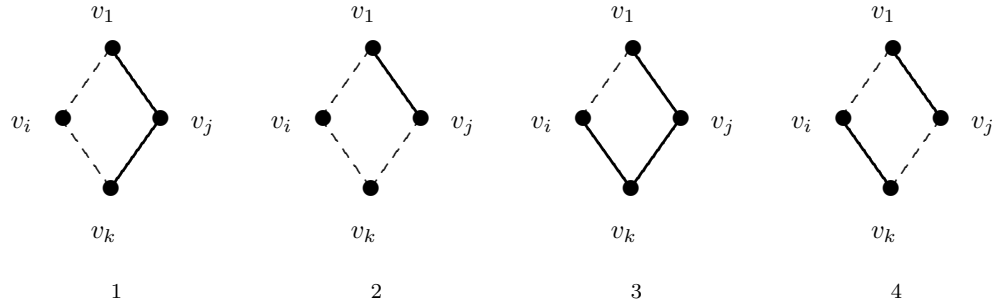
Důkaz. $\Leftarrow$:

Necht' existuje graf se skóre $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$. K tomuto grafu přidáme nový vrchol, který hranami spojíme s prvními d_1 vrcholy. Tak získáme graf, který bude mít skóre $(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

$\Rightarrow$:

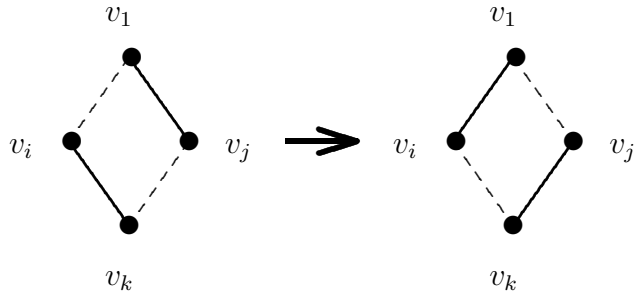
Mějme graf se skóre $(d_1, d_2, \dots, d_n)$, chceme zkonstruovat graf se skóre $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$. Mohou nastat dva případy:

1. Hrany z vrcholu v_1 vedou právě do následujících d_1 vrcholů $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$. V tom případě vrchol v_1 odebereme a získáme graf se skóre $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$.
2. Existuje $i \in \{2, 3, \dots, d_1 + 1\}$ takové, že $\{v_1, v_i\} \notin E$. To znamená, že rovněž existuje $j \in \{d_1 + 2, \dots, n\}$ takové, že $\{v_1, v_j\} \in E$. Pro každé $k \notin \{1, i, j\}$ tak může nastat právě jeden z případů na následujícím obrázku. Přerušované čáry označují, že mezi vrcholy nevede hrana. Na existenci hrany mezi vrcholy v_1 a v_k nezáleží, a proto ji v rozlišování jednotlivých případů neuvažujeme.



Alespoň pro jedno k však musí nastat případ 4. Kdyby totiž nastávaly pouze případy 1, 2 a 3, přispěl by každý další vrchol v_k ke stupni $d_j = d_G(v_j)$ alespoň tolik jako ke stupni $d_i = d_G(v_i)$. Protože však předpokládáme $\{v_1, v_j\} \in E$ a přitom $\{v_1, v_i\} \notin E$, platilo by $d_i < d_j$, což je spor s uspořádáním čísel $d_1, \dots, d_n$.

Vezměme tedy k takové, pro nějž nastává případ 4. Vyrobitme nyní nový graf, jenž vznikne záměnou hran provedenou takto:



Tento nový graf bude mít zřejmě stejné skóre jako graf původní. Liší se však tím, že z v_1 vede oproti původnímu grafu více hran do vrcholů $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$. Potom buď nastává případ (1), nebo stále existuje $i \in \{2, 3, \dots, d_1 + 1\}$ takové, že $\{v_1, v_i\} \notin E$, takže můžeme úvahu provedenou v případě (2) opakovat. $\square$

Poznámka.

- Rozhodovací algoritmus založený na předchozí větě má složitost maximálně $O(n^2)$.
- Podle důkazu implikace $\boxed{\Leftarrow}$ lze snadno pro dané skóre nalézt odpovídající graf.

Věta 1.1.9. *Bud' $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ n -tice nezáporných celých čísel takových, že $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$. Potom je-li $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ skóre, tak pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí*

$$\sum_{k=1}^i d_k \leq i(i-1) + \sum_{k=i+1}^n \min\{i, d_k\}.$$

Důkaz. Mějme graf G na vrcholech $V = \{1, 2, \dots, n\}$ s daným skóre. Pro pevné $i \in \hat{n}$ diskutujme, které hrany přispívají do součtu prvních i stupňů $d_1, \dots, d_i$ v grafu G :

1. Hrany, které vedou mezi vrcholy $\{1, \dots, i\}$, přispívají k sumě $\sum_{k=1}^i d_k$ dvojkou. Proto maximální součet stupňů dosažený pouze pomocí těchto hran je $2\binom{i}{2} = i(i-1)$ (viz. věta 1.1.6).
2. Další hrany, které přispívají k dané sumě, vedou mezi vrcholy u, v , kde $u \in \{1, \dots, i\}$ a $v \in \{i+1, \dots, n\}$. Tyto vrcholy přispívají k sumě jen jedničkou. Přitom z každého vrcholu v z uvedené množiny nemůže zřejmě vést do prvních i vrcholů více hran, než je i , ale ani více hran, než je $d(v)$.

$\square$

Poznámka. Pokud navíc je $\sum_{i=1}^n d_i$ sudé číslo, platí ve větě ekvivalence.

Definice 1.1.10. Bud' $G = (V, E)$ graf. Graf $G' = (V', E')$ takový, že $V' \subset V$ a $E' \subset (E \cap \binom{V'}{2})$, nazýváme **podgrafem** (angl. *subgraph*) grafu G . Jestliže $G' \neq G$, pak se G' nazývá **vlastním podgrafem** (angl. *proper subgraph*) grafu G .

Graf $G[V'] = (V', E \cap \binom{V'}{2})$ se nazývá podgraf G **indukovaný** (množinou vrcholů) V' . Obecně, jestliže pro podgraf $G' = (V', E')$ grafu G platí $E' = (E \cap \binom{V'}{2})$, nazýváme G' **indukovaným podgrafem** (angl. *induced subgraph*) grafu G .

Poznámka. Je-li G' podgrafem G , tak občas též říkáme, že G je **nadgrafem** G' (angl. *supergraph*). Pro relaci „být podgrafem“ používáme množinové označení $G' \subset G$.

Definice 1.1.11. Zavádíme následující pojmenování a označení pro tyto speciální typy grafů:

- **Úplný** (angl. *complete*) graf na n vrcholech

$$K_n = (\{1, 2, \dots, n\}, \{\{i, j\} \mid i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j\}) = \left(\hat{n}, \binom{\hat{n}}{2}\right).$$

- **Cesta** (angl. *path*) délky n na $n+1$ vrcholech

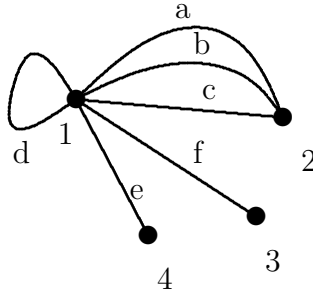
$$P_n = (\hat{n} \cup \{0\}, \{\{i-1, i\} \mid i \in \hat{n}\}).$$

- „Hvězda“

$$S_n = (\hat{n} \cup \{0\}, \{\{0, i\} \mid i \in \hat{n}\})$$

- **Kružnice** (angl. *cycle*) délky n

$$C_n = (\hat{n}, \{\{i, i+1\} \mid i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\} \cup \{\{1, n\}\}).$$



Obrázek 1.1.3: Zobecněný graf definovaný takto:

$$\begin{aligned}
 V &= \{1, 2, 3, 4\} & E &= \{a, b, c, d, e, f\} \\
 \varphi(a) &= \{1, 2\} & \varphi(d) &= \{1\} \\
 \varphi(b) &= \{1, 2\} & \varphi(e) &= \{1, 4\} \\
 \varphi(c) &= \{1, 2\} & \varphi(f) &= \{1, 3\}
 \end{aligned}$$

1.1.3 Zobecněná definice grafu, adjacenční matice grafu

Definice 1.1.12. Bud'te V, E konečné množiny.

Bud' $\varphi : E \mapsto \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$. Potom uspořádanou trojici $G = (V, E, \varphi)$ nazýváme **graf**.

- E jsou jen „jména“ hran.
- φ každé hraně přiřazuje její koncové vrcholy.
- Připouští se násobné hrany i hrany z vrcholu do sebe sama.

Definice 1.1.13. (Zobecněná definice orientovaného grafu) Bud'te V, A konečné množiny.

Bud' $\varphi : A \mapsto \binom{V}{2} \cup (V \times V)$. Potom uspořádanou trojici $D = (V, A, \varphi)$ nazýváme **orientovaný graf** (angl. *directed graph*).

- tato definice připouští orientované hrany (z $V \times V$) i neorientované hrany (z $\binom{V}{2}$).
- hrana z vrcholu v do sebe sama může být reprezentována uspořádanou dvojicí (v, v) .

Definice 1.1.14. Bud' $G = (V, E)$ graf, $n = \#V$. **Adjacenční maticí** (angl. *adjacency matrix*) grafu G (maticí sousedností) rozumíme matici $\mathbf{A}_G \in \{0, 1\}^{n, n}$, pro jejíž prvky platí

$$(\mathbf{A}_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Poznámka 1.1.15. Adjacenční matice má následující zřejmé vlastnosti:

- $\mathbf{A}_G$ je symetrická, a tedy diagonalizovatelná, s reálným spektrem. Pro takovou matici platí $\text{Tr } \mathbf{A}_G = \sum \lambda_i$, kde λ_i jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}_G$. Protože ovšem $(\forall i \in \hat{n}) ((\mathbf{A}_G)_{ii} = 0)$, tak $0 = \text{Tr } \mathbf{A}_G = \sum \lambda_i$.
- Uvědomíme-li si, jakým způsobem vzniká (i, j) -tý prvek matice $\mathbf{A}_G \mathbf{A}_G = \mathbf{A}_G^2$, tak ze symetrie $\mathbf{A}_G$ plyne $(\mathbf{A}_G^2)_{ii} = d_G(v_i)$. Z toho dále plyne

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \text{Tr } (\mathbf{A}_G^2) = \sum_{i=1}^n d_G(v_i) = 2\#E.$$

1.2 Souvislost

3. přednáška : 27. 9.

Definice 1.2.1. Bud' $G = (V, E)$ graf. Posloupnost vrcholů $v_0, v_1, \dots, v_k$ nazýváme **sledem** (angl. *walk*) délky k , jestliže platí

$$\# \text{hran} \parallel (\forall i \in \hat{k}) (\{v_{i-1}, v_i\} \in E).$$

Sled $v_0, v_1, \dots, v_k$ nazveme **cestou** (angl. *path*) délky k , pokud navíc

$$(\forall i, j \in \{0, 1, 2, \dots, k\}) (i \neq j \Rightarrow v_{i-1} \neq v_i).$$

$O \notin \hat{k}$

Sled $v_0, v_1, \dots, v_k$, pro který platí $v_0 = v_k$, nazýváme **cyklem** (angl. *closed path*) délky k . Cyklus $v_0, v_1, \dots, v_k$ nazveme **kružnicí** (angl. *cycle* (!)) délky k , pokud

$$(\forall i, j \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}) (i \neq j \Rightarrow v_{i-1} \neq v_i).$$

nebo $\forall i, j \in \hat{k}$

Definice 1.2.2. Bud' $G = (V, E)$ graf, $u, v \in V$. Řekneme, že vrcholy u a v **jsou spojeny** (angl. *linked*) v G , existuje-li sled v G s počátečním vrcholem u a koncovým vrcholem v , tj. sled

$$u = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = v.$$

Poznámka. Relace „být spojen“ je ekvivalence na množině vrcholů V . Přitom každý vrchol je spojen sám se sebou sledem délky 0.

Definice 1.2.3. Třídy ekvivalence podle uvedené relace nazýváme **komponenty** (angl. *component*) grafu G . Jejich počet značíme $c(G)$. Jestliže $c(G) = 1$, říkáme, že graf G je **souvislý** (angl. *connected*).

Poznámka. Graf G je souvislý, právě když mezi dvěma libovolnými vrcholy existuje sled.

Příklad. Z 8 grafů na 3 vrcholech jsou 4 souvislé. Přitom pro $\#V = 3$ platí, že G je souvislý, právě když $\bar{G}$ není souvislý.

Poznámka 1.2.4. Platí: G není souvislý $\Rightarrow \bar{G}$ je souvislý. Opačná implikace neplatí.

Důkaz. Množinu vrcholů grafu G rozdělíme na jednu komponentu $V_1 \subset V$ a zbytek $V_2 \subset V$. Potom mezi těmito dvěma podmnožinami neexistují žádné hrany. Naopak v doplňku grafu G existují hrany mezi libovolným $u \in V_1$ a $v \in V_2$. Proto mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje sled, a to maximálně délky 2.

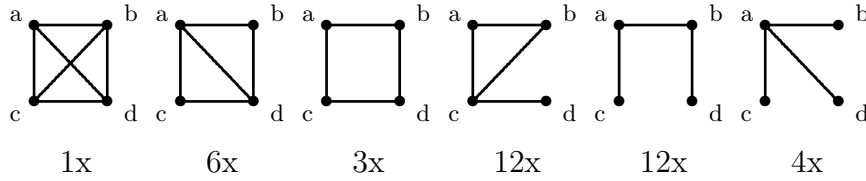
Příkladem vyvracejícím platnost opačné implikace jsou grafy H a $\bar{H}$ na obrázku 1.1.2. □

1.2.1 Počet souvislých grafů na n vrcholech

Označme s_n počet různých souvislých grafů na n vrcholech.

Příklad. Obrázek 1.2.1 ukazuje všechny typy souvislých grafů na 4 vrcholech, přičemž čísla pod jednotlivými grafy udávají počet izomorfních grafů stejného typu. I když to není pro výklad důležité, ukážeme pro úplnost, jakým způsobem lze na uvedená čísla přijít (grafy okomentujeme zleva doprava):

1. Jasně.
2. Chybí jedna hrana. Možností, jak z úplného grafu odebrat hranu, je zjevně 6.
3. Dvě různé dvojice nejsou spojeny hranou. První dvojici vybereme $\binom{4}{2} = 6$ způsoby, druhá je již jednoznačně dána. Pořadí výběru dvojic však nehraje roli, proto je počet souvislých grafů tohoto typu roven $\frac{6}{2} = 3$.
4. Z jednoho vrcholu („zdroje“) nevedou dvě hrany (do dvou vrcholů „cíle“). Zdroj lze vybrat 4 způsoby, cíle lze vybrat $\binom{3}{2} = 3$ způsoby.
5. Prostřední hrana (mezi vrcholy **a, b**) lze vybrat 6 způsoby, hrany do zbylé dvojice vrcholů lze zvolit 2 způsoby.



Obrázek 1.2.1: Souvislé grafy na 4 vrcholech

6. Jeden vrchol je spojen se třemi ostatními. Tento vrchol lze vybrat 4 způsoby.

Celkem máme na 4 vrcholech

$$s_4 = 1 + 6 + 3 + 12 + 12 + 4 = 38$$

souvislých grafů. Jak snadno spočítat s_n pro libovolné n ukazuje následující věta.

Věta 1.2.5. *Bud' s_n počet souvislých grafů na n vrcholech. Potom platí*

$$n \cdot 2^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k s_k 2^{\binom{n-k}{2}}.$$

Důkaz. Uvedenou rovnost dokážeme zajímavou úvahou. Vyjádříme počet všech uspořádaných dvojic (G, x) kde G je graf na n vrcholech a x je jeden z vrcholů tohoto grafu, a to dvěma způsoby.

- Počet všech grafů je $2^{\binom{n}{2}}$, v každém z nich lze vrchol x zvolit n způsoby, uvedených dvojic je tedy $P = n \cdot 2^{\binom{n}{2}}$.
- Zvolme pevně $k \in \hat{n}$. Počet dvojic (G, x) , kde x se nachází v komponentě grafu G , která má k vrcholů, je

$$p_k = \binom{n}{k} k s_k 2^{\binom{n-k}{2}},$$

protože:

- $\binom{n}{k}$ způsoby lze vybrat k vrcholů z n ,
- k způsoby lze z vybraných vrcholů zvolit vrchol x ,
- s_k je počet různých komponent (souvislých podgrafů), které lze na vybraných k vrcholech vytvořit
- a $2^{\binom{n-k}{2}}$ je počet všech grafů (na $n - k$ vrcholech), které mohou být vytvořeny na vrcholech, které jsme nevybrali.

Protože pro každou dvojici (G, x) se x zřejmě nachází v komponentě o počtu vrcholů alespoň 1 a nejvýše n , platí

$$n \cdot 2^{\binom{n}{2}} = P = \sum_{k=1}^n p_k.$$

□

Poznámka. Po vydělení n přejde rovnost na tvar

$$2^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} s_k 2^{\binom{n-k}{2}}.$$

Příklad. Protože už víme, že

$$s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 4,$$

lze dosazením do rekurentního vzorce pro $n = 4$ získat postupně

$$\begin{aligned} 2^{\binom{4}{2}} &= \sum_{k=1}^4 \binom{3}{k-1} s_k 2^{\binom{4-k}{2}} \\ 64 &= 8 + 6 + 12 + s_4 \\ 38 &= s_4 \end{aligned}$$

Je vidět, že jsme se v našich úvahách předvedených v předchozím příkladu nespletli.

1.2.2 Adjacenční matice souvislého grafu

Věta 1.2.6. *Bud' A_G adjacenční matice grafu G , necht' $k \in \hat{n}$. Potom prvek $(A_G^k)_{ij}$ je roven počtu sledů délky k z vrcholu v_i do vrcholu v_j .*

Důkaz. Tvrzení snadno dokážeme indukcí podle k :

- pro $k = 1$: Podle definice platí

$$(A_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

což zjevně představuje počet sledů délky 1 (což jsou přímo hrany) z v_i do v_j .

- indukční krok $k \rightarrow k + 1$: Platí

$$(A_G^{k+1})_{ij} = \sum_{l=1}^n (A_G^k)_{il} (A_G)_{lj} = \sum_{\substack{l=1 \\ \{v_l, v_j\} \in E}}^n \underbrace{(A_G^k)_{il}}_{(*)}.$$

(*) představuje počet sledů délky k z v_i do v_l . Sčítá se však pouze přes takové vrcholy v_l , z nichž vede hrana do vrcholu v_j . Proto (*) rovněž představuje počet sledů délky $k + 1$ z v_i do v_j takových, že předposledním vrcholem v sledu je v_l . Součtem přes všechny takové v_l dostaneme celkový počet sledů délky $k + 1$ z v_i do v_j .

□

Důsledek. *Necht' A_G je adjacenční matice grafu $G = (V, E)$, $n = \#V$. Potom G je souvislý právě tehdy, když*

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_G^k > 0,$$

tj. právě když všechny prvky uvedené matice jsou kladné.

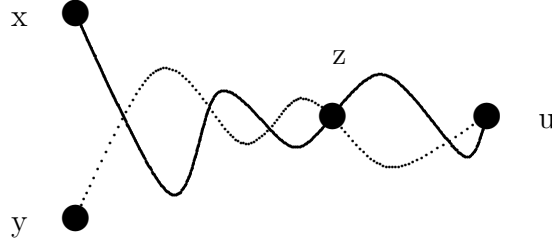
Důkaz. Je zřejmé, že mezi dvěma různými vrcholy existuje sled, právě když mezi nimi existuje cesta. (Ze sledu obsahujícího vícekrát stejný vrchol lze odstranit všechny úseky, které leží mezi dvěma výskyty tohoto vrcholu ve sledu, čímž nakonec získáme cestu.) Každá cesta v grafu na n vrcholech má délku maximálně $n - 1$.

⇒:

G je souvislý ⇒ pro $\forall i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$, existuje cesta (a tedy i sled) z v_i do v_j nějaké délky $k \leq n - 1$.
⇒ $(A_G^k)_{ij} > 0 \Rightarrow (\sum_{k=0}^{n-1} A_G^k)_{ij} > 0$. Každý prvek uvedené matice je tedy kladný.

⇐:

$\forall i, j \in \hat{n} (\sum_{k=0}^{n-1} A_G^k)_{ij} > 0 \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, n - 1\}$ tak, že $(A_G^k)_{ij} > 0 \Rightarrow$ existuje sled (délky k) z v_i do $v_j \Rightarrow G$ je souvislý. □

Obrázek 1.3.1: Cesty P_x a P_y

1.3 Bipartitní grafy

Definice 1.3.1. Řekneme, že graf $G = (V, E)$ je **bipartitní** (angl. *bipartite*), existuje-li rozklad množiny V na dvě disjunktí neprázdné množiny V_1, V_2 takový, že $E \cap \binom{V_1}{2} = \emptyset$, $E \cap \binom{V_2}{2} = \emptyset$, tj. takový, že mezi žádnými dvěma vrcholy z V_1 ani mezi žádnými dvěma vrcholy z V_2 nevede hrana.

Poznámka 1.3.2. Jestliže je G bipartitní, lze očíslovat vrcholy tak, že prvních k vrcholů leží ve V_1 a zbylých $n - k$ vrcholů ve V_2 . Adjacenční matice má potom tvar

$$A_G = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ B^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Naopak: G je bipartitní, existuje-li permutace vrcholů (a tedy zároveň řádků i sloupců matice A_G) taková, že A_G má uvedený tvar.

Definice 1.3.3. Bipartitní graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$ se nazývá **úplný**, jestliže $(\forall u \in V_1) (\forall v \in V_2) (\{u, v\} \in E)$.

Věta 1.3.4. Bud' $G = (V, E)$ graf, $\#V \geq 2$. Potom G je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje kružnici liché délky.

Důkaz. $\Rightarrow$:

Libovolná kružnice prochází střídavě vrcholy z V_1 a V_2 . Zvolíme-li nějaký vrchol za počáteční a půjdeme po kružnici, nakonec se do tohoto vrcholu vrátíme. Jdeme tedy několikrát z V_1 do V_2 a zpět, takže kružnice nemůže mít lichou délku.

$\Leftarrow$:

Nejprve předpokládejme, že G je souvislý. Necht' tedy v G neexistuje kružnice liché délky. Zvolme libovolně $u \in V$ a definujme nejkratší cesta z u do v má sudou délku

$$V_1 = \{v \in V \mid \text{nejkratší cesta z } u \text{ do } v \text{ má sudou délku}\},$$

$$V_2 = V \setminus V_1.$$

Protože G je souvislý, tak vrcholy z V_2 mají nejkratší cestu do u liché délky.

Platí zřejmě $u \in V_1$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a navíc z u určitě vede nějaká hrana, třeba do vrcholu z , což znamená, že $z \in V_2$ (nejkratší cesta z u do z je po jediné hraně, tj. má délku 1, a to je liché číslo). V_1 i V_2 jsou tedy neprázdné. Ukážeme sporem, že ve V_1 nevede hrana:

Necht' $(\exists x, y \in V_1) (\{x, y\} \in E)$. Bud' P_x nejkratší cesta z u do x , podobně P_y nejkratší cesta z u do y . P_x i P_y jsou sudé délky. Označme z nejbližší bod od bodů x, y na cestách P_x a P_y , který je pro obě cesty stejný (v krajním případě může být tímto bodem i u), viz obrázek 1.3.1. Potom úsek cesty P_x mezi z a u je stejně dlouhý jako tentýž úsek po cestě P_y . Kdyby tomu tak nebylo, mohli bychom ten kratší z nich (necht' je to třeba úsek P_x) použít pro vytvoření kratší cesty z y do u , což je spor s volbou P_y jako nejkratší cesty.

Z toho ale plyne, že sled složený z úseků

1. x do z po P_x ,

2. z do y po P_y ,
3. y do x po hraně $\{x, y\}$

je kružnice liché délky, což je spor. Je to proto, že cesta $x \rightarrow z \rightarrow u \rightarrow z \rightarrow y$ je sudé délky, její úsek $z \rightarrow u \rightarrow z$, po kterém nejdeme, je však také sudé délky, a tak i cesta $x \rightarrow z \rightarrow y$ musí být sudé délky. Hrana $\{x, y\}$ ji pak uzavírá na kružnici liché délky.

Zcela stejně ukážeme, že ani mezi vrcholy z V_2 nevede hrana.

Jestliže G není souvislý, provedeme důkaz pro jeho komponenty $G^{(1)}, \dots, G^{(m)}$ a získáme tak množiny $V_1^{(1)}, \dots, V_1^{(m)}$ a $V_2^{(1)}, \dots, V_2^{(m)}$. Potom definujeme

$$V_1 = \bigcup_{j=1}^m V_1^{(j)}$$

$$V_2 = \bigcup_{j=1}^m V_2^{(j)}.$$

□

Poznámka. Necht' $G = (V, E)$ je souvislý. Potom zobrazení $d : V \times V \mapsto \mathbb{N}_0$ definované jako $d(u, v)$ = délka nejkratšího sledu z u do v je metrika na množině vrcholů v . Číslo $d(u, v)$ nazýváme **vzdáleností** vrcholů u, v v grafu G .

1.4 Stromy

Definice 1.4.1. Graf, který neobsahuje kružnice, nazýváme **les** (angl. *forest*). Souvislý les nazýváme **strom** (angl. *tree*).

Poznámka. Každý les je bipartitní graf.

Pozorování 1.4.2. Graf $G = (V, E)$ je strom právě tehdy, když pro každé $u, v \in V, u \neq v$ existuje právě jedna cesta z u do v .

Důkaz. $\Rightarrow$:

G je strom $\Rightarrow G$ je souvislý $\Rightarrow$ pro každé dva různé vrcholy u, v existuje cesta z u do v . Dále postupujeme sporem: necht' existují 2 různé cesty z u do v . Potom najdeme první vrchol ve směru od u , kde se obě cesty rozdělí, a dále najdeme první vrchol, kde se opět spojí. Úseky obou cest mezi nalezenými vrcholy tvoří zřejmě kružnici, což je spor.

$\Leftarrow$:

Mezi každými dvěma vrcholy vede právě 1 cesta $\Rightarrow G$ je souvislý. Nyní opět sporem: necht' v G existuje kružnice. Vezmeme-li libovolné dva vrcholy z této kružnice, je zřejmé, že mezi nimi existují dvě různé cesty. □

Věta 1.4.3. Necht' $G = (V, E)$ je souvislý, $n = \#V$. Potom G je strom, právě když $\#E = n - 1$.

Důkaz. Při důkazech obou směrů ekvivalence postupujeme indukcí podle n :

$\Rightarrow$:

Necht' G je strom.

Pro $n = 1$ máme zřejmě $E = \emptyset$, takže $\#E = 0 = 1 - 1$.

Indukční krok: Necht' G je strom na n vrcholech, $e = \{u, v\} \in E$ jeho libovolná hrana. Sestrojíme graf $\tilde{G} = (V, E \setminus e)$. Potom $\tilde{G}$ je les, neboť určitě není souvislý: mezi každými dvěma vrcholy existovala totiž jediná cesta, tudíž i mezi u a v existovala cesta jen po hraně e . Počet komponent grafu $\tilde{G}$ je 2, kdyby to bylo více, nemohli bychom vrácením jedné hrany e získat souvislý graf. Tyto komponenty jsou tedy stromy, necht' mají počty vrcholů k a $n - k$. Potom mají počty hran $k - 1$ a $n - k - 1$, a po přidání hrany e do $\tilde{G}$ získáme zpět graf G , jenž má počet hran $(k - 1) + (n - k - 1) + 1 = n - 1$.

$\Leftarrow$:

Necht' $\#E = n - 1$. Platí $\sum_{i \in V} d(i) = 2\#E = 2(n - 1)$, a G je souvislý, tudíž $d(i) \geq 1$ pro každý $i \in V$. Proto existuje vrchol i takový, že $d(i) = 1$. Sestrojíme graf $\tilde{G} = (V \setminus i, E \setminus \{i, x\})$, kde x je vrchol, do něžž vede jediná hrana z i . Potom je $\tilde{G}$ stále souvislý (žádná cesta mezi dvěma vrcholy u, v ($u \neq i, v \neq i$) samozřejmě nevedla přes i), a tudíž z indukčního předpokladu je to strom, jenž má $n - 1$ vrcholů a $n - 2$ hran. Přidáme-li zpětně vrchol i a hranu $\{i, x\}$ do $\tilde{G}$, kružnici nevytvoříme, a tedy vznikne strom na n vrcholech s $n - 1$ hranami. $\square$

Věta 1.4.4. *Necht' $n \geq 2$. Potom existuje n^{n-2} stromů na n vrcholech.*

Než tuto větu dokážeme, vyslovíme a dokážeme následující lemma:

Lemma 1.4.5. *Necht' $(d_1, \dots, d_n)$ jsou přirozená čísla taková, že $\sum d_i = 2(n - 1)$. Potom existuje*

$$N_{(d_1, \dots, d_n)} = \frac{(n - 2)!}{(d_1 - 1)!(d_2 - 1)! \cdots (d_n - 1)!}$$

stromů na n vrcholech $\{1, \dots, n\}$ takových, že $\forall i \in \hat{n}$ je $d(i) = d_i$.

Důkaz. Podmínka $\sum d_i = 2(n - 1)$ je nutná pro to, aby $(d_1, \dots, d_n)$ bylo skóre stromu. Dále důkaz vedeme indukcí podle n :

Pro $n = 2$ je $d_1 = d_2 = 1$ a vztah platí zřejmě.

Indukční krok $n - 1 \rightarrow n$: Ze stejného důvodu jako v minulém důkazu existuje k tak, že $d_k = 1$. Bez újmy na obecnosti („BÚNO“) předpokládejme, že $d_n = 1$ a mějme tedy graf se skóre $(d_1, \dots, d_{n-1}, 1)$. Uберeme-li nyní n -tý vrchol, z něhož jediná hrana vedla do vrcholu i (kde nutně $d_i \geq 2$), získáme graf na $n - 1$ vrcholech se skóre $(d_1, \dots, d_i - 1, \dots, d_{n-1})$. Ke každému stromu na n vrcholech se skóre $(d_1, \dots, d_{n-1}, 1)$ tedy existuje $i \geq 2$ tak, že se tento strom skládá ze stromu na $n - 1$ vrcholech se skóre $(d_1, \dots, d_i - 1, \dots, d_{n-1})$, z vrcholu n a z hrany $\{i, n\}$. Počet stromů na $n - 1$ vrcholech s uvedeným skóre ale umíme spočítat dle indukčního předpokladu. Proto platí:

$$N_{(d_1, \dots, d_n)} = \sum_{\substack{i=1 \\ d_i \geq 2}}^{n-1} N_{(d_1, \dots, d_i-1, \dots, d_{n-1})} = \sum_{\substack{i=1 \\ d_i \geq 2}}^{n-1} \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdots (d_i-2)! \cdots (d_n-1)!} =$$

...rozšíříme $(d_i - 1)$ a díky tomu můžeme počítat již přes všechna i ...

$$\begin{aligned} & \frac{((\sum_1^n d_i) - 1) - (n-1) = 2(n-1) - 1 - (n-1) = n-2}{(n-3)! \sum_{i=1}^{n-1} (d_i - 1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(d_i - 1)(n-3)!}{(d_1 - 1)! \cdots (d_i - 1)! \cdots (d_n - 1)!} = \frac{(n-3)! \sum_{i=1}^{n-1} (d_i - 1)}{\underbrace{0!}_{(d_n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} (d_k - 1)!} = \\ &= \frac{(n-2)!}{\prod_{k=1}^n (d_k - 1)!} \end{aligned}$$

$\square$

Nyní můžeme provést důkaz věty 1.4.4:

Důkaz. Označme si

$$(\forall i \in \hat{n}) (\alpha_i = d_i - 1).$$

Počet stromů na n vrcholech je roven

$$N = \sum_{\substack{(\forall i \in \hat{n}) (d_i \geq 1) \\ \sum d_i = 2(n-1)}} N_{(d_1, \dots, d_n)} = \sum_{\substack{(\forall i \in \hat{n}) (d_i \geq 1) \\ \sum d_i = 2(n-1)}} \frac{(n-2)!}{\prod_{k=1}^n (d_k - 1)!} =$$

$$= \sum_{\substack{(\forall i \in \tilde{n})(\alpha_i \geq 0) \\ \sum \alpha_i = n-2}} \frac{(n-2)!}{\prod_{k=1}^n \alpha_k!} = n^{n-2}.$$

□

Poznámka. Poslední rovnost je aplikací zobecněné binomické věty, tzv. „ k -nomické věty“, kterou lze celkem snadno dokázat indukcí použitím „standardní“ binomické věty. Jedná se o vztah

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(\forall i \in \tilde{k})(\alpha_i \geq 0) \\ \sum \alpha_i = n}} \frac{n!}{\prod_{j=1}^k \alpha_j!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} &= \sum_{\substack{(\forall i \in \tilde{k})(\alpha_i \geq 0) \\ \sum \alpha_i = n}} \binom{n}{\alpha_1} \binom{n-\alpha_1}{\alpha_2} \cdots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j}{\alpha_k} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} = \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n. \end{aligned}$$

Příklad. Molekuly acyklických uhlovodíků si lze představit jako stromy, kde vrcholy představují atomy uhlíku (C) a vodíku (H). Hrany pak představují vazby mezi nimi. Jak známo, uhlík je čtyřvazný a vodík je jednovazný. Naskytá se otázka, jak na základě této znalosti vyjádřit sumární vzorec uhlovodíků ve tvaru

$$C_a H_b.$$

Využijeme vztahu

$$\sum d_i = 2\#E = 2(n-1)$$

který je pro náš případ možno přepsat do podoby

$$4a + 1b = 2(a + b - 1).$$

Z toho dostaneme, že $b = 2a + 2$, takže sumární vzorce acyklických uhlovodíků mají tvar

$$C_n H_{2n+2}.$$

1.5 Hledání minimální kostry grafu

Necht' je dán souvislý graf $G = (V, E)$ a zobrazení $c : E \mapsto (0, +\infty)$, které přiřazuje hranám jejich *cenu*. Úkolem je najít takovou podmnožinu $\tilde{E} \subset E$, že graf $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ je souvislý a přitom cena

$$c(\tilde{E}) := \sum_{e \in \tilde{E}} c(e)$$

je minimální. Této úloze říkáme úloha na nalezení minimální kostry grafu.

Pozorování. $\tilde{G}$ bude strom.

Důkaz. Pokud $\tilde{G}$ není strom, pak v $\tilde{G}$ je kružnice. Je tedy možné ubrat hranu, aniž se poruší souvislost grafu, a cena $c(\tilde{E})$ se přitom snížší. □

Pro hledání minimální kostry v grafu je možno použít následující algoritmus, který je příkladem tzv. hladového (greedy) algoritmu.

Algoritmus 1.5.1. (Kruskalův algoritmus konstrukce minimální kostry)

1. Uspořádej hrany z E podle jejich ceny od nejlevnější k nejdražší. Bud' T množina hran, inicializovaná na $T := \emptyset$.
2. Obsahuje-li T hrany $f_1, \dots, f_i$, vyber nejlevnější hranu f_{i+1} takovou, že graf $G_{i+1} = (V, T \cup \{f_{i+1}\})$ neobsahuje kružnici, a zařad' ji do T . Tento krok opakuj, dokud to jde.

Je zřejmé, že v okamžiku ukončení bude $\tilde{G} = (V, T)$ souvislý a bude to tedy strom. Druhý krok algoritmu se bude opakovat právě $(n - 1)$ -krát.

Věta 1.5.2. *Kruskalův algoritmus konstruuje strom s minimální cenou.*

Důkaz. Označme T_{Kr} množinu $n - 1$ hran dodaných Kruskalovým algoritmem. Definujme množinu

$$\mathcal{T} = \{T \subset E \mid \text{graf } (V, T) \text{ je souvislý a } c(T) \text{ je minimální}\},$$

tj. jako množinu všech vhodných výběrů $n - 1$ hran, na nichž se nabývá minima ceny. Důkaz provedeme sporem: předpokládejme tedy, že $T_{Kr} \notin \mathcal{T}$. Potom lze korektně definovat zobrazení $g : \mathcal{T} \mapsto \{1, 2, \dots, n - 1\}$ vztahem

$$g(T) = \min \{i \mid f_i \notin T_{Kr}\}.$$

Necht' $\tilde{T} \in \mathcal{T}$ je taková množina hran, že $k := g(\tilde{T}) = \max_{T \in \mathcal{T}} g(T)$. Přidáme-li hranu f_k do $\tilde{T}$, vznikne množina n hran, a tedy graf $(V, \tilde{T})$ obsahuje kružnici. V ní musí ležet nějaká hrana $e \notin T_{Kr}$, protože jinak by graf (V, T_{Kr}) nemohl být strom. Sestrojíme novou množinu vrcholů

$$\tilde{\tilde{T}} = \tilde{T} \cup \{f_k\} \setminus \{e\},$$

tj. vyjmeme hranu e ze zmiňované kružnice. Potom graf $(V, \tilde{\tilde{T}})$ zůstává souvislý, navíc $\#\tilde{\tilde{T}} = n - 1$, a je to tedy strom. Pro cenu platí

$$c(\tilde{\tilde{T}}) = c(\tilde{T}) + c(f_k) - c(e).$$

Abychom zjistili, jak vysoká je cena $\tilde{\tilde{T}}$ v porovnání s cenou $\tilde{T}$, uvažujme takto: V k -tém kroku se Kruskalův algoritmus rozhodl pro hranu f_k a nikoli pro hranu e , přičemž se pro e rozhodnout mohl, protože hrany $\{f_1, \dots, f_{k-1}, e\} \subset \tilde{T}$ a tyto hrany tedy netvoří kružnici. Důvodem, proč se algoritmus rozhodl pro f_k , musí tedy být $c(f_k) \leq c(e)$. Z toho plyne, že také

$$c(\tilde{\tilde{T}}) \leq c(\tilde{T}),$$

ale protože už $c(\tilde{T})$ byla minimální, musí zde platit rovnost. Každopádně $\tilde{\tilde{T}} \in \mathcal{T}$. Ovšem $\tilde{\tilde{T}}$ obsahuje i hranu f_k , takže $g(\tilde{\tilde{T}}) > k$, což je spor s volbou k . $\square$

1.6 Jednotažky

Název kapitoly neformálně vystihuje vlastnost tzv. eulerovských grafů, které je možné nakreslit jedním tahem. Vše, co bude řečeno o eulerovských grafech, lze aplikovat i na zobecněné grafy ve smyslu definice 1.1.12.

Úmluva 1.6.1. Bud' $G = (V, E)$ graf, $v_0, v_1, \dots, v_k$ sled v G . Potom tento sled zapisujeme také jako $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$, přičemž $(\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}) (e_i = \{v_{i-1}, v_i\})$.

Definice 1.6.2. Graf $G = (V, E)$, resp. $G = (V, E, \varphi)$, se nazývá **eulerovský** (angl. *eulerian*), existuje-li v něm „eulerovský“ cyklus (angl. *Euler tour*) $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_m v_m$ takový, že

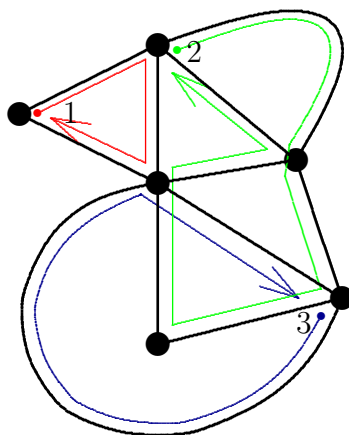
$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, m\}) (i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j)$$

a $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, tj. $m = \#E$.

Poznámka. Řekneme, že sled $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ je **taħ** (angl. *trail*) v G , jestliže

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}) (i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j).$$

Věta 1.6.3. Bud' $G = (V, E)$ souvislý graf. Potom G je eulerovský, právě když $(\forall v \in V) (d(v) \text{ je sudý})$.



Obrázek 1.6.1: Tvorba cyklu v eulerovském grafu

Důkaz. $\Rightarrow$:

G je eulerovský, v G tedy existuje cyklus, který projde všechny hrany, a to každou právě jednou. Půjdeme-li po tomto cyklu, je zřejmé, že vstoupíme do každého vrcholu právě tolikrát, kolikrát z něj vystoupíme, a to nikdy po hraně, po které jsme již prošli. Z toho plyne, že na každý vrchol je napojen sudý počet hran.

$\Leftarrow$:

Když má každý vrchol sudý stupeň, tak jeden (v_1) vybereme a vydáme se po libovolné hraně, která z něj vede. Z vrcholu, do něž jsme se dostali, pokračujeme stejným způsobem dál. Přitom za sebou obarvujeme hrany a nikdy se nevydáme po hraně, která je již obarvená. Je zřejmé, že jediný vrchol, z něž už nebudeme schopni pokračovat dál, je ten, ze kterého jsme začínali. Potom už jsme buď prošli všechny hrany, nebo z několika vrcholů vede nenulový, ale sudý počet dosud neobarvených hran. Vybereme jeden (v_2) takový, který leží na cyklu, který jsme již obarvili (to musí být možné, jinak by graf nebyl souvislý). Z něj začneme nový cyklus. Po jeho dokončení oba cykly sjednotíme, a to tak, že původní cyklus začneme ve v_1 , přerušíme jej ve v_2 , provedeme druhý cyklus, a následně dokončíme cyklus původní. Úvahu lze opakovat, dokud existují neobarvené hrany. Právě popsany postup je znázorněn na obrázku 1.6.1.

□

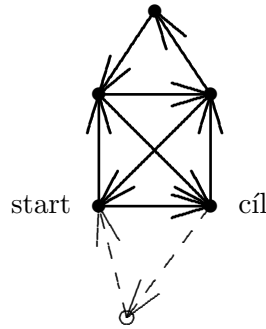
Poznámka. Existují také tzv. náhodně eulerovské grafy, které mají jeden vrchol s tou vlastností, že při náhodném průchodu grafu a barvení cest za sebou lze vždy pokračovat po neobarvených hranách až na případ, kdy se nacházíme ve startovním vrcholu a všechny hrany už jsou obarvené.

Poznámka. Uvažujme jednotažky takové, že je možné je namalovat jedním tahem a přitom začít a skončit v obecně různých vrcholech. Tyto jednotažky jsou právě takové souvislé grafy, které splňují jednu z následujících dvou podmínek (viz obrázek 1.6.2):

1. Všechny vrcholy mají sudý stupeň.
2. Právě dva vrcholy mají lichý stupeň.

1.7 Hamiltonovské kružnice a grafy

Definice 1.7.1. Řekneme, že kružnice v grafu $G = (V, E)$ je **hamiltonovská** (angl. *Hamilton cycle*), jestliže má délku $n = \#V$. Řekneme, že cesta v G je **hamiltonovská** (angl. *Hamilton path*), jestliže má délku $n - 1$. Graf G se nazývá **hamiltonovský** (angl. *hamiltonian*), jestliže obsahuje hamiltonovskou kružnici.



Obrázek 1.6.2: Jednotazka se startovním a cílovým vrcholem

Poznámka. Půjdeme-li po hamiltonovské cestě, projdeme každým vrcholem grafu právě jednou. Půjdeme-li po hamiltonovské kružnici, vrátíme se navíc do vrcholu, z něž jsme vyšli. Každý hamiltonovský graf obsahuje hamiltonovskou cestu.

Poznámka. Problém existence hamiltonovské kružnice v obecném grafu je NP-úplný. To zhruba znamená, že jej není možné řešit algoritmem s lepší než exponenciální složitostí².

Věta 1.7.2. (Chvátal, 1972)

Nechť $G = (V, E)$ je graf a x, y dva jeho vrcholy takové, že $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ a přitom $\{x, y\} \notin E$. Potom G je hamiltonovský právě tehdy, když $G' = (V, E \cup \{x, y\})$ je hamiltonovský.

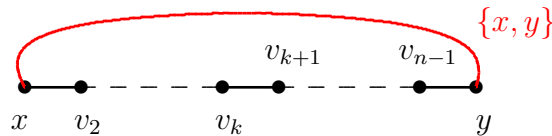
Důkaz. $\Leftarrow$: Zřejmé.

$\Rightarrow$:

Důkaz provedeme sporem. Nechť G' je hamiltonovský a G není. Označme si hamiltonovskou kružnici jako

$$x = v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = y,$$

tj. jako na obrázku:



Označme $E' = E \cup \{x, y\}$ a dále definujme množiny

$$T = \{i \mid \{x, v_{i+1}\} \in E'\},$$

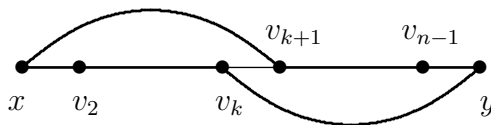
$$S = \{j \mid \{y, v_j\} \in E'\}.$$

Potom paltí, že $S \cap T = \emptyset$. Kdyby totiž existovalo $k \in S \cap T$, nastala by tato situace:

²Uvedeme bez detailů jednu z mnoha definic NP-úplnosti (viz. [2]): Problém je otázka, na niž očekáváme odpověď ANO/NE. Problém je třídy NP, existuje-li nedeterministický algoritmus s nejvýše polynomiální složitostí, který jej rozhoduje. Problém P_0 je NP-těžký, lze-li na něj polynomiálně transformovat libovolný problém P třídy NP, tj. jednoznačná transformace zadání P na zadání P_0 má nejvýše polynomiální složitost. Problém je NP-úplný, jestliže je NP-těžký a je třídy NP.

Jsou známy desítky NP-úplných problémů. Přitom, vzhledem k definici NP-úplnosti, najde-li se deterministický algoritmus rozhodující jeden z těchto problémů s polynomiální složitostí, bude možné rozhodnout každý NP-úplný problém s polynomiální složitostí. Dosud se však takový algoritmus nenašel a proto se věří, že NP-úplné problémy nelze řešit v polynomiálním čase. Není to však dokázáno.

Konečně, každý nedeterministický algoritmus s polynomiální složitostí lze snadno převést na deterministický algoritmus s exponenciální složitostí, což odůvodňuje formulaci naší poznámky.



Jinými slovy, existovala by hamiltonovská kružnice i v původním grafu G , bez přidání hrany $\{x, y\}$. Díky tomu platí

$$\#(S \cup T) = \#S + \#T$$

a navíc zřejmě

$$\begin{aligned} \#S &= d_G(y), \\ \#T &= d_G(x). \end{aligned}$$

Snadno si ověříme, že $0 \notin T$ a hlavně $n \notin S \cup T$. Proto

$$n > \#(S \cup T) = \#S + \#T = d_G(y) + d_G(x),$$

což je ovšem spor s předpokladem věty. □

Chvátalova věta nás opravňuje k následující definici :

Definice 1.7.3. Uzávěrem grafu $G = (V, E)$ rozumíme minimální nadgraf $C(G) = (V, \tilde{E})$ grafu G takový, že pro každé $x, y \in V, x \neq y$ platí

$$\{x, y\} \notin E \Rightarrow d_{C(G)}(x) + d_{C(G)}(y) < n (= \#V).$$

Poznámka 1.7.4. Uzávěr grafu je definován jednoznačně.

Důkaz. Korektnost (tedy jednoznačnost) definice dokážeme tak, že popíšeme algoritmus konstrukce $C(G)$:

1. Označíme $G^{(0)} := G$. Dále necht' $i := 0$.
2. Použijeme označení $G^{(i)} = (V, E^{(i)})$. Přiřadíme $E^{(i+1)} := E^{(i)}$.
3. Procházíme všechny dvojice vrcholů x, y grafu $G^{(i)} = (V, E^{(i)})$, které nejsou v hraně, a pokud platí $d_{G^{(i)}}(x) + d_{G^{(i)}}(y) \geq n$, přidáme hranu $\{x, y\}$ do $E^{(i+1)}$. Poté, co projdeme všechny takové dvojice, vznikne nový graf $G^{(i+1)}$, v němž díky přidáním hranám mohly vzniknout další dvojice, kde $d_{G^{(i+1)}}(x) + d_{G^{(i+1)}}(y) \geq n$.
4. $i := i + 1$. Jdeme na krok 2, dokud nenastane $G^{(i+1)} = G^{(i)}$, tj. nebylo již nutné nic přidávat. V krajním případě to nastane teprve tehdy, když $G^{(i)}$ je už úplný graf.
5. $C(G) := G^{(i)}$.

□

Důsledek 1.7.5. Graf G je hamiltonovský, právě když $C(G)$ je hamiltonovský.

Důkaz. Postupné přidávání takových hran do G , pro které součet stupňů jejich koncových vrcholů je alespoň n , podle Chvátalovy věty nemění „hamiltonovskost“ grafu G . □

Triviálním důsledkem předchozího tvrzení je i věta, kterou však nezávisle na Chvátalovi formuloval Dirac (mladší) již v roce 1952:

Věta 1.7.6. (Dirac, 1952)

Necht' $G = (V, E)$ je graf, $n = \#V$. Jestliže $\delta \geq \frac{n}{2}$, potom G je hamiltonovský.

Důkaz. Podmínka $\delta \geq \frac{n}{2}$ zřejmě vynucuje, aby $C(G)$ byl úplný graf, který je samozřejmě hamiltonovský. Proto i G je hamiltonovský. □

Lze tedy shrnout, že postačující podmínkou pro to, aby graf byl hamiltonovský, je „dostatek“ hran.

Věta 1.7.7. *Necht' $G = (V, E)$ je graf se skóre $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Jestliže skóre G má vlastnost*

$$\left(\forall k < \frac{n}{2} \right) (d_k \leq k \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k),$$

pak G je hamiltonovský.

Důkaz. Stejně jako v důkazu Diracovy věty se ukáže, že uvedená podmínka již implikuje $C(G) = K_n$. $\square$

Věta 1.7.8. *Necht' $G = (V, E)$, $x \notin V$. Označme $G' = (V \cup \{x\}, E \cup \{\{x, v\} \mid v \in V\})$. Potom G obsahuje hamiltonovskou cestu, právě když G' je hamiltonovský.*

Důkaz. je téměř zřejmý. $\square$

Věta 1.7.9. *Každý samokomplementární graf obsahuje hamiltonovskou cestu.*

Důkaz. Necht' $G = (V, E)$ je samokomplementární graf, s vrcholy uspořádanými tak, že jejich stupně (skóre grafu G) splňují $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Potom jeho doplněk má skóre

$$\underbrace{n-1-d_1}_{d_n} \geq \underbrace{n-1-d_2}_{d_{n-1}} \geq \dots \geq \underbrace{n-1-d_n}_{d_1}.$$

G je ovšem samokomplementární, tj. $G \sim \bar{G}$, neboli oba grafy jsou až na označení vrcholů stejné. Vzhledem k vzestupnému uspořádání vrcholů grafu G podle velikosti jejich stupňů pak musí platit vztah naznačený svorkami:

$$(\forall i \in \hat{n}) (d_i = n - 1 - d_{n+1-i})$$

Nyní z G utvoříme graf $G' = (V \cup \{x\}, E \cup \{\{x, v\} \mid v \in V\})$ kde $x \notin V$ a o něm ukážeme, že je hamiltonovský. Uděláme to tak, že ověříme podmínku věty 1.7.7. Potom z věty 1.7.8 již plyne dokazované tvrzení.

Označme si d'_i stupně vrcholů grafu G' . Potom zřejmě pro všechna $i \in \hat{n}$ platí $d'_i = d_i + 1$ a $d'_{n+1} = n$. Zvolme nyní $k < \frac{n+1}{2}$ a ověříme zmíněnou podmínku. Postupně platí

$$\begin{aligned} d'_k \leq k &\Leftrightarrow d_k + 1 \leq k \Leftrightarrow (n - 1 - d_{n+1-k}) + 1 \leq k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n - k \leq d_{n+1-k} \Leftrightarrow (n + 1) - k < (d_{n+1-k} + 1) \Leftrightarrow (n + 1) - k \leq d'_{(n+1)-k}. \end{aligned}$$

$\square$

1.8 Párování v grafech

Definice 1.8.1. Bud' $G = (V, E)$ graf. **Párování** (angl. *matching*) v G je podmnožina $M \subset E$ taková, že

$$(\forall e, f \in E) (e \neq f \Rightarrow e \cap f = \emptyset),$$

tj. žádné dvě hrany nesdílí koncový vrchol.

Definice 1.8.2. Řekneme, že párování M je maximální, pokud pro každé jiné párování M' platí $\#M \geq \#M'$.

Příklad. K tomuto párování nelze přidat žádnou hranu, ale není to maximální párování:



Maximální párování je až toto:



Definice 1.8.3. Necht' M je párování v $G = (V, E)$. Vrchol $v \in V$ takový, že $(\exists e \in M) (v \in e)$, nazýváme **M -saturovaný**. Je-li každý vrchol z V M -saturovaný, říkáme, že M je **perfektní** párování.

Poznámka. Každé perfektní párování je maximální. Nutná podmínka pro existenci perfektního párování je, aby $\#V$ byl sudý.

Poznámka. Takto se zlepšovala složitost známých algoritmů pro nalezení perfektního párování:

1965	$O(n^4)$
1969	$O(n^3)$
1974	$O(n \cdot m)$ (přitom ovšem $m \leq \binom{n}{2} = O(n^2)$)
1980	$O(n^{\frac{1}{2}} \cdot m)$

Poznámka. Necht' $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitní graf (třeba množina žen a mužů - hrany pak určují, kdo se s kým zná). Ptejme se, zda má graf perfektní párování (zda si každý může vybrat partnera mezi těmi, které zná, a nikdo nezůstane sám). Nutnou podmínkou je zřejmě

$$\#V_1 = \#V_2.$$

Dále si připomeňme, jak vypadá adjacenční matice bipartitního grafu s vhodně uspořádanými vrcholy:

$$A_G = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{B} = (b_{ij})$. Je-li $\pi \in S_n$, tj. je to permutace $\pi : \hat{n} \mapsto \hat{n}$, pak

$$M = \{ \{v_i, v_{\pi(i)}\} \mid i \in \hat{n} \}$$

představuje perfektní párování, právě když

$$b_{1\pi(1)} b_{2\pi(2)} \cdots b_{n\pi(n)} = 1.$$

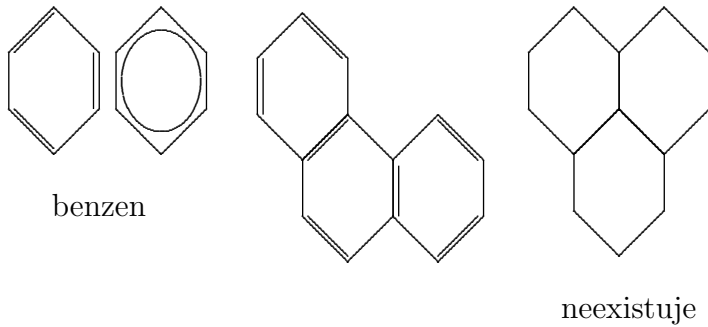
Počet perfektních párování v G je potom roven permanentu matice $\mathbf{B}$, tj. číslu

$$\text{per } \mathbf{B} = \sum_{\pi \in S_n} b_{1\pi(1)} b_{2\pi(2)} \cdots b_{n\pi(n)}.$$

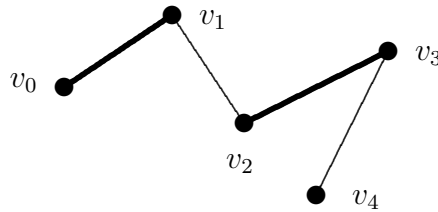
Na rozdíl od výpočtu determinantu je však výpočet permanentu matice NP-úplná úloha. O existenci perfektního párování v bipartitním grafu tedy není vhodné rozhodovat na základě podmínky $\text{per } \mathbf{B} > 0$. Následující výklad ukáže mimo jiné postačující podmínku existence perfektního párování.

Příklad. Pojem perfektní párování nenalézá uplatnění pouze v tanečních kursech, nýbrž například i v organické chemii. Jak známo, dvojně vazby v benzenovém jádře nemají ve skutečnosti jednoznačné umístění, a proto se někdy v jeho vzorci kreslí místo samotných vazeb jen „kolečko“. Platí, že nutnou podmínkou pro existenci sloučeniny složené z benzenových jader je, aby graf tvořený jejím vzorcem měl perfektní párování. Přitom sloučenina je tím stabilnější, čím více různých perfektních párování existuje. (viz. obrázek 1.8.1)

Definice 1.8.4. Necht' M je párování v grafu $G = (V, E)$. Řekneme, že cesta $v_0, v_1, \dots, v_k$ je **M -střídající**, pokud $\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ platí $\{v_{i-1}, v_i\} \in M \Leftrightarrow \{v_i, v_{i+1}\} \notin M$. M -střídající cestu $v_0, v_1, \dots, v_k$ nazveme **M -zlepšující**, pokud vrcholy v_0 a v_k nejsou M -saturovány.



Obrázek 1.8.1: Benzenové jádro a teoretické sloučeniny

Obrázek 1.8.2: M -střídající cesta

Poznámka. Každá M -zlepšující cesta má zřejmě lichou délku. Na obrázku 1.8.2 je M -střídající cesta, která není M -zlepšující. Ani její úsek $v_1, \dots, v_4$ není M -zlepšující, protože vrchol v_1 je M -saturován. V následujících důkazech bude potřeba si podobné skutečnosti plynoucí z definic dobře uvědomovat.

Definice. Bud'te A, B dvě množiny. **Symetrickou diferencí** množin A, B rozumíme množinu

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Věta 1.8.5. (Berge, 1957)

Párování v grafu G je maximální právě tehdy, když v G neexistuje M -zlepšující cesta.

Důkaz. Oba směry ekvivalence dokážeme sporem.

$\Rightarrow$:

Necht' M je maximální a přitom existuje M -zlepšující cesta, kterou označíme P . Definujeme nyní párování

$$M' = M \Delta P.$$

Řečeno slovy: M' vznikne tak, že mimo cestu necháme M jak je a na cestě dáme do M' naopak jen ty hrany, které nejsou v M . Je zřejmé, že M' bude opět párování, přičemž $\#M' > \#M$, a to je spor.

$\Leftarrow$:

Necht' v G neexistuje M -zlepšující cesta a přitom M není maximální. Potom existuje párování M' takové, že $\#M' > \#M$. Definujeme nyní graf

$$H = (V, M \Delta M').$$

Potom je zřejmé, že H se skládá jen z kružnic a cest, na nichž se střídají hrany z M a z M' (to také znamená, že v H jsou všechny kružnice sudé délky). Protože $\#M' > \#M$, tak také $M \Delta M'$ obsahuje více hran z M' než z M . Z toho plyne, že v H musí existovat alespoň jedna cesta liché délky, která obsahuje $2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}_0$) hran, z toho k hran je z M a $k + 1$ hran je z M' , a navíc její koncové vrcholy nejsou M -saturovány v G . (Poslední vlastnost lze formulovat i tak, že uvedená cesta není vlastním podgrafem nějaké cesty v H - nejde už prodloužit.). Tato cesta je ovšem M -zlepšující, což je spor. $\square$

1.8.1 Párování v bipartitních grafech

Definice 1.8.6. Množinou **sousedů** (angl. *neighbours*) vrcholu v v grafu $G = (V, E)$ rozumíme množinu

$$N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}.$$

Množinou sousedů vrcholů z množiny $S \subset V$ rozumíme množinu

$$N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v).$$

Věta 1.8.7. (Hall, 1935)

Necht' $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitní graf. Potom v G existuje párování saturující celé V_1 právě tehdy, když

$$(\forall S \subset V_1) (\#N(S) \geq \#S).$$

Důkaz. $\Rightarrow$:

Je-li celé V_1 saturováno, je každý vrchol z V_1 spárován s nějakým vrcholem z V_2 . Pro libovolnou $S \subset V_1$ je tedy $\#S$ vrcholů z V_1 spojeno s nejméně $\#S$ vrcholy z V_2 , takže $\#N(S) \geq \#S$.

$\Leftarrow$:

Sporem. Bud' M maximální párování v G , které podle předpokladu nesaturuje celé V_1 . Existuje tedy $u \in V_1$ takové, že není M -saturováno. Pokud zvolíme $S = \{u\}$, tak $\#N(S) \geq 1$, takže $d(u) \geq 1$. Definujme množiny

$$X = \{v \in V_1 \mid \text{z } u \text{ do } v \text{ existuje } M\text{-střídající cesta}\},$$

$$Y = \{v \in V_2 \mid \text{z } u \text{ do } v \text{ existuje } M\text{-střídající cesta}\}.$$

Potom zřejmě $u \in X$ (existuje M -střídající cesta délky 0 z u do u). Protože u není M -saturován, tak na M -střídajících cestách z u do vrcholů ve V_1 i V_2 není první hrana z M . Po každé takové cestě tedy jdeme z V_1 do V_2 po hraně, která není v M , a do V_1 se vracíme po hraně, která je v M . Dále platí, že každá maximální³ M -střídající cesta vycházející z u končí ve V_1 , protože v opačném případě by byla M -zlepšující. To by ale podle Bergeovy věty byl spor s tím, že M je maximální párování. Každý vrchol $v \in Y$ je tedy spojen hranou z množiny M s nějakým vrcholem $w \in X$, $w \neq u$. Je také jasné, že každý soused libovolného vrcholu z X musí ležet v Y . Shrneme-li provedené úvahy, lze psát

$$\#X = \#Y + 1$$

a také

$$N(X) = Y,$$

takže $\#X > \#Y = \#N(X)$, což je spor. $\square$

Důsledek 1.8.8. *Když $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitní graf, tak v G existuje perfektní párování, právě když*

$$(\forall S \subset V_1) (\#N(S) \geq \#S)$$

a zároveň

$$(\forall S \subset V_2) (\#N(S) \geq \#S).$$

Definice 1.8.9. Graf $G = (V, E)$ nazveme **r -regulární**, jestliže

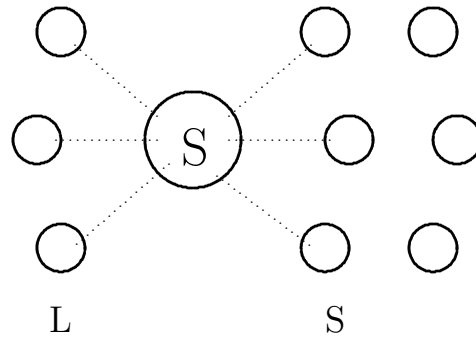
$$\delta(G) = \Delta(G) = r,$$

tj. $(\forall v \in V) (d_G(v) = r)$.

Důsledek 1.8.10. („šňatkový problém“)

Necht' $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je r -regulární bipartitní graf, $r \geq 1$. Potom G má perfektní párování.

³Maximální M -střídající cestou rozumíme takovou cestu, která není vlastním podgrafem nějaké M -střídající cesty. Jinými slovy to znamená, že už nejde prodloužit, aniž by přestala být M -střídající.



Obrázek 1.8.3: Komponenty se sudým (S) a lichým (L) počtem vrcholů

Důkaz. Ověříme předpoklady na pravé straně ekvivalence v důsledku 1.8.8. Vezměme $S \subset V_1$, označme E_1 množinu hran, které mají jeden konec v S (druhé konce těchto hran tvoří $N(S)$) a dále označme E_2 množinu hran, které mají jeden konec v $N(S)$. Potom je zřejmé, že $E_1 \subset E_2$, takže $\#E_2 \geq \#E_1$. Z r -regularity grafu G však plyne

$$\begin{aligned}\#E_1 &= r \cdot \#S, \\ \#E_2 &= r \cdot \#N(S).\end{aligned}$$

Po zkrácení číslem $r > 0$ dostáváme pro libovolnou podmnožinu $S \subset V_1$ nerovnost $\#N(S) \geq \#S$. Naprosto totéž lze provést i pro $S \subset V_2$, čímž je důkaz ukončen. Poznamenejme, že z obou nerovností též okamžitě plyne samozřejmá podmínka $\#V_1 = \#V_2$. $\square$

Věta 1.8.11. *Necht' $G = (V, E)$ je graf. Potom v G existuje perfektní párování, právě když*

$$(\forall S \subset V) (\#S \geq o(G \setminus S)),$$

kde $o(G \setminus S)$ je počet komponent grafu $G \setminus S$, které mají lichý počet vrcholů.

Důkaz. Ukážeme pouze implikaci zleva doprava, opačný směr je obtížný. Pro libovolnou $S \subset V$ lze situaci znázornit jako na obrázku 1.8.3. V původním grafu zřejmě nemohla existovat komponenta s lichým počtem vrcholů, protože v ní nelze nalézt párování saturující všechny vrcholy. Po odebrání množiny S vznikne určitý počet komponent s lichým počtem vrcholů, a každá z nich musí obsahovat alespoň jeden vrchol, který je v perfektním párování spárován s vrcholem z S . To už znamená, že $\#S \geq o(G \setminus S)$. $\square$

1.9 Toky v sítích

Definice 1.9.1. Necht' V je konečná množina, $A \subset V \times V$. Uspořádanou dvojici $D = (V, A)$ nazýváme **orientovaným grafem** (angl. *directed graph*, „*digraph*“). Prvky množiny A se nazývají orientované hrany (angl. *arcs*).

Definice 1.9.2. Necht' $D = (V, A)$ je orientovaný graf, $X \subset V$, $Y \subset V$, $X, Y \neq \emptyset$ a necht' je dáno zobrazení $c : A \mapsto \mathbb{N}$. Potom uspořádaná čtveřice (D, X, Y, c) se nazývá **sít'** (angl. *network*).

Vrcholy z X se nazývají **zdroje** (angl. *sources*), vrcholy z Y **spotřebiče** (angl. *sinks*), vrcholy z $I := V \setminus X \setminus Y$ se nazývají **uzlové body** (angl. *intermediate vertices*). Pro $a \in A$ představuje $c(a)$ **kapacitu hrany a** .

Definice 1.9.3. Necht' $N = (D, X, Y, c)$ je sít'. Zobrazení $f : A \mapsto \mathbb{R}_0^+$ nazveme **tokem** v síti N , jestliže platí

1. $(\forall a \in A) (f(a) \leq c(a))$, tj. tok po hraně je omezen její kapacitou,

2. $(\forall v \in I) \left(\sum_{(u,v) \in A} f((u,v)) = \sum_{(v,u) \in A} f((v,u)) \right)$, tj. v uzlových bodech platí, že „co do vrcholu vtéká, to z něj také vytéká“.

Definice 1.9.4. Necht' f je tok v síti $N = (D, X, Y, c)$. Necht' $S \subset V$ je taková, že $X \subset S$, $S \cap Y = \emptyset$. Označme $\bar{S} = V \setminus S$. Potom dvojici $(S, \bar{S})$ nazýváme **řezem** (angl. *cut*) v síti N . **Kapacitou řezu** $(S, \bar{S})$ rozumíme číslo

$$c((S, \bar{S})) = \sum_{\substack{(u,v) \in A \\ u \in S, v \in \bar{S}}} c((u,v))$$

Dále označme

$$f^+(S) = \sum_{\substack{(u,v) \in A \\ u \in S, v \in \bar{S}}} f(u,v) - \sum_{\substack{(u,v) \in A \\ u \in \bar{S}, v \in S}} f(u,v).$$

Číslo $\text{val } f := f^+(X)$ nazýváme **hodnotou toku** f (angl. *value of f*) v síti N .

Poznámka. Je snadné ukázat, že pro každý řez $(S, \bar{S})$ v síti N platí $f^+(S) = f^+(X)$. Formálně by to bylo možné provést postupnou konstrukcí množiny S z množiny X přidáváním vrcholů jednoho po druhém. Z definice toku f pak plyne, že přidání jediného vrcholu do S nezmění hodnotu $f^+(S)$.

Definice 1.9.5. Tok f v síti N nazveme **maximální**, jestliže pro každý jiný tok $\tilde{f}$ v N platí $\text{val } f \geq \text{val } \tilde{f}$.

Pozorování 1.9.6. Pro každý tok f a řez $(S, \bar{S})$ v síti N platí

$$\text{val } f \leq c((S, \bar{S})).$$

Poznámka 1.9.7. Speciálně platí, že hodnota maximálního toku je $\leq$ než hodnota minimálního řezu, tj. řezu s nejmenší kapacitou. Najdeme-li tok f a řez $(S, \bar{S})$ tak, že

$$\text{val } f = c((S, \bar{S})),$$

pak tok f je maximální a řez $(S, \bar{S})$ je minimální.

Příklad. Na obrázku 1.9.1 jsou římskými číslicemi vyznačeny kapacity hran a arabskými číslicemi tok f po jednotlivých hranách. Dále jsou tam vyznačeny řezy $(S_1, \bar{S}_1), (S_2, \bar{S}_2), (S_3, \bar{S}_3)$ a jejich kapacity. Protože $\text{val } f = 5 = c((S_2, \bar{S}_2))$, je řez $(S_2, \bar{S}_2)$ minimální a tok f je maximální.

Poznámka. Každou síť lze snadno převést na síť s jediným zdrojem a jediným spotřebičem. Přidáme zdroj x_0 , spotřebič y_0 a všechny původní zdroje spojíme s vrcholem x_0 hranami o dostatečně velké kapacitě (např. rovné součtu všech kapacit v síti). To samé provedeme pro spotřebiče. Díky tomu můžeme dále bez újmy na obecnosti uvažovat pouze sítě s jediným zdrojem a jediným spotřebičem, které budeme místo $(D, \{x_0\}, \{y_0\}, c)$ značit jen jako (D, x_0, y_0, c) .

1.9.1 Hledání maximálního toku pomocí f -nenasycených cest

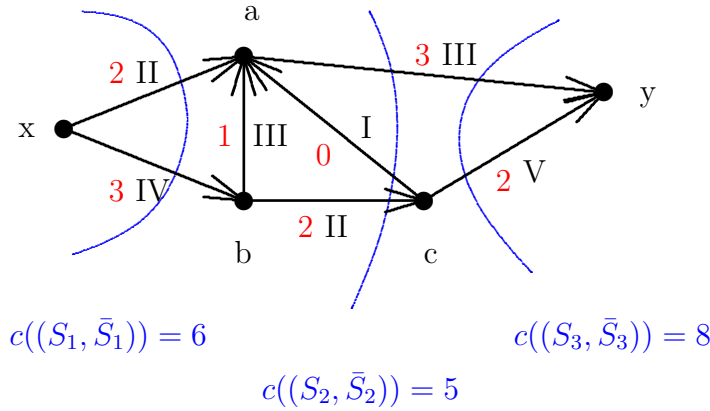
Definice 1.9.8. Necht' f je tok v síti $N = (D, x_0, y_0, c)$ a necht' P je neorientovaná⁴ (!) cesta s počátečním vrcholem x_0 . Pro každou hranu $a \in P$ ⁵ položíme

$$\iota(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{je-li } a \text{ (na cestě } P \text{) orientována ve směru z } x_0 \\ f(a) & \text{je-li } a \text{ (na cestě } P \text{) orientována ve směru do } x_0 \end{cases}$$

Jestliže $\iota(P) := \min_{a \in P} \iota(a) > 0$, pak řekneme, že cesta P je **f -nenasycená**.

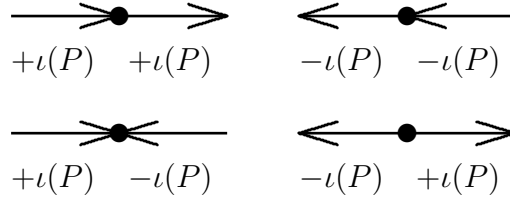
⁴Cestu P uvažujeme tak, jako kdyby graf D nebyl orientovaný, tj. každé hraně $a = (u, v)$ odpovídá neorientovaná hrana $\{u, v\}$. Formálně můžeme zapsat, že orientovanému grafu $D = (V, A)$ přísluší neorientovaný graf $G_D = (V, \{\{u, v\} \mid (u, v) \in A\})$.

⁵Pokud uvažujeme P jako podgraf G_D , pak bychom měli psát spíše „ $a \in A$ taková, že $a = (u, v)$ a $\{u, v\} \in E(P)$ “.



Obrázek 1.9.1: Tok v síti a minimální řez

Příklad. Na obrázku 1.9.2 je tlustou čarou znázorněna f -nenasycená cesta P . Význam číslic je vysvětlen v minulém příkladě. Podle definice zjistíme, že $\iota(P) = 2$. Nyní upravíme tok v síti následovně. Na hranách, které vedou po cestě P ve směru od x , zvýšíme tok o $\iota(P)$ a na hranách vedoucích po P ve směru do x snížíme tok o $\iota(P)$. Potom nové zobrazení $\tilde{f}$, které vznikne z f uvedenými úpravami, je opět $\tilde{f} : A \mapsto \mathbb{R}_0^+$ a též první podmínka na tok v definici 1.9.3 je zřejmě splněna. Co se týká druhé podmínky, lze situace, které nastanou na cestě P , shrnout na následujících schématech:



Je vidět, že ať jsou hrany na vrcholech cesty P orientovány jakkoliv, bude v každém uzlovém bodě stále zachována bilance „vtoku“ a „vý toku“. Proto $\tilde{f}$ je tok, který má hodnotu $\text{val } \tilde{f} = \text{val } f + \iota(P)$.

Věta 1.9.9. Tok f v síti $N = (D, x_0, y_0, c)$ je maximální tehdy a jen tehdy, když neexistuje f -nenasycená cesta končící ve spotřebiči y_0 .

Důkaz. $\boxed{\Rightarrow:}$

Důkaz této implikace bude v podstatě shrnutím úvah provedených v minulém příkladu. Postupujme sporem: necht' existuje f -nenasycená cesta P končící v y_0 . Potom definujeme zobrazení $\tilde{f}$ takto:

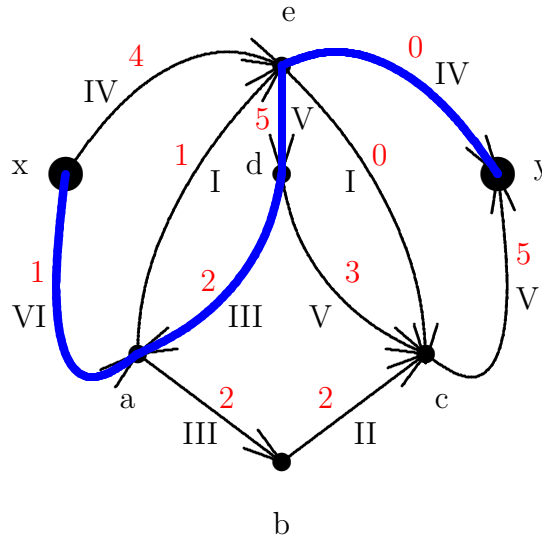
- $\forall a \in A, a \notin P$ položíme $\tilde{f}(a) = f(a)$,
- $\forall a \in A, a \in P$, která je po cestě P orientována ve směru z x_0 do y_0 , položíme $\tilde{f}(a) = f(a) + \iota(P)$,
- $\forall a \in A, a \in P$, která je po cestě P orientována ve směru z y_0 do x_0 , položíme $\tilde{f}(a) = f(a) - \iota(P)$.

Potom je opět $(\forall a \in A) (0 \leq \tilde{f}(a) \leq c(a))$ a rovněž $(\forall v \in I) \left(\sum_{(u,v) \in A} \tilde{f}((u,v)) = \sum_{(v,u) \in A} \tilde{f}((v,u)) \right)$, takže

$\tilde{f}$ je tok a pro jeho hodnotu platí

$$\text{val } \tilde{f} = \text{val } f + \iota(P) > \text{val } f,$$

což je spor s maximalitou toku f .

Obrázek 1.9.2: f -nenasycená cesta v síti

Definujeme

$$M = \{v \in V \mid \exists f\text{-nenasycená cesta z } x_0 \text{ do } v\}.$$

Potom $x_0 \in M$ a z předpokladu platí $y_0 \notin M$. $(M, \bar{M})$ je tedy řez v síti N . Potom na každé hraně $a = (u, v) \in A, u \in M, v \in \bar{M}$ musí z definice M platit $\iota(a) = 0$, neboli $f(a) = c(a)$, jinak by totiž $v \in M$. Stejně tak i na každé hraně $a = (u, v) \in A, u \in \bar{M}, v \in M$ musí být $\iota(a) = 0$, což v tomto případě odpovídá (z definice $\iota(a)$) rovnosti $f(a) = 0$. Proto platí

$$c((M, \bar{M})) = \sum_{\substack{(u,v) \in A \\ u \in M, v \in \bar{M}}} c((u, v)) = f^+(M) = f^+(x_0) = \text{val } f.$$

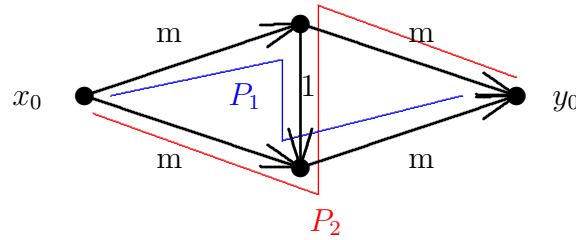
Našli jsme tedy řez, pro nějž je $c((M, \bar{M})) = \text{val } f$, a tedy podle poznámky 1.9.7 je f maximální tok. $\square$

Poznámka. Celočíselnost kapacit hran (tj. funkce c) zaručuje, že algoritmus hledání maximálního toku fungující na principu hledání nenasyčených cest je finitní. Pokud totiž začíná s tokem $f(a) = 0$ pro každé $a \in A$, tak v každém kroku zvedne hodnotu toku o $\iota(P) \geq 1$, přičemž kapacita minimálního řezu, které nakonec hodnota toku f dosáhne, je rovněž konečné přirozené číslo. Navíc $\text{val } f \in \mathbb{N}_0$ v každém kroku.

Příklad. Na obrázku 1.9.3 je vidět, že algoritmus nemusí být příliš efektivní. Pokud bude střídavě volit f -nenasycené cesty P_1 a P_2 , zvýší v každém kroku hodnotu toku pouze o 1. (čísla m a 1 u jednotlivých hran udávají jejich kapacity)

Poznámka. Algoritmus hledání maximálního toku pomocí f -nenasycených cest lze použít k nalezení perfektního párování v bipartitním grafu $G = (V_1 \cup V_2, E)$. Tomuto grafu přiřadíme síť $N = (D, x_0, y_0, c)$ definovanou takto:

- $D = (\{x_0, y_0\} \cup V, A)$, kde
- $A = \{(x_0, v) \mid v \in V_1\} \cup \{(u, v) \mid u \in V_1 \wedge v \in V_2 \wedge \{u, v\} \in E\} \cup \{(v, y_0) \mid v \in V_2\}$ a
- $(\forall a \in A) (c(a) = 1)$.

Obrázek 1.9.3: Algoritmus hledání maximálního toku pomocí f -nenasycených cest

To znamená, že přidáme vrcholy x_0 a y_0 , z x_0 vedeme hrany do všech vrcholů ve V_1 , mezi V_1 a V_2 orientujeme existující hrany ve směru do V_2 a ze všech vrcholů z V_2 vedeme hrany do y_0 . Všechny hrany mají jednotkovou kapacitu. Najdeme nyní maximální tok pomocí našeho algoritmu. Potom $(\forall a \in A) (f(a) \in \{0, 1\})$, tj. neexistují hrany s neceločíselným tokem⁶. Označme

$$M = \left\{ \{u, v\} \in E \mid \underbrace{f((u, v))}_{\in A} = 1 \right\}.$$

Potom M je maximální párování: Především se zřejmě jedná o párování, jinak by byla porušena druhá podmínka v definici toku 1.9.3. Například z žádného $v \in V_1$ nemohou vycházet dvě hrany, pro něž je $f = 1$, protože do v může přitékat maximálně jednotkový tok (z x_0). Dále platí, že $\text{val } f = \#M$, z čehož už plyne, že párování M je maximální. V opačném případě by totiž existovalo párování M' , $\#M' > \#M$ a k němu by bylo možné najít tok f' , pro který $\#M' = \text{val } f' > \text{val } f = \#M$, a tok f by nebyl maximální.

1.10 Hranové obarvení grafu

Definice 1.10.1. Necht' $G = (V, E)$ je graf, $k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $\varphi : E \mapsto \hat{k}$ nazveme **k -hranové obarvení** grafu G (angl. *k-edge colouring*). φ se nazývá **vlastní** (angl. *proper*) k -hranové obarvení grafu G , pokud

$$(\forall e, f \in E, e \neq f) (\varphi(e) = \varphi(f) \Rightarrow e \cap f = \emptyset),$$

tj. pokud hrany se stejnou barvou nemají společný konec. **Hranová barevnost** (angl. *edge chromatic number*) $\chi'(G)$ grafu G je minimální k takové, že G má vlastní k -hranové obarvení.

Poznámka. $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Poznámka. φ je vlastní k -hranové obarvení grafu G , právě když pro každé $i \in \hat{k}$ $\varphi^{-1}(i)$ (všechny vrcholy barvy i) představuje párování.

Důsledek. Hranová barevnost grafu $G = (V, E)$ je minimální počet disjunktních párování, jejichž sjednocením je celé E .

Úmluva. V důkazech budeme často používat obrat „ G lze obarvit k barvami“. Máme tím vždy na mysli „existuje vlastní k -hranové obarvení grafu G “. Stejným způsobem budeme hovořit o grafech i v další kapitole, zabývající se vrcholovým obarvením.

1.10.1 Problém rozvrhu hodin

Příklad. Uvažujme bipartitní graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$, kde V_1 představuje množinu učitelů a V_2 množinu kroužků. Z $u \in V_1$ vede do $v \in V_2$ m hran, pokud učitel u učí v kroužku v m hodin (např. týdně). Nalezneme obarvení grafu G , a potom hrany stejné barvy, představující párování v G , znamenají stejný čas (hodinu, termín) přednášky. Zatím však neuvažujeme omezení počtem volných místností.

⁶Obecně lze najít maximální tok i s neceločíselnými hodnotami funkce f . Proto je důležité, že používáme algoritmus hledání f -nenasycených cest!

Věta 1.10.2. *Je-li $G = (V_1 \cup V_2, E)$ bipartitní graf, tak platí $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Úmluva. Vzhledem k velmi častému výskytu symbolu $\Delta(G)$ označujícího maximální stupeň grafu G v následujícím výkladu budeme místo $\Delta(G)$ psát jen Δ .

Důkaz. Využijeme důsledku 1.8.10 (sňatkového problému), který říká, že r -regulární bipartitní graf má perfektní párování. Z G nejprve takový graf vyrobíme, a to takto:

1. Necht' BÚNO $\#V_1 > \#V_2$. Potom doplníme do V_2 potřebný počet izolovaných vrcholů, vznikne tak V'_2 , $\#V_1 = \#V'_2$.
2. Ve V_1 vybereme libovolný vrchol u se stupněm $d_G(u) < \Delta$. Potom i ve V'_2 musí existovat vrchol v se stupněm $d_G(v) < \Delta$. Vrcholy u, v spojíme hranou. Tento krok opakujeme, dokud je to možné, přičemž skončíme zřejmě právě tehdy, když všechny vrcholy budou mít stupeň roven Δ .

Dostaneme nový Δ -regulární graf $\tilde{G} = (V_1 \cup V'_2, \tilde{E})$. Najdeme v něm perfektní párování M , všechny hrany z M obarvíme barvou Δ a následně je z grafu $\tilde{G}$ odstraníme. Tím získáme $(\Delta - 1)$ -regulární graf a úvahu můžeme opakovat, dokud zbývají nějaké hrany. Výsledkem bude, že nakonec původní Δ -regulární graf $\tilde{G}$ bude obarven Δ barvami. To znamená, že i jeho podgraf G lze obarvit Δ barvami, takže $\chi'(G) \leq \Delta$. Víme však, že vždy platí $\chi'(G) \geq \Delta$, a tvrzení je tedy dokázáno. $\square$

Lemma 1.10.3. *Necht' M_1, M_2 jsou dvě disjunktní párování v grafu $G = (V, E)$ taková, že $\#M_1 > \#M_2$. Potom existují disjunktní párování N_1, N_2 v G taková, že:*

1. $N_1 \cup N_2 = M_1 \cup M_2$,
2. $\#N_1 = \#M_1 - 1$, $\#N_2 = \#M_2 + 1$, tj. N_1, N_2 mají menší rozdíl v počtu prvků.

Důkaz. Definujme graf $H = (V, M_1 \cup M_2)$. Potom zřejmě $(\forall v \in V) (d_H(v) \leq 2)$. H je sjednocením izolovaných vrcholů, cest a kružnic sudé délky, čehož jsme již jednou využili v důkazu Bergeovy věty 1.8.5. Protože $\#M_1 > \#M_2$, musí v H existovat cesta liché délky $2k + 1$, která má k hran z M_2 a $k + 1$ hran z M_1 . Tuto cestu označíme P . Nyní definujeme

$$\begin{aligned} N_1 &= (M_1 \setminus P) \cup (P \cap M_2), \\ N_2 &= (M_2 \setminus P) \cup (P \cap M_1), \end{aligned}$$

tj. na cestě P vyměníme hrany mezi M_1 a M_2 , mimo cestu zařadíme do N_i stejné hrany jako jsou v M_i . N_1, N_2 jsou opět párování a přitom si lze snadno rozmyslet, že splňují oba body dokazovaného lemmatu. $\square$

Příklad. Vrat' se nyní k problému rozvrhu hodin. Necht' l je počet dostupných místností a $m = \#E$, tj. celkový počet různých vyučovacích hodin všech kroužků. Potom počet různých časů (termínů, angl. *period*) P potřebných pro výuku musí splňovat $P \geq \lceil \frac{m}{l} \rceil$. Rovněž platí $P \geq \Delta$, protože $\Delta = \chi'(G)$, tj. počet různých barev v nejlepším možném obarvení bipartitního grafu G . Celkově tedy platí

$$P \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil, \Delta \right\}.$$

Předpokládejme, že $l = 6$. Snadno si lze představit případ bipartitního grafu, pro který platí $\Delta = 2$ a v němž najdeme jeho hranové obarvení dvěma barvami, tj. dvě disjunktní párování M_1, M_2 , pro něž platí $\#M_1 = 8$, $\#M_2 = 2$ a $M_1 \cup M_2 = E$. Potom počet potřebných časů pro výuku bude $P = 3$, protože blok přednášek M_1 , které by teoreticky (bez dalších omezení) mohly probíhat současně, bude nutné rozdělit na dvě části kvůli nedostatku místností. Opakovanou aplikací minulého lemmatu však lze postupně upravit párování M_1, M_2 tak, že $\#M_1 = \#M_2 = 5$. Potom již bude potřeba pouze $P = 2 = \max \left\{ \left\lceil \frac{10}{6} \right\rceil, 2 \right\}$ různých časů.

V následujícím ukážeme, že vždy existuje takový rozvrh, pro nějž platí

$$P = \max \left\{ \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil, \Delta \right\}.$$

Začneme obecnou úvahou. Necht' existuje p disjunktních párování $M_1, \dots, M_p$ v G , pro něž platí $\bigcup_{i \in \hat{p}} M_i = E$. Potom opakovaným použitím předchozího lemmatu lze tato párování upravit tak, že

$$((\forall i, j \in \hat{p}) (|\#M_i - \#M_j| \leq 1)),$$

tj. hrany jsou co nejrovnoměrněji rozděleny do jednotlivých párování, a tak v každém párování je nejvýše $\lceil \frac{m}{p} \rceil$ hran. V takovém případě je maximální počet hran v párování, tj. číslo $\max_{i \in \hat{p}} \#M_i$, nejmenší možné.

Nyní již dokážeme uvedený vztah. Najdeme obarvení grafu G Δ barvami. Potom získáme Δ disjunktních párování

$$M_1 = \varphi^{-1}(1), \dots, M_\Delta = \varphi^{-1}(\Delta).$$

1. Necht' $\lceil \frac{m}{l} \rceil < \Delta$. Potom chceme dokázat $P = \Delta$. Párování $M_1, \dots, M_\Delta$ upravíme popsáním postupem tak, že

$$(\forall i \in \hat{\Delta}) \left(\#M_i \leq \lceil \frac{m}{\Delta} \rceil \right).$$

Z předpokladu však postupně platí, že

$$\lceil \frac{m}{l} \rceil < \Delta \Rightarrow \frac{m}{l} < \Delta \Rightarrow \frac{m}{\Delta} < l \Rightarrow \lceil \frac{m}{\Delta} \rceil \leq l.$$

To znamená, že každé párování M_i lze považovat za blok současně probíhající výuky, protože se vždy vejde do dostupných místností. Proto $P = \Delta$.

2. Necht' $\lceil \frac{m}{l} \rceil \geq \Delta$. Potom chceme dokázat $P = \lceil \frac{m}{l} \rceil$. Je jasné, že existuje-li v G Δ disjunktních párování, pak existuje i $\lceil \frac{m}{l} \rceil$ disjunktních párování. Stačí totiž potřebný počet párování rozdělit na dvě nebo více disjunktních párování, nebo definovat $M_i = \emptyset$ pro každé $\Delta < i \leq \lceil \frac{m}{l} \rceil$. Párování $M_1, \dots, M_{\lceil \frac{m}{l} \rceil}$ pak upravíme tak, aby

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, \lceil \frac{m}{l} \rceil\}) \left(\#M_i \leq \left\lceil \frac{m}{\lceil \frac{m}{l} \rceil} \right\rceil \right).$$

Nyní opět ukážeme, že tato párování už lze brát jako bloky současně probíhající výuky, protože se vejdou do l místností. Platí totiž:

$$\left\lceil \frac{m}{\lceil \frac{m}{l} \rceil} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{m}{(\frac{m}{l})} \right\rceil = \lceil l \rceil = l.$$

1.10.2 Vizingova věta

Věta 1.10.4. (Vizing)

Pro libovolný graf G platí $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Poznámka. Protože víme $\chi'(G) \geq \Delta$, tak Vizingova věta znamená, že hranová barevnost grafu může vlastně nabývat jen dvou hodnot: Δ a $\Delta + 1$. Důkaz této věty provedeme až poté, co si připravíme dvě pomocná tvrzení.

Lemma 1.10.5. *Necht' $G = (V, E)$ je souvislý graf, G není kružnice liché délky. Potom existuje 2-hranové obarvení G takové, že na každém vrcholu se stupněm alespoň 2 se vyskytují hrany obou barev.*

Důkaz. V důkazu využijeme znalostí o eulerovských grafech.

1. Necht' G je eulerovský. Potom

- (a) všechny stupně jsou 2. Z předpokladu se pak jedná o kružnici sudé délky. Hrany obarvíme střídavě oběma barvami, a každý vrchol pak spojuje dvě hrany dvou různých barev.

- (b) existuje vrchol se stupněm ≥ 4 . Z tohoto vrcholu pak začneme eulerovský cyklus, barvíme opět střídavě. Proč zrovna tento vrchol volíme za počáteční plyne z následujícího. Do každého vrcholu kromě počátečního totiž vstoupíme po hraně jedné barvy a okamžitě jej opouštíme po hraně druhé barvy. Pokud bychom za počáteční vrchol zvolili vrchol se stupněm 2, tak bychom u něj tuto jistotu neměli. Má-li však počáteční vrchol stupeň alespoň 4, potom jím v eulerovském cyklu projdeme alespoň jednou stejným způsobem jako ostatními vrcholy.

2. Necht' G není eulerovský, tj. podle věty 1.6.3 má vrchol s lichým stupněm. Protože ale

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2\#E$$

je sudý, je vrcholů s lichým stupněm sudý počet. Když ke grafu G přidáme vrchol $x \notin V$ a napojíme ho na všechny vrcholy s lichým stupněm, bude mít x sudý stupeň a nový graf $\tilde{G}$ bude eulerovský. Tento graf obarvíme podle bodu 1 a nakonec vše, co jsme přidali, opět odebereme. Každý vrchol v $\tilde{G}$ kromě x však má u sebe obě barvy hran zastoupeny v stejném počtu: do každého vrcholu jsme přišli a zase odešli. Při odebrání hran z $\tilde{G}$ u vrcholů se sudým stupněm už nic nezměníme, u vrcholů s lichým stupněm (v G), který je alespoň 3, pak nezmizí žádná z barev, protože v $\tilde{G}$ u něj byla každá alespoň dvakrát.

□

Definice 1.10.6. k -hranové obarvení $\varphi : E \mapsto \hat{k}$ grafu $G = (V, E)$ se nazývá optimální, jestliže pro každé jiné k -hranové obarvení $\tilde{\varphi} : E \mapsto \hat{k}$ platí

$$\sum_{v \in V} c_{\varphi}(v) \geq \sum_{v \in V} c_{\tilde{\varphi}}(v),$$

kde $c_{\varphi}(v)$ je počet různých barev hran vedoucích z vrcholu v .

Poznámka. Obarvení φ je vlastní, právě když $(\forall v \in V) (c_{\varphi}(v) = d_G(v))$.

Poznámka. Pojem optimální obarvení nevyužijeme nikde jinde než v důkazu Vizingovy věty.

Lemma 1.10.7. *Necht' φ je optimální obarvení grafu $G = (V, E)$ a necht' existuje vrchol $u \in V$ a barvy i, j takové, že barva i se na vrcholu u nevyskytuje vůbec a barva j se na u vyskytuje alespoň dvakrát. Potom komponenta U grafu*

$$\tilde{G} = (V, \varphi^{-1}(i) \cup \varphi^{-1}(j)),$$

kteřá obsahuje vrchol u , je kružnice liché délky.

Důkaz. Sporem: V $\tilde{G}$ určitě platí $d_{\tilde{G}}(u) \geq 2$ a počet barev u vrcholu u v grafu $\tilde{G}$ (při obarvení φ grafu G) je 1. Kdyby U nebyla lichá kružnice, pak lze podle lematu 1.10.5 najít 2-hranové obarvení $\tilde{\varphi}$ grafu $\tilde{G}$ barvami i, j takové, že $c_{\tilde{\varphi}}(u) = 2$ a u ostatních vrcholů v grafu $\tilde{G}$ počet barev neklesne. Definujeme-li pak nové obarvení ψ grafu G jako

$$(\forall e \in E) \left(\psi(e) = \begin{cases} \varphi(e) & \text{pokud } \varphi(e) \notin \{i, j\} \\ \tilde{\varphi}(e) & \text{pokud } \varphi(e) \in \{i, j\} \end{cases} \right),$$

tak bude platit

$$\sum_{v \in V} c_{\varphi}(v) < \sum_{v \in V} c_{\psi}(v),$$

což je spor s optimalitou φ .

□

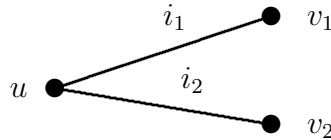
Nyní máme již vše připraveno pro důkaz Vizingovy věty 1.10.4.

Důkaz. Mějme libovolný graf $G = (V, E)$. Ukážeme, že $\chi'(G) \leq \Delta + 1$. Vezmeme optimální $(\Delta + 1)$ -hranové obarvení φ grafu G a sporem o něm dokážeme, že je vlastní.

Necht' φ není vlastní. Potom existuje $u \in V$ takový, že $c_{\varphi}(u) < d_G(u)$. Proto

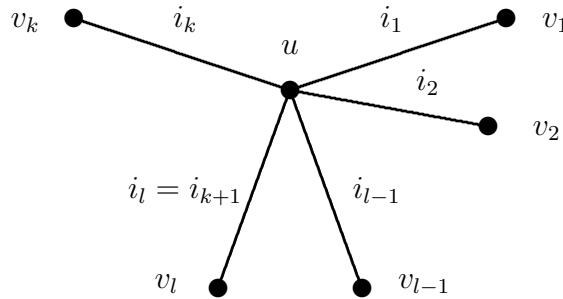
- existuje barva i_0 , která na u schází (taková barva existuje na každém vrcholu) a
- existuje barva i_1 , která je na u aslespoň dvakrát.

Označme v_1 vrchol, do nějž vede z u hrana barvy i_1 . Dále označme i_2 barvu, která se nevyskytuje na v_1 . Potom i_2 se vyskytuje na u . V opačném případě totiž přebarvíme hranu $\{u, v_1\}$ na i_2 , tím se počet barev na u zvýší (i_1 je na u dvakrát), ale počet barev na v_1 neklesne. To je spor s optimalitou φ .



Označme rekurzivně pro rostoucí $k = 2, 3, \dots$ jako i_k barvu, která není na v_{k-1} . Potom platí, že pro každé k tato barva musí být na u . Díky tomu lze označit vrchol, do nějž vede z u hrana barvy i_k , jako v_k . Zdůvodnění uvedeného tvrzení provedeme indukcí podle k : Pokud i_k na u chybí, přebarvíme hranu $\{u, v_{k-1}\}$ na i_k , čímž se počet barev na v_{k-1} nesníží. Počet barev na u se zvýší (a tak ihned dostaneme spor) jen tehdy, pokud i_{k-1} je stále na u , jinak pouze neklesne. V druhém případě však získáme jiné optimální obarvení grafu G , při němž i_{k-1} není na u , což je zase spor s indukčním předpokladem. Počáteční krok pro $k = 2$ jsme již dokázali nad obrázkem.

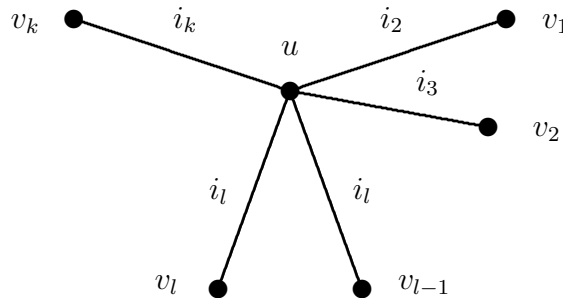
Pro určité k nastane situace, že barva i_{k+1} , která schází na v_k , se již vyskytuje mezi barvami $i_1, \dots, i_{k-1}$. Označíme jako l takový index, že $i_{k+1} = i_l$. To je zobrazeno na následujícím obrázku:



Nyní definujeme nové obarvení $\tilde{\varphi}$, které bude pro všechny hrany stejné jako φ , až na následující změny:

$$(\forall j \in \{1, \dots, l-1\}) (\tilde{\varphi}(\{u, v_j\}) = i_{j+1}).$$

Potom bude při obarvení $\tilde{\varphi}$ situace následující:

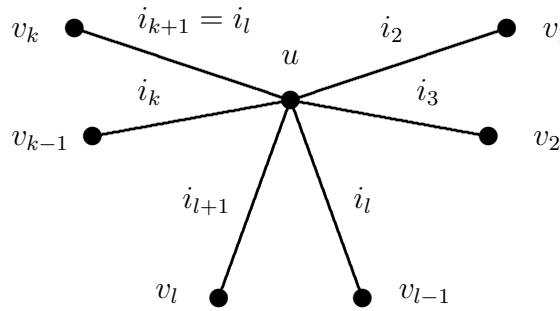


Každý vrchol v_j , $j \in \{1, \dots, l-1\}$, dostal na hraně $\{u, v_j\}$ barvu, kterou předtím neměl. Vrchol u ztratil v_1 , ale tu měl dvakrát. Nyní ji má jen jednou, ale zase má alespoň dvakrát i_l . Z toho je jasné, že $\tilde{\varphi}$ je opět optimální obarvení grafu G .

Definujeme ještě jedno obarvení $\tilde{\tilde{\varphi}}$, které bude pro všechny hrany stejné jako φ , až na následující změny:

$$(\forall j \in \{1, \dots, k\}) (\tilde{\tilde{\varphi}}(\{u, v_j\}) = i_{j+1}).$$

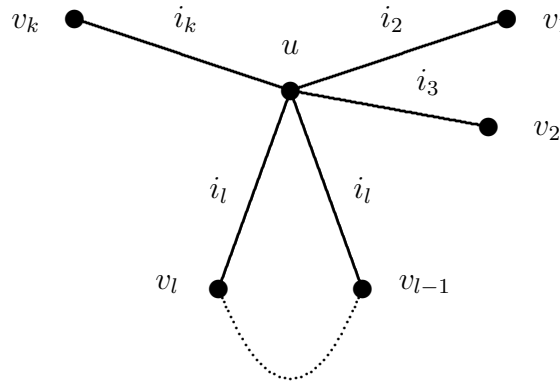
Potom při obarvení $\tilde{\tilde{\varphi}}$ dostaneme situaci:



Rovněž obarvení $\tilde{\tilde{\varphi}}$ je zřejmě optimální. Nyní již snadno dojdeme ke sporu, když použijeme lemma 1.10.7. Komponenta podgrafu

$$\tilde{G} = (V, \tilde{\varphi}^{-1}(i_0) \cup \tilde{\varphi}^{-1}(i_l)),$$

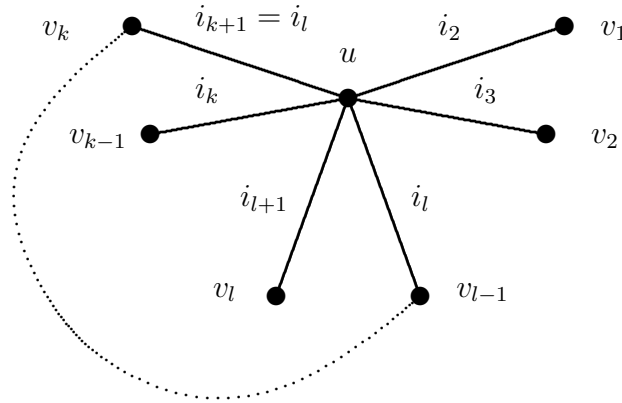
obsahující vrchol u , má totiž být lichá kružnice. Z vrcholu v_{l-1} nás tato kružnice přivede po hranách barvy i_0 a i_l do vrcholu v_l .



Zároveň však platí, že i komponenta podgrafu

$$\tilde{\tilde{G}} = (V, \tilde{\tilde{\varphi}}^{-1}(i_0) \cup \tilde{\tilde{\varphi}}^{-1}(i_l)),$$

obsahující vrchol u , je lichá kružnice. Z vrcholu v_{l-1} nás tato kružnice přivede po hranách barvy i_0 a i_l do vrcholu v_k .



To je ale spor, protože jediné hrany, které mají v obarvení $\tilde{\varphi}$ barvu odlišnou od barvy v obarvení $\tilde{\varphi}$, jsou hrany $\{u, v_l\}, \{u, v_{l+1}\}, \dots, \{u, v_k\}$, takže kružnice vedoucí přes v_{l-1} se nemůže tímto způsobem změnit jen díky změně obarvení z $\tilde{\varphi}$ na $\tilde{\varphi}$. $\square$

1.11 Vrcholové obarvení grafu

Definice 1.11.1. Necht' $G = (V, E)$ je graf, $k \in \mathbb{N}$. **k -vrcholovým obarvením** (angl. *k-vertex colouring*) grafu G nazveme zobrazení $\varphi : V \mapsto \hat{k}$. φ se nazývá **vlastní** (angl. *proper*) k -vrcholové obarvení grafu G , jestliže platí

$$(\forall u, v \in V) (\varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow \{u, v\} \notin E),$$

tj. jestliže stejně barevné vrcholy nejsou spojeny hranou. Minimální k takové, že existuje k -vrcholové vlastní obarvení grafu G , se nazývá **barevnost** (angl. *chromatic number*) grafu G a značí se $\chi(G)$.

Příklad. Jestliže vrcholy reprezentují účastníky reality show a hrany vedou mezi těmi, kteří se nesnášejí, pak $\chi(G)$ je minimální počet skupin, do nichž lze soutěžící rozdělit tak, aby v žádné skupině nebyli dva, kteří se nesnášejí.

Poznámka.

- $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G = (V, \emptyset)$.
- $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ je bipartitní s alespoň jednou hranou ($\Leftrightarrow$ v G není kružnice liché délky).
- $\chi(G) = p, p \geq 3 \Leftrightarrow ??$

Rozhodnout o tom, zda $\chi(G) = p$, je pro obecný graf NP-úplná úloha. Podle předchozích bodů můžeme jen ověřit, jestli $\chi(G) \geq 3$ nebo ne.

Poznámka 1.11.2. Zřejmě vždy platí $\chi(G) \leq n = \#V$. Jestliže obarvíme každý vrchol jinou barvou, dostaneme vlastní obarvení. Přitom když $G = K_n$, tj. je-li G úplným grafem na n vrcholech, tak $\chi(G) = n$. Platí i opačná implikace, protože chybí-li mezi dvěma vrcholy hrana, lze je obarvit stejnou barvou a zbylé vrcholy opět obarvit různě. Celkem tedy

$$\chi(G) = n \Leftrightarrow G = K_n.$$

Definice 1.11.3. Necht' $G = (V, E)$ je graf, $k \in \mathbb{N}$.

- **Klikou** (angl. *clique*) velikosti k v G rozumíme množinu vrcholů $S \subset V$ takovou, že podgraf $G[S] = (S, E \cap \binom{S}{2})$ indukovaný množinou S je úplný, tj. každé dva vrcholy z S jsou spojeny hranou v G .

- $S \subset V$ se nazývá **nezávislá množina** (angl. *independent set*) velikosti k v G , jestliže $E \cap \binom{S}{2} = \emptyset$, tj. jestliže žádné dva vrcholy z S nejsou spojeny hranou v grafu G .
- $S \subset V$ se nazývá **vrcholové pokrytí** (angl. *covering*) grafu G , jestliže $(\forall e \in E) (\exists v \in S) (v \in e)$, tj. jestliže každá hrana v G má alespoň jeden konec v S .

Maximální velikost kliky v grafu G značíme $\omega(G)$, maximální velikost nezávislé množiny značíme $\alpha(G)$.

Poznámka. V přednášce někdy klikou velikosti k nazýváme též úplný podgraf $K_k = G[S]$, který množina S indukčuje.

Poznámka 1.11.4. Je-li S nezávislá množina v G , pak S je klika v $\bar{G}$ a naopak. Proto zřejmě platí

$$\begin{aligned}\alpha(\bar{G}) &= \omega(G) \\ \omega(\bar{G}) &= \alpha(G).\end{aligned}$$

Poznámka. Klikami a nezávislými množinami se budeme v různých souvislostech zabývat především v druhé části přednášky. Nyní tuto definici budeme potřebovat jen na několika málo místech.

Poznámka. Necht' φ je vlastní $\chi(G)$ -vrcholové obarvení grafu $G = (V, E)$, $i \in \widehat{\chi(G)}$. Potom mezi vrcholy z $\varphi^{-1}(i)$ nevede hrana, neboli $\varphi^{-1}(i)$ je nezávislá množina. Tím pádem

$$\#\varphi^{-1}(i) \leq \alpha(G)$$

a přitom platí

$$\bigcup_{i=1}^{\chi(G)} \#\varphi^{-1}(i) = V.$$

Věta 1.11.5. Necht' $G = (V, E)$ je graf. Potom platí

$$\begin{aligned}\#V &\leq \alpha(G) \cdot \chi(G) \\ \omega(G) &\leq \chi(G).\end{aligned}$$

Důkaz. První tvrzení plyne okamžitě z předchozí poznámky. Druhé tvrzení je zřejmé: V G existuje klika velikosti $\omega(G)$, jejíž vrcholy musí mít při vlastním obarvení grafu G $\omega(G)$ různých barev. $\square$

Poznámka.

1. Jestliže $H \subset G$, potom $\chi(H) \leq \chi(G)$.
2. Platí-li $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_r$, kde G_i jsou komponenty grafu G , potom zřejmě

$$\chi(G) = \max_{i \in \hat{r}} \chi(G_i).$$

Věta 1.11.6. Necht' $G = (V, E)$ je graf. Potom $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Důkaz. Tvrzení je formálně shodné s Vizingovou větou 1.10.4 pro hranovou barevnost. Zde je však důkaz snadný. „Pochtivě“ jej lze provést indukcí podle $n = \#V$.

Pro $n = 1$ je to jasné: $\Delta(G) = 0$, $\chi(G) = 1 = \Delta(G) + 1$.

Indukční krok $n - 1 \rightarrow n$: V G najdeme vrchol $u \in V$ takový, že $d_G(u) = \Delta(G)$. Samozřejmě je $\Delta(G \setminus u) \leq \Delta(G)$. Z indukčního předpokladu je $\chi(G \setminus u) \leq \Delta(G \setminus u) + 1 \leq \Delta(G) + 1$. Najdeme tedy vlastní obarvení grafu $G \setminus u$ pomocí $\Delta(G) + 1$ barev. Pokud nyní přidáme zpět vrchol u , který má $\Delta(G)$ sousedů, bude možné jej rovněž obarvit jednou z $\Delta(G) + 1$ barev. Celý G je tak obarven pomocí $\Delta(G) + 1$ barev. $\square$

Poznámka. Myšlenku předchozího důkazu lze shrnout jednoduše: Postupně barvíme jeden vrchol za druhým první dostupnou barvou. Nikdy se nemůže stát, že bychom neměli k dispozici žádnou volnou barvu, protože každý vrchol má méně sousedů, než kolik máme barev.

Poznámka. Dolní odhad na $\chi(G)$ není možné pomocí $\Delta(G)$ nijak vyjádřit:

- Úplný graf K_n na n vrcholech má $\chi(K_n) = n = \Delta(G) + 1$.
- Úplný bipartitní graf na $1 + (n - 1)$ vrcholech, tj. graf S_{n-1} (viz definice 1.1.11) má $\Delta(S_{n-1}) = n - 1$, ale $\chi(G) = 2$.

Věta 1.11.7. Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:

1. $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$,
2. $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n$.

Připravíme si dvě pomocná tvrzení, z nichž již plynou jednotlivé nerovnosti.

Lemma 1.11.8. Bud'te $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ dva grafy. Potom platí

$$\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2).$$

Důkaz. Zřejmě platí $\chi(G_1) = \chi(\tilde{G}_1)$, kde $\tilde{G}_1 = (V_1 \cup V_2, E_1)$, a stejně $\chi(G_2) = \chi(\tilde{G}_2)$, kde $\tilde{G}_2 = (V_1 \cup V_2, E_2)$. BÚNO je proto možné předpokládat $V_1 = V_2 (= V)$.

Z předpokladu existují obarvení grafů G_1 a G_2

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: V \mapsto \{1, 2, \dots, \chi(G_1)\}, \\ \varphi_2 &: V \mapsto \{1, 2, \dots, \chi(G_2)\}. \end{aligned}$$

Najdeme obarvení grafu $G_1 \cup G_2$ pomocí $\chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$ barev. Definujme nyní pro každé $v \in V$

$$\psi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v)).$$

Potom pro každé $u, v \in V$ platí $(\psi(u) = \psi(v)) \Rightarrow (\varphi_1(u) = \varphi_1(v) \wedge \varphi_2(u) = \varphi_2(v)) \Rightarrow \{u, v\} \notin E_1 \wedge \{u, v\} \notin E_2 \Rightarrow \{u, v\} \notin E_1 \cup E_2$. Zobrazení ψ je

$$\psi : V \mapsto \{1, 2, \dots, \chi(G_1)\} \times \{1, 2, \dots, \chi(G_2)\}.$$

Obor hodnot zobrazení ψ je však (množinově) izomorfní s množinou $\{1, 2, \dots, \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)\}$. Abychom korektně definovali vrcholové obarvení grafu $G_1 \cup G_2$, označme

$$B : \{1, 2, \dots, \chi(G_1)\} \times \{1, 2, \dots, \chi(G_2)\} \mapsto \{1, 2, \dots, \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)\}$$

bijekci mezi uvedenými množinami. Potom lze pro každé $v \in V$ definovat $\chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$ -vrcholové obarvení grafu $G_1 \cup G_2$ takto:

$$\varphi(v) = B(\psi(v)).$$

Pro φ platí $(\forall u, v \in V) (\varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow \{u, v\} \notin E_1 \cup E_2)$, takže se skutečně jedná o vrcholové obarvení. $\square$

Důsledek. Platí tvrzení (2) věty 1.11.7.

Důkaz. Protože $G \cup \bar{G} = K_n$, tak

$$n = \chi(K_n) = \chi(G \cup \bar{G}) \leq \chi(G) \cdot \chi(\bar{G}).$$

$\square$

Lemma 1.11.9. Bud' $G = (V, E)$ graf. Necht' existuje disjunktní rozklad množiny vrcholů $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ takový, že

$$(\forall i, j \in \hat{k}, i \neq j) (\exists u \in V_i) (\exists v \in V_j) (\{u, v\} \notin E).$$

Potom $\chi(G) \leq n + 1 - k$.

Důkaz. Indukcí podle k . Pro $k = 1$ máme $\chi(G) \leq n + 1 - 1 = n$, což je pravda.

Indukční krok $k - 1 \rightarrow k$: Platí $\chi(G \setminus V_k) = (n - \#V_k) + 1 - (k - 1) = (n - \#V_k) + 2 - k$. Nyní vezmeme $\#V_k$ nových barev a obarvíme vrcholy z V_k těmito barvami, každý vrchol jinou barvou. Máme tak obarvený celý graf, a to $\leq (n - \#V_k) + 2 - k + \#V_k = n + 2 - k$ barvami. Pokud je tento počet barev $\leq n + 1 - k$, je hotovo. Jestliže je použito právě $n + 2 - k$ barev, musíme pokračovat a obarvení upravit. Z předpokladu platí

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}) (\exists x_i \in V_i) (\exists y_i \in V_k) (\{x_i, y_i\} \notin E).$$

Množina $V \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ má počet vrcholů $n - (k - 1) = n + 1 - k$, což je méně, než počet použitých barev. Proto existuje barva b , která se vyskytuje pouze na vrcholech $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$. Této barvy se zbavíme tak, že každý vrchol x_i ($i \in \{1, \dots, k - 1\}$), který má barvu b , přebarvíme na barvu vrcholu y_i . Potom nové obarvení je stále vlastní. $\{x_i, y_i\}$ totiž nejsou v hraně, a i kdyby různým x_i, x_j příslušel stejný vrchol $y_i = y_j$, potom, protože oba vrcholy x_i, x_j měly stejnou barvu b , lze je opět obarvit stejnou barvou - barvou vrcholu y_i . $\square$

Důsledek. Platí tvrzení (1) věty 1.11.7.

Důkaz. Označme $k = \chi(G)$. Necht' φ je vlastní k -vrcholové obarvení G . Pro každé $i \in \hat{k}$ označme

$$V_i := \varphi^{-1}(i).$$

Potom platí, že

$$(\forall i, j \in \hat{k}, 1 \leq i \leq j \leq k) (\exists u \in V_i) (\exists v \in V_j) (\{u, v\} \in E). \quad (1.11.1)$$

Kdyby tomu tak nebylo, tj. kdyby

$$(\exists i, j \in \hat{k}, 1 \leq i \leq j \leq k) (\forall u \in V_i) (\forall v \in V_j) (\{u, v\} \notin E),$$

bylo by možné vrcholy z V_i i z V_j obarvit stejnou barvou, a tak by $\chi(G) < k$, což je spor. Vezmeme nyní graf $\tilde{G}$ a definujme na něm stejný rozklad $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$. Potom z (1.11.1) vznikne pro graf $\tilde{G}$ přímo předpoklad lemmatu. Proto

$$\chi(\tilde{G}) \leq n + 1 - k = n + 1 - \chi(G),$$

což už je první tvrzení věty 1.11.7. $\square$

1.11.1 k -kritické grafy

Definice 1.11.10. Řekneme, že graf $G = (V, E)$ je k -kritický, jestliže $\chi(G) = k$ a pro každý vlastní podgraf $H \subsetneq G$ je $\chi(H) < \chi(G)$.

Pozorování 1.11.11. k -kritický graf je souvislý.

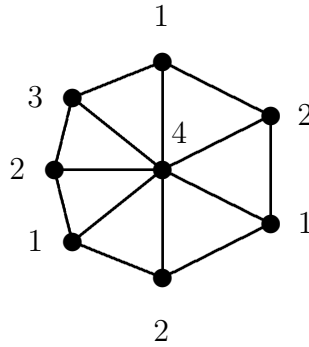
Důkaz. Víme, že má-li G komponenty $G_1, \dots, G_r$, tak potom

$$\chi(G) = \max_{i \in \hat{r}} \chi(G_i).$$

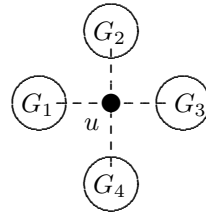
Je-li $r \geq 2$, existuje jedna nebo více komponent, které lze z grafu G odebrat, aniž se sníží jeho barevnost. Proto takový G není k -kritický. $\square$

Poznámka 1.11.12.

- 1-kritický graf je $G = \{\{v\}, \emptyset\}$.
- 2-kritický graf je $G = \{\{u, v\}, \{\{u, v\}\}\}$.
- 3-kritický graf je C_{2n-1} (kružnice liché délky).



Obrázek 1.11.1: 4-kritický graf



Obrázek 1.11.2: Jednoprvkový řez grafem

Důkaz. První dvě tvrzení jsou zřejmá. Dále víme, že $\chi(G) = 2$, právě když G je bipartitní graf. 3-kritický graf tedy nesmí být bipartitní, ale odebráním čehokoliv z něj musí bipartitní graf vzniknout. Jediný graf, který to splňuje, je kružnice liché délky bez dalších odboček. $\square$

Poznámka. 4-kritický graf vidíme na obrázku 1.11.1. Odebereme-li totiž hranu z obvodu, lze vrcholy po obvodě obarvit jen barvami 1 a 2 a vrchol uprostřed barvou 3. Odebereme-li hranu vedoucí do středu, obarvíme vrcholy po obvodu kromě vrcholu v_0 , ze kterého jsme odebrali hranu, barvami 1 a 2. Vrchol v_0 a střed pak obarvíme barvou 3.

Poznámka 1.11.13. Každý graf G s barevností $k = \chi(G)$ obsahuje k -kritický podgraf.

Důkaz. Stačí z G postupně odebírat hrany takové, že neklesne barevnost. Jestliže už to nejde, máme k -kritický podgraf G . $\square$

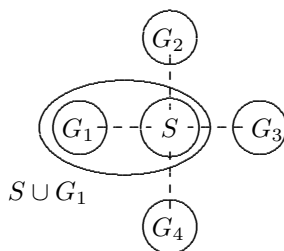
Věta 1.11.14. *Necht' $G = (V, E)$ je k -kritický graf. Potom $\delta(G) \geq k - 1$.*

Důkaz. Sporem: necht' $(\exists u \in V) (d_G(u) \leq k - 2)$. Potom z u vede méně hran, než kolik je potřeba barev na obarvení G , a to alespoň o 2. Při každém vlastním obarvení není barva u určena jednoznačně. Odeberme tedy vrchol u . Z k -kritičnosti G lze zbytek grafu obarvit $k - 1$ barvami. Jestliže nyní přidáme vrchol u zpět, lze dát vrcholu u alespoň 2 různé barvy z dostupných k barev. Proto nemusíme nutně vybrat novou (k -tou) barvu a G se nám podaří obarvit $k - 1$ barvami, což je spor. $\square$

Definice 1.11.15. Řekneme, že množina $S \subset V$ je **řezem** (angl. *cut*) v grafu $G = (V, E)$, jestliže pro počty komponent platí $c(G) < c(G \setminus S)$.

Poznámka. Když $S = \{u\}$ je řez v souvislém grafu, pak graf musí vypadat jako na obrázku 1.11.2.

Věta 1.11.16. *Řez k -kritického grafu není klika.*



Obrázek 1.11.3: K důkazu věty 1.11.16

Důkaz. Sporem: necht' G je k -kritický, S je řez v G a zároveň klika v G . Předpokládejme, že $S = \{v_1, \dots, v_r\}$, tj. $\#S = r$. Každé vlastní k -vrcholové obarvení musí přiřadit vrcholům z S r různých barev. Necht' $G \setminus S = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_s$. Potom vezmeme pro každé $i \in \hat{s}$ podgrafy $S \cup G_i$ (viz. obrázek 1.11.3) a obarvíme je $k - 1$ barvami tak, aby barvy použité na vrcholech S byly právě barvy $1, 2, \dots, r$. (Víme, že existuje vlastní $(k - 1)$ -vrcholové obarvení těchto podgrafů, takže dodatečný požadavek lze zajistit jen vhodnou permutací barev.) Jestliže nyní všechny takto obarvené komponenty sjednotíme, získáme vlastní $(k - 1)$ -vrcholové obarvení grafu G , což je spor. $\square$

Poznámka. V předchozím důkazu je skutečně důležité, aby S byla klika. Pokud budeme stejně postupovat v případě obecné S , může se stát, že vlastní $(k - 1)$ -vrcholové obarvení podgrafů $S \cup G_i$ vynucuje, aby některé prvky S byly obarveny stejnou barvou, přičemž pro různá $i \in \hat{s}$ se jedná o různé prvky. Nebude potom možné vhodně zpermutovat barvy, aby vrcholy z S měly stejnou barvu nezávisle na i .

1.11.2 Brooksova věta

Lemma 1.11.17. *Necht' G je k -kritický graf s řezem $S = \{u, v\}$. Potom platí*

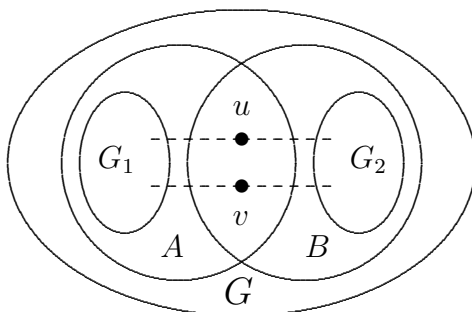
$$d_G(u) + d_G(v) \geq 3k - 5.$$

Důkaz. Než dokážeme samotnou nerovnost, připravíme si tři pomocná tvrzení. Mějme při tom na paměti, že vrcholy u, v nejsou podle předchozí věty 1.11.16 spojeny hranou.

Tvrzení 1.

Graf $G \setminus \{u, v\}$ (kde $\{u, v\}$ nemá smysl hrany, ale množiny vrcholů odebírané z $V(G)$) se skládá z právě 2 komponent $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ takových, že

- *Každé vlastní $(k - 1)$ -vrcholové obarvení (vlastního) indukovaného podgrafu $A = G[V_1 \cup \{u, v\}]$ přiřazuje vrcholům u, v stejnou barvu. (Jinými slovy: barvíme-li A pomocí $k - 1$ barev, musíme dát u a v stejnou barvu)*
- *Každé vlastní $(k - 1)$ -vrcholové obarvení (vlastního) indukovaného podgrafu $B = G[V_2 \cup \{u, v\}]$ přiřazuje vrcholům u, v různou barvu.*



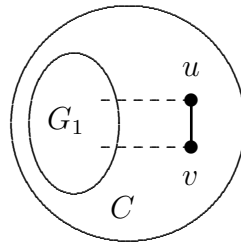
Důkaz tvrzení 1:

Zpočátku nevíme, zda $G \setminus \{u, v\}$ obsahuje *jen* dvě komponenty. Lze však tvrdit, že $G \setminus \{u, v\}$ musí obsahovat alespoň jednu komponentu s vlastností komponenty G_1 . Kdyby to tak nebylo, mohli bychom každý podgraf grafu G indukovaný vrcholy jedné z komponent a vrcholy u, v obarvit $k - 1$ barvami tak, že u a v by měly různé barvy. Potom bychom barvy zpermutovali tak, aby u, v měly vždy barvy 1, 2. Takto obarvené podgrafy bychom sjednotili a získali tak celý graf G obarvený $k - 1$ barvami, což je spor.

Ze stejného důvodu obsahuje $G \setminus \{u, v\}$ alespoň jednu komponentu s vlastností G_2 . Nyní si tyto komponenty označíme přímo jako G_1 a G_2 . Ukážeme, že žádné jiné komponenty už v $G \setminus \{u, v\}$ neexistují: Indukovaný podgraf $A \cup B = G[V_1 \cup V_2 \cup \{u, v\}]$ podle vlastností komponent G_1 a G_2 nejde (vlastním obarvením) obarvit $k - 1$ barvami, protože vrcholy u, v nemohou mít současně podle G_1 stejnou a podle G_2 různou barvu. Proto $\chi(A \cup B) = k$. Protože G je k -kritický, musí platit $G = A \cup B$.

Tvrzení 2.

Podgraf $C = A \cup \{u, v\}$, který vznikne přidáním hrany $\{u, v\}$ do A , je již k -kritický.



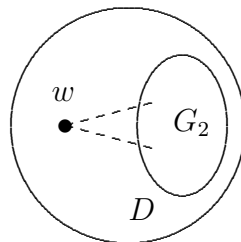
Důkaz tvrzení 2:

Zřejmě platí $\chi(C) = k$, protože A lze obarvit $k - 1$ barvami jen tak, že u, v mají stejnou barvu. Když je tedy spojíme hranou, tak už to nejde.

Ubereme-li z G libovolnou hranu, lze jej obarvit $k - 1$ barvami. Pokud navíc tato hrana leží v podgrafu A , zůstává ve výsledném grafu celý podgraf B , takže v uvedeném vlastním obarvení musí mít u, v různou barvu. Proto nezáleží na tom, zda je navíc spojíme hranou. Tím jsme dokázali, že po ubrání čehokoliv z C vznikne graf s barevností $k - 1$, takže C je k -kritický.

Tvrzení 3.

Označme jako D graf, který vznikne z grafu B sloučením vrcholů u, v do nového vrcholu w . Potom D je k -kritický.



Důkaz tvrzení 3:

Analogicky jako tvrzení 2. $\chi(D) = k$, neboť B lze obarvit $k - 1$ barvami, jen když u, v mají různou barvu. Jejich spojením do w však vynucujeme stejnou.

Ubereme-li z G libovolnou hranu, lze jej obarvit $k - 1$ barvami. Pokud navíc tato hrana leží v podgrafu B , zůstává ve výsledném grafu celý podgraf A , takže v uvedeném vlastním obarvení musí mít u, v stejnou barvu. Proto (z hlediska obarvení) nezáleží na tom, zda je navíc sloučíme do w . Tím jsme dokázali, že po ubrání čehokoliv z D vznikne graf s barevností $k - 1$, takže D je k -kritický.

Nyní konečně můžeme dokázat uvedenou nerovnost. Zřejmě platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}d_G(u) &= d_A(u) + d_B(u), \\d_G(v) &= d_A(v) + d_B(v), \\d_C(u) &= d_A(u) + 1, \\d_C(v) &= d_A(v) + 1, \\d_D(w) &= d_B(u) + d_B(v).\end{aligned}$$

Protože v k -kritickém grafu platí $\delta \geq k - 1$, dostáváme

$$\begin{aligned}d_G(u) + d_G(v) &= d_A(u) + d_B(u) + d_A(v) + d_B(v) = \\&= \underbrace{d_C(u)}_{\geq k-1} + \underbrace{d_C(v)}_{\geq k-1} - 2 + \underbrace{d_D(w)}_{\geq k-1} \geq 3k - 5.\end{aligned}$$

□

Věta 1.11.18. (Brooks)

Necht' G je souvislý graf, a přitom G není ani klika ani kružnice liché délky. Potom $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Poznámka. Velmi snadno jsme již dokázali, že pro každý graf platí $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Nyní bude důkaz obtížnější.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že BÚNO lze důkaz provést pouze pro k -kritické grafy. Mějme tedy souvislý graf, ani kliku ani lichou kružnici, který navíc *není* k -kritický. Potom najdeme jeho vlastní k -kritický podgraf H . Platí tedy $\chi(H) = \chi(G) = k$ a zřejmě též $\Delta(H) \leq \Delta(G)$. Mohou nastat následující možnosti:

1. H není klika ani lichá kružnice. Potom použijeme naše tvrzení dokázané pro k -kritické grafy: $\chi(H) \leq \Delta(H)$. Z toho plyne

$$\chi(G) = \chi(H) \leq \Delta(H) = \Delta(G).$$

2. H je klika. Naše tvrzení použít nemůžeme, zato je nyní zřejmě $\Delta(H) < \Delta(G)$, protože H je vlastním podgrafem souvislého grafu G . Protože pro libovolný graf $\tilde{G}$ platí $\chi(\tilde{G}) \leq \Delta(\tilde{G}) + 1$, tak

$$\chi(G) = \chi(H) \leq \Delta(H) + 1 \leq \Delta(G).$$

3. H je lichá kružnice. Zde je zdůvodnění obdobné tomu v předchozím bodě: Každý vrchol grafu H má stupeň 2 a tak $\Delta(H) = 2$. Protože ale G je souvislý a H je vlastním podgrafem G , tak v G musí být na nějaký vrchol z kružnice H napojena alespoň jedna další hrana. To opět znamená $\Delta(H) < \Delta(G)$, zbytek je stejný.

Nyní dokážeme samotné tvrzení pouze pro k -kritické grafy, které ovšem budeme označovat opět jako „ G “. Platí tedy $k = \chi(G)$. Podle poznámky 1.11.12 je zřejmé, že $k \geq 4$, protože jinak by nebyly splněny předpoklady věty. Mohou nastat dvě možnosti:

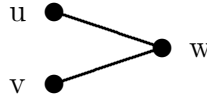
- a) Necht' v G existuje řez $S = \{u, v\}$. Potom podle předchozí věty platí

$$2\Delta(G) \geq d_G(u) + d_G(v) \geq 3k - 5 = 2k - 1 + \underbrace{k - 4}_{\geq 0} \geq 2k - 1.$$

Na levé straně nerovnosti však máme sudé číslo a na pravé straně je liché číslo. Proto samozřejmě musí platit i $2\Delta(G) \geq 2k$, neboli

$$\Delta(G) \geq k = \chi(G).$$

- b) Necht' v G neexistuje dvouprvkový řez. To znamená, že po odebrání libovolných dvou vrcholů u, v zůstává graf $G \setminus \{u, v\}$ souvislý. Z předpokladu „ G není klika“ najdeme v G vrcholy u, v , které nejsou spojeny hranou, takže jejich vzdálenost $d(u, v) \geq 2$. Tím pádem najdeme u, v i tak, že $d(u, v) = 2$. Označme jako w vrchol, přes který jsou spojeny.



Nyní očíslovujeme vrcholy grafu G speciálním způsobem.

- Označíme $v_1 = u, v_2 = v, v_n = w$.
- $v_3, v_4, v_5, \dots, v_n = w$ budou vrcholy grafu $G \setminus \{u, v\}$ uspořádané tak, že

$$(\forall i \in \{3, 4, \dots, n-1\}) (\exists j > i) (\{v_i, v_j\} \in E),$$

neboli z každého vrcholu $v_3, v_4, v_5, \dots, v_{n-1}$ vede v grafu $G \setminus \{u, v\}$ hrana do nějakého vrcholu, který je v uspořádání až za ním. Takové uspořádání vznikne například tak, že vrcholy $v_3, v_4, v_5, \dots, v_n$ seřadíme sestupně podle jejich vzdálenosti od vrcholu w v grafu $G \setminus \{u, v\}$, tj. budou splňovat

$$(\forall i, j \in \{3, 4, \dots, n\}) (i < j \Rightarrow d_{G \setminus \{u, v\}}(v_i, w) \geq d_{G \setminus \{u, v\}}(v_j, w)).$$

V tom případě zřejmě $v_n = w$.

Takto uspořádané vrcholy $v_1, \dots, v_n$ grafu G už lze obarvit nejvýše $\Delta(G)$ barvami, a to takto:

- Vrcholy $v_1 = u, v_2 = v$ dostanou barvu 1, což je možné, neboť spolu nesousedí.
- Vrcholy $v_3, v_4, \dots, v_{n-1}$ obarvujeme postupně první barvou, kterou je možné použít. Protože z každého z nich vede hrana do ještě neobarvených vrcholů, má každý z nich ve chvíli, když na něj přijde řada, nejvýše $\Delta(G) - 1$ již obarvených sousedů, a tak existuje barva $b \in \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$, kterou jej lze obarvit.
- Vrchol $v_n = w$ sousedí s vrcholy u, v , které mají oba barvu 1, a dále s nejvýše $\Delta(G) - 2$ dalšími vrcholy, které mají nejvýše $\Delta(G) - 2$ různých barev. Celkem tedy sousedí s nejvýše $\Delta(G)$ vrcholy, které mají nejvýše $\Delta(G) - 1$ různých barev, a tak jej lze také obarvit.

□

1.12 Planární grafy

Definice 1.12.1. Graf G nazveme **planárním** (rovinným) **grafem** (angl. *planar graph*), jestliže jej lze namalovat do roviny tak, že se žádné dvě jeho hrany nekříží jinde než ve svých koncových vrcholech.

Poznámka. Uvedená definice je pouze intuitivní. Korektní definice by byla zbytečně komplikovaná, neboť by vybočovala ze záměru přednášky, která je orientována na kombinatorickou stránku teorie grafů. Pro představu se o takovou definici *pokusíme*:

Nechť $\mathcal{C}$ je množina všech jednoduchých spojitých křivek v $\mathbb{R}^2$. Graf (bez násobných hran) G se nazývá **planární** právě tehdy, existuje-li prosté zobrazení $\varphi : V \cup \{\emptyset\} \mapsto \mathbb{R}^2 \cup \{\emptyset\}$ a zobrazení $\psi : E \mapsto \mathcal{C}$, takové že

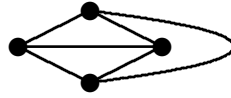
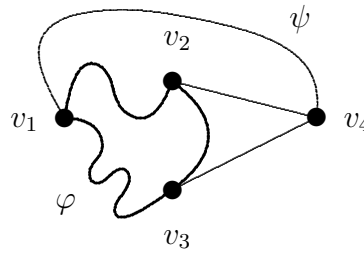
$$\varphi(\emptyset) = \emptyset,$$

$$(\forall e \in E, e = \{u_1, u_2\}) (\psi(e)_{orig} = \varphi(u_1) \wedge \psi(e)_{term} = \varphi(u_2)),$$

$$(\forall e, f \in E, e = \{u_1, u_2\}, f = \{v_1, v_2\}) (\psi(e) \cap \psi(f) = \varphi(e \cap f)),$$

kde ψ_{orig} je počáteční bod (angl. *origin*) křivky ψ a ψ_{term} je koncový bod (angl. *terminus*) křivky ψ .

Pro studium vlastností planárních grafů je potřeba rozumět topologii roviny, tj. lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$. Zde se omezíme na intuitivní chápání používaných pojmů.

Obrázek 1.12.1: K_4 nakreslený do rovinyObrázek 1.12.2: K_5 není planární

Poznámka 1.12.2. Jordanovou křivkou rozumíme jednoduchou uzavřenou spojitou křivku φ . Její **vnitřek** označujeme $\text{int } \varphi$, její **vnějšek** $\text{ext } \varphi$. **Jordanova věta** říká, že každá spojitá křivka ψ s počátkem v bodě $x \in \text{int } \varphi$ a koncem v bodě $y \in \text{ext } \varphi$ protíná křivku φ , tj $\varphi \cap \psi \neq \emptyset$. Tato skutečnost je téměř samozřejmá, její formální důkaz je však obtížný.

Příklad. K_4 je planární graf. To je vidět na obrázku 1.12.1.

Příklad. K_5 není planární.

Důkaz. Vezměme vrcholy v_1, v_2, v_3 a spojíme je hranami, jako na obrázku 1.12.2. Tyto hrany vytvoří Jordanovu křivku φ . Aby bylo možné spojit i vrcholy v_4 a v_5 , nemůže podle Jordanovy věty ležet $v_4 \in \text{int } \varphi$ a $v_5 \in \text{ext } \varphi$ nebo naopak. Necht' jsou tedy $v_4, v_5 \in \text{ext } \varphi$. Spojíme v_4 s v_1, v_2, v_3 , čímž se (podle obrázku) dostane vrchol v_2 do vnitřku křivky ψ tvořené hranami mezi vrcholy v_1, v_3, v_4 . Umístíme-li nyní vrchol v_5 do $\text{ext } \psi$, nebude možné jej spojit s v_2 . Umístíme-li jej někde do $\text{int } \psi$, nebude možné jej spojit s jedním z vrcholů v_1, v_3, v_4 . Pokud bychom předpokládali $v_4, v_5 \in \text{int } \varphi$, byl by další postup podobný. □

Poznámka. Uvedený důkaz je velice těžkopádný. Za chvíli vyslovíme větu, která umožní dokázat stejné tvrzení mnohem snáze. Její pomocí dále dokážeme, že také úplný bipartitní graf na $3+3$ vrcholech ($K_{3,3}$) není planární.

Definice 1.12.3. Necht' $G = (V, E)$, $e = \{u, v\} \in E$. Potom definujeme **dělení hrany** e jako graf

$$G \% e = (V \cup \{\alpha\}, E \setminus \{u, v\} \cup \{\{u, \alpha\}, \{\alpha, v\}\}),$$

kde $\alpha \notin V$.

Pozorování. G je planární $\Leftrightarrow G \% e$ je planární.

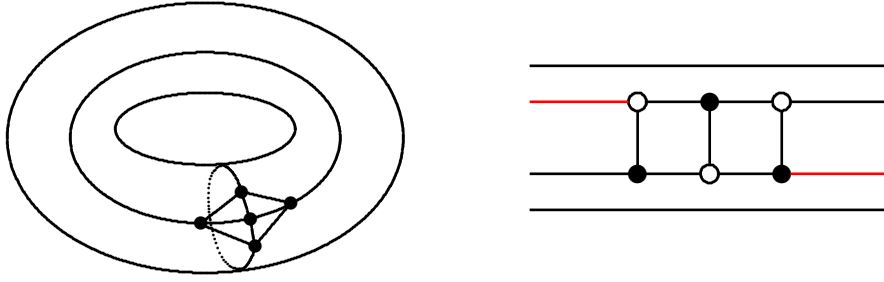
Definice 1.12.4. Graf H nazveme **dělením grafu** G , vznikne-li z G konečným počtem opakování operace dělení hrany.

Pozorování. Jestliže G obsahuje jako svůj podgraf dělení K_5 nebo $K_{3,3}$, tak G není planární.

Věta 1.12.5. (Kuratowski, 1930)

Graf G není planární právě tehdy, když obsahuje jako svůj podgraf dělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

Důkaz. Implikace $\Leftarrow$ je obsažena v předchozí poznámce. Implikaci $\Rightarrow$ dokazovat nebudeme. □

Obrázek 1.12.3: K_5 na toru a $K_{3,3}$ na Möbiově listu

Poznámka. (Zajímavost) Je otázka, jestli je každý graf G planární právě tehdy, jde-li namalovat na povrch koule či do jiných ploch.

Pro kouli uvedená ekvivalence platí, protože mezi rovinou a koulí (až na jeden její bod) existuje bijekce - takzvaná *stereografická projekce* π , definovaná následovně. Kouli B položíme na rovinu P . Označme jako z nejvyšší bod B , tj. průsečík B s kolmicí na P vedenou bodem dotyku B a P . Libovolný bod x na B kromě bodu z spojíme přímkou s bodem z . Její průsečík s rovinou P pak označíme jako $\pi(x)$. π pak představuje bijekci

$$\pi : B \setminus \{z\} \mapsto P.$$

Pro jiné plochy však už ekvivalence neplatí. Například K_5 je možné namalovat na torus a $K_{3,3}$ na Möbiův list, jak je vidět na obrázku 1.12.3. Zvláště v druhém případě je však třeba si uvědomit, že „namalovat na plochu“ znamená spíše „položít do plochy“, nikoliv namalovat na jednu stranu papíru. Pokud si vyrobíme Möbiův list z pásy papíru, jejíž jeden konec přetočíme o 180° a oba konce spojíme, musíme graf nakreslit na obě strany, jako kdyby byl papír průhledný.

Lze dokázat zobecnění Kuratowského věty, které zhruba tvrdí: Pro každou plochu existuje konečný počet „zakázaných“ grafů takových, že každý graf G lze namalovat do této plochy bez křížení hran, právě když G neobsahuje jako podgraf dělení nějakého zakázaného grafu.

Naopak, pro každý graf existuje plocha, do níž je možné jej namalovat bez křížení hran.

Věta 1.12.6. (Euler)

Pro každý konvexní mnohoúhelník platí:

$$(\text{počet vrcholů}) - (\text{počet hran}) + (\text{počet stěn}) = 2$$

Známa Eulerova věta se snadno dokáže pomocí následující věty:

Věta 1.12.7. *Necht' $G = (V, E)$ je souvislý planární graf. Označme $\Phi(G)$ počet oblastí, na něž se rozpadne rovina po namalování grafu G . Potom platí*

$$\#V - \#E + \Phi(G) = 2.$$

Poznámka. Rozmyslete si, zda je $\Phi(G)$ skutečně definováno jednoznačně, tj. že nezávisí na způsobu namalování grafu G .

Poznámka. Eulerova věta je přímým důsledkem naší věty. Převod konvexního mnohoúhelníku na souvislý planární graf provedeme tak, že odebereme jednu jeho stěnu. Ze zbytku vznikne zdeformovaná síť mnohoúhelníku, kterou zobrazíme do roviny. Odebraná stěna pak představuje vnějšek grafu, jdoucí v rovině do nekonečna.

Důkaz. Indukcí podle $\Phi(G)$:

$\Phi(G) = 1 \Leftrightarrow$ v G není kružnice $\Leftrightarrow G$ je strom. (Je zřejmé, že každý strom lze namalovat do roviny.) Ve stromu platí $\#E = \#V - 1$, takže po dosazení vyjde $\#V - \#E + \Phi(G) = \#V - (\#V - 1) + 1 = 2$.

Indukční krok: $\Phi(G) \geq 2 \Rightarrow$ existuje hrana $e \in E$, po jejíž stranách leží dvě různé oblasti roviny. Tuto hranu uберeme. Potom pro graf $G \setminus e$ je $\Phi(G \setminus e) = \Phi(G) - 1$. Počet oblastí se zmenší právě o 1, neboť dvě oblasti na obou stranách hrany e se spojí do jedné. Z indukčního předpokladu platí

$$\#V - (\#E - 1) + (\Phi(G) - 1) = 2$$

a z toho už vychází

$$\#V - \#E + \Phi(G) = 2.$$

□

Poznámka. Věta platí i pro grafy se smyčkami a násobnými hranami, které mají vliv na $\Phi(G)$. V dalším se však budeme zabývat již pouze grafy bez násobných hran a smyček.

Věta 1.12.8. *Necht' $G = (V, E)$ je souvislý planární graf (bez násobných hran a smyček), necht' $\#V = n \geq 3$. Potom*

$$\#E \leq 3\#V - 6.$$

Důkaz. Odhadneme shora i zdola součet

$$\sum_{i=1}^{\Phi(G)} \nu(\Omega_i),$$

kde sčítáme přes všechny oblasti roviny a $\nu(\Omega_i)$ vyjadřuje počet hran, které tvoří hranici oblasti Ω_i . Pro odhad zdola využijeme, že hranice každé oblasti je tvořena alespoň třemi hranami. Pro odhad shora naopak použijeme, že každá hrana může tvořit část hranice jen dvou různých oblastí, a nebo netvoří část žádné hranice. Proto

$$3\Phi(G) \leq \sum_{i=1}^{\Phi(G)} \nu(\Omega_i) \leq 2\#E.$$

Dosadíme-li nyní z předchozí věty za $\Phi(G)$, dostaneme

$$\begin{aligned} 3(2 + \#E - \#V) &\leq 2\#E \\ \#E &\leq 3\#V - 6. \end{aligned}$$

□

Důsledek. K_5 není planární.

Důkaz. K_5 nesplňuje nerovnost z předchozí věty. Platí pro něj totiž

$$\#E = \binom{5}{2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3\#V - 6.$$

□

Tvrzení. $K_{3,3}$ není planární.

Důkaz. Nyní nemůžeme přímo využít minulou větu, neboť $K_{3,3}$ má $\#V = 6$, $\#E = 9$ a nerovnost 1.12.8 splňuje. Pomůže nám ale dodatečný předpoklad. Je-li totiž G bipartitní, tak neobsahuje liché kružnice, takže hranice každé oblasti v rovině je tvořena nejméně čtyřmi hranami. Potom lze odvodit přísnější nerovnost:

$$4\Phi(G) \leq \sum_{i=1}^{\Phi(G)} \nu(\Omega_i) \leq 2\#E,$$

z čehož dostaneme

$$2\Phi(G) \leq \#E$$

a po dosazení za $\Phi(G)$ z věty 1.12.7 máme

$$\#E \leq 2\#V - 4.$$

Pro bipartitní graf $K_{3,3}$ však platí

$$\#E = 9 > 8 = 2 \cdot 6 - 4 = 2\#V - 4,$$

takže nemůže být planární. □

1.12.1 Barevnost planárních grafů

Věta 1.12.9. *Necht' $G = (V, E)$ je souvislý planární graf (bez násobných hran a smyček). Potom*

$$\delta(G) \leq 5.$$

Důkaz. Zřejmě

$$\delta(G) \cdot \#V \leq \sum_{v \in V} d_G(v) = 2\#E.$$

Z toho plyne

$$\delta(G) \cdot \#V \leq 2\#E \leq 2(3\#V - 6) = 6\#V - 12$$

$$\delta(G) \leq \frac{6\#V - 12}{\#V} = 6 - \frac{12}{\#V}$$

a protože $\delta(G) \in \mathbb{N}_0$, tak zřejmě $\delta(G) \leq 5$. □

Důsledek 1.12.10. *Je-li G planární, potom $\chi(G) \leq 6$.*

Důkaz. Indukcí podle počtu vrcholů $\#V$. Vezmeme vrchol $v \in V$, který má minimální stupeň. Potom

$$d_G(v) = \delta(G) \leq 5.$$

Graf $G \setminus v$ je z indukčního předpokladu možné obarvit 6 barvami. Když v opět přidáme, je jasné, že na něj jedna barva ze šesti vyjde, neboť má nejvýše 5 sousedů. □

Věta 1.12.11. *Je-li $G = (V, E)$ planární graf, potom $\chi(G) \leq 5$.*

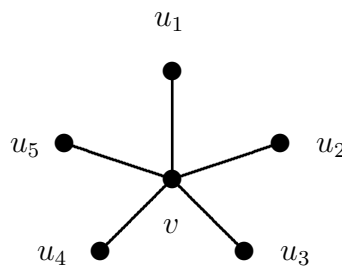
Důkaz. Sporem. Necht' $\chi(G) > 5$, takže podle předchozí věty $\chi(G) = 6$. BÚNO předpokládejme, že G je 6-kritický. Pokud tomu tak není, lze z něj ubírat hrany tak dlouho, dokud se 6-kritickým nestane, přičemž zřejmě bude stále planární.

Víme, že k -kritické grafy jsou souvislé a platí pro ně $\delta(G) \geq k - 1$. V našem případě máme

- G je planární $\Rightarrow \delta(G) \leq 5$,
- G je 6-kritický $\Rightarrow \delta(G) \geq 5$,

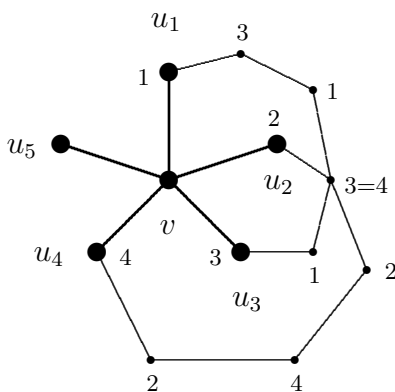
takže $\delta(G) = 5$. Vezmeme $v \in V$ takový, že $d_G(v) = 5$. Protože G je 6-kritický, tak $\chi(G \setminus v) = 5$ (z definice je $\chi(G \setminus v) \leq 5$, je ale jasné, že nemůže být $\chi(G \setminus v) < 5$) a navíc při každém vlastním obarvení grafu $G \setminus v$ pomocí 5 barev se na 5 sousedech vrcholu v musí vyskytovat všech 5 barev, jinak by i $\chi(G) = 5$, což by byl spor.

Necht' má tedy v sousedy $u_1, \dots, u_5$, kde u_i má (při nějakém pevném vlastním 5-vrcholovém obarvení φ) barvu i , a necht' jsou tyto vrcholy při namalování G rozmístěny jako na obrázku.



Uvažujme podgraf $G[\varphi^{-1}(1) \cup \varphi^{-1}(3)]$ grafu G indukovaný vrcholy s barvou 1 a 3. Potom u_1 a u_3 jsou ve stejné komponentě tohoto podgrafu. Pokud by tomu tak nebylo, zaměnili bychom např. v komponentě, ve které je u_1 , barvy 1 a 3. Obarvení celého grafu by zůstalo vlastní, ale pak u_1 by měl také barvu 3 a sousedé v by neměly 5 různých barev, což je spor. Proto existuje cesta z u_1 do u_3 pouze po vrcholech barvy 1 a 3. Toto tvrzení si pro účely poznámky za důkazem označme jako (*).

Ze stejného důvodu existuje cesta z u_2 do u_4 pouze po vrcholech barvy 2 a 4. Tyto cesty se musí někde protínat. Protože G je planární, musí to být v nějakém vrcholu, který pak má barvu $b \in \{1, 3\} \cap \{2, 4\}$, což je spor.



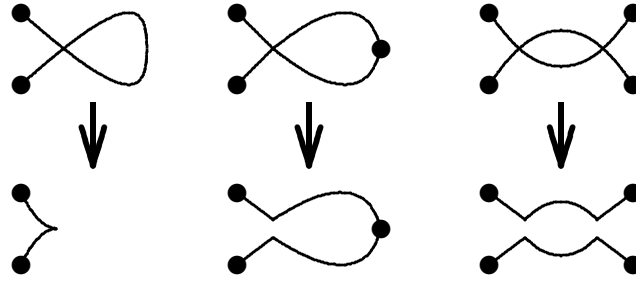
□

Poznámka. Vrchol u_5 jsme v důkazu vůbec nepoužili. Nabízí se otázka, zda by tedy stejným způsobem nešlo dokázat $\chi(G) \leq 4$.

Zkusíme tedy důkaz sporem. Necht' $\chi(G) > 4$, tj. $\chi(G) = 5$. Potom pro 5-kritický graf dostaneme $\delta(G) \geq 4$ a z planarity opět $\delta(G) \leq 5$. Proto $\delta(G) \in \{4, 5\}$.

- Pokud $\delta(G) = 4$, pak $(\exists v \in V) (d_G(v) = 4)$. Platí $\chi(G \setminus v) = 4$ a tím pádem při každém vlastním 4-vrcholovém obarvení $G \setminus v$ musí být na 4 sousedech v všechny 4 barvy. Důkaz až do konce je pak stejný, dostaneme spor s planaritou.
- Pokud $\delta(G) = 5$, pak $(\exists v \in V) (d_G(v) = 5)$ a situace vypadá přesně jako na prvním obrázku v důkazu věty. Platí ovšem opět $\chi(G \setminus v) = 4$ a tak při každém vlastním 4-vrcholovém obarvení $G \setminus v$ musí být na 5 sousedech v právě 4 barvy. Právě dva vrcholy z $u_1, \dots, u_5$ mají tedy stejnou barvu. Očíslujme si vrcholy tak, že při namalování G jdou čísla opět po sobě jako na obrázku, a vrchol u_5 má stejnou barvu jako jeden z vrcholů $u_1, \dots, u_4$, které tak mají 4 různé barvy. Takové očíslování vždy existuje. Potom nemusí platit (*): Jestliže totiž u_5 má barvu 3 a leží ve stejné komponentě grafu $G[\varphi^{-1}(1) \cup \varphi^{-1}(3)]$ jako u_1 a zaměníme-li barvy 1 a 3 v této komponentě, bude mít v stále 5 sousedů s právě 4 barvami a ke sporu nedojde. Pokud zaměníme barvy v komponentě, kde leží vrchol u_3 , budou mít sice u_3 i u_1 barvu 1, ale u_5 bude mít stále barvu 3 a opět ke sporu nedojde. Různé kombinace barvy a umístění vrcholu u_5 nám v obecném planárním grafu G nedovolí dokázat tvrzení (*) vždy nejvýše pro jednu z dvojic vrcholů u_1, u_3 a u_2, u_4 . Celkově tedy nelze důkaz nerovnosti $\chi(G) \leq 4$ tímto způsobem provést.

Poznámka. I když se nám nepodařilo dokázat $\chi(G) \leq 4$ pro každý planární graf, je známo, že toto tvrzení platí. Všichni jej známe v podobě „K obarvení každé politické mapy tak, aby žádné dva stejně barevné státy neměly společnou hranici (nenulové délky), stačí čtyři barvy.“ Dlouho však bylo uváděno pouze jako domněnka, teprve v roce 1976 jej dokázali K. Appel a W. Haken. Jeho důkaz si vyžádal použití počítače poté, co bylo toto tvrzení pro obecný planární graf transformováno na stejné tvrzení pro desítky speciálních případů, u kterých jej již bylo možné ověřit „hrubou silou“. Jen zmíněné transformace prý vydají na knihu o asi dvou stech stranách...



Obrázek 1.12.4: Zbytečné křížení hran a jeho odstranění

1.12.2 Minimální počet křížení v grafu

Definice 1.12.12. **Minimální počet křížení** (angl. *crossing number*) $\text{cr}(G)$ grafu G je minimální počet dvojic hran, které se po namalování grafu G do roviny kříží.

Poznámka. $\text{cr}(G)$ není počet průsečíků hran. G je planární právě tehdy, když $\text{cr}(G) = 0$.

Poznámka. Jak namalovat G s co nejmenším počtem křížení? Podívejme se na obrázek 1.12.4:

- Jedna hrana se nemusí křížit sama se sebou.
- Dvě hrany, které mají společný vrchol, se nemusejí křížit.
- Žádná dvojice hran se nemusí křížit více než jednou.

Věta 1.12.13. *Nechť $G = (V, E)$ je graf. Potom platí*

$$\#E - 3\#V + 6 \leq \text{cr}(G).$$

Důkaz. Namalujme graf G tak, že počet křížení v obrázku je právě $\text{cr}(G)$. Na místě každého křížení přidáme vrchol. Tím za každé křížení přibude 1 nový vrchol a 2 nové hrany. Dostaneme planární graf s počtem vrcholů $\#V + \text{cr}(G)$ a počtem hran $\#E + 2\text{cr}(G)$. Pro planární graf platí věta 1.12.8, tj. $\#E \leq 3\#V - 6$. Po dosazení našich hodnot máme

$$\#E + 2\text{cr}(G) \leq 3(\#V + \text{cr}(G)) - 6$$

a z toho už

$$\#E - 3\#V + 6 \leq \text{cr}(G).$$

□

Příklad. Pro $G = K_6$ platí $\#E = 15$, $\#V = 6$, takže vychází nerovnost $3 \leq \text{cr}(G)$. Podle obrázku 1.12.5 jsme schopni tři křížení dosáhnout, takže $\text{cr}(G) = 3$.

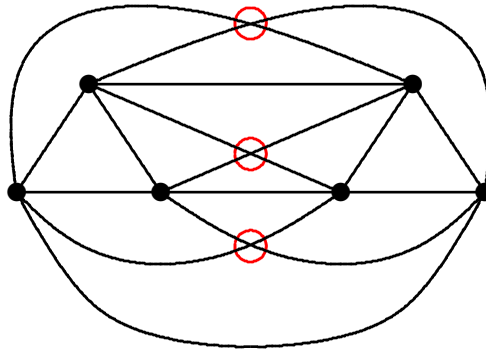
Věta 1.12.14. *Nechť $G = (V, E)$ je graf, $m = \#E$, $n = \#V$ a necht' $m \geq 4n$. Potom platí*

$$\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}.$$

Poznámka. Pro velký počet hran, tj. $m \approx n^2$ (nejvýše je $m = \binom{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$) tato věta dává mnohem silnější odhad $\text{cr}(G)$:

$$\text{cr}(G) \geq \text{konst} \cdot \frac{n^6}{n^2} = \text{konst} \cdot n^4 \approx \text{konst} \cdot m^2,$$

což je odhad kvadratický v počtu hran m .

Obrázek 1.12.5: Minimální počet křížení v grafu K_6

Důkaz. Provedeme tzv. *pravděpodobnostní* důkaz tohoto tvrzení. Tento typ důkazu se nám bude ještě mnohokrát hodit v druhé kapitole.

Namalujeme G tak, aby počet křížení byl $\text{cr}(G)$. Vezmeme zatím blíže neurčené $p \in [0, 1]$ a pro každý vrchol se nezávisle rozhodujeme, zda jej necháme v obrázku: Vrchol ponecháme s pravděpodobností p a odstraníme jej s pravděpodobností $1 - p$. Každá hrana zůstane v obrázku, pokud v něm zůstanou oba její koncové vrcholy. Stejně tak křížení zůstane v obrázku, pokud v něm zůstanou obě hrany, které jej tvoří. Výsledkem je obrázek nového grafu $G_p \subset G$. Označme si následující náhodné veličiny:

n_p počet ponechaných vrcholů, tj. počet vrcholů v G_p ,

m_p počet hran v G_p ,

X počet křížení v obrázku G_p .

X nemusí být rovno $\text{cr}(G_p)$, protože obrázek G_p vznikl jen odebráním některých částí obrázku původního grafu G . Proto podle předchozí věty platí

$$X \geq \text{cr}(G_p) \geq m_p - 3n_p + 6.$$

Z toho plyne, že i pro střední hodnoty platí (jestliže na pravé straně zanedbáme konstantu 6)

$$\mathbb{E}X \geq \mathbb{E}m_p - 3\mathbb{E}n_p. \quad (1.12.1)$$

Střední hodnoty jednotlivých veličin vyjádříme následovně. Pro každé $v \in V$ označíme elementární náhodnou veličinu

$$x_v = \begin{cases} 1 & v \in V(G_p) \\ 0 & v \notin V(G_p) \end{cases},$$

tj. x_v je indikátor jevu $v \in V(G_p)$. Potom $\forall v \in V$ platí

$$\mathbb{E}x_v = 1 \cdot \Pr(v \in V(G_p)) + 0 \cdot \Pr(v \notin V(G_p)) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

a protože $n_p = \sum_{v \in V} x_v$, tak

$$\mathbb{E}n_p = \sum_{v \in V} \mathbb{E}x_v = np.$$

Analogicky zavedeme indikátor y_e jevu $e \in E(G_p)$ pro každou $e \in E$. Potom $\forall e \in E$ platí $\mathbb{E}y_e = p^2$ a tak

$$\mathbb{E}m_p = mp^2.$$

Konečně totéž provedeme i pro křížení, přičemž podle konstrukce obrázku G_p v něm zůstává každé konkrétní křížení s pravděpodobností p^4 , takže $\mathbb{E}X = \text{cr}(G) \cdot p^4$. Po dosazení do (1.12.1) máme

$$\begin{aligned} \text{cr}(G) \cdot p^4 &\geq mp^2 - 3np \\ \text{cr}(G) &\geq \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3}, \end{aligned}$$

což musí platit pro každé $p \in [0, 1]$. Pokud nyní zvolíme $p = \frac{4n}{m} \leq 1$, dostaneme

$$\text{cr}(G) \geq \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3} = \frac{m^3}{16n^2} - 3\frac{m^3}{4^3n^2} = \frac{m^3}{n^2} \left(\frac{4}{4^3} - \frac{3}{4^3} \right) = \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}.$$

□

1.13 Vlastní čísla adjacenční matice grafu

V této poslední části první kapitoly shrneme některé vlastnosti adjacenční matice grafu. Budeme zde používat poznatků z předmětu Teorie matic (TEMA), který je ve studijním plánu zařazen do zimního semestru třetího ročníku a je povinný pro zaměření *Matematické modelování* a *Softwarové inženýrství*. Tyto poznatky nebudeme dokazovat, uvedeme je však ve formě poznámek a neočíslovaných definic. Rovněž pro úplnost stručně zopakujeme definici 1.1.14 a větu 1.2.6.

Definice. Bud' $G = (V, E)$ graf, $n = \#V$. **Adjacenční maticí** grafu G rozumíme matici $\mathbf{A}_G \in \{0, 1\}^{n,n}$, pro jejíž prvky platí

$$(\mathbf{A}_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Poznámka 1.13.1. Adjacenční matice má následující vlastnosti:

- $\mathbf{A}$ je reálná, nezáporná, symetrická. Ze symetrie plyne, že má reálné spektrum, a podle Schurovy věty pro normální matice (viz [5]) je unitárně diagonalizovatelná, tj. existuje unitární matice $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}$, neboli $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$) tak, že

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_G\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Protože $\mathbf{A}_G$ je reálná, jsou matice $\mathbf{P}, \mathbf{\Lambda}$ (konstruované v důkazu Schurovy věty) také reálné a tedy $\mathbf{P}$ je ortogonální. Její sloupce i řádky tvoří ortonormální (ON) bázi prostoru $\mathbb{R}^n$. Z toho, že $\mathbf{\Lambda}$ je reálná, je vidět i $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$, i když reálnost vlastních čísel symetrické matice je možné dokázat snadno i bez Schurovy věty.

- Protože spektrum matice ani stopa se podobnostními transformacemi nemění, platí $\text{Tr } \mathbf{A}_G = \sum \lambda_i$, kde λ_i jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}_G$. Protože ovšem $(\forall i \in \hat{n}) (\mathbf{A}_{ii} = 0)$, tak $0 = \text{Tr } \mathbf{A}_G = \sum \lambda_i$.
- Necht' $k \in \hat{n}$. Potom prvek $(\mathbf{A}_G^k)_{ij}$ je roven počtu sledů délky k z vrcholu v_i do vrcholu v_j . (věta 1.2.6)
- Uvědomíme-li si, jakým způsobem vzniká (i, j) -tý prvek matice $\mathbf{A}_G\mathbf{A}_G = \mathbf{A}_G^2$, tak ze symetrie $\mathbf{A}_G$ plyne $(\mathbf{A}_G^2)_{ii} = d_G(v_i)$. Lze uvažovat i podle předchozího bodu, že totiž $(\mathbf{A}_G^2)_{ii}$ je počet sledů délky 2 z v_i do v_i , a to je zřejmě právě $d_G(v_i)$.
- Protože

$$\text{Tr } (\mathbf{A}_G^2) = \text{Tr } (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_G^2\mathbf{P}) = \text{Tr } \left(\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_G\mathbf{P}}_{\mathbf{\Lambda}} \underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_G\mathbf{P}}_{\mathbf{\Lambda}} \right) = \text{Tr } \mathbf{\Lambda}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$

tak z předchozího bodu máme

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \text{Tr } (\mathbf{A}_G^2) = \sum_{i=1}^n d_G(v_i) = 2\#E.$$

Úmluva. Vlastní čísla matice $\mathbf{A}_G$ označme tak, aby byla uspořádána podle velikosti. Největší vlastní číslo označíme Λ :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \Lambda.$$

Ze Schurovy věty plyne, že pořadí diagonálních prvků matice $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_G \mathbf{P}$ je možné volit libovolně, proto BÚNO můžeme uvažovat

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ & & & \Lambda \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Spektrální normou matice $\mathbf{A}$ nazýváme číslo

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Její název pochází z platnosti vztahu

$$\|\mathbf{A}_G\| = \rho(\mathbf{A}),$$

kde $\rho(\mathbf{A})$ je spektrální poloměr matice $\mathbf{A}$.

Důkaz. (pro symetrickou nezápornou matici $\mathbf{A}_G$). Platí

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}_G \mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{P}}_{\mathbf{y}^T} \underbrace{\mathbf{P}^T \mathbf{A}_G \mathbf{P}}_{\mathbf{\Lambda}} \underbrace{\mathbf{P}^T \mathbf{x}}_{\mathbf{y}}. \text{ Protože } \mathbf{P} \text{ je ON, má } \mathbf{y} = \mathbf{P}^T \mathbf{x} \text{ také normu 1. Proto}$$

$$\begin{aligned} \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A}_G \mathbf{x} &= \max_{\|\mathbf{y}\|=1} \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \max_{\|\mathbf{y}\|=1} (y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \\ &= \max_{\|\mathbf{y}\|=1} \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \Lambda y_i^2 = \Lambda \sum_{i=1}^n y_i^2 = \Lambda. \end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A}_G \mathbf{x} \leq \Lambda.$$

Pokud ovšem zvolíme

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tj. jednička bude na posledním řádku odpovídajícím pozici vlastního čísla Λ , tak

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = \Lambda,$$

a tedy platí

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A}_G \mathbf{x} = \Lambda = \rho(\mathbf{A}_G).$$

□

Věta 1.13.2. Je-li graf G bipartitní, je spektrum jeho adjacenční matice symetrické kolem počátku na reálné ose.

Důkaz. Adjacenční matice bipartitního grafu má při vhodném uspořádání vrcholů tvar

$$\mathbf{A}_G = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Nechť nyní $\lambda \in \sigma(\mathbf{A}_G)$. Potom $\mathbf{A}_G \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ pro nějaké $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Blokově

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}.$$

Porovnáme-li jednotlivé bloky, dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{z} &= \lambda \mathbf{y}, \\ \mathbf{B}^T \mathbf{y} &= \lambda \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Nyní místo vektoru $\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$ vezmeme vektor $\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -\mathbf{z} \end{pmatrix}$. Pro něj platí

$$\mathbf{A}_G \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -\mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}\mathbf{z} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \mathbf{y} \\ \lambda \mathbf{z} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -\mathbf{z} \end{pmatrix}.$$

To ale znamená, že $-\lambda \in \sigma(\mathbf{A}_G)$ a k němu příslušný vlastní vektor je $\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -\mathbf{z} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$. □

Poznámka. Otázkou je, zda jsme mohli BÚNO předpokládat, že matice $\mathbf{A}_G$ má již vhodný blokový tvar, tj. zda při jiném uspořádání vrcholů se nezmění spektrum adjacenční matice grafu. Abychom dokázali odpovědět, nejdříve si uvědomme, že permutaci vrcholů grafu G odpovídá současná permutace řádků i sloupců jeho adjacenční matice. Tato dvojité permutace lze však vyjádřit součinem

$$\mathbf{A}'_G = \mathbf{P}^T \mathbf{A}_G \mathbf{P},$$

kde $\mathbf{P}$ je tzv. permutační matice.

Definice. Permutační matice je regulární matice $\mathbf{P} \in \{0, 1\}^{n,n}$ taková, že obsahuje právě n jedniček, tj. vznikne permutací řádků nebo sloupců jednotkové matice.

Poznámka. Je snadno vidět, že každý sloupec $\mathbf{P}$ má normu 1 a každé dva různé sloupce jsou navzájem kolmé. Proto platí

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I},$$

neboli $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$, takže $\mathbf{P}$ je ortogonální. Tím pádem ovšem $\mathbf{A}'_G = \mathbf{P}^T \mathbf{A}_G \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_G \mathbf{P}$, což znamená, že adjacenční matice G , kterou po zpermutování vrcholů označujeme $\mathbf{A}'_G$, je podobná původní matici $\mathbf{A}_G$. Proto má stejné spektrum.

Definice. Řekneme, že matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je **rozložitelná**, právě když existuje permutační matice $\mathbf{P}$ tak, že

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{22}$ jsou čtvercové bloky řádu nejméně 1. V opačném případě se $\mathbf{A}$ nazývá **nerozložitelnou** maticí.

Věta. Adjacenční matice grafu G je nerozložitelná právě tehdy, když G je souvislý.

Věta. Bud' $\mathbf{A}$ nezáporná nerozložitelná matice řádu $n \geq 2$. Potom $\rho(\mathbf{A}) \in \sigma(\mathbf{A})$ (to je (mimo jiné) obsahem Perron-Frobeniovy věty). Jestliže navíc existuje $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1, \alpha \neq 1$ takové, že $i\alpha\rho(\mathbf{A}) \in \sigma(\mathbf{A})$, potom existuje diagonální matice $\mathbf{D} = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$, $|\delta_i| = 1 \ \forall i \in \hat{n}$, taková, že

$$\mathbf{A}\mathbf{D} = \alpha\mathbf{D}\mathbf{A}.$$

Věta 1.13.3. Graf G je bipartitní, právě když je spektrum jeho adjacenční matice symetrické kolem počátku na reálné ose.

Důkaz. Jeden směr ekvivalence již obsahuje věta 1.13.2. Zbývá dokázat implikaci $\boxed{\Leftarrow}$.

1. Necht' G je souvislý, tj. $\mathbf{A}_G = (a_{ij})$ je nerozložitelná. Potom lze použít předchozí větu. Z předpokladu symetrie $\sigma(\mathbf{A})$ platí, že existuje matice $\mathbf{D} = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ taková, že

$$\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{A}. \quad (1.13.1)$$

Protože potom samozřejmě i $\mathbf{A}\gamma\mathbf{D} = \gamma\mathbf{D}\mathbf{A}$ pro každé $\gamma \neq 0$, lze BÚNO předpokládat $\delta_1 = 1$. Pokud nyní porovnáme prvky v (1.13.1) na (i, j) -tém místě takovém, že $\{i, j\} \in E$, tj. $a_{ij} = 1$, dostaneme

$$a_{ij}\delta_j = -\delta_i a_{ij},$$

takže $\delta_j = -\delta_i$. Protože G je souvislý, lze se z každého vrcholu dostat do každého, a tak postupnou aplikací právě odvozeného pravidla (s uvažováním $\delta_1 = 1$) dostaneme

$$(\forall i \in \hat{n}) (\delta_i = \pm 1).$$

Nyní provedeme rozklad množiny vrcholů:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{i \mid \delta_i = +1\}, \\ V_2 &= \{i \mid \delta_i = -1\}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že V_1 ani V_2 nejsou prázdné a že uvnitř V_1 ani V_2 nevede hrana, protože

$$(\forall i, j \in \hat{n}) (\{i, j\} \in E \Rightarrow \delta_j = -\delta_i).$$

2. Necht' G není souvislý, tj. $G = G_1 \cup \dots \cup G_l$, kde G_i ($i \in \hat{l}$) jsou jednotlivé komponenty grafu. Potom jeho vrcholy očíslováme tak, že vrcholy z jedné komponenty jsou bezprostředně za sebou. $\mathbf{A}_G$ bude mít tvar

$$\mathbf{A}_G = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{G_1} & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_{G_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{A}_{G_l} \end{pmatrix}.$$

Necht' $-\Lambda \in \sigma(\mathbf{A}_{G_i})$. Potom protože G_i je komponenta, tak $\mathbf{A}_{G_i}$ je nerozložitelná a z Perron-Frobeniovy věty také $\Lambda \in \sigma(\mathbf{A}_{G_i})$. Podle prvního bodu je tedy G_i bipartitní graf, a podle druhé implikace věty je celé spektrum $\mathbf{A}_{G_i}$ symetrické. Komponentu G_i můžeme tedy z G odstranit a adjacenční matice výsledného grafu bude mít stále symetrické spektrum. Tak postupně dokážeme, že všechny komponenty jsou bipartitní grafy. Tím pádem je i G bipartitní, stačí totiž definovat

$$V_1 = \bigcup_{i=1}^l V_1^i, \quad V_2 = \bigcup_{i=1}^l V_2^i.$$

□

Věta. Necht' $\mathbf{A} \geq 0$. Potom $\rho(\mathbf{A})$ je vlastní číslo $\mathbf{A}$ a vlastní vektor k němu lze volit nezáporný.

Věta 1.13.4. *Necht' G je graf, $\mathbf{A}_G$ jeho adjacenční matice, $\Lambda = \max \sigma(\mathbf{A}_G)$. Potom platí*

$$\delta(G) \leq \Lambda \leq \Delta(G).$$

Důkaz. Necht' $\mathbf{x}$ je nezáporný vlastní vektor matice $\mathbf{A}_G$ příslušný k vlastnímu číslu Λ . Zvolme jej tak, aby $\max_{i \in \hat{n}} x_i = 1$ a označme $k = \arg \max_{i \in \hat{n}} x_i$. Potom (když k jako index dole udává k -tou složku)

$$\Lambda = (\Lambda \mathbf{x})_k = (\mathbf{A}_G \mathbf{x})_k \leq \left(\mathbf{A}_G \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)_k = \begin{pmatrix} d_G(v_1) \\ \vdots \\ d_G(v_n) \end{pmatrix}_k \leq \Delta(G). \quad (1.13.2)$$

Pro důkaz druhé nerovnosti lze použít vlastnosti spektrální normy matice:

$$\begin{aligned} \Lambda = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &\geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)}_{\mathbf{x}_0^T} \mathbf{A}_G \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_0} = \frac{1}{n}(1, \dots, 1) \begin{pmatrix} d_G(v_1) \\ \vdots \\ d_G(v_n) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_G(v_i) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(G) = \delta(G). \end{aligned}$$

□

Poznámka. Kdy platí $\Lambda = \Delta(G)$? V (1.13.2) jsou celkem dvě nerovnosti, v obou musí platit rovnost. Co se týká pravé nerovnosti, musí $d_G(v_k) = \Delta(G)$. Rovnost v levé nerovnosti, tj.

$$(\mathbf{A}_G \mathbf{x})_k \leq \left(\mathbf{A}_G \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)_k,$$

znamená

$$(a_{k1}, \dots, a_{kn}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_{k1}, \dots, a_{kn}) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Víme, že $x_k = 1$. Uvedená nerovnost vynucuje, aby $x_j = 1$ pro každé i takové, že $a_{ki} = 1$. Potom lze ale (1.13.2) napsat i pro $k = i$, opět musí platit v obou nerovnostech rovnost, a z té pravé plyne $d_G(v_i) = \Delta(G)$. Jinými slovy, vrchol k i všichni jeho sousedi v_i musí mít stupeň roven $\Delta(G)$, přičemž $x_k = 1, x_i = 1$ pro každé $i \in \{j \in \hat{n} \mid v_j \in N(v_k)\}$. Úvahu lze tedy zopakovat pro všechny sousedy vrcholu v_k , takže i všichni sousedi všech sousedů v_k musí mít stupeň $\Delta(G)$ atd.

Důsledek 1.13.5. *Je-li G souvislý graf, tak platí*

$$(\Lambda = \Delta(G)) \Leftrightarrow (\delta(G) = \Lambda = \Delta(G)).$$

Kapitola 2

Rozšířený kurs teorie grafů

2.1 Brouwerova věta o pevném bodě

Následující věta má velmi zajímavý důkaz, který využívá jen jedinou maličkost z teorie grafů, a sice že součet všech stupňů vrcholů grafu je sudý. Přesto je zařazena do této přednášky jako příklad aplikace teorie grafů tam, kde bychom to možná nečekali.

Věta 2.1.1. (Brouwer)

Necht' f je spojitě zobrazení uzavřené koule $B \subset \mathbb{R}^d$ do B . Potom f má pevný bod, tj.

$$(\exists x \in B) (f(x) = x).$$

Poznámka. Pokud $d = 1$, je důkaz tvrzení snadný. Uzavřená koule reprezentuje uzavřený interval na reálné ose. Vezměme tedy například

$$f : [0, 1] \mapsto [0, 1].$$

Definujme

$$g(x) = f(x) - x$$

a ptejme se, zda existuje $x \in [0, 1]$ takové, že $g(x) = 0$. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} g(0) = f(0) - 0 &\geq 0, \\ g(1) = f(1) - 1 &\leq 0. \end{aligned}$$

Protože f je spojitá funkce, je i g spojitá a proto nutně $(\exists x \in [0, 1]) (g(x) = 0)$.

Skutečný důkaz Brouwerovy věty provedeme detailně jen pro $d = 2$. Pro obecné d je myšlenka důkazu stejná, ale technické detaily jsou komplikovanější: Ukážeme totiž platnost věty pro trojúhelník místo pro kouli v $\mathbb{R}^2$ (což je kruh). Pro obecné d bychom větu dokazovali pro d -simplex místo pro kouli v $\mathbb{R}^d$.

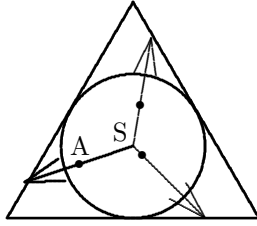
Nejprve předvedeme, jak platnost tvrzení pro trojúhelník implikuje jeho platnost pro kruh. Existuje totiž spojitá bijekce φ kruhu B na trojúhelník T , což můžeme vidět na obrázku 2.1.1. Kruhu s poloměrem r opíšeme libovolný trojúhelník. Každý bod A v kruhu B kromě středu spojíme se středem S polopřímku p , která protíná kružnici B ve vzdálenosti r od S a trojúhelník T ve vzdálenosti t od S . Hodnotu $\varphi(A)$ pak definujeme jako bod na p ve vzdálenosti $\frac{t}{r} |\overline{AS}|$ od S .

Necht' nyní $f : B \mapsto B$ je spojitě zobrazení. Potom zobrazení $h = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ je $h : T \mapsto T$ a je spojitě. Podle Brouwerovy věty dokázané pro trojúhelník existuje $x \in T$ takový, že $h(x) = x$, neboli $\varphi(f(\varphi^{-1}(x))) = x$. Potom ale

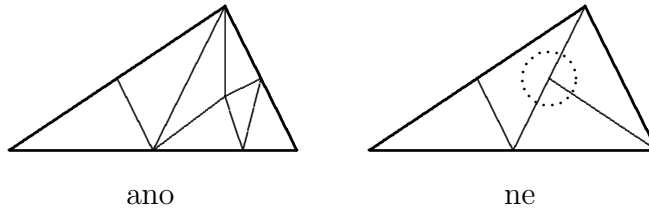
$$f(\varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(x),$$

takže $\varphi^{-1}(x) \in B$ je pevným bodem zobrazení f .

Dále tedy budeme směřovat k důkazu Brouwerovy věty pro trojúhelník.



Obrázek 2.1.1: Bijekce kruhu na trojúhelník



Obrázek 2.1.2: „Správná“ a „nesprávná“ triangulizace

Definice 2.1.2. Necht' T je trojúhelník. Trojúhelníky $T_1, T_2, \dots, T_k$ nazveme **triangulací** (angl. *simplicial subdivision*) trojúhelníku T , jestliže $\bigcup_{i=1}^k T_i = T$ a pro každé $i, j \in \hat{k}, i \neq j$ je $T_i \cap T_j$ buď $\emptyset$, nebo společný vrchol trojúhelníků T_i a T_j , nebo společná strana trojúhelníků T_i a T_j .

Příklad. V levém trojúhelníku na obrázku 2.1.2 je vytvořena triangulace, v pravém však nikoliv, neboť některé trojúhelníky mají průnik tvořící jen část strany jednoho z nich.

Definice 2.1.3. Bud' T trojúhelník s vrcholy e_1, e_2, e_3 , necht' $T_1, T_2, \dots, T_k$ je jeho triangulace. Obarvení vrcholů trojúhelníků $T_1, T_2, \dots, T_k$ barvami 1, 2, 3 se nazývá **vlastní**, jestliže pro každé $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$ platí

1. e_i má barvu i ,
2. vrcholy trojúhelníků ležící na úsečce $\overline{e_i e_j}$ mají barvu i nebo j .

Barvy vrcholů uvnitř trojúhelníku T nejsou důležité.

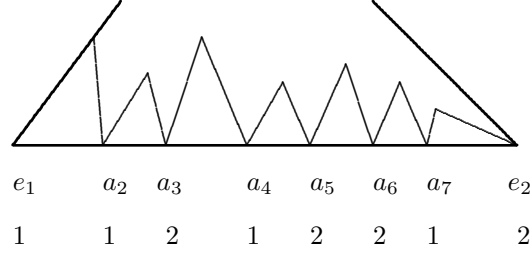
Lemma 2.1.4. (Sperner, 1928)

Necht' T je trojúhelník, $T_1, T_2, \dots, T_k$ jeho triangulace. Potom při každém vlastním obarvení vrcholů trojúhelníků $T_1, T_2, \dots, T_k$ barvami 1, 2, 3 existuje $i \in \hat{k}$ takové, že T_i má vrcholy obarveny všemi třemi barvami.

Důkaz. Dané triangulizaci přiřadíme graf $G = (V, E)$, jenž bude zkonstruován takto:

- Množina vrcholů V grafu G bude tvořena trojúhelníky $T, T_1, T_2, \dots, T_k$.
- Množina hran bude splňovat následující dvě podmínky:
 - $\{T_i, T_j\} \in E$, právě když $T_i \cap T_j$ je jejich společná strana, jejíž konce jsou vrcholy (trojúhelníků) obarvené právě oběma barvami 1 a 2.
 - $\{T, T_i\} \in E$, právě když T_i má stranu s koncovými vrcholy obarvenými oběma barvami 1 a 2 a tato strana leží ve straně trojúhelníka T (jejíž koncové vrcholy jsou tedy také obarveny barvami 1 a 2).

Je jasné, že pro stupně vrcholů T_i grafu G platí $0 \leq d_G(T_i) \leq 2$ pro každé $i \in \hat{k}$. Není totiž možné, aby všechny tři strany trojúhelníka měly konce obarvené oběma barvami 1 a 2. Stupeň T jako vrcholu grafu G je svázán s pokrytím strany $\overline{e_1 e_2}$ trojúhelníky z triangulace:



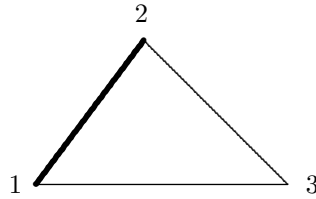
Předpokládejme, že na hraně $\overline{e_1 e_2}$ jsou zleva doprava uspořádány vrcholy

$$e_1 = a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, a_l = e_2.$$

Jestliže barva a_j se liší od barvy a_{j+1} , tak podle definice grafu G je trojúhelník T_i , který má jako jednu z hran úsečku $\overline{a_j a_{j+1}}$, v hraně s T . Každá změna barvy vrcholu $1 \rightarrow 2$ nebo $2 \rightarrow 1$ při procházení strany $\overline{e_1 e_2}$ zleva doprava tedy přispívá jedničkou ke stupni T . Protože ale $e_1 = a_1$ má barvu 1 a $e_2 = a_l$ má barvu 2, tak těchto změn je lichý počet. Stupeň T je tedy lichý. Nyní využijeme, že

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{i=1}^k d_G(T_i) + d_G(T) = 2\#E,$$

takže součet $\sum_{i=1}^k d_G(T_i) + d_G(T)$ je sudý. Tím pádem $\sum_{i=1}^k T_i$ je lichý. Existuje tedy další vrchol grafu G (tj. trojúhelník triangulace T_i) s lichým stupněm, který tak musí být roven 1. Jinými slovy, tento trojúhelník má v G jen jediného souseda, což znamená, že dva jeho vrcholy mají barvy 1 a 2, ale třetí vrchol už musí mít barvu 3:



□

Nyní už můžeme dokázat přímo Brouwerovu větu:

Důkaz. Mějme tedy trojúhelník T s vrcholy e_1, e_2, e_3 v lineárním prostoru $\mathbb{R}^2$. Každý bod $x \in T$ můžeme vyjádřit jako konvexní kombinaci

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

kde

$$\alpha_i \geq 0,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1. \quad (2.1.1)$$

Označme si obecně pro libovolný $x \in T$ i -tou souřadnici bodu x v uvedené konvexní kombinaci jako $\alpha_i(x)$. Obdobně

$$f(x) = \alpha'_1 e_1 + \alpha'_2 e_2 + \alpha'_3 e_3,$$

kde

$$\alpha'_i \geq 0,$$

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 = 1. \quad (2.1.2)$$

Označme si obdobně i -tou souřadnici $f(x)$ v konvexní kombinaci bodů e_1, e_2, e_3 jako $\alpha'_i(x)$. Je-li x pevným bodem zobrazení f , potom $\alpha'_i(x) = \alpha_i(x)$ pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$.

Postupujme sporem, tj. předpokládejme, že f nemá pevný bod. Potom lze korektně definovat obarvení každého bodu $x \in T$ jako zobrazení

$$b(x) := \min \{i \in \{1, 2, 3\} \mid \alpha_i(x) > \alpha'_i(x)\}. \quad (2.1.3)$$

Pro toto obarvení platí:

- $(\forall i \in \{1, 2, 3\}) (b(e_i) = i)$. Například $e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$, takže s přihlédnutím k (2.1.1) a (2.1.2) nutně $\alpha_1(e_1) > \alpha'_1(e_1)$.
- Dále $(\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j) (x \in \overline{e_i e_j} \Rightarrow b(x) \in \{i, j\})$. Například každé $x \in \overline{e_1 e_2}$ má barvu 1 nebo 2. Pro takové x je totiž $\alpha_3(x) = 0$, takže nemůže být $\alpha_3(x) > \alpha'_3(x)$.

Zvolme nyní posloupnost triangulací trojúhelníku T označenou

$$T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, \dots, T_{k_n}^{(n)}$$

tak, že pro $n \rightarrow \infty$ jde maximum obvodů trojúhelníků z n -té triangulace k nule. Obarvíme-li všechny vrcholy v triangulaci podle zobrazení b , bude se jednat o vlastní obarvení. Podle Spernerova lemmatu existuje pro každé n trojúhelník $T_{i_n}^{(n)}$, který má vrcholy obarveny všemi třemi barvami. Označme

x_n vrchol $T_{i_n}^{(n)}$ s barvou 1,

y_n vrchol $T_{i_n}^{(n)}$ s barvou 2,

z_n vrchol $T_{i_n}^{(n)}$ s barvou 3.

Protože T je kompaktní množina, existuje konvergentní podposloupnost $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ vybraná z $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, kterou budeme nadále označovat opět jako $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. To samé platí pro posloupnosti $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Necht' w je limita posloupnosti $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Potom však

$$y_n = \underbrace{y_n - x_n}_{\rightarrow 0} + x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w$$

a stejně tak

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w.$$

Protože x_n má pro každé n barvu 1, tak podle (2.1.3) platí $\alpha_1(x) > \alpha'_1(x)$. Protože f je spojitá, je i souřadnice $\alpha'_1(x)$ spojitou funkcí $\alpha_1(x)$ (a rovněž ostatních souřadnic), takže v limitě platí

$$\alpha_1(w) \geq \alpha'_1(w).$$

Pro ostatní souřadnice však dostaneme z vlastností y_n a z_n stejný vztah:

$$\begin{aligned} \alpha_2(w) &\geq \alpha'_2(w), \\ \alpha_3(w) &\geq \alpha'_3(w). \end{aligned}$$

Po sečtení všech nerovností dostaneme

$$1 = \alpha_1(w) + \alpha_2(w) + \alpha_3(w) \geq \alpha'_1(w) + \alpha'_2(w) + \alpha'_3(w) = 1$$

a proto musí platit rovnosti $\alpha_i(w) = \alpha'_i(w)$ pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$. To ale znamená, že $f(w) = w$, což je spor. $\square$

2.2 Pravděpodobnostní důkazy v teorii grafů

Následující věty udávají příklady tvrzení dokazatelných pomocí tzv. pravděpodobnostních důkazů. Jeden takový jsme již viděli u věty 1.12.14. Jiné důkazy tohoto typu se vyskytnou i dále, tyto věty však byly první, u nichž jsme se v průběhu přednášky s pravděpodobnostními důkazy setkali. Na jejich tvrzení již další látka nezávisí, a proto mají skutečně spíše demonstrativní účel. Jsou zde tedy zařazeny do poněkud umělé podkapitoly.

Věta 2.2.1.

$$\frac{\text{počet bipartitních grafů na } n \text{ vrcholech}}{\text{počet všech grafů na } n \text{ vrcholech}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Důkaz. Bud' $G = (\hat{n}, E)$ náhodný graf na n vrcholech. To znamená, že E vznikne tak, že $\forall i, j \in \hat{n}, i \neq j$ je $\{i, j\} \in E$ s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ (pro každé dva vrcholy si hodíme mincí, a pokud padne líc, spojíme je hranou). Ptejme se, jaká je pravděpodobnost, že pro pevně daný rozklad $\hat{n} = V_1 \cup V_2$ ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a $V_1, V_2 \neq \emptyset$) platí $E \cap \binom{V_1}{2} = \emptyset, E \cap \binom{V_2}{2} = \emptyset$, tj. že ve V_1 ani ve V_2 nevede hrana.

Označme $k = \#V_1$. Potom tato pravděpodobnost je rovna

$$P_{V_1, V_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n-k}{2}},$$

protože $\binom{k}{2}$ je počet různých dvojic vrcholů ve V_1 a $\binom{n-k}{2}$ je počet různých dvojic vrcholů ve V_2 .

G je bipartitní právě tehdy, když existuje rozklad $\hat{n} = V_1 \cup V_2$ takový, že ve V_1 ani ve V_2 nevedou hrany. Využijeme-li známý vztah z teorie pravděpodobnosti platný pro jevy A_j

$$\Pr\left(\bigcup A_j\right) \leq \sum \Pr A_j,$$

můžeme odhadnout pravděpodobnost P , že G je bipartitní:

$$P \leq \sum_{\substack{\emptyset \neq V_1 \subsetneq \hat{n} \\ V_2 = \hat{n} \setminus V_1}} P_{V_1, V_2} = \sum_{\substack{\emptyset \neq V_1 \subsetneq \hat{n} \\ V_2 = \hat{n} \setminus V_1 \\ k = \#V_1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n-k}{2}} \leq \dots$$

Nyní použijeme nerovnost $\binom{n/2}{2} \leq \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2}$, která je zřejmá, protože pro každé k je $k \geq \frac{n}{2}$ nebo $(n-k) \geq \frac{n}{2}$.

$$\dots \leq \sum_{\substack{\emptyset \neq V_1 \subsetneq \hat{n} \\ V_2 = \hat{n} \setminus V_1 \\ k = \#V_1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n/2}{2}} \leq \sum_{V_1 \subset \hat{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n/2}{2}} = 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n/2}{2}} = 2^{n - \binom{n/2}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Pravděpodobnost, že na n vrcholech náhodně vybereme graf, který je bipartitní, tedy klesá s rostoucím n k nule. Protože pravděpodobnost a relativní četnost v limitě (se vzrůstajícím počtem možných jevů) splývají, dokázali jsme tím i tvrzení věty. $\square$

Věta 2.2.2. (Existence velkých bipartitních grafů)

Nechť $G = (V, E)$ je (pevně daný) graf na $2n$ vrcholech. Potom existuje rozklad $V = A \cup B$ takový, že $\#A = \#B = n$ a navíc počet hran mezi A a B je alespoň $\frac{1}{2}\#E$.

Důkaz. Vybereme náhodně podmnožinu A velikosti n , zvolíme $B = V \setminus A$. Zavedeme náhodnou veličinu $X = X(A)$ jako počet hran mezi A a B . Když nyní ukážeme, že střední hodnota $EX > \frac{1}{2}\#E$, pak musí existovat konkrétní realizace A tak, že $X(A) \geq \frac{1}{2}\#E$, a tím bude důkaz hotov. Tuto myšlenku využijeme i u důkazů dalších vět.

Pro každou hranu $e \in E$ zavedeme náhodnou veličinu (indikátor jevu)

$$I_e = \begin{cases} 1 & e \text{ vede mezi } A \text{ a } B \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Potom

$$X = \sum_{e \in E} I_e.$$

Střední hodnota je z definice lineární funkcionál, takže

$$EX = \sum_{e \in E} E(I_e), \quad (2.2.1)$$

přičemž

$$E(I_e) = 1 \cdot \Pr(I_e = 1) + 0 \cdot \Pr(I_e = 0) = \Pr(I_e = 1) = \Pr(e \text{ vede mezi } A \text{ a } B) = 2 \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n}{2n-1} > \frac{1}{2}.$$

Kombinatorickou úvahu vysvětlíme. Necht' $e = \{u, v\}$. Potom $\binom{2n-2}{n-1}$ je počet výběrů množiny A tak, že (právě) $u \in A$ a (právě) $v \notin A$. Tyto dva vrcholy jsou totiž dány pevně a potom už do A vybíráme jen $n-1$ vrcholů ze zbylých $2n-2$. Dále $2\binom{2n-2}{n-1}$ je počet výběrů množiny A tak, že jeden vrchol (u nebo v) hrany e leží v A a ten druhý neleží. Konečně $\binom{2n}{n}$ je počet všech různých výběrů množiny A .

Pokud nyní dosadíme do (2.2.1), dostaneme

$$EX = \#E \cdot E(I_e) > \frac{1}{2} \#E.$$

□

2.3 Extremální teorie grafů

Věty z extremální teorie grafů vyjadřují vztahy typu

- „jistý počet něčeho už vynucuje něco“ nebo
- „kolik něčeho může být, aby platilo něco“

2.3.1 Turánova věta

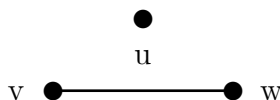
Věta 2.3.1. (Turán, 1943)

Necht' $G = (V, E)$ je graf, který neobsahuje kliku velikosti p (viz. definice 1.11.3), tj. K_p není podgrafem G . Potom

$$\#E \leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right). \quad (2.3.1)$$

Důkazů Turánovy věty existuje řada, my postupně provedeme důkaz založený na následujícím lemmatu:

Lemma 2.3.2. Necht' G je graf (na pevném počtu vrcholů) neobsahující K_p s maximálním počtem hran. Potom v G neexistuje trojice vrcholů u, v, w takových, že $\{v, w\} \in E$ a přitom $\{u, v\} \notin E, \{u, w\} \notin E$.



Důkaz. Nejprve provedme pomocnou úvahu: Bud' $G = (V, E)$ bez K_p , necht' $x \in V$. Sestrojme graf

$$G' = (V \cup \{x'\}, E \cup \{\{v, x'\} \mid v \in V \wedge \{v, x\} \in E\}),$$

pro nějž $\forall v \in V$ platí $\{x, v\} \in E(G') \Leftrightarrow \{x', v\} \in E(G')$. Vrcholy x a x' jsou tedy v G' zcela rovnocenné. Protože $\{x, x'\} \notin E(G')$, tak G' nemůže obsahovat K_p . V K_p by totiž musel být buď jen vrchol x , nebo jen vrchol x' , což je spor, protože v tom případě by musela klika K_p existovat už v G .

Nyní postupujeme sporem. Necht' v G existuje trojice vrcholů u, v, w daných vlastností. Potom mohou nastat dvě možnosti:

1. $d_G(u) < d_G(v)$ nebo $d_G(u) < d_G(w)$ (necht' BÚNO $d_G(u) < d_G(v)$). V tomto případě ke grafu G přidáme právě popsaným způsobem vrchol v' a ubereme vrchol u (i se všemi hranami, které do něj vedly). Nově vytvořený graf neobsahuje K_p , ale přitom má o

$$d_G(v') - d_G(u) = d_G(v) - d_G(u) > 0$$

hran více než G , což je spor s maximálním počtem hran grafu G .

2. $d_G(u) \geq d_G(v)$ a $d_G(u) \geq d_G(w)$. V tomto případě ke G přidáme kopie u', u'' a ubereme vrcholy v, w . Nový graf opět neobsahuje K_p a má o

$$2d_G(u) - d_G(v) - d_G(w) + 1 > 0$$

hran více než G , což je spor. Jedničku přičítáme proto, že $\{v, w\} \in E$, a odečtením stupňů vrcholů v, w jsme tuto hranu odečetli od celkového počtu hran dvakrát.

□

Důsledek. Relace $\oslash$ na množině vrcholů V grafu G s vlastnostmi z minulého lemmatu definovaná jako

$$(u \oslash v) \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$$

je ekvivalence na V .

Důkaz. Symetrie a reflexivita relace $\oslash$ jsou zřejmé. Tranzitivitu pak vyjadřuje předchozí lemma:

$$\{v, u\} \notin E \wedge \{u, w\} \notin E \Rightarrow \{v, w\} \notin E.$$

□

Nyní přikročíme přímo k důkazu tvrzení Turánovy věty.

Důkaz. Mějme tedy $G = (V, E)$ bez K_p , s maximálním počtem hran. Bude-li platit (2.3.1) pro tento G , bude platit i pro libovolný jiný graf bez K_p (s nejvýše stejným počtem hran). V je rozdělena na třídy ekvivalence podle relace $\oslash$

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s,$$

přičemž z definice $\oslash$ platí:

•

$$(\forall i \in \hat{s}) (\forall u, v \in V_i) (\{u, v\} \notin E), \quad (2.3.2)$$

•

$$(\forall i, j \in \hat{s}, i \neq j) (\forall u \in V_i) (\forall v \in V_j) (\{u, v\} \in E). \quad (2.3.3)$$

Mezi každými dvěma vrcholy z různých tříd tedy vedou hrany, ale v jedné třídě není hrana mezi žádnými dvěma vrcholy.

Počet tříd je $s = p - 1$. Kdyby jich totiž bylo alespoň p , bylo by možné vybrat z každé z nich jeden vrchol, a vybraná podmnožina V by tvořila kliku velikosti $s \geq p$, takže by v G existovala i $K_p \subset K_s \subset G$. Kdyby jich naopak bylo méně než $p - 1$, potom bychom mohli jednu třídu ekvivalence rozbít na dvě (přidat hrany mezi odpovídajícími množinami vrcholů), a stále by graf neobsahoval K_p (je jasné, že různé vrcholy z K_p musí ležet v různých třídách V_i). To by ale byl spor s maximalitou počtu hran v G .

V se tedy skládá z $p - 1$ podmnožin $V_1, \dots, V_{p-1}$ s vlastnostmi (2.3.2) a (2.3.3). Označme si $k_i = \#V_i$ pro každé $i \in \widehat{p-1}$. Potom

$$n = \sum_{i=1}^{p-1} k_i.$$

Počet hran mezi V_i a V_j pro $i \neq j$ je zřejmě $k_i k_j$, takže počet hran v celém grafu je

$$\sum_{1 \leq i < j \leq p-1} k_i k_j \quad (2.3.4)$$

a přitom v G je počet hran maximální mezi všemi grafy na $n = \#V$ vrcholech, které neobsahují K_p . Je tedy maximální i mezi takovými z nich, které mají stejný „tvar“ jako G : jejich množina vrcholů je nějak rozdělena na $p - 1$ neprázdných disjunktních podmnožin, které splňují (2.3.2) a (2.3.3). Přitom každý graf, který splňuje tyto podmínky, neobsahuje K_p . Každý z těchto grafů je navíc jednoznačně (až na izomorfismus) určen $(p - 1)$ -ticí $(k_1, \dots, k_{p-1})$. Počet hran v G je potom možno vyjádřit jako

$$\max \left(\sum_{1 \leq i < j \leq p-1} k_i k_j \right)$$

za podmínky

$$n = \sum_{i=1}^{p-1} k_i, \quad k_i \in \mathbb{N}_0.$$

Maxima počtu hran se však nabyde právě tehdy, když počet „nehran“ (dvojic vrcholů, mezi nimiž nevede hrana) bude minimální. Ekvivalentně tak lze hledat

$$\min \left(\sum_{i=1}^{p-1} \binom{k_i}{2} \right)$$

za stejných podmínek, což bude jednodušší. Protože chceme pouze shora odhadnout skutečný počet hran v G , vyřešíme úlohu minima bez podmínky na celočíselnost proměnných k_i . Hledáme tedy vázaný extrém funkce

$$f(x_1, \dots, x_{p-1}) = \sum_{i=1}^{p-1} \binom{x_i}{2} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{2} x_i (x_i - 1)$$

za podmínky

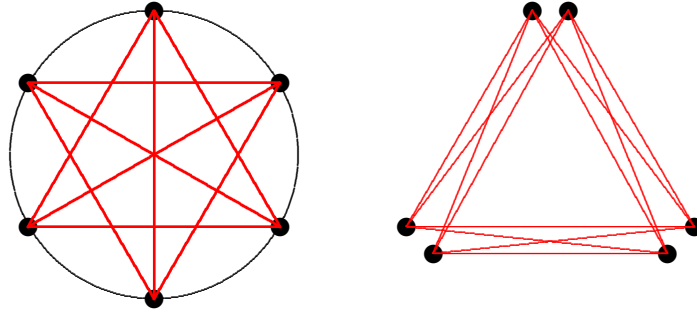
$$\sum_{i=1}^{p-1} x_i = n.$$

Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$\Lambda(x_1, \dots, x_{p-1}) = f(x_1, \dots, x_{p-1}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{p-1} x_i - n \right)$$

a po zderivování a položení $(\forall i \in \widehat{p-1}) (\partial_i \Lambda = 0)$ dostaneme

$$0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = x_i - \frac{1}{2} - \lambda \Rightarrow x_i = \lambda + \frac{1}{2}.$$



Obrázek 2.3.1: Páry vzdálených bodů v rovině

Pokud dosadíme do podmínky vazby, vyjde $\lambda = \frac{n}{p-1} - \frac{1}{2}$, takže pro všechna x_i platí

$$x_i = \frac{n}{p-1}.$$

Lze snadno ověřit, že se skutečně jedná o minimum, výpočtem (tzv. Hessoxy) matice $\mathbf{H} = \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_i \partial x_j} \right)$. Platí $\mathbf{H} = \mathbf{I}$, což je zřejmě pozitivně definitní matice.

Dosadíme-li nyní za x_i do $\sum_{1 \leq i < j \leq p-1} x_i x_j$, získáme horní odhad skutečného počtu hran (2.3.4). Všechny sčítance v sumě jsou stejné a jejich počet je $\binom{p-1}{2}$, takže horní odhad počtu hran vychází jako

$$\left(\frac{n}{p-1} \right)^2 \binom{p-1}{2} = \frac{n^2}{(p-1)^2} \frac{(p-1)(p-2)}{2} = \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1} \right),$$

což je přesně (2.3.1). $\square$

Poznámka. Důkaz Turánovy věty také ukazuje, jak graf s co největším počtem hran, a přitom bez K_p , zkonstruovat. Například graf neobsahující K_3 s maximálním počtem hran bude úplný bipartitní s množinou vrcholů V rozdělenou na podmnožiny s počty vrcholů $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

V následujícím ukážeme jednu z aplikací Turánovy věty.

Definice. Necht' $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$ je množina bodů v rovině. **Průměrem** (diameterem) množiny S rozumíme číslo

$$\text{diam } S = \max_{i,j \in \hat{n}} \|x_i - x_j\|.$$

Poznámka. Necht' $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$, $\text{diam } S \leq 1$, $d \in (0, 1)$. Otázkou je, kolik párů bodů x_i, x_j má vzdálenost $\geq d$, a jestli tento počet lze jiným uspořádáním bodů $x_1, \dots, x_n$ zvýšit. Jako příklad si vezmeme $n = 6$, $d = \frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\binom{6}{2} = 15$ různých párů. Na obrázku 2.3.1 jsou páry od sebe vzdálených bodů spojeny čarami. Vlevo má 9 párů vzdálenost $\geq d$ a 6 párů vzdálenost $< d$, vpravo má 12 párů vzdálenost $\geq d$ a jen 3 páry vzdálenost $< d$. Obecně omezuje počet vzdálených párů následující věta.

Věta 2.3.3. Necht' $d \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$. Potom počet párů z n -prvkové množiny $S \subset \mathbb{R}^2$ s průměrem $\text{diam } S \leq 1$, které mají vzdálenost alespoň d , je nejvýše $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$. Přitom tohoto počtu lze vhodným uspořádáním bodů vždy dosáhnout.

Než dokážeme tuto větu, která je snadným důsledkem Turánovy věty, připravíme si ještě malé lemma.

Lemma 2.3.4. Z libovolných čtyř bodů v rovině lze vybrat tři tak, že tvoří pravouhlý nebo tupouhlý trojúhelník (přitom přímku považujeme za tupouhlý trojúhelník s úhlem 180°).

Důkaz. Mohou nastat dva případy:

1. Jeden bod x leží v konvexním obalu zbylých tří bodů y_1, y_2, y_3 . Potom součet vrcholových úhlů $\angle y_1xy_2, \angle y_2xy_3, \angle y_3xy_1$ je 360° , takže jeden z nich musí být dokonce $\geq 120^\circ$.
2. Všechny čtyři body tvoří konvexní čtyřúhelník. Protože v něm je součet úhlů 360° , musí tam existovat jeden $\geq 90^\circ$.

□

Důkaz. (věty 2.3.3)

Definujme graf $G = (S, E)$, kde $\{x_i, x_j\} \in E \Leftrightarrow \|x_i - x_j\| \geq d$. Potom G neobsahuje kliku K_4 . Jestliže totiž čtyři body (vrcholy G) tvoří K_4 , tak jsou každé dva z nich od sebe dál než d . Podle předchozího lemmatu lze vybrat tři, které tvoří tupouhlý trojúhelník. Obě „odvěsny“ tohoto trojúhelníka jsou delší než $d \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, a tak je „přepona“ delší než 1, což je spor.

Podle Turánovy věty pro $p = 4$ potom platí

$$\#E \leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) = \frac{n^2}{3}.$$

Nyní zbývá dokázat, že této mezi se lze přiblížit. Za tím účelem se podívejme na důkaz Turánovy věty. Počtu hran $\frac{n^2}{3}$ se dosahuje, jestliže graf G je rozdělen do $p-1 = 3$ „knedlíků“, v nichž nevedou hrany (body z jednoho „knedlíku“ jsou v rovině blízko sebe) a mezi nimiž naopak vedou všechny hrany (celé „knedlíky“ jsou v rovině daleko od sebe), a jestliže počet vrcholů v každém „knedlíku“ je $\frac{n}{p-1} = \frac{n}{3}$. Protože to však nemusí být celé číslo, lze ve skutečnosti dosáhnout počtu hran jen $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$. Dodejme, že popsané uspořádání přesně odpovídá pravé části obrázku 2.3.1. □

2.3.2 Erdősova věta

Lemma. (Jensenova nerovnost)

Necht' $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ je konvexní funkce, tj.

$$(\forall x_1, x_2 \in [a, b]) (\forall \lambda \in [0, 1]) (\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)).$$

Necht' $\alpha_i \in \mathbb{R}_0^+$ pro každé $i \in \hat{n}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ a necht' $x_i \in [a, b]$ pro každé $i \in \hat{n}$. Potom

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right).$$

Důkaz. Snadno se ukáže indukcí podle n , byl proveden například v [6]. □

Důsledek. *Za stejných předpokladů platí i*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right). \quad (2.3.5)$$

Důkaz. Položíme $\alpha_i = \frac{1}{n}$ pro každé $i \in \hat{n}$. □

Věta 2.3.5. (Erdős)

Necht' $G = (V, E)$ je graf, který neobsahuje jako svůj podgraf $K_{r,r}$ (úplný bipartitní graf na $r + r$ vrcholech). Potom

$$\#E \leq C_r \cdot n^{2-\frac{1}{r}},$$

kde C_r je konstanta nezávislá na $n = \#V$.

Poznámka. Vždy platí $\#E \leq \binom{n}{2} \leq \frac{n^2}{2}$. Turánova věta omezuje počet hran grafu bez K_p podle vztahu (2.3.1), tj. řádově stejně. Erdősova věta však udává řádově *menší* omezení.

Důkaz. Necht' $G = (V, E)$, kde BÚNO $V = \hat{n}$, je graf bez $K_{r,r}$. Vytvoříme nový bipartitní graf G' , který bude definován na základě grafu G jako $G' = (V_1 \cup V_2, E')$, kde $V_1 = V$ a $V_2 = \binom{V}{r}$ je množina všech r -prvkových podmnožin V . Přitom

$$\{\underbrace{i}_{\in V_1}, \underbrace{\{k_1, \dots, k_r\}}_{\in V_2}\} \in E',$$

právě když $\{k_1, \dots, k_r\} \subset N(i)$ v grafu G , tj. právě když $(\forall j \in \hat{r}) (\{i, k_j\} \in E)$.

Základem odvození požadované nerovnosti bude vyjádření počtu hran v grafu G' dvěma různými způsoby, a to jednak jako počet hran vycházejících z V_1 , a jednak jako *odhad* počtu hran vycházejících z V_2 :

1. Z definice E' plyne, že z $i \in V_1$ vede v G' tolik hran, kolik je r -prvkových podmnožin množiny sousedů vrcholu i :

$$d_{G'}(i) = \binom{d_G(i)}{r}.$$

Přitom pokud $d_G(i) = \#N_G(i) < r$, pak $d_{G'}(i) = 0$, což je v souladu s definicí kombinačního čísla. Počet všech hran v G' je tedy

$$\sum_{i=1}^n \binom{d_G(i)}{r}.$$

2. Platí $d_{G'}(\{k_1, \dots, k_r\}) \leq r-1$. V opačném případě by totiž z definice E' existovalo (alespoň) r vrcholů $l_1, \dots, l_r$ v grafu G různých od $k_1, \dots, k_r$, které by byly napojeny na všechny vrcholy $k_1, \dots, k_r$. To by ale znamenalo, že G obsahuje $K_{r,r}$. Různost vrcholů, tj. skutečnost, že

$$(\forall j \in \hat{r}) (l_j \notin \{k_1, \dots, k_r\})$$

plyne z toho, že žádný vrchol v G není v hraně sám se sebou. Proto žádný $k_j \in V_1$ nemůže být v grafu G' spojen hranou s vrcholem $\{k_1, \dots, k_r\} \in V_2$. Z uvedené úvahy plyne, že počet hran v G' musí být menší nebo roven než

$$(r-1) \underbrace{\binom{n}{r}}_{\#V_2}.$$

Srovnáním obou vyjádření dostáváme nerovnost

$$\sum_{i=1}^n \binom{d_G(i)}{r} \leq (r-1) \binom{n}{r}, \quad (2.3.6)$$

kteou již budeme jen dále odhadovat a upravovat do požadovaného tvaru. Pokud

$$\frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^n d_G(i)}_{2\#E} \leq r-1,$$

tak potom

$$\#E \leq \frac{1}{2}(r-1)n \leq \underbrace{(r-1)}_{C_r} n^{2-\frac{1}{r}}$$

a není co dokazovat. Předpokládejme proto

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_G(i) \geq r. \quad (2.3.7)$$

Definujme konvexní funkci

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x}{r} & x \geq r \\ 0 & x < r \end{cases},$$

kde dodefinování nulou je potřebné jen pro x neceločíselné. Potom $f(d_G(i)) = \binom{d_G(i)}{r}$ a podle (2.3.5) platí

$$n \cdot \binom{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_G(i)}{r} = n \cdot f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_G(i)\right) \leq \sum_{i=1}^n f(d_G(i)) = \sum_{i=1}^n \binom{d_G(i)}{r},$$

přičemž levá strana je nenulová, takže ji lze použít k dalším odhadům (proto je důležitý předpoklad 2.3.7). Použijeme-li tento odhad v (2.3.6), dostaneme

$$n \cdot \binom{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_G(i)}{r} \leq (r-1) \binom{n}{r},$$

neboli při označení $m = \#E$

$$n \cdot \binom{2m/n}{r} \leq (r-1) \binom{n}{r}. \quad (2.3.8)$$

Kombinační číslo $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$ lze odhadnout zdola a shora

$$\frac{(n-k+1)^k}{k!} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!},$$

což pro náš případ znamená

$$n \frac{\left(\frac{2m}{n} - r + 1\right)^r}{r!} \leq n \binom{2m/n}{r} \leq (r-1) \binom{n}{r} \leq (r-1) \frac{n^r}{r!}.$$

Vynásobíme $\frac{r!}{n}$ a odmocníme $\sqrt[r]{\dots}$, takže dostaneme

$$\frac{2m}{n} - r + 1 \leq \sqrt[r]{r-1} n^{1-\frac{1}{r}}$$

a už jen upravujeme:

$$\begin{aligned} m &\leq \frac{n}{2} \left(\sqrt[r]{r-1} n^{1-\frac{1}{r}} + r - 1 \right) = \frac{1}{2} \sqrt[r]{r-1} n^{2-\frac{1}{r}} + \frac{1}{2} (r-1) n \leq \frac{1}{2} \sqrt[r]{r-1} n^{2-\frac{1}{r}} + \frac{1}{2} (r-1) n^{2-\frac{1}{r}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (r-1) n^{2-\frac{1}{r}} + \frac{1}{2} (r-1) n^{2-\frac{1}{r}} \leq \underbrace{(r-1)}_{C_r} n^{2-\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

□

Poznámka. Pro $r = 2$, tj. pro graf bez $K_{2,2} = C_4$ máme odhad

$$\#E \leq C_r \cdot n^{3/2}.$$

Nerovnost (2.3.8) lze však v tomto případě upravovat šikovněji, a tak získat (trochu) přísnější odhad:

$$\begin{aligned} n \frac{\frac{1}{n} 2m \left(\frac{1}{n} 2m - 1\right)}{2} &\leq \frac{n(n-1)}{2} \\ 2m(2m-n) &\leq n^3 - n^2 \\ 4m^2 - 2nm - n^3 + n^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

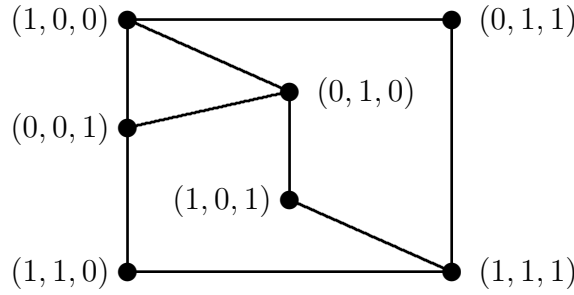
Kvadratickou rovnici pro počet hran m vyřešíme:

$$m_{1,2} = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2 - 16(-n^3 + n^2)}}{8} = \frac{n \pm n\sqrt{4n-3}}{4}.$$

Jeden kořen je záporný, takže nehraje roli. Dostáváme tedy odhad

$$\#E \leq \frac{n + n\sqrt{4n-3}}{4} = \frac{1}{4} n (1 + \sqrt{4n-3}). \quad (2.3.9)$$

V následujícím ukážeme, jak se mu lze vhodnou konstrukcí grafu přiblížit.

Obrázek 2.3.2: Konstrukce G pro $p = 2$

2.3.3 Graf s $\#E$ blízkým Erdősovu odhadu

Zkonstruujeme graf $G = (V, E)$ neobsahující $K_{2,2} = C_4$ s počtem hran blížícím se odhadu (2.3.9). V následujícím velmi pěkném postupu se využije mnoho znalostí z různých partií matematiky.

Nechť p je prvočíslo. Uvažujme těleso zbytkových tříd $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ a vektorový prostor $\mathbb{Z}_p^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_p$. Vrcholy grafu G budou představovat přímky v $\mathbb{Z}_p^3$ procházející počátkem. V tomto prostoru má každá taková přímka právě p bodů, protože ji lze vyjádřit jako lineární obal jejího směrového vektoru, který je z definice roven

$$\underbrace{[(x_1, x_2, x_3)]_\lambda}_x = \{ (kx_1, kx_2, kx_3) \mid k \in \mathbb{Z}_p \}.$$

Různých nenulových vektorů v $\mathbb{Z}_p^3$ je zřejmě $p^3 - 1$. Protože každá přímka má p bodů, z nichž $p-1$ jsou nenulové vektory, je možné ji reprezentovat libovolným z $p-1$ směrových vektorů. Proto počet všech přímek procházejících počátkem je roven

$$\#V = \frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1.$$

Označme si (vybrané) směrové vektory přímek (= vrcholů grafu G) $v_1, v_2, \dots, v_{p^2+p+1}$ po řadě jako $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p^2+p+1}$, tj. necht' platí

$$(\forall i \in \{1, \dots, p^2 + p + 1\}) (v_i = [\mathbf{x}_i]_\lambda).$$

Dále definujme „pseudoskalární“ součin vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ z prostoru $\mathbb{Z}_p^3$ jako

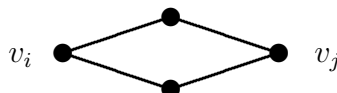
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Řekneme, že vektor $\mathbf{x}$ je kolmý na vektor $\mathbf{y}$, jestliže $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Protože existují vektory, které jsou kolmé samy na sebe, nejedná se o pravý skalární součin. Nyní množinu hran E definujeme jako

$$E = \{ \{v_i, v_j\} \mid i \neq j \wedge \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0 \}.$$

Příklad. Abychom si dobře uvědomili, jak je graf G definován, ukážeme si jej pro $p = 2$. Na obrázku 2.3.2 jsou jednotlivé vrcholy grafu označeny svými směrovými vektory. Je vidět, že například vektor $(1, 1, 0)$ je kolmý sám na sebe.

Ukážeme, že pro libovolné prvočíslo p takto definovaný graf G neobsahuje $K_{2,2} = C_4$. Kdyby G obsahoval C_4 , existovaly by v něm vrcholy v_i, v_j spojené hranami s dalšími dvěma vrcholy takto:



Podívejme se však, kolik vrcholů může být hranami napojeno na v_i i na v_j . Označme $\mathbf{x}_i = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\mathbf{x}_j = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ a hledejme $\mathbf{y} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ kolmý na $\mathbf{x}_i$ i na $\mathbf{x}_j$. Pro $\mathbf{y}$ musí platit

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y} \rangle &= \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 \\ 0 = \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{y} \rangle &= \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3, \end{aligned}$$

což znamená, že $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ jsou řešením homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Protože $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ jsou směrové vektory různých přímek, jsou lineárně nezávislé, a tato matice má tedy hodnotu 2. Podle Frobeniovy věty o řešení soustav lineárních rovnic pak existuje jediné lineárně nezávislé řešení $\mathbf{y}$ této soustavy. Existuje tedy jediná přímka se směrovým vektorem $\mathbf{y}$, která je kolmá na obě přímky v_i, v_j , neboli tato přímka jako vrchol grafu G je jediná, která je hranami spojena s v_i i s v_j . Proto G neobsahuje C_4 .

Nyní postupně vyčíslíme počet hran v grafu G . Hledejme stupeň $d_G(v_i)$ nějakého pevného vrcholu $v_i \in V$, neboli počet různých přímek, které jsou kolmé na v_i . Ten je roven počtu *různých* vektorů $\mathbf{y}$ kolmých na $\mathbf{x}_i$, přičemž dva takové vektory jsou *různé*, když jsou lineárně nezávislé (to ovšem neznamená, že všechny tyto vektory mají tvořit LN soubor). Použijeme-li již zavedené značení pro $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{y}$, musí $\mathbf{y}$ splňovat rovnici

$$0 = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y} \rangle = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3,$$

která má 2 LN řešení $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$. Počet všech řešení této soustavy je p^2 , protože jsou to právě vektory

$$\mathbf{y} = k_1 \mathbf{y}_1 + k_2 \mathbf{y}_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_p.$$

Máme tedy $p^2 - 1$ nenulových řešení, ale vždy $p - 1$ z nich je kolineárních, tj. jedná se o směrové vektory téže přímky. Počet různých přímek kolmých na v_i , tj. počet *různých* vektorů $\mathbf{y}$ kolmých na $\mathbf{x}_i$, je tedy

$$\frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1.$$

Tento výsledek si pro pozdější použití dobře zapamatujme. Nejedná se totiž ještě o $d_G(v_i)$, protože záleží na tom, zda $\mathbf{x}_i$ je kolmý sám na sebe. Zatím tedy můžeme shrnout:

$$(\forall i \in \{1, \dots, p^2 + p + 1\}) \left(d_G(v_i) = \begin{cases} p + 1 & \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle \neq 0 \\ p & \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle = 0 \end{cases} \right).$$

Dalším naším úkolem je zjistit, v kolika případech je $\mathbf{x}_i$ kolmý sám na sebe. Jestliže to dokážeme, bude už snadné vyjádřit celkový počet hran grafu G . Definujme čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu $p^2 + p + 1$, jejíž prvky mají hodnotu

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} 1 & \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom $\mathbf{A}_{ii} = 1$, právě když $\mathbf{x}_i$ je kolmý sám na sebe. Hledaný počet přímek kolmých na sebe sama je tedy roven počtu nenulových prvků na diagonále matice $\mathbf{A}$, neboli její stopě $\text{Tr } \mathbf{A}$. Protože náš pseudoskalární součin je symetrický, je i matice $\mathbf{A}$ symetrická, a tedy diagonalizovatelná. Podobnostní transformace zachovává stopu, a proto $\text{Tr } \mathbf{A}$ je rovna součtu vlastních čísel $\mathbf{A}$.

$\mathbf{A}$ nemá zrovna jednoduchý tvar. Pro určení vlastních čísel proto sestavíme $\mathbf{A}^2$, která vypadá mnohem lépe. Z definice maticového násobení máme

$$\mathbf{A}_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{p^2+p+1} \mathbf{A}_{ik} \mathbf{A}_{kj},$$

což znamená, že

$$\mathbf{A}_{ij}^2 = \#\{k \mid \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_i \rangle = 0 \wedge \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle = 0\},$$

tj. $\mathbf{A}_{ij}^2$ je počet přímek kolmých na v_i i v_j . My už ale víme, že pro $i \neq j$ je taková přímka právě jedna a pro $i = j$ je těchto přímek $p + 1$. Proto

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} p+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & p+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & p+1 \end{pmatrix} = p\mathbf{I} + \mathbf{J},$$

kde $\mathbf{J}_{ij} = 1$ pro každé i, j . Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou posunuta o p vzhledem k vlastním číslům matice $\mathbf{J}$:

$$(\mathbf{J}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}) \Leftrightarrow (\mathbf{A}^2\mathbf{x} = (p\mathbf{I} + \mathbf{J})\mathbf{x} = (p + \lambda)\mathbf{x})$$

Protože $\mathbf{J}$ má zřejmě hodnotu 1, má $\mathbf{J}$ jediné nenulové vlastní číslo λ a pak vlastní číslo 0 s násobností (řád matice -1), tj. $p^2 + p$. Nenulové vlastní číslo $\mathbf{J}$ je rovno řádu matice, tj. $\lambda = p^2 + p + 1$, protože

$$\mathbf{J} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 + p + 1 \\ p^2 + p + 1 \\ \vdots \\ p^2 + p + 1 \end{pmatrix} = (p^2 + p + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}^2$ má tedy vlastní číslo $(p^2 + p + 1) + p = (p + 1)^2$ s násobností 1 a vlastní číslo $0 + p = p$ s násobností $p^2 + p$. Matice $\mathbf{A}$ má vlastní čísla rovná odmocninám z vlastních čísel $\mathbf{A}^2$, tj.

- $p + 1$ s násobností 1
- $\sqrt{p}$ s násobností r
- $-\sqrt{p}$ s násobností s

Poznámka. Vlastní číslo $p + 1$ jsme mohli u matice zjistit rovnou podle

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+1 \\ p+1 \\ \vdots \\ p+1 \end{pmatrix} = (p+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

protože počet jedniček v každém (i -tém) řádku $\mathbf{A}$, což je počet přímek kolmých na v_i , je roven $p + 1$.

Když nyní známe vlastní čísla $\mathbf{A}$, můžeme konečně vyjádřit

$$\text{Tr } \mathbf{A} = (p + 1) + (r - s)\sqrt{p},$$

a protože stopa celočíselné matice nemůže být neceločíselná (přitom p je prvočíslo, takže $\sqrt{p} \notin \mathbb{N}$), musí nutně $r = s$ a tedy

$$\text{Tr } \mathbf{A} = p + 1.$$

Nyní tedy víme, že počet vrcholů G se stupněm p je $p + 1$. Ostatních p^2 vrcholů má stupeň $p + 1$. Proto již lze určit počet hran v grafu G :

$$2\#E = \sum_{v \in V} d_G(v) = (p + 1)p + p^2(p + 1) = p(p + 1)^2,$$

$$\#E = \frac{p(p + 1)^2}{2}.$$

Abychom mohli $\#E$ srovnat s (2.3.9), musíme jej vyjádřit pomocí $n = \#V$. Z rovnosti

$$n = p^2 + p + 1 \quad (2.3.10)$$

tedy získáme

$$p = \frac{-1 + \sqrt{4n-3}}{2}$$

a po vhodné úpravě, která umožní dosadit za $p^2 + p$ z (2.3.10), dostaneme

$$\#E = \frac{p(p+1)^2}{2} = \frac{p+1}{2}(p^2+p) = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{4}(n-1) = \frac{1}{4}(n-1)(1+\sqrt{4n-3}).$$

Přitom z Erdősovy věty máme odhad

$$\#E \leq \frac{1}{4}n(1+\sqrt{4n-3}).$$

Je tedy vidět, že pro $n = p^2 + p + 1$, kde p je prvočíslo, je tento odhad docela těsný.

2.3.4 Počet K_3 a $\bar{K}_3$ v grafu

Věta 2.3.6. *Necht' $G = (V, E)$ je graf na n vrcholech. Potom počet klik K_3 a podgrafů $\bar{K}_3$ v grafu G je alespoň*

$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

Důkaz. Tři vrcholy z n vrcholů lze vybrat $\binom{n}{3}$ způsoby. Až na izomorfismus existují pouze 4 podgrafy (tj. 4 typy podgrafů), které mohou být indukované těmito třemi vrcholy. Jestliže obrázkem podgrafu umístěným do kroužku rozumíme počet podgrafů tohoto typu v grafu G , můžeme zapsat následující rovnici:

$$\begin{array}{c} \triangle \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \end{array} = \binom{n}{3}$$

Vezměme nyní vrchol $v \in V$. Z něj vede hrana do $d_G(v)$ vrcholů a do dalších $n-1-d_G(v)$ z něj hrana nevede. Počet *uspořádaných* trojic (v, u, w) takových, že $\{v, u\} \in E$ a zároveň $\{v, w\} \notin E$, je tedy

$$\sum_{v \in V} d_G(v)(n-1-d_G(v)).$$

Každé trojici vrcholů z V , která v grafu G indukuje podgrafy



nebo



však přísluší právě dva různé výběry vrcholu v , tj. právě dvě *uspořádané* trojice (v, u, w) daných vlastností. Proto

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \end{array} = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_G(v)(n-1-d_G(v)).$$

Toto číslo nyní odhadneme shora. Všechny členy sumy, které jsou tvaru $x(n-1-x)$, jsou $\leq \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$, protože graf funkce $x(n-1-x) = -\left(x - \frac{n-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ je parabola s maximem $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ v bodě $x = \frac{n-1}{2}$. Tím současně odhadneme zdola počet K_3 a $\bar{K}_3$ v grafu G :

$$\begin{aligned} \left(\triangle\right) + \left(\circ\right) &= \binom{n}{3} - \left(\left(\circ\right) + \left(\angle\right)\right) \geq \\ &\geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{n(n-1)(4(n-2) - 3(n-1))}{24} = \frac{n(n-1)(n-5)}{24} \end{aligned}$$

□

2.3.5 Odhady $\alpha(G)$ a $\omega(G)$

V této části přednášky se budeme zabývat odhady maximální velikosti kliky a nezávislé množiny v grafu. Zopakujte si proto definici 1.11.3 z první kapitoly.

Pozorování 2.3.7. Pro libovolný graf $G = (V, E)$, $n = \#V$, platí

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G) + 1}.$$

Důkaz. Ukážeme konstrukci nezávislé množiny o velikosti alespoň $\frac{n}{\Delta(G)+1}$.

1. $S := \emptyset$, $W := V$.
2. Vezmeme libovolný vrchol $v \in W$ a přesuneme jej z množiny W do množiny S . Všechny sousedy v v grafu G odstraníme z W . Celkem tedy z W odstraníme nejvýše $\Delta(G) + 1$ vrcholů.
3. Krok 2 opakuje, dokud $W \neq \emptyset$.

Je zřejmé, že po provedení popsaného postupu bude S nezávislá množina, přičemž

$$\#S \geq \frac{n}{\Delta(G) + 1}.$$

□

Věta 2.3.8. Pro libovolný graf $G = (V, E)$ platí

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{\rho(G) + 1},$$

kde $\rho(G)$ je průměrný stupeň grafu G (viz. definice 1.1.5).

Tuto větu dokážeme za chvíli, neboť snadno vyplývá z věty 2.3.10. Nejprve ukážeme slabší odhad $\alpha(G)$:

Věta 2.3.9. Necht' $G = (V, E)$ s průměrným stupněm $\rho(G) \geq 1$. Potom

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{2\Delta(G)}.$$

Důkaz. Provedeme pravděpodobnostní důkaz tohoto tvrzení. Necht' G je pevně daný graf a označme jako vždy $n = \#V$, $m = \#E$. Sestrojme indukovaný podgraf $H \subset G$ tak, že každý $v \in V$ zařadíme do $V(H)$ nezávisle s pravděpodobností $p \in [0, 1]$, kde p zatím nespecifikujeme. Označme si náhodné veličiny

$X = \#V(H)$, což je počet vrcholů grafu H , a

$Y = \#E(H)$, což je počet hran v grafu H .

Vypočítáme střední hodnoty těchto veličin obvyklým způsobem. Pro každý $v \in V$ zavedeme elementární náhodnou veličinu

$$X_v = \begin{cases} 1 & v \in V(H) \\ 0 & v \notin V(H) \end{cases}.$$

Potom

$$X = \sum_{v \in V} X_v,$$

$$\mathbb{E}X_v = 1 \cdot \Pr(X_v = 1) + 0 \cdot \Pr(X_v = 0) = 1 \cdot p + 0 \cdot p = p$$

a

$$\mathbb{E}X = \sum_{v \in V} \mathbb{E}X_v = np.$$

Obdobně vypočítáme střední hodnotu počtu hran. Pro každou hranu $e \in E$, $e = \{u, v\}$ zavedeme

$$Y_e = \begin{cases} 1 & e \in E(H) \\ 0 & e \notin E(H) \end{cases}.$$

Potom

$$Y = \sum_{e \in E} Y_e,$$

$$\mathbb{E}Y_e = \Pr(Y_e = 1) = \Pr(u \in V(H) \wedge v \in V(H)) = p^2$$

a

$$\mathbb{E}Y = \sum_{e \in E} \mathbb{E}Y_e = mp^2.$$

Platí ale

$$\rho(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d_G(v) = \frac{2m}{n} \Rightarrow \mathbb{E}Y = p^2 \frac{\rho(G) \cdot n}{2}.$$

Zvolme nyní $p = \frac{1}{\rho(G)}$. Potom

$$\mathbb{E}(X - Y) = np - \frac{\rho(G)np^2}{2} = \frac{n}{\rho(G)} - \frac{n}{2\rho(G)} = \frac{n}{2\rho(G)}.$$

To znamená, že existuje taková konkrétní realizace indukovaného podgrafu H , že

$$X - Y \geq \frac{n}{2\rho(G)}. \quad (2.3.11)$$

Nyní odebereme všechny hrany z tohoto H vždy společně s jedním jejich koncem. Z původní množiny vrcholů $V(H)$ tak vznikne množina vrcholů S , která je nezávislou množinou v grafu G . H je totiž indukovaný podgraf, takže mezi vrcholy z S již nevedou žádné hrany ani v grafu G . Po ubrání Y hran spolu s Y vrcholy zůstane v S podle vztahu (2.3.11) alespoň $\frac{n}{2\rho(G)}$ vrcholů, čímž je věta dokázána. $\square$

Věta 2.3.10. Pro libovolný graf $G = (V, E)$ platí

$$\omega(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{n - d_G(v)}.$$

Důkaz. bude opět pravděpodobnostní. BÚNO předpokládejme $V = \hat{n}$. Náhodně vybereme permutaci $\pi \in S_n$, které přiřadíme množninu $C_\pi \subset V$ takto:

- $\pi(1) \in C_\pi$

- pro $i > 1$ dáme vrchol $\pi(i)$ do C_π , pokud $(\forall j < i) (\{\pi(i), \pi(j)\} \in E)$, tj. vrchol se dostane do C_π , jestliže je v hraně se všemi předchozími vrcholy při jejich uspořádání podle permutace π .

C_π je zřejmě klika v G . Její velikost je náhodná veličina, kterou označíme X . Nyní postupujeme jako obvykle: Ukážeme-li

$$EX \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{n - d_G(v)},$$

bude důkaz hotov, protože pak existuje konkrétní C_π , pro niž je $X \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{n - d_G(v)}$. Pro každé $v \in V$ definujeme

$$X_v = \begin{cases} 1 & v \in C_\pi \\ 0 & v \notin C_\pi \end{cases}.$$

Potom

$$EX_v = \Pr(v \in C_\pi) = \frac{1}{n - d_G(v)},$$

což nyní dokážeme. Aby $v \in C_\pi$, tak vrcholy, se kterými v není v hraně, musí být v permutaci π umístěny až za ním. Na umístění jeho sousedů nezáleží. Počet vrcholů, se kterými v není v hraně, a to včetně vrcholu v samotného, je $n - d_G(v)$. Počet způsobů, kterými lze $n - d_G(v)$ vrcholů uspořádat tak, aby v byl na prvním místě, je $(n - d_G(v) - 1)!$. Počet všech uspořádání $n - d_G(v)$ vrcholů je $(n - d_G(v))!$, a proto

$$\Pr(v \in C_\pi) = \frac{(n - d_G(v) - 1)!}{(n - d_G(v))!} = \frac{1}{n - d_G(v)}$$

Konečně tedy můžeme vyčíslit

$$EX = \sum_{v \in V} X_v = \sum_{v \in V} \frac{1}{n - d_G(v)}.$$

□

Důsledkem této věty je věta 2.3.8, kterou nyní dokážeme.

Důkaz. Necht' G je libovolný graf. Potom podle předchozí věty je

$$\omega(\bar{G}) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{n - d_{\bar{G}}(v)},$$

přičemž platí $d_{\bar{G}}(v) = n - 1 - d_G(v)$ a $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$. Proto

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + d_G(v)}. \quad (2.3.12)$$

Protože funkce $\frac{1}{1+x}$ je na intervalu $[0, +\infty)$ konvexní, můžeme podle Jensenovy nerovnosti 2.3.2 provést odhad

$$\frac{n}{1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + x_i}.$$

Pokud jej použijeme na vztah (2.3.12), dostaneme

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + d_G(v)} \geq \frac{n}{1 + \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d_G(v)} = \frac{n}{1 + \rho(G)}.$$

□

Pomocí věty 2.3.10 můžeme provést i alternativní důkaz Turánovy věty 2.3.1, která říká: Pokud $G = (V, E)$ neobsahuje kliku K_p , tak $\#E \leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$.

Vyjďeme ze Schwarzovy nerovnosti na prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2.$$

Nechť $G = (V, E)$, $V = \hat{n}$. Označme $d_i = d_G(i)$ pro každé $i \in V$ a zvolme konkrétně

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left(\frac{1}{\sqrt{n-d_1}}, \frac{1}{\sqrt{n-d_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n-d_n}} \right), \\ \mathbf{y} &= \left(\sqrt{n-d_1}, \sqrt{n-d_2}, \dots, \sqrt{n-d_n} \right). \end{aligned}$$

Potom má Schwarzova nerovnost tvar

$$n^2 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n-d_i}} \sqrt{n-d_i} \right)}_{|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d_i}}_{\|\mathbf{x}\|^2} \underbrace{\sum_{j=1}^n (n-d_j)}_{\|\mathbf{y}\|^2}. \quad (2.3.13)$$

Protože podle předpokladu G neobsahuje K_p , platí podle věty 2.3.10

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d_i} \leq \omega(G) \leq p-1.$$

Po dosazení do 2.3.13 dostáváme

$$\begin{aligned} n^2 &\leq (p-1)(n^2 - 2\#E) \\ 2(p-1)\#E &\leq (p-2)n^2 \\ \#E &\leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right). \end{aligned}$$

Věta 2.3.11. *Nechť G_n označuje náhodný graf na n vrcholech¹. Potom existuje posloupnost $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taková, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr((\omega(G_n) = k_n) \vee (\omega(G_n) = k_n + 1)) = 1 \quad (2.3.14)$$

Poznámka.

- Pro posloupnost $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ platí řádově

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{2 \log_2 n} = 1.$$

- Je-li G_n náhodný graf, potom $\bar{G}_n$ je také náhodný graf, a přitom $\omega(\bar{G}_n) = \alpha(G_n)$. Proto je (2.3.14) ekvivalentní s

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr((\alpha(G_n) = k_n) \vee (\alpha(G_n) = k_n + 1)) = 1.$$

2.4 Ramseyovská čísla

Příklad 2.4.1. Ve skupině 6 lidí existuje trojice lidí taková, že se všichni navzájem znají nebo se všichni navzájem neznají. (V libovolném grafu na 6 vrcholech existuje klika velikosti 3 nebo nezávislá množina velikosti 3.)

¹ G_n vznikne tak, že každé dva vrcholy spojíme hranou s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. „Náhodná veličina“ G_n má potom rovnoměrné rozdělení.

Důkaz. Mohou nastat dvě možnosti:

1. Existuje vrchol v stupně ≥ 3 . Necht' z v vedou hrany do vrcholů v_1, v_2, v_3 . Potom pokud mezi nějakými vrcholy v_i, v_j ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) vede hrana, tvoří vrcholy v, v_i, v_j kliku velikosti 3. Naopak pokud mezi v_1, v_2, v_3 nevede žádná hrana, tvoří tyto vrcholy nezávislou množinu velikosti 3.
2. Všechny vrcholy mají stupeň ≤ 2 . Vezměme libovolný vrchol v . Z něho *nevedou* hrany do alespoň 3 vrcholů v_1, v_2, v_3 . Potom pokud mezi nějakými vrcholy v_i, v_j ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) nevede hrana, tvoří vrcholy v, v_i, v_j nezávislou množinu velikosti 3. Naopak pokud mezi v_1, v_2, v_3 vedou všechny hrany, tvoří tyto vrcholy kliku velikosti 3.

□

Věta 2.4.2. (Ramsey)

$$(\forall k, l \in \mathbb{N}) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) (\forall G, \#V(G) = n) ((\omega(G) \geq k) \vee (\alpha(G) \geq l)).$$

Slovy: Pro každé $k, l \in \mathbb{N}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že každý graf na alespoň n_0 vrcholech obsahuje kliku velikosti k nebo nezávislou množinu velikosti l .

Definice 2.4.3. Minimální n_0 z Ramseyovy věty pro daná k, l značíme $r(k, l)$ a nazýváme jej **ramseyovským číslem**.

Poznámka. V příkladě 2.4.1 jsme vlastně našli pro $k = l = 3$ číslo $n_0 = 6$, tj. ukázali jsme $r(3, 3) \leq 6$. Nemůže být ovšem $r(3, 3) \leq 5$. Příkladem grafu na 5 vrcholech, pro který $(\omega(G) < 3) \wedge (\alpha(G) < 3)$, je cyklus C_5 . Proto $r(3, 3) = 6$.

Důkaz. (Ramseyovy věty)

Budeme postupovat indukcí podle $(k + l)$. Předvedeme úvahu, která bude jen zobecněním důkazu v příkladě 2.4.1.

Protože v indukčním kroku tvaru $(k + l) - 1 \rightarrow (k + l)$ budeme potřebovat čísla $k - 1$ i $l - 1$, lze jej provést až pro $(k \geq 2) \wedge (l \geq 2)$. Na počátku tedy potřebujeme ověřit platnost tvrzení pro $k = 1, l \in \mathbb{N}$ a pro $k \in \mathbb{N}, l = 1$. Zřejmě však platí

- $r(k, 1) = 1$,
- $r(1, l) = 1$.

Poznamenejme, že snadno je vidět rovněž

- $r(k, 2) = k$, protože buď jsou v grafu G na k vrcholech všechny hrany, a tedy $K_k = G$, a nebo alespoň jedna chybí, ale potom je v G nezávislá množina velikosti 2.
- $r(2, l) = l$, protože buď v grafu G na l vrcholech nejsou žádné hrany, a tedy (v) G je nezávislá množina velikosti l , nebo G má alespoň jednu hranu, ale potom G obsahuje K_2 .

Indukční krok $\boxed{(k + l) - 1 \rightarrow (k + l)}$: Najdeme n_0 jako $n_0 = r(k - 1, l) + r(k, l - 1)$ a ukážeme, že každý graf G na $n = n_0$ (a tedy i na $n > n_0$) vrcholech obsahuje kliku velikosti k nebo nezávislou množinu velikosti l . Mohou nastat dva případy:

1. Existuje vrchol $v \in V(G)$ tak, že $d_G(v) \geq r(k - 1, l)$. Označme jako H podgraf indukovaný množinou sousedů vrcholu v . Potom $\#V(H) \geq r(k - 1, l)$. Podle indukčního předpokladu v H existuje K_{k-1} , která však spolu s vrcholem v tvoří kliku K_k v grafu G , nebo v H existuje nezávislá množina velikosti l , takže i v G existuje nezávislá množina velikosti l .
2. Všechny vrcholy grafu G mají stupeň $< r(k - 1, l)$. Necht' $v \in V(G)$. Potom $d_G(v) < r(k - 1, l) \Rightarrow d_G(v) \leq r(k - 1, l) - 1$. To znamená, že existuje množina alespoň $n - 1 - (r(k - 1, l) - 1) = r(k, l - 1)$ vrcholů, do nichž nevede hrana z vrcholu v . Označme jako H podgraf indukovaný touto množinou vrcholů. Podle indukčního předpokladu v H existuje nezávislá množina velikosti $l - 1$, která však spolu s vrcholem v tvoří nezávislou množinu velikosti l v grafu G , nebo v H existuje kliku K_k , což znamená, že i v G existuje K_k .

$k \backslash l$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	9	14	18	23
4	1	4	9	17	25		
5	1	5	14	25			
6	1	6	18				
7	1	7	23				

Tabulka 2.1: Známé hodnoty ramseyovských čísel

□

Poznámka 2.4.4. Protože k libovolnému grafu $\bar{G}$ na n vrcholech existuje graf G na n vrcholech tak, že $\bar{G}$ je doplňkem G , lze tvrzení plynoucí z Ramseyovy věty, zapsané ve tvaru

$$(\forall k, l \in \mathbb{N}) (\forall n \geq r(k, l)) (\forall \bar{G}, \#V(\bar{G}) = n) ((\omega(\bar{G}) \geq k) \vee (\alpha(\bar{G}) \geq l)),$$

přeformulovat na

$$(\forall k, l \in \mathbb{N}) (\forall n \geq r(k, l)) (\forall G, \#V(G) = n) ((\omega(G) \geq k) \vee (\alpha(G) \geq l)).$$

To je podle známých rovností uvedených v poznámce 1.11.4 ekvivalentní s

$$(\forall k, l \in \mathbb{N}) (\forall n \geq r(k, l)) (\forall G, \#V(G) = n) ((\alpha(G) \geq k) \vee (\omega(G) \geq l)),$$

což z definice ramseyovských čísel znamená $(\forall k, l \in \mathbb{N}) (r(l, k) \leq r(k, l))$. To samozřejmě implikuje

$$(\forall k, l \in \mathbb{N}) (r(l, k) = r(k, l)).$$

Poznámka. Není jednoduché hodnoty $r(k, l)$ vypočítat. Známé hodnoty ramseyovských čísel jsou uvedeny v tabulce 2.1. Netriviální ramseyovská čísla jsou v pravém dolním čtverci. Hodnota $r(4, 5)$ je známa od roku 1993. O hodnotě $r(5, 5)$ víme pouze

$$42 \leq r(5, 5) \leq 50.$$

2.4.1 Odhady ramseyovských čísel

Poznámka 2.4.5. Z důkazu Ramseyovy věty plyne nerovnost

$$r(k-1, l) + r(k, l-1) \geq r(k, l),$$

protože pro $n = r(k-1, l) + r(k, l-1)$ jsme již dokázali její tvrzení pro k, l .

Důsledek 2.4.6.

$$r(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$$

Důkaz. Indukcí podle $(k+l)$. Uvedeme pouze indukční krok, platnost vztahu pro $k=1, l \in \mathbb{N}$ (a pro $k \in \mathbb{N}, l=1$) lze ověřit prostým dosazením.

$$r(k, l) \leq r(k-1, l) + r(k, l-1) \leq \binom{k-1+l-2}{k-2} + \binom{k+l-1-2}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}.$$

□

Důsledek 2.4.7.

$$r(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq 4^{k-1}$$

Důkaz. Jedná se o dosazení $l = k$. Pokud jde o pravou nerovnost, platí

$$\binom{2n}{n} \leq \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} 1^j 1^{(2n-j)} = (1+1)^{2n} = 4^n,$$

kde $\binom{2n}{n}$ je pouze poslední člen uvedené sumy. □

Poznámka. Ještě lepší odhad získáme použitím Stirlingovy formule:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} \approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi \cdot 2n}}{n^{2n} e^{-2n} \cdot 2\pi n} \approx \frac{c}{\sqrt{n}} 4^n,$$

takže po dosazení

$$r(k, k) \leq \frac{\tilde{c}}{\sqrt{k-1}} 4^{k-1} = \frac{c}{\sqrt{k}} 4^k.$$

Věta 2.4.8. Pro každé $k, l \in \mathbb{N}$ platí

$$r(kl+1, kl+1) - 1 \geq (r(k+1, k+1) - 1)(r(l+1, l+1) - 1).$$

Důkaz. Pro účely důkazu si definujeme kompozici dvou grafů $G = (V, E)$ a $H = (U, F)$ jako graf

$$G[H] = (V \times U, \mathcal{E}),$$

kde

$$\{(v_1, u_1), (v_2, u_2)\} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (\{v_1, v_2\} \in E \vee (v_1 = v_2 \wedge \{u_1, u_2\} \in F)).$$

Graf $G[H]$ si můžeme představit jako graf G , kde každý vrchol $v_i \in V$ je nahrazen kopií grafu H („knedlíkem“), kterou můžeme označit H_i . Vede-li mezi dvěma vrcholy v_i, v_j hrana v grafu G , pak v $G[H]$ vedou hrany mezi každými dvěma vrcholy $w_1 \in H_i, w_2 \in H_j$.

Pro $G[H]$ platí vztahy

$$\begin{aligned} \omega(G[H]) &= \omega(G)\omega(H), \\ \alpha(G[H]) &= \alpha(G)\alpha(H), \end{aligned}$$

které docela přímočaře využijeme při důkazu tvrzení věty. Nejprve ale pojďme ověřit jejich platnost.

- Počet „knedlíků“, ve kterých se vyskytuje nějaký vrchol z libovolné kliky v $G[H]$, je $\leq \omega(G)$. Dokážeme to (až zbytečně detailně) sporem. Necht' pro každé $i \in \hat{m}, m > \omega(G)$ jsou $w_i \in H_i$ vrcholy z různých „knedlíků“ a necht' $\{w_1, \dots, w_m\}$ je součástí kliky v $G[H]$. Z předpokladu $m > \omega(G)$ vrcholy $\{v_1, \dots, v_m\}$ grafu G příslušné „knedlíkům“ $\{H_1, \dots, H_m\}$ netvoří kliku. Proto $\exists i_1, i_2 \in \hat{m}$ takové, že $\{v_{i_1}, v_{i_2}\} \notin E$. To ale znamená, že mezi H_{i_1} a H_{i_2} nevedou hrany, takže $\{w_{i_1}, w_{i_2}\} \notin \mathcal{E}$, což je spor.
- Z jednoho „knedlíku“ se v libovolné klice v $G[H]$ může vyskytovat nejvýše $\omega(H)$ vrcholů. Důkaz je obdobný. Jestliže vybereme z jednoho „knedlíku“ H_i více vrcholů, pak netvoří kliku v H_i , a tedy nemohou být součástí kliky v $G[H]$.

Tím jsme dokázali, že

$$\omega(G[H]) \leq \omega(G)\omega(H). \quad (2.4.1)$$

Je však zřejmé, že vezmeme-li H_i odpovídající vrcholům z maximální kliky v G a v každém H_i vybereme vrcholy tvořící maximální kliku v H_i , dostaneme kliku v $G[H]$ velikosti právě rovné $\omega(G)\omega(H)$, a podle nerovnosti (2.4.1) jde už o kliku maximální. Proto platí

$$\omega(G[H]) = \omega(G)\omega(H).$$

Druhý vztah pro velikosti nezávislé množiny se ověří naprosto stejným způsobem, v předchozích úvahách stačí slovo „klicka“ nahradit slovem „nezávislá množina“.

Nyní již ukážeme tvrzení věty. Z definice ramseyovských čísel $r(k, l)$ plyne:

- pro $r(k+1, k+1) - 1$: Existuje graf G na $r(k+1, k+1) - 1$ vrcholech, pro který $\omega(G) < k+1$ a zároveň $\alpha(G) < k+1$. To znamená, že $\omega(G) \leq k, \alpha(G) \leq k$.
- pro $r(l+1, l+1) - 1$: Existuje graf H na $r(l+1, l+1) - 1$ vrcholech, pro který $\omega(H) < l+1$ a zároveň $\alpha(H) < l+1$. To znamená, že $\omega(H) \leq l, \alpha(H) \leq l$.

Z toho plyne, že pro kompozici grafů G, H , tj. pro graf $G[H]$, platí

- $G[H]$ je graf na $(r(k+1, k+1) - 1)(r(l+1, l+1) - 1)$ vrcholech,
- $\omega(G[H]) = \omega(G)\omega(H) \leq kl < kl + 1$
- $\alpha(G[H]) = \alpha(G)\alpha(H) \leq kl < kl + 1$

Jinými slovy to znamená, že jsme našli graf na $(r(k+1, k+1) - 1)(r(l+1, l+1) - 1)$ vrcholech, který neobsahuje ani kliku ani nezávislou množinu velikosti $kl + 1$. Opět přímo z definice ramseyovských čísel tak máme

$$r(kl + 1, kl + 1) > (r(k + 1, k + 1) - 1)(r(l + 1, l + 1) - 1),$$

takže

$$r(kl + 1, kl + 1) - 1 \geq (r(k + 1, k + 1) - 1)(r(l + 1, l + 1) - 1).$$

□

Důsledek 2.4.9. *Necht' $i \in \mathbb{N}_0$. Potom*

$$r(2^i + 1, 2^i + 1) \geq 5^i + 1.$$

Důkaz. Indukcí podle i . Pro $i = 0$ máme $r(2, 2) \geq 2$, což platí, neboť víme, že obecně $r(k, 2) = k$.

Indukční krok $i - 1 \rightarrow i$ pro $i \geq 1$: Zvolme $k = 2^{i-1}, l = 2$. Potom použijeme předchozí větu a máme

$$\begin{aligned} r(2^i + 1, 2^i + 1) - 1 &= r(2^{i-1} \cdot 2 + 1, 2^{i-1} \cdot 2 + 1) - 1 \geq \\ &\geq (r(2^{i-1} + 1, 2^{i-1} + 1) - 1)(r(2 + 1, 2 + 1) - 1) \geq 5^{i-1} \cdot 5 = 5^i. \end{aligned}$$

V poslední nerovnosti jsme použili indukční předpoklad. □

Poznámka 2.4.10. $r(k, k)$ je rostoucí funkce v k , což je zřejmé už z definice. Dále pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $i \in \mathbb{N}_0$ tak, že

$$2^i + 1 \leq k < 2^{i+1} + 1.$$

Z pravé nerovnosti dostáváme

$$\frac{k-1}{2} \leq 2^i. \quad (2.4.2)$$

Můžeme tedy nejprve odhadnout

$$(2^i)^{\log_2 5} = 2^{i \log_2 5} = 5^i \leq r(2^i + 1, 2^i + 1) \leq r(k, k)$$

a nyní s využitím (2.4.2) dostaneme

$$O(k^{\log_2 5}) = \left(\frac{k-1}{2}\right)^{\log_2 5} \leq (2^i)^{\log_2 5} \leq r(k, k).$$

Máme tedy dolní odhad $r(k, k)$, který je nesrovnatelně menší než horní odhad odvozený v důsledku 2.4.7.

Jedná se o nejlepší známou *konstruktivní* mez. To znamená, že pro každé $n < \left(\frac{k-1}{2}\right)^{\log_2 5}$ jsme schopni najít graf na n vrcholech, který neobsahuje ani K_k ani nezávislou množinu velikosti k . Ke konstrukci grafu již máme všechny znalosti: K danému k nalezneme i , a dále podle důsledku 2.4.9 (indukcí podle $i = 0, 1, 2, \dots, i$), pomocí kompozice popsané v důkazu věty 2.4.8, nalézáme postupně grafy na stále větším počtu vrcholů, které neobsahují kliku ani nezávislou množinu velikosti $2^{\tilde{i}} + 1$.

2.4.2 Erdősova věta - dolní odhad $r(k, k)$

Než vyslovíme větu, která udává ještě lepší (avšak již nikoliv konstruktivní) dolní odhad $r(k, k)$, připravíme si malé technické lemma, které odhaduje kombinační číslo $\binom{n}{k}$.

Lemma 2.4.11. *Necht' $n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$. Potom*

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k.$$

Důkaz. Dokážeme dokonce silnější tvrzení

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k.$$

Vezměme $x \in (0, 1]$. Potom z binomické věty plyne

$$\sum_{i=1}^k \binom{n}{i} x^i \leq \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n.$$

Nerovnost vynásobíme x^{-k} a dostaneme

$$\sum_{i=1}^k \binom{n}{i} \underbrace{x^{i-k}}_{\geq 1} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}.$$

Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí (např. z Taylorova rozvoje) nerovnost $1+x \leq e^x$, tak

$$\sum_{i=1}^k \binom{n}{i} \leq \sum_{i=1}^k \binom{n}{i} \underbrace{x^{i-k}}_{\geq 1} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k} \leq \frac{e^{xn}}{x^k}.$$

Z předpokladu platí $\frac{k}{n} \in (0, 1]$, a tak je možné dosadit $x = \frac{k}{n}$, čímž dostaneme

$$\sum_{i=1}^k \binom{n}{i} \leq \frac{e^{xn}}{x^k} = \frac{e^{\frac{k}{n}n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k} = \left(\frac{ne}{k}\right)^k.$$

□

Věta 2.4.12. (Erdős)

Necht' $k \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$d \cdot k \cdot 2^{\frac{k}{2}} \leq r(k, k),$$

kde $d \in \mathbb{R}^+$.

Poznámka. Erdősova věta udává nejlepší známou dolní mez pro $r(k, k)$. Tato mez je ve tvaru exponenciely o základu $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Přitom horní mez je podle důsledku 2.4.7 exponenciela o základu 4.

Důkaz. Necht' je dáno $k \in \mathbb{N}$. Spočítáme pravděpodobnost, že náhodný graf G_n na n vrcholech (viz. také věta 2.3.11) obsahuje kliku nebo nezávislou množinu velikosti k . Pokud pro nějaké n je tato pravděpodobnost menší než 1, tj.

$$\Pr((\omega(G_n) \geq k) \vee (\alpha(G_n) \geq k)) < 1, \quad (2.4.3)$$

tak pravděpodobnost doplňkového jevu je nenulová, tj.

$$\Pr((\omega(G_n) < k) \wedge (\alpha(G_n) < k)) > 0.$$

To ale znamená, že existuje graf na n vrcholech, pro nějž $(\omega(G_n) < k) \wedge (\alpha(G_n) < k)$, takže

$$\boxed{r(k, k) > n.}$$

Abychom tedy dokázali tvrzení věty, stačí najít n ve tvaru $n = d \cdot k \cdot 2^{\frac{k}{2}}$ a dokázat pro něj vztah (2.4.3). To nyní postupně provedeme.

Náhodný graf G_n má mezi libovolnými dvěma vrcholy hranu s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Pravděpodobnost, že G_n obsahuje kliku velikosti k na konkrétních vrcholech $v_1, \dots, v_k$, je tedy

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$$

V následujícím hned dvakrát využijeme vztah pro pravděpodobnost sjednocení jevů A_j ($j \in \mathcal{J}$), který zní

$$\Pr\left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j\right) \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \Pr(A_j). \quad (2.4.4)$$

Nejprve s jeho pomocí odhadneme pravděpodobnost, že G_n obsahuje kliku velikosti k na libovolných k vrcholech, tj. na libovolné k -prvkové podmnožině $M \subset V(G_n)$:

$$\Pr(\omega(G_n) \geq k) \leq \sum_{M \in \binom{V(G_n)}{k}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^{\binom{k}{2}}}.$$

Dále si uvědomíme, že stejnou úvahu lze (díky pravděpodobnosti existence každé hrany rovné $\frac{1}{2}$) provést i pro nezávislou množinu, a tedy

$$\Pr(\alpha(G_n) \geq k) = \Pr(\omega(G_n) \geq k).$$

Proto opět podle (2.4.4) platí

$$\Pr((\omega(G_n) \geq k) \vee (\alpha(G_n) \geq k)) \leq 2 \binom{n}{k} \frac{1}{2^{\binom{k}{2}}}.$$

Použijeme-li odhad $\binom{n}{k}$ z lematu 2.4.11, dostaneme

$$\begin{aligned} \Pr((\omega(G_n) \geq k) \vee (\alpha(G_n) \geq k)) &\leq 2 \binom{n}{k} \frac{1}{2^{\binom{k}{2}}} \leq 2 \left(\frac{ne}{k}\right)^k \frac{1}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} = \\ &= \left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2^{-\frac{1}{2}}}}_{\leq 2} \cdot \frac{ne}{k}\right)^k \leq \left(2e \frac{n}{k2^{\frac{k}{2}}}\right)^k < 1, \end{aligned}$$

kde poslední nerovnost je splněna, pokud

$$n < \underbrace{\frac{1}{2e}}_d \cdot k \cdot 2^{\frac{k}{2}}.$$

Tím je věta dokázána. □

Kapitola 3

Generující funkce

Do kursu kombinatoriky a teorie grafů tradičně patří také kapitola o generujících funkcích, i když v rozsahu naší přednášky se samotné teorie grafů dotýká jen okrajově. Budeme se zabývat mocninnými řadami, s jejichž pomocí lze s úspěchem vyřešit zdánlivě velmi složité kombinatorické problémy. Tato kapitola pojednává o obyčejných mocninných řadách a exponenciálních generujících funkcích. Neobsahuje výklad Dirichletových generujících funkcí, které však nebyly součástí zkoušené látky.

Základní myšlenkou aplikovanou na problémy v této kapitole je zpravidla přeformulování kombinatorické úlohy na úlohu nalezení koeficientů mocninné řady, jejíž součet (generující funkci) známe. Přitom vždy využíváme jednoznačnost rozvoje funkce do mocninné řady.

3.1 Obyčejné mocninné řady

Připomeňme si nejprve definici číselné řady.

Definice. Necht' $(a_n)_{n=1}^\infty$ je číselná posloupnost. Necht' $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. **Číselnou řadou** nazýváme dvojici posloupností $((a_n)_{n=0}^\infty, (s_n)_{n=0}^\infty)$, kterou označujeme zkráceně jako $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Číslo a_n se nazývá **n -tý člen** řady, s_n se nazývá **n -tý částečný součet** řady. Jestliže existuje limita $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, potom s se nazývá **součet** řady a často se označuje též jako $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Definice 3.1.1. Necht' $z \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n=0}^\infty$ je číselná posloupnost. **Obyčejnou mocninnou řadou** (angl. *ordinary power series*, OPS) rozumíme číselnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

a její součet (pokud existuje) nazýváme **generující funkcí** této řady. Tento součet je funkcí proměnné z . Korespondenci posloupnosti koeficientů OPS a generující funkce $f(z)$ této OPS zapisujeme jako

$$(a_n)_{n=0}^\infty \xrightarrow{OPS} f(z).$$

Příklad.

$$(1)_{n=1}^\infty \xrightarrow{OPS} \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

3.1.1 Pravidla pro počítání s OPS

Jestliže

$$(a_n)_{n=0}^\infty \xrightarrow{OPS} f(z), (b_n)_{n=0}^\infty \xrightarrow{OPS} g(z),$$

tak potom lze odvodit následující vztahy:

1. Pro posunutí indexu o 1 platí

$$\boxed{(a_{n+1})_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{OPS} \frac{1}{z} (f(z) - f(0))},$$

protože

$$(a_{n+1})_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{OPS} h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

přičemž zřejmě poslední výraz je roven $(f(z) - f(0))$, protože $f(0) = a_0 z^0 = a_0$.

2. Pro násobení mocninou konstanty platí

$$\boxed{(c^n a_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{OPS} f(cz)},$$

což je zřejmé.

3. Pro násobení indexem n platí

$$\boxed{(na_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{OPS} z f'(z)},$$

protože platí $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}$, ale my potřebujeme $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n z^n$.

4. Zřejmě platí

$$\boxed{(a_n \pm b_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{OPS} f(z) \pm g(z)}. \quad (3.1.1)$$

5. Podle vzorce pro násobení mocninných řad platí

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{OPS} f(z)g(z)},$$

protože

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

6. Pro posloupnost částečných součtů platí

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^n a_k \right)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{OPS} \frac{1}{1-z} f(z)},$$

protože jde o aplikaci předchozího bodu při volbě $b_n = 1$, a tedy $g(z) = \frac{1}{1-z}$.

7. Podle předchozích pravidel platí

$$\boxed{\left(\frac{a_n + (-1)^n a_n}{2} \right)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{OPS} \frac{f(z) + f(-z)}{2}},$$

kde ovšem

$$\frac{a_n + (-1)^n a_n}{2} = \begin{cases} a_n & n \text{ sudé} \\ 0 & n \text{ liché} \end{cases},$$

čemuž odpovídá řada pouze ze sudých členů

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}.$$

3.1.2 Jednoduché příklady

Příklad 3.1.2. Vypočítejte součet $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2$.

Pokusíme se daný součet vyjádřit jako n -tý koeficient OPS. Používáním právě odvozených pravidel dostáváme postupně:

$$\begin{aligned} (1)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{OPS} \frac{1}{1-z}, \\ (n \cdot 1)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{OPS} z \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{z}{(1-z)^2}, \\ (n \cdot n)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{OPS} z \left(\frac{z}{(1-z)^2} \right)' = \dots = z \frac{1+z}{(1-z)^3}, \\ ((-1)^n n^2)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{OPS} -z \frac{1-z}{(1+z)^3}, \\ \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 \right)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{OPS} \frac{1}{1-z} \left(-z \frac{1-z}{(1+z)^3} \right) = \frac{-z}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n. \end{aligned}$$

Částečné součty $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2$ lze nyní najít pomocí rozvoje funkce $\frac{-z}{(1+z)^3}$ do mocninné řady, neboť tento rozvoj je vždy jednoznačný. Jestliže tedy jakkoliv nalezneme koeficienty rozvoje A_n , tak potom platí

$$A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2.$$

Nejprve si odvodíme ještě jedno užitečné pravidlo pro počítání s OPS. Postupně derivujeme:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \\ f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}, \\ f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}, \\ f'''(z) = \frac{6}{(1-z)^4} &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) z^{n-3}, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(z) = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}} &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} k! z^{n-k}. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n$$

a tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\boxed{\left(\binom{n+k}{k} \right)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{OPS} \frac{1}{(1-z)^{k+1}}}. \quad (3.1.2)$$

Jestliže nyní dosadíme $k = 2$ a za proměnnou z dosadíme $-z$, pak dostaneme

$$\frac{-z}{(1+z)^3} = (-z) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+2}{2} (-1)^{n+1}}_{A_{n+1}} z^{n+1}.$$

Nalezli jsme tedy (jednoznačně určené) koeficienty rozvoje funkce $\frac{-z}{(1+z)^3}$ do mocninné řady, a proto platí

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = A_n = \binom{n+1}{2} (-1)^n.$$

Poznámka. Všimněme si, že vzorec (3.1.2) jsme použili pouze na funkci $\frac{1}{(1+z)^3}$ a teprve výsledek jsme vynásobili $(-z)$. Tím na pravé straně zůstala mocninná řada, kterou jsme nakonec vhodně upravili posunutím indexů.

Poznámka. Získaný výsledek si můžeme ověřit pro n sudé, kdy lze hledanou sumu sečíst i jednodušším způsobem:

$$\begin{aligned} -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - \dots - (n-1)^2 + n^2 &= \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} -(2i-1)^2 + (2i)^2 = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (4i-1) = 4 \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}{2} - \frac{n}{2} = \\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} \underbrace{(-1)^n}_1 \end{aligned}$$

Příklad 3.1.3. Vypočítejte n -tý člen Fibonacciho posloupnosti, která je definována rekurentním vztahem

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Opět považujeme F_n za n -tý koeficient určité OPS a najdeme její generující funkci. Při tom využijeme rekurentní vztah z definice posloupnosti (F_n) . Platí

$$\begin{aligned} (F_n)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{OPS} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n, \\ (F_{n+1})_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{OPS} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{1}{z} f(z), \\ (F_{n+2})_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{OPS} \frac{\frac{1}{z} f(z) - \overbrace{\frac{1}{0} f(0)}^{=1}}{z} = \frac{f(z) - z}{z^2}. \end{aligned}$$

V posledním řádku je třeba vysvětlit formální zápis $\frac{1}{0} f(0)$. Generující funkce OPS dané posloupností $(F_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ je $h(z) = \frac{1}{z} f(z)$, ale podle příslušného pravidla pro počítání s OPS (viz. část 3.1.1) je hodnota $h(0)$ rovna nultému koeficientu řady, což je $F_1 = 1$. Nyní podle pravidla (3.1.1) můžeme převést rovnost posloupností

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

na rovnost generujících funkcí

$$\frac{f(z) - z}{z^2} = \frac{1}{z} f(z) + f(z),$$

z čehož snadno vyjádříme generující funkci $f(z)$ jako

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Jestliže nyní $f(z)$ rozvineme do mocninné řady, budou koeficienty u mocnin z^n právě hledaná Fibonacciho čísla. Abychom si rozvoj usnadnili, uvědomíme si, že funkci $f(z)$ lze rozložit na parciální zlomky

$$f(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{A}{r_1-z} + \frac{B}{r_2-z},$$

kde r_1, r_2 jsou kořeny polynomu $1-z-z^2$. Nyní stačí rozvinout jednotlivé parciální zlomky, což je snadné, neboť se jedná jen o substituci v geometrické řadě. Například můžeme uvažovat takto:

$$\begin{aligned} (1)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{OPS} \frac{1}{1-z}, \\ \left(\left(\frac{1}{r}\right)^n\right)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{OPS} \frac{1}{1-\frac{z}{r}} = r \frac{1}{r-z}, \\ \left(\frac{A}{r} \left(\frac{1}{r}\right)^n\right)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{OPS} \frac{A}{r-z}. \end{aligned}$$

Proto

$$f(z) = \frac{A}{r_1-z} + \frac{B}{r_2-z} = \frac{A}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_1^n} z^n + \frac{B}{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_2^n} z^n$$

a tedy

$$F_n = \frac{A}{r_1^{n+1}} + \frac{B}{r_2^{n+1}}.$$

Příklad 3.1.4. Dokažte rovnost

$$\underbrace{\sum_{k \geq 0} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m}}_{a_n} = \underbrace{\sum_{k \geq 0} \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k}_{b_n} \text{ pro } m, n \geq 0.$$

Dokážeme, že levá a pravá strana jsou koeficienty dvou OPS, které mají stejné generující funkce. Z jednoznačnosti rozvoje se pak musí rovnat i tyto koeficienty. Jak se ukáže, nemusíme ani znát konkrétní hodnotu těchto koeficientů.

Nejprve hledejme generující funkci příslušnou posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \geq 0} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} \right) z^n = \sum_{k \geq 0} \binom{m}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{m} z^n =$$

... meze u sum omezíme na rozsah, kde jsou kombinační čísla $\binom{m}{k}$ a $\binom{n+k}{m}$ nenulová ...

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{m} z^n = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{n=m-k}^{\infty} \binom{n+k}{m} z^n =$$

... další úpravy směřujeme k použití rovnosti (3.1.2). Označme $j = n + k - m$...

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^{m-k} \sum_{n=m-k}^{\infty} \binom{n+k-m+m}{m} z^{n+k-m} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^{m-k} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+m}{m} z^j}_{\frac{1}{(1-z)^{m+1}}} =$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{m+1}} \cdot \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 1^k z^{m-k} = \frac{1}{(1-z)^{m+1}} \cdot (1+z)^m = \frac{(1+z)^m}{(1-z)^{m+1}}.$$

Nyní obdobným způsobem vypočítáme generující funkci příslušnou posloupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \geq 0} \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k \right) z^n = \sum_{k \geq 0} \binom{m}{k} 2^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^n = \\
&= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z^n = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^{n+k}}_{\frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^k \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}} = \\
&= \frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\frac{2z}{1-z} \right)^k \cdot 1^{m-k} = \frac{1}{1-z} \left(\frac{2z}{1-z} + 1 \right)^m = \frac{1}{1-z} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^m = \frac{(1+z)^m}{(1-z)^{m+1}}.
\end{aligned}$$

Obě generující funkce jsou si tedy skutečně rovny a proto platí i $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

3.1.3 Rozměňovací problém

Příklad 3.1.5. Hledejme počet různých řešení rovnice

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = R, \quad (3.1.3)$$

kde $k_{1,2,3} \in \mathbb{N}$ jsou neznámé a $R \in \mathbb{N}$. Jestliže vynásobíme geometrické řady s kvocienty $q = x, q = x^2$ a $q = x^3$, dostaneme součin

$$\begin{aligned}
&(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots) (x^0 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots) (x^0 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots) = \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.
\end{aligned}$$

Výsledkem je opět mocninná řada, jejíž generující funkci známe. Koeficient a_R u členu x^R pak udává počet řešení rovnice (3.1.3), neboť x^R vznikne v daném součinu řad vždy jako součin

$$x^R = x^{k_1} x^{2k_2} x^{3k_3},$$

a tato mocnina x se vyskytne ve výsledné řadě právě tolikrát, kolik je různých řešení rovnice (3.1.3).

Uvedený příklad je speciálním případem tzv. **rozměňovacího problému** (angl. *money changing problem*). Zabýváme se otázkou, zda a případně kolika způsoby je možné zaplatit danou částku pouze s pomocí mincí (nebo bankovek) určitých hodnot. Matematicky tento problém definujeme následovně:

Úmluva. **Největší společný dělitel** (NSD) množiny přirozených čísel $\{a_1, \dots, a_M\}$ označujeme jako $\delta(a_1, \dots, a_M)$. Jestliže $\delta(a_1, \dots, a_M) = 1$, tak říkáme, že čísla $a_1, \dots, a_M$ jsou **nesoudělná**.

Definice 3.1.6. Necht' jsou dána přirozená čísla $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_M$ taková, že $\delta(a_1, \dots, a_M) = 1$. Potom definujeme množinu

$$S(a_1, \dots, a_M) = \left\{ \sum_{i=1}^M \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Poznámka. Množina S obsahuje právě ty částky, které lze zaplatit pomocí M různých druhů mincí s hodnotami $a_1, \dots, a_M$. Je zřejmé, že pokud by $\delta(a_1, \dots, a_M) > 1$, tak by množina S obsahovala pouze (ale nikoliv právě) násobky $\delta(a_1, \dots, a_M)$.

Věta 3.1.7. $(\exists n_0) (\forall n \geq n_0) (n \in S(a_1, \dots, a_m))$.

Poznámka. Věta říká, že pro daný počet a hodnoty mincí lze od určité výše zaplatit s jejich pomocí libovolnou částku. Tuto větu dokážeme později pomocí OPS, ovšem dříve se zaměříme pouze na případ $M = 2$, kdy lze o množině S říci něco více (například explicitně určit n_0). Pro tento případ OPS potřebovat nebudeme.

Rozměňovací problém pro $M = 2$

Věta 3.1.8. *Necht' $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, $\delta(a, b) = 1$. Necht' $\kappa = (a - 1)(b - 1)$. Potom*

- $(\forall n \geq \kappa) (n \in S(a, b))$,
- $\kappa - 1 \notin S(a, b)$,
- *Právě polovina čísel z množiny $\{0, 1, 2, \dots, \kappa - 1\}$ patří do $S(a, b)$.*

Poznámka. $S(a, b) = \{\alpha_1 a + \alpha_2 b \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0\}$. Proto lze říci, že přirozené číslo $R \in S(a, b)$ právě tehdy, když rovnice

$$ak_1 + bk_2 = R$$

má řešení $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$. Podle příkladu 3.1.5 nás tedy pro dané R zajímá jen to, zda je koeficient u x^R v určité mocninné řadě kladný nebo je roven nule.

Důkaz. Z algebry víme, že pro každá $a, b \in \mathbb{Z}$ existují $x, y \in \mathbb{Z}$ tak, že $\delta(a, b) = ax + by$. V našem případě tedy $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že

$$ax + by = 1.$$

Díky tomu rovněž $(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{Z}) (a\tilde{x} + b\tilde{y} = n)$. Každé přirozené číslo tedy můžeme napsat jako lineární kombinaci čísel a, b s celočíselnými koeficienty. Nás však zajímá, kdy lze volit tyto koeficienty jako nezáporné.

Nejprve si uvědomíme, že obecné řešení rovnice $ax + by = n$, $x, y \in \mathbb{Z}$, má tvar

$$(x, y) = (x_p, y_p) + (x_0, y_0), \quad (3.1.4)$$

kde (x_0, y_0) řeší homogenní rovnici $ax + by = 0$ a (x_p, y_p) představuje partikulární řešení. Vzhledem k nesoudělnosti čísel a, b platí pro řešení homogenní rovnice $ax + by = 0 \Leftrightarrow ax = -by \Rightarrow \begin{cases} a|y & \Rightarrow y = r \cdot a \\ b|x & \Rightarrow x = s \cdot b \end{cases}$.

Po dosazení máme $asb = -bra$ a tedy $s = -r$. Tím jsme ukázali, že obecné řešení (x, y) homogenní rovnice má tvar

$$(x, y) = (-rb, ra) = r(-b, a),$$

kde $r \in \mathbb{Z}$.

Stále zbývá otázka, kdy existují $x, y \geq 0$ taková, že $ax + by = n$. Abychom odpověděli, vyřešíme nejprve tuto rovnici v oboru celých čísel. Je zřejmé, že složky řešení nebudou obě záporné, protože a, b i n jsou přirozená čísla. Získali jsme tedy partikulární řešení rovnice s pravou stranou, ke kterému můžeme přičíst $r(-b, a)$ a získat jiné řešení naší rovnice. Naše otázka tedy přešla na otázku, kdy existuje $r \in \mathbb{Z}$ takové, že výsledné řešení (3.1.4) je nezáporné.

Zřejmě existuje právě jedno řešení $(\bar{x}, \bar{y})$ takové, že $\bar{x} \in \{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$ (skutečně, pomocí volby r můžeme x posouvat po krocích o velikosti b). Takové $\bar{x}$ je nejmenší nezáporné, tj.

$$\bar{x} = \min \{x \mid ax + by = n \wedge x, y \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\}.$$

$\bar{y}$ je pak dané jednoznačně a je největší možné, tj.

$$\bar{y} = \max \{y \mid ax + by = n \wedge x, y \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\}.$$

Proto $n \in S(a, b)$ právě tehdy, když (k němu jednoznačně příslušné) $\bar{y} \geq 0$.

Nyní již přímo dokážeme první tvrzení věty. Necht' $n \geq \kappa$. Potom

$$\begin{aligned} a\bar{x} + b\bar{y} = n &\geq ab - a - b + 1, \\ b\bar{y} &\geq ab - a - a\bar{x} - b + 1 = \\ &= a \underbrace{(b - 1 - \bar{x})}_{\geq 0} - b + 1, \\ \bar{y} &\geq -1 + \frac{1}{b} \leftarrow (\bar{y} \in \mathbb{Z}, \text{ a tak platí také...}) \\ \bar{y} &\geq 0. \end{aligned}$$

To znamená, že $(\bar{x}, \bar{y})$ je nezáporné a $n \in S(a, b)$.

Nyní necht' $n \in \{0, 1, 2, \dots, \kappa - 1\}$. Potom $n \in S(a, b)$, právě když

$$ax + by = n, \quad x, y \geq 0, x \in \{0, \dots, b-1\},$$

což je ekvivalentní s

$$\kappa - 1 - n = ab - a - b - ax - by = a \underbrace{(b-1-x)}_{=\bar{x} \in \{0, \dots, b-1\}} + b \underbrace{(-1-y)}_{=\bar{y} < 0}.$$

Číslo $\bar{x}$ je opět nejmenší nezáporné, takže poslední vztah znamená, že $\kappa - 1 - n \notin S(a, b)$. Pro $n \in \{0, 1, 2, \dots, \kappa - 1\}$ tedy v $S(a, b)$ leží vždy právě jedno z čísel n a $\kappa - 1 - n$, což dokazuje poslední bod.

Zbývá dokázat, že $\kappa - 1 \notin S(a, b)$, ale to je snadné s použitím předchozího. Platí totiž $0 = 0 \cdot a + 0 \cdot b \in S(a, b)$, takže $\kappa - 1 = \kappa - 1 - 0 \notin S(a, b)$. $\square$

Nyní se vrátíme k OPS a s jejich pomocí odhadneme počet způsobů nakombinování určité částky pomocí (stále jen) dvou typů mincí o různých hodnotách a, b , $\delta(a, b) = 1$. Z předchozí věty víme, že pro $n \geq \kappa = (a-1)(b-1)$ musí být tento počet kladný. *Dovolují si upozornit, že i když následující řádky nepředstavují důkaz žádné věty, jsou velmi důležité pro pochopení dalšího výkladu.*

Víme, že počet způsobů nakombinování částky n je roven počtu nezáporných celočíselných řešení rovnice

$$ax + by = n,$$

a podle příkladu 3.1.5 též víme, že tento počet je roven koeficientu i x^n v mocninné řadě, která vznikne jako součin řad

$$(1 + x^a + x^{2a} + x^{3a} + \dots) \cdot (1 + x^b + x^{2b} + x^{3b} + \dots),$$

protože x^n vznikne jako $x^{ak_1} \cdot x^{bk_2}$. Mocninné řady umíme sečíst, a tak víme, že generující funkce výsledné OPS je

$$f(x) = \frac{1}{1-x^a} \cdot \frac{1}{1-x^b}.$$

Jestliže chceme tuto funkci rozvinout do mocninné řady, bude třeba provést její rozklad na parciální zlomky. Kořeny jmenovatelů jsou řešeními binomické rovnice $\omega^a = 1$, resp. $\omega^b = 1$, a jsou to tedy (v prvním případě) čísla $\left\{ e^{k \frac{2\pi}{a} i} \mid k = 0, 1, \dots, a-1 \right\}$.

Kořeny celého jmenovatele, tj. $(1-x^a)(1-x^b)$, jsou tedy uvedeného tvaru, přičemž 1 je dvojnásobný kořen a ostatní kořeny jsou už jednoduché. To dokážeme sporem. Necht' se rovnají kořeny

$$e^{k_1 \frac{2\pi}{a} i} = e^{k_2 \frac{2\pi}{b} i}.$$

Potom se rovnají i příslušné exponenty, takže

$$\frac{k_1}{a} = \frac{k_2}{b} = \frac{t}{s},$$

kde $\frac{t}{s}$ je zlomek ve zkráceném tvaru, a přitom (z definice k_1, k_2) je $\frac{t}{s} < 1$, což znamená, že $s \geq 2$. Protože zlomek je ve zkráceném tvaru, tak $s|a$ a zároveň $s|b$, z čehož plyne $s|\delta(a, b)$, ale $\delta(a, b) = 1$, což je spor.

Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar¹

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)} = \underbrace{\frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x}}_{\text{pro 2-násobný kořen 1}} + \sum_{\substack{\omega^a=1 \\ \omega \neq 1}} \frac{C_\omega}{1-\frac{x}{\omega}} + \sum_{\substack{\xi^b=1 \\ \xi \neq 1}} \frac{D_\xi}{1-\frac{x}{\xi}}, \quad (3.1.5)$$

kde koeficienty A, B, C_ω, D_ξ zatím neznáme. Jak se dále ukáže, bude pro naše účely stačit, pokud zjistíme hodnoty koeficientů A a B . To provedeme velmi šikovně.

¹Přirozenější tvar zlomků v sumách vpravo je asi $\frac{\tilde{C}_\omega}{\omega-x}$, resp. $\frac{\tilde{D}_\xi}{\xi-x}$, kde $\tilde{C}_\omega = \omega C_\omega$ a $\tilde{D}_\xi = \xi D_\xi$. Pro rozvoj do mocninné řady pomocí vztahu (3.1.6) (viz. dále) se však spíše hodí tvar použitý v (3.1.5).

Rovnost (3.1.5) vynásobíme výrazem $(1-x)^2$ a provedeme limitu pro $x \rightarrow 1$. Dostaneme tak

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-x^a} \cdot \frac{1-x}{1-x^b} = A.$$

Limitu pravé strany jsme zde vypočítali rovnou, neboť je zřejmá na první pohled. Pro výpočet limity nalevo použijeme l'Hospitalovo pravidlo na jednotlivé zlomky, takže nakonec vyjde

$$A = \frac{1}{ab}.$$

Pro získání hodnoty B opět vynásobíme (3.1.5) výrazem $(1-x)^2$ a následně zderivujeme. Na pravé straně dostaneme $-B$ plus sumu výrazů s koeficienty C_ω a D_ξ , z nichž každý má tvar (uvedeme jen pro C_ω)

$$\left(\frac{C_\omega}{1-\frac{x}{\omega}} (1-x)^2 \right)' = \left(\frac{C_\omega}{1-\frac{x}{\omega}} \right)' (1-x)^2 - 2 \frac{C_\omega}{1-\frac{x}{\omega}} (1-x).$$

Pokud nyní opět provedeme limitu pro $x \rightarrow 1$, bude limita všech těchto výrazů rovna nule, protože pro $x \rightarrow 1$ je $\frac{C_\omega}{1-\frac{x}{\omega}} \rightarrow \text{konst} \neq 0$. Dostaneme tedy rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(1-x)^2}{(1-x^a)(1-x^b)} \right)' = B.$$

Limitu na pravé straně vypočítáme s dvojnásobným použitím l'Hospitalova pravidla, až nakonec vyjde

$$B = \frac{a+b-2}{2ab}.$$

Nyní si vzpomeneme na příklad 3.1.2, kde jsme odvodili rozvoj

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n. \quad (3.1.6)$$

Jednotlivé členy rozkladu na parciální zlomky tedy rozvineme do řady a obdržíme

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)} = A \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n + B \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{\substack{\omega^a=1 \\ \omega \neq 1}} C_\omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\omega^n} + \sum_{\substack{\xi^b=1 \\ \xi \neq 1}} D_\xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\xi^n}.$$

Jak jsme již uvedli, počet způsobů vyplacení částky n je roven koeficientu u x^n v uvedené mocninné řadě, a tento koeficient je roven (po dosazení hodnot A, B)

$$\frac{n+1}{ab} + \frac{a+b-2}{2ab} + \underbrace{\sum_{\substack{\omega^a=1 \\ \omega \neq 1}} \frac{C_\omega}{\omega^n} + \sum_{\substack{\xi^b=1 \\ \xi \neq 1}} \frac{D_\xi}{\xi^n}}_{\text{per}(n)} = \frac{n+1}{ab} + \frac{a+b-2}{2ab} + \text{per}(n).$$

Člen $\text{per}(n)$ je periodický s periodou ab a součet $\text{per}(n)$ přes periodu je 0. Proto je uvedený počet způsobů od jistého n určitě kladný.

Zbývá vysvětlit periodicitu členu $\text{per}(n)$. Protože $\omega^a = 1$ a $\xi^b = 1$, tak výraz $\frac{1}{\omega^n}$ má periodu a a výraz $\frac{1}{\xi^n}$ má periodu b . Proto i celá suma $\sum_{\substack{\omega^a=1 \\ \omega \neq 1}} \frac{C_\omega}{\omega^n}$ má periodu a a suma $\sum_{\substack{\xi^b=1 \\ \xi \neq 1}} \frac{D_\xi}{\xi^n}$ má periodu b . Celý součet má tedy periodu ab .

Nulový součet přes periodu zdůvodníme takto: Když $\omega^a = 1$, tak i $\frac{1}{\omega^a} = 1$. Čísla $\frac{C_\omega}{\omega^n}$ jsou proto vrcholy pravidelného a -úhelníku, které leží v komplexní rovině na kružnici o poloměru C_ω . Jejich součet (přes periodu o velikosti a) je těžištěm tohoto a -úhelníku, a toto těžiště leží v nule. Stejně pro $\frac{D_\xi}{\xi^n}$ a součet přes periodu o velikosti b .

Rozměňovací problém pro obecné M

Nyní se vrátíme k rozměňovacímu problému pro obecný počet typů mincí. Pomocí OPS dokážeme větu 3.1.7 a ještě něco navíc.

Věta 3.1.9. *Necht' jsou dána přirozená čísla $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_M$ taková, že $\delta(a_1, a_2, \dots, a_M) = 1$. Potom*

$$(\exists n_0) (\forall n \geq n_0) (n \in S(a_1, \dots, a_m))$$

a přitom počet způsobů, kterými lze n nakombinovat, se asymptoticky blíží číslu

$$\frac{n^{M-1}}{(M-1)! \cdot a_1 a_2 \cdots a_M},$$

tj. limita podílu skutečného počtu způsobů a uvedeného výrazu pro $n \rightarrow \infty$ je rovna 1.

Poznámka. Speciálně pro $M = 2$ vychází počet způsobů podle této věty přibližně $\frac{n}{a_1 a_2} = \frac{n}{ab}$ a v předchozím odvození jsme dospěli k číslu $\frac{n+1}{ab} + \frac{a+b-2}{2ab}$ (až na periodický člen). Pro $n \rightarrow \infty$ jde podíl obou výrazů skutečně k jedné.

Důkaz. Prostředky důkazu této věty budou velmi podobné myšlenkám, které jsme předvedli v předchozím odvození pro $M = 2$. Označme h_n hledaný počet způsobů pro dané n , tj. počet nezáporných celočíselných řešení $(k_1, \dots, k_M)$ rovnice

$$\sum_{i=1}^M a_i k_i = n.$$

Potom (stále podle stejné úvahy) je h_n rovněž koeficientem u x^n v mocninné řadě, která vznikne jako součin mocninných řad

$$(1 + x^{a_1} + x^{2a_1} + \dots)(1 + x^{a_2} + x^{2a_2} + \dots) \cdots (1 + x^{a_M} + x^{2a_M} + \dots) = \frac{1}{1 - x^{a_1}} \cdot \frac{1}{1 - x^{a_2}} \cdots \frac{1}{1 - x^{a_M}}.$$

Provedeme-li opět rozklad na parciální zlomky, podobně jako v předchozím odvození zjistíme, že jmenovatel má kořeny určitého tvaru, přičemž jediný M -násobný kořen je 1. Ostatní kořeny (již nemusí mít nutně násobnost 1, ale) mají násobnost menší než M . Při ověření tohoto tvrzení opět postupujeme sporem a využíváme předpokladu $\delta(a_1, a_2, \dots, a_M) = 1$.

Rozklad na parciální zlomky můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{1 - x^{a_1}} \cdot \frac{1}{1 - x^{a_2}} \cdots \frac{1}{1 - x^{a_M}} = \frac{A}{(1 - x)^M} + \sum_{\eta}^{\nu(\eta) \leq M-1} \sum_{j=1}^{\nu(\eta)} \frac{C_{\eta,j}}{(1 - \frac{x}{\eta})^j},$$

kde suma přes η znamená sumu přes všechny kořeny jmenovatele kromě kořenu 1 a $\nu(\eta)$ označuje násobnost kořenu η . Jediný koeficient rozkladu, který pro důkaz věty potřebujeme, je koeficient A . Jestliže uvedenou rovnost vynásobíme výrazem $(1 - x)^M$ a provedeme limitu pro $x \rightarrow 1$, dostaneme rovnost

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_M} = A,$$

přičemž pro výpočet limity nalevo jsme museli použít l'Hospitalovo pravidlo na každý zlomek $\frac{1-x}{1-x^{a_i}}$ zvlášť.

Nyní provedeme rozvoje jednotlivých sčítanců do mocninné řady podle (3.1.6), takže získáme

$$A \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+M-1}{M-1} x^n + \sum_{\eta}^{\nu(\eta) \leq M-1} \sum_{j=1}^{\nu(\eta)} C_{\eta,j} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j-1} \frac{x^n}{\eta^n}.$$

Koeficient u x^n , neboli h_n , je tedy roven

$$h_n = A \binom{n+M-1}{M-1} + \underbrace{\sum_{\eta} \sum_{j=1}^{\nu(\eta) \leq M-1} C_{\eta,j} \binom{n+j-1}{j-1} \frac{1}{\eta^n}}_{P(n)}.$$

$P(n)$ je polynom v proměnné n stupně nejvýše $M-2$, protože index j dosahuje hodnoty nejvýše $M-1$. Pokud nyní provedeme limitu pro $n \rightarrow \infty$ podílu h_n a odhadu z dokazované věty, dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{\underbrace{\frac{n^{M-1}}{(M-1)! a_1 a_2 \cdots a_M}}_{1/A}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+M-1)(n+M-2) \cdots (n+1)}{(M-1)!} + P(n)}{\frac{n^{M-1}}{(M-1)!}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{(n+M-1)(n+M-2) \cdots (n+1)}{n^{M-1}}}_{=1} + (M-1)! \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^{M-1}}}_{=0} = 1. \end{aligned}$$

□

Poznámka. Několik zajímavostí o rozměňovacím problému:

- Pro $M = 3$, $a_1 < a_2 < a_3$ je od roku 1970 známa minimální částka, kterou lze vyplatit.
- Od roku 1942 je známa minimální částka, kterou lze zaplatit, pokud $a_1 < a_2 < \dots < a_M$ tvoří aritmetickou posloupnost.
- Pro $M \geq 4$ ukázali Erdős a Graham, že maximální částka, kterou nelze vyplatit, je $\leq 2a_{M-1} \lfloor \frac{a_M}{M} \rfloor - a_M$.

3.1.4 Tvrzení z teorie čísel dokazatelná pomocí OPS

Věta 3.1.10. *Množinu přirozených čísel nelze zapsat jako konečné disjunktí sjednocení aritmetických posloupností s různými diferencemi.*

Poznámka. Pokud připustíme shodné difference u alespoň dvou posloupností, tak věta neplatí. Snadno si lze představit $\mathbb{N}$ jako sjednocení všech sudých a lichých přirozených čísel, nebo jako

$$\mathbb{N} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{4k-3 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{4k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Důkaz. Mějme posloupnosti $(a_1 + nd_1), (a_2 + nd_2), \dots, (a_M + nd_M)$ kde $M \geq 2$ a necht' platí

$$1 < d_1 < d_2 < \dots < d_M.$$

Předpokládejme, že tyto posloupnosti pokrývají celé $\mathbb{N}$. Sečteme-li řady

$$\begin{aligned} &x^{a_1} + x^{a_1+d_1} + x^{a_1+2d_1} + x^{a_1+3d_1} + \dots \\ &x^{a_2} + x^{a_2+d_2} + x^{a_2+2d_2} + x^{a_2+3d_2} + \dots \\ &\vdots \\ &x^{a_M} + x^{a_M+d_M} + x^{a_M+2d_M} + x^{a_M+3d_M} + \dots, \end{aligned}$$

musíme dostat řadu

$$x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \left(= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)$$

Pokud nejprve vypočítáme součet každé řady zvlášť (všechny řady jsou pro $x \in (0, 1)$ absolutně konvergentní) a dosadíme do rovnosti mezi součtem M řad na levé straně a řadou $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ na straně pravé, dostaneme rovnost

$$\frac{x^{a_1}}{1-x^{d_1}} + \frac{x^{a_2}}{1-x^{d_2}} + \dots + \frac{x^{a_M}}{1-x^{d_M}} = \frac{x}{1-x}.$$

Jmenovatel posledního sčítance nalevo má kořen $e^{\frac{2\pi}{d_M}i}$ (kořen s nejmenším argumentem). Žádný jiný jmenovatel tento kořen nemá, protože podle předpokladu je d_M největší ze všech diferencí. Pokud nyní v rovnosti provedeme limitu pro $x \rightarrow e^{\frac{2\pi}{d_M}i}$, dostaneme napravo konečné číslo a nalevo součet $M-1$ konečných čísel a (komplexního) nekonečna, které je limitou posledního sčítance. To je ale spor. $\square$

Věta 3.1.11. Označme jako r_n počet způsobů, jak zapsat číslo $n \in \mathbb{N}$ jako součet přirozených čísel (bez ohledu na pořadí), kde sčítance jsou různé. Podobně označme jako l_n počet způsobů, jak zapsat číslo $n \in \mathbb{N}$ jako součet přirozených čísel (bez ohledu na pořadí), kde sčítance jsou liché. Potom $r_n = l_n$.

Příklad. V následujícím seznamu možností zápisu čísla 6 jsou písmenem L vyznačeny zápisy pomocí součtu lichých čísel a písmenem R zápisy pomocí součtu různých čísel.

$$\begin{aligned} \text{L } 6 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 6 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 2 \\ 6 &= 1 + 1 + 2 + 2 \\ 6 &= 2 + 2 + 2 \\ \text{L } 6 &= 1 + 1 + 1 + 3 \\ \text{R } 6 &= 1 + 2 + 3 \\ \text{L } 6 &= 3 + 3 \\ 6 &= 1 + 1 + 4 \\ \text{R } 6 &= 2 + 4 \\ \text{LR } 6 &= 1 + 5 \\ \text{R } 6 &= 6 \end{aligned}$$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že r_n je koeficient u x^n v mocninné řadě, která vznikne po roznásobení výrazu

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k). \quad (3.1.7)$$

To je ale v podstatě vidět, protože každý člen v této mocninné řadě je tvaru $A \cdot x^{a_1} \cdot x^{a_2} \cdot x^{a_3} \cdots x^{a_M}$, kde $M \in \mathbb{N}$ a $a_1, a_2, \dots, a_M$ jsou navzájem různé. Pokud máme pochybnosti o konvergenci nekonečného součinu, můžeme jej zlogaritmovat:

$$\ln \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+x^k) \quad (3.1.8)$$

a přitom

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^k)}{x^k} = 1.$$

Řada (3.1.8) má tedy stejný poloměr konvergence jako řada $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, takže pro $x \in [0, 1)$ konverguje. Proto konverguje i původní produkt.

Dále platí, že l_n je koeficient u x^n ve výrazu

$$(1+x+x^2+x^3+\dots) \cdot (1+x^3+x^6+x^9+\dots) \cdot (1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots) \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x^{(2k-1)j}. \quad (3.1.9)$$

Pro dané n totiž x^n vznikne vždy jako součin

$$x^n = x^{k_1} \cdot x^{3k_2} \cdot x^{5k_3} \dots x^{(2M-1)k_M},$$

kde $M \in \mathbb{N}$ a $k_i \in \mathbb{N}_0$. To je ekvivalentní s rovností

$$n = k_1 + 3k_2 + 5k_3 + \dots + (2M-1)k_M,$$

kteřá však znamená jen to, že n lze zapsat jako součet lichých čísel

$$n = \underbrace{1+1+\dots+1}_{k_1\text{-krát}} + \underbrace{3+3+\dots+3}_{k_2\text{-krát}} + \underbrace{5+5+\dots+5}_{k_3\text{-krát}} + \dots + \underbrace{(2M-1)+(2M-1)+\dots+(2M-1)}_{k_M\text{-krát}}.$$

Pokud ověříme, že oba výrazy (3.1.7) a (3.1.9) jsou si rovny, bude to znamenat i $r_n = l_n$. Ve výrazu (3.1.9) sečteme sumy tvořící jednotlivé činitele, neboť se jedná o geometrické řady. Dostaneme tak celkem

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}, \quad (3.1.10)$$

což se má rovnat výrazu

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k).$$

Pokud si rozepíšeme

$$1+x^k = \frac{1-x^{2k}}{1-x^k},$$

tak potom už je vidět, že skutečně

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{2k}}{1-x^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}},$$

protože právě všechny členy se sudými mocninami x se vykrátí (to je paradox nekonečného součinu...). $\square$

Příklad 3.1.12. Mějme čísla $a_1 < a_2 < \dots < a_n \in \mathbb{Z}$ a uvažujme všechny rozdíly $(a_j - a_i)$, kde $j > i$, což jsou všechno přirozená čísla. Potom řekneme, že posloupnost $a_1, a_2, \dots, a_n$ tvoří **dokonalé pravítko**, jestliže

$$\left(\forall k, 1 \leq k \leq \binom{n}{2} \right) (\exists i, j \in \hat{n}) (a_j - a_i = k), \quad (3.1.11)$$

tj. když všechna přirozená čísla od 1 do $\binom{n}{2}$ lze vyjádřit jako rozdíl vhodné dvojice čísel z posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Například pro $n = 4$ je $\binom{4}{2} = 6$ a posloupnost $(0, 1, 4, 6)$ tvoří dokonalé pravítko.

Věta 3.1.13. Pro $n \geq 5$ dokonalé pravítko neexistuje.

Důkaz. I tuto větu dokážeme s použitím OPS. Necht' $n \in \mathbb{N}$ a posloupnost $(a_1, \dots, a_n)$ tvoří dokonalé pravítko. Definujme polynom

$$A(z) = z^{a_1} + z^{a_2} + \dots + z^{a_n}$$

a uvažujme součin polynomů $A(z) \cdot A(z^{-1})$. Po prostém roznásobení vznikne celkem n^2 sčítanců, přičemž mezi nimi bude $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ párů tvaru $z^{a_i - a_j}$ a $z^{a_j - a_i}$, kde $i \neq j$ (neboť tolika způsoby lze vybrat dvě různá čísla z $\hat{n}$ bez ohledu na pořadí), a zbylých n sčítanců budou jednotky (z^0).

Z vlastnosti dokonalého pravítka (3.1.11) nalezneme každé číslo od 1 do $\binom{n}{2}$ jako rozdíl $a_j - a_i$ pro nějaké $i < j$. Součin $A(z) \cdot A(z^{-1})$ je tedy roven

$$A(z) \cdot A(z^{-1}) = \boxed{(n-1)} + z^{-\binom{n}{2}} + z^{-\left(\binom{n}{2}-1\right)} + \dots + z^{-1} + \boxed{z^0} + z^1 + z^2 + \dots + z^{\binom{n}{2}-1} + z^{\binom{n}{2}}. \quad (3.1.12)$$

Čísla v rámečku dohromady tvoří výše zmíněných n jednotek v roznásobení součinu. Označme nyní

$$N = \binom{n}{2}.$$

Součin (3.1.12) bez konstanty $n-1$ tvoří geometrickou řadu, kterou sečteme podle známého vzorce, když vytkneme z^{-N} :

$$A(z) \cdot A(z^{-1}) = (n-1) + z^{-N} \frac{z^{2N+1} - 1}{z - 1} = (n-1) + \frac{z^{N+\frac{1}{2}} - z^{-N-\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}}.$$

Pokud nyní dosadíme speciálně $z = e^{i\varphi}$, dostaneme

$$A(e^{i\varphi}) A(e^{-i\varphi}) = (n-1) + \frac{e^{i\varphi(N+\frac{1}{2})} - e^{-i\varphi(N+\frac{1}{2})}}{e^{\frac{i\varphi}{2}} - e^{-\frac{i\varphi}{2}}} = (n-1) + \frac{\sinh(i\varphi(N+\frac{1}{2}))}{\sinh(i\frac{\varphi}{2})} = (n-1) + \frac{\sin(\varphi(N+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{\varphi}{2})}.$$

Čísla $e^{i\varphi}$ a $e^{-i\varphi}$ jsou však komplexně sdružená, takže platí i $A(e^{-i\varphi}) = \overline{A(e^{i\varphi})}$, a tedy

$$A(e^{i\varphi}) A(e^{-i\varphi}) = |A(e^{i\varphi})|^2 \geq 0,$$

Pro každé φ tak musí platit

$$A(e^{i\varphi}) A(e^{-i\varphi}) = (n-1) + \frac{\sin(\varphi(N+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \geq 0.$$

Z této nerovnosti již získáme omezení na n . Jinými slovy ukážeme, že pro $n \geq 5$ již tato nerovnost neplatí. Zvolme φ tak, aby $\sin(\varphi(N+\frac{1}{2})) = -1$, tj. $\varphi(N+\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\pi$, takže

$$\varphi = \frac{\frac{3}{2}\pi}{N+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}\pi}{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{3\pi}{n^2-n+1}.$$

I pro toto φ musí postupně platit

$$\begin{aligned} (n-1) - \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2(n^2-n+1)}} &\geq 0, \\ \sin \frac{3\pi}{2(n^2-n+1)} &\geq \frac{1}{n-1}, \\ \frac{3\pi}{2(n^2-n+1)} &\geq \frac{1}{n-1}, \\ \underbrace{\frac{3\pi}{2}}_{\approx 4.71} &\geq \frac{n^2-n+1}{n-1} = n + \frac{1}{n-1}, \end{aligned}$$

přičemž jsme využili, že $x \geq \sin x$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Je však vidět, že pro $n \geq 5$ již tato nerovnost splněna není. $\square$

Příklad 3.1.14. Mějme naměřená data $d_1, \dots, d_{N-1}$ a hledejme hodnoty neznámé veličiny $y_1, \dots, y_{N-1}$, jestliže je znám rekurentní vztah

$$ay_{i+1} + by_i + cy_{i-1} = d_i \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (3.1.13)$$

a hodnoty (okrajové podmínky) y_0, y_N . Koeficienty a, b, c jsou známé a předpokládáme $a, c \neq 0$, jinak by byla úloha triviální.

Definujeme polynomy

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{i=1}^{N-1} d_i x^i, \\ Y(x) &= \sum_{i=1}^{N-1} y_i x^i. \end{aligned}$$

Nyní všechny rovnosti (3.1.13) vynásobíme x^i a sečteme přes i od 1 do $N-1$. Dostaneme

$$a \sum_{i=1}^{N-1} y_{i+1} x^i + b \sum_{i=1}^{N-1} y_i x^i + c \sum_{i=1}^{N-1} y_{i-1} x^i = D(x).$$

Podle definice polynomu $Y(x)$ lze tuto rovnost dále přepsat na

$$\frac{a}{x} (Y(x) - y_1 x + y_N x^N) + bY(x) + cx (Y(x) - y_{N-1} x^{N-1} + y_0) = D(x).$$

Celou rovnost vynásobíme x a po vytknutí $Y(x)$ dostaneme

$$Y(x) (a + bx + cx^2) = x (ay_1 + cy_{N-1} x^N + D(x) - ay_N x^{N-1} - cy_0 x).$$

Necht' r_1, r_2 jsou kořeny rovnice $cx^2 + bx + a = 0$, pro jednoduchost různé. Potom platí

$$\begin{aligned} 0 &= ay_1 + cy_{N-1} r_1^N + D(r_1) - ay_N r_1^{N-1} - cy_0 r_1, \\ 0 &= ay_1 + cy_{N-1} r_2^N + D(r_2) - ay_N r_2^{N-1} - cy_0 r_2, \end{aligned}$$

což je soustava dvou lineárních rovnic pro y_1 a y_{N-1} s determinantem

$$\begin{vmatrix} a & cr_1^N \\ a & cr_2^N \end{vmatrix} \neq 0,$$

protože $r_1 \neq r_2$. Jejím řešením získáme hodnoty y_1, y_{N-1} a dospějeme tedy ke stejné úloze, avšak pouze pro $(N-1)-2$ neznámých $y_2, \dots, y_{N-2}$. Rozmyslete si, co se stane, když $r_1 = r_2$.

3.2 Exponenciální generující funkce

Definice 3.2.1. Necht' $z \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n=0}^\infty$ je číselná posloupnost. **Řadou s exponenciální generující funkcí** (angl. *exponential generating function*, EGF) rozumíme číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Součet této řady nazýváme (exponenciální) **generující funkcí**. Korespondenci posloupnosti koeficientů řady a příslušné exponenciální generující funkce $f(z)$ zapisujeme jako

$$(a_n)_{n=0}^\infty \xrightarrow{EGF} f(z).$$

Poznámka. Srovnáme-li definice 3.1.1 a 3.2.1, všimneme si určité inkonzistence v názvosloví. Definice 3.1.1 udává název pro řadu, ale definice 3.2.1 hovoří spíše o její generující funkci. Tento rozpor je dědictvím přednášky, kde jsme ve skutečnosti žádné formální definice neměli a hovořili jsme o obyčejných generujících funkcích (angl. *ordinary power series*, OPS) a o exponenciálních generujících funkcích, které jsme označovali jako EGF. Zájemci o korektní (a/nebo obvyklé) označení jej budou muset hledat v literatuře.

Příklad.

$$(1)_{n=1}^\infty \xrightarrow{EGF} e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}.$$

3.2.1 Pravidla pro počítání s EGF

Jestliže

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} f(z), \quad (b_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} g(z),$$

tak potom lze odvodit následující vztahy:

1. Pro posunutí indexu o 1 platí

$$\boxed{(a_{n+1})_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} f'(z)},$$

protože

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} z^n.$$

2. Pro násobení indexem platí

$$\boxed{(na_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} z f'(z)},$$

protože

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} n z^{n-1} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n \cdot a_n)}{n!} z^n.$$

3. Pro násobení mocninou konstanty platí zřejmě (stejně jako u OPS)

$$\boxed{(c^n a_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} f(cz)}.$$

4. Zřejmě platí

$$\boxed{(a_n \pm b_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} f(z) \pm g(z)}. \quad (3.2.1)$$

5. Podle vzorce pro násobení mocninných řad platí

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} f(z)g(z)},$$

protože

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

6. Speciálně pro volbu $b_n = 1$ je $g(z) = e^z$, a tak

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \right)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} e^z f(z)}. \quad (3.2.2)$$

3.2.2 Jednoduchý příklad

Poznámka. Je zřejmé, že použití generujících funkcí je podmíněno nenulovým poloměrem konvergence příslušných řad. Jak již bylo řečeno, v kombinatorických úlohách zpravidla hledáme posloupnost koeficientů $(a_n)_{n=0}^\infty$. Tuto posloupnost sice neznáme, ale v mnoha případech jsme schopni ji nějakým způsobem odhadnout, takže můžeme zdola odhadnout i poloměr konvergence.

Kritériem rozhodování, zda pro řešení dané úlohy použít OPS či EGF, může být právě fakt, že EGF připouští pomalejší klesání posloupnosti a_n (o faktor $n!$) při zachování stejného poloměru konvergence. Při rozhodování nám mnohdy pomůže též „typ“ úlohy - například následující úloha vybízí k použití EGF, neboť její zadání v mnohém připomíná pravidlo (3.2.2).

Příklad 3.2.2. Vypočítejte součet

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2.$$

Vyděme z posloupnosti $(1)_{n=0}^\infty$ a použijeme postupně pravidla z části 3.2.1:

$$\begin{aligned} (1)_{n=0}^\infty &\xrightarrow{EGF} e^z, \\ (n \cdot 1)_{n=0}^\infty &\xrightarrow{EGF} ze^z, \\ (n^2)_{n=0}^\infty = (n \cdot n)_{n=0}^\infty &\xrightarrow{EGF} z(e^z + ze^z) = (z + z^2)e^z, \\ (S_n)_{n=0}^\infty = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 \right)_{n=0}^\infty &\xrightarrow{EGF} (z + z^2)e^{2z}. \end{aligned}$$

Podle posledního řádku platí

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{S_n}{n!} z^n = (z + z^2)e^{2z}.$$

Najdeme-li tedy rozvoj funkce $(z + z^2)e^{2z}$ do mocninné řady, budeme schopni vyjádřit koeficienty S_n . Rozvoj sestrojíme šikově, neboť nám postačí znalost rozvoje e^z , který vynásobíme polynomem $(z + z^2)$, takže výsledek bude stále mocninná řada.

$$(z + z^2)e^{2z} = (z + z^2) \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} (2z)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{2^n}{n!} z^{n+1} + \sum_{n=0}^\infty \frac{2^n}{n!} z^{n+2} = z + \underbrace{\sum_{n=2}^\infty \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} z^n}_{\sum_{n=1}^\infty \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} z^n} + \sum_{n=2}^\infty \frac{2^{n-2}}{(n-2)!} z^n.$$

Z uvedeného vztahu je už vidět, že $S_1 = 1$ a

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n!} &= \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{2^{n-2}}{(n-2)!}, \\ S_n &= n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

3.2.3 Bernoulliho čísla

Definice 3.2.3. Bernoulliho čísla rozumíme posloupnost $(B_n)_{n=0}^\infty$, pro niž platí

$$(B_n)_{n=0}^\infty \xrightarrow{EGF} \frac{z}{e^z - 1}.$$

Poznámka 3.2.4. Zabýváme se korektností definice B_n , tj. je-li možné psát funkci $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ jako součet mocninné řady. Nejprve se podíváme na kořeny jmenovatele. Jestliže vyjádříme z jako $z = i\varphi$, můžeme řešit rovnici

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1, \text{ tj.} \\ \cos \varphi + i \sin \varphi &= 1, \end{aligned}$$

kteřá má řešení $\varphi = 2k\pi$, neboli $z = 2k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$. V bodě $z_0 = 0$ ($k = 0$) platí

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z}{e^z - 1} = 1,$$

a v tomto bodě je tedy odstranitelná nespojitost funkce f . Pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a $z_0 = 2k\pi i$ však platí

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z}{e^z - 1} = \infty,$$

přičemž nejblíže nule jsou body $\pm 2\pi i$. Jiné singulární body funkce f nemá. To znamená, že je holomorfní na kruhu se středem v bodě 0 a s poloměrem 2π a její Laurentův rozvoj v bodě 0 má tedy jen regulární část - je to přímo Taylorův rozvoj. Proto lze skutečně funkci $\frac{z}{e^z - 1}$ rozvinout do mocninné řady (v bodě 0) a poloměr konvergence této řady je 2π (neboť to je vzdálenost k nejbližšímu singulárnímu bodu).

V následujícím se budeme snažit najít hodnoty B_n . Podle definice po vynásobení $(e^z - 1)$ platí²

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n}_{e^z - 1}.$$

Po úpravě dostaneme

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n.$$

Podle vzorce pro součin mocninných řad můžeme dále upravit na

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k+1)!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

ale to není nic jiného než rozvoj „funkce“ $g(z) = 1$ do mocninné řady. Protože koeficienty rozvoje jsou jednoznačné, platí

$$\begin{aligned} c_0 = B_0 &= 1, \\ c_n = \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k+1)!} &= 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Po vynásobení poslední rovnosti číslem $n!$ přejde tato rovnost na elegantnější tvar

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0.$$

S pomocí tohoto vztahu jsme schopni rekurzivně vypočítat prvky posloupnosti (B_n) :

- $B_1 = -\frac{1}{2}$ zjistíme ze vztahu $\binom{2}{0}B_0 + \binom{2}{1}B_1 = 0$,
- $B_2 = \frac{1}{6}$ vypočítáme z rovnosti $\binom{3}{0}B_0 + \binom{3}{1}B_1 + \binom{3}{2}B_2 = 0$,

a takto můžeme pokračovat. Prvních 16 členů posloupnosti (B_n) má následující hodnoty:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0
8	9	10	11	12	13	14	15	16
$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$-\frac{3617}{510}$

²Od tohoto okamžiku jsme se zbavili odstranitelné nespojitosti funkce $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ v bodě 0. Pokud v bodě 0 dodefinujeme funkci f její limitou, tj. číslem 1, tak je koeficient B_0 v rozvoji funkce f do mocninné řady roven jedné, neboť to je právě funkční hodnota v bodě 0. Jak uvidíme, po odstranění zlomku k tomuto výsledku dojdeme i jinak.

Hodnoty B_n se mění na první pohled chaoticky a explicitní vyjádření členů posloupnosti B_n nevypadá jednoduše. My se o něj ani pokoušet nebudeme. Podle hodnot v tabulce však můžeme předpokládat, že

$$B_{2n+1} = 0 \text{ pro } n \geq 1.$$

To je z definice B_n ekvivalentní vztahu

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \text{sudé mocniny } z.$$

Abychom jej dokázali, stačí ukázat, že funkce $f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{1}{2}z$ je sudá. To skutečně platí, můžeme ověřit rovnost $f(z) = f(-z)$ nebo provést úpravu $f(z)$ na tvar

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = z \frac{2 + e^z - 1}{2(e^z - 1)} = \frac{z e^z + 1}{2 e^z - 1} = \frac{z e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{2 e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \frac{z}{2} \coth\left(\frac{z}{2}\right),$$

z nějž je již sudost funkce f zřejmá.

Věta 3.2.5. (Bernoulli)

Necht' $m \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i} B_i n^{m-i+1}.$$

Příklad. Pro $m = 2$ máme známý vzoreček

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \text{ tj.} \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^2 &= \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) \end{aligned}$$

a podle Bernoulliovy věty vychází

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{3} \left(B_0 n^3 + 3 \underbrace{B_1}_{-\frac{1}{2}} n^2 + 3 \underbrace{B_2}_{\frac{1}{6}} n \right) = \frac{1}{3} n \left(n^2 - \frac{3}{2} n + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} n (2n^2 - 3n + 1) = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1).$$

Důkaz. Definujeme

$$S_n(m) := \sum_{k=0}^{n-1} k^m$$

a hledáme tedy hodnotu $S_n(m)$. Uvažujme posloupnost $(S_n(m))_{m=0}^{\infty}$ pro index m (!) jako posloupnost koeficientů řady s EGF. Postupně upravujeme:

$$(S_n(m))_{m=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_n(m)}{m!} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k^m \right) z^m = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kz)^m}{m!}}_{e^{kz}} =$$

... napravo máme konečnou geometrickou řadu, kterou můžeme sečíst ...

$$\begin{aligned} &= e^0 + e^z + e^{2z} + \dots + e^{(n-1)z} = \frac{e^{nz} - 1}{e^z - 1} = \frac{z}{e^z - 1} \cdot \frac{e^{nz} - 1}{z} = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(nz)^i}{i!} \right)}_{e^{nz} - 1} \frac{1}{z} = \end{aligned}$$

... zkrátíme a posuneme indexy ...

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^{i+1} z^i}{(i+1)!} \right) =$$

... použijeme vzorec pro násobení mocninných řad, přičemž vnější sčítací index zvolíme jako m ...

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^m \frac{B_j}{j!} \frac{n^{m-j+1}}{(m-j+1)!} \right) z^m =$$

... nakonec vynásobíme $1 = \frac{(m+1)!}{m!(m+1)}$ a dostaneme ...

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{\left(\frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} B_j n^{m-j+1} \right)}_{S_n(m)} z^m.$$

Na konci máme opět mocninnou řadu s EGF a v závorce tak vystupuje právě koeficient $S_n(m)$. Platí tedy

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = S_n(m) = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} B_j n^{m-j+1}.$$

□

Odhady Bernoulliových čísel

Jak jsme si řekli, řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ má poloměr konvergence $\rho = 2\pi$. Podle vzorce z matematické analýzy na výpočet ρ máme tedy

$$2\pi = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{B_n}{n!} \right|}},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{B_n}{n} \right|} = \frac{1}{2\pi}.$$

S pomocí obou vlastností limes superior³ můžeme odhadnout absolutní hodnotu B_n shora i zdola:

1. Pro každé $\varepsilon > 0$ platí od jistého n_0 počínaje

$$\sqrt[n]{\left| \frac{B_n}{n} \right|} \leq \frac{1}{2\pi} + \varepsilon,$$

$$|B_n| \leq \left(\frac{1}{2\pi} + \varepsilon \right)^n \cdot n!.$$

³**Připomenutí pojmů z matematické analýzy:** $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ je hromadná hodnota reálné posloupnosti (A_n) , právě když existuje z ní vybraná posloupnost taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{k_n} = A$. Každá číselná posloupnost má hromadnou hodnotu. Množina hromadných hodnot posloupnosti má nejmenší a největší prvek. Limes superior je největší hromadná hodnota posloupnosti.

Z těchto definic a tvrzení plynou dvě vlastnosti limes superior. $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, právě když:

1. Pro každé ε je jen konečně mnoho prvků větších než $A + \varepsilon$, tj. $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0) (\forall n > n_0) (A_n < A + \varepsilon)$.
2. Pro každé ε existuje nekonečně mnoho prvků větších než $A - \varepsilon$, tj. $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \infty n) (A_n > A - \varepsilon)$.

2. Pro každé $\varepsilon > 0$ platí pro nekonečně mnoho n odhad

$$|B_n| \geq \left(\frac{1}{2\pi} - \varepsilon\right)^n \cdot n!.$$

Ukážeme, že vhodným postupem lze zjistit nejen odhad shora a zdola, ale že lze pro každé B_n nalézt i jeho přibližnou hodnotu, tj. číslo, které se mu blíží. Nejprve připomeňme, že funkce komplexní proměnné $f(z)$ má v singulárním bodě z_0 pól p -tého stupně, právě když pro koeficienty jejího Laurentova rozvoje v bodě z_0 platí $a_{-p} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro $n < -p$. To je ekvivalentní s existencí konečné limity

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot (z - z_0)^p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Konkrétně stupeň pólů funkce $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ v bodech $\pm 2\pi i$ je 1, protože pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítáme

$$\lim_{z \rightarrow 2\pi i} \frac{z}{e^z - 1} (z - 2\pi i) = \lim_{z \rightarrow 2\pi i} \frac{z^2 - 2\pi i z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 2\pi i} \frac{2z - 2\pi i}{e^z} = 2\pi i = a_{-1} = \operatorname{Rez}_{2\pi i} f.$$

Analogicky pro $z \rightarrow -2\pi i$ vyjde limita $a_{-1} = -2\pi i$. Má-li však (nějaká) funkce f v bodě z_0 pól stupně 1, její Laurentův rozvoj v tomto bodě má tvar

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots,$$

takže funkce $f(z) - \frac{a_{-1}}{z - z_0}$ má rozvoj

$$f(z) - \frac{a_{-1}}{z - z_0} = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

a je tedy holomorfní v bodě z_0 . Z toho plyne, že funkce

$$g(z) := \frac{z}{e^z - 1} - \underbrace{\left(\frac{2\pi i}{z - 2\pi i} + \frac{-2\pi i}{z + 2\pi i} \right)}_{-1. \text{ členy rozvoje v bodech } \pm 2\pi i}$$

je holomorfní v bodech $\pm 2\pi i$ a tím pádem je holomorfní na kruhu se středem v nule o poloměru 4π , neboť další singulární body funkce $\frac{z}{e^z - 1}$ jsou $\pm 4\pi i$. Její Laurentův rozvoj v bodě 0 je rozvojem do mocninné řady s poloměrem konvergence 4π .

Tato skutečnost nám umožní získat přibližné hodnoty Bernoulliových čísel. Nejprve upravíme

$$g(z) = \frac{z}{e^z - 1} - 2\pi i \frac{2\pi i + 2\pi i}{z^2 + 4\pi^2} = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{8\pi^2}{z^2 + 4\pi^2} = \frac{z}{e^z - 1} + 2 \frac{1}{1 + \frac{z^2}{4\pi^2}},$$

takže poslední zlomek je ve tvaru součtu geometrické řady s kvocientem $-\frac{z^2}{4\pi^2}$. Celou funkci $g(z)$ nyní snadno rozvineme do řady, přičemž ještě využijeme, že liché členy posloupnosti B_n počínaje B_3 jsou rovny nule.

$$g(z) = \underbrace{-\frac{1}{2}z}_{\frac{B_1}{1!}z^1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n} z^{2n} = -\frac{1}{2}z + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{B_{2n}}{(2n)!} + 2 \frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n} \right)}_{a_{2n}} z^{2n}.$$

Tato řada má poloměr konvergence $\rho = 4\pi$. Nyní odhadneme B_n zcela stejným postupem, jako jsme to již jednou udělali. Platí

$$\frac{1}{4\pi} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\left| \frac{B_{2n}}{(2n)!} + 2 \frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n} \right|}.$$

Využijeme jen první vlastnosti limes superior, tj. že pro každé $\varepsilon > 0$ platí od jistého n_0 počínaje

$$\sqrt[n]{\left| \frac{B_{2n}}{(2n)!} + 2 \frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n} \right|} \leq \frac{1}{4\pi} + \varepsilon,$$

$$\left| \frac{B_{2n}}{(2n)!} + 2 \frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n} \right| \leq \left(\frac{1}{4\pi} + \varepsilon \right)^{2n}.$$

Poslední vztah vlastně odhaduje vzdálenost čísla $\frac{B_{2n}}{(2n)!}$ od čísla $-2 \frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n}$. Proto můžeme napsat

$$\frac{B_{2n}}{(2n)!} = -2 \frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n} + O \left(\left(\frac{1}{4\pi} + \varepsilon \right)^{2n} \right)$$

a definovat posloupnost C_{2n} jako posloupnost přibližných hodnot B_{2n} vztahem

$$C_{2n} = -2 (2n)! \frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n}.$$

Následující tabulka udává srovnání skutečných hodnot B_n a jejich odhadů:

$2n$	2	4	6	8	10	12	14	16
B_{2n}	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$
$B_{2n} \approx$	0.166	-0.0333	0.0238	-0.03333	0.07575	-0.25311	1.166666	-7.092156
$C_{2n} \approx$	0.10132	-0.03079	0.0234	-0.03319	0.07568	-0.25305	1.166595	-7.092048

Poznámka. Posloupnost C_{2n} pro $n \rightarrow \infty$ nekonverguje k B_{2n} , pro další členy by už rozdíly mezi B_{2n} a C_{2n} rostly. To není překvapením, protože odhad rozdílu je

$$(2n)! O \left(\left(\frac{1}{4\pi} + \varepsilon \right)^{2n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Pokud bychom chtěli získat přesnější odhady B_{2n} , mohli bychom odečtením potřebných členů vyrobit funkci, kterou lze rozvinout do mocninné řady s poloměrem konvergence $2k\pi > 4\pi$.

3.2.4 Invertovací formule

Věta 3.2.6. *Nechť $(a_n)_{n=0}^\infty$, $(b_n)_{n=0}^\infty$ jsou dvě posloupnosti, nechť $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je*

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k.$$

Potom

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k (-1)^{n-k}.$$

Poznámka. Je zřejmé, proč se tato věta nazývá invertovací formule. Udává totiž vyjádření členů b_n pomocí a_n při znalosti vyjádření a_n pomocí b_n . Podobných invertovacích formulí je více.

Důkaz. Dokázat tuto větu s použitím EGF je snadné. Uvažujme následující EGF:

$$\begin{aligned} (a_n)_{n=0}^\infty &\xrightarrow{EGF} A(z), \\ (b_n)_{n=0}^\infty &\xrightarrow{EGF} B(z). \end{aligned}$$

Podle pravidla (3.2.2) platí

$$\left(\underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k}_{a_n} \right) \xrightarrow{EGF} e^z B(z).$$

Dostáváme tedy vztah $A(z) = e^z B(z)$. Zpětně vyjádříme $B(z) = e^{-z} A(z)$ a provedeme rozvoj funkce e^{-z} do mocninné řady. Dojdeme tak k rovnosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = e^{-z} A(z) = B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Vynásobíme řady podle součinnového vzorce a získáme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Porovnáním koeficientů potom dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} &= \frac{b_n}{n!}, \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k (-1)^{n-k} &= b_n. \end{aligned}$$

□

Použití invertovací formule

Označme d_n počet permutací π na množině $\{1, 2, \dots, n\}$, které nemají pevný bod, tj. platí pro ně

$$(\forall k \in \hat{n}) (\pi(k) \neq k).$$

Platí

- $d_1 = 0$,
- $d_2 = 1$ (pouze permutace $2, 1$),
- $d_3 = 2$ (permutace $2, 3, 1$ a $3, 1, 2$).

Snadno se odvodí následující rekurentní vztah.

$$n! = d_n + n \cdot d_{n-1} + \binom{n}{2} d_{n-2} + \dots + \binom{n}{k} d_{n-k} + \dots + \binom{n}{n-2} d_2 + \binom{n}{n-1} d_1 + 1.$$

Všechny permutace množiny $\hat{n}$ lze totiž rozdělit na permutace bez pevného bodu (těch je d_n), permutace s jedním pevným bodem (těch je $n \cdot d_{n-1}$), permutace s dvěma pevnými body atd. Obecně permutací s k pevnými body je $\binom{n}{k} d_{n-k}$, protože pevné body lze vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby a zbytek je permutace $n-k$ čísel bez pevného bodu, kterou lze vybrat d_{n-k} způsoby. S použitím rovnosti

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

a s dodefinováním $d_0 := 1$ lze tento vztah upravit na

$$n! = \binom{n}{n} d_n + \binom{n}{n-1} d_{n-1} + \dots + \binom{n}{1} d_1 + \binom{n}{0} d_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k.$$

Potom můžeme aplikovat invertovací formuli, takže lze postupně upravovat:

$$d_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! (-1)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} (-1)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-1)^k =$$

... využijeme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k = e^{-1}$ a přepíšeme na ...

$$= n! \left(e^{-1} - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}}_R \right).$$

Nyní aplikujeme Leibnizovo kritérium, které říká, že zbytek R po alternující řadě je v absolutní hodnotě menší nebo roven než první zanedbaný člen, v našem případě $\frac{1}{(n+1)!}$. Platí tedy

$$d_n = n!e^{-1} - n!R,$$

kde $n!|R| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}$ pro $n \geq 2$. Lze tedy napsat, že $d_n = n!e^{-1} - \varepsilon$, kde $|\varepsilon| < \frac{1}{2}$, neboli $\varepsilon \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dále upravíme na $n!e^{-1} = d_n + \varepsilon$, a tedy

$$n!e^{-1} + \frac{1}{2} = d_n + \tilde{\varepsilon},$$

kde $\tilde{\varepsilon} \in (0, 1)$. Protože $d_n \in \mathbb{N}$, tak pokud vezmeme celou část levé i pravé strany této rovnosti, dostaneme explicitní vyjádření pro d_n :

$$\left\lceil \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rceil = [d_n + \tilde{\varepsilon}] = d_n.$$

3.2.5 Stirlingova čísla

Definice 3.2.7. Necht' $n \geq k \geq 1$. **Stirlingovo číslo** (druhého druhu)

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

definujeme jako počet rozkladů množiny $\hat{n}$ na k neprázdných podmnožin.

Příklad.

$$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7,$$

protože rozklady množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ na dvě neprázdné podmnožiny mohou být $\boxed{1 \mid 234}$, $\boxed{2 \mid 134}$, $\boxed{3 \mid 124}$, $\boxed{4 \mid 123}$, $\boxed{12 \mid 34}$, $\boxed{13 \mid 24}$, $\boxed{14 \mid 23}$.

Poznámka 3.2.8. Zřejmě $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$, $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$. Dále

•

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1,$$

protože když množinu $\hat{n}$ rozdělujeme na dvě neprázdné podmnožiny, tak z ní vybereme libovolnou podmnožinu kromě $\emptyset$ a $\hat{n}$ (a takových podmnožin je $2^n - 2$). Druhou podmnožinu pak tvoří zbytek. Výsledný počet dělíme dvěma, neboť na pořadí podmnožin (která je ta první a která ta druhá) nezáleží.

•

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2},$$

protože počet rozkladů $\hat{n}$ na $n-1$ neprázdných podmnožin odpovídá počtu dvouprvkových podmnožin $\hat{n}$ (právě jedna podmnožina v rozkladu má totiž dva prvky).

Poznámka 3.2.9. Je zřejmé, že v rozkladu množiny $\hat{n}$ platí právě jedno z následujících tvrzení:

- Bud' prvek n tvoří jednoprvkovou podmnožinu,
- nebo prvek n patří do nějaké víceprvkové podmnožiny množiny $\hat{n}$.

Podle této úvahy lze sestavit následující rekurentní vztah:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (3.2.3)$$

$\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$ je totiž počet rozkladů, kde n je „zvlášť“ v jednoprvkové množině a $k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$ je počet rozkladů, kdy n „přihodíme“ do jedné z k neprázdných podmnožin z rozkladu $\widehat{n-1}$, takže vznikne víceprvková podmnožina.

Vzpomeňme si na obdobný vztah, který platí pro kombinační čísla:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Definice 3.2.10. Pro $n, k \in \mathbb{Z}$ rozšiřujeme definici Stirlingova čísla takto:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n < k \text{ nebo } k < 0, \\ 0 & \text{pro } k = 0 \text{ a } n \neq 0, \\ 1 & \text{pro } n = k = 0. \end{cases}$$

V tom případě platí vztah (3.2.3) pro každé $n, k \in \mathbb{Z}$ kromě $n = k = 0$.

Nyní najdeme explicitní vyjádření Stirlingova čísla. Necht' $k \geq 0$. Potom definujeme mocninnou řadu

$$B_k(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n$$

a naším cílem tedy opět bude najít její koeficienty. Podotkneme, že

1. B_k je skutečně mocninná řada, protože podle rozšířené definice Stirlingových čísel platí $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n$. Rozsah sčítacího indexu $n \in \mathbb{Z}$ však bude velmi šikovný při manipulaci se sumami.
2. Opět podle definice 3.2.10 platí $B_0(x) = 1$.

Nyní použijeme rovnost (3.2.3) a dosadíme do definice B_k . Přitom s výhodou využíváme rozsah indexu $n \in \mathbb{Z}$.

$$B_k(x) = x \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^{n-1} + kx \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{n-1} = xB_{k-1}(x) + kxB_k(x).$$

Z toho vyjádříme

$$B_k(x) = \frac{x}{1-kx} B_{k-1}(x)$$

a postupným dosazováním $B_{k-1}(x)$, $B_{k-2}(x)$, ... dostaneme

$$B_k(x) = \frac{x}{1-kx} \cdot \frac{x}{1-(k-1)x} \cdot \frac{x}{1-(k-2)x} \cdots \frac{x}{1-2x} \frac{x}{1-x} \cdot \underbrace{1}_{B_0(x)} = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x) \cdots (1-kx)}.$$

Jestliže tuto (generující) funkci rozvineme do mocninné řady, tak koeficient u x^n bude díky jednoznačnosti rozvoje právě $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$. Abychom byli schopni rozvoj provést, rozložíme nejprve funkci $B_k(x)/x^k$ na parciální zlomky. Obecně má tento rozklad tvar

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} = \frac{\alpha_1}{1-x} + \frac{\alpha_2}{1-2x} + \cdots + \frac{\alpha_k}{1-kx}. \quad (3.2.4)$$

Nyní je třeba nalézt koeficienty α_j . Zvolme si konkrétní $j \in \hat{k}$. Rovnost (3.2.4) vynásobíme výrazem $(1-jx)$ a poté dosadíme $x = \frac{1}{j}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(j-1)x)(1-(j+1)x)\cdots(1-kx)} \Big|_{x=\frac{1}{j}} &= \alpha_j, \\ \frac{1}{\left(1-\frac{1}{j}\right)\left(1-\frac{2}{j}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{j}\right)\left(1-\frac{j+1}{j}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{j}\right)} &= \alpha_j. \end{aligned}$$

Pokud nyní rozšíříme zlomek nalevo výrazem j^{k-1} tak, že každou závorku ve jmenovateli vynásobíme j , dostaneme

$$\frac{j^{k-1}}{\underbrace{(j-1)(j-2)\cdots 2 \cdot 1}_{(j-1)!} \cdot \underbrace{(-1) \cdot (-2) \cdots (j-k)}_{(k-j)!(-1)^{k-j}}} = \frac{j^k (-1)^{k-j}}{j! (k-j)!} = \alpha_j.$$

Koeficienty α_j jsme tedy získali. Rozvoje jednotlivých zlomků $\frac{1}{1-jx}$ jsou přitom snadné, jedná se totiž o součty geometrických řad s kvocienty jx . Celý rozvoj $B_k(x)$ tedy je

$$B_k(x) = x^k \sum_{j=1}^k \alpha_j \sum_{n=0}^{\infty} (jx)^n.$$

Nyní zaměníme pořadí sum, dosadíme hodnoty α_j a dostaneme

$$B_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^k \frac{j^k (-1)^{k-j}}{j! (k-j)!} j^n x^{n+k}.$$

Koeficient u x^n je tedy

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{j=1}^k \frac{j^k (-1)^{k-j}}{j! (k-j)!} j^{n-k} = \sum_{j=1}^k \frac{j^n (-1)^{k-j}}{j! (k-j)!} = \sum_{j=0}^k \frac{j^n (-1)^{k-j}}{j! (k-j)!}.$$

Poznámka. Explicitní vzorec pro $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ byl odvozen za použití rozšířené definice 3.2.10, a proto tuto definici splňuje. Jen pro zajímavost tak například víme, že

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 13 \\ 19 \end{smallmatrix} \right\} = 0 = \sum_{j=1}^{19} \frac{j^{13} (-1)^{19-j}}{j! (19-j)!}.$$

3.2.6 Bellova čísla

Definice 3.2.11. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ definujeme **Bellovo číslo** b_n jako

$$b_n := \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}.$$

Poznámka. Platí $b_0 = 1$ a pro $n > 0$ je

$$b_n := \sum_{k \geq 1} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$$

rovno počtu různých relací ekvivalence, které mohou existovat na n -prvkové množině. To je zřejmé, protože každá ekvivalence rozděluje n -prvkovou množinu na třídy ekvivalence, tj. na nějaký počet (k) neprázdných podmnožin.

Příklad 3.2.12. Počet různých ekvivalencí na 4-prvkové množině je 15. Podle poznámky 3.2.8 umíme totiž vypočítat

$$b_4 = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$$

Podívejme se, jak dokážeme vyjádřit b_n po dosazení explicitního vzorce pro $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$. Platí

$$b_n = \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \underbrace{\frac{j^n}{j!}}_{a_j} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!}}_{b_{k-j}} =$$

... použijeme pravidlo pro součin mocninných řad ...

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{j!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \right) = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{j!} = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!} = b_n.$$

Tento tvar b_n se nám bude hodit v následující větě.

Věta 3.2.13. Označme

$$B(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Potom platí

$$B(z) = e^{e^z - 1},$$

tj.

$$(b_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} B(z) = e^{e^z - 1}.$$

Důkaz. Do definice $B(z)$ dosadíme právě vypočítanou hodnotu b_n a upravujeme.

$$\begin{aligned} B(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!} z^n}_{(*)} = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n}{n!} z^n = \\ &= \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jz)^n}{n!}}_{e^{jz}} = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (e^z)^j = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že výsledek je konečné číslo. To spolu s konečností sumy $(*)$ ospravedlňuje záměnu sum v prvním řádku. $\square$

Pomocí předchozí věty odvodíme rekurentní vztah pro výpočet b_n . Vyjdeme ze vztahu

$$e^{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n,$$

který zlogaritmuje a následně zderivujeme:

$$\begin{aligned} e^z - 1 &= \ln \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n, \\ e^z &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(n-1)!} z^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n}. \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a vynásobíme jmenovatelem:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n!} z^n.$$

Použijeme vzorec pro násobení mocninných řad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n!} z^n.$$

Nakonec porovnáme koeficienty u obou mocninných řad. Platí tedy

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{n!} &= \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!}, \\ b_{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k. \end{aligned}$$

Příklad.

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= \binom{0}{0} \cdot b_0 = 1 \cdot 1 = 1 \\ b_2 &= \binom{1}{0} \cdot b_0 + \binom{1}{1} \cdot b_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\ b_3 &= \binom{2}{0} \cdot b_0 + \binom{2}{1} \cdot b_1 + \binom{2}{2} \cdot b_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5 \\ b_4 &= \binom{3}{0} \cdot b_0 + \binom{3}{1} \cdot b_1 + \binom{3}{2} \cdot b_2 + \binom{3}{3} \cdot b_3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 15. \end{aligned}$$

Číslo b_4 jsme již vypočítali z definice pomocí Stirlingových čísel v příkladu 3.2.12.

Poznámka 3.2.14. Víme, že b_n je počet ekvivalencí na množině $\hat{n}$. Následující kombinatorickou úlohou je možné získat explicitní vzorec pro výpočet b_n .

Uvažujme ekvivalence provádějících rozklad $\hat{n}$ na k tříd. Necht' tyto třídy mají $l_1, l_2, \dots, l_k$ prvků, přičemž samozřejmě $l_j \geq 1$ a $\sum_{j=1}^k l_j = n$. Počet takových ekvivalencí je

$$\frac{1}{k!} \binom{n}{l_1} \binom{n-l_1}{l_2} \binom{n-l_1-l_2}{l_3} \dots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-2} l_j}{l_{k-1}} \underbrace{\binom{n-\sum_{j=1}^{k-1} l_j}{l_k}}_{\binom{l_k}{l_k}=1},$$

což je celkem zřejmé. Člen $\frac{1}{k!}$ vyjadřuje, že na pořadí (postupného) výběru tříd ekvivalence nezáleží. Počet všech ekvivalencí s k třídami je tedy

$$\sum_{\substack{l_j \geq 1, j \in \hat{k} \\ \sum l_j = n}} \frac{1}{k!} \binom{n}{l_1} \binom{n-l_1}{l_2} \binom{n-l_1-l_2}{l_3} \dots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-2} l_j}{l_{k-1}}$$

a celkový počet ekvivalencí je potom zřejmé

$$b_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l_j \geq 1, j \in \hat{k} \\ \sum l_j = n}} \frac{1}{k!} \binom{n}{l_1} \binom{n-l_1}{l_2} \binom{n-l_1-l_2}{l_3} \dots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-2} l_j}{l_{k-1}}.$$

Jak je vidět, pro výpočet b_n se tento vzorec nehodí. S jeho pomocí bychom však byli schopni dokázat větu 3.2.13, pokud bychom využili skládání generujících funkcí.

3.2.7 Skládání generujících funkcí

Mějme mocninné řady s EGF

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{f_0}{0!} + \frac{f_1}{1!}z + \frac{f_2}{2!}z^2 + \dots, \\ G(z) &= \frac{g_0}{0!} + \frac{g_1}{1!}z + \frac{g_2}{2!}z^2 + \dots \end{aligned}$$

a zajímejme se, jakou posloupností je určena řada se složenou exponenciální generující funkcí $F(G(z))$. Pokud dosadíme z právě rozepsaných vztahů, dostaneme

$$F(G(z)) = \frac{f_0}{0!} + \frac{f_1}{1!} \left(\frac{g_0}{0!} + \frac{g_1}{1!}z + \frac{g_2}{2!}z^2 + \dots \right) + \frac{f_2}{2!} \left(\frac{g_0}{0!} + \frac{g_1}{1!}z + \frac{g_2}{2!}z^2 + \dots \right)^2 + \dots$$

V této (zřejmě opět) mocninné řadě bychom tedy chtěli získat koeficient u z^n .

Nejprve si uvědomíme, že už nultý koeficient (u z^0) je nekonečná číselná řada

$$\frac{f_0}{0!} + \frac{f_1}{1!} \frac{g_0}{0!} + \frac{f_2}{2!} \left(\frac{g_0}{0!} \right)^2 + \dots$$

a volbou hodnoty proměnné z nelze ovlivnit její konvergenci. Proto v následujícím uvažujeme pouze takové EGF, pro něž $g_0 = 0$. Koeficient u z^0 je potom zřejmě $\frac{f_0}{0!} = f_0$.

Abychom získali koeficient u z^n pro $n \geq 1$, uvažme, že nejmenší mocnina v každé závorce je z a závorky jsou postupně umocňovány na $0, 1, 2, 3, \dots$. V každém členu

$$\frac{f_k}{k!} \cdot \left(\frac{g_1}{1!}z + \frac{g_2}{2!}z^2 + \dots \right)^k$$

je tedy nejmenší mocnina po roznásobení z^k . Z toho plyne, že koeficient u z^n můžeme hledat roznásobováním pouze prvních n závorek, vyšší mocniny na něj nemají vliv.

Vezměme si znovu k -tý člen součinné řady, tj. člen

$$\frac{f_k}{k!} \cdot \left(\frac{g_1}{1!}z + \frac{g_2}{2!}z^2 + \dots \right)^k = \frac{f_k}{k!} \cdot \underbrace{\left(\frac{g_1}{1!}z + \frac{g_2}{2!}z^2 + \dots \right) \cdot \left(\frac{g_1}{1!}z + \frac{g_2}{2!}z^2 + \dots \right) \cdots \left(\frac{g_1}{1!}z + \frac{g_2}{2!}z^2 + \dots \right)}_{k\text{-krát}}.$$

Aby v nějakém členu po roznásobení závorek vzniklo z^n , musí se $\forall j \in \hat{k}$ mezi sebou násobit členy (j -tý člen pochází z j -té závorky)

$$\frac{g_{l_j}}{l_j!} z^{l_j},$$

pro něž platí

$$\sum_{j=1}^k l_j = 1$$

a samozřejmě $l_j \geq 1$. Koeficient u z^n vznikne jako součet součinů přes všechny možné výběry členů v jednotlivých závorkách. Tento koeficient je tedy roven

$$\tilde{h}_n = \underbrace{\sum_{k=1}^n}_{\text{suma přes } n \text{ prvních členů}} \frac{f_k}{k!} \cdot \underbrace{\sum_{\substack{l_j \geq 1, j \in \hat{k} \\ \sum l_j = n}} \frac{g_{l_1}}{l_1!} \cdot \frac{g_{l_2}}{l_2!} \cdots \frac{g_{l_k}}{l_k!}}_{\text{koeficient vzniklý z } k\text{-tého členu}}.$$

Podle definice EGF je

$$(a_n)_{n=0}^\infty \xrightarrow{EGF} \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} z^n,$$

takže můžeme shrnout

$$(h_n)_{n=0}^\infty = \left(n! \tilde{h}_n\right)_{n=0}^\infty \xrightarrow{EGF} F(G(z)).$$

Nyní dosadíme $h_n = n! \tilde{h}_n$ a použijeme rovnost

$$\frac{n!}{l_1! l_2! \cdots l_k!} = \binom{n}{l_1} \binom{n-l_1}{l_2} \binom{n-l_1-l_2}{l_3} \cdots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-1} l_j}{l_k},$$

kterou lze snadno ověřit. Dostaneme tak konečně vyjádření koeficientů posloupnosti příslušné generující funkci $F(G(z))$:

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{f_k}{k!} \sum_{\substack{l_j \geq 1, j \in \hat{k} \\ \sum l_j = n}} \binom{n}{l_1} \binom{n-l_1}{l_2} \binom{n-l_1-l_2}{l_3} \cdots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-1} l_j}{l_k} \prod_{j=1}^k g_{l_j}. \quad (3.2.5)$$

Příklad. Vraťme se nyní k poznámce 3.2.14. Uvažujme mocninné řady

$$\begin{aligned} (1)_{n=0}^\infty &\xrightarrow{EGF} F(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} z^n = e^z, \\ (1)_{n=1}^\infty &\xrightarrow{EGF} G(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} z^n = e^z - 1. \end{aligned}$$

Potom exponenciální generující funkce $F(G(z)) = e^{e^z-1}$ má podle (3.2.5) koeficienty

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{\substack{l_j \geq 1, j \in \hat{k} \\ \sum l_j = n}} \binom{n}{l_1} \binom{n-l_1}{l_2} \binom{n-l_1-l_2}{l_3} \cdots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-2} l_j}{l_{k-1}},$$

tedy přímo Bellova čísla. Tím jsme alternativním způsobem dokázali větu 3.2.13.

Příklad 3.2.15. Určete $d_n :=$ počet 2-regulárních⁴ grafů na n vrcholech.

Najdeme jednoduchý rekurentní vztah pro výpočet d_n . Řešení se bude skládat ze tří kroků:

1. Z kombinatorické úvahy sestavíme složitý explicitní vzorec pro výpočet d_n .
2. Vzorec upravíme na tvar odpovídající tvaru členu posloupnosti, která přísluší určité složené EGF, a tuto EGF vypočítáme.
3. Podobně jako u Bellových čísel z EGF odvodíme rekurentní vztah.

Krok 1. Lze si snadno rozmyslet, že 2-regulární graf je právě takový, který vznikne jako disjunkttní sjednocení určitého počtu kružnic.

Nejprve nalezneme počet grafů na n vrcholech, které jsou disjunkttním sjednocením právě k kružnic. Každá kružnice má minimálně 3 vrcholy. Konkrétně tedy máme kružnice délek $l_1, l_2, \dots, l_k$, přičemž $\sum_{j=1}^k l_j = n$ a $(\forall j \in \hat{k}) (l_j \geq 3)$.

Chceme-li spočítat počet různých kružnic na l vrcholech $v_1, \dots, v_l$, zafixujeme vrchol v_1 , z něhož kružnice začíná a do nějž se opět vrací. Ostatní vrcholy mohou být v libovolné z $(l-1)!$ permutací. Na orientaci kružnice však nezáleží, takže na konkrétních l vrcholech existuje $\frac{(l-1)!}{2}$ různých kružnic.

Počet grafů na n vrcholech, které jsou sjednocením právě k kružnic, tedy je

$$\frac{1}{k!} \sum_{\substack{l_j \geq 3, j \in \hat{k} \\ \sum l_j = n}} \binom{n}{l_1} \binom{n-l_1}{l_2} \binom{n-l_1-l_2}{l_3} \cdots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-1} l_j}{l_k} \cdot \frac{(l_1-1)!}{2} \cdot \frac{(l_2-1)!}{2} \cdots \frac{(l_k-1)!}{2},$$

⁴ $G = (V, E)$ je r -regulární, právě když $(\forall v \in V) (d_G(v) = r)$.

přičemž kombinační čísla odpovídají počtu způsobů výběru l_j vrcholů pro jednotlivé kružnice a zlomek $\frac{1}{k!}$ vyjadřuje, že nezávisí na pořadí těchto kružnic. d_n je pak součet uvedených výrazů pro všechna přípustná k :

$$d_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{l_j \geq 3, j \in \hat{k} \\ \sum l_j = n}} \binom{n}{l_1} \binom{n-l_1}{l_2} \binom{n-l_1-l_2}{l_3} \dots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-1} l_j}{l_k} \cdot \prod_{j=1}^k \frac{(l_j-1)!}{2}.$$

Krok 2. Abychom dostali vzorec pro d_n do tvaru odpovídajícího n -tému koeficientu řady s EGF, definujeme

$$g_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!}{2} & \text{pro } n \geq 3, \\ 0 & \text{pro } n \in \{0, 1, 2\}. \end{cases}$$

Potom

$$d_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{\substack{l_j \geq 1, j \in \hat{k} \\ \sum l_j = n}} \binom{n}{l_1} \binom{n-l_1}{l_2} \binom{n-l_1-l_2}{l_3} \dots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-1} l_j}{l_k} \cdot \prod_{j=1}^k g_{l_j},$$

protože

1. Je jasné, že je-li $k > \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, tak jedno z $l_1, \dots, l_k$ bude $l_j < 3$, takže $g_{l_j} = 0$. Lze tedy brát k od jedné až do n .
2. Protože $l_j < 3 \Rightarrow g_{l_j} = 0$, není nutné uvažovat podmínku $l_j \geq 3$.

Z tvaru d_n , který již odpovídá (3.2.5), jsme schopni vyjádřit členy posloupností (f_n) , (g_n) , které přísluší řadám s generujícími funkcemi F a G . Připomeňme však, že vztah (3.2.5) platí pouze pro $n \geq 1$ a na nultý koeficient $d_0 = f_0$ zde dosud nemáme žádnou podmínku.

$(d_n)_{n=0}^\infty$ tedy přísluší exponenciální generující funkci, která vznikne složením

$$(f_n)_{n=0}^\infty = (1)_{n=0}^\infty \xrightarrow{EGF} F(z) = e^z,$$

přičemž jsme definovali $d_0 = f_0 = 1$, a

$$(g_n)_{n=0}^\infty \xrightarrow{EGF} G(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{g_n}{n!} z^n.$$

Zbývá vypočítat $G(z)$. Dosadíme z definice (g_n) a dostaneme

$$G(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{g_n}{n!} z^n = \sum_{n=3}^\infty \frac{(n-1)!}{2n!} z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^\infty \frac{z^n}{n} =$$

... derivací této řady je však geometrická řada, jejíž součet známe ...

$$= \frac{1}{2} \int_0^z \left(\underbrace{\sum_{n=3}^\infty t^{n-1}}_{=t^2 \frac{1}{1-t} = -1-t+\frac{1}{1-t}} \right) dt = \frac{1}{2} \left(-z - \frac{z^2}{2} - \ln|1-z| \right).$$

Generující funkce příslušná $(d_n)_{n=0}^\infty$ je tedy

$$F(G(z)) = e^{-\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} - \frac{1}{2} \ln|1-z|} = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \cdot e^{-\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}}.$$

Krok 3. Nyní z $F(G(z))$ získáme rekurentní vztah pro d_n stejně jako u Bellových čísel. Platí rovnost

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{d_n}{n!} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \cdot e^{-\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}},$$

kterou zlogaritmujeme a zderivujeme:

$$\begin{aligned} \ln \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n &= -\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} - \frac{1}{2} \ln(1-z), \\ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(n-1)!} z^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n} &= -\frac{1}{2} - \frac{z}{2} + \frac{1}{2(1-z)} = -\frac{1}{2} - \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} z^n. \end{aligned}$$

Opět vynásobíme jmenovatelem a následně použijeme vzorec pro součin mocninných řad:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(n-1)!} z^{n-1} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=2}^{\infty} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{k!} z^{n+2}. \end{aligned}$$

Nakonec porovnáme koeficienty u z^{n-1} :

$$\begin{aligned} \frac{d_n}{(n-1)!} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{d_k}{k!}, \\ d_n &= \frac{(n-1)!}{2} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{d_k}{k!}. \end{aligned}$$

Výsledek si můžeme ověřit na prvních čtyřech členech posloupnosti. Z hlavy víme

$$d_0 = 1, d_1 = d_2 = 0, d_3 = 1, d_4 = 3$$

a podle našeho rekurentního vztahu je

$$d_4 = \frac{3!}{2} \left(\frac{d_0}{0!} + \frac{d_1}{1!} \right) = \frac{6}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{0}{1} \right) = 3.$$

Literatura

- [1] Edita Pelantová: *Základy teorie grafů*. FJFI ČVUT, přednášky, 2005.
- [2] Vladan Majerech: *Úvod do složitosti a NP-úplnosti*. MFF UK, 1999.
- [3] J. A. Bondy, U. S. R. Murty: *Graph Theory With Applications*. Elsevier Science Publishing, New York, 1982.
- [4] Reinhard Diestel: *Graph Theory III* (electronic edition 2005). Springer-Verlag Heidelberg, New York, 2005.
- [5] Jiří Mikyška: *Pokročilé partie numerické lineární algebry*. FJFI ČVUT, přednášky, 2005.
- [6] Igor Vajda: *Teorie informace*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004.